

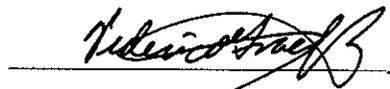
TESIS defendida por  
David Alberto Rivas Camargo  
y aprobada por el siguiente comité:



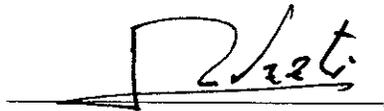
Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes  
Director del comité



Dr. Miguel Fernando Lavín Peregrina  
Miembro del comité



Dr. Federico Graef Ziehl  
Miembro del comité



M.C. Rogelio Vázquez González  
Miembro del comité



Dr. Silvio Guido Marinone Moschetto  
Jefe del Departamento de  
Oceanografía Física



Dr. Luis Delgado Argote  
Director de Estudios de Posgrado

22 de abril de 2002

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR  
DE ENSENADA



DIVISIÓN DE OCEANOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFÍA FÍSICA

ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL EFECTO DE LA TOPOGRAFÍA SOBRE LA  
DINÁMICA DE CORRIENTES DE GRAVEDAD

TESIS  
que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener  
el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

DAVID ALBERTO RIVAS CAMARGO

Ensenada, Baja California, México. Abril de 2002.

---

RESUMEN de la tesis de David Alberto Rivas Camargo, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California, México. Abril de 2002.

ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL EFECTO DE LA TOPOGRAFÍA SOBRE LA DINÁMICA DE CORRIENTES DE GRAVEDAD.

Resumen aprobado por:



Dr. Oscar U. Velasco Fuentes  
Director de tesis

Se realizó una investigación experimental en laboratorio para determinar la estabilidad y evolución de corrientes de gravedad bajo la influencia de topografía del fondo. Se realizaron experimentos con diferentes inclinaciones del fondo y diferentes contrastes de densidad. Se emplearon dos técnicas en la generación de la corriente: colapso gravitacional e inyección continua del fluido. El flujo fue visualizado con tinta y partículas, y grabado en video. Además se obtuvo información cuantitativa usando una técnica de análisis de imágenes de partículas. Se observó que la presencia del fondo inclinado estabiliza la corriente. En el caso del colapso gravitacional la corriente presenta meandros; cuando la inclinación del fondo es grande, los meandros crecen y llegan a formar remolinos, en cambio cuando la inclinación es pequeña el crecimiento de los meandros es inhibido. En el caso de la inyección continua la corriente crece sin mostrar inestabilidades inicialmente, pero cuando ya ha crecido lo suficiente y aparentemente se ha alejado de la influencia de la topografía, la corriente muestra inestabilidades. Mientras menor es la inclinación del fondo, la corriente tarda más en inestabilizarse.

Palabras clave: *Flujo de dos capas; balance geostrófico; inestabilidad.*

ABSTRACT of the thesis of David Alberto Rivas Camargo, presented as partial requirement to obtain the degree of MASTER OF SCIENCE in PHYSICAL OCEANOGRAPHY. Ensenada, Baja California, Mexico. April 2002.

EXPERIMENTAL STUDY OF THE TOPOGRAPHIC EFFECT ON THE  
DYNAMICS OF GRAVITY CURRENTS.

Laboratory experiments were carried out in order to determine both the stability and evolution of gravity currents under the influence of bottom topography. The experimental parameters varied were the inclination of the bottom and the density contrast. Two techniques were used for generating the current: gravitational collapse and continuous injection of fluid. The flow was visualized with dye and particles and recorded on video; quantitative information was obtained using particle tracking. It was observed that the presence of the inclined bottom stabilizes the current. Currents generated by gravitational collapse present meanders: when the bottom inclination is large the meanders grow and may form eddies; in contrast, when the inclination is small the growth of the meanders is inhibited. Currents generated by continuous injection widen without showing instabilities initially; but as they apparently get away from the influence of the topography, they start to develop instabilities.

Key words: *Two-layer flow; geostrophic balance; instability.*

---

DEDICATORIA

*A Rocío*

---

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes, por su excelente asesoría.

Al comité evaluador de esta tesis, formado por el Dr. Miguel Fernando Lavín Peregrina, el Dr. Federico Graef Ziehl, y el M.C. Rogelio Vázquez González, por sus valiosas sugerencias.

Al Prof. GertJan van Heijst, por su asesoría durante mi estancia en la Universidad Tecnológica de Eindhoven, Países Bajos.

Al Dr. José Luis Ochoa de la Torre, por la aportación que hizo a esta tesis.

Al CICESE, por todo su apoyo durante mi maestría, ¡y vaya que fue mucho!

Al CONACyT, por su apoyo económico mediante la beca-crédito de maestría y la beca del proyecto 28137-T.

A NUFFIC y la fundación *Jan Tinbergen* de Holanda, por su apoyo económico para realizar mi estancia en la Universidad Tecnológica de Eindhoven.

A Luis Zavala Sansón, por sus excelentes consejos.

A Omar Quetzalcóatl Gutiérrez Gutiérrez, por sus valiosas sugerencias y discusiones.

A mis compañeros y amigos del Departamento de Oceanografía Física, a quienes no menciono por nombre en este momento por temor a olvidar mencionar a alguno, ¡gracias por haberme hecho tan grata mi estancia en Ensenada!

---

# Índice General

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Teoría</b>	<b>6</b>
<b>III</b>	<b>Método</b>	<b>13</b>
	III.1 Dispositivo experimental . . . . .	13
	III.2 Condiciones iniciales . . . . .	15
<b>IV</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>18</b>
	IV.1 Corrientes generadas por colapso . . . . .	18
	IV.1.1 Visualización . . . . .	18
	IV.1.2 Mediciones . . . . .	27
	IV.2 Corrientes generadas por inyección continua . . . . .	34
	IV.2.1 Visualización . . . . .	34
	IV.2.2 Mediciones . . . . .	41
<b>V</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>Apéndices</b>		
<b>A</b>	<b>Conservación de masa en un problema de ajuste geostrófico</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Mediciones del campo de velocidad</b>	<b>56</b>
	<b>Referencias</b>	<b>61</b>

---

# Índice de Figuras

Figura	Página	
1	Esquema del perfil transversal de una corriente generada mediante el colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido flotante $\rho_1 < \rho_2$ . El estado inicial de la corriente es el reposo (arriba), mientras que el estado final es el balance geostrófico (abajo). $F_{Co}$ y $F_{GP}$ denotan la fuerza de Coriolis y la fuerza del gradiente de presión, respectivamente. El vector del flujo resultante está denotado por $\odot$ (simboliza un vector que sale perpendicularmente de la hoja). . . . .	7
2	Soluciones numéricas del espesor $h$ (abajo) y de la velocidad $v$ (arriba) para el caso de una corriente con $f = 1.68 \text{ s}^{-1}$ , $m = 1$ , para dos casos diferentes: $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ (línea discontinua), y $g' = 5 \text{ cm/s}^2$ (línea continua). El área trasversal es de $8.7 \text{ cm}^2$ en ambos casos. . . . .	10
3	Solución numérica de la función desplazamiento $D$ del ejemplo de la Fig. 2. La línea discontinua corresponde a $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , mientras que la línea continua corresponde a $g' = 5 \text{ cm/s}^2$ . . . . .	11
4	Vorticidad potencial $q$ del ejemplo de la Fig. 2. Para $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ se tiene la línea discontinua y para $g' = 5 \text{ cm/s}^2$ se tiene la línea continua. . . . .	11
5	Esquema del perfil transversal del espesor de una corriente generada mediante la liberación continua a partir de una fuente lineal circular. $\rho_1 < \rho_2$ . . . . .	12
6	Dispositivo experimental. El sistema rota a una velocidad angular $\Omega$ . . . . .	13
7	Técnica de generación de una corriente de gravedad mediante un colapso. a) El fluido está aislado del fluido ambiente, confinado por un cilindro sin fondo. b) El fluido ha sido liberado y se ajusta geostróficamente. . . . .	14
8	Técnica de generación de una corriente de gravedad mediante inyección continua de fluido. Hay una fuente anular donde se libera el fluido de la corriente gradual y constantemente. . . . .	15
9	Condiciones iniciales de los experimentos de la técnica del colapso. Los círculos indican los valores utilizados en el presente trabajo ( $L_0 = 4.6 \text{ cm}$ , $5.0 \text{ cm}$ , $1 \leq g' \leq 5 \text{ cm s}^{-2}$ , $f = 1.68 \text{ s}^{-1}$ , $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ), mientras que los asteriscos representan valores utilizados por Griffiths y Linden (1982) para $\alpha = 90^\circ$ (pared vertical). . . . .	16

10	Condiciones iniciales de los experimentos de la técnica de inyección continua. Los círculos indican los valores utilizados en el presente trabajo, mientras que los asteriscos junto con la línea discontinua representan el rango utilizado por Griffiths y Linden (1981) para $\alpha = 90^\circ$ (pared vertical). . . . .	17
11	Ancho de la corriente contra el radio de deformación (ambos en cm) en 45 experimentos de la técnica de colapso para $t = 8T$ , donde $T = 7.5$ s. Los círculos corresponden a $\alpha = 30^\circ$ (a), los asteriscos a $\alpha = 45^\circ$ (b), y los cuadros a $\alpha = 60^\circ$ (c). En los dos primeros recuadros $L_0 = 5$ cm, mientras que en el tercero $L_0 = 4.6$ cm. En cada caso se ajustó una línea recta a los datos. Los ajustes presentan un coeficiente de correlación de alrededor de 0.79 y un error estándar de estimación de alrededor de 1.1 cm. La líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 95%, donde el error estimado en la pendiente es $\sigma_m \approx \pm 0.6$ . . . . .	19
12	Valor del coeficiente $c$ , de la ecuación (14), contra el tiempo $t$ (en periodos de rotación, para los experimentos de colapso con $\alpha = 30^\circ$ (círculos), $45^\circ$ (asteriscos), $60^\circ$ (cuadros). . . . .	20
13	Esquema de la vista de planta de la corriente. Se observa la longitud de arco recorrida por una partícula desde la posición a $t = t_0$ hasta la posición a $t = t_0 + \delta t$ . . . . .	22
14	Velocidad geostrófica contra velocidad medida (ambas en cm/s) en 15 experimentos de la técnica de colapso, para $t = 8T$ , donde $T = 7.5$ s. Los círculos corresponden a $\alpha = 30^\circ$ , los asteriscos a $\alpha = 45^\circ$ , y los cuadros a $\alpha = 60^\circ$ . El ajuste presenta un coeficiente de correlación de 0.83 y un error estándar de estimación de 0.17 cm/s. La líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 95%, donde el error estimado en la pendiente es $\sigma_m = \pm 0.3$ . . . . .	22
15	Valor del coeficiente $c$ , de la ecuación (18), contra el tiempo $t$ (en periodos de rotación) en 15 experimentos de la técnica de colapso. . . . .	23
16	Comparación de tres experimentos diferentes con $F_0 = 5 (\pm 0.7)$ . a) $\alpha = 60^\circ$ , $F_0 = 4.3$ ; b) $\alpha = 45^\circ$ , $F_0 = 4.4$ ; c) $\alpha = 30^\circ$ , $F_0 = 5.7$ . . . . .	24
17	Comparación de tres experimentos diferentes con $\alpha = 60^\circ$ . a) $F_0 = 8.6$ ; b) $F_0 = 2.9$ ; c) $F_0 = 1.7$ . En cada caso los recuadros son para $t = 8T$ , $16T$ , $24T$ , respectivamente. . . . .	25

18	Longitud de onda (normalizada con el radio de Rossby) de las inestabilidades contra el número de Froude en 45 experimentos de colapso. Los puntos indican los datos con $\alpha = 30^\circ$ ; los círculos indican los datos con $\alpha = 45^\circ$ ; las cruces indican los datos con $\alpha = 60^\circ$ . . . . .	26
19	Geometría del flujo en un experimento con $\alpha = 30^\circ$ , $F_0 = 9.4$ ( $g' = 3 \text{ cm/s}^2$ ), a cinco tiempos diferentes, $t = 4 T$ (a) y $t = 20 T$ (b), $36 T$ (c). Las cruces denotan puntos silla, mientras que los círculos denotan espirales o centros. Se muestran además líneas de corriente. $S_1$ indica un corte transversal donde se interpoló la velocidad y la vorticidad, los perfiles se muestran en la Fig. 21. .	28
20	Geometría del flujo en un experimento con $\alpha = 60^\circ$ , $F_0 = 8.6$ ( $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ ), a cinco tiempos diferentes, $t = 4 T$ (a), $20 T$ (b), $36 T$ (c). Las cruces denotan ensilladuras, mientras que los círculos denotan espirales o centros. Se muestran además líneas de corriente. $S_2$ indica un corte transversal donde se interpoló la velocidad y la vorticidad, los perfiles se muestran en la Fig. 22.	29
21	Perfiles de velocidad y vorticidad interpolados a lo largo del corte $S_1$ , mostrado en la Fig. 19. $U$ es la magnitud de la velocidad, $\omega$ es la vorticidad, y $r$ es la distancia radial. . . . .	30
22	Perfiles de velocidad y vorticidad interpolados a lo largo del corte $S_2$ , mostrado en la Fig. 20. $U$ es la magnitud de la velocidad, $\omega$ es la vorticidad, y $r$ es la distancia radial. . . . .	31
23	Perfiles de vorticidad potencial $q$ correspondientes al ejemplo de la Fig. 22, para $t = 4 T$ (a), $20 T$ (b). En $r > 13 \text{ cm}$ (aproximadamente) el perfil del espesor de la corriente fue aproximado mediante una función lineal (línea continua), y mediante una función cuadrática (línea discontinua). . . . .	33
24	Valores adimensionales del ancho $L^*$ (izquierda) y del espesor $h^*$ (derecha) de la corriente como función del tiempo adimensional $t^*$ , en 11 experimentos en los que $\alpha = 75^\circ$ (a), $60^\circ$ (b), $45^\circ$ (c), y $g' = 1$ (cuadros), 2 (puntos), 3 (asteriscos), 4 (cruces), 5 (círculos) $\text{cm/s}^2$ . En cada caso se ajustó una recta; la pendiente de esta recta para $L^*$ fue de alrededor de 0.4, mientras que para $h^*$ fue de alrededor de 0.6. . . . .	36
25	Número de Froude, $F$ , como función del tiempo adimensional $t^*$ , en 11 experimentos en los que $\alpha = 75^\circ$ (a), $60^\circ$ (b), $45^\circ$ (c), y $g' = 1$ (cuadros), 2 (puntos), 3 (asteriscos), 4 (cruces), 5 (círculos) $\text{cm/s}^2$ . La recta ajustada en cada caso tiene una pendiente de alrededor de 0.5. . . . .	37

26	Velocidad geostrófica contra velocidad medida en 11 experimentos de la técnica de inyección continua a tres tiempos diferentes ( $t = 48 T, 96 T, 144 T$ ), todos estos datos están graficados. Los asteriscos corresponden a $\alpha = 45^\circ$ , los círculos a $\alpha = 60^\circ$ , y los cuadros a $\alpha = 75^\circ$ . Se ajustó una línea recta a los datos, de acuerdo al criterio de los cuadrados mínimos. El ajuste presenta un coeficiente de correlación de 0.62 y un error estándar de estimación de 0.29 cm/s. Las líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 68%, donde el error estimado en la pendiente es $\sigma_m = \pm 1.1$ . . . . .	38
27	Velocidad geostrófica contra velocidad medida (ambas en cm/s) en 11 experimentos de la técnica de inyección continua, para $t = 48T$ (a), $96T$ (b), $144T$ (c), y donde $T = 7.5$ s. Los ajustes presentan coeficientes de correlación de 0.45 (a), 0.55 (b) y 0.90 (c), y un error estándar de estimación de alrededor de 0.26 cm/s. Las líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 68%, donde el error estimado en la pendiente es $\sigma_m \approx \pm 1.9$ . . . . .	38
28	Número de Froude crítico (en el cual las inestabilidades de la corriente comienzan a ser evidentes) $F_c$ contra el tiempo adimensional $t^*$ , en 11 experimentos en los que $\alpha = 75^\circ$ (cuadros), $60^\circ$ (círculos), $45^\circ$ (asteriscos). . . . .	39
29	Longitud de onda adimensional $\lambda/L_c$ contra el número de Froude crítico (en el cual las inestabilidades de la corriente comienzan a ser evidentes) $F_c$ , en 11 experimentos en los que $\alpha = 75^\circ$ (cuadros), $60^\circ$ (círculos), $45^\circ$ (asteriscos). Los puntos negros indican algunos valores representativos del caso $\alpha = 90^\circ$ (pared vertical) reportados por Griffiths y Linden (1981). . . . .	40
30	Campo de velocidad de una corriente generada por inyección continua con $\alpha = 30^\circ$ , $g' = 1$ cm/s <sup>2</sup> , para $t = 64 T$ . . . . .	41
31	Ajuste de un trazador cúbico a los datos de magnitud de velocidad $U$ contra la distancia radial $r$ en un experimento usando la técnica de inyección continua con $\alpha = 30^\circ$ , $g' = 1$ cm/s <sup>2</sup> , para $t = 64 T$ . El ajuste presenta un coeficiente de correlación de 0.97 y un error estándar de estimación de 0.05 cm/s. El perfil de la corriente ha sido dividido en tres regiones, $A, B, C$ , las cuales corresponden a las regiones mostradas en la Fig. 32. . . . .	42
32	Esquema del perfil transversal del flujo, en el cual se definen tres regiones: Una zona en contacto con la topografía ( $A$ ), el fluido de dos capas ( $B$ ), y el fluido ambiente ( $C$ ). . . . .	42
33	Perfil de velocidad para tres experimentos diferentes con $g' = 1$ cm/s <sup>2</sup> , a $t = 192 T$ , y con $\alpha = 30^\circ$ (a), $45^\circ$ (b), $60^\circ$ (c). . . . .	44

Figura	Página	
34	Posición ( $r$ ) del máximo del perfil de velocidad contra el tiempo (en periodos de rotación, $T$ ) en cuatro experimentos, con $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , y con $\alpha = 75^\circ$ (asteriscos), $60^\circ$ (cuadros), $45^\circ$ (círculos), $30^\circ$ (cruces). . . . .	45
35	Perfiles de velocidad y vorticidad a tres tiempos diferentes, $t = 64 T$ , $128 T$ , $192 T$ , en un experimento con $\alpha = 45^\circ$ , $g' = 3 \text{ cm/s}^2$ . . . . .	46
36	Perfil de vorticidad potencial $q$ correspondiente al ejemplo de la Fig. 35, para $t = 64 T$ . En $r > 13 \text{ cm}$ (aproximadamente) el perfil del espesor de la corriente fue aproximado mediante una función lineal (línea continua), y mediante una función cuadrática (línea discontinua). . . . .	47
37	Geometría del flujo en un experimento con $\alpha = 75^\circ$ , $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , a tres tiempos diferentes, $t = 128 T$ (a), $256 T$ (b), $384 T$ (c). . . . .	48
38	Perfiles de velocidad y vorticidad a tres tiempos diferentes, $t = 128 T$ (a), $256 T$ (b), $384 T$ (c), en un experimento con $\alpha = 75^\circ$ , $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ . . . . .	49
39	Esquema del perfil transversal de una corriente generada mediante el colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido flotante $\rho_1 < \rho_2$ . El estado inicial de la corriente es el reposo (arriba), mientras que el estado final es el ajuste geostrófico (abajo). La región sombreada en ambos estados simboliza el área transversal de una columna diferencial de fluido. . . . .	54
40	Esquema del seguimiento de partículas mediante PTV (Van der Plas, 2000). . . . .	56
41	Algoritmo de PTV. . . . .	57
42	Esquema del proceso de correlación utilizado en PTV. a) El círculo negro simboliza una partícula al tiempo $t_0$ , mientras que los círculos blancos partículas al tiempo $t_0 + \delta t$ . b) Todas las partículas a $t = t_0 + \delta t$ que se encuentren dentro de una distancia máxima de correlación ( $d_{max}$ ), definida de antemano, son correlacionadas con la partícula a $t = t_0$ . c) Las demás partículas son eliminadas de la correlación. d) Se estima la posición que tendrá la partícula a $t = t_0 + \delta t$ , mediante $\mathbf{x}_{t_0+\delta t} = \mathbf{x}_{t_0} + \mathbf{u}_0 \delta t$ (donde $\mathbf{x}_{t_0}$ es la posición de la partícula a $t = t_0$ , $\mathbf{u}_0$ es una medida de su velocidad, y $\delta t$ es el avance en el tiempo), sólo se correlaciona la partícula que se encuentre más cercana a esta posición; en este ejemplo se correlacionaron dos partículas, ya que se encuentran a la misma distancia de la posición estimada. e) Con base en otros criterios, como son la forma y el brillo de la partícula "candidata", se selecciona la partícula más probable a ser la indicada. f) La distancia entre la partícula a $t_0$ y la correlacionada es la distancia estimada recorrida por la partícula en el $\delta t$ . . . . .	58

- 43 Ejemplo de un experimento usando la técnica de inyección continua, con  $\alpha = 30^\circ$  y  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ ,  $t = 64 T$ . El primer recuadro (a) muestra los datos originales con ruido, en la cual hay alrededor de seis vectores erróneos. El segundo recuadro (b) muestra los datos "límpios", sin los vectores erróneos. El tercer recuadro (c) muestra la velocidad interpolada en una malla regular. 59

# I Introducción

En la naturaleza ocurren con frecuencia corrientes que son flujos básicamente horizontales generados por una diferencia de densidad. Éstas son las llamadas *corrientes de gravedad* o *corrientes de densidad* (Simpson, 1997). Cuando se generan en regiones costeras, estas corrientes son parte fundamental del acoplamiento entre los ecosistemas oceánico y terrestre, ya que establecen los intercambios de sal, calor y nutrientes entre la costa y el mar abierto. Un ejemplo de este tipo de corrientes se presenta en la parte norte del Golfo de California, donde se ha confirmado la existencia de zonas localizadas de hundimiento de aguas superficiales las cuales son detectadas como corrientes de densidad (Lavín *et al.*, 1995). Otro ejemplo importante ocurre en el mar de Noruega en dos lados opuestos: la corriente del este de Groenlandia y la Corriente Costera de Noruega. La primera transporta agua polar menos densa hacia el sur a lo largo de la costa de Groenlandia, y la segunda fluye hacia el norte a lo largo de la costa oeste de Noruega. Similarmente, en el Mediterráneo, agua superficial menos densa del Atlántico fluye a lo largo de la costa del Norte de África y entra a través del estrecho de Gibraltar (Griffiths y Linden, 1982).

La importancia de estas estructuras ha motivado un gran número de estudios teóricos y experimentales. Chabert d'Hières *et al.* (1991) estudiaron la estabilidad de corrientes generadas en laboratorio, motivados por la Corriente de Argelia. Su experimento consistió en una corriente superficial que fluía adyacente a una pared vertical a partir de una fuente puntual. Ellos reportan tres rangos del *número de Burger*  $B_u = g'h_0/f^2L_0^2$  (donde  $g'$  es la gravedad reducida,  $f$  es el parámetro de Coriolis,  $h_0$  y  $L_0$  son los valores iniciales de la altura y el ancho de la corriente, respectivamente) en los que varía la estabilidad de la corriente. En el rango  $0.5 < B_u < 0.82$  la corriente es estable, cuando  $0.25 < B_u < 0.5$  se genera una perturbación en la corriente, y en el

---

rango  $0.15 < B_u < 0.25$  la corriente presenta numerosas perturbaciones (*meandros*), las cuales se desarrollan en tamaño y profundidad y se convierten en remolinos que pueden separarse de la corriente. Posteriormente, Gervasio (1997) realizó un análisis teórico de una corriente costera, también con la motivación de la Corriente de Argelia; realizó trabajo analítico y numérico. Para el primero utilizó un modelo *cuasigeostrófico* de *dos capas*, considerando una topografía variable (una función exponencial); para el segundo usó un modelo tridimensional de diferencias finitas con fondo variable (fondo plano, pendiente uniforme y fondo que variaba exponencialmente). Sus resultados numéricos muestran que la escala espacial de las inestabilidades corresponde correctamente a los resultados analíticos y a las observaciones de campo, y además señalan la importancia de la topografía en la dinámica de las corrientes. Por otro lado, Griffiths y Linden (1981) modelaron analítica y experimentalmente una corriente superficial que fluye a lo largo de una pared vertical. Para el estudio analítico usaron un modelo de dos capas en el cual cada capa tenía una velocidad horizontalmente uniforme y sólo se enfocaba en el corte vertical de la velocidad entre las dos capas (modelo de inestabilidad *baroclínica*). El modelo incluía además fricción con la frontera y en la interfaz entre las dos capas. Su experimento consistió en una corriente generada mediante inyección continua de fluido a partir de una fuente lineal colocada en la superficie libre y adyacente a una pared vertical. Realizaron series experimentales variando los parámetros  $\gamma = h_1/h_2$  (donde  $h_1$  y  $h_2$  son el espesor de la capa superior e inferior, respectivamente) y el *número de Froude*  $F_{ro} = f^2 L^2 / g' h_1$  (donde  $L$  es el ancho instantáneo de la corriente). En todos sus experimentos, se presentaron perturbaciones en la corriente que crecían e incluso se alejaban de la pared. El valor de  $F_{ro}$  en el cual las inestabilidades comenzaban a ser evidentes siempre fue mayor que el valor crítico calculado por el modelo,  $F_{ro} \approx 60F_c$  en la mayoría de los casos. Las longitudes de onda y las rapidezces de las perturbaciones de la corriente fueron consistentes con los valores obtenidos del modelo baroclínico, por lo

cual concluyen que la naturaleza de las inestabilidades es baroclínica, pero que para  $\gamma \approx 10^{-1}$  las inestabilidades pueden ser de naturaleza *barotrópica*. Posteriormente, Griffiths y Linden (1982) estudiaron el comportamiento de una corriente superficial adyacente a una pared vertical, generada mediante el colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido. Utilizaron diferentes valores de los parámetros  $\delta = h_1/H$  (donde  $H$  es el espesor total de la columna de agua, es decir, la suma de los espesores de ambas capas) y  $F = f^2 L_0^2 / g' h_0$  (donde  $L_0$  y  $h_0$  son los valores iniciales del ancho y el espesor de la capa superior, respectivamente). En todos los casos la corriente presentó inestabilidades. Tras comparar sus resultados de laboratorio con un modelo baroclínico de dos capas, concluyen que las inestabilidades son principalmente barotrópicas cuando  $F < 1$ , y principalmente baroclínicas cuando  $F \geq 4$ . Además, estos autores aseguran que el comportamiento de la corriente es idéntico al de un vórtice aislado (vea Chia *et al.*, 1982), por lo cual concluyen que la frontera rígida no tiene influencia significativa sobre la estabilidad de la corriente.

Griffiths *et al.* (1982) estudiaron el caso de una corriente con vorticidad potencial uniforme. Utilizaron un modelo numérico de *capa y media* (una de las dos capas es considerada infinitamente profunda) para representar una corriente de fondo que fluye sobre un plano horizontal. Sus resultados mostraron que la corriente siempre es inestable. Estos resultados fueron comparados con experimentos de laboratorio. Estos experimentos consistieron en una corriente superficial sin fronteras generada mediante un colapso gravitacional de un volumen fijo de agua. Variaron el parámetro  $L_0 = f W_0 / (g' H_0)$  (donde  $W_0$  y  $H_0$  son los valores iniciales de la mitad del ancho y del espesor de la corriente) en sus series experimentales. La corriente siempre se observó inestable. Para los casos con  $L_0 < 2$  las perturbaciones aparentan ser idénticas a las predichas por la inestabilidad (barotrópica) del modelo. Mientras que para los casos en que  $L_0 > 2$  la inestabilidad es atribuida a otro modo, el cual, concluyen estos autores,

no está determinado y se requiere de más estudios para determinar su naturaleza.

Dentro de los trabajos en los que se incluye la topografía del fondo se encuentra el de Thomas y Linden (1998). Ellos estudiaron en laboratorio una corriente superficial que fluía a partir de una fuente puntual sobre un fondo inclinado. Estos autores definieron la cantidad adimensional  $\Pi = q_0^{1/5} \Omega / g^{3/5}$  (donde  $q_0$  es el flujo de volumen descargado por la fuente, y  $\Omega$  es la velocidad angular). Observaron que, dependiendo del valor de este parámetro y del ángulo de inclinación de la topografía, la corriente se comporta de manera diferente, ya sea que fluya adyacente al fondo o que se separe de éste. Por otro lado, Choboter y Swaters (2000) utilizaron un modelo numérico de dos capas para estudiar el caso de una corriente de fondo que fluye sobre una pendiente uniforme. Eliminaron la parte barotrópica, y se enfocaron únicamente en la dinámica baroclínica. Compararon sus predicciones con datos de laboratorio, y concluyen que la inestabilidad baroclínica puede ser un proceso físico importante en la generación de inestabilidades que se forman en una corriente.

Los trabajos arriba mencionados han servido de motivación para este estudio, el cual tiene como objetivo el determinar experimentalmente los efectos de la topografía del fondo sobre la estabilidad y evolución de corrientes de gravedad superficiales. Es importante señalar que la configuración experimental utilizada para esta investigación aparentemente no ha sido usada en otros trabajos. Aunque las técnicas de generación de las corrientes aquí utilizadas son similares a las de Griffiths y Linden (1981, 1982), como ya se mencionó, estos autores utilizaron una pared vertical como “costa”. Thomas y Linden (1998) sí utilizaron una topografía como la usada en este trabajo (una pendiente uniforme), pero ellos se enfocaron en el avance de la cabeza de la corriente, mientras que esta investigación se enfoca en la dinámica del cuerpo de la corriente (no hay cabeza).

El resto de esta tesis está organizada como sigue. En el capítulo 2 se describe teoría relevante de dos casos específicos de corrientes de gravedad, como son una co-

riente generada mediante el colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido y mediante la inyección continua de fluido. Se muestran además las soluciones numéricas para el problema de ajuste geostrófico de una corriente de gravedad superficial sobre un fondo inclinado. El capítulo 3 contiene la descripción del dispositivo experimental así como del método utilizado en la generación de las corrientes mediante el colapso gravitacional y la inyección continua de fluido. Se menciona además el espacio de parámetros utilizado en los experimentos realizados. En el capítulo 4 se discuten los resultados experimentales. Se muestran los resultados de los experimentos de visualización, como son el crecimiento de la corriente, su velocidad, y la longitud de onda de las perturbaciones que se generan en ella. También se muestran los resultados de las mediciones del campo de velocidad. Se muestran la geometría del flujo para casos estables e inestables, así como los perfiles de velocidad, vorticidad relativa, y vorticidad potencial. En el último capítulo se plantean las conclusiones generales de esta tesis.

---

## II Teoría

Una corriente de gravedad es un flujo básicamente horizontal generado por una diferencia de densidad. Este tipo de corrientes avanza a una velocidad que depende en buena medida de dicho contraste de densidad. Tras la cabeza de la corriente puede existir una corriente media (cuerpo de la corriente) que varía lentamente en el tiempo y con la distancia a lo largo de la frontera. Tal flujo es de relevancia para muchas corrientes oceánicas (Griffiths, 1986).

Se puede producir una corriente a partir de un colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido flotante, inicialmente contenido en una región anular entre dos fronteras rígidas (una frontera inclinada y una pared vertical exterior), en la superficie de una capa inferior. Una vez que la pared vertical exterior contenedora ha sido removida, la capa superior (el fluido más ligero, agua dulce) se ajusta rápidamente bajo la influencia de las fuerzas de gravedad y de Coriolis. La fuerza de gravedad obliga a la capa superior a extenderse radialmente en la superficie, alejándose de la topografía (pared inclinada), hasta aproximadamente un radio de deformación en un tiempo aproximado de un periodo inercial. Por conservación de momento angular el fluido adquiere una circulación anticiclónica (en la configuración mostrada en la Fig. 1). La fuerza de Coriolis se opone a la fuerza del gradiente de presión, lo que resulta en un balance aproximadamente geostrófico (Griffiths y Linden, 1982).

Para obtener un modelo teórico del perfil de la corriente, considérese la capa inferior infinitamente profunda, y por lo tanto, inactiva (modelo de capa y media). En la Fig. 1 se muestra el perfil de la corriente en su condición de reposo, antes del colapso (arriba), y después de éste, cuando la corriente se encuentra en su condición de equilibrio, en balance geostrófico (abajo). Considerando que el fluido se mueve en columnas, cada una de éstas se desplaza hacia la derecha durante el colapso (de la condición

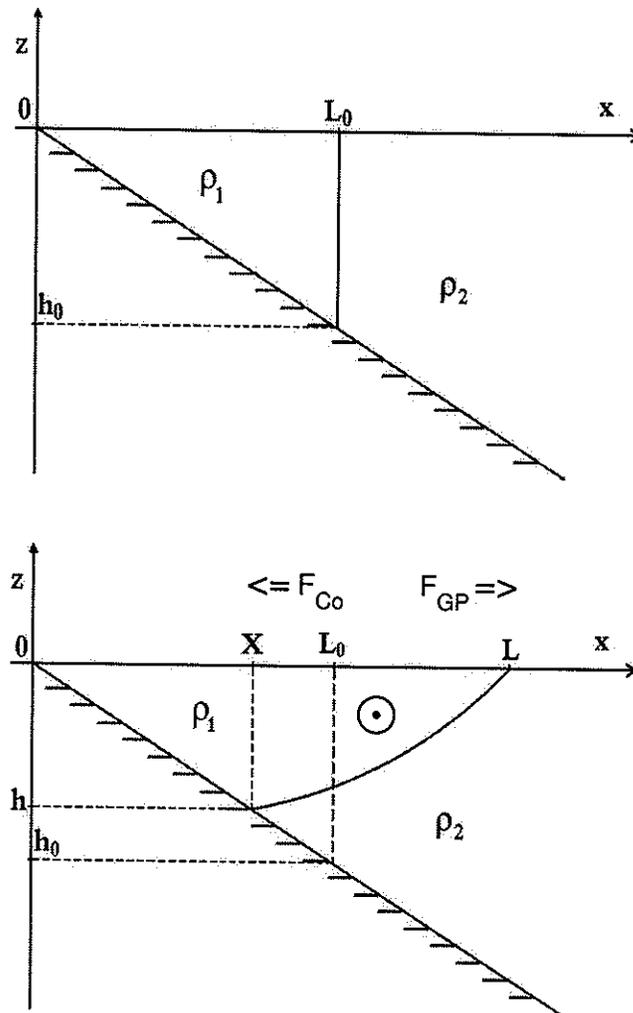


Figura 1: Esquema del perfil transversal de una corriente generada mediante el colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido flotante  $\rho_1 < \rho_2$ . El estado inicial de la corriente es el reposo (arriba), mientras que el estado final es el balance geostrófico (abajo).  $F_{Co}$  y  $F_{GP}$  denotan la fuerza de Coriolis y la fuerza del gradiente de presión, respectivamente. El vector del flujo resultante está denotado por  $\odot$  (simboliza un vector que sale perpendicularmente de la hoja).

de reposo a la condición de balance geostrófico). Las columnas con posición  $x < X$  permanecen en el mismo lugar, por lo tanto, el análisis es para  $x \geq X$ . Considerando que dos partículas no pueden ocupar el mismo lugar simultáneamente, las columnas no pueden “rebasarse” entre sí. Entonces, el desplazamiento de las columnas se realiza de acuerdo a

$$D_x = \frac{h}{m(D-x)} + 1, \quad (1)$$

donde  $D$  es una función de desplazamiento,  $h$  es el espesor final de la corriente,  $m = |\tan \alpha|$  ( $\alpha$  es el ángulo de inclinación del fondo con respecto a la horizontal); el subíndice  $x$  indica derivada con respecto a esa variable. Por lo tanto, la ecuación (1) representa la conservación de masa de las columnas de fluido. En el apéndice A se presenta la obtención de (1), y se especifica la relación entre  $x$  y  $D$  en los estados inicial y final.

Si no ocurre mezcla durante el colapso, y despreciando cualquier influencia de la fricción, la vorticidad potencial debe conservarse, esto es

$$\frac{\zeta + f}{h(x)} = \frac{f}{H(x-D)}, \quad (2)$$

donde  $f$  es el parámetro de Coriolis,  $\zeta$ ,  $h(x)$  y  $H(x-D)$  son la vorticidad relativa, el espesor instantáneo y el espesor inicial de la capa activa, donde éste último está dado por la pendiente, es decir,

$$H(x-D) = \begin{cases} m(x-D) & , x \leq L_0 \\ 0 & , x > L_0 \end{cases} \quad (3)$$

Ya que  $\zeta = \partial v / \partial x$ , entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f \left( \frac{h}{H} - 1 \right) \quad (4)$$

donde  $v$  es la velocidad de la corriente. Por otro lado, la relación geostrófica es

$$v = \frac{g'}{f} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5)$$

donde  $g'$  es la gravedad reducida. Así, tomando (1), (4) y (5), se tiene el sistema

$$D_x = \frac{h}{m(D-x)} + 1 \quad (6)$$

$$v_x = f \left( \frac{h}{m(x-D)} - 1 \right) \quad (7)$$

$$h_x = \frac{f}{g'} v, \quad (8)$$

el cual se resuelve numéricamente utilizando las condiciones “iniciales”

$$D(X) = 0 \quad (9)$$

$$v(X) = 0 \quad (10)$$

$$h(X) = mX \quad (11)$$

Se integra hasta que se cumpla que  $h(x) = 0$ , y el respectivo valor de  $x$  es el ancho de la corriente  $L$ .

La integración del sistema (6)-(8) cumple la condición

$$\int_X^L h(x) dx = \frac{1}{2} (h_0 L_0 - mX^2), \quad (12)$$

por lo cual se tiene un valor  $x < L_0$  que satisface esta condición (este valor es denotado precisamente por  $X$ ). En la Fig. 2 se muestra un ejemplo de las soluciones numéricas del sistema (6)-(8). En este ejemplo se presentan dos casos con gravedad reducida diferente,  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , y  $g' = 5 \text{ cm/s}^2$ . Se puede observar que  $L$  aumenta si  $g'$  aumenta, es decir, la corriente se extiende más para contrastes de densidad mayores, debido a que el gradiente de presión es mayor ( $f$  se está manteniendo constante). También se observa que  $v$  aumenta conforme  $x$  se incrementa. Por otro lado, la Fig. 3 muestra la función de desplazamiento  $D$ , la cual aumenta conforme  $x \rightarrow L$ , esto significa que las columnas de fluido aumentan su ancho conforme la corriente disminuye su espesor para conservar volumen. En la Fig. 4 se muestra el perfil de la vorticidad potencial, la cual decae monotónicamente de la “costa” (fondo inclinado) hacia  $x = L$ .

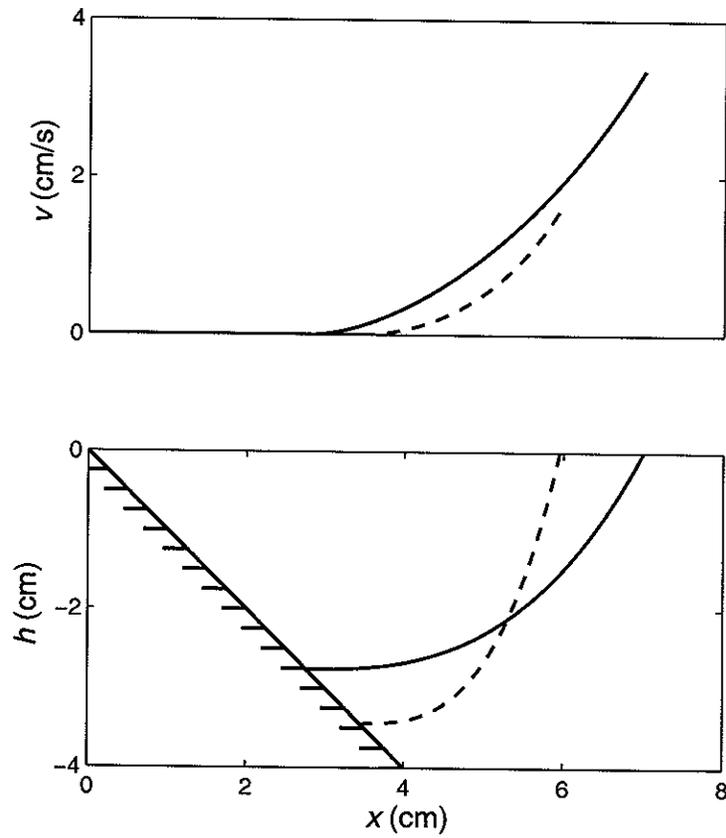


Figura 2: Soluciones numéricas del espesor  $h$  (abajo) y de la velocidad  $v$  (arriba) para el caso de una corriente con  $f = 1.68 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 1$ , para dos casos diferentes:  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$  (línea discontinua), y  $g' = 5 \text{ cm/s}^2$  (línea continua). El área transversal es de  $8.7 \text{ cm}^2$  en ambos casos.

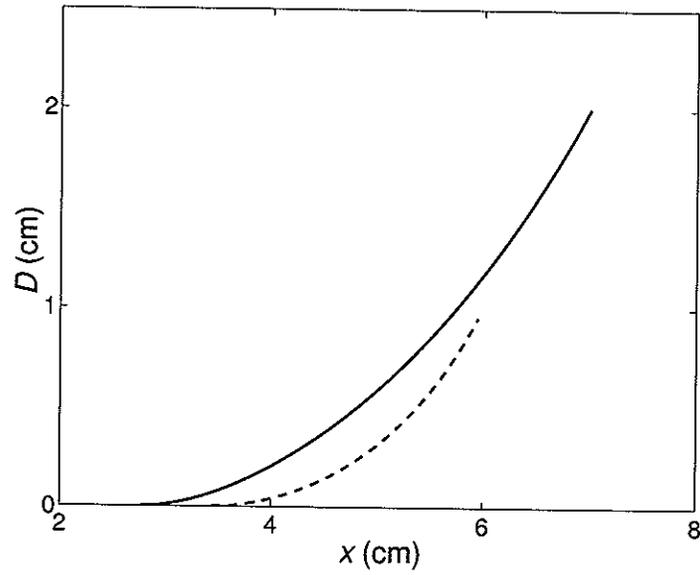


Figura 3: Solución numérica de la función desplazamiento  $D$  del ejemplo de la Fig. 2. La línea discontinua corresponde a  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , mientras que la línea continua corresponde a  $g' = 5 \text{ cm/s}^2$ .

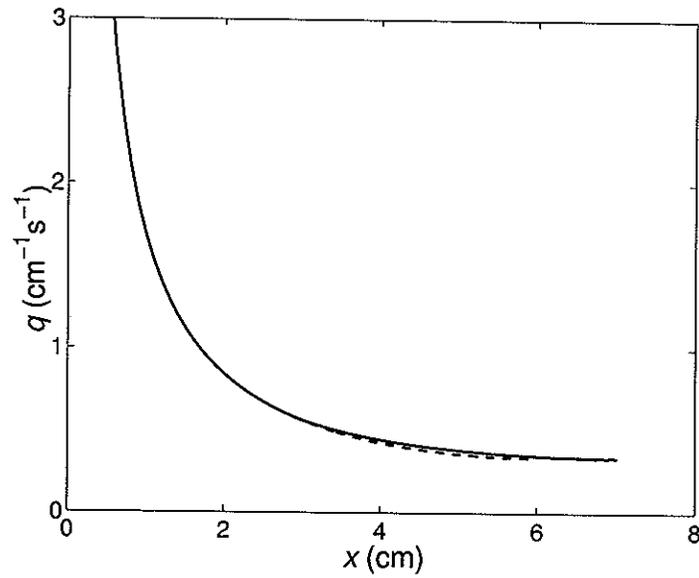


Figura 4: Vorticidad potencial  $q$  del ejemplo de la Fig. 2. Para  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$  se tiene la línea discontinua y para  $g' = 5 \text{ cm/s}^2$  se tiene la línea continua.

Por otro lado, otra estructura de un flujo puede ser obtenida liberando continuamente fluido a partir de una fuente lineal circular colocada en la superficie libre de una capa inferior estacionaria alrededor de una frontera inclinada. Después de abandonar la fuente, el fluido se mueve radialmente hacia fuera por la fuerza de gravedad. Para conservar su momento angular se establece un flujo azimutal anticiclónico (Para la configuración mostrada en la Fig. 5). La fuerza de Coriolis debida a este flujo azimutal se opone a la fuerza de gravedad y se alcanza un equilibrio. El fluido ambiente es de profundidad finita y además debe ser desplazado radialmente hacia afuera por el crecimiento de la corriente de frontera. Consecuentemente, se produce un flujo azimutal paralelo ciclónico en la capa inferior.

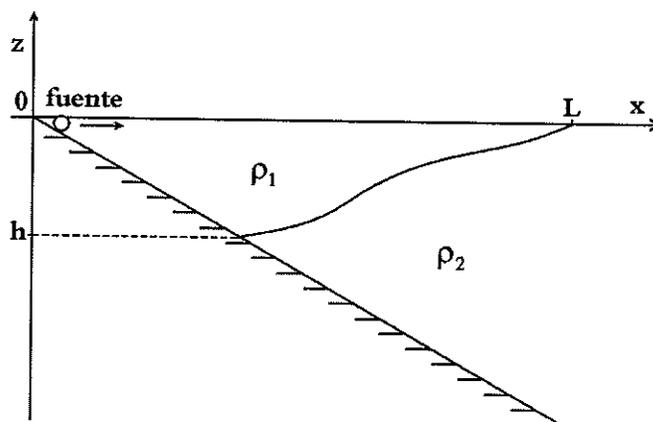


Figura 5: Esquema del perfil transversal del espesor de una corriente generada mediante la liberación continua a partir de una fuente lineal circular.  $\rho_1 < \rho_2$ .

La adición de fluido implica que el espesor y el ancho de la capa superior se incrementan con el tiempo, pero a pesar de esta dependencia temporal, en las razones de flujo utilizadas en este trabajo la corriente puede ser considerada como pasando a través de una serie de estados casi estacionarios en los cuales siempre se encuentra en equilibrio aproximadamente geostrofico.

### III Método

#### III.1 Dispositivo experimental

Los experimentos fueron realizados en un tanque circular de 96.5 cm de diámetro, montado sobre una mesa que rota a velocidad constante que es controlada por una computadora personal (Fig. 6). En el centro del tanque se colocó un cono truncado que fungía como topografía del fondo (con una pendiente  $\alpha$ ), como se muestra en la Fig. 7a. El tanque fue llenado hasta una cierta altura con una solución de agua y sal, de densidad  $\rho_2$ . Sobre el cono truncado se colocó un cilindro sin fondo; tanto el cono como el cilindro fueron colocados concéntricos al eje de rotación de la mesa. Posteriormente comenzó a rotar la mesa. Cuando el fluido contenido en el tanque alcanzó la rotación de

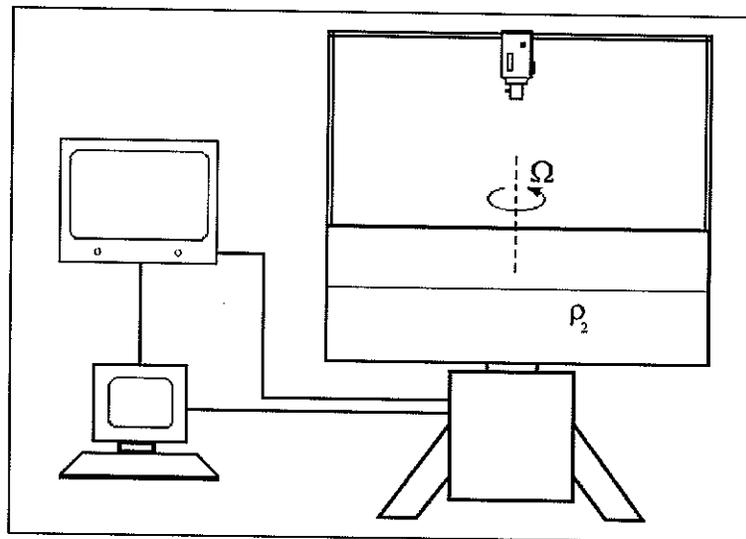


Figura 6: Dispositivo experimental. El sistema rota a una velocidad angular  $\Omega$ .

cuerpo sólido, se inyectó cuidadosamente agua dulce de densidad  $\rho_1$  sobre la superficie libre, en el espacio contenido entre el cono y el cilindro; dicha agua contenía fluoresceína para efectos de visualización (Fig. 7a). En algunos experimentos se utilizó también un poco de rodamina para ayudar a la visualización del flujo. No se presentó mezcla

apreciable durante el lapso en el que se agregó el agua. Se comenzó el experimento retirando verticalmente el cilindro que contenía el agua dulce, a fin de permitir que el fluido contenido se moviera bajo la influencia de las fuerzas de gravedad y Coriolis (Fig. 7b). También se agregaron partículas de parafina que flotaban sobre la superficie y se movían con la corriente que se establecía, sirviendo de trazadores. Cada experimento fue videograbado con una cámara *CCD* a color, que rotaba junto con la mesa.

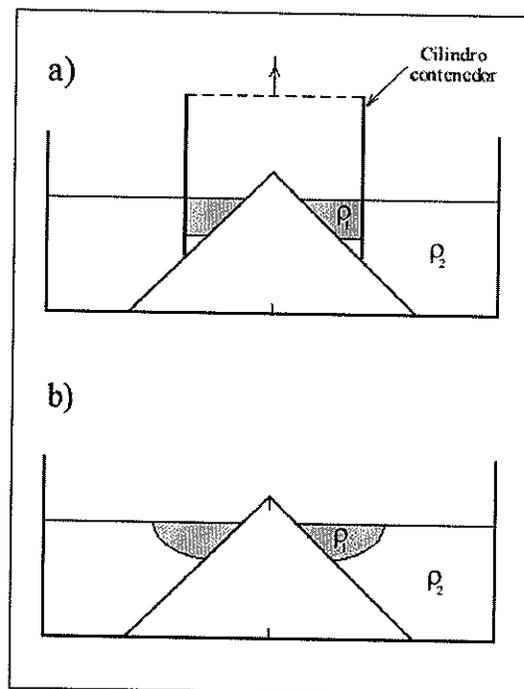


Figura 7: Técnica de generación de una corriente de gravedad mediante un colapso. a) El fluido está aislado del fluido ambiente, confinado por un cilindro sin fondo. b) El fluido ha sido liberado y se ajusta geostroficamente.

Los experimentos usando la técnica de inyección continua fueron realizados en el mismo dispositivo que los experimentos usando la técnica de colapso, pero en este caso la forma de generación de la corriente es diferente, por lo tanto no hay valores iniciales ni del espesor ni del ancho de la corriente. El agua dulce de densidad  $\rho_1$  fue liberada a partir de una fuente situada en la superficie libre y adyacente al cono truncado (Fig. 8).

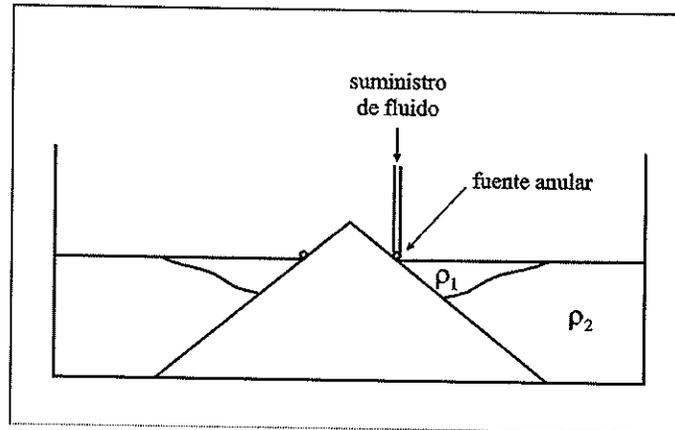


Figura 8: Técnica de generación de una corriente de gravedad mediante inyección continua de fluido. Hay una fuente anular donde se libera el fluido de la corriente gradual y constantemente.

Esta fuente consistió en un anillo tubular de 20 cm de diámetro con pequeños orificios y cubierto de espuma de plástico. Para visualizar la corriente se utilizó nuevamente fluoresceína. Se realizaron experimentos de visualización usando ambas técnicas. De estos experimentos se obtuvo información del ancho y del espesor de la corriente, así como del número de perturbaciones que se formaron a lo largo de la corriente.

Se midió el campo de la velocidad en los experimentos, se agregaron partículas a la corriente y se iluminaron, como éstas eran lo suficientemente pequeñas y con flotabilidad neutra siguieron el flujo muy cercanamente. Cada experimento fue videograbado usando una cámara CCD montada sobre la estructura de la mesa rotatoria para su posterior análisis. Se capturaron y analizaron imágenes digitales en una computadora para extraer datos cuantitativos del campo de velocidad utilizando *Particle Tracking Velocimetry* (PTV), véase apéndice B.

### III.2 Condiciones iniciales

Los parámetros que determinaron el flujo en los experimentos del colapso fueron la gravedad reducida  $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad; la ve-

locidad angular  $\Omega = f/2$ , donde  $f$  es el parámetro de Coriolis; el ángulo  $\alpha$  entre la horizontal y el fondo; la profundidad inicial y el ancho inicial de la corriente,  $h_0$  y  $L_0$ , respectivamente. En estos experimentos se tomaron los valores:  $L_0 = 4.6$  cm, 5.0 cm,  $1 \leq g' \leq 5$  cm s<sup>-2</sup>,  $f = 1.68$  s<sup>-1</sup>,  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ . En la Fig. 9 se muestran las condiciones iniciales, se grafica el ángulo de la pendiente  $\alpha$  contra el número de Froude, el cual está definido como

$$F_0 = f^2 L_0^2 / g' h_0. \quad (13)$$

Como puede observarse, los valores iniciales utilizados en el presente trabajo se encuentran dentro del rango utilizado por Griffiths y Linden (1982) para el caso con pared vertical.

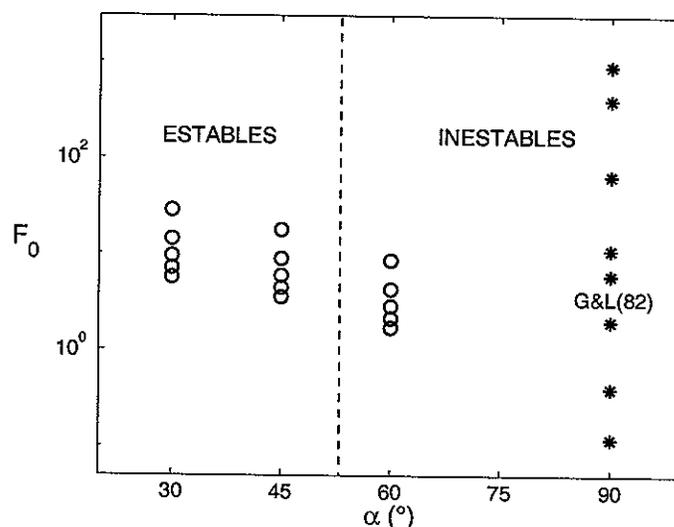


Figura 9: Condiciones iniciales de los experimentos de la técnica del colapso. Los círculos indican los valores utilizados en el presente trabajo ( $L_0 = 4.6$  cm, 5.0 cm,  $1 \leq g' \leq 5$  cm s<sup>-2</sup>,  $f = 1.68$  s<sup>-1</sup>,  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ), mientras que los asteriscos representan valores utilizados por Griffiths y Linden (1982) para  $\alpha = 90^\circ$  (pared vertical).

En los experimentos de inyección continua, los parámetros que determinaron el flujo fueron  $1 \leq g' \leq 5$  cm s<sup>-2</sup>,  $f = 1.68$  s<sup>-1</sup>,  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ , la razón de flujo en la fuente puntual (que alimenta a la fuente anular)  $Q_1 = 3.7$  cm<sup>3</sup>/s para los casos con

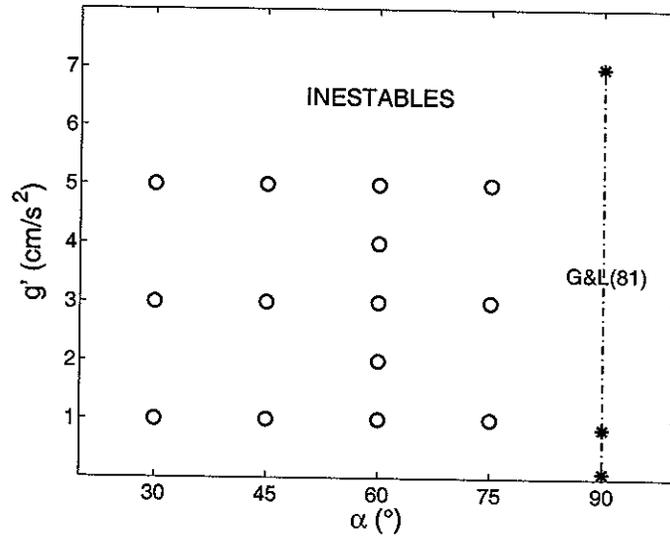


Figura 10: Condiciones iniciales de los experimentos de la técnica de inyección continua. Los círculos indican los valores utilizados en el presente trabajo, mientras que los asteriscos junto con la línea discontinua representan el rango utilizado por Griffiths y Linden (1981) para  $\alpha = 90^\circ$  (pared vertical).

$\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , y  $Q_2 = 3.1 \text{ cm}^3/\text{s}$  para el caso con  $\alpha = 75^\circ$ . Las razones de flujo en las respectivas fuentes anulares fueron  $Q_1/2\pi r_1 = 0.06 \text{ cm}^2/\text{s}$  y  $Q_2/2\pi r_2 = 0.04 \text{ cm}^2/\text{s}$ , donde  $r_1 = 10.0 \text{ cm}$  y  $r_2 = 13.5 \text{ cm}$  son los radios de la fuente anular para  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , y para  $\alpha = 75^\circ$ , respectivamente. La Fig. 8 muestra las condiciones iniciales de los experimentos con la técnica de inyección continua. En este caso no se tiene un número de Froude inicial, así que la gráfica muestra el valor de la pendiente contra la gravedad reducida. Griffiths y Linden (1981) utilizaron valores similares a los del presente estudio pero con pared vertical.

## IV Resultados experimentales

### IV.1 Corrientes generadas por colapso

#### IV.1.1 Visualización

Después del colapso, el ancho de la corriente debe incrementarse aproximadamente un radio de deformación en un tiempo del orden de un periodo inercial (Griffiths, 1986), esto es

$$L = L_0 + cR_0, \quad (14)$$

donde  $c$  es una constante cualquiera, del orden de uno, y  $R_0$  está dado por

$$R_0 = \frac{\sqrt{g'h_0}}{f}. \quad (15)$$

De las observaciones se muestra que (14) se cumple aproximadamente. En la Fig. 11 se muestran los valores del radio de deformación  $R_0$  contra el ancho instantáneo de la corriente  $L$  de experimentos con  $\alpha = 30^\circ$  (a),  $45^\circ$  (b), y  $60^\circ$  (c), para  $t = 8T$ , donde  $T$  es el periodo de rotación del sistema ( $T = 7.5$  s). Se ajustó el valor de  $c$  (mediante cuadrados mínimos) a los datos, y puede observarse que en los tres casos  $c \approx 3$ , a lo que puede decirse que  $c$  es de orden 1. Es importante tomar en cuenta que las mediciones tienen una dosis significativa de error, la cual se estima que es de alrededor del 12%. Esta estimación se realizó usando

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n-1}}, \quad (16)$$

donde  $r_i^2$  son los cuadrados de los residuos, y  $n$  es el número de datos. La ecuación (16) considera que los errores en la mediciones son aleatorios y que su *valor esperado* es cero. Para detalles, vea Ripa (2001), Taylor (1997). Puede observarse en la Figs. 11a y 11b que los datos se distribuyen de manera aproximadamente aleatoria alrededor del modelo (la recta), pero en el caso de la Fig. 11c no es así, el modelo parece no ser el ideal. Estos últimos datos corresponden a las corrientes inestables, las que

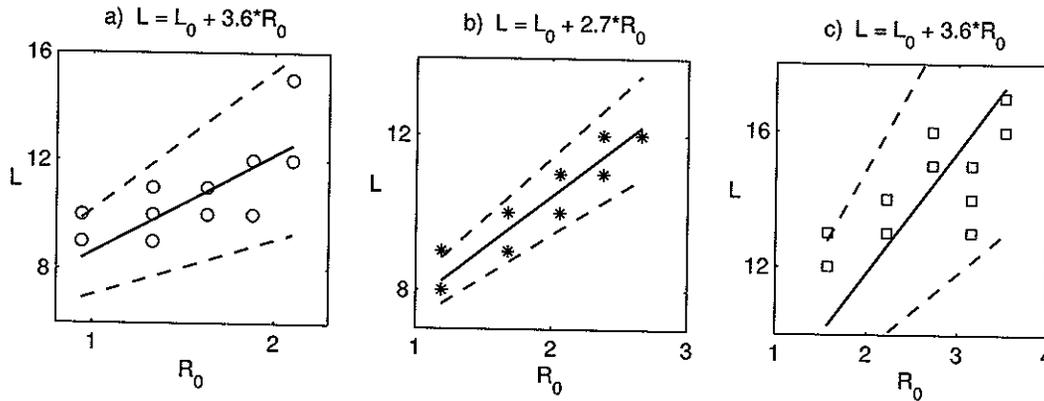


Figura 11: Ancho de la corriente contra el radio de deformación (ambos en cm) en 45 experimentos de la técnica de colapso para  $t = 8T$ , donde  $T = 7.5$  s. Los círculos corresponden a  $\alpha = 30^\circ$  (a), los asteriscos a  $\alpha = 45^\circ$  (b), y los cuadros a  $\alpha = 60^\circ$  (c). En los dos primeros recuadros  $L_0 = 5$  cm, mientras que en el tercero  $L_0 = 4.6$  cm. En cada caso se ajustó una línea recta a los datos. Los ajustes presentan un coeficiente de correlación de alrededor de 0.79 y un error estándar de estimación de alrededor de 1.1 cm. Las líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 95%, donde el error estimado en la pendiente es  $\sigma_m \approx \pm 0.6$ .

presentaron meandros que llegaban a formar remolinos, lo cual hace que las mediciones sean más imprecisas. Aunque los ajustes sean en cierta manera deficientes, son útiles para determinar aproximadamente cuánto crece la corriente. La Fig. 12 muestra la evolución del valor de  $c$ , y puede observarse que la corriente va aumentando su ancho conforme transcurre el tiempo, esto sugiere que el balance entre la fuerza de Coriolis y la del gradiente de presión (los términos del ajuste geostrófico) se va perdiendo en favor de esta última, esto es, después del colapso la corriente se encuentra en ajuste aproximadamente geostrófico, pero conforme transcurre el tiempo la fricción se vuelve más importante y tiende a frenar el flujo; debido a que la fuerza de Coriolis depende de la velocidad, se vuelve menos importante comparada con la fuerza del gradiente de presión y la corriente se extiende radialmente, y tiende a la condición de un fluido establemente estratificado.

Por otro lado, se compararon además la velocidad “medida”  $U$  con la velocidad

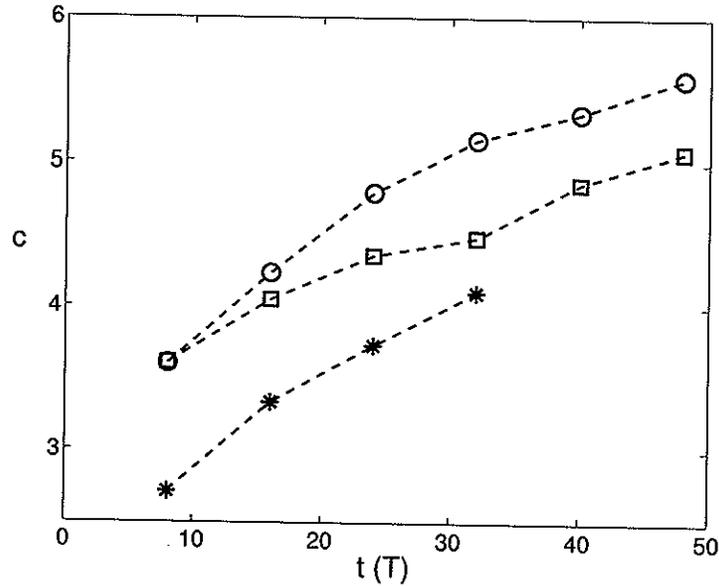


Figura 12: Valor del coeficiente  $c$ , de la ecuación (14), contra el tiempo  $t$  (en periodos de rotación), para los experimentos de colapso con  $\alpha = 30^\circ$  (círculos),  $45^\circ$  (asteriscos),  $60^\circ$  (cuadros).

geostrófica calculada  $U_g$ . La velocidad geostrófica  $U_g$  fue calculada como

$$U_g \sim \frac{g'h}{fL}, \quad (17)$$

donde  $h$  es el espesor máximo de la corriente medido desde la vista lateral del tanque (donde se realizaban los experimentos). Para medir la velocidad  $U$  simplemente se midió el tiempo en que las partículas (trazadores) recorrieron una cierta longitud de arco, por lo tanto, se consideró que el movimiento de éstas era paralelo a la componente azimutal y se desprecian los movimientos radiales que pudieran presentarse (Fig. 13). Esta velocidad medida  $U$  es el resultado de los experimentos de visualización, no se utilizó PTV en estos casos. Sólo se realizó una medición de la velocidad en cada experimento diferente, es decir, para cada condición inicial. En la Fig. 14 se muestran los valores medidos de la velocidad, comparados con el valor respectivo de la velocidad

geostrófica, para  $t = 8 T$ . Se ajustó la función

$$U = c \cdot U_g \quad (18)$$

a los datos (de acuerdo nuevamente al criterio de los cuadrados mínimos). La velocidad medida  $U$  es ligeramente mayor a la geostrofica, pero del mismo orden. En la Fig. 15 se puede apreciar que la velocidad tiene un comportamiento similar en todos los instantes reportados, el coeficiente de  $U_g$  es del orden de 1. Como puede notarse, la relación entre  $U$  y  $U_g$  se mantiene prácticamente constante, esto es debido a que la velocidad de la corriente va disminuyendo, pero a la vez el ancho aumenta (como se mencionó anteriormente), y esto causa que en el cálculo de  $U_g$  los valores sean menores; entonces,  $U$  y  $U_g$  disminuyen de manera similar. El error en la medición de  $U$  se estima de alrededor del 15%, de acuerdo a (16). Otro detalle importante es la manera de calcular  $U_g$  mediante (17), ya que  $h/L$  no es realmente el gradiente de  $h$ , sino es la aproximación que se puede obtener a partir de los datos observados. Además, en la medición de  $U$  se está despreciando el desplazamiento radial de los trazadores.

En cada experimento el flujo axialmente simétrico se vio perturbado por la presencia de inestabilidades que se formaban en el frente y que en algunos casos llegaban a separarse del flujo principal. Estas inestabilidades se mostraban como meandros que, dependiendo del valor de  $\alpha$ , continuaban su desarrollo o se veían inhibidos. La Fig. 9 (capítulo anterior) está dividida en dos partes, el lado derecho corresponde a los casos en los cuales las inestabilidades pudieron desarrollarse, para  $\alpha = 60^\circ, 90^\circ$ . La Fig. 16 muestra secuencias de fotografías tomadas de tres experimentos diferentes, para  $\alpha = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$  (Figs. 16a, 16b, 16c, respectivamente). En estos experimentos  $F_0 \approx 5$  ( $\pm 0.7$ ). Los recuadros son para  $t = 8 T, 16 T, 24 T$ . Griffiths y Linden (1982) reportan que la corriente, adyacente a una pared vertical, es siempre inestable y que la frontera no tiene influencia importante en la dinámica de la corriente. Sin embargo,

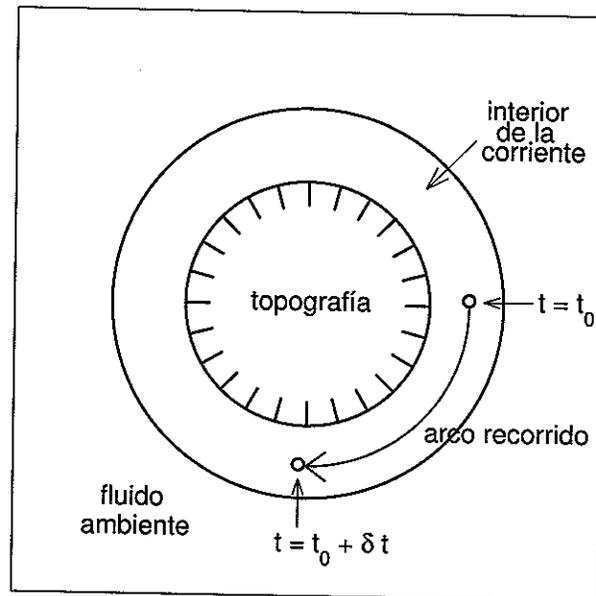


Figura 13: Esquema de la vista de planta de la corriente. Se observa la longitud de arco recorrida por una partícula desde la posición a  $t = t_0$  hasta la posición a  $t = t_0 + \delta t$ .

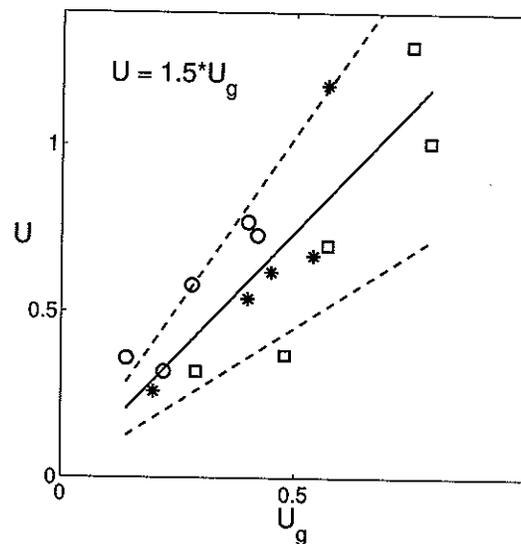


Figura 14: Velocidad geostrofica contra velocidad medida (ambas en cm/s) en 15 experimentos de la técnica de colapso, para  $t = 8T$ , donde  $T = 7.5$  s. Los círculos corresponden a  $\alpha = 30^\circ$ , los asteriscos a  $\alpha = 45^\circ$ , y los cuadros a  $\alpha = 60^\circ$ . El ajuste presenta un coeficiente de correlación de 0.83 y un error estándar de estimación de 0.17 cm/s. Las líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 95%, donde el error estimado en la pendiente es  $\sigma_m = \pm 0.3$ .

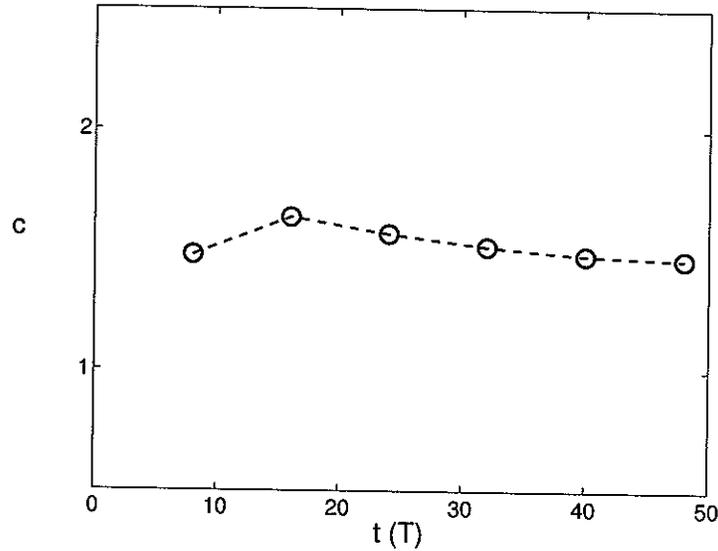


Figura 15: Valor del coeficiente  $c$ , de la ecuación (18), contra el tiempo  $t$  (en periodos de rotación) en 15 experimentos de la técnica de colapso.

como puede observarse en la Fig. 16, cuando la corriente fluye sobre un fondo inclinado su comportamiento es muy diferente. Conforme la pendiente decrece ( $\alpha \rightarrow 0$ ) la corriente se estabiliza, y las perturbaciones no pueden crecer. Poco tiempo después del colapso, algunas perturbaciones se forman en el frente; cuando  $\alpha = 60^\circ$  algunas de estas perturbaciones llegan a separarse (Fig. 16a), pero cuando  $\alpha = 45^\circ$  o  $30^\circ$  éstas desaparecen posteriormente (Figs. 16b y 16c). En la Fig. 16a se observan monopolos y dipolos adyacentes al flujo principal.

La Fig. 17 muestra una secuencia fotográfica de tres experimentos en los cuales  $\alpha = 60^\circ$  pero  $F_0$  es diferente en cada caso. Puede observarse que conforme  $F_0$  decrece la amplitud de las perturbaciones se incrementa y más de éstas crecen y se separan. En la Fig. 18 se grafican los valores de  $F_0$  contra la longitud de onda de las perturbaciones normalizada por  $R_0$ . La longitud de onda está dado por

$$\lambda = \frac{2\pi r_0}{n}, \quad (19)$$

donde  $r_0$  es el radio del cilindro sin fondo utilizado para contener a la corriente en

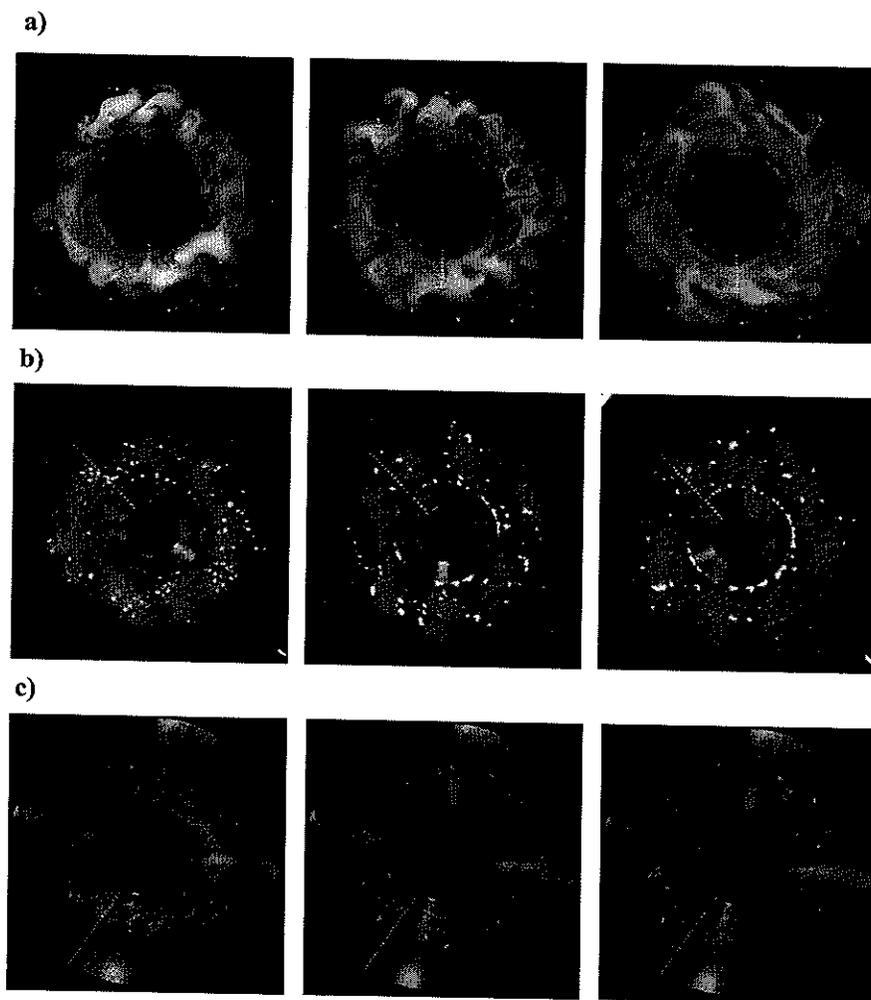


Figura 16: Comparación de tres experimentos diferentes con  $F_0 = 5 (\pm 0.7)$ . a)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $F_0 = 4.3$ ; b)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $F_0 = 4.4$ ; c)  $\alpha = 30^\circ$ ,  $F_0 = 5.7$ .

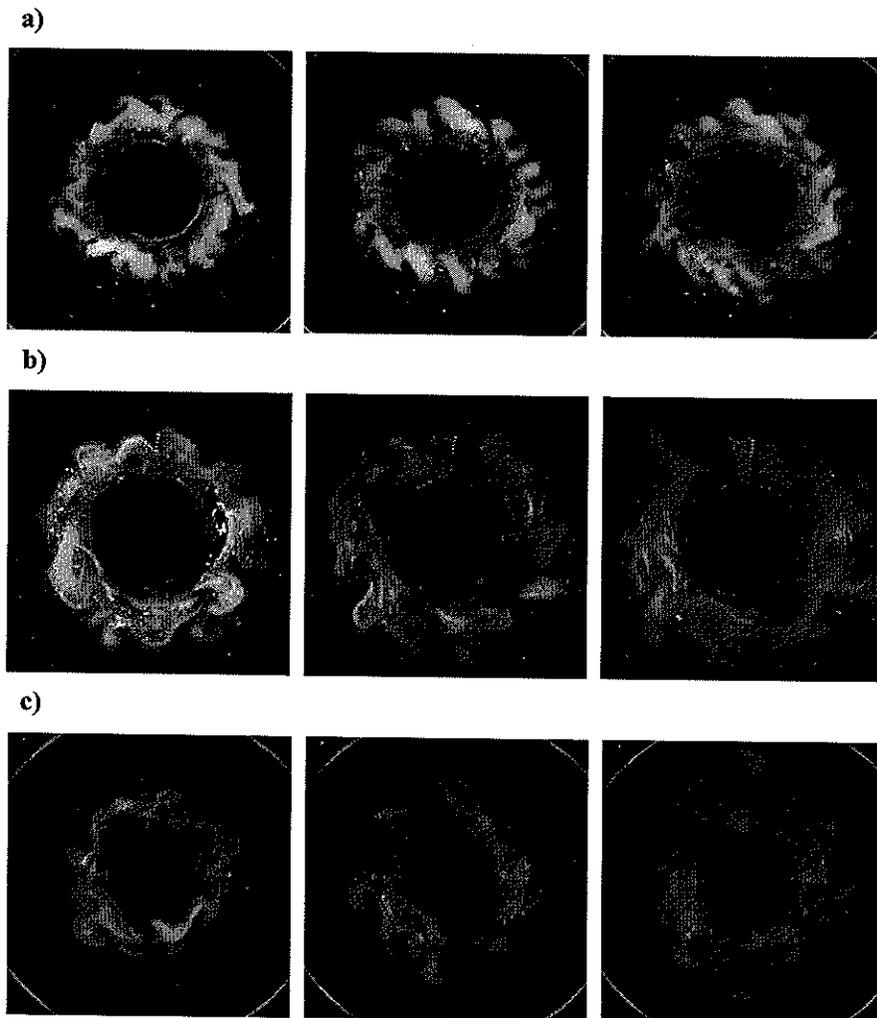


Figura 17: Comparación de tres experimentos diferentes con  $\alpha = 60^\circ$ . a)  $F_0 = 8.6$ ; b)  $F_0 = 2.9$ ; c)  $F_0 = 1.7$ . En cada caso los recuadros son para  $t = 8 T, 16 T, 24 T$ , respectivamente.

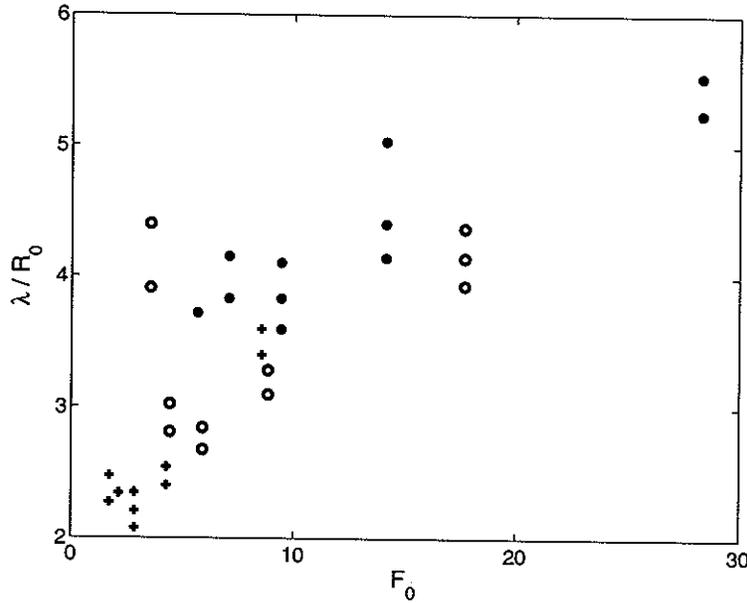


Figura 18: Longitud de onda (normalizada con el radio de Rossby) de las inestabilidades contra el número de Froude en 45 experimentos de colapso. Los puntos indican los datos con  $\alpha = 30^\circ$ ; los círculos indican los datos con  $\alpha = 45^\circ$ ; las cruces indican los datos con  $\alpha = 60^\circ$ .

su condición inicial, y  $n$  es el número de meandros observados en la corriente. Como puede observarse, la longitud de onda es mayor conforme  $F_0$  se incrementa. Si todos los meandros se desarrollaran, los valores de  $\lambda$  serían consistentes con los reportados por Griffiths y Linden (1982) para el caso de pared vertical, pero, como ya se dijo, sólo en el caso de  $\alpha = 60^\circ$  algunas inestabilidades pueden crecer, la mayoría de ellas desaparecen, por lo que puede decirse que el valor de  $\alpha$  modifica la longitud de onda de las inestabilidades.

Se realizaron además, algunas comparaciones que consistieron en tomar dos valores de  $F_0$  (14 y 1.4) y variar  $\alpha$ , de  $90^\circ$  a  $30^\circ$  ( $\alpha = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ ). Estos resultados en el caso de la frontera vertical ( $\alpha = 90^\circ$ ) fueron consistentes con los resultados de Griffiths y Linden (1982), es decir, la corriente fue inestable. Sin embargo, cuando  $\alpha = 60^\circ$  la corriente es más estable (comparada con el caso de  $\alpha = 90^\circ$ ) y sólo algunas inestabilidades se formaron y separaron del flujo principal; y cuando  $\alpha = 45^\circ, 30^\circ$  no

se observaron inestabilidades.

#### IV.1.2 Mediciones

Se midió el campo de velocidades en nueve experimentos de la técnica de colapso, para  $\alpha = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ , usando  $g' = 1, 3, 5 \text{ cm/s}^2$ , con  $t = 4 T, 20 T, 36 T, 52 T, 68 T$ . En estas mediciones se utilizó PTV (véase apéndice B).

En los experimentos, justo después del colapso la corriente presenta meandros y algunos puntos de estancamiento. Para los casos de  $\alpha$  menores ( $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ ) los meandros desaparecen y la corriente se vuelve estable. La Fig. 19 muestra la geometría del flujo en un experimento con  $\alpha = 30^\circ$  y  $F_0 = 9.4$  ( $g' = 3 \text{ cm/s}^2$ ), para  $t = 4 T$  (a),  $t = 20 T$  (b),  $36 T$  (c). Como puede observarse, poco tiempo después del colapso ( $t = 4 T$ ) se generan algunos puntos de estancamiento a lo largo de los meandros que presenta la corriente. Pasados algunos periodos de rotación ( $t = 20 T$ ) la corriente se muestra más estable y las estructuras anteriores desaparecen, y continúa así para tiempos posteriores ( $t = 36 T$ ).

Para los casos con  $\alpha = 60^\circ$  el efecto del fondo es menor y la corriente se muestra más inestable, los meandros persisten y llegan a separarse de la proximidad de la topografía y dan lugar a la formación de algunos remolinos. En la Fig. 20 se muestra la geometría del flujo en un experimento con  $\alpha = 60^\circ$  y  $F_0 = 8.6$  ( $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ ), a tres tiempos diferentes ( $t = 4 T, 20 T, 36 T$ ). Como puede observarse, al principio se presentan algunos meandros y se forman algunos puntos de estancamiento; conforme transcurre el tiempo algunos de los meandros forman remolinos mientras que en la proximidad de la topografía el flujo se vuelve más estable y desaparecen los puntos de estancamiento que se observaban en un principio. Para  $t = 36 T$  (c) se observan tres estructuras que aparentan ser remolinos adyacentes al flujo principal.

En la Fig. 21 se muestran los perfiles de velocidad y de vorticidad interpolados

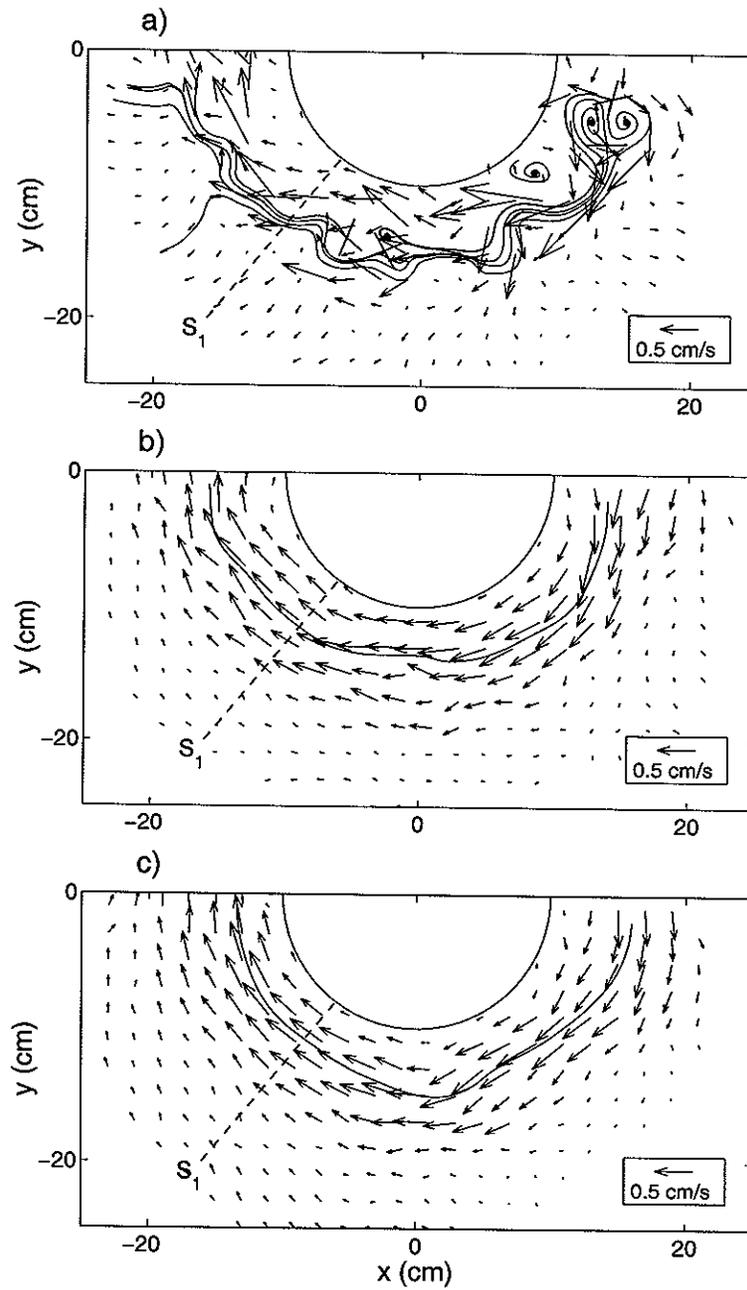


Figura 19: Geometría del flujo en un experimento con  $\alpha = 30^\circ$ ,  $F_0 = 9.4$  ( $g' = 3 \text{ cm/s}^2$ ), a cinco tiempos diferentes,  $t = 4 T$  (a) y  $t = 20 T$  (b),  $36 T$  (c). Las cruces denotan puntos silla, mientras que los círculos denotan espirales o centros. Se muestran además líneas de corriente.  $S_1$  indica un corte transversal donde se interpoló la velocidad y la vorticidad, los perfiles se muestran en la Fig. 21.

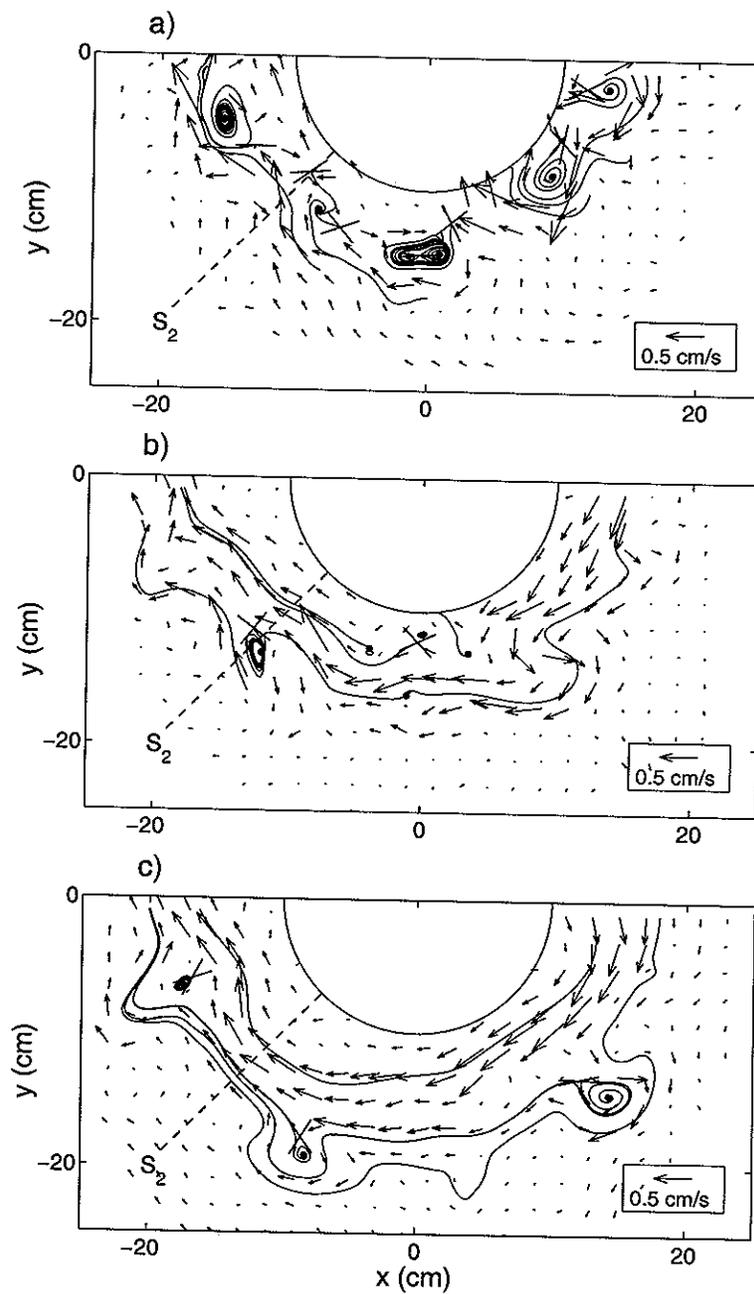


Figura 20: Geometría del flujo en un experimento con  $\alpha = 60^\circ$ ,  $F_0 = 8.6$  ( $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ ), a cinco tiempos diferentes,  $t = 4 T$  (a),  $20 T$  (b),  $36 T$  (c). Las cruces denotan ensilladuras, mientras que los círculos denotan espirales o centros. Se muestran además líneas de corriente.  $S_2$  indica un corte transversal donde se interpoló la velocidad y la vorticidad, los perfiles se muestran en la Fig. 22.

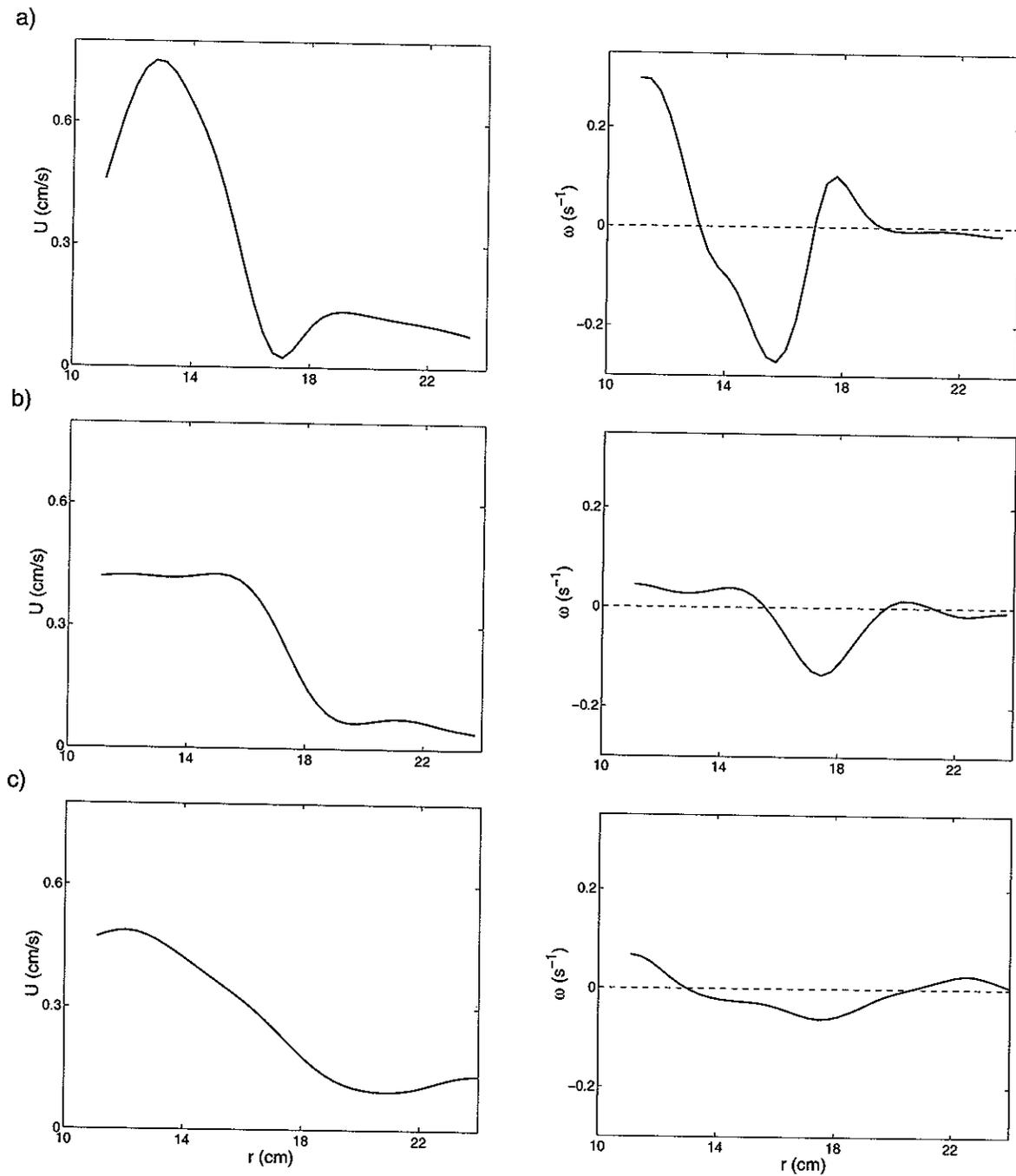


Figura 21: Perfiles de velocidad y vorticidad interpolados a lo largo del corte  $S_1$ , mostrado en la Fig. 19.  $U$  es la magnitud de la velocidad,  $\omega$  es la vorticidad, y  $r$  es la distancia radial.

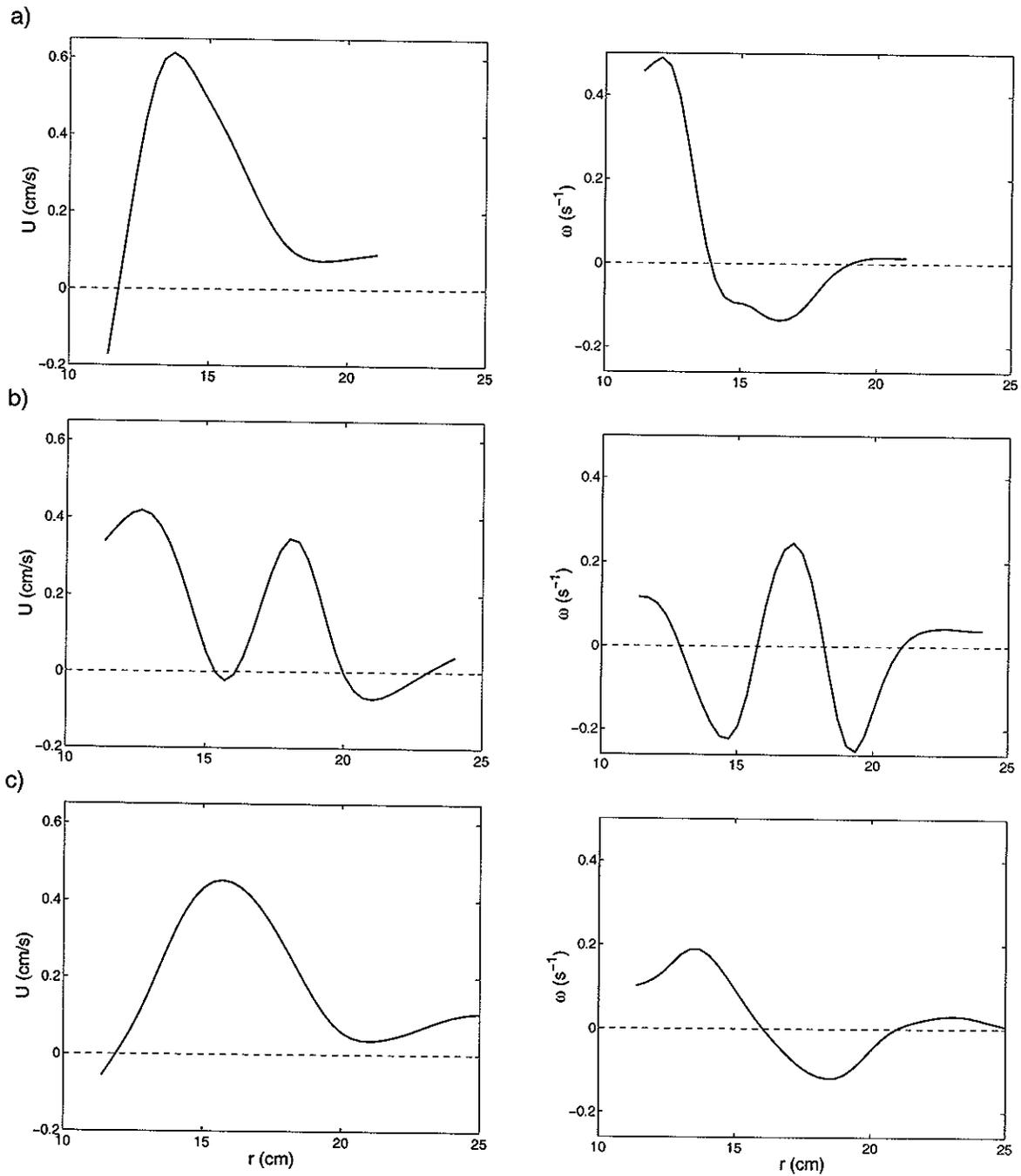


Figura 22: Perfiles de velocidad y vorticidad interpolados a lo largo del corte  $S_2$ , mostrado en la Fig. 20.  $U$  es la magnitud de la velocidad,  $\omega$  es la vorticidad, y  $r$  es la distancia radial.

a lo largo del corte  $S_1$  mostrado en la Fig. 19, la cual corresponde a un caso estable (los meandros formados en la corriente no crecen). Puede observarse que el perfil de velocidad se atenúa; esto es, para  $t = 4 T$  el perfil muestra un máximo en el interior de la corriente y a continuación un mínimo, los cuales van aminorando y el perfil se vuelve más suave. Esta atenuación se observa en el perfil de la vorticidad, la cual disminuye y se mantiene cercana a cero.

Como caso contrario, se tienen los perfiles de velocidad y de vorticidad mostrados en la Fig. 22, correspondientes al corte  $S_2$  de la Fig. 20, el cual es un caso inestable. Se observa que originalmente (a  $t = 4 T$ ) el perfil de velocidad es similar al del caso estable, pero posteriormente (a  $t = 20 T$ ) cambia y muestra dos máximos, mientras que el perfil de vorticidad muestra un pico positivo en la región donde anteriormente era negativa; es en este momento cuando los meandros crecen y comienzan a separarse de la topografía (la corriente se está inestabilizando). Transcurridos algunos periodos de rotación (a  $t = 36 T$ ) se observa que el perfil de la velocidad vuelve a estabilizarse y la velocidad va decreciendo, al igual que la vorticidad; en este momento la corriente se ha transformado en un flujo estable al cual se encuentran adyacentes los remolinos a que dieron lugar los meandros iniciales.

La Fig. 23 muestra perfiles de vorticidad potencial del ejemplo mostrado en la Fig. 22. Puede observarse que para  $t = 4 T$  la vorticidad potencial decrece monotónicamente desde la "costa" hacia el frente de la corriente; este resultado es cualitativamente consistente con el resultado de la vorticidad potencial en el problema teórico de ajuste geostrófico (Fig. 4), el cual se encuentra en equilibrio y no evoluciona. Para  $t = 20 T$  el extremo local observado en la vorticidad relativa (Fig. 22b) llega a notarse en el perfil de la vorticidad potencial (como un máximo relativo, aunque suave).

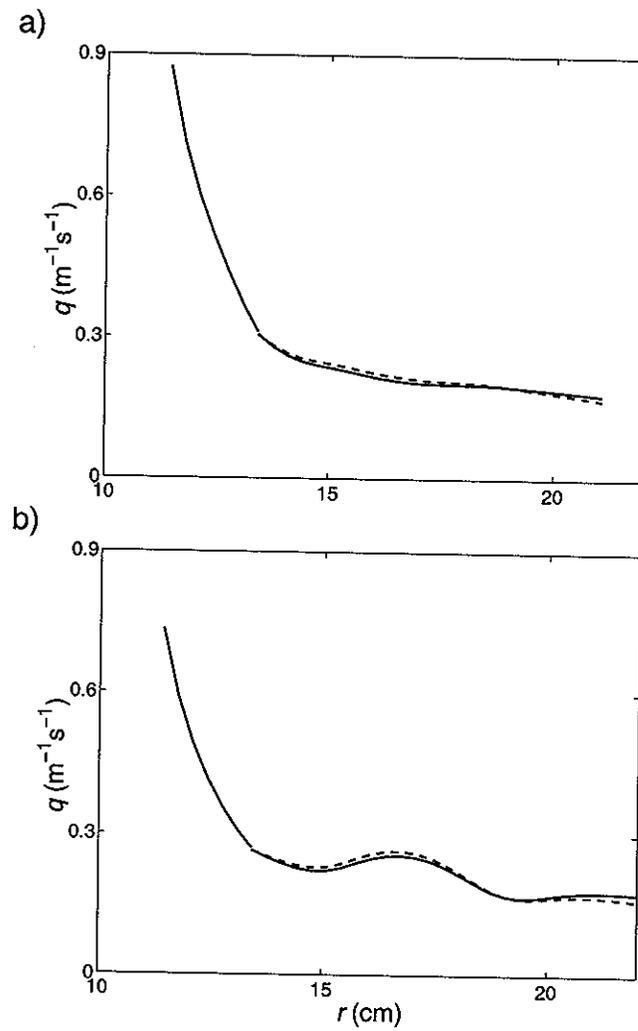


Figura 23: Perfiles de vorticidad potencial  $q$  correspondientes al ejemplo de la Fig. 22, para  $t = 4 T$  (a),  $20 T$  (b). En  $r > 13$  cm (aproximadamente) el perfil del espesor de la corriente fue aproximado mediante una función lineal (línea continua), y mediante una función cuadrática (línea discontinua).

## IV.2 Corrientes generadas por inyección continua

### IV.2.1 Visualización

A partir de que comienza la inyección de fluido, el ancho y el espesor de la corriente se incrementan con el tiempo. En la Fig. 24 se grafican los valores adimensionales del ancho y del espesor de la corriente como función del tiempo adimensional; éstos están dados por

$$L^* = \frac{f^2 L}{g'}, \quad (20)$$

$$h^* = \frac{f^2 h}{g'}, \quad (21)$$

$$t^* = \frac{Q_i f^4 t}{2\pi r_i g'^2}, \quad (22)$$

donde el subíndice  $i$  en  $Q_i$  y  $r_i$  es 1 o 2, según sea el caso (Como ya se mencionó en el capítulo anterior,  $Q_1 = 3.7 \text{ cm}^3/\text{s}$  y  $r_1 = 10.0 \text{ cm}$ , para los casos con  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , y  $Q_2 = 3.1 \text{ cm}^3/\text{s}$  y  $r_2 = 13.5 \text{ cm}$ , para el caso  $\alpha = 75^\circ$ ). Se puede observar que el ancho de la corriente  $L^*$  se incrementa aproximadamente de manera proporcional con  $t^{*0.4}$ , mientras que el espesor  $h^*$  con  $t^{*0.6}$ . Estos valores se aproximan a los reportados por Griffiths y Linden (1981), quienes muestran que, para los casos con pared vertical, el ancho y el espesor de la corriente crecen aproximadamente de manera proporcional a  $t^{*0.5}$ , lo cual implica que el área transversal de la corriente se incrementa linealmente con el tiempo. El hecho de que  $h^* \propto t^{*0.6}$  y  $L^* \propto t^{*0.4}$  implica que el área transversal de la corriente crece proporcionalmente con el tiempo  $t^*$ , es decir,

$$(h^* \cdot L^*) \propto t^*. \quad (23)$$

La Fig. 25 muestra el comportamiento del número de Froude,

$$F = f^2 L^2 / g' h, \quad (24)$$

con respecto a  $t^*$ . En este caso, prácticamente se cumple que  $F \propto t^{*1/2}$ .

Para  $\alpha = 75^\circ$  el comportamiento de  $h^*$  es similar al caso con pared vertical estudiado por Griffiths y Linden (1981); pero conforme  $\alpha$  disminuye los datos varían su comportamiento (se desvían de su incremento lineal). En cada experimento, al principio la corriente crece linealmente, pero posteriormente su crecimiento es más lento, aun cuando la razón de flujo se mantiene constante.

Al igual que para los experimentos de la técnica de colapso, se comparó la velocidad "medida"  $U$  (Fig. 13, de la subsección anterior) con la velocidad geostrófica  $U_g$  en los experimentos de la técnica de inyección continua. La Fig. 26 muestra esta comparación para 11 experimentos con datos medidos a tres tiempos diferentes ( $t = 48 T$ ,  $96 T$ ,  $144 T$ ). A pesar de la dispersión de los datos, puede observarse que la velocidad medida es alrededor de 4 veces la velocidad geostrófica, a diferencia de las corrientes generadas por colapso, en las que la velocidad es aproximadamente geostrófica. La Fig. 27 muestra los mismos datos que la Fig. 26, pero divididos en los tiempos  $t = 48 T$ ,  $96 T$ ,  $144 T$ . Para los tres tiempos el resultado es similar,  $U$  es aproximadamente cuatro veces mayor que  $U_g$ , pero se ve que  $U_g$  disminuye ligeramente, lo cual es debido a que el ancho de la corriente se incrementa. En los experimentos de inyección continua el desplazamiento de los trazadores utilizados para la medición de  $U$  es prácticamente azimutal, no hay meandros.

En cada experimento, el flujo axialmente simétrico se vio perturbado por inestabilidades que se mostraban como meandros que crecían y se alejaban de la topografía. La Fig. 28 muestra el número de Froude crítico,  $F_c$ , y su tiempo adimensional correspondiente;  $F_c$  es el valor de  $F$  al momento en que la corriente se inestabilizó (cuando las inestabilidades comenzaron a ser evidentes). Puede observarse que los valores de  $F_c$  y  $t^*$  son mayores que los reportados para el caso con pared vertical ( $F_c \sim 60$  y  $t^* \sim 3$ ). Los valores más altos se presentan para  $\alpha = 45^\circ$ , mientras que los más bajos para  $\alpha = 75^\circ$ . De esto puede concluirse que conforme  $\alpha$  disminuye, la corriente tiene que

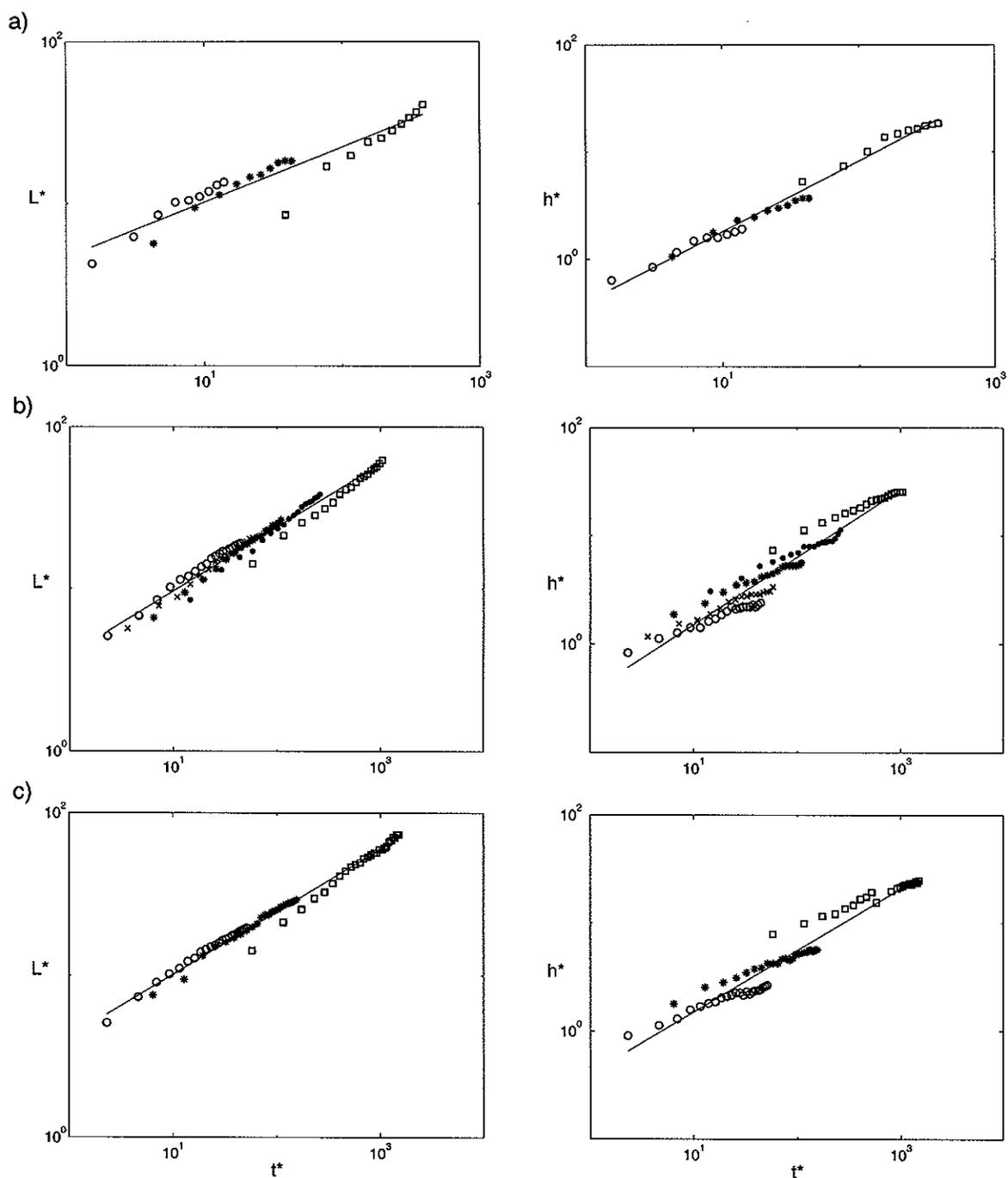


Figura 24: Valores adimensionales del ancho  $L^*$  (izquierda) y del espesor  $h^*$  (derecha) de la corriente como función del tiempo adimensional  $t^*$ , en 11 experimentos en los que  $\alpha = 75^\circ$  (a),  $60^\circ$  (b),  $45^\circ$  (c), y  $g' = 1$  (cuadros), 2 (puntos), 3 (asteriscos), 4 (cruces), 5 (círculos)  $\text{cm/s}^2$ . En cada caso se ajustó una recta; la pendiente de esta recta para  $L^*$  fue de alrededor de 0.4, mientras que para  $h^*$  fue de alrededor de 0.6.

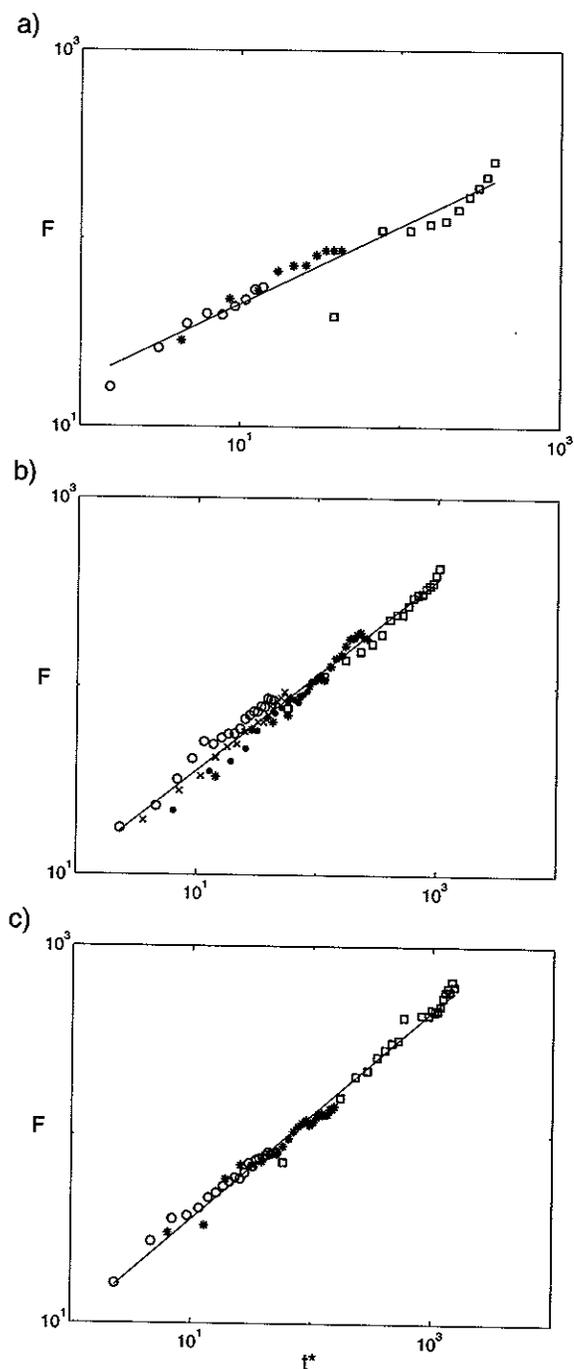


Figura 25: Número de Froude,  $F$ , como función del tiempo adimensional  $t^*$ , en 11 experimentos en los que  $\alpha = 75^\circ$  (a),  $60^\circ$  (b),  $45^\circ$  (c), y  $g' = 1$  (cuadros), 2 (puntos), 3 (asteriscos), 4 (cruces), 5 (círculos)  $\text{cm/s}^2$ . La recta ajustada en cada caso tiene una pendiente de alrededor de 0.5.

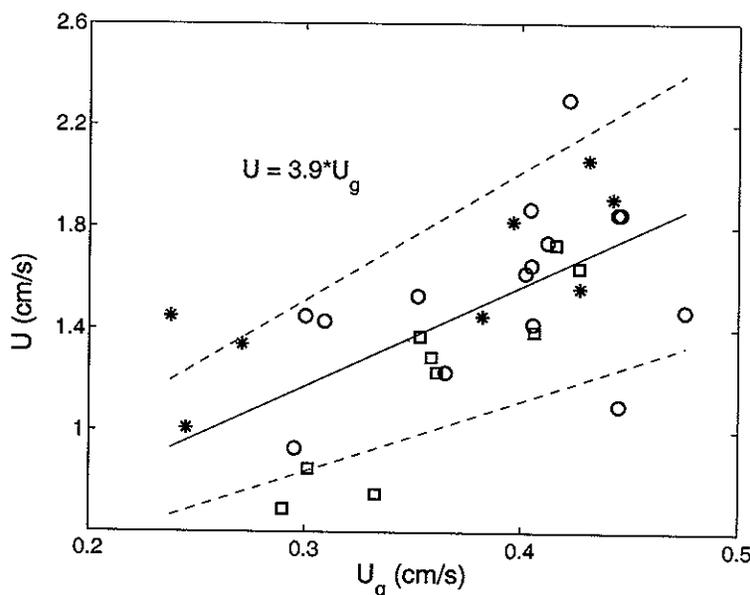


Figura 26: Velocidad geostrófica contra velocidad medida en 11 experimentos de la técnica de inyección continua a tres tiempos diferentes ( $t = 48 T$ ,  $96 T$ ,  $144 T$ ), todos estos datos están graficados. Los asteriscos corresponden a  $\alpha = 45^\circ$ , los círculos a  $\alpha = 60^\circ$ , y los cuadros a  $\alpha = 75^\circ$ . Se ajustó una línea recta a los datos, de acuerdo al criterio de los cuadrados mínimos. El ajuste presenta un coeficiente de correlación de 0.62 y un error estándar de estimación de 0.29 cm/s. La líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 68%, donde el error estimado en la pendiente es  $\sigma_m = \pm 1.1$ .

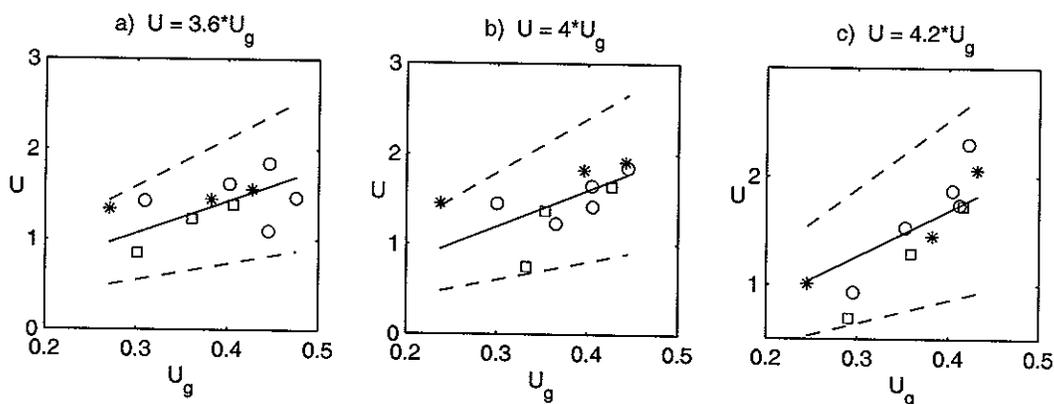


Figura 27: Velocidad geostrófica contra velocidad medida (ambas en cm/s) en 11 experimentos de la técnica de inyección continua, para  $t = 48T$  (a),  $96T$  (b),  $144T$  (c), y donde  $T = 7.5$  s. Los ajustes presentan coeficientes de correlación de 0.45 (a), 0.55 (b) y 0.90 (c), y un error estándar de estimación de alrededor de 0.26 cm/s. La líneas discontinuas indican el intervalo de confianza del 68%, donde el error estimado en la pendiente es  $\sigma_m \approx \pm 1.9$ .

crecer más para alejarse de la influencia de la topografía y así poder inestabilizarse.

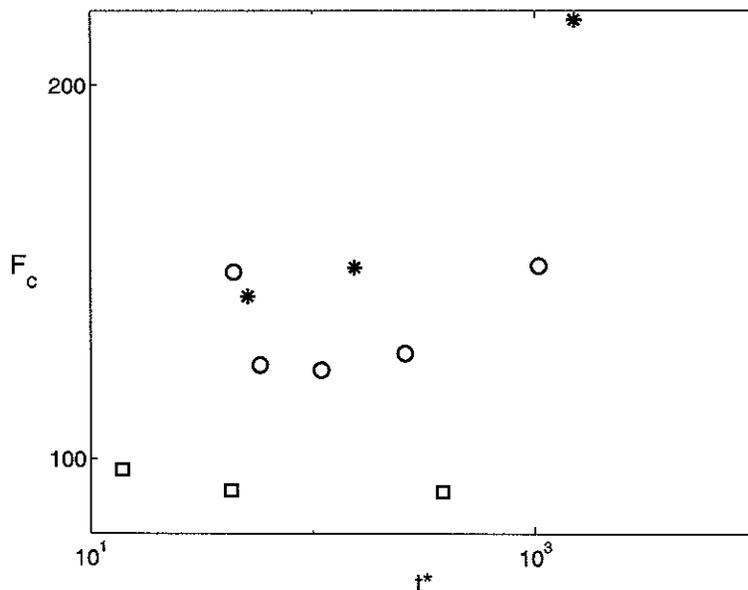


Figura 28: Número de Froude crítico (en el cual las inestabilidades de la corriente comienzan a ser evidentes)  $F_c$  contra el tiempo adimensional  $t^*$ , en 11 experimentos en los que  $\alpha = 75^\circ$  (cuadros),  $60^\circ$  (círculos),  $45^\circ$  (asteriscos).

Una característica importante del flujo es el número de inestabilidades que se presentan, el cual varía con  $\alpha$  y con  $g'$ . A partir de éste se puede calcular la longitud de onda de estas perturbaciones, la cual en el presente estudio está dada como

$$\lambda = \frac{2\pi R}{n}, \quad (25)$$

con  $R = r_i + L_c/2$ , y donde  $n$  es el número de inestabilidades presentes en la corriente,  $r_i$  es el radio de la fuente anular, y  $L_c$  es el valor de  $L$  justo antes de que la corriente se inestabilizara. En la Fig. 29 se muestra la longitud de onda, normalizada por  $L_c$ , contra  $F_c$ . Los puntos negros son valores reportados por Griffiths y Linden (1981) para  $\alpha = 90^\circ$ . Estos autores calcularon la longitud de onda de las inestabilidades utilizando  $R = r_i$ . En el presente trabajo se decidió tomar además la mitad de  $L_c$  (es decir,  $R = r_i + L_c/2$ ) debido a que la corriente es significativamente más ancha al momento de

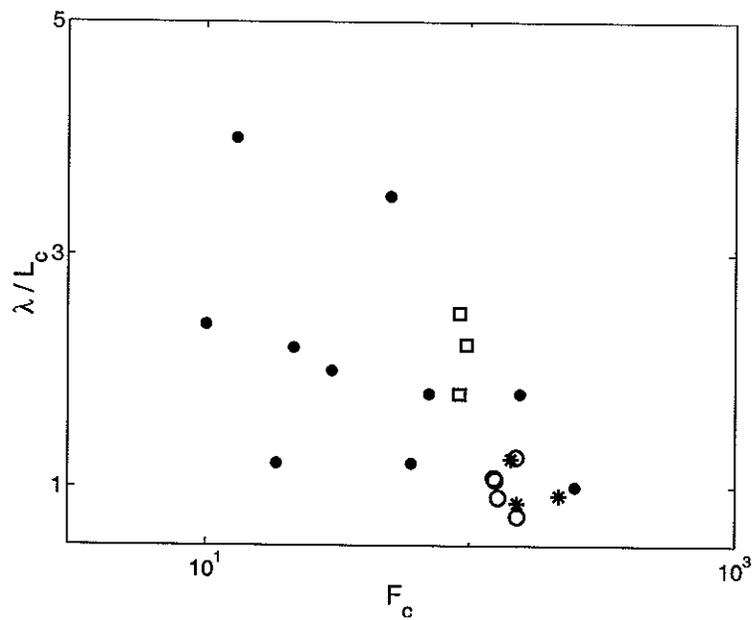


Figura 29: Longitud de onda adimensional  $\lambda/L_c$  contra el número de Froude crítico (en el cual las inestabilidades de la corriente comienzan a ser evidentes)  $F_c$ , en 11 experimentos en los que  $\alpha = 75^\circ$  (cuadros),  $60^\circ$  (círculos),  $45^\circ$  (asteriscos). Los puntos negros indican algunos valores representativos del caso  $\alpha = 90^\circ$  (pared vertical) reportados por Griffiths y Linden (1981).

inestabilizarse, y así se estima de mejor manera a  $\lambda$ . Como puede observarse, para  $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$ , se tiene que  $\lambda \approx L_c \approx 12R_c$  (donde  $R_c$  es el radio de Rossby calculado a partir de los valores de  $L_c$  y  $h_c$ ), mientras que para  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\lambda$  es del doble. En este último caso  $\lambda$  se asemeja a los resultados de Griffiths y Linden, aunque  $F_c$  es mayor.

#### IV.2.2 Mediciones

Se midió el campo de velocidades en diez experimentos de la técnica de inyección continua, para  $\alpha = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ , usando  $g' = 1, 3, 5 \text{ cm/s}^2$ , con  $t = 64 T, 128 T, 192 T$ , así como para  $\alpha = 75^\circ$ ,  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , con  $t = 64 T, 128 T, 192 T, 256 T, 320 T, 384 T$ . En la Fig. 30 se muestran los vectores de velocidad para un experimento con  $\alpha = 30^\circ$ ,  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ . Como puede observarse, la velocidad es prácticamente azimutal (su componente radial es despreciable); por lo tanto, la magnitud de la velocidad en función de la distancia radial es una buena representación del perfil de velocidad. La

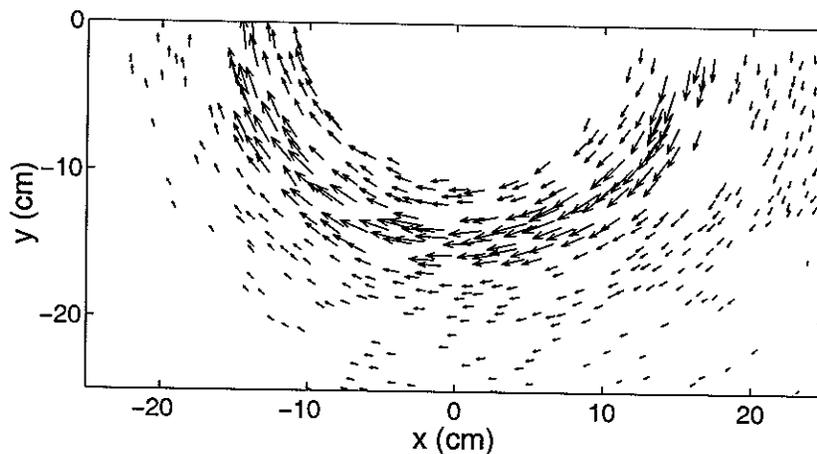


Figura 30: Campo de velocidad de una corriente generada por inyección continua con  $\alpha = 30^\circ$ ,  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , para  $t = 64 T$ .

Fig. 31 muestra el perfil de velocidad de los datos mostrados en la Fig. 30 al cual se le ajustó un *trazador cúbico*; en este perfil pueden observarse tres regiones, descritas en la Fig. 32. En la proximidad de la topografía la velocidad se ve frenada por la fricción con

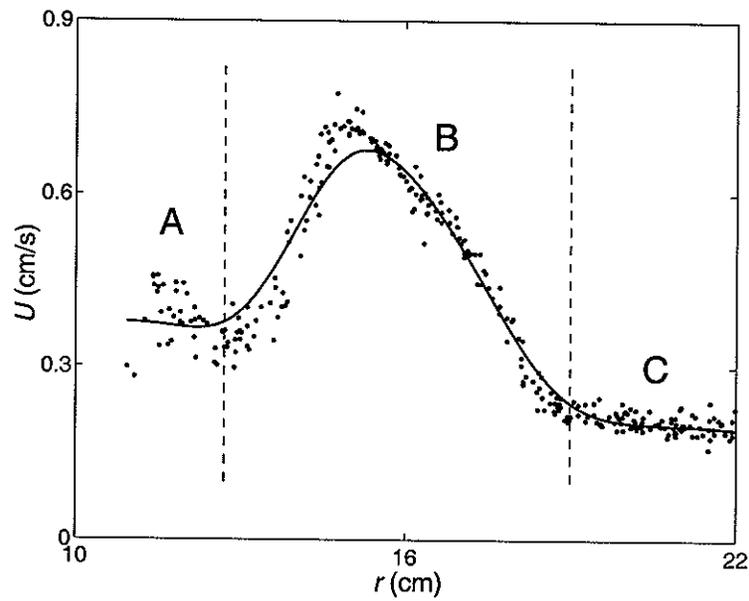


Figura 31: Ajuste de un trazador cúbico a los datos de magnitud de velocidad  $U$  contra la distancia radial  $r$  en un experimento usando la técnica de inyección continua con  $\alpha = 30^\circ$ ,  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , para  $t = 64 T$ . El ajuste presenta un coeficiente de correlación de 0.97 y un error estándar de estimación de 0.05 cm/s. El perfil de la corriente ha sido dividido en tres regiones,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , las cuales corresponden a las regiones mostradas en la Fig. 32.

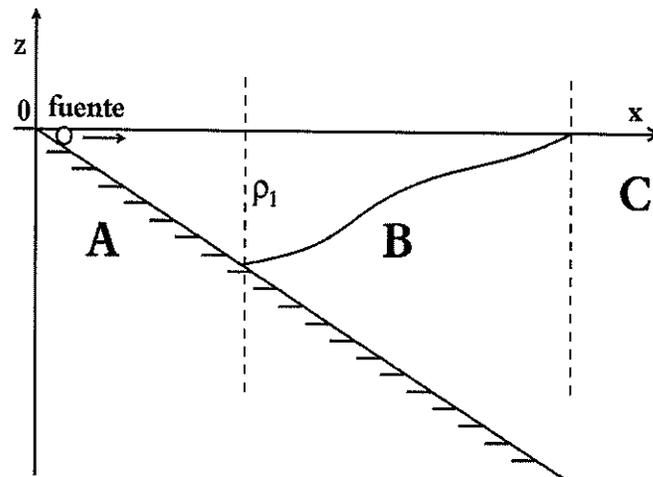


Figura 32: Esquema del perfil transversal del flujo, en el cual se definen tres regiones: Una zona en contacto con la topografía ( $A$ ), el fluido de dos capas ( $B$ ), y el fluido ambiente ( $C$ ).

el fondo. Esta zona es mayor para  $\alpha$  menor (Fig. 33). Más allá de la zona de influencia del fondo la velocidad presenta un máximo, el cual se desplaza ligeramente alejándose de la topografía. La Fig. 34 muestra la posición del máximo contra el tiempo en cuatro experimentos con  $\alpha = 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ , y  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ . Para  $\alpha = 75^\circ$  el coeficiente de correlación fue de alrededor de  $0.89 (\pm 0.01)$  y el error estándar de estimación fue de  $0.09 \text{ cm/s}$ ; para los demás casos el coeficiente de correlación fue de alrededor de  $0.97 (\pm 0.02)$  y el error estándar de estimación fue de alrededor de  $0.05 \text{ cm/s} (\pm 0.02 \text{ cm/s})$ . Desafortunadamente, para  $\alpha = 75^\circ$  se cuenta solamente con datos para seis tiempos (antes mencionados), mientras que para  $\alpha = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$  se cuenta con sólo tres tiempos. Como puede observarse, el máximo se desplaza de manera proporcional al tiempo; aunque se cuenta con pocos datos, la gráfica sugiere que el comportamiento es similar en todos los casos. Puede notarse además que conforme disminuye  $\alpha$  el máximo se presenta más lejos de la topografía, esto debido a la influencia de la fricción con el fondo.

Inmediatamente después del máximo la velocidad disminuye más lentamente a como aumentó para llegar a dicho máximo, presentando además una vorticidad negativa. Cuando la corriente ha crecido lo suficiente (transcurrido el tiempo), el perfil de la velocidad presenta una deflexión suave, la cual se aprecia en el perfil de vorticidad que incluso cambia de signo (Fig. 35), pero no tan marcadamente como para notarse en el perfil de vorticidad potencial, como sucede en las corrientes generadas por colapso (Fig. 22b, de la sección anterior). En la Fig. 36 se muestra el perfil de vorticidad potencial correspondiente al perfil de la Fig. 35a. Puede observarse que el comportamiento de este perfil es cualitativamente similar al de las corrientes generadas por colapso (Fig. 23a, de la sección anterior) y al calculado en el problema teórico de ajuste geostrófico (Fig. 4, del capítulo 2): Decae monótonicamente desde la “costa” hacia el frente. La Fig. 37 muestra un experimento con  $\alpha = 75^\circ$  y  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , en éste

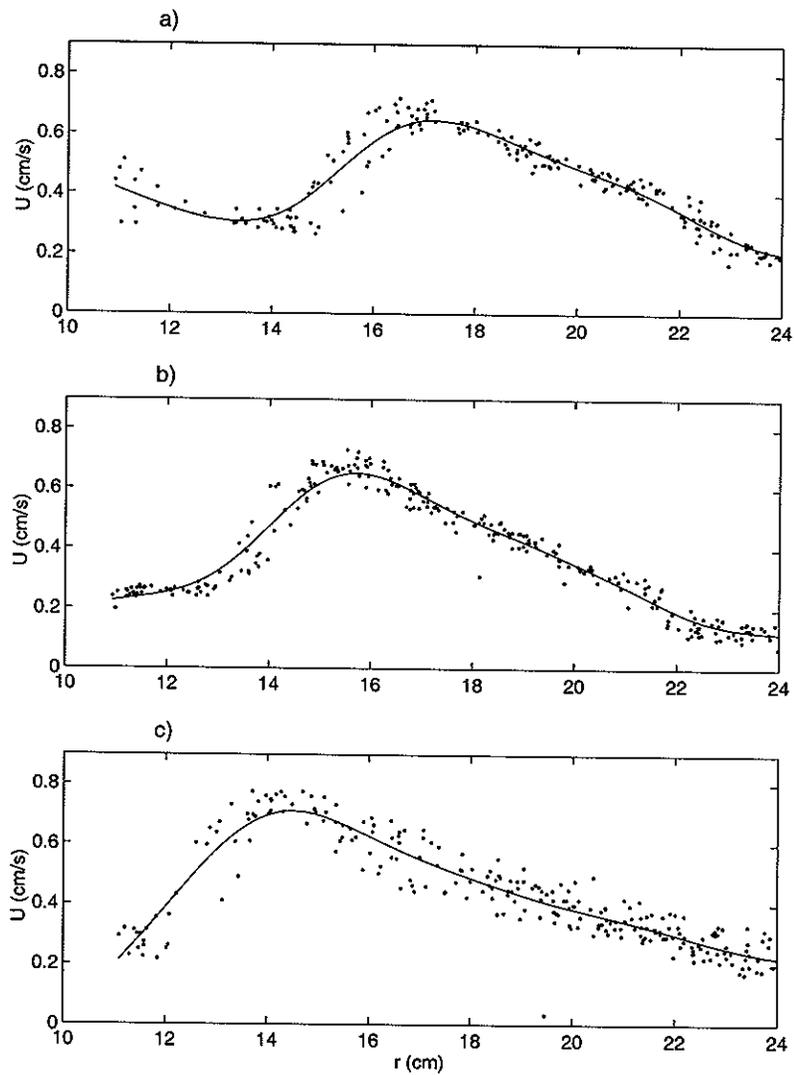


Figura 33: Perfil de velocidad para tres experimentos diferentes con  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , a  $t = 192 T$ , y con  $\alpha = 30^\circ$  (a),  $45^\circ$  (b),  $60^\circ$  (c).

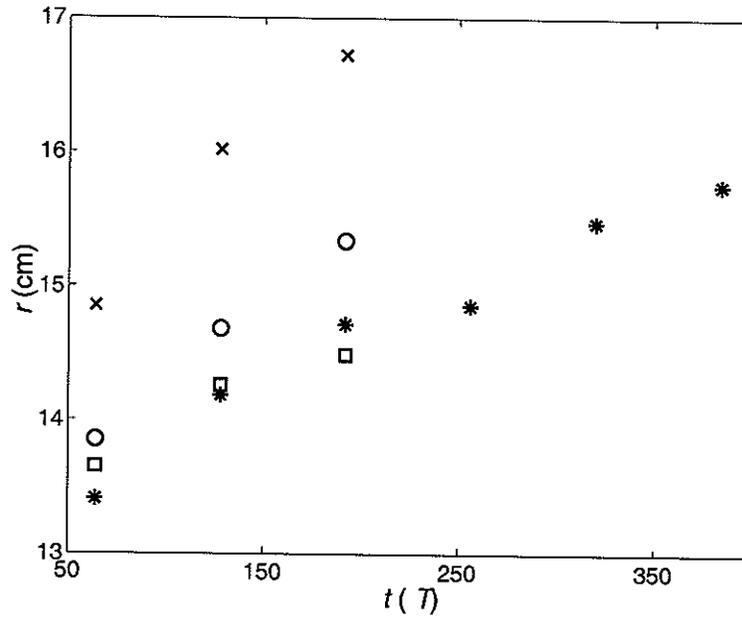


Figura 34: Posición ( $r$ ) del máximo del perfil de velocidad contra el tiempo (en periodos de rotación,  $T$ ) en cuatro experimentos, con  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , y con  $\alpha = 75^\circ$  (asteriscos),  $60^\circ$  (cuadros),  $45^\circ$  (círculos),  $30^\circ$  (cruces).

se puede apreciar que los vectores de velocidad se desvían de su movimiento azimutal debido a que la corriente presenta inestabilidad. En la Fig. 38 se muestra la secuencia de los perfiles de velocidad y vorticidad para este ejemplo. Pueden notarse algunas deflexiones en el perfil de vorticidad conforme avanza el tiempo; sin embargo, los datos de velocidad están muy dispersos y esto puede afectar el ajuste del trazador.

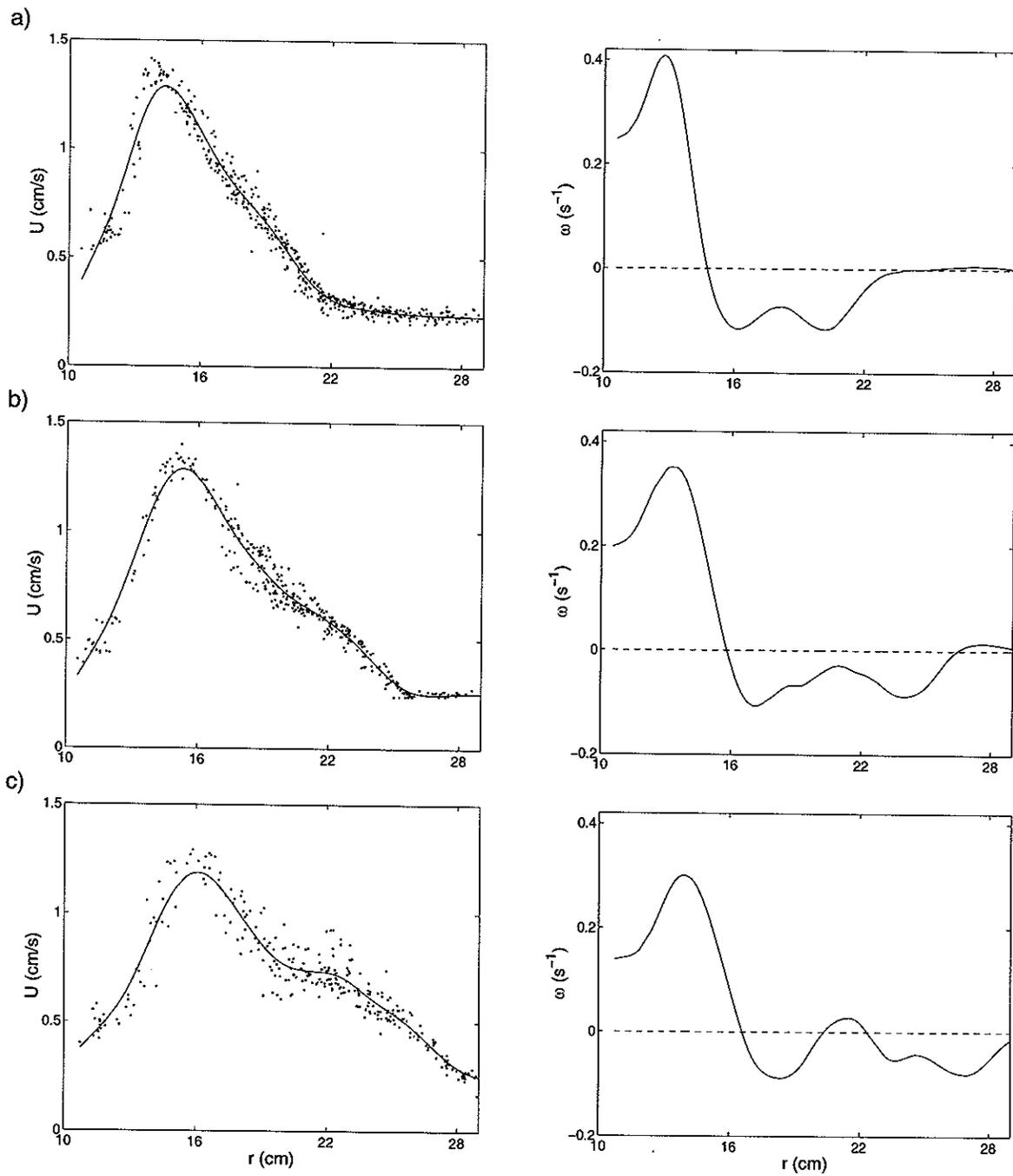


Figura 35: Perfiles de velocidad y vorticidad a tres tiempos diferentes,  $t = 64 T$ ,  $128 T$ ,  $192 T$ , en un experimento con  $\alpha = 45^\circ$ ,  $g' = 3 \text{ cm/s}^2$ .

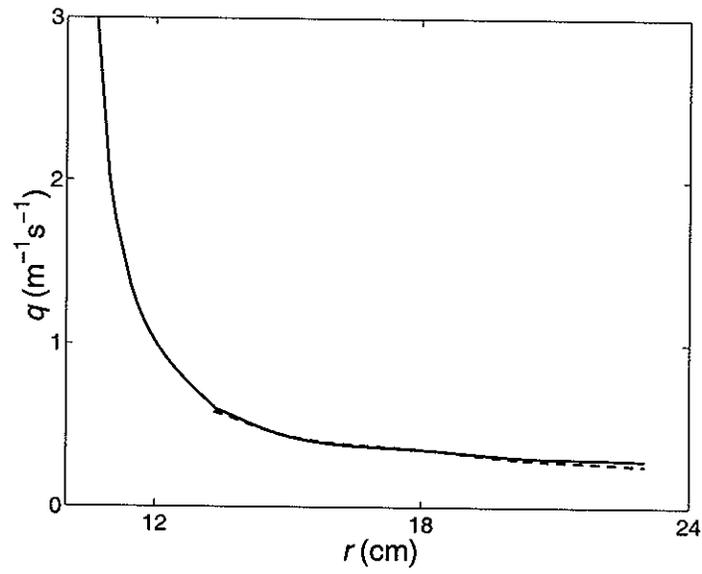


Figura 36: Perfil de vorticidad potencial  $q$  correspondiente al ejemplo de la Fig. 35, para  $t = 64 T$ . En  $r > 13$  cm (aproximadamente) el perfil del espesor de la corriente fue aproximado mediante una función lineal (línea continua), y mediante una función cuadrática (línea discontinua).

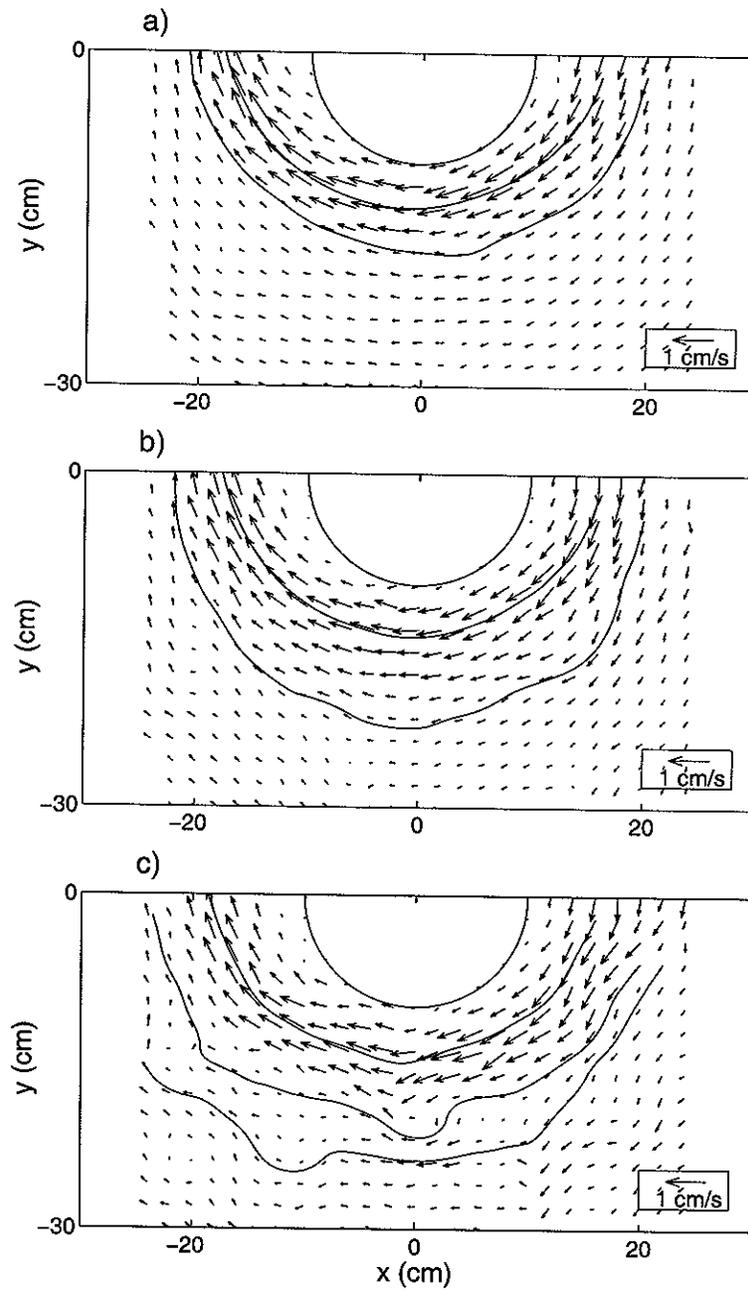


Figura 37: Geometría del flujo en un experimento con  $\alpha = 75^\circ$ ,  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ , a tres tiempos diferentes,  $t = 128 T$  (a),  $256 T$  (b),  $384 T$  (c).

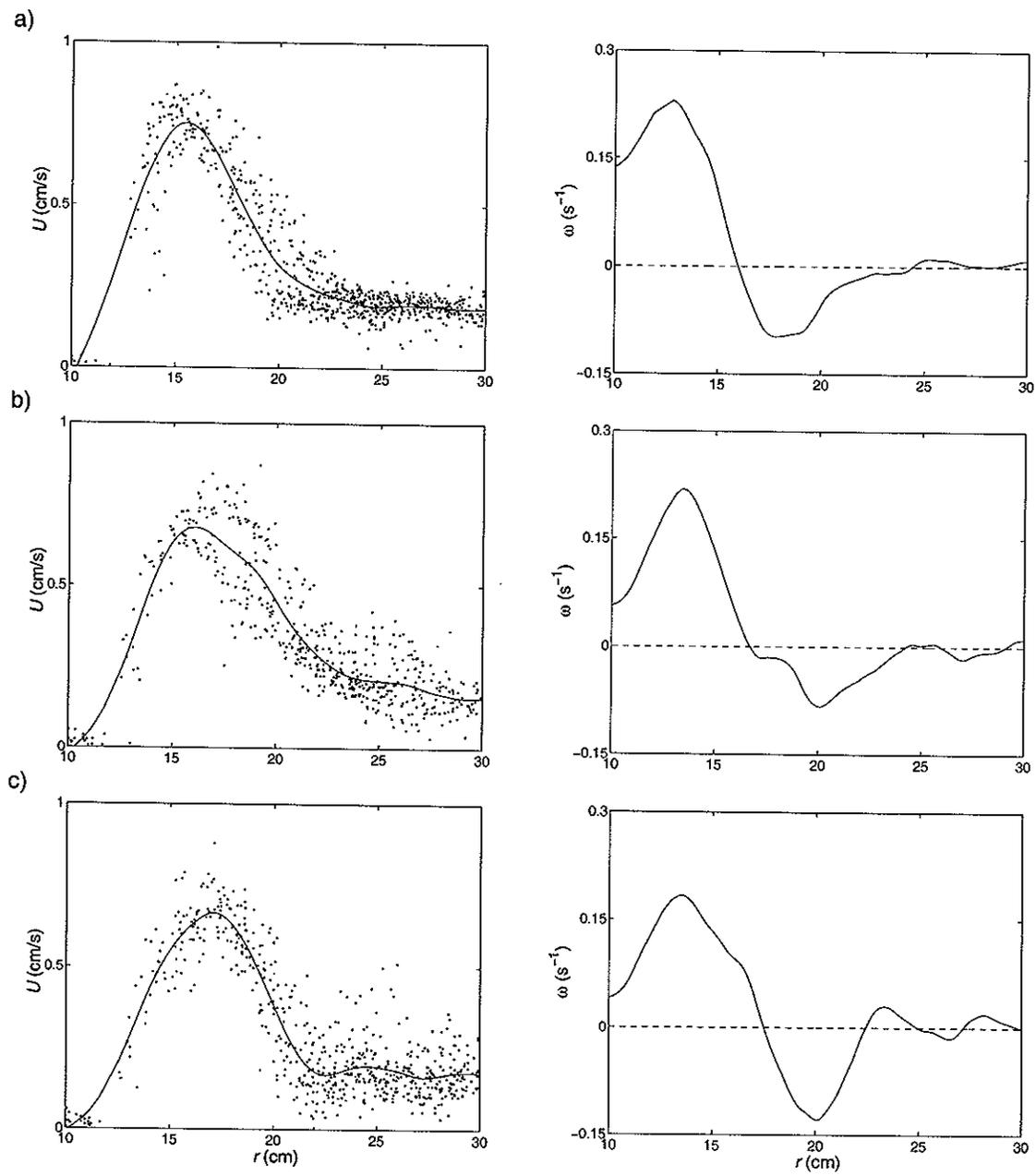


Figura 38: Perfiles de velocidad y vorticidad a tres tiempos diferentes,  $t = 128 T$  (a),  $256 T$  (b),  $384 T$  (c), en un experimento con  $\alpha = 75^\circ$ ,  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ .

## V Conclusiones

En esta tesis se estudia el efecto de la topografía del fondo sobre la estabilidad de las corrientes de gravedad superficiales. Éstas fueron generadas mediante dos técnicas: Colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido, e inyección continua de fluido. La topografía del fondo está representada por una pendiente uniforme. Se utilizaron valores diferentes de esta pendiente.

De las series experimentales se puede concluir que la topografía tiene un efecto estabilizador sobre las corrientes. A fin de establecer si este efecto es debido a la viscosidad o no, es necesario realizar corridas numéricas utilizando un modelo que no incluya fricción. Éstas quedan fuera de los objetivos de esta tesis, pero entran en el trabajo a realizar inmediatamente como continuación de esta investigación.

Para las corrientes generadas mediante el colapso se observa que el comportamiento es muy diferente al caso con una pared vertical reportado por Griffiths y Linden (1982). Tras el colapso, el fluido se extiende radialmente aproximadamente cuatro radios de deformación, y se establece un flujo con una velocidad aproximadamente geostrófica. Posteriormente, se presentan meandros en el flujo, pero éstos se ven inhibidos y desaparecen en la mayoría de los experimentos. Conforme la inclinación del fondo disminuye, la corriente se vuelve más estable, y los meandros desaparecen completamente. Cuando la inclinación es mayor ( $\alpha \geq 60^\circ$ ), algunos de los meandros pueden llegar a separarse de la topografía y generar remolinos.

Para las corrientes generadas mediante la inyección continua algunos de los resultados son consistentes con los reportados por Griffiths y Linden (1981) para el caso con una pared vertical. Una vez que se comienza la inyección del fluido, se establece un flujo cuya velocidad es aproximadamente cuatro veces mayor a la geostrófica. En todos los experimentos la corriente se inestabiliza, pero a diferencia del caso sin topografía,

el tiempo en que la corriente alcanza el tamaño crítico para inestabilizarse es significativamente mayor, y depende del valor de la pendiente del fondo: Conforme menor es la inclinación, mayor es el tiempo que tarda la corriente en alejarse de la topografía e inestabilizarse. El tamaño de la corriente, caracterizado mediante el número de Froude (el cual es una comparación entre el ancho de la corriente y el radio de deformación), se incrementa proporcionalmente con el tiempo (de manera similar al resultado con pared vertical) hasta alcanzar un valor crítico en el cual las inestabilidades comienzan a ser evidentes; este valor es mayor al caso sin topografía en todos los experimentos. La longitud de onda de las inestabilidades es consistente con los resultados de Griffiths y Linden (1981).

En las corrientes inestables (experimentos de colapso con  $\alpha \geq 60^\circ$ , y todos los de inyección continua), el perfil de la velocidad presenta una inflexión a medida que el tiempo transcurre y la corriente se va inestabilizando; esta inflexión se manifiesta en el perfil de la vorticidad relativa como un cambio de signo, el cual se nota ligeramente en el perfil de la vorticidad potencial en las corrientes generadas por colapso, y es inadvertido en las generadas por inyección continua. El perfil de vorticidad potencial decrece monotónicamente desde la costa hacia el frente; aunque en las corrientes generadas por colapso se presenta un máximo relativo. Esta información puede ser útil para el análisis de estabilidad de un modelo teórico. Las corrientes analizadas en esta tesis, tanto las generadas por inyección continua como las generadas por colapso, cumplen con los criterios de inestabilidad reportados por Killworth y Stern (1982), quienes demostraron que un frente en la proximidad de una costa (una pared vertical) es inestable aun cuando la vorticidad potencial tenga una distribución monotónica a través del frente, no es necesario que exista un *extremo* (es decir, un máximo o un mínimo) en el perfil de ésta. Estos resultados pueden ser extendidos al presente caso (un frente adyacente a un fondo inclinado). Estos autores reportan dos clases de inestabilidad.

---

La primera para flujos con vorticidad potencial casi uniforme que son inestables a perturbaciones infinitesimales; sin embargo, para que estos flujos sean inestables deben presentar una inversión del sentido de la corriente. La segunda clase de inestabilidad ocurre en flujos con velocidad nula en la costa que son inestables a perturbaciones finitas; estos flujos tienen como característica adicional que la vorticidad potencial decrece de la costa hacia el frente. Es esta última clase la que puede aplicarse a las corrientes analizadas en esta tesis, pues, como ya se dijo, éstas muestran un decremento monotónico del perfil de la vorticidad potencial hacia el frente. En los casos inestables de las corrientes generadas por colapso puede presentarse un extremo local en dicho perfil, pero es muy suave. Además, la rapidez de fase ( $c$ ) de los meandros concuerda con el resultado de Killworth y Stern (1982), quienes demostraron que la rapidez de fase de sus perturbaciones es pequeña; en las corrientes generadas por inyección continua  $c \sim 0.3$  cm/s, mientras que en las generadas por colapso es aun menor (éstas prácticamente no se propagan). El análisis de estabilidad queda dentro del trabajo posterior a esta tesis, como complemento al estudio de las corrientes de gravedad afectadas por la topografía del fondo.

---

## A Conservación de masa en un problema de ajuste geostrófico

El planteamiento mostrado en este apéndice es aportación del Dr. José L. Ochoa de la Torre, Departamento de Oceanografía Física, CICESE.

En la Fig. 39 se muestra una región sombreada, la cual simboliza una columna diferencial de fluido.

Del teorema fundamental del cálculo se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2} g(s) ds = G(x_2) - G(x_1) \iff \frac{dG(s)}{ds} = g(s) \quad (26)$$

$\forall x_1, x_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_x^{x+dx} g(s) ds &= G(x+dx) - G(x) \\ &= G(x) + \left. \frac{dG}{dx} \right|_x dx + O(dx^2) - G(x) \\ &= \left. \frac{dG}{dx} \right|_x dx + O(dx^2) \\ &= g(x) dx + O(dx^2); \end{aligned} \quad (27)$$

y en general

$$\int_{x-a}^{x-a+Adx} g(s) ds = g(x-a) Adx + O(dx^2). \quad (28)$$

Por otro lado, cada columna de fluido conserva masa (área transversal), lo cual implica que

$$\int_{x_1-D(x_1)}^{x_2-D(x_2)} H(s) ds = \int_{x_1}^{x_2} h(s) ds, \quad (29)$$

donde  $D(x)$  es la función desplazamiento de las columnas de fluido, definida tal que la columna que en el estado final se encuentra en la posición  $x$  se encontraba originalmente en la posición  $x - D(x)$ ; además de que se cumple que  $D(x \leq X) = 0$ , y  $D(x = L)$

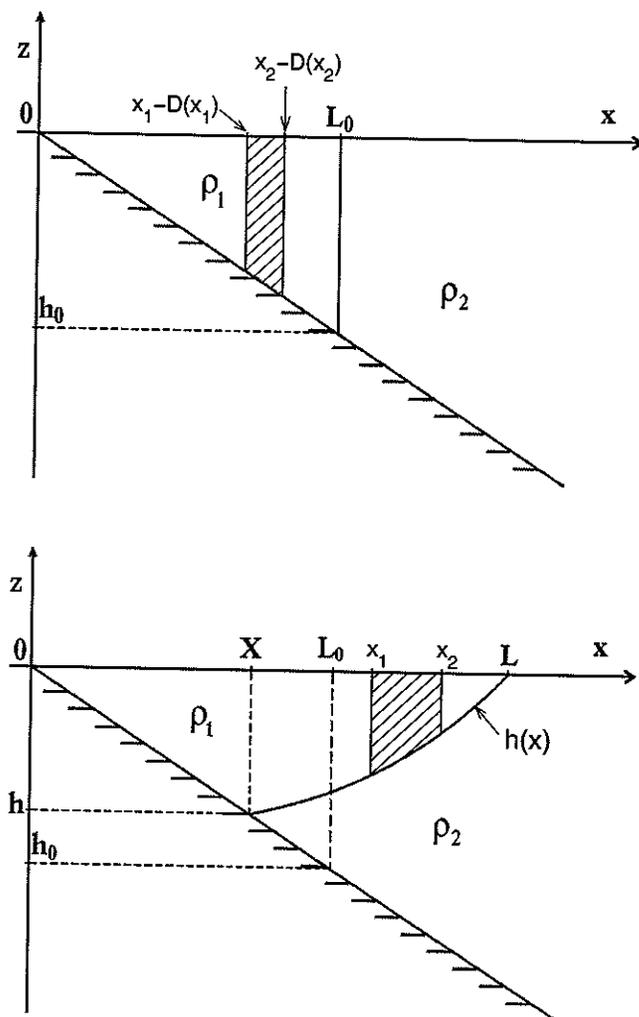


Figura 39: Esquema del perfil transversal de una corriente generada mediante el colapso gravitacional de un volumen fijo de fluido flotante  $\rho_1 < \rho_2$ . El estado inicial de la corriente es el reposo (arriba), mientras que el estado final es el ajuste geostrófico (abajo). La región sombreada en ambos estados simboliza el área transversal de una columna diferencial de fluido.

$=L - L_0$ .  $H(s)$  y  $h(s)$  son el espesor inicial y final, respectivamente, de la corriente;  $s$  es una variable "muda".

El espesor inicial de la corriente está dado por la pendiente, es decir,

$$H(x - D) = \begin{cases} m(x - D) & , x \leq L_0 \\ 0 & , x > L_0 \end{cases} \quad (30)$$

donde  $m = |\tan \alpha|$  ( $\alpha$  es el ángulo de inclinación del fondo con respecto a la horizontal).

Si

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x + dx \end{cases} \quad (31)$$

entonces

$$\int_{x-D(x)}^{x+dx-D(x+dx)} m s ds = \int_x^{x+dx} h(s) ds \quad (32)$$

Aplicando (27) y (28), la ecuación (32) queda

$$m(x - D)(1 - D_x)dx + O(dx^2) = h(x)dx + O(dx^2), \quad (33)$$

donde el subíndice  $x$  indica derivada con respecto a esa variable. Así, a  $O(dx)$

$$D_x = \frac{h}{m(D - x)} + 1 \quad (34)$$

## B Mediciones del campo de velocidad

Actualmente existen varios algoritmos de *velocimetría de partículas* para extraer el campo bidimensional de la velocidad a partir de una secuencia de imágenes grabadas. Una de estas técnicas es *particle tracking velocimetry (PTV)*. PTV sigue individualmente a las partículas en imágenes subsecuentes (Fig. 40), y produce un alto número de vectores de velocidad si la cantidad de partículas es lo suficientemente grande. En promedio, PTV requiere una secuencia de por lo menos 10 imágenes.

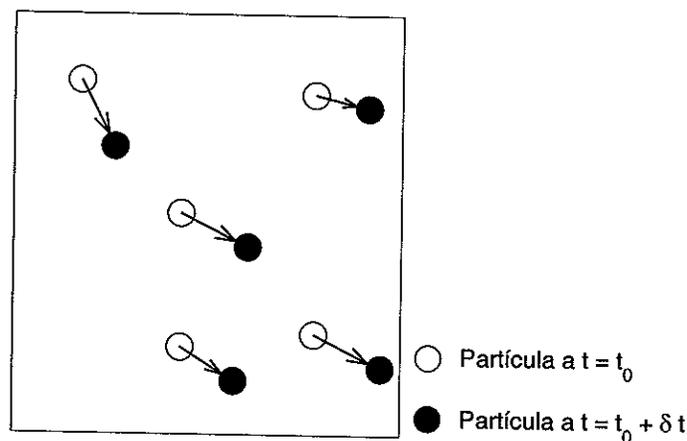


Figura 40: Esquema del seguimiento de partículas mediante PTV (Van der Plas, 2000).

La Fig. 41 muestra el esquema del algoritmo de PTV; para detalles, vea Dalziel (1993), Van der Plas (1995, 2000) y Van der Plas *et al.* (1999). A partir de los experimentos se capturan las imágenes (Paso 1), las cuales contienen las partículas a localizar. En general las partículas tienen una intensidad (brillo) mayor que el fondo. Se establece entonces un cierto *umbral* de intensidad; en la imagen todos los píxeles con una intensidad mayor a la del umbral son considerados blancos y los de menor intensidad son considerados negros (Paso 2). Un área de píxeles blancos adyacentes es llamada *cúmulo*. Sin embargo, pueden existir algunos cúmulos espurios debidos al ruido o a la irregularidad del medio. Para determinar si los cúmulos son reales se deben definir

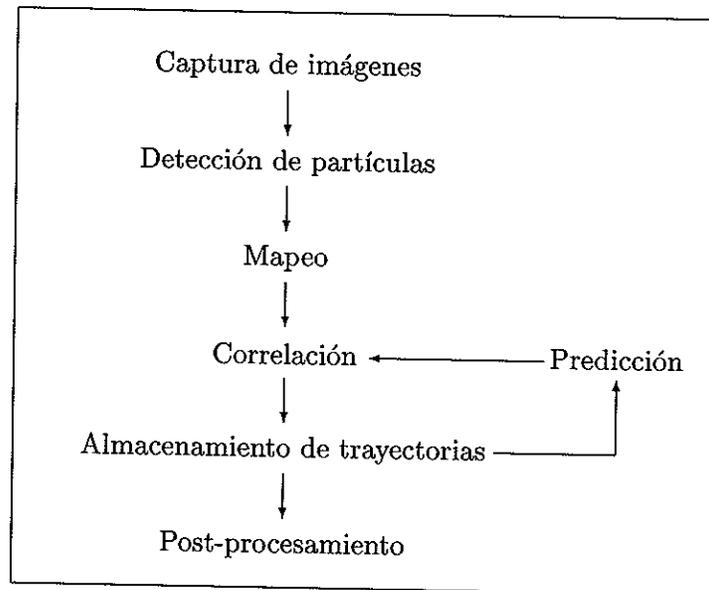


Figura 41: Algoritmo de PTV.

ciertos criterios, como la elipticidad, tamaño o intensidad. Los cúmulos que pasan estos criterios son llamados partículas. Las posiciones de las partículas son representadas por las de sus centroides (Paso 3). Estas posiciones se encuentran en coordenadas de píxeles, pero son traducidas a coordenadas reales mediante un mapeo obtenido a partir de posiciones conocidas en el dispositivo experimental. Posteriormente, cada partícula de la imagen  $F-1$  (a un cierto tiempo) es correlacionada con una “partícula candidata” en la imagen  $F$  (a un tiempo subsecuente), donde estas “partículas candidatas” son todas las partículas dentro de una distancia máxima de correlación a partir de la partícula en la imagen  $F-1$  (Paso 4). La Fig. 42 muestra el proceso de correlación utilizado en PTV. Tras realizar la correlación en varias imágenes, se construyen las trayectorias (Paso 5). El algoritmo de correlación es mejorado mediante un algoritmo de predicción (Paso 6). Este algoritmo utiliza información del campo local de la velocidad y predice la posición de las partículas en la imagen subsecuente. Al encontrar la partícula más cercana a la posición estimada se incrementa el número de correlaciones exitosas.

Es común que se presente ruido en las imágenes de velocidad, es decir, algunos

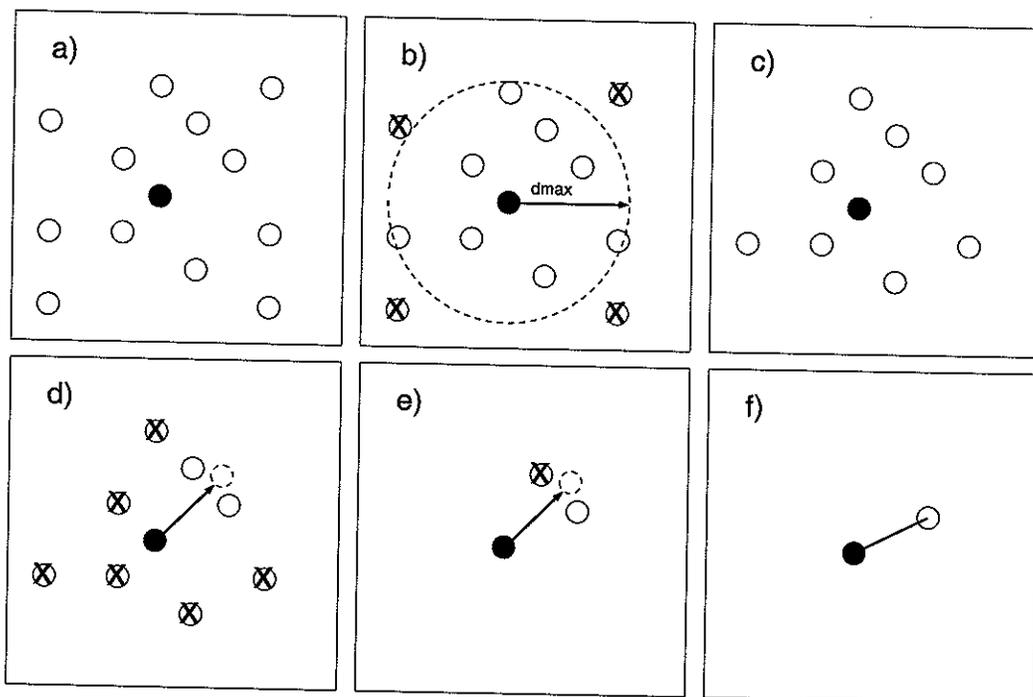


Figura 42: Esquema del proceso de correlación utilizado en PTV. a) El círculo negro simboliza una partícula al tiempo  $t_0$ , mientras que los círculos blancos partículas al tiempo  $t_0 + \delta t$ . b) Todas las partículas a  $t = t_0 + \delta t$  que se encuentren dentro de una distancia máxima de correlación ( $d_{max}$ ), definida de antemano, son correlacionadas con la partícula a  $t = t_0$ . c) Las demás partículas son eliminadas de la correlación. d) Se estima la posición que tendrá la partícula a  $t = t_0 + \delta t$ , mediante  $\mathbf{x}_{t_0+\delta t} = \mathbf{x}_{t_0} + \mathbf{u}_0 \delta t$  (donde  $\mathbf{x}_{t_0}$  es la posición de la partícula a  $t = t_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  es una medida de su velocidad, y  $\delta t$  es el avance en el tiempo), sólo se correlaciona la partícula que se encuentre más cercana a esta posición; en este ejemplo se correlacionaron dos partículas, ya que se encuentran a la misma distancia de la posición estimada. e) Con base en otros criterios, como son la forma y el brillo de la partícula “candidata”, se selecciona la partícula más probable a ser la indicada. f) La distancia entre la partícula a  $t_0$  y la correlacionada es la distancia estimada recorrida por la partícula en el  $\delta t$ .

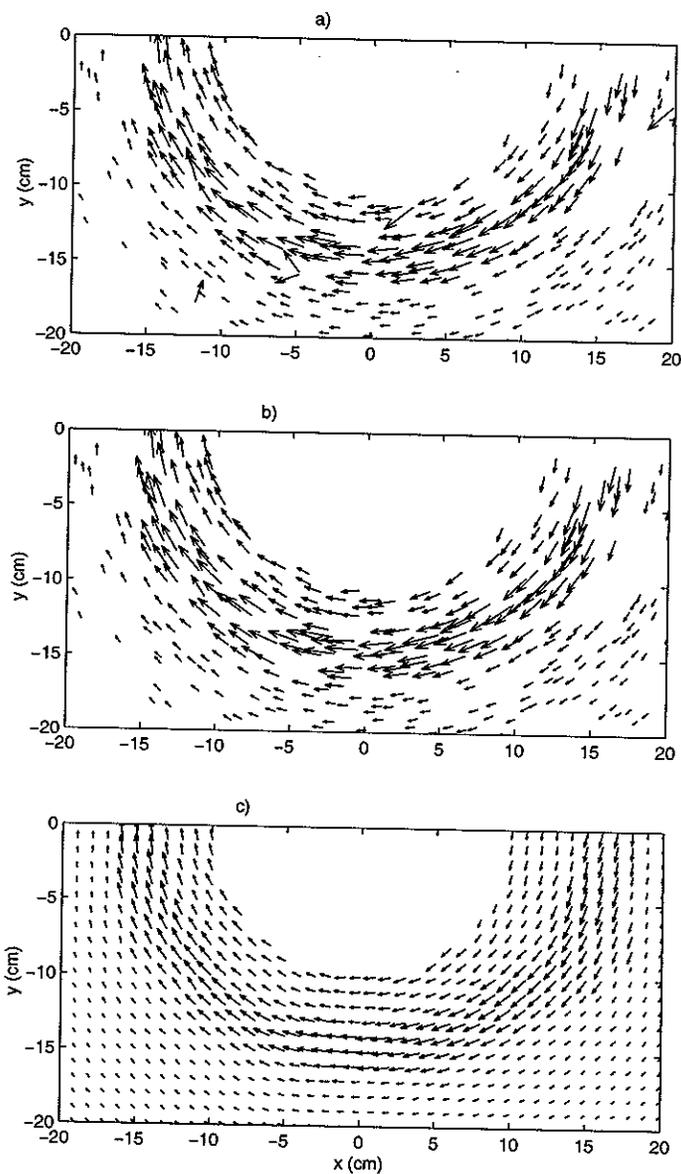


Figura 43: Ejemplo de un experimento usando la técnica de inyección continua, con  $\alpha = 30^\circ$  y  $g' = 1 \text{ cm/s}^2$ ,  $t = 64 T$ . El primer recuadro (a) muestra los datos originales con ruido, en la cual hay alrededor de seis vectores erróneos. El segundo recuadro (b) muestra los datos “límpios”, sin los vectores erróneos. El tercer recuadro (c) muestra la velocidad interpolada en una malla regular.

vectores que no son físicamente posibles. Este ruido tiene que ser removido antes de extraer la información del campo de la velocidad (Fig. 43).

## Referencias

- Chabert d'Hières, G., H. Didelle y D. Obaton: 1991. "A laboratory study of surface boundary currents: Application to the Algerian Current". *J. Geophys. Res.*, 96: C7, 12539-12548.
- Chia, F., R. Griffiths y P. Linden: 1982. "Laboratory experiments on fronts. Part II: The formation of cyclonic eddies at upwelling fronts". *J. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 19: 189-206.
- Choboter, P. y G. Swaters: 2000. "On the baroclinic instability of axisymmetric rotating gravity currents with bottom slope". *J. Fluid Mech.*, 408: 149-177.
- Dalziel, S.B.: 1993. "Rayleigh-Taylor instability: experiments with image analysis". *Dyn. Atmos. Oceans*, 20: 127-153.
- Gervasio, L.: 1997. *Instabilités des courants côtiers en présence de topographie. Application au courant algérien*. Tesis doctoral, L'Université Paris VI. 299 pp.
- Griffiths, R. y P. Linden: 1981. "The stability of buoyancy-driven coastal currents". *Dyn. Atmos. Oceans*, 5: 281-306.
- Griffiths, R. y P. Linden: 1982. "Laboratory experiments on fronts. Part I: density-driven boundary currents". *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 19: 159-187.
- Griffiths, R., P. Killworth y M. Stern: 1982. "Ageostrophic instability of ocean currents". *J. Fluid Mech.*, 117: 343-377.
- Griffiths, R. W.: 1986. "Gravity currents in rotating systems". *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18: 59-89.
-

- Killworth, P.D. y M.E. Stern: 1982. "Instabilities on density-driven boundary currents and fronts". *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.*, 22: 1-28.
- Lavín, M., G. Gaxiola-Castro, J. Robles y K. Richter: 1995. "Winter water masses and nutrients in the Northern Gulf of California". *J. Geophys. Res.*, 8(10): 1107-1127.
- Plas, G.A.J. van der: 1995. *Introduction Manual for Particle Tracking with DigImage*. Reporte interno R-1323-D, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- Plas, G.A.J. van der, R.N. Kieft y C.C.M. Rindt: 1999. "Application of a High Resolution Particle Velocimetry method in mixed convection flows". *Proceedings of the Third International Workshop on PIV '99*: 177-182.
- Plas, G.A.J. van der: 2000. *The PTVWIZ Quick Guide*. Reporte interno R-1532-O, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- Ripa, P.M.: 2001. "Ajuste de datos por cuadrados mínimos". En prensa en *Ciencias Marinas*.
- Simpson, J.: 1997. *Gravity Currents*. Cambridge University Press. Great Britain.
- Taylor, J.R.: 1997. *An Introduction to Error Analysis*. Second Edition. University Science Books. California, U.S.A.
- Thomas, P. y P. Linden: 1998. "A bi-modal structure imposed on gravity driven boundary currents in rotating systems by effects of the bottom topography". *Experiments in Fluids*, 25: 388-391. Springer-Verlag.
-