

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y  
DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y  
TELECOMUNICACIONES

**CONTROL VISUAL DE ROBOTS  
EN TIEMPO REAL**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el  
grado de DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

**EUSEBIO BUGARÍN CARLOS**

Ensenada, Baja California, México. Septiembre 2009.

RESUMEN de la Tesis de Eusebio Bugarín Carlos, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con ORIENTACIÓN en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, México. Septiembre de 2009.

## CONTROL VISUAL DE ROBOTS EN TIEMPO REAL

Resumen aprobado por:

---

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez  
Director de tesis

Los robots industriales modernos son capaces de realizar tareas a altas velocidades con desempeños sorprendentes, sin embargo, esto se logra acondicionando rigurosamente el robot y su entorno. Por otra parte, los robots avanzados, llamados así por tener marcadas características de autonomía y por operar en ambientes adversos o por ejecutar tareas de servicio, todavía se encuentran en etapas preliminares; debido principalmente a que el acondicionamiento para estos robots avanzados es sumamente complicado. En este sentido, trabajos recientes muestran que el uso adecuado de información visual puede relajar la estructuración realizada en un robot industrial y abrir nuevos caminos para el desarrollo satisfactorio de los robots avanzados. De esta manera es que surge el control servo-visual como una estrategia de control que utiliza un sistema de visión con una o más cámaras para establecer el movimiento de un sistema robótico. El presente trabajo de tesis describe el desarrollo de un sistema computacional de visión de tiempo real y aborda el problema de control servo-visual tanto en manipuladores como en robots móviles tipo unicycle. Se diseñan controladores servo-visuales utilizando características de imagen globales de objetos de interés planos con forma arbitraria o irregular. La selección de las características de imagen se realiza en base a combinaciones de momentos de imagen de la proyección en el plano de imagen de dichos objetos de interés. En lo que respecta a manipuladores, se diseñan controladores basados en la estructura del controlador por Jacobiano transpuesto tanto para la configuración cámara fija como para la configuración cámara en mano y la estabilidad del sistema robótico y su robustez ante incertidumbres paramétricas se analizan en el sentido de Lyapunov. En tanto que para los unicycles, se diseña un controlador para la navegación de un unicycle en configuración cámara fija mediante la filosofía de campos de velocidad, el cual es independiente de los parámetros de la cámara.

Palabras clave: Robótica, control servo-visual, sistemas de visión de tiempo real.

ABSTRACT of the thesis of Eusebio Bugarín Carlos, presented as partial requirement for obtaining the DOCTOR OF SCIENCE degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATION with ORIENTATION in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California, Mexico. September 2009.

## REAL-TIME VISUAL CONTROL OF ROBOTS

Modern industrial robots can achieve high-speed tasks with amazing performances, however this is done by a rigid conditioning of the robot and its environment. On the other hand, advanced robots, which are robots with marked characteristic of autonomy that operate in adverse ambient or that execute service tasks, are still found in preliminary stages; mainly due to the fact that the conditioning for these advanced robots is extremely complex. In this sense, recent works show that an adequate use of visual information can relax the setup on an industrial robot and can open new paths for the satisfactory development of the advanced robots. In this way, visual servoing emerges as a control strategy that uses a vision system with one or more cameras to establish the movement of a robotic system. The present thesis work describes the development of a real-time computer vision system and approaches the visual servoing problem both to manipulators and to mobile unicycle-type robots. Global image features of a plane target object with arbitrary or irregular shape are used to design the visual controllers. The image feature selection are accomplished in base to image moments combinations of the projection in the image plane of such target objects. Insofar as manipulators, the controllers are designed under the transpose Jacobian structure both for the fixed-camera configuration and for the camera-in-hand configuration; the robotic system stability and parametric robustness are analyzed in the Lyapunov sense. While for unicycles, it is designed a controller for the navigation of a unicycle in fixed-camera configuration via the velocity fields philosophy, which is independent of the camera parameters.

Keywords: Robotics, visual servoing, real-time vision systems.

## DEDICATORIA

Muy especialmente a mi esposa:

Ana Yaveni.

Y a mis hijas:

Yutsil y Ehinea.

## AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis: Dr. Rafael Kelly; a los miembros de mi comité de tesis: Dr. César Cruz, Dr. Vassili Spirine, Dr. Héctor Benítez y Dr. Humberto Sossa; y a todas las personas que hicieron posible este proyecto de tesis doctoral.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica y al Instituto Tecnológico de Ensenada.

# CONTENIDO

	Pág.
<b>I Introducción</b>	<b>1</b>
I.1 Control servo-visual (visual servoing) . . . . .	4
I.2 Trabajos representativos del control servo-visual . . . . .	7
I.2.1 Manipuladores . . . . .	8
I.2.2 Robots móviles . . . . .	12
I.3 Objetivos . . . . .	14
I.4 Organización del documento . . . . .	16
<b>II Preliminares</b>	<b>18</b>
II.1 Modelos de imagen . . . . .	18
II.1.1 Modelos de cámara obscura (pinhole camera) . . . . .	22
II.1.2 Lentes . . . . .	25
II.1.3 Modelo de la cámara con lente delgada . . . . .	32
II.2 Momentos de imagen . . . . .	36
II.2.1 Definición . . . . .	37
II.2.2 Momentos de orden dos . . . . .	39
II.2.3 Momentos de orden tres . . . . .	42
II.2.4 Invariantes . . . . .	43
II.2.5 Transformación de momentos . . . . .	46
II.3 Modelado del robot manipulador . . . . .	56
II.3.1 Modelo cinemático . . . . .	58

<b>CONTENIDO (Continuación)</b>	<b>Pág.</b>
II.3.2 Modelo dinámico . . . . .	61
II.4 Modelado del robot móvil tipo unicycle . . . . .	64
II.4.1 Modelo cinemático . . . . .	65
<b>III Control servo-visual directo de manipuladores planares</b>	<b>68</b>
III.1 Configuración cámara fija . . . . .	69
III.1.1 Formulación . . . . .	69
III.1.2 Controlador . . . . .	73
III.1.3 Análisis de robustez . . . . .	76
III.1.4 Selección de características de imagen . . . . .	82
III.1.5 Simulaciones . . . . .	88
III.2 Configuración cámara en mano . . . . .	97
III.2.1 Formulación y ley de control . . . . .	97
III.2.2 Selección de características de imagen . . . . .	100
III.2.3 Simulaciones . . . . .	105
III.3 Conclusiones . . . . .	110
<b>IV Navegación servo-visual de unicyclos</b>	<b>111</b>
IV.1 Formulación . . . . .	111
IV.2 Controlador . . . . .	116
IV.3 Simulaciones . . . . .	119
IV.4 Conclusiones . . . . .	123

<b>CONTENIDO (Continuación)</b>	<b>Pág.</b>
<b>V Conclusiones generales</b>	<b>124</b>
V.1 Problemas abiertos . . . . .	125
<b>LITERATURA CITADA</b>	<b>127</b>
<b>APÉNDICES</b>	
<b>A Sistema de visión: RTSVC</b>	<b>144</b>
A.1 Sistemas de tiempo real . . . . .	145
A.2 Descripción del sistema . . . . .	146
A.2.1 Módulo de edición . . . . .	147
A.2.2 Módulo de ejecución . . . . .	149
A.3 Aplicación del sistema al guiado de unicyclos . . . . .	150
A.3.1 Modelado . . . . .	152
A.3.2 Sistema de control . . . . .	153
A.3.3 Experimentos . . . . .	154
A.4 Sobre la caracterización del sistema de visión . . . . .	155
<b>B Teorema multinomial y ley distributiva para sumatorias múltiples</b>	<b>160</b>
B.1 Teorema multinomial . . . . .	160
B.2 Ley distributiva para sumatorias múltiples . . . . .	161
<b>C Variación respecto al tiempo de los momentos de imagen</b>	<b>162</b>
C.1 Momentos regulares de imagen . . . . .	162

<b>CONTENIDO (Continuación)</b>	<b>Pág.</b>
C.2 Momentos centrales de imagen . . . . .	167
<b>D Identidades en sumatorias</b>	<b>171</b>
D.1 Identidad 1 . . . . .	171
D.2 Identidad 2 . . . . .	172

# LISTA DE FIGURAS

Fig.		Pág.
1	Estructura mecánica de (a) un robot manipulador de $n$ g.d.l., (b) un robot móvil con ruedas de tracción trasera y (c) un robot móvil tipo unicycle. . . . .	2
2	Esquema general del control servo-visual. . . . .	5
3	Cámara obscura (pinhole camera). . . . .	22
4	Geometría de la proyección en perspectiva. . . . .	23
5	Reflexión y refracción en la interfase entre dos medios homogéneos. . .	26
6	Refracción paraxial. . . . .	27
7	Formación de imágenes para el caso de una lente delgada. . . . .	28
8	Puntos focales de una lente delgada. . . . .	31
9	Esquema del modelo de una lente gruesa. . . . .	32
10	Cámara con lente delgada. . . . .	33
11	Elipse imagen. . . . .	41
12	Vista del objeto perpendicular al eje óptico de la cámara. . . . .	47
13	Estructura mecánica de un robot manipulador de $n$ g.d.l. . . . .	56
14	Estructura simplificada de un robot móvil tipo unicycle. . . . .	65
15	Vista del manipulador planar en configuración cámara fija. . . . .	69
16	Esquema del Robot Pelicano. . . . .	89
17	Objeto de interés 2. . . . .	91
18	Evolución respecto al tiempo de $\tilde{\mathbf{s}}_a$ para el Escenario 1. . . . .	93

## LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Fig.		Pág.
19	Traza del centroide $\mathbf{y}_g$ del objeto de interés para el Escenario 1. . . . .	94
20	Pares aplicados en el Escenario 1. . . . .	94
21	Evolución respecto al tiempo de $\tilde{\mathbf{s}}_a$ para el Escenario 2. . . . .	96
22	Traza del centroide $\mathbf{y}_g$ del objeto de interés para el Escenario 2. . . . .	97
23	Pares aplicados en el Escenario 2. . . . .	97
24	Vista del manipulador planar en configuración cámara en mano. . . . .	98
25	Evolución respecto al tiempo de $\tilde{\mathbf{s}}_a$ . . . . .	107
26	Traza del centroide $\mathbf{y}_g$ del objeto de interés. . . . .	108
27	Pares aplicados. . . . .	108
28	Evolución respecto al tiempo de $\tilde{\mathbf{s}}_a$ . . . . .	109
29	Vista de planta del unicycle en configuración cámara fija. . . . .	112
30	Campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{y}_g)$ . . . . .	120
31	Traza del centroide $\mathbf{y}_g$ . . . . .	121
32	Evolución respecto al tiempo de $\ \mathbf{e}\ $ . . . . .	122
33	Evolución respecto al tiempo de $e_c$ . . . . .	122
34	Traza del centroide $\mathbf{y}_g$ estimando los parámetros 3D del objeto al 50%. . . . .	123
35	Diagrama de flujo del programa principal “nombre_proyecto.rtsvc.c” . . . . .	149
36	Diagrama de operación general del módulo de ejecución. . . . .	150
37	Interfaz de usuario del módulo de ejecución. . . . .	151
38	Secuencia del movimiento del robot móvil. . . . .	155

39	Histograma de los tiempos de ejecución del primer caso. . . . .	156
40	Histograma de los tiempos de ejecución del segundo caso. . . . .	157
41	Histograma de los tiempos de ciclo para el segundo caso. . . . .	158
42	Gráfica de ciclos perdidos con el sistema sobrecargado. . . . .	158

# LISTA DE TABLAS

Tabla		Pág.
I	Orientación del eje principal mayor. . . . .	40
II	Asimetría basada en los signos de $s_{k_1}$ y $s_{k_2}$ . . . . .	43
III	Parámetros de la cámara. . . . .	90
IV	Momentos Cartesianos del objeto de interés 1 respecto a $O_1 - O_2$ . . . .	91
V	Momentos Cartesianos del objeto de interés 2 respecto a $O_1 - O_2$ . . . .	92
VI	Parámetros intrínsecos de la cámara. . . . .	105

# I Introducción

La *robótica* es la ciencia que estudia el diseño, control y aplicación de los *robots*. De acuerdo a las características de autonomía y a las aplicaciones analizadas en los robots, la robótica puede ser dividida en *robótica industrial* y *robótica avanzada* (Sciavicco y Siciliano, 2000).

Por supuesto, la robótica industrial estudia lo concerniente a los *robots industriales*, los cuales han sido definidos por la Federación Internacional de Robótica (bajo la norma ISO/TR 8373) como máquinas manipuladoras con varios grados de libertad controladas automáticamente, reprogramables y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales (Kelly y Santibáñez, 2003). Los robots industriales modernos son capaces de desarrollar tareas a altas velocidades con desempeños sorprendentes; debido a lo anterior se considera que la robótica industrial ya está alcanzando su estado de madurez. Sin embargo, cabe mencionar que estos excelentes desempeños se logran acondicionando rigurosamente el robot y su espacio de trabajo.

La robótica avanzada, en cambio, se refiere a la parte de la robótica que estudia robots con marcadas características de autonomía y con aplicaciones que resuelven problemas de operación en ambientes adversos (espacial, submarino, nuclear, militar, etc.) o que ejecutan tareas de servicio (aplicaciones domésticas, ayuda médica, asistencia a discapacitados, agricultura, etc.). Como puede notarse, el acondicionamiento del entorno en estas aplicaciones es mucho más complejo que en el caso de los robots industriales. El análisis y estudio de la robótica avanzada está en etapas iniciales y hasta el momento sólo se cuenta con robots prototipo.

Tomando en cuenta la capacidad de desplazamiento como una característica importante, los robots pueden ser clasificados en *robots manipuladores* y *robots móviles*. Para propósitos del desarrollo de este trabajo de tesis, los robots manipuladores (o simplemente manipuladores) serán definidos como (Kelly y Santibáñez, 2003; Arimoto, 1996):

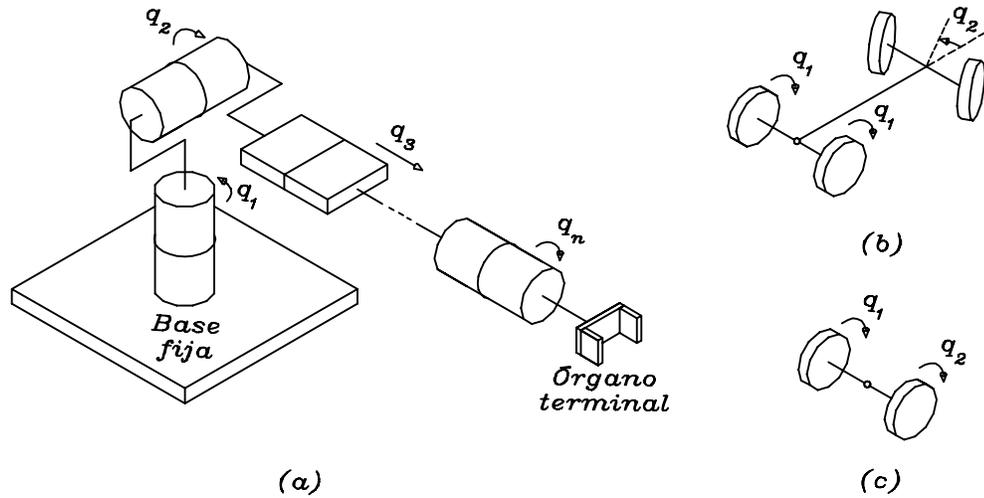


Figura 1: Estructura mecánica de (a) un robot manipulador de  $n$  g.d.l., (b) un robot móvil con ruedas de tracción trasera y (c) un robot móvil tipo unicyclo.

brazos mecánicos compuestos por eslabones rígidos conectados en forma serial a través de articulaciones desde una *base fija* hasta el último eslabón denominado *órgano terminal*. Las articulaciones pueden ser rotacionales o prismáticas<sup>1</sup> (traslacionales) y su número, es decir, la cantidad de articulaciones en un manipulador determina su número de *grados de libertad* (g.d.l.). La Figura 1.(a) muestra la estructura mecánica de un manipulador de  $n$  g.d.l. Para especificar la postura (posición y orientación) en el espacio tridimensional del órgano terminal del robot son necesarios 6 g.d.l: 3 para la posición y 3 para la orientación; aunque, dependiendo de la tarea a desarrollar, se diseñan manipuladores con un número mayor o menor de articulaciones.

En contraste, un robot móvil tiene la capacidad de desplazarse dentro de su ambiente de trabajo; de esta forma se pueden encontrar robots móviles terrestres con patas o con ruedas, robots móviles aéreos, espaciales y marinos. La Figura 1.(b) presenta la estructura mecánica de un robot móvil terrestre con ruedas de tracción trasera, mientras que la Figura 1.(c) muestra la estructura mecánica de un robot móvil tipo unicyclo caracterizado por constar de 2 ruedas actuadas independientemente. En este

<sup>1</sup>O una combinación de ambas, aunque aquí no se estudia este caso.

trabajo de tesis se trabajará sólo con robots manipuladores y con robots móviles tipo unicycle.

Como se mencionó, los robots industriales modernos son capaces de realizar tareas en forma sorprendente aunque acondicionando rígidamente tanto el robot como el espacio de trabajo; y los robots avanzados, por el momento, sólo están en etapas de prototipo. Estudios recientes muestran que la incorporación de percepción visual en un robot puede mejorar considerablemente su desempeño (Hutchinson *et al.*, 1996). De tal manera que, mediante el uso adecuado de la información visual obtenida por un sistema de visión, se puede relajar la estructuración realizada en un robot industrial y abrir nuevos caminos para el desarrollo satisfactorio de los robots avanzados. Un sensor de visión imita el sentido de la vista del ser humano y permite realizar mediciones sin contacto.

En un sentido estricto, para que un robot interactúe con el medio ambiente, necesita de sensores que le permitan obtener información de dicha interacción. Este tipo de sensores se denominan *exteroceptivos*. En contraste, los sensores *propioceptivos* detectan y miden el estado interno del robot. La mayoría de los robots comerciales vienen equipados sólo con sensores propioceptivos y las tareas que desempeñan las realizan en lazo abierto sin medir el estado del medio ambiente. Un sensor de visión es un sensor exteroceptivo que permitiría cerrar el lazo de control para que el robot interactúe adecuadamente con su entorno.

Particularmente, un robot con información visual no necesitaría conocer anticipadamente las coordenadas de su espacio de trabajo ni la de otros objetos alrededor de él, como frecuentemente ocurre. De esta manera, se podrían eliminar procesos de enseñanza en un robot y permitir tareas que no sean estrictamente repetitivas. La percepción visual también provee el potencial de relajar la exactitud y rigidez mecánica requeridas por un mecanismo robótico convencional y por consecuencia reducir costos. En este sentido, las deficiencias del mecanismo podrían ser compensadas por el sensor de visión y su retroalimentación. Por ejemplo, en Jägersand *et al.* (1997) se muestra

como se incrementa la exactitud en el posicionamiento de un robot con juego mecánico significativo utilizando retroalimentación visual.

De esta manera es que se justifica ampliamente la incorporación de sensores de visión en un robot para determinar su movimiento en una tarea dada. En la siguiente sección se verán algunas definiciones acerca del estudio de robots con visión, así como su historial.

## I.1 Control servo-visual (visual servoing)

Los robots con visión han sido estudiados desde la década de 1970 (Corke, 1993). Sin embargo, debido a las limitaciones tecnológicas, los primeros robots de este tipo manejaban la estrategia de lazo abierto conocida como *ver-y-mover estático* (static look-and-move) (Weiss *et al.*, 1987). Esta estrategia de ver-y-mover estático consiste en varios pasos secuenciales para determinar el movimiento de un robot. Primero, un sistema de visión debe extraer características de imagen de un objeto de interés en la escena. Luego, estas características de imagen deben brindar información suficiente para interpretar adecuadamente la escena. Y, finalmente, de acuerdo a la interpretación de la escena, tomar una decisión en el itinerario y trayectoria que el robot debe seguir. Esta estrategia coloca al sistema de visión fuera del lazo de control, por lo que es clasificada como una estrategia de lazo abierto; además, como puede notarse, depende directamente de la exactitud tanto del sistema de visión como del robot.

En contraste, *ver-y-mover dinámico* (dynamic look-and-move) (Weiss *et al.*, 1987) incorpora el sistema de visión dentro del lazo de control. De esta manera se obtiene retroalimentación visual y se pueden aprovechar las ventajas que todo sistema de control de lazo cerrado tiene; como por ejemplo, ser robusto ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Uno de los primeros trabajos que aparece en la literatura tratando el tema de robots con retroalimentación visual es debido a Shirai e Inoue (1973), donde se describe cómo esta estrategia (ver-y-mover dinámico) puede ser utilizada para corregir

la posición de un robot e incrementar la exactitud de la tarea. Debido a que la información visual se retroalimenta para, finalmente, controlar el movimiento de un robot, esta estrategia de ver-y-mover dinámico también ha sido llamada “*control servo-visual*” (visual servoing). Este nombre ha sido empleado a partir del trabajo de Hill y Park (1979) y hoy en día es el que se utiliza más ampliamente (Hutchinson *et al.*, 1996).

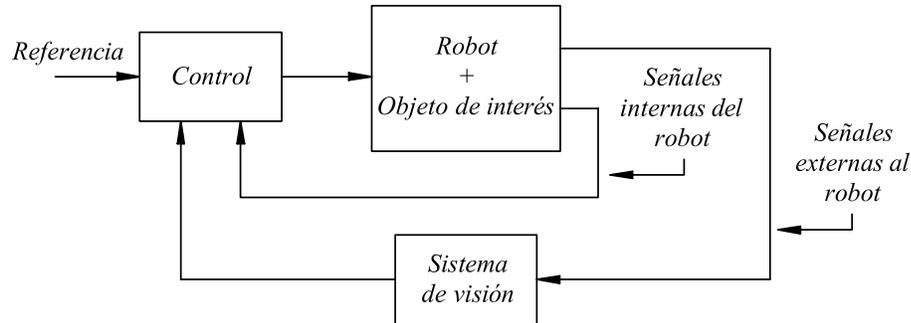


Figura 2: Esquema general del control servo-visual.

En virtud de los avances tecnológicos, el control servo-visual es una estrategia de control que rápidamente madura y, concretamente, utiliza un sistema de visión con una o más cámaras para establecer el movimiento de un sistema robótico relativo a un objeto de interés localizado en el medio ambiente (Hutchinson *et al.*, 1996). En la Figura 2 se puede apreciar el esquema general del control servo-visual. Las señales internas del robot generalmente son sus posiciones y velocidades articulares y las señales externas al robot son las intensidades de luz del medio ambiente (donde se localiza el objeto de interés) que excitan a la cámara para generar una imagen.

El control servo-visual es una fusión de resultados de muchas disciplinas elementales incluyendo procesamiento de imágenes, cinemática, dinámica, teoría de control y computación en tiempo real.

Existen básicamente 2 alternativas para el control servo-visual: la alternativa *basada-en-imagen* donde una señal de error se mide directamente en la imagen y es mapeada a las consignas de los actuadores; y la alternativa *basada-en-posición* en donde se utilizan técnicas de computación visual para reconstruir una representación del espacio de

trabajo del robot en 3 dimensiones y generar de ahí las consignas de los actuadores. También existen métodos combinados que utilizan tanto técnicas basadas-en-imagen como técnicas basadas-en-posición para establecer el movimiento de un robot (Castaño y Hutchinson, 1994; Malis *et al.*, 1999).

Cabe mencionar que el robot generalmente ha sido considerado como un dispositivo controlado por velocidad, es decir, las señales de entradas del sistema son velocidades y sólo se utiliza su modelo cinemático. Sin embargo, recientes investigaciones también han abordado el problema considerando el modelo dinámico no lineal del robot. A esta estrategia que considera el modelo dinámico del robot se le conoce como *control servo-visual directo* (direct visual servoing) (Hager, 1997). La primer solución explícita del problema de control servo-visual directo es debida a Miyazaki y Masutani (1990).

En general es posible tener múltiples cámaras que pueden ser montadas en el robot (configuración *cámara en mano*); o que pueden estar fijas (configuración *cámara fija*) observando sólo el objeto de interés (*punto final lazo abierto*) u observando tanto al objeto de interés como al robot (*punto final lazo cerrado*).

Muchos investigadores utilizan sistema de visión con cámaras comerciales que manejan estándares de video RS170 o PAL con frecuencias de muestreo de 30 Hz o 25 Hz, respectivamente. Actualmente existen cámaras digitales disponibles con una amplia variedad de frecuencias de muestreo y tamaños de imagen llegando hasta más de 500 Hz y más de 1280 por 1024 píxeles (Corke, 1997). En una cámara análoga su señal de salida (imagen) generalmente es digitalizada y guardada en un banco de memoria en una tarjeta adquisidora de imágenes (framegrabber). Recientemente, el avance se ha dirigido hacia la utilización de interfases con bus PCI (Peripheral Component Interconnect o Interconexión de Componentes Periféricos) que debido a su velocidad no necesitan bancos de memoria y lo que se hace es mandar la señal digitalizada por medio de DMA (Direct Memory Access o Acceso Directo a Memoria) hacia la memoria propia del procesador de una computadora. Las cámaras digitales, sin embargo, tienen el digitalizador y la memoria incorporados dentro de ellas mismas.

## I.2 Trabajos representativos del control servo-visual

Los trabajos pioneros sobre el control servo-visual estuvieron principalmente encaminados hacia la solución de problemas industriales; como por ejemplo, el ensamble de piezas (Shirai e Inoue, 1973; Geschke, 1981), el atrapado de objetos en movimiento en una banda transportadora (Rosen *et al.*, 1976), el seguimiento de cordones de soldadura (Clocksin *et al.*, 1985) y la aplicación de selladores (Sawano *et al.*, 1983), entre otras.

Sin embargo, debido a las limitaciones tecnológicas, el mejor sistema de visión de estos primeros trabajos alcanzaba una frecuencia de muestreo de 10 Hz. No obstante, el avance tecnológico ha sido relativamente rápido. En Gilbert *et al.* (1980) y en Allen *et al.* (1991) se describen sistemas visuales de seguimiento que operaban a 60 Hz; en tanto que en Corke y Paul (1989) se reporta un sistema de regulación para un robot planar que trabajaba también a la frecuencia de 60 Hz. Los sistemas de visión de los robots actuales ya son capaces de alcanzar frecuencias de muestreo de 955 Hz (Nakamura *et al.*, 2001; Chen *et al.*, 2006a) o de 1 KHz (Nakabo e Ishikawa, 1998; Nakabo *et al.*, 2002).

Trabajos que reportan robots con visión en aplicaciones diferentes a las industriales se pueden ver en el robot que juega ping-pong (Andersson, 1987), en el robot malabarista (Rizzi y Koditschek, 1991), en el robot que atrapa una pelota con una red (Bukowski *et al.*, 1991), en el robot submarino Starbug (Dunbabin *et al.*, 2004) o en el robot aéreo Colibrí (Mejías *et al.*, 2007), entre otros muchos más.

Un estudio más detallado del estado del arte del control servo-visual puede verse en Corke (1993), Hager y Hutchinson (1996), Nelson y Papanikolopoulos (1998) y en Kragic y Christensen (2002). En las siguientes 2 subsecciones se describirán algunos trabajos representativos respecto al control servo-visual aplicado a manipuladores y a robots móviles, respectivamente.

### I.2.1 Manipuladores

Los primeros trabajos de manipuladores con visión generalmente utilizaban la configuración cámara fija, como es el caso ya citado de Shirai e Inoue (1973) en donde se trabajó con un manipulador de 6 g.d.l. con la alternativa de control basada-en-posición. Sin embargo, en la actualidad la configuración cámara en mano y la alternativa basada-en-imagen son la más comúnmente utilizadas.

Como se mencionó, en la alternativa basada-en-posición las mediciones realizadas en el plano de imagen son utilizadas para determinar la configuración entre el robot y el objeto de interés con respecto a la cámara o a algún marco coordenado fijo. En esta alternativa de control servo-visual basada-en-posición con la configuración cámara fija podemos encontrar los trabajos de Houshangi (1990) y Zergeroglu *et al.* (1999) para manipuladores planares y los trabajos de Ruf *et al.* (1997), Okhotsimsky *et al.* (1997) y Stieber *et al.* (1999) para manipuladores moviéndose en el espacio 3D; ahora bien, con la configuración cámara en mano están los trabajos de Bell y Wilson (1996) y Wilson (1996) para manipuladores planares y los de Gangloff *et al.* (1999) y Martinet y Gallice (1999) para manipuladores moviéndose en el espacio 3D.

En contraste, en la alternativa basada-en-imagen el objetivo de control se especifica directamente en el espacio de imagen eliminando la etapa de estimación de postura de las características objetivo. Trabajos con esta alternativa para manipuladores planares podemos verlos en Ahluwalia y Fogwell (1986), Kelly (1996) y Jarabek y Capson (1998) para la configuración cámara fija y en Maruyama y Fujita (1997) y Han y Kuc (1998) para la configuración cámara en mano; por otro lado, para el control servo-visual con la alternativa basada-en-imagen para manipuladores moviéndose en el espacio 3D encontramos trabajos en Kragic *et al.* (2001) y Kelly *et al.* (2006a) para la configuración cámara fija y en Hager (1997), Corke y Hutchinson (2001) y Chen *et al.* (2003b) para la configuración cámara en mano. Algunos trabajos analizan las 2 configuraciones en esta alternativa, tal es el caso de Tatlicioglu *et al.* (2007).

En Malis *et al.* (1999) se propone un método combinado entre las alternativas basada-en-posición y basada-en-imagen con la intención de aprovechar sus respectivas ventajas, de manera tal que no sea necesario el conocimiento del modelo 3D del objeto de interés y se garantice convergencia del objetivo de control en todo el espacio de tarea; el método se aplica para la regulación de un manipulador de 6 g.d.l. en la configuración cámara en mano con características de imagen en función de puntos. En un trabajo posterior, con un planteamiento similar al anterior, Malis (2004) describe un controlador servo-visual robusto ante cambios en los parámetros intrínsecos de la cámara. Otros trabajos que abordan la alternativa combinada podemos verlos en Castaño y Hutchinson (1994), Mezouar y Chaumette (2000), Chen *et al.* (2003a) y Fang *et al.* (2002a).

A partir de principios de la década de 1990 el enfoque de muchas de las investigaciones acerca del control servo-visual en manipuladores empezó a dirigirse hacia la búsqueda de controladores que fueran robustos ante incertidumbres en los parámetros del sistema de visión. De esta manera se desarrollaron múltiples trabajos en esta dirección, como por ejemplo en Hosada y Asada (1994) se desarrolló un algoritmo en línea para estimar el Jacobiano de imagen, en Papanikolopoulos *et al.* (1995) se diseñó un método de estimación en línea para determinar la profundidad de un punto de interés, en Piepmeier *et al.* (2004) se presentó un método dinámico cuasi-Newton, en Lu *et al.* (1996) se propuso un algoritmo en línea utilizando el método de mínimos cuadrados para calcular el Jacobiano de imagen, en Hespanha *et al.* (1998) se analizó en forma teórica las incertidumbres paramétricas de un sistemas de visión estéreo, etc.

La gran mayoría de los trabajos citados hasta aquí consideran el manipulador como un dispositivo posicionador ideal con dinámica despreciable, es decir, sólo utilizan el modelo cinemático en el análisis. Ahora bien, como se dijo, el primer trabajo de control servo-visual que considera el modelo dinámico en el análisis es debido a Miyazaki y

Masutani (1990)<sup>2</sup>. En este sentido, del control servo-visual con el modelo dinámico del manipulador considerado, tenemos los trabajos de Espiau *et al.* (1992) y Kelly *et al.* (2000) que abordan el problema de un manipuladores de 6 g.d.l. bajo configuración cámara en mano. En Kelly *et al.* (2004b) se aplica la filosofía de los campos de velocidad para el control servo-visual basado-en-imagen de un manipulador planar, con modelo dinámico considerado y en configuración cámara fija. Dentro de los trabajos que consideran el modelo dinámico del manipulador en el análisis y robustez ante incertidumbre paramétrica del sistema de visión pueden enlistarse los siguientes: Kelly (1996), Zergeroglu *et al.* (1999), Fang *et al.* (2002a), Nasisi y Carelli (2003), Behal *et al.* (2005), Cheah *et al.* (2007) y Wang *et al.* (2008).

### **Momentos de imagen en el control servo-visual de manipuladores**

El movimiento de un manipulador mediante el control servo-visual debe establecerse en función de características de imagen determinadas a partir de objetos de interés tridimensionales localizados en la escena. No obstante, gran parte de la teoría desarrollada en el control servo-visual se basa en objetos de interés geométricos simples como puntos, líneas, cilindros y esferas (características de imagen locales); o, de acuerdo al conocido *problema de correspondencia* (seguimiento e igualación), en objetos de interés más complejos cuya proyección al plano de imagen es procesada para finalmente reducirlo a un objeto geométrico simple (Collewet y Chaumette, 2000; Chesi *et al.*, 2000; Benhimane y Malis, 2006). De tal suerte que encontrar características de imagen globales de un objeto de interés tridimensional arbitrario sería lo deseable. En este sentido, los momentos de imagen cumplen con tal propiedad; ya que, precisamente, son características de imagen globales que pueden ser evaluados directamente de cualquier objeto de interés arbitrario proyectado en el plano de imagen y están exentos del mencionado problema de correspondencia.

---

<sup>2</sup>Cabe mencionar que los trabajos ya citados: Kelly (1996), Maruyama y Fujita (1997), Zergeroglu *et al.* (1999), Fang *et al.* (2002a) y Kelly *et al.* (2006a) están dentro de esta última categoría.

En Bien *et al.* (1993) la definición de los momentos de imagen como características de imagen para el control servo-visual fue expresada rigurosamente; aunque en este trabajo, de manera aproximada, se utilizaron combinaciones de momentos de imagen como el área, la orientación y el centroide para controlar 4 g.d.l. de un manipulador. La forma analítica de la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen fue desarrollada primero en Tu y Fu (1995) y después en Chaumette (2002). Dicha variación respecto al tiempo se expresa en función de una matriz denominada Jacobiano de imagen (debida a los momentos de imagen) la cual es esencial para el diseño de un esquema de control servo-visual (Espiau *et al.*, 1992; Hutchinson *et al.*, 1996). Dicho Jacobiano de imagen depende de parámetros 3D tanto del objeto de interés como del sistema de visión; y para determinarlo en Wells *et al.* (1996) se desarrolla un método numérico basado en redes neuronales y, recientemente, en Giordano *et al.* (2008) se presenta una estrategia construida mediante la teoría de observadores no-lineales.

En Nakabo *et al.* (2002) y en Komuro e Ishikawa (2007) se describen sistemas de visión de alta velocidad para el seguimiento de un objeto con movimiento errático basado en los momentos de imagen. En Shen y Pan (2003) se presenta un control servo-visual adaptable para el movimiento traslacional de un manipulador en donde se aprovecha el hecho de que la postura de un objeto plano puede ser encontrada a través de los momentos de imagen. En Li *et al.* (2005) se diseña un control basado en la alternativa combinada propuesta en Malis *et al.* (1999) en donde el movimiento traslacional del manipulador se establece en base a momentos de imagen. En Wang y Cho (2008) se utilizan momentos de imagen para realizar un microensamble mediante un manipulador de 4 g.d.l. con un controlador PD (Proporcional-Derivativo) sintonizado con métodos genéticos.

Finalmente, en Chaumette (2004) se presenta un control servo-visual basado-en-imagen para la regulación de un manipulador de 6 g.d.l. en configuración cámara en mano mediante 6 características de imagen encontradas a partir de combinaciones de momentos de imagen de un objeto de interés plano con forma arbitraria; y en Tahri

y Chaumette (2005) se continua el trabajo anterior encontrándose 6 características de imagen basadas en invariantes de momentos de imagen para desacoplar los grados de libertad del manipulador, lográndose con esto un dominio de convergencia mayor y una trayectoria del robot más adecuada. Cabe destacar que todos los trabajos de control servo-visual que utilizan momentos de imagen han sido abordados sólo en manipuladores con modelo cinemático considerado.

### **1.2.2 Robots móviles**

En este trabajo de tesis se consideran los robots móviles terrestres con ruedas, los cuales son sistemas no-holonómicos que presentan ciertas propiedades interesantes. Por ejemplo, el sistema linealizado es no-controlable por lo que los métodos lineales de análisis y diseño no pueden ser aplicados; y tampoco existe un ley de control continua que incluya sólo retroalimentación de estados capaz de estabilizar el sistema a un estado de equilibrio (Brockett, 1983). El problema de estabilización se ha resuelto utilizando retroalimentación de estados variante en el tiempo, es decir, leyes de control que dependen explícitamente, no sólo de los estados, sino también del tiempo (Samson, 1991; Campion *et al.*, 1991; Canudas de Wit y Sørдалen, 1992; Morin y Samson, 1996); o mediante leyes de control discontinuas (Aicardi *et al.*, 1995; d'Andrea-Novel *et al.*, 1995). Estos resultados han sido, convenientemente, trasladados hacia el campo del control servo-visual.

En primera instancia, para sobrellevar la problemática de las restricciones no-holonómicas, los trabajos previos de robots móviles con visión propusieron agregar grados de libertad a la plataforma móvil, es decir, incorporaron un manipulador a bordo en la configuración cámara en mano (Rives *et al.*, 1993; Pissard-Gibollet y Rives, 1995; Tsakiris *et al.*, 1997; Hager *et al.*, 1998); no obstante, este agregado resulta en un mecanismo más complejo. Por ejemplo, en Tsakiris *et al.* (1997) un control servo-visual basado-en-imagen fue propuesto con la consecuencia de que se necesitan

distancias geométricas asociadas con el objeto de interés y depende del Jacobiano de imagen el cual tiene singularidades para algunas configuraciones.

En Hashimoto y Noritsugu (1997) se presenta un control servo-visual basado en imagen para un robot móvil con cámara a bordo, el cual es una extensión del controlador propuesto por Canudas de Wit y Sørдалen (1992). En Conticelli *et al.* (1999) se describe la regulación de un robot móvil basado-en-imagen con cámara a bordo a través de una variante del controlador discontinuo de Aicardi *et al.* (1995). En Ma *et al.* (1997), Jung *et al.* (1998), Kim *et al.* (2001) y Das *et al.* (2001) se utilizan técnicas de filtrado de Kalman para la estimación de parámetros 3D en el diseño de controladores visuales con el objetivo de seguimiento de trayectoria.

El problema de seguimiento de trayectoria también ha sido estudiado, por ejemplo, en Wang *et al.* (2001) donde se presenta un control adaptable para compensar un parámetro de profundidad constante en un robot móvil con cámara a bordo; en Carelli *et al.* (2006) donde se diseña un sistema de control basado solamente en retroalimentación visual de una cámara fija con cualquier postura, sin la necesidad del conocimiento de los parámetros de la cámara ya que son estimados en línea; y en Chen *et al.* (2006b) donde, también con cámara a bordo, se describe un controlador adaptable para el seguimiento de una trayectoria definida por una secuencia de imágenes previamente almacenadas.

Trabajos relacionados con el objetivo de control de postura de un robot móvil mediante el control servo-visual los podemos ver en Mariottini *et al.* (2004) donde una estrategia de control basada-en-imagen con cámara a bordo que consiste en tres pasos independientes y secuenciales es presentada; en Fang *et al.* (2005) donde un control servo-visual adaptable basado-en-imagen en configuración cámara a bordo con el error de regulación definido a través de una transformación entre dos vistas de los puntos de interés de un objeto es descrito; y en López-Nicolás *et al.* (2006) donde una ley de control basada-en-imagen (en configuración cámara fija o a bordo) obtenida de la linealización entrada-salida del sistema y fundamentada en la igualación de invariantes

a escala y rotación de puntos de interés es diseñada.

Una extensión del trabajo de Malis *et al.* (1999) para robots móviles es presentada en Fang *et al.* (2002b) donde se desarrolla un control servo-visual para la regulación de la postura de un robot móvil basado en la comparación de las características de imagen de un objeto en la vista deseada con las características de imagen del mismo objeto en la vista actual, de tal manera que existe una reconstrucción del espacio tridimensional a través de una transformación que relaciona la retroalimentación visual con la postura del robot referente a un sistema coordenado fijo. Ahora bien, tanto en Kelly *et al.* (2004a) como en Kelly *et al.* (2006b) se extiende la filosofía de los campos de velocidad para el diseño de un control servo-visual basado-en-imagen para un robot móvil en configuración cámara fija.

En Dixon *et al.* (2001b) se aborda el control servo-visual para un robot móvil con modelo dinámico considerado, en este trabajo se diseña un controlador basado-en-imagen con cámara fija para el seguimiento de trayectoria que se adapta a incertidumbres asociadas a los parámetros de la cámara y a incertidumbres en los parámetros mecánicos del modelo dinámico del robot.

Finalmente, esfuerzos encaminados hacia el control servo-visual con el objetivo de formación de robots móviles podemos verlos en Das *et al.* (2001), Renaud *et al.* (2004), Benhimane *et al.* (2005), Soria *et al.* (2006) y Mehta *et al.* (2006).

### **I.3 Objetivos**

Este proyecto de tesis doctoral persigue dos objetivos complementarios. El primero de ellos es el desarrollo de un sistema computacional de visión de tiempo real para asistir y facilitar la experimentación de ciertos sistemas robóticos en donde la percepción visual juega un papel importante.

Para cumplir con este objetivo particular se ha diseñado un sistema de visión de

tiempo real denominado RTSVC (Bugarin y Kelly, 2008), el cual tiene las siguientes características (ver Apéndice A):

- Operación bajo RTLinux, un sistema operativo de tiempo real con arquitectura abierta y código fuente libre.
- Capacidad de mostrar y almacenar tanto datos como imágenes.
- Editor integrado que facilita tanto la programación del algoritmo de extracción de información de la imagen como la programación de otras operaciones necesarias en un lenguaje similar a C.
- Capacidad de comunicación remota vía puerto serie.
- Compatibilidad con diversas tarjetas y cámaras.

El segundo objetivo de este proyecto de tesis doctoral consiste en abordar el problema de control servo-visual tanto en manipuladores como en robots móviles. Algunos trabajos preliminares sobre los que se basa este segundo objetivo referentes al control servo-visual tanto para robots manipuladores como para robots móviles podemos verlos en Kelly *et al.* (2006a) y en Kelly *et al.* (2005), respectivamente.

En este sentido, uno de los principales propósitos de este trabajo de tesis, es realizar propuestas de solución para el control servo-visual utilizando características de imagen globales de objetos de interés complejos. La mayoría de los trabajos de control servo-visual (en manipuladores y robots móviles) se valen de objetos de interés con geometría simple tales como puntos, líneas, esferas y cilindros; o utilizan objetos de interés más complejos procesando su proyección en el plano de imagen para finalmente reducirlo en características de imagen simples.

Ahora bien, el problema de *navegación de robots* en general consiste en resolver la planeación del itinerario, la generación de trayectorias y el diseño del control. Este trabajo de tesis se concentrará en el análisis y estudio de controladores, por lo que se

supondrá que las etapas de planeación del itinerario y de generación de trayectorias ya han sido resueltas.

## I.4 Organización del documento

A continuación se describe la estructura de este documento de tesis.

El Capítulo I expone la introducción del problema de control servo-visual junto con las justificaciones sobre el uso de la percepción visual en sistemas robóticos. Un gran apartado de este capítulo es la presentación de los trabajos más representativos del control servo-visual tanto en manipuladores como en robots móviles. También se describen los objetivos del presente trabajo de tesis.

En el Capítulo II se presentan conceptos, modelos y herramientas matemáticas necesarias para el buen entendimiento de los temas expuestos en capítulos posteriores. Se definen formalmente los modelos de imagen y los modelos de robots. En el caso del robot manipulador, se describe tanto su modelo cinemático como su modelo dinámico; mientras que en el caso de robots móviles sólo se especifica el modelo cinemático del robot móvil tipo unicyclo. En este trabajo de tesis, se considerará el modelo dinámico del manipulador y sólo el modelo cinemático en el robot móvil tipo unicyclo.

En este mismo Capítulo II, se describe la transformación entre los momentos Cartesianos de un objeto de interés plano con forma arbitraria respecto a su plano de definición y los momentos de imagen producto de la proyección de dicho objeto de interés en el plano de imagen. Esta descripción ayudará en gran medida en el diseño de los controladores presentados en los capítulos subsecuentes.

La principal aportación de este trabajo de tesis se reporta en el Capítulo III, donde se detalla el análisis y diseño de un controlador servo-visual directo para manipuladores planares tanto en configuración cámara fija como en configuración cámara en mano. Así mismo, se presenta una selección de características de imagen globales basadas en

momentos de imagen de un objeto de interés plano con forma arbitraria. El controlador diseñado se basa en la estructura por Jacobiano transpuesto y es robusto ante incertidumbres en parámetros 3D del objeto de interés, de la cámara y del Jacobiano geométrico del manipulador.

El Capítulo IV se dedica al diseño de un controlador servo-visual para un sistema robótico compuesto por un unicycle y una cámara fija. Dicho controlador se basa en la filosofía de campos de velocidad y no necesita del conocimiento previo de los parámetros de la cámara. Otra característica importante de este controlador es que no requiere de la medición de velocidad de variable alguna. Sin embargo, depende de parámetros 3D de un objeto de interés plano y de forma irregular.

Finalmente, en el Capítulo V se exponen las conclusiones generales del presente trabajo de tesis, así como las propuestas de trabajos a futuro.

Este documento de tesis, también contiene cuatro apéndices. El Apéndice A presenta la descripción del sistema de visión de tiempo real diseñado, el cual es parte fundamental de este trabajo de tesis. El sistema de visión se valida mediante la experimentación de un control servo-visual para la navegación de un unicycle en configuración cámara fija.

En el Apéndice B se enuncian el teorema multinomial y la ley distributiva para sumatorias múltiples. Estos enunciados matemáticos servirán para encontrar la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen descrita en el Apéndice C. Los resultados detallados en este Apéndice C son de trascendencia considerable, debido a que se presenta en forma explícita la variación respecto al tiempo de cualquier momento de imagen (regular o central). El Apéndice D detalla dos identidades de sumatorias importantes para la solución de los resultados del Apéndice C.

## II Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos, modelos y herramientas matemáticas necesarias para el buen entendimiento de los temas expuestos en capítulos subsiguientes.

Los conceptos de imagen y modelos de imagen detallados en la Sección II.1 fueron recopilados principalmente de Gonzalez y Woods (1992), Forsyth y Ponce (2002) y Kelly y Reyes (2000); consultándose también Corke (1997).

El tema de momentos de imagen de la Sección II.2 proviene principalmente de Prokop y Reeves (1992); apoyándose en Sossa (2006). En esta misma Sección II.2, también se desarrolla el tema de transformación de momentos, el cual es un tema original de este trabajo de tesis (Bugarin y Kelly, 2007).

La Sección II.3 del modelado de manipuladores se resume primordialmente de Sciacavico y Siciliano (2000) y de Kelly y Santibáñez (2003).

Finalmente, gran parte del tema de modelado del unicycle de la Sección II.4 fue tomada de De Luca *et al.* (1998).

### II.1 Modelos de imagen

El término *imagen monocromática* o simplemente *imagen*, se refiere a una función bidimensional de intensidades de luz  $f(\mathbf{y})$ , donde  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  denota un vector de coordenadas espaciales y el valor de  $f$  en un punto  $\mathbf{y}$  es proporcional al brillo (o nivel de gris) de la imagen en ese punto (Gonzalez y Woods, 1992). Si la imagen cambia respecto al tiempo entonces la variable independiente  $t$  debe ser agregada. Una *imagen a color* es una función vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$  formada por tres componentes de color. En este trabajo de tesis se considerarán sólo imágenes monocromáticas modeladas por funciones continuas.

Debido a que la luz es una forma de energía, una imagen  $f(\mathbf{y})$  debe ser finita y

distinta de cero, es decir,

$$0 < f(\mathbf{y}) < \infty.$$

Las imágenes que las personas diariamente perciben normalmente consisten en luz reflejada de objetos. La naturaleza básica de una imagen  $f(\mathbf{y})$  puede ser caracterizada por dos componentes:

- (a) La cantidad de luz incidente en la escena que está siendo vista (*iluminación*).
- (b) La cantidad de luz reflejada por los objetos de la escena (*reflectancia*).

La iluminación y la reflectancia son denotadas por  $f_i(\mathbf{y})$  y  $f_r(\mathbf{y})$ , respectivamente. Las funciones  $f_i(\mathbf{y})$  y  $f_r(\mathbf{y})$  se combinan como un producto para formar una imagen  $f(\mathbf{y})$ :

$$f(\mathbf{y}) = f_i(\mathbf{y})f_r(\mathbf{y})$$

donde

$$0 < f_i(\mathbf{y}) < \infty$$

y

$$0 < f_r(\mathbf{y}) < 1.$$

Esto significa que la reflectancia esta acotada por cero (absorción total) y uno (reflectancia total). La naturaleza de la iluminación es determinada por la fuente de luz y la de la reflectancia es determinada por las características de los objetos en la escena; esto es estudiado por la *radiometría*. Un estudio más detallado al respecto puede consultarse en Corke (1997) y en Forsyth y Ponce (2002).

El ser humano utiliza las imágenes para percibir y entender el mundo que lo rodea. Para que un robot haga lo mismo se deben realizar diversas tareas difíciles, vivimos en un mundo tridimensional (3D) y cuando se trata de analizar objetos en el espacio 3D, los dispositivos visuales disponibles (por ejemplo, cámaras) usualmente propor-

cionan imágenes bidimensionales (2D), y esta proyección a un número de dimensiones menor tiene como consecuencia una enorme pérdida de información. Además, escenas dinámicas con objetos en movimiento hacen que la percepción visual sea todavía más complicada. Todo esto es estudiado por el campo del conocimiento denominado *visión por computadora* (computer vision), la cual se divide en dos áreas: *procesamiento de imágenes* e *interpretación de imágenes* (Corke, 1997).

El procesamiento de imágenes es la mejora de imágenes tal que la imagen resultante represente más claramente algunas características deseadas para un observador humano, mientras que la interpretación de imágenes o la visión artificial (machine vision) es el problema de describir físicamente objetos en una escena dada una imagen, o varias imágenes, de esa escena; esta descripción es en términos, generalmente numéricos, de características de imagen.

Una *característica de imagen* es cualquier característica estructural que puede ser extraída de una imagen (por ejemplo, una arista o una esquina). Típicamente, una característica de imagen corresponde a la proyección en el plano de imagen de una característica física de algún objeto de interés tridimensional y pueden ser globales o locales. Una característica de imagen local corresponde a sólo una parte del objeto con propiedades especiales (puntos, líneas, etc.), en tanto que una característica de imagen global comprende el objeto completo (promedio de nivel de gris, área, etc.) (Sossa, 2006).

Básicamente, existen dos métodos de extracción llamados *segmentación de la escena completa* y *seguimiento de la característica*.

La segmentación es el proceso de dividir una imagen en regiones o segmentos con significado, estos segmentos de imagen generalmente son homogéneos con respecto a ciertas características. Los principales pasos para la segmentación de la escena completa son:

1. *Clasificación*. Conjuntos espaciales de la imagen son ordenados de acuerdo a

características de bajo nivel<sup>3</sup> (bordes, esquinas, etc.).

2. *Representación*. Los conjuntos espaciales son etiquetados en una forma conveniente para futuras operaciones.
3. *Descripción*. Los conjuntos son definidos en términos de características valuadas en forma escalar o vectorial.

La *segmentación binaria* contempla la forma más simple de clasificar una imagen. Esta clasificación, comúnmente, es llevada a cabo aplicando pruebas de umbral en cada punto de la imagen; de tal manera que si el nivel de gris de ese punto se encuentra por debajo a por arriba de un umbral determinado se clasifica como punto de un conjunto o de otro. Esta técnica se aplica ampliamente en laboratorios donde la luz y el medio ambiente pueden ser acondicionados adecuadamente (por ejemplo, utilizando fondos oscuros y objetos blancos); y se emplea principalmente para reducir significativamente los tiempos de procesamiento e interpretación (Corke y Paul, 1989; Feddema y Mitchell, 1989; Rizzi y Koditschek, 1991).

Ahora bien, el método de extracción llamado seguimiento de la característica puede reducir aún más los tiempos de procesamiento e interpretación de imágenes debido a que solamente una pequeña ventana (o región) de la imagen es manipulada. La tarea de localizar características en escenas secuenciales es relativamente fácil, ya que sólo existen pequeños cambios de una escena a otra y una interpretación de la escena completa no es necesaria; sin embargo, se vuelve importante conocer la posición en la imagen de la característica tanto al inicio como durante el evento. Esto es conocido como el problema de seguimiento de las características objetivo y se han empleado diversos métodos para resolverlo (Kalata, 1984; Allen *et al.*, 1991; Wetsmore y Wilson, 1991).

---

<sup>3</sup>Las características de alto nivel representan el conocimiento del contenido de la imagen, como por ejemplo el tamaño y forma del objeto o la relación entre objetos en la imagen.

### II.1.1 Modelos de cámara oscura (pinhole camera)

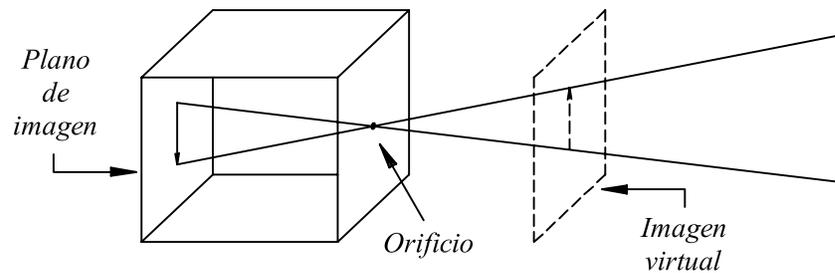


Figura 3: Cámara oscura (pinhole camera).

Básicamente, una *cámara oscura* (pinhole camera) es una caja con un orificio de tamaño despreciable en uno de sus lados. La luz de la escena que incide en este pequeño orificio proyecta una imagen (de la escena) invertida horizontal y verticalmente sobre una película o placa translúcida sobre el lado opuesto de la caja (ver Figura 3). Si el orificio fuera realmente reducido a un punto (lo que es físicamente imposible), exactamente sólo un rayo de luz pasaría a través de cada punto del plano de imagen, el orificio y los puntos en la escena colineales a ese rayo de luz. Esto es modelado por la *proyección en perspectiva* que se describirá a continuación junto con otros dos modelos de formación de imágenes más.

#### Proyección en perspectiva

La proyección en perspectiva describe un modelo de formación de imágenes ideal y extremadamente simple, ya que considera una cámara oscura con un orificio reducido a un punto y sin lente alguno. En la realidad, el orificio de dicha cámara es de un tamaño finito; esto provoca que cada punto en el plano de imagen reciba luz de un cono de rayos. Aún así, este modelo de proyección en perspectiva (también llamado *perspectiva central*), propuesto por Brunelleschi a principios del siglo XV, es matemáticamente conveniente y, a pesar de su simplicidad, frecuentemente provee una aceptable aproximación del proceso de formación de imágenes.

La proyección en perspectiva genera imágenes invertidas, por lo que en ocasiones es conveniente considerar en su lugar una imagen virtual asociada con un plano puesto enfrente del orificio a la misma distancia que el plano de imagen (ver Figura 3). Esta imagen virtual no está invertida y es estrictamente equivalente a la del plano de imagen.

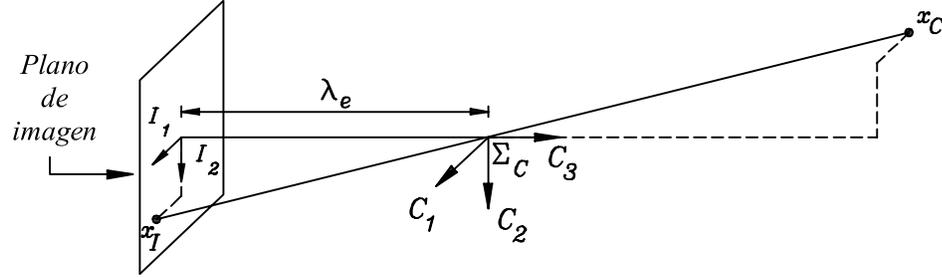


Figura 4: Geometría de la proyección en perspectiva.

La Figura 4 muestra la geometría de la proyección en perspectiva. Como puede observarse se han colocado dos marcos coordenados: el marco  $\Sigma_C$  con origen en el orificio de la cámara oscura (denominado *centro óptico*) y con el eje  $C_3$  perpendicular al plano de imagen (este eje es nombrado *eje óptico*); y el marco  $I_1 - I_2$  que conforma el plano de imagen con centro en la intersección del eje óptico con el plano de imagen (llamado *centro de imagen*). Nótese que los planos  $I_1 - I_2$  y  $C_1 - C_2$  son paralelos, están alineados y quedan separados por una distancia  $\lambda_e$ , la *distancia focal efectiva*.

Considere un punto  $\mathbf{x}_C = [x_{C_1} \ x_{C_2} \ x_{C_3}]^T$  (respecto a  $\Sigma_C$ ) como un punto de la escena y a  $\mathbf{x}_I = [x_{I_1} \ x_{I_2}]^T$  (respecto a  $I_1 - I_2$ ) como la proyección de  $\mathbf{x}_C$  al plano de imagen. Entonces por triángulos semejantes se puede llegar a lo siguiente

$$\frac{x_{I_1}}{\lambda_e} = \frac{x_{C_1}}{x_{C_3}} \quad \text{y} \quad \frac{x_{I_2}}{\lambda_e} = \frac{x_{C_2}}{x_{C_3}},$$

por lo tanto

$$\mathbf{x}_I = \begin{bmatrix} x_{I_1} \\ x_{I_2} \end{bmatrix} = \frac{\lambda_e}{x_{C_3}} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Debido a que  $x_{C_3}$  es la distancia del centro óptico al punto en la escena a lo largo

del eje óptico, a esta variable se le conoce como la *profundidad* del punto en cuestión. Cabe destacar que debido a que el segmento de línea que va de  $\mathbf{x}_C$  al centro óptico y el segmento de línea que va del centro óptico a  $\mathbf{x}_I$  son **colineales**, se tiene que un segmento de línea es proporcional al otro; y a partir de este hecho también se puede llegar a (1).

La proyección en perspectiva, entonces, puede verse como un mapeo del espacio tridimensional a un plano de imagen (bidimensional) con las siguientes características:

- Líneas rectas tridimensionales se mapean a líneas rectas en el plano de imagen.
- Líneas paralelas (que no estén en un plano ortogonal al eje óptico) son proyectadas en líneas que se intersectan en un punto en el plano de imagen denominado *punto de fuga*.
- Figuras cónicas tridimensionales son proyectadas en figuras cónicas en el plano de imagen (por ejemplo, un círculo se proyecta en un círculo o en una elipse).
- El mapeo no es uno-a-uno y una inversa única no existe.

### Proyección ortográfica escalada

La proyección en perspectiva es un mapeo no-lineal del espacio tridimensional al plano de imagen. En muchos casos, es posible aproximar este mapeo por una *proyección ortográfica escalada* o *perspectiva-débil* (*weak-perspective*). Bajo este modelo, las coordenadas de imagen para un punto  $\mathbf{x}_C$  en la escena están dadas mediante

$$\mathbf{x}_I = \begin{bmatrix} x_{I_1} \\ x_{I_2} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix}$$

donde  $m$  es un factor de escala fijo.

El modelo de proyección ortográfica es válido para escenas donde la profundidad relativa entre puntos en la escena es pequeña en comparación con la distancia de la

cámara a la escena, como por ejemplo la escena de la superficie terrestre vista por un avión en vuelo.

### Proyección afín

Otra aproximación lineal para la proyección en perspectiva es la conocida como *proyección afín*. En este caso, las coordenadas de imagen para la proyección de un punto  $\mathbf{x}_C$  en la escena están dadas por

$$\mathbf{x}_I = \begin{bmatrix} x_{I_1} \\ x_{I_2} \end{bmatrix} = A\mathbf{x}_C + \mathbf{b}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  es una matriz arbitraria y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  un vector también arbitrario.

Note que la proyección ortográfica escalada es un caso especial de la proyección afín. La principal ventaja de la proyección afín es que es una buena aproximación local de la proyección en perspectiva que toma en cuenta tanto la geometría externa (posición y orientación) como la geometría interna de la cámara. Debido a que el modelo es lineal, los parámetros  $A$  y  $\mathbf{b}$  pueden ser fácilmente calculados a partir de técnicas de regresión lineal.

#### II.1.2 Lentes

A diferencia de la cámara oscura, la mayoría de las cámaras comerciales están equipadas con lentes. Una de las razones principales para el uso de lentes en una cámara es mantener enfocada la imagen mientras se concentra la luz proveniente de una escena amplia.

Ignorando la difracción, la interferencia y otros fenómenos ópticos y físicos (como por ejemplo las aberraciones), el comportamiento de las lentes es gobernado por las

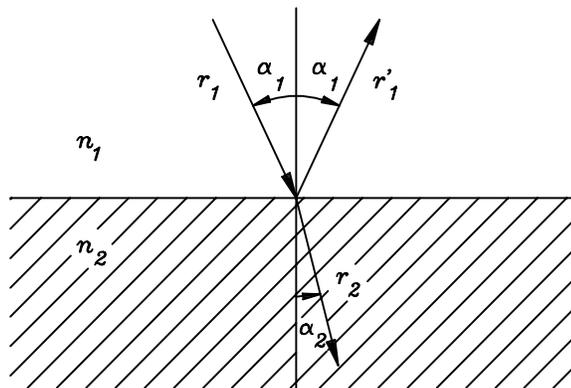


Figura 5: Reflexión y refracción en la interfase entre dos medios homogéneos.

leyes de la *óptica geométrica*<sup>4</sup> (ver Figura 5):

- La luz viaja en líneas rectas (rayos de luz) en un medio homogéneo.
- Cuando un rayo de luz es reflejado por una superficie, el rayo de luz, su reflexión y la normal a la superficie son coplanares; y los ángulos entre la normal y cada rayo de luz son iguales.
- Cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro, el rayo de luz es refractado, es decir, cambia su dirección y lo hace de acuerdo a la ley de Descartes: si  $r_1$  es el rayo incidente a la interfase entre dos materiales transparentes con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , y  $r_2$  es el rayo refractado entonces  $r_1$ ,  $r_2$  y la normal a la interfase son coplanares; y los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  entre la normal y los dos rayos están relacionados por

$$n_1 \text{sen} \alpha_1 = n_2 \text{sen} \alpha_2. \quad (2)$$

Un sistema óptico *catadióptrico* incluye tanto el efecto reflectivo (mediante espejos) como el efecto refractivo, sin embargo, una lente sólo contempla la refracción.

Ahora bien, considérese la óptica geométrica de primer orden (o *paraxial*) en donde los ángulos entre todos los rayos de luz incidiendo en una lente y la normal a la superficie

---

<sup>4</sup>Nota: El índice de refracción de un medio  $n_m$  es igual a la relación entre la velocidad de la luz en el vacío  $c_v$  y la velocidad de la luz en ese medio  $v_m$ , es decir,  $n_m = c_v/v_m$ .

de refracción de dicha lente son pequeños. También considérese que la lente es simétrica respecto a una línea recta (el *eje óptico*) y que todas las superficies reflectivas son esféricas.

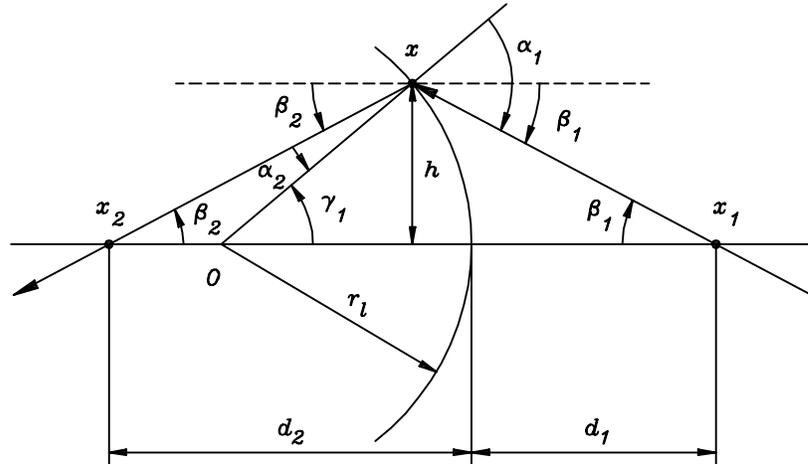


Figura 6: Refracción paraxial.

Obsérvese el esquema de la refracción paraxial de la Figura 6 en donde un rayo de luz incidente en una interfase circular pasa a través del punto  $x_1$  sobre el eje óptico y es refractado en el punto  $x$ . La superficie circular es de radio  $r_l$  y separa dos medios transparentes con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ . Denote a  $x_2$  como el punto donde el rayo refractado interseca el eje óptico y a  $O$  el centro de la interfase circular.

Las variables  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  denotan respectivamente los ángulos entre los dos rayos y la cuerda que une  $O$  con  $x$  (la normal a la superficie). Si  $\beta_1$  (respectivamente  $\beta_2$ ) es el ángulo entre el eje óptico y la línea uniendo  $x_1$  (respectivamente  $x_2$ ) con  $x$ , el ángulo entre el eje óptico y la línea uniendo  $O$  con  $x$  es  $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$  (observe la Figura 6). Ahora, denote con  $h$  la distancia entre  $x$  y el eje óptico. Si se asume que todos los ángulos son pequeños (significando que para un ángulo  $\alpha_x$ :  $\text{sen}\alpha_x \approx \alpha_x$  y  $\text{tan}\alpha_x \approx \alpha_x$ ) entonces se cumple lo siguiente

$$\alpha_1 = \gamma_1 + \beta_1 \approx h \left[ \frac{1}{r_l} + \frac{1}{d_1} \right] \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \gamma_1 - \beta_2 \approx h \left[ \frac{1}{r_l} - \frac{1}{d_2} \right].$$

Finalmente, sustituyendo lo anterior en la ley de Snell (2) para ángulos pequeños ( $n_1\alpha_1 \approx n_2\alpha_2$ ) se llega a la siguiente ecuación conocida como *ecuación de refracción paraxial*:

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_l}. \quad (3)$$

### Geometría de la lente delgada

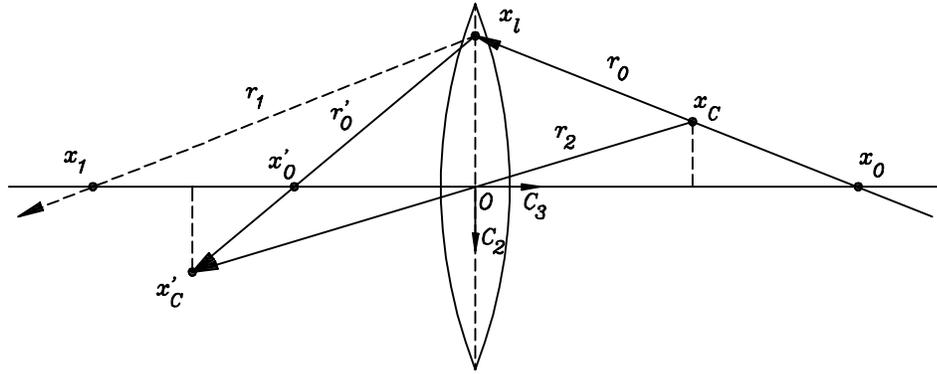


Figura 7: Formación de imágenes para el caso de una lente delgada.

La lente delgada es el modelo de una lente que se aproxima considerando su construcción en base a dos superficies esféricas (ver Figura 7) de radio  $r_l$  encerrando un medio con índice de refracción  $n_l$ , también se considera que la lente está rodeada de vacío (o aire) con índice de refracción igual a 1 y que es delgada (los rayos de luz que entran a la lente y son refractados a un lado de su frontera son inmediatamente refractados hacia el otro lado de su frontera).

El modelo de formación de imágenes para el caso de una lente delgada se muestra en la Figura 7. Obsérvese el marco coordenado  $C_2 - C_3$  (comparable con  $\Sigma_C$  en el modelo de proyección en perspectiva) con origen  $O$  en el centro de la lente (o centro óptico). Ahora, considere un punto  $\mathbf{x}_C = [x_{C_2} \ x_{C_3}]^T$  en la escena. Denote a  $r_0$  como el rayo de luz que pasa por  $\mathbf{x}_C$  cruzando el eje óptico en  $\mathbf{x}_0 = [x_{0_{C_2}} \ x_{0_{C_3}}]^T$  y la lente en  $\mathbf{x}_l = [x_{l_{C_2}} \ x_{l_{C_3}}]^T$ .

Antes de construir la imagen de  $\mathbf{x}_C$ , primero determínese la imagen  $\mathbf{x}'_0 = [x'_{0_{C_2}} \ x'_{0_{C_3}}]^T$

de  $\mathbf{x}_0$  en el eje óptico: después de la refracción en la frontera circular derecha de la lente,  $r_0$  es transformado en un nuevo rayo  $r_1$  cruzando el eje óptico en el punto  $\mathbf{x}_1 = [x_{1C_2} \ x_{1C_3}]^T$  y de acuerdo a (3) tenemos

$$\frac{1}{x_{0C_3}} + \frac{n_l}{-x_{1C_3}} = \frac{n_l - 1}{r_l}. \quad (4)$$

El rayo  $r_1$  es inmediatamente refractado hacia la frontera izquierda del lente dando un nuevo rayo  $r'_0$  que cruza el eje óptico en  $\mathbf{x}'_0$ . En este caso la ecuación de refracción paraxial resulta

$$\frac{n_l}{x_{1C_3}} + \frac{1}{-x'_{0C_3}} = \frac{1 - n_l}{-r_l}. \quad (5)$$

Sumando (4) y (5) obtenemos

$$\frac{1}{x_{0C_3}} - \frac{1}{x'_{0C_3}} = \frac{1}{\lambda} \quad (6)$$

donde

$$\lambda = \frac{r_l}{2[n_l - 1]} > 0.$$

Denote a  $r_2$  como el rayo que pasa tanto por  $\mathbf{x}_C$  como por el centro óptico  $\mathbf{O}$ ; también denote como  $\mathbf{x}'_C = [x'_{C_2} \ x'_{C_3}]^T$  (la imagen de  $\mathbf{x}_C$ ) a la intersección entre  $r_2$  y  $r'_0$ . Ahora, mediante triángulos semejantes se puede llegar a lo siguiente:

$$\frac{x_{C_2}}{x_{1C_2}} = \frac{x_{0C_3} - x_{C_3}}{x_{0C_3}} = 1 - \frac{x_{C_3}}{x_{0C_3}} \quad (7)$$

$$\frac{x'_{C_2}}{-x_{1C_2}} = \frac{-[x'_{C_3} - x'_{0C_3}]}{-x'_{0C_3}} = -\left[1 - \frac{x'_{C_3}}{x'_{0C_3}}\right] \quad (8)$$

$$\frac{x'_{C_2}}{-x_{C_2}} = \frac{-x'_{C_3}}{x_{C_3}}. \quad (9)$$

Despejando  $x_{C_2}$  de (9) y sustituyéndola en (7) tenemos que

$$\frac{x'_{C_2}}{x_{l_{C_2}}} = \frac{x'_{C_3}}{x_{C_3}} - \frac{x'_{C_3}}{x_{0_{C_3}}}.$$

Ahora, igualando esta última ecuación con (8) obtenemos

$$\frac{x'_{C_3}}{x_{C_3}} - \frac{x'_{C_3}}{x_{0_{C_3}}} = 1 - \frac{x'_{C_3}}{x'_{0_{C_3}}},$$

por lo que

$$\frac{1}{x_{C_3}} - \frac{1}{x'_{C_3}} = \frac{1}{x_{0_{C_3}}} - \frac{1}{x'_{0_{C_3}}}.$$

Y de acuerdo con (6), finalmente queda

$$\frac{1}{x_{C_3}} - \frac{1}{x'_{C_3}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (10)$$

Note que las ecuaciones que relacionan las posiciones de  $\mathbf{x}_C$  y  $\mathbf{x}'_C$  son exactamente las mismas que bajo la proyección en perspectiva si se toma  $x'_{C_3} = \lambda_e$ , esto es debido a que tanto  $\mathbf{x}_C$  como  $\mathbf{x}'_C$  están en el rayo que atraviesa el centro de la lente. Sin embargo, sólo aquellos puntos que se encuentren con profundidad igual a  $x_{C_3}$  estarán enfocados cuando el plano de imagen esté localizado a una distancia  $x'_{C_3}$  en una lente que satisfaga (10).

La distancia  $\lambda$  es llamada la *distancia focal* de la lente y (10) se conoce como la *ecuación de la lente delgada*. Hipotéticamente, un punto con profundidad infinita muestra que  $\lambda$  es la distancia entre el centro de la lente y el plano donde dicho punto se enfocaría. La Figura 8 presenta dos puntos localizados a una distancia  $\lambda$  del centro de la lente sobre el eje óptico llamados los *puntos focales* de la lente. El modelo de formación de imagen se simplifica mediante esta figura, utilizando triángulos semejantes se puede

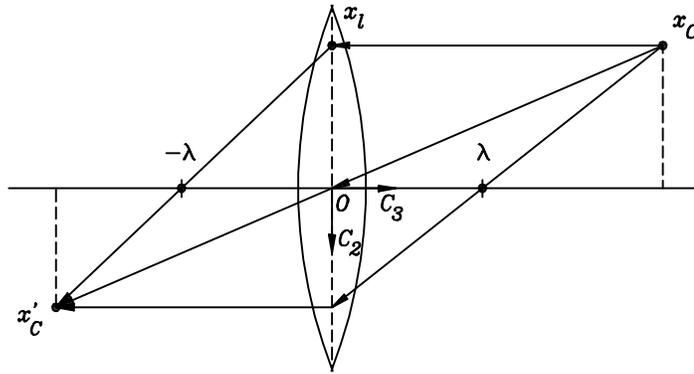


Figura 8: Puntos focales de una lente delgada.

llegar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{-x_{l_{C_2}}}{x'_{C_2}} &= \frac{-\lambda}{-[x'_{C_3} - \lambda]} \\ \frac{-x_{C_2}}{x'_{C_2}} &= \frac{x_{C_3}}{-x'_{C_3}}. \end{aligned}$$

Y puesto que en este caso  $x_{l_{C_2}} = x_{C_2}$  entonces

$$\frac{-\lambda}{-[x'_{C_3} - \lambda]} = \frac{x_{C_3}}{-x'_{C_3}},$$

la cual es la misma ecuación (10) que también puede ser expresada como

$$x'_{C_3} = \frac{\lambda x_{C_3}}{\lambda - x_{C_3}}. \quad (11)$$

### Geometría de la lente gruesa

Un modelo de lente más acercado a la realidad es el conocido como *lente gruesa*. Las ecuaciones que lo describen son fácilmente derivadas de la ecuación de refracción paraxial y son las mismas que las de la proyección en perspectiva junto con la ecuación de proyección de la lente delgada, excepto por un agregado (ver Figura 9): si  $O$  y  $O'$  denotan los *puntos principales* de la lente, entonces (10) se mantiene cuando  $x_C$  se mide

respecto a un marco coordenado con origen en  $O$  y cuando  $x'_C$  se mide respecto a otro marco coordenado con origen en  $O'$ . En el caso de la lente gruesa, el único rayo de luz que no se desvía es el que pasa a lo largo del eje óptico.

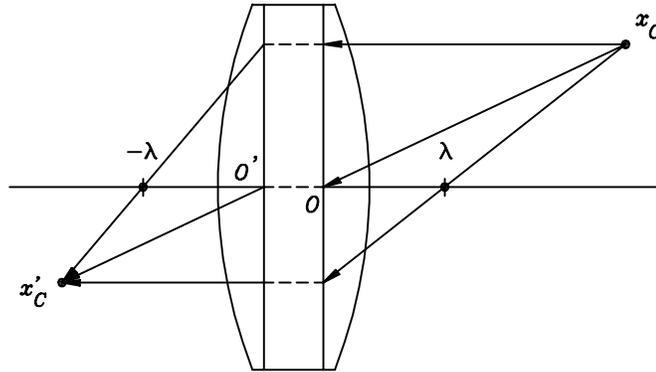


Figura 9: Esquema del modelo de una lente gruesa.

### II.1.3 Modelo de la cámara con lente delgada

En esta subsección se detallará el modelo de una cámara provista de una lente delgada. La cámara genera una imagen bidimensional del mundo tridimensional a través de un mapeo basado en proyección en perspectiva y transformaciones de coordenadas, este mapeo incluye los característicos parámetros *intrínsecos* y *extrínsecos* de la cámara.

Los parámetros extrínsecos de una cámara son los que se relacionan con su postura, es decir, con la posición y orientación de la cámara en el espacio tridimensional. En tanto que los parámetros intrínsecos están asociados con aspectos ópticos y geométricos de la cámara tales como la longitud focal de la lente, factores de escala y posibles coeficientes de distorsión.

Como puede apreciarse en la Figura 10, el modelo de la cámara con lente delgada describe el mapeo de un punto  $x_C$  en la escena a un punto  $y$  en la pantalla de una computadora, es decir, el modelo que aquí se presentará incluye la transferencia de la imagen hacia una computadora. Para este efecto, el plano de imagen lo conforma un arreglo discreto de sensores fotosensibles, generalmente un CCD (Charge-Coupled

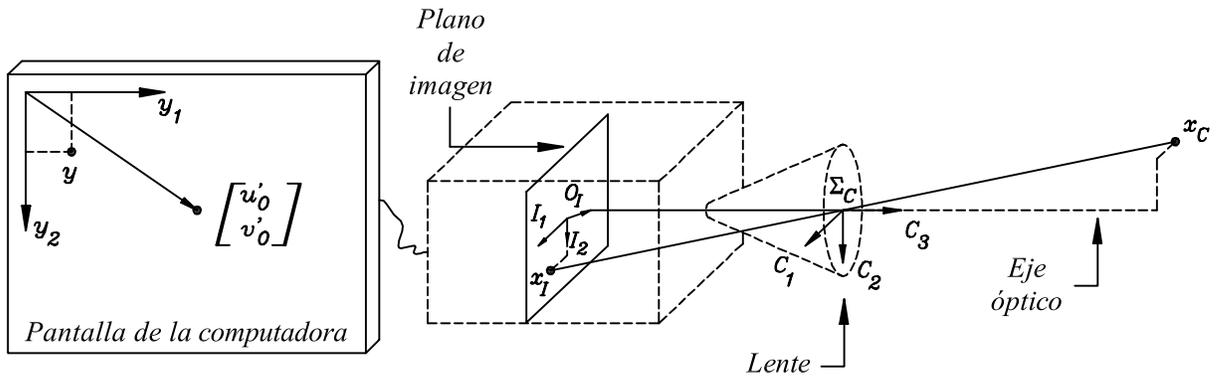


Figura 10: Cámara con lente delgada.

Device); la salida de este CCD es digitalizada, transferida a memoria de la computadora y desplegada en pantalla con unidades en píxeles. Aunque cabe aclarar que no se considerará el efecto de la cuantización.

En la Figura 10 pueden observarse varios marcos coordenados. El marco  $\Sigma_C$  o marco de la cámara, el cual tiene el origen en el centro de la lente; el eje  $C_3$  se encuentra alineado con el eje óptico y está apuntando hacia la escena. El plano  $I_1 - I_2$  o plano de imagen (formado por el arreglo de sensores fotosensibles) con origen en el centro geométrico del arreglo de sensores y con ejes paralelos a las direcciones de los elementos en el arreglo; la intersección del eje óptico con el arreglo de sensores es denotado por el vector  $O_I$ , el cual puede no ser cero debido a posibles desalineaciones internas. El plano  $y_1 - y_2$  con origen en la esquina superior izquierda de la pantalla de la computadora y con ejes paralelos a los renglones y columnas de la pantalla.

El vector  $[u'_0 \ v'_0]^T$  denota el centro de la imagen en la computadora correspondiente al mapeo del origen del plano de imagen  $I_1 - I_2$  al plano  $y_1 - y_2$  en píxeles (Lenz y Tsai, 1988). Sin pérdida de generalidad, se definirá el plano  $C_1 - C_2$  paralelo al plano de imagen  $I_1 - I_2$ , apuntando  $C_1$  en la misma dirección que  $I_1$  y  $C_2$  en la misma dirección que  $I_2$ .

Ahora bien, un punto  $\mathbf{x}_C = [x_{C_1} \ x_{C_2} \ x_{C_3}]^T$  en la escena (respecto al marco de la cámara) se mapea hacia el plano de imagen mediante el modelo de formación de la lente

delgada (10) o equivalentemente (11). Se considerará que el punto  $\mathbf{x}_C$  se encuentra bien enfocado en el plano de imagen, esto significa que el plano  $I_1 - I_2$  se encuentra a una distancia  $|\frac{\lambda x_{C_3}}{\lambda - x_{C_3}}|$  del plano  $C_1 - C_2$  ( $\lambda > 0$ ). De esta manera la posición del punto correspondiente  $\mathbf{x}_I = [x_{I_1} \ x_{I_2}]^T$  en el plano de imagen puede ser encontrado a partir del modelo de proyección en perspectiva (1), resultando

$$\mathbf{x}_I = \frac{\lambda}{\lambda - x_{C_3}} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \mathbf{O}_I.$$

El modelo de proyección en perspectiva produce una imagen invertida tanto horizontal como verticalmente, por lo que si por medios computacionales se elimina esta inversión, entonces se llega a lo siguiente

$$\mathbf{x}'_I = \frac{\lambda}{x_{C_3} - \lambda} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \mathbf{O}_I. \quad (12)$$

La última ecuación es válida para puntos localizados enfrente de la cámara tales que su profundidad  $x_{C_3} > \lambda$ ; y que estén bien enfocados (Horn, 1986). Note que solamente para los casos en donde la profundidad  $x_{C_3} \gg \lambda$  se tiene que  $\frac{\lambda}{x_{C_3} - \lambda} \approx \frac{\lambda}{x_{C_3}}$ .

Cabe mencionar que la geometría de la lente delgada establece que para tener un conjunto de puntos exactamente enfocados, es necesario que todos los puntos residan en un mismo plano perpendicular al eje óptico.

El paso que sigue es mapear el punto  $\mathbf{x}'_I$  al plano  $y_1 - y_2$ , esto se realiza mediante la transformación lineal siguiente (Feddema *et al.*, 1991)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} \mathbf{x}'_I + \begin{bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde  $\alpha_u > 0$  y  $\alpha_v > 0$  son los factores de escala en [píxeles/m] a lo largo de los ejes  $I_1$  e  $I_2$  del arreglo de sensores fotosensibles, respectivamente. El vector  $[u'_0 \ v'_0]^T$  ya ha sido descrito como el centro de la imagen en la computadora correspondiente al mapeo

del origen del plano de imagen  $I_1 - I_2$  al plano  $y_1 - y_2$  en píxeles.

Finalmente, el modelo explícito de la cámara con lente delgada se obtiene combinando (12) con (13), resultando

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{x_{C_3} - \lambda} \begin{bmatrix} \alpha_u x_{C_1} \\ \alpha_v x_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} \mathbf{O}_I + \begin{bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Los parámetros extrínsecos de la cámara lo conforman los parámetros que definen la ubicación en el espacio del marco coordenado  $\Sigma_C$  de la cámara y los parámetros intrínsecos son  $\lambda$ ,  $u'_0$ ,  $v'_0$ ,  $\alpha_u$ ,  $\alpha_v$  y las componentes del vector  $\mathbf{O}_I$ .

Si se considera que los factores de escala  $\alpha_u$  y  $\alpha_v$  son ambos iguales a una  $\alpha > 0$ , entonces (14) puede quedar expresada como

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{\alpha\lambda}{x_{C_3} - \lambda} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \alpha\mathbf{O}_I + \begin{bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, note que los dos últimos términos de la ecuación anterior son vectores constantes que pueden ser denotados por su suma, de esta manera el modelo de imagen con lente delgada simplificado es (Hutchinson *et al.*, 1996; Kelly, 1996)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{\alpha\lambda}{x_{C_3} - \lambda} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{O}_I + \begin{bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{bmatrix}.$$

Debido a que el mapeo entre el plano de imagen  $I_1 - I_2$  y el plano de la pantalla de la computadora  $y_1 - y_2$  es una transformación lineal; en este trabajo de tesis, a este último plano, el plano  $y_1 - y_2$ , también se le llamará el plano de imagen. Además, cabe destacar que bajo las suposiciones impuestas, los tres planos en el modelo de la cámara con lente delgada son paralelos y alineados entre sí, es decir,  $y_1 - y_2$ ,  $I_1 - I_2$  y  $C_1 - C_2$

son planos paralelos con ejes  $y_1$ ,  $I_1$  y  $C_1$  apuntando en la misma dirección y ejes  $y_2$ ,  $I_2$  y  $C_2$  también apuntando en la misma dirección.

## II.2 Momentos de imagen

De forma general, los momentos describen cantidades numéricas relacionadas con distancias a puntos o ejes de referencia. Los momentos son utilizados en distintas áreas del conocimiento, como por ejemplo en estadística para caracterizar una distribución de variables aleatorias o en mecánica para caracterizar cuerpos debido a su distribución espacial de masa. Así mismo, los momentos en el análisis de imágenes pueden usarse si se considera una imagen segmentada, binaria o en escala de grises, como una función bidimensional de distribución de densidad. En este sentido, los momentos pueden ser aprovechados para caracterizar un segmento de imagen y extraerle propiedades en forma análoga a lo realizado en estadística y mecánica (Prokop y Reeves, 1992).

Considere un objeto plano y denso  $\mathcal{O}_S$  localizado en el plano  $S_1 - S_2$  de un marco coordenado Cartesiano  $\Sigma_S = \{S_1, S_2, S_3\}$ , también considere que el objeto está compuesto por un conjunto de contornos cerrados; entonces los *momentos Cartesianos bidimensionales*  ${}^S m_{ij}$  de  $\mathcal{O}_S$  (respecto a  $\Sigma_S$ ), de orden  $i + j$  ( $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ), son definidos como

$${}^S m_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_S} S_1^i S_2^j f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 \quad (16)$$

donde  $f(S_1, S_2)$  es la función de distribución de densidad de  $\mathcal{O}_S$ .

Un conjunto completo de momentos de orden  $n_m$  consiste de todos los momentos  ${}^S m_{ij}$ , tal que  $i + j \leq n_m$  y que contenga  $\frac{1}{2}[n_m + 1][n_m + 2]$  elementos. Note que  $S_1^i S_2^j$  es la *función base* para esta definición de momento.

El uso de momentos para el análisis de imágenes y para la representación de objetos fue propuesto por Hu (1962). El *teorema de unicidad de Hu* establece que si  $f(S_1, S_2)$  es continua a tramos y tiene valores no nulos solamente en una región finita del plano

$S_1 - S_2$ , entonces los momentos de todos los órdenes existen. De esta manera, puede ser mostrado que el conjunto de momentos  $\{^S m_{ij}\}$  es determinado de forma única por  $f(S_1, S_2)$  y también  $f(S_1, S_2)$  es determinada de forma única por  $\{^S m_{ij}\}$ . Debido a que un segmento de imagen tiene área finita y, en el peor de los casos, es continua a tramos, los momentos de todos los órdenes existen y un conjunto de momentos puede describir en forma única la información contenida en un segmento de imagen. Para caracterizar toda la información contenida en un segmento de imagen se requiere, potencialmente, un número infinito de valores de momentos. El objetivo es seleccionar un subconjunto significativo de momentos que contenga suficiente información para caracterizar de forma única la imagen de una aplicación específica.

### II.2.1 Definición

Específicamente, para la definición de los *momentos de imagen*, considere un objeto  $\mathcal{O}_y$  (respecto al plano  $y_1 - y_2$ ) en una imagen binarizada  $f(y_1, y_2)$ , entonces los momentos de imagen  $^y m_{ij}$  de  $\mathcal{O}_y$  de orden  $i + j$  ( $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ) son definidos por

$$^y m_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_y} y_1^i y_2^j f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (17)$$

donde  $f(y_1, y_2) = 1$  para un punto  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$  contenido en  $\mathcal{O}_y$  y nula en cualquier otro caso.

Los momentos de orden bajo representan propiedades geométricas fundamentales de la distribución de un objeto. A través de los momentos de imagen de orden cero y uno obtenemos:

- El área del objeto  $\mathcal{O}_y$

$$^y m_{00} = \int \int_{\mathcal{O}_y} dy_1 dy_2.$$

- Componente en dirección de  $y_1$  del centroide del objeto  $\mathcal{O}_y$

$$y_{g_1} = \frac{y m_{10}}{y m_{00}} = \frac{\int \int_{\mathcal{O}_y} y_1 dy_1 dy_2}{\int \int_{\mathcal{O}_y} dy_1 dy_2}.$$

- Componente en dirección de  $y_2$  del centroide del objeto  $\mathcal{O}_y$

$$y_{g_2} = \frac{y m_{01}}{y m_{00}} = \frac{\int \int_{\mathcal{O}_y} y_2 dy_1 dy_2}{\int \int_{\mathcal{O}_y} dy_1 dy_2}.$$

El centroide  $\mathbf{y}_g = [y_{g_1} \ y_{g_2}]^T$  define un sitio único del objeto  $\mathcal{O}_y$  y puede ser utilizado como punto de referencia para describir la posición del objeto en el plano de imagen  $y_1 - y_2$ .

Una clase especial de momentos son determinados colocando el objeto  $\mathcal{O}_S$  tal que su centroide  $\mathbf{S}_g = [S_{g_1} \ S_{g_2}]^T = [S m_{10}/S m_{00} \ S m_{01}/S m_{00}]^T$  coincida con el origen del plano  $S_1 - S_2$ , estos momentos son llamados *momentos centrales Cartesianos*  ${}^S \mu_{ij}$  del objeto  $\mathcal{O}_S$ , de esta manera

$${}^S \mu_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_S} [S_1 - S_{g_1}]^i [S_2 - S_{g_2}]^j f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 \quad (18)$$

donde  $f(S_1, S_2)$  es la función de distribución de densidad de  $\mathcal{O}_S$ .

Así mismo, los *momentos centrales de imagen*  ${}^y \mu_{ij}$  de un objeto  $\mathcal{O}_y$  son definidos mediante

$${}^y \mu_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_y} [y_1 - y_{g_1}]^i [y_2 - y_{g_2}]^j f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (19)$$

donde  $f(y_1, y_2)$  se define como en (17).

Existen ecuaciones que relacionan los momentos (regulares) con los momentos centrales, las cuales son

$${}^S \mu_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{l} [-S_{g_1}]^{i-k} [-S_{g_2}]^{j-l} S m_{kl}$$

$${}^S m_{kl} = \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^l \binom{k}{m} \binom{l}{n} S_{g_1}^{k-m} S_{g_2}^{l-n} {}^S \mu_{mn} \quad (20)$$

donde

$$\binom{i}{k} = \frac{i!}{k!(i-k)!},$$

por lo que se puede calcular cualquier momento central a partir de los momentos (regulares) y viceversa.

En particular, la relación entre los momentos regulares y los momentos centrales hasta de orden tres son los siguientes

$$\begin{aligned} {}^S \mu_{00} &= {}^S m_{00} & {}^S \mu_{11} &= {}^S m_{11} - S_{g_2} {}^S m_{10} \\ {}^S \mu_{10} &= 0 & {}^S \mu_{30} &= {}^S m_{30} - 3S_{g_1} {}^S m_{20} + 2S_{g_1}^2 {}^S m_{10} \\ {}^S \mu_{01} &= 0 & {}^S \mu_{03} &= {}^S m_{03} - 3S_{g_2} {}^S m_{02} + 2S_{g_2}^2 {}^S m_{01} \\ {}^S \mu_{20} &= {}^S m_{20} - S_{g_1} {}^S m_{10} & {}^S \mu_{21} &= {}^S m_{21} - 2S_{g_1} {}^S m_{11} - S_{g_2} {}^S m_{20} + 2S_{g_1}^2 {}^S m_{01} \\ {}^S \mu_{02} &= {}^S m_{02} - S_{g_2} {}^S m_{01} & {}^S \mu_{12} &= {}^S m_{12} - 2S_{g_2} {}^S m_{11} - S_{g_1} {}^S m_{02} + 2S_{g_2}^2 {}^S m_{10}. \end{aligned}$$

## II.2.2 Momentos de orden dos

Los elementos del conjunto de los momentos de orden  $n_m = 2$  son  ${}^S m_{20}$ ,  ${}^S m_{02}$  y  ${}^S m_{11}$ ; los cuales son conocidos como *momentos de inercia*. Estos momentos pueden ser utilizados para determinar diversas características del objeto, como las que se describen enseguida.

### Ejes principales

Los momentos de orden dos son utilizados para determinar los *ejes principales* de un objeto. Los ejes principales pueden ser definidos como el par de ejes alrededor de los cuales existen los segundos momentos máximo y mínimo (eje mayor y menor, respectivamente). En términos de los momentos, la orientación  ${}^S \beta$  de un eje principal está

dada por

$${}^S\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2 {}^S\mu_{11}}{{}^S\mu_{20} - {}^S\mu_{02}} \right).$$

Cabe mencionar que  ${}^S\beta$  representa el ángulo del eje principal más cercano al eje  $S_1$  y que su valor se encontrará en el rango  $-\pi/4 \leq {}^S\beta \leq \pi/4$  [rad]. La Tabla I ilustra cómo puede determinarse el ángulo del eje principal mayor  ${}^S\beta_M$  a partir de  ${}^S\mu_{11}$ , de la diferencia  $[{}^S\mu_{20} - {}^S\mu_{02}]$  y del ángulo  ${}^S\beta$ .

Tabla I: Orientación del eje principal mayor.

${}^S\mu_{11}$	${}^S\mu_{20} - {}^S\mu_{02}$	${}^S\beta$	${}^S\beta_M$
0	-	0	$\pi/2$
+	-	$-\pi/4 < {}^S\beta < 0$	$\pi/4 < {}^S\beta_M < \pi/2$
+	0	0	$\pi/4$
+	+	$0 < {}^S\beta < \pi/4$	$0 < {}^S\beta_M < \pi/4$
0	0	0	0
-	+	$-\pi/4 < {}^S\beta < 0$	$-\pi/4 < {}^S\beta_M < 0$
-	0	0	$-\pi/4$
-	-	$0 < {}^S\beta < \pi/4$	$-\pi/2 < {}^S\beta_M < -\pi/4$

El eje principal mayor puede ser usado como eje de referencia único (del objeto) para que a partir  ${}^S\beta_M$  se describa la orientación del objeto dentro del plano. Nótese que  ${}^S\beta_M$  no garantiza una orientación única debido a la ambigüedad existente en  $\pi$  [rad]. Esta ambigüedad puede ser resuelta usando el signo de los momentos de orden tres, como se verá más adelante; o mediante la función “atan2( )” la cual da como resultado un ángulo entre  $-\pi$  y  $\pi$  [rad].

### Elipse imagen (image ellipse)

Los momentos de primer y segundo orden permiten definir una aproximación inercialmente equivalente del objeto original, conocida como la *elipse imagen* (Teague, 1980). La elipse imagen es un disco elipsoidal con la misma masa y momentos de orden dos que el objeto original. Si esta elipse imagen se define a través de un semi-eje mayor  $a$  y de un semi-eje menor  $b$  (ver Figura 11), entonces  $a$  y  $b$  pueden determinarse a partir

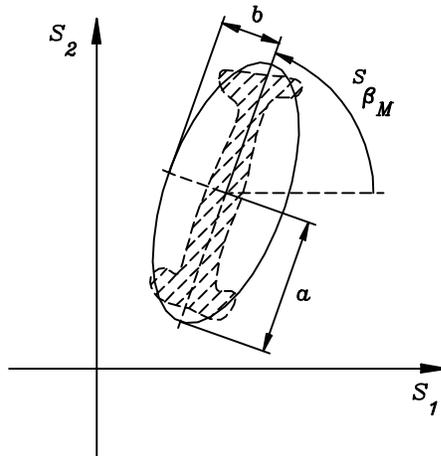


Figura 11: Elipse imagen.

de los momentos hasta de orden dos mediante

$$a = \sqrt{\frac{S\mu_{20} + S\mu_{02} + \sqrt{[S\mu_{20} - S\mu_{02}]^2 + 4 S\mu_{11}^2}}{S\mu_{00}/2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{S\mu_{20} + S\mu_{02} - \sqrt{[S\mu_{20} - S\mu_{02}]^2 + 4 S\mu_{11}^2}}{S\mu_{00}/2}}.$$

Si adicionalmente se requiere que todos los momentos hasta de orden dos sean los mismos tanto para la elipse imagen como para el objeto original, entonces se debe centrar la elipse imagen en el centro de masas (o centroide) del objeto y girarla  $S\beta_M$  [rad] de tal manera que el eje mayor de la elipse imagen se alinee con el eje principal del objeto.

### Radio de giro

Otra propiedad que puede ser determinada a partir de los momentos de orden dos es el *radio de giro* de un objeto. El radio de giro de un objeto, *alrededor de un eje*, es la distancia del eje a la línea donde toda la masa de dicho objeto puede ser concentrada sin un cambio del valor del segundo momento alrededor de ese eje. En términos de

momentos, los radios de giro  $r_{g_1}$  y  $r_{g_2}$  alrededor de los ejes  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, están dados por

$$r_{g_1} = \sqrt{\frac{S\mu_{20}}{S\mu_{00}}} \quad \text{y} \quad r_{g_2} = \sqrt{\frac{S\mu_{02}}{S\mu_{00}}}.$$

El radio de giro *alrededor del origen* es el radio de un círculo centrado en el lugar donde puede ser concentrada toda la masa de un objeto sin cambiar el segundo momento alrededor del origen. En términos de los momentos centrales hasta de orden dos, este valor viene dado mediante

$$r_g = \sqrt{\frac{S\mu_{20} + S\mu_{02}}{S\mu_{00}}}.$$

El radio de giro alrededor del origen  $r_g$  posee la propiedad de ser invariante a rotaciones del objeto.

### II.2.3 Momentos de orden tres

Los momentos centrales de orden tres  $S\mu_{30}$  y  $S\mu_{03}$  describen la asimetría de un objeto. La asimetría es una medida clásica de estadística que da idea de la desviación de datos respecto a una media. Los coeficientes de asimetría para un objeto  $s_{k_1}$  sobre el eje  $S_1$  y  $s_{k_2}$  sobre el eje  $S_2$  son expresados con

$$s_{k_1} = \frac{S\mu_{30}}{S\mu_{20}^{3/2}} \quad \text{y} \quad s_{k_2} = \frac{S\mu_{03}}{S\mu_{02}^{3/2}}.$$

Los signos de los coeficientes son una indicación del lado del eje donde se presenta la asimetría, según se muestra en la Tabla II. Cabe notar que  $s_{k_1} = 0$  o  $s_{k_2} = 0$  no garantiza que el objeto sea simétrico.

Como se mencionó previamente, los momentos de orden tres pueden ser utilizados para resolver la ambigüedad existente en la determinación del ángulo del eje principal de un objeto. Primero se debe destacar que una rotación de  $\pi$  [rad] de un objeto en el plano cambia el signo de los coeficientes de asimetría en ambos ejes; luego, el signo de

Tabla II: Asimetría basada en los signos de  $s_{k_1}$  y  $s_{k_2}$ .

$s_{k_1}$	Asimetría	$s_{k_2}$	Asimetría
+	Al lado negativo de $S_2$	+	Al lado negativo de $S_1$
0	Simétrico respecto a $S_2$	0	Simétrico respecto a $S_1$
-	Al lado positivo de $S_2$	-	Al lado positivo de $S_1$

los coeficientes de asimetría sólo depende del signo de  ${}^S\mu_{30}$  y  ${}^S\mu_{03}$ , ya que tanto  ${}^S\mu_{20}$  como  ${}^S\mu_{02}$  siempre son positivos. Entonces, por ejemplo, si el objeto es rotado tal que el eje principal mayor sea coincidente con el eje  $S_1$ , entonces el signo de  ${}^S\mu_{30}$  puede ser utilizado para distinguir entre las dos posibles orientaciones.

## II.2.4 Invariantes

Basado en la teoría de invariantes algebraicos, el estudio de *invariantes* en los momentos de imagen fue introducido por Hu (1962). Básicamente, un invariante es una combinación relativa o absoluta de momentos cuyo valor permanece sin cambio al aplicarle una transformación al objeto, por ejemplo una traslación, una rotación o un escalamiento. Enseguida se verán diferentes combinaciones de momentos que son invariantes ante una o más de estas transformaciones.

### Invariantes a traslaciones

La traslación de un objeto  $\mathcal{O}_S$  en un plano  $S_1 - S_2$  con función de distribución de densidad  $f(S_1, S_2)$  es una transformación que resulta en una nueva función  $f'(S_1, S_2)$  definida como

$$f'(S_1, S_2) = f(S_1 - t_{S_1}, S_2 - t_{S_2})$$

donde  $t_{S_1} \in \mathbb{R}$  y  $t_{S_2} \in \mathbb{R}$  denotan la traslación en  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente.

De hecho, los momentos  ${}^S m'_{ij}$  del objeto trasladado están dados en función de los

momentos originales  ${}^S m_{ij}$  mediante

$${}^S m'_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{l} [t_{S_1}]^{i-k} [t_{S_2}]^{j-l} {}^S m_{kl}.$$

Un invariante a traslaciones es aquella combinación de momentos que mantenga constante su valor ante este tipo de transformación en el objeto. La única forma de lograrlo es moviendo el origen del plano al centroide del objeto. De esta manera y de acuerdo a su definición, los momentos centrales son invariantes a traslaciones del objeto.

### Invariantes a traslaciones y rotaciones

Una rotación de  $\theta_{rot} \in \mathbb{R}$  alrededor del origen del plano  $S_1 - S_2$  de la función de distribución de densidad  $f(S_1, S_2)$  del objeto  $\mathcal{O}_S$  resulta en una nueva función  $f'(S_1, S_2)$  definida por

$$f'(S_1, S_2) = f(S_1 \cos(\theta_{rot}) + S_2 \text{sen}(\theta_{rot}), -S_1 \text{sen}(\theta_{rot}) + S_2 \cos(\theta_{rot})).$$

En particular, los momentos del objeto transformado mediante esta rotación  ${}^S m'_{ij}$  son expresados en términos de los momentos originales del objeto  ${}^S m_{ij}$ , a través de

$${}^S m'_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{l} [-1]^{j-l} [\cos(\theta_{rot})]^{i-k+l} [\text{sen}(\theta_{rot})]^{j+k-l} {}^S m_{i+j-k-l, k+l}.$$

Note que los momentos del objeto rotado son una combinación de los momentos originales del objeto del mismo orden o menor.

Invariantes ante sólo rotación son difíciles de conseguir. Los siguientes son los primeros cuatro invariantes tanto a traslaciones como a rotaciones encontrados por Hu

(1962):

$$\begin{aligned}
{}^S\phi_{rot1} &= {}^S\mu_{20} + {}^S\mu_{02} \\
{}^S\phi_{rot2} &= [{}^S\mu_{20} - {}^S\mu_{02}]^2 + 4 {}^S\mu_{11}^2 \\
{}^S\phi_{rot3} &= [{}^S\mu_{30} - 3 {}^S\mu_{12}]^2 + [3 {}^S\mu_{21} - {}^S\mu_{03}]^2 \\
{}^S\phi_{rot4} &= [{}^S\mu_{30} + {}^S\mu_{12}]^2 + [{}^S\mu_{21} + {}^S\mu_{03}]^2.
\end{aligned}$$

### Invariantes a traslaciones, rotaciones y cambios de escala

Un cambio de escala de un objeto  $\mathcal{O}_S$  con función de distribución de densidad  $f(S_1, S_2)$  en el plano  $S_1 - S_2$  produce una nueva función  $f'(S_1, S_2)$  definida mediante

$$f'(S_1, S_2) = f(S_1/\alpha_{esc1}, S_2/\alpha_{esc2})$$

donde  $\alpha_{esc1} \in \mathbb{R}$  y  $\alpha_{esc2} \in \mathbb{R}$  son los factores de escala sobre  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente.

Los momentos del objeto transformado  ${}^S m'_{ij}$  pueden ser expresados en función de los momentos originales del objeto  ${}^S m_{ij}$  como

$${}^S m'_{ij} = \begin{cases} \alpha_{esc1}^{i+1} \alpha_{esc2}^{j+1} {}^S m_{ij}; & \text{si } \alpha_{esc1} \neq \alpha_{esc2} \\ \alpha_{esc}^{i+j+2} {}^S m_{ij}; & \text{si } \alpha_{esc1} = \alpha_{esc2} = \alpha_{esc} \end{cases}.$$

De manera similar, si  $\alpha_{esc1} = \alpha_{esc2} = \alpha_{esc}$ , entonces

$${}^S \mu'_{ij} = \alpha_{esc}^{i+j+2} {}^S \mu_{ij}. \quad (21)$$

En particular

$${}^S \mu'_{00} = \alpha_{esc}^2 {}^S \mu_{00}, \quad (22)$$

lo que conduce a los siguientes invariantes tanto a traslaciones como cambios de escala

(Sossa, 2006):

$${}^S\eta_{escij} = \frac{{}^S\mu_{ij}}{{}^S\mu_{00}^{\frac{i+j}{2}+1}}, \quad \text{para } i + j = 2, 3, \dots ;$$

puesto que de (21) y (22)

$$\begin{aligned} \frac{{}^S\mu_{ij}}{{}^S\mu_{00}^{\frac{i+j}{2}+1}} &= \frac{\frac{{}^S\mu'_{ij}}{\alpha_{esc}^{i+j+2}}}{\left[\frac{{}^S\mu'_{00}}{\alpha_{esc}}\right]^{\frac{i+j}{2}+1}} \\ &= \frac{\alpha_{esc}^{i+j+2}}{\alpha_{esc}^{i+j+2}} \frac{{}^S\mu'_{ij}}{{}^S\mu'_{00}^{\frac{i+j}{2}+1}} \\ &= \frac{{}^S\mu'_{ij}}{{}^S\mu'_{00}^{\frac{i+j}{2}+1}}. \end{aligned}$$

Finalmente, intercambiando los momentos centrales de las ecuaciones de los invariantes ante traslaciones y rotaciones por el correspondiente  ${}^S\eta_{escij}$  se obtienen los siete invariantes a traslaciones, rotaciones y cambios de escala de Hu:

$$\begin{aligned} {}^S\phi_{esc1} &= {}^S\eta_{esc20} + {}^S\eta_{esc02} \\ {}^S\phi_{esc2} &= [{}^S\eta_{esc20} - {}^S\eta_{esc02}]^2 + 4 {}^S\eta_{esc11}^2 \\ {}^S\phi_{esc3} &= [{}^S\eta_{esc30} - 3 {}^S\eta_{esc12}]^2 + [3 {}^S\eta_{esc21} - {}^S\eta_{esc03}]^2 \\ {}^S\phi_{esc4} &= [{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}]^2 + [{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}]^2 \\ {}^S\phi_{esc5} &= [{}^S\eta_{esc30} - 3 {}^S\eta_{esc12}][{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}] [ [{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}]^2 - 3[{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}]^2 ] + \\ &\quad [3 {}^S\eta_{esc21} - {}^S\eta_{esc03}][{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}] [ 3[{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}]^2 - [{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}]^2 ] \\ {}^S\phi_{esc6} &= [{}^S\eta_{esc20} - {}^S\eta_{esc02}] [ [{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}]^2 - [{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}] ] + \\ &\quad 4 {}^S\eta_{esc11} [{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}][{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}] \\ {}^S\phi_{esc7} &= [3 {}^S\eta_{esc21} - {}^S\eta_{esc03}][{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}] [ [{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}]^2 - 3[{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}]^2 ] + \\ &\quad [3 {}^S\eta_{esc12} - {}^S\eta_{esc30}][{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}] [ 3[{}^S\eta_{esc30} + {}^S\eta_{esc12}]^2 - [{}^S\eta_{esc21} + {}^S\eta_{esc03}]^2 ]. \end{aligned}$$

## II.2.5 Transformación de momentos

En esta subsección se detalla la transformación entre los momentos Cartesianos bidimensionales de un objeto planar con forma arbitraria  $\mathcal{O}_O$  (respecto a un plano

$O_1 - O_2$ ) y los momentos de imagen producto de la proyección de este objeto  $\mathcal{O}_O$  en  $\mathcal{O}_y$  en el plano de imagen  $y_1 - y_2$ . Para este efecto, se considera una cámara con lente delgada (como la descrita en la Subsección II.1.3) en una configuración tal que su eje óptico sea perpendicular al plano  $O_1 - O_2$  del objeto. La intención de este análisis es obtener resultados con la posibilidad de ser aplicados al control de movimiento planar tanto de manipuladores como de robots móviles (Bugarin y Kelly, 2007).

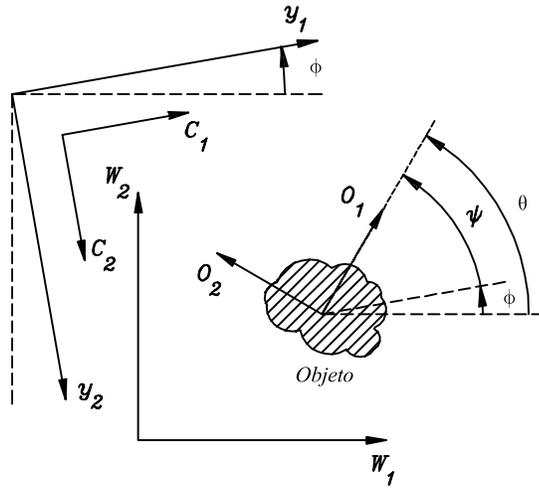


Figura 12: Vista del objeto perpendicular al eje óptico de la cámara.

En la Figura 12 puede observarse una vista del objeto perpendicular al eje óptico de la cámara. Note que se han colocado varios marcos coordenados Cartesianos: el marco del objeto  $\Sigma_O$  atado, precisamente, al objeto; el marco del mundo  $\Sigma_W$  fijo en algún lugar de la escena o espacio de trabajo; el marco de la cámara  $\Sigma_C$ ; y el plano de imagen  $y_1 - y_2$ . La variable  $\theta$  denota la orientación del marco del objeto respecto al marco del mundo,  $\psi$  representa la orientación también del marco del objeto pero ahora respecto al plano de imagen y  $\phi$  es el giro del marco de la cámara respecto a  $W_3$ ; de tal manera que  $\theta = \psi + \phi$ .

Un punto  $\mathbf{x}_O = [x_{O_1} \ x_{O_2} \ x_{O_3}]^T$  en el objeto, respecto a  $\Sigma_O$ , puede ser transformado a  $\Sigma_W$  mediante

$$\mathbf{x}_W = R_W^O(\theta)\mathbf{x}_O + \mathbf{O}_W^O \quad (23)$$

donde el vector  $\mathbf{O}_W^O$  denota el vector de posición del origen  $\Sigma_O$  respecto a  $\Sigma_W$  y

$$R_W^O(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa la matriz de rotación del marco  $\Sigma_O$  respecto a  $\Sigma_W$ .

A su vez, el vector  $\mathbf{x}_W = [x_{W_1} \ x_{W_2} \ x_{W_3}]^T$  puede ser transformado a coordenadas del marco de la cámara a través de

$$\mathbf{x}_C = R_W^C{}^T(\phi) [\mathbf{x}_W - \mathbf{O}_W^C] \quad (24)$$

donde  $\mathbf{O}_W^C$  es el vector de posición del origen de  $\Sigma_C$  respecto a  $\Sigma_W$  y

$$R_W^C(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & -\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

es la matriz de rotación del marco de la cámara respecto a  $\Sigma_W$ .

Para este caso particular, las componentes del vector  $\mathbf{x}_C$ , después de sustituir (23) en (24) y simplificar, son

$$\begin{aligned} x_{C_1} &= \cos(\psi)x_{O_1} - \text{sen}(\psi)x_{O_2} + c_1 \\ x_{C_2} &= -\text{sen}(\psi)x_{O_1} - \cos(\psi)x_{O_2} + c_2 \\ x_{C_3} &= -[O_{W_3}^O - O_{W_3}^C] \end{aligned} \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(\phi)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] + \text{sen}(\phi)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C] \\ c_2 &= \text{sen}(\phi)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] - \cos(\phi)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C]. \end{aligned}$$

De esta manera, el mapeo de un punto  $\mathbf{x}_O$  en el objeto (respecto a  $\Sigma_O$ ) al plano de imagen es obtenido a través de las transformaciones de coordenadas (23) y (24), y del modelo de la cámara con lente delgada (15), el cual es nuevamente descrito aquí:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\alpha\lambda}{x_{C_3} - \lambda} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  es el factor de conversión de metros a píxeles,  $\lambda$  es la distancia focal de la lente, el vector  $[u_0 \ v_0]^T$  denota el centro de la imagen y  $\mathbf{x}_C = [x_{C_1} \ x_{C_2} \ x_{C_3}]^T$  es el vector de posición del punto  $\mathbf{x}_O$  respecto al marco de la cámara; el cual es expresado en (26) de manera simplificada.

Observe que para la configuración de la cámara adoptada, la profundidad  $x_{C_3}$  de todos los puntos en el plano  $O_1 - O_2$  es la misma. Para simplicidad en la notación defina

$$\gamma = \frac{\alpha\lambda}{x_{C_3} - \lambda},$$

la cual, entonces, es una constante. Por lo tanto el modelo de imagen, para la configuración de la cámara adoptada, puede ser expresado como

$$\mathbf{y} = \gamma \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Ahora, según (16), los momentos Cartesianos bidimensionales  ${}^O m_{ij}$  del objeto  $\mathcal{O}_O$  respecto a  $O_1 - O_2$  son obtenidos mediante

$${}^O m_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_O} x_{O_1}^i x_{O_2}^j dO_1 dO_2, \quad (28)$$

donde, en este caso,  $f(O_1, O_2) = 1$  para un punto  $\mathbf{x}_O$  contenido en  $\mathcal{O}_O$  y nula para cualquier otro caso. Y, de acuerdo a (17), los momentos de imagen  ${}^y m_{ij}$  del objeto  $\mathcal{O}_y$

respecto a  $y_1 - y_2$  se encuentran a través de

$${}^y m_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_y} y_1^i y_2^j dy_1 dy_2. \quad (29)$$

El propósito es encontrar una relación entre los momentos Cartesianos del objeto y sus respectivo momentos de imagen. Para este fin, considere el siguiente *teorema para el cambio de variables en las integrales múltiples*, cuya prueba puede consultarse en (Swokowski, 1988).

**Teorema 1.** Si  $S_1 = g(U_1, U_2)$  y  $S_2 = h(U_1, U_2)$  es una transformación de coordenadas de  $\Sigma_U$  a  $\Sigma_S$ , entonces

$$\int \int_{\mathcal{O}_S} f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 = \pm \int \int_{\mathcal{O}_U} f(g(U_1, U_2), h(U_1, U_2)) \left| \frac{\partial(S_1, S_2)}{\partial(U_1, U_2)} \right| dU_1 dU_2$$

donde  $\mathcal{O}_U$  es el objeto respecto a  $\Sigma_U$ ,  $\mathcal{O}_S$  es el objeto transformado de  $\Sigma_U$  a  $\Sigma_S$  y

$$\left| \frac{\partial(S_1, S_2)}{\partial(U_1, U_2)} \right| = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial U_1} & \frac{\partial S_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial S_2}{\partial U_1} & \frac{\partial S_2}{\partial U_2} \end{bmatrix} \right|$$

es el determinante del Jacobiano de la transformación.

Se escoge el signo positivo o el signo negativo dependiendo de que, si cuando un punto  $[U_1 \ U_2]^T$  recorre la frontera de  $\mathcal{O}_U$  una vez en el sentido positivo, el punto correspondiente  $[S_1 \ S_2]^T$  traza la frontera de  $\mathcal{O}_S$  una vez en la dirección positiva o en la dirección negativa, respectivamente. △△△

El sentido (o dirección) positivo a lo largo de la frontera de  $\mathcal{O}_U$  es tal que cuando un punto  $[U_1 \ U_2]^T$  recorre dicha frontera, el objeto  $\mathcal{O}_U$  queda siempre a la izquierda. Con el sentido negativo,  $\mathcal{O}_U$  queda a la derecha. Así mismo, se requiere que la transformación de  $\mathcal{O}_U$  a  $\mathcal{O}_S$  sea de manera biunívoca y que el objeto  $\mathcal{O}_U$  tenga una frontera formada por una curva cerrada simple que sea regular por partes y que esta curva sea transformada en la frontera de  $\mathcal{O}_S$ . Para el caso de la transformación de momentos planteada, esto

se cumple si  $\gamma > 0$ , es decir, cuando, para cuestiones prácticas, el objeto de interés está enfrente de la cámara, está dentro del campo de visión y no es ocluido.

Por lo tanto, siguiendo el Teorema 1 y utilizando (27) y (29) tenemos que

$$\begin{aligned} {}^y m_{ij} &= \gamma^2 \int \int_{\mathcal{O}_o} [\gamma x_{C_1} + u_0]^i [\gamma x_{C_2} + v_0]^j dO_1 dO_2 \\ &= \gamma^2 \int \int_{\mathcal{O}_o} [\gamma \cos(\psi)x_{O_1} - \gamma \text{sen}(\psi)x_{O_2} + \gamma c_1 + u_0]^i \cdot \\ &\quad [-\gamma \text{sen}(\psi)x_{O_1} - \gamma \cos(\psi)x_{O_2} + \gamma c_2 + v_0]^j dO_1 dO_2 \end{aligned} \quad (30)$$

donde el determinante del Jacobiano de la transformación es

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(O_1, O_2)} \right| = \left| \begin{bmatrix} -\gamma \text{sen}(\psi) & -\gamma \cos(\psi) \\ -\gamma \cos(\psi) & \gamma \text{sen}(\psi) \end{bmatrix} \right| = -\gamma^2.$$

Note que se ha seleccionado el signo negativo en la aplicación del teorema debido a que el eje  $C_3$  del marco de la cámara y el eje  $O_3$  del marco del objeto apuntan en direcciones opuestas y esto provoca un sentido negativo en el movimiento de un punto en la frontera del objeto.

De acuerdo al *teorema multinomial* y a la ley distributiva para sumatorias múltiples (ver Apéndice B), (30) puede ser expresada como

$$\begin{aligned} {}^y m_{ij} &= \gamma^2 \int \int_{\mathcal{O}_o} \left[ \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} [\gamma \cos(\psi)x_{O_1}]^{k_1} [-\gamma \text{sen}(\psi)x_{O_2}]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \right] \cdot \\ &\quad \left[ \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [-\gamma \text{sen}(\psi)x_{O_1}]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)x_{O_2}]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} \right] dO_1 dO_2 \\ &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} \int \int_{\mathcal{O}_o} x_{O_1}^{k_1+l_1} x_{O_2}^{k_2+l_2} dO_1 dO_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} {}^O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} \tag{31}
\end{aligned}$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 + k_3 = i$  y  $l_1 + l_2 + l_3 = j$ . Note que en el último paso se utilizó (28).

De esta manera se muestra que mediante (31) los momentos de imagen de un objeto plano con forma arbitraria, en la configuración adoptada, pueden ser determinados a partir del previo conocimiento de los momentos Cartesianos de dicho objeto respecto a su plano de definición. Por supuesto, también puede ser necesario conocer los parámetros de la cámara y la postura del marco de objeto  $\Sigma_O$  respecto al marco de la cámara  $\Sigma_C$ .

Particularmente, las transformaciones entre momentos hasta de orden dos están dadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
{}^y m_{00} &= \gamma^2 {}^O m_{00} \\
{}^y m_{10} &= \gamma^3 \cos(\psi) {}^O m_{10} - \gamma^3 \text{sen}(\psi) {}^O m_{01} + \gamma^2 [\gamma c_1 + u_0] {}^O m_{00} \\
{}^y m_{01} &= -\gamma^3 \text{sen}(\psi) {}^O m_{10} - \gamma^3 \cos(\psi) {}^O m_{01} + \gamma^2 [\gamma c_2 + v_0] {}^O m_{00} \\
{}^y m_{11} &= -\gamma^4 \text{sen}(\psi) \cos(\psi) {}^O m_{20} + \gamma^4 \text{sen}(\psi) \cos(\psi) {}^O m_{02} + \\
&\quad \gamma^4 [\text{sen}^2(\psi) - \cos^2(\psi)] {}^O m_{11} + \\
&\quad + \gamma^3 [\gamma c_2 \cos(\psi) + v_0 \cos(\psi) - \gamma c_1 \text{sen}(\psi) - u_0 \text{sen}(\psi)] {}^O m_{10} + \\
&\quad + \gamma^3 [-\gamma c_2 \text{sen}(\psi) - v_0 \text{sen}(\psi) - \gamma c_1 \cos(\psi) - u_0 \cos(\psi)] {}^O m_{01} + \\
&\quad + \gamma^2 [\gamma^2 c_1 c_2 + \gamma c_1 v_0 + \gamma c_2 u_0 + u_0 v_0] {}^O m_{00} \\
{}^y m_{20} &= \gamma^4 \cos^2(\psi) {}^O m_{20} + \gamma^4 \text{sen}^2(\psi) {}^O m_{02} - 2\gamma^4 \text{sen}(\psi) \cos(\psi) {}^O m_{11} + \\
&\quad + \gamma^3 [2\gamma c_1 \cos(\psi) + 2u_0 \cos(\psi)] {}^O m_{10} + \\
&\quad + \gamma^3 [-2\gamma c_1 \text{sen}(\psi) - 2u_0 \text{sen}(\psi)] {}^O m_{01} + \\
&\quad + \gamma^2 [\gamma^2 c_1^2 + 2\gamma c_1 u_0 + u_0^2] {}^O m_{00} \\
{}^y m_{02} &= \gamma^4 \text{sen}^2(\psi) {}^O m_{20} + \gamma^4 \cos^2(\psi) {}^O m_{02} + 2\gamma^4 \text{sen}(\psi) \cos(\psi) {}^O m_{11} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma^3[-2\gamma c_2 \text{sen}(\psi) - 2v_0 \text{sen}(\psi)] {}^O m_{10} + \\
& +\gamma^3[-2\gamma c_2 \cos(\psi) - 2v_0 \cos(\psi)] {}^O m_{01} + \\
& +\gamma^2[\gamma^2 c_2^2 + 2\gamma c_2 v_0 + v_0^2] {}^O m_{00}.
\end{aligned}$$

El centroide del objeto en el plano de imagen es

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_g &= \begin{bmatrix} y_{g1} \\ y_{g2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} {}^y m_{10} / {}^y m_{00} \\ {}^y m_{01} / {}^y m_{00} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \gamma \cos(\psi) x_{gO_1} - \gamma \text{sen}(\psi) x_{gO_2} + \gamma c_1 + u_0 \\ -\gamma \text{sen}(\psi) x_{gO_1} - \gamma \cos(\psi) x_{gO_2} + \gamma c_2 + v_0 \end{bmatrix} \\
&= \gamma \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} + \begin{bmatrix} \gamma c_1 + u_0 \\ \gamma c_2 + v_0 \end{bmatrix} \tag{32}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{gO} &= \begin{bmatrix} x_{gO_1} \\ x_{gO_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} {}^O m_{10} / {}^O m_{00} \\ {}^O m_{01} / {}^O m_{00} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

es el centroide del objeto en  $\Sigma_O$ .

Es claro, para este caso, que la transformación inversa existe y está dada por

$$\mathbf{x}_{gO} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix} \left[ \mathbf{y}_g - \begin{bmatrix} \gamma c_1 + u_0 \\ \gamma c_2 + v_0 \end{bmatrix} \right].$$

### Invariantes a traslaciones

Si los momentos son referidos al centroide del objeto entonces estos momentos son invariantes a traslaciones y son conocidos como los momentos centrales  ${}^S \mu_{ij}$  del objeto

$\mathcal{O}_S$  respecto a  $\Sigma_S$ . De acuerdo a (18) los momentos centrales Cartesianos  ${}^O\mu_{ij}$  del objeto  $\mathcal{O}_O$  respecto a  $O_1 - O_2$  se determinan mediante

$${}^O\mu_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_O} [x_{O_1} - x_{g_{O_1}}]^i [x_{O_2} - x_{g_{O_2}}]^j dO_1 dO_2 \quad (33)$$

donde  $f(O_1, O_2)$  se define como en (28). Y los momentos centrales de imagen  ${}^y\mu_{ij}$  del objeto  $\mathcal{O}_y$  respecto a  $y_1 - y_2$ , de acuerdo con (19), se calculan con

$${}^y\mu_{ij} = \int \int_{\mathcal{O}_y} [y_1 - y_{g_1}]^i [y_2 - y_{g_2}]^j dy_1 dy_2. \quad (34)$$

Utilizando (26), (32) y aplicando nuevamente el Teorema 1, (34) queda

$$\begin{aligned} {}^y\mu_{ij} = & \gamma^2 \int \int_{\mathcal{O}_O} [\gamma \cos(\psi)[x_{O_1} - x_{g_{O_1}}] - \gamma \sin(\psi)[x_{O_2} - x_{g_{O_2}}]]^i \cdot \\ & [-\gamma \sin(\psi)[x_{O_1} - x_{g_{O_1}}] - \gamma \cos(\psi)[x_{O_2} - x_{g_{O_2}}]]^j dO_1 dO_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Finalmente, mediante el teorema multinomial, la ley distributiva para sumatorias múltiples (ver Apéndice B) y (33); a partir de (35) los momentos centrales de imagen pueden expresarse en forma explícita de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} {}^y\mu_{ij} = & \gamma^2 \int \int_{\mathcal{O}_O} \left[ \sum_{k_1, k_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} [\gamma \cos(\psi)[x_{O_1} - x_{g_{O_1}}]]^{k_1} [-\gamma \sin(\psi)[x_{O_2} - x_{g_{O_2}}]]^{k_2} \right] \cdot \\ & \left[ \sum_{l_1, l_2} \frac{j!}{l_1! l_2!} [-\gamma \sin(\psi)[x_{O_1} - x_{g_{O_1}}]]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)[x_{O_2} - x_{g_{O_2}}]]^{l_2} \right] dO_1 dO_2 \\ = & \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \sin(\psi)]^{k_2} [-\gamma \sin(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} \cdot \\ & \int \int_{\mathcal{O}_O} [x_{O_1} - x_{g_{O_1}}]^{k_1+l_1} [x_{O_2} - x_{g_{O_2}}]^{k_2+l_2} dO_1 dO_2 \\ = & \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \sin(\psi)]^{k_2} \cdot \\ & [-\gamma \sin(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} {}^O\mu_{k_1+l_1, k_2+l_2} \end{aligned} \quad (36)$$

donde  $k_1, k_2, l_1$  y  $l_2$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 = i$  y  $l_1 + l_2 = j$ .

Especialmente, las transformaciones de los momentos centrales hasta de orden dos son:

$$\begin{aligned}
 {}^y\mu_{00} &= \gamma^2 {}^O\mu_{00} \\
 {}^y\mu_{10} &= 0 \\
 {}^y\mu_{01} &= 0 \\
 {}^y\mu_{11} &= \gamma^4[-\text{sen}(\psi)\cos(\psi) {}^O\mu_{20} + \text{sen}(\psi)\cos(\psi) {}^O\mu_{02} + [\text{sen}^2(\psi) - \cos^2(\psi)] {}^O\mu_{11}] \\
 {}^y\mu_{20} &= \gamma^4[\cos^2(\psi) {}^O\mu_{20} + \text{sen}^2(\psi) {}^O\mu_{02} - 2\text{sen}(\psi)\cos(\psi) {}^O\mu_{11}] \\
 {}^y\mu_{02} &= \gamma^4[\text{sen}^2(\psi) {}^O\mu_{20} + \cos^2(\psi) {}^O\mu_{02} + 2\text{sen}(\psi)\cos(\psi) {}^O\mu_{11}].
 \end{aligned}$$

Ahora bien, la orientación del eje principal del objeto está dada por

$${}^S\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2 {}^S\mu_{11}}{{}^S\mu_{20} - {}^S\mu_{02}} \right).$$

Es de notarse que la transformación entre estos parámetros tiene la siguiente relación

$$\psi = -[{}^y\beta + {}^O\beta], \quad (37)$$

es decir, con la orientación del eje principal del objeto en cada marco se puede determinar la orientación  $\psi$  del plano  $O_1 - O_2$  en el plano de imagen.

### Invariantes a traslaciones, rotaciones y cambios de escala

En primera instancia, considérese la invarianza a traslación y rotación. El primer invariante de Hu con esta propiedad (ver Sección II.2.4) está dado por

$${}^S\phi_{rot_1} = {}^S\mu_{20} + {}^S\mu_{02},$$

el cual tiene la siguiente transformación

$${}^y\phi_{rot_1} = \gamma^4 O\phi_{rot_1}.$$

Debido a la configuración adoptada (eje óptico de la cámara perpendicular al plano del objeto), es claro que estas transformaciones deben tener una relación constante.

Finalmente, en un sentido similar, se puede deducir que todo invariante a traslaciones, rotaciones y cambios de escala deben ser iguales en ambos marcos ( $\Sigma_O$  y  $y_1 - y_2$ ); por ejemplo, en el caso de los siete invariantes a traslaciones, rotaciones y cambios de escala de Hu, se tiene que

$${}^y\phi_{esc_i} = O\phi_{esc_i}$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, 7$ .

### II.3 Modelado del robot manipulador

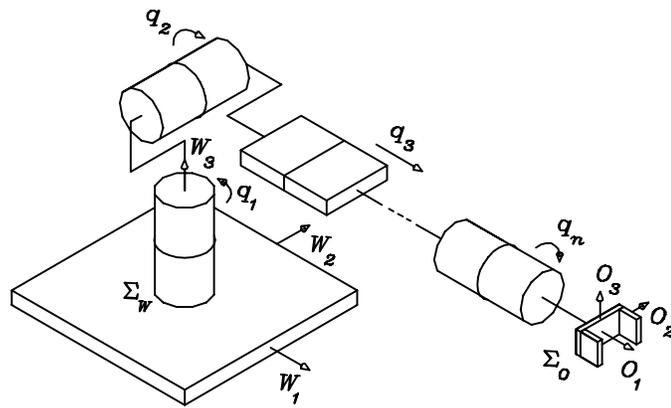


Figura 13: Estructura mecánica de un robot manipulador de  $n$  g.d.l.

Un robot manipulador, o simplemente manipulador, es un brazo mecánico compuesto por eslabones rígidos conectados en forma serial a través de articulaciones desde una base “fija” hasta el último eslabón denominado órgano terminal. Si cada tipo de articulación tiene sólo una dirección de movimiento (articulación prismática o trasla-

cional) o un solo eje de giro (articulación rotacional), entonces el número de articulaciones representa los grados de libertad (g.d.l.) del manipulador (Arimoto, 1996). La Figura 13 muestra la estructura mecánica de un manipulador de  $n$  g.d.l. Tradicionalmente, un marco de referencia Cartesiano  $\Sigma_W$  se coloca en algún lugar de la base del robot y los eslabones se numeran consecutivamente desde la base (Eslabón 0) hasta el órgano terminal (Eslabón  $n$ ). Las uniones o articulaciones definen los puntos de contacto entre los eslabones y se numeran de tal forma que la unión  $i$  conecta los eslabones  $i$  e  $i - 1$ . De esta manera, un manipulador posee  $n + 1$  eslabones y  $n$  articulaciones.

El conjunto de variables físicas que pueden convenientemente expresar la postura (posición y orientación) de un manipulador son llamadas *coordenadas generalizadas* (Arimoto, 1996). Las coordenadas generalizadas son *completas* si para cada configuración (postura) del robot diferente las coordenadas toman valores diferentes. Si un subconjunto de un determinado conjunto de coordenadas generalizadas se mantiene fijo mientras las coordenadas restantes pueden variar continuamente, entonces las coordenadas generalizadas son llamadas *independientes*.

Comúnmente, el vector de coordenadas generalizadas para un robot manipulador lo constituye el vector de coordenadas *articulares*  $\mathbf{q}$ , que para un robot de  $n$  articulaciones ( $n$  g.d.l.) tendrá  $n$  elementos:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, desde un punto de vista práctico, es más conveniente utilizar las coordenadas *operacionales*, ya que éstas determinan la postura del órgano terminal directamente en el espacio tridimensional donde la tarea del manipulador es especificada. Dichas coordenadas establecen la posición del órgano terminal mediante un número mínimo de coordenadas respecto a la geometría de la estructura y la orientación en términos de una representación mínima. Una representación mínima describe la

rotación del marco del órgano terminal  $\Sigma_O$  (ver Figura 13) con respecto al marco de la base  $\Sigma_W$ , como por ejemplo mediante los ángulos de Euler o los ángulos RPY (Sciavicco y Siciliano, 2000). Las coordenadas operacionales se agrupan en el vector de coordenadas operacionales:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

donde  $m \leq n$ . Si se requiere establecer cualquier postura para el órgano terminal en el espacio Euclidiano tridimensional, entonces  $m = 6$ .

### II.3.1 Modelo cinemático

El *modelo cinemático directo* de un manipulador describe la relación de la postura (posición y orientación) del órgano terminal del robot  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  en función del vector de coordenadas articulares  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , es decir, el modelo cinemático directo de un manipulador puede ser expresado como

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}).$$

La función vectorial  $\mathbf{f}(\cdot)$  es no-lineal en general pero su obtención es metódica (aunque laboriosa, a excepción de casos simples).

Un manipulador se dice que es *cinemáticamente redundante* si posee un número de grados de libertad mayor que el número de variables necesarias para describir una tarea dada (Sciavicco y Siciliano, 2000). De esta manera, un manipulador es intrínsecamente redundante si  $m < n$ . La redundancia es un concepto relativo a la tarea asignada al manipulador; por ejemplo, considere un manipulador de 3 g.d.l ( $n = 3$ ) que se mueve en el plano, si tanto la posición como la orientación es definida en la tarea a desarrollar entonces  $m = n = 3$  y el manipulador no es redundante, en cambio, si sólo la posición

es tomada en cuenta en la tarea a desarrollar entonces  $m = 2$  y el manipulador, en este caso, sí es redundante.

El *modelo cinemático inverso* consiste en la relación que determina el vector de coordenadas articulares correspondiente a una postura del órgano terminal del manipulador, es decir, la relación inversa del modelo cinemático directo, esto es,

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}).$$

El modelo cinemático inverso es complicado de encontrar debido a que las ecuaciones inmiscuidas son no-lineales en general y no siempre es posible encontrar una solución en forma cerrada; incluso puede tener ninguna o múltiples soluciones.

Por otra parte, la *cinemática diferencial* de un manipulador determina la relación existente entre las velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  y las correspondientes velocidades traslacionales  $\mathbf{v}_W$  y angulares  $\mathbf{w}_W$  del órgano terminal del robot. Dicha relación está dada en términos del *Jacobiano geométrico*  $J_g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6n}$  mediante (Sciavicco y Siciliano, 2000)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_W \\ \mathbf{w}_W \end{bmatrix} = J_{G_W}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (38)$$

o equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_W \\ \mathbf{w}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{G_{v_W}} \\ J_{G_{w_W}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

donde  $J_{G_{v_W}} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  y  $J_{G_{w_W}} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  representan las matrices relacionadas con la contribución a la velocidad lineal  $\mathbf{v}_W$  y angular  $\mathbf{w}_W$  de las velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$ , respectivamente.

Si la postura del órgano terminal es expresada mediante una representación mínima en el espacio operacional, es posible encontrar el Jacobiano geométrico a través de la diferenciación de la cinemática directa; el Jacobiano resultante es llamado *Jacobiano*

analítico dado por

$$J_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}},$$

el cual se relaciona con el Jacobiano geométrico mediante

$$J_{G_W}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\mathbf{q}) \end{bmatrix} J_A(\mathbf{q})$$

donde  $T(\mathbf{q})$  es la matriz de transformación que depende de la parametrización de la orientación del órgano terminal del manipulador.

El Jacobiano geométrico depende del marco coordenado en donde la velocidad del órgano terminal es expresado; si se desea expresar en un marco coordenado diferente  $\Sigma_S$ , es suficiente conocer la matriz de rotación entre los marcos  $R_W^S$ , de tal manera que

$$J_{G_S} = \begin{bmatrix} R_W^{S^T} & 0 \\ 0 & R_W^{S^T} \end{bmatrix} J_{G_W},$$

puesto que la relación de velocidades del órgano terminal entre  $\Sigma_S$  y  $\Sigma_W$  está dada por

$$\begin{bmatrix} v_S \\ w_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_W^{S^T} & 0 \\ 0 & R_W^{S^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_W \\ w_W \end{bmatrix};$$

y sustituyendo (38) tenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_S \\ w_S \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} R_W^{S^T} & 0 \\ 0 & R_W^{S^T} \end{bmatrix} J_{G_W}}_{J_{G_S}} \dot{\mathbf{q}} \\ &= J_{G_S} \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Finalmente, aquellas configuraciones en las que el Jacobiano geométrico pierde rango son llamadas *singularidades cinemáticas*. Encontrar las singularidades de un manipulador es de gran interés debido a lo siguiente:

- (a) Las singularidades representan configuraciones en las que la movilidad del manipulador es reducida, por ejemplo, no es posible imponer un movimiento arbitrario al órgano terminal.
- (b) Cuando el manipulador está en la singularidad, pueden existir un número infinito de soluciones en el modelo de la cinemática inversa.
- (c) En la vecindad de una singularidad, pequeñas velocidades en el espacio operacional pueden causar grandes velocidades en el espacio articular.

### II.3.2 Modelo dinámico

El *modelo dinámico* de un manipulador describe la relación existente entre el movimiento de la estructura del manipulador y los pares o fuerzas aplicadas en cada articulación por los actuadores. La formulación *Lagrangiana* ofrece un método donde las ecuaciones de movimiento pueden derivarse de un modo sistemático independientemente del marco coordinado de referencia. Dicha formulación se realiza en base a los conceptos importantes de energía cinética y energía potencial (Kelly y Santibáñez, 2003).

El Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de un manipulador de  $n$  g.d.l. es la diferencia entre su energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y su energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (39)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange son expresadas por

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

donde  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones por los actuadores.

Considérese la estructura mecánica de un robot manipulador de  $n$  g.d.l. libre de fricción, con eslabones rígidos y con articulaciones rotacionales y prismáticas; como la mostrada en la Figura 13. Nuevamente, denótese por  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  a los vectores en  $\mathbb{R}^n$  de posición y velocidad articular, respectivamente.

La energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  asociada al manipulador puede expresarse mediante

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

donde  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica y definida positiva llamada *matriz de inercia*. La energía potencial no tiene una forma específica como el caso de la energía cinética, pero se sabe que depende del vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$ .

El Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , dado por (39), para este caso resulta

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Lo que conduce a las siguientes ecuaciones de movimiento de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}.$$

Por otro lado, puede verificarse que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] &= M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] &= M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

De esta forma, las ecuaciones de movimiento de Lagrange son expresadas mediante

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau},$$

o de manera compacta

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (40)$$

donde

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} &= \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}] \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

La Ecuación (40) es el modelo dinámico para un manipulador de  $n$  g.d.l. Nótese que este modelo es expresado mediante una ecuación diferencial no lineal en el estado  $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ .  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  es un vector en  $\mathbb{R}^n$  llamado *vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis* y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el *vector de fuerzas o pares gravitacionales*.

Cada elemento de  $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es, en general, una función relativamente compleja de las posiciones y velocidades articulares que, evidentemente, depende de la geometría de la estructura del manipulador al cual modelan.

Tres propiedades importantes de la dinámica de un manipulador son las siguientes (Spong y Vidyasagar, 1989):

**Propiedad 1.** La matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica definida positiva cuyos elementos son funciones solamente de  $\mathbf{q}$ . La matriz  $M(\mathbf{q})^{-1}$  existe y es definida positiva.

**Propiedad 2.** La matriz asociada a las fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia  $\dot{M}(\mathbf{q})$  satisfacen

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n. \quad (41)$$

**Propiedad 3.** La matriz asociada a las fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  satis-

face

$$C(\mathbf{q}, 0) = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (42)$$

## II.4 Modelado del robot móvil tipo unicycle

A diferencia de un robot manipulador, un robot móvil posee la capacidad de desplazarse dentro de su medio ambiente o espacio de trabajo. En esta sección se describirá el modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle, el cual es un robot móvil con 2 ruedas accionadas independientemente. La estructura mecánica del robot móvil tipo unicycle, o simplemente unicycle, se presenta en la Figura 1.(c). La configuración del unicycle es representada mediante la posición y orientación de su cuerpo principal en el plano y tiene disponibles dos entradas de velocidad para controlar su movimiento. Este arreglo enmarca, de una manera sencilla, muchos de los vehículos robóticos actuales; aún más, este robot es el vehículo noholonómico más simple que muestra las características generales y la difícil maniobrabilidad de sistemas con dimensiones mayores.

La naturaleza noholonómica del unicycle está relacionada con la suposición de que las ruedas del robot giran sin deslizarse. Esto implica la presencia de un conjunto no-integrable de restricciones en las variables de configuración. Estas restricciones noholonómicas reducen los movimientos instantáneos que el unicycle puede realizar, sin embargo, todavía permiten controlabilidad global en el espacio de configuración. Esta característica singular conduce a retos importantes en la síntesis de controladores retroalimentados, de hecho, las aplicaciones de los uniciclos han disparado la búsqueda de tipos novedosos de controladores retroalimentados que pueden ser utilizados también en sistemas no lineales más generales (De Luca *et al.*, 1998).

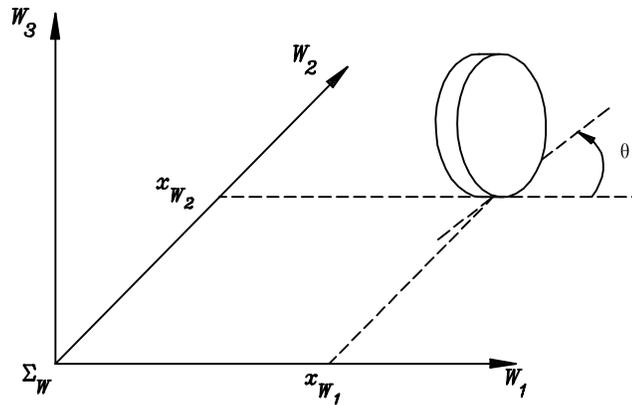


Figura 14: Estructura simplificada de un robot móvil tipo unicycle.

#### II.4.1 Modelo cinemático

La principal característica del modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle es la presencia de restricciones noholonómicas debidas a la condición de giro sin deslizamiento entre las ruedas y el piso. La estructura simplificada del robot móvil tipo unicycle es representada mediante una rueda que gira en el plano mientras mantiene verticalmente su cuerpo, según se puede observar en la Figura 14. La configuración del unicycle puede ser descrita mediante un vector de coordenadas generalizadas compuesto por la posición<sup>5</sup>  $\mathbf{x}_W = [x_{W_1} \ x_{W_2}]^T$  del punto de contacto con el piso respecto a un marco coordenado fijo  $\Sigma_W$  y por el ángulo  $\theta$  que denota la orientación de la rueda respecto al eje  $W_1$ .

La derivada con respecto al tiempo de las coordenadas generalizadas, es decir, las velocidades generalizadas no pueden tomar valores independientes; en particular, las velocidades generalizadas deben satisfacer la restricción

$$[\sin(\theta) \quad -\cos(\theta) \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{x}_{W_1} \\ \dot{x}_{W_2} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0, \quad (43)$$

<sup>5</sup>Con abuso de notación sólo se muestran dos componentes para  $\mathbf{x}_W$  y convenientemente  $x_{W_3} = 0$ .

implicando que la velocidad lineal del centro de la rueda se encuentre en el plano de la rueda (velocidad lateral nula).

La Ecuación (43) es un ejemplo típico de una restricción Pfaffian  $A(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$ , esto es, lineal en las velocidades generalizadas. Como consecuencia, todas las velocidades generalizadas admisibles están contenidas en el espacio nulo de la matriz restricción  $A(\boldsymbol{\xi})$ . En este caso se obtiene (Canudas de Wit *et al.*, 1996; Dixon *et al.*, 2001a)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{W_1} \\ x_{W_2} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (44)$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son la velocidad lineal y angular (respecto al eje vertical) de la rueda, respectivamente. Debido a que la selección de la base para el espacio nulo de la matriz restricción no es único,  $u_1$  y  $u_2$  pueden tener significados diferentes. Más aún, dicho significado puede no tener relación directa con los controles disponibles en el unicycle; como lo son, en general, fuerzas y pares. Por esta razón (44) es llamada el modelo cinemático del unicycle.

El modelo cinemático del unicycle (44) corresponde a un sistema no lineal, con menos entradas de control que coordenadas generalizadas y con la característica de que no existe movimiento si la entrada es nula (*driftless*).

Cabe destacar que la restricción del sistema (43) invierte el orden de dificultad para la especificación de tareas en el robot. Para robots manipuladores, y en general para todos los sistemas mecánicos con tantas entradas de control como coordenadas generalizadas, el problema de regulación es más simple que el problema de seguimiento de trayectoria. En contraste, para un unicycle el problema de regulación es más complicado que el problema de seguimiento de trayectoria. A grandes rasgos, esto es debido a que para un unicycle el caso de regulación es un problema con dos entradas y tres estados a controlar mientras que el problema de seguimiento resulta con dos entradas y dos salidas a controlar (sólo la posición se controla pues la orientación se logra indirectamente).

El sistema (44) linealizado es no-controlable por lo que los métodos lineales de análisis y diseño no pueden ser aplicados; y tampoco existe un ley de control continua que incluya sólo retroalimentación de estados capaz de estabilizar el sistema a un estado de equilibrio (Brockett, 1983). Este problema se ha resuelto utilizando retroalimentación de estados variante en el tiempo, es decir, leyes de control que dependen explícitamente, no sólo de los estados, sino también del tiempo (Samson, 1991; Campion *et al.*, 1991; Canudas de Wit y Sørvalen, 1992; Morin y Samson, 1996); o mediante leyes de control discontinuas (Aicardi *et al.*, 1995; d'Andrea-Novell *et al.*, 1995).

### III Control servo-visual directo de manipuladores planares

En este capítulo se aborda el problema de control servo-visual directo para la regulación de postura de un manipulador planar tanto en configuración cámara fija como en configuración cámara en mano. Para efectos de simplificación del problema, el eje óptico de la cámara es perpendicular al plano de movimiento del robot.

La determinación del movimiento de un robot mediante la estrategia de control servo-visual se establece a través de características de imagen obtenidas a partir de objetos tridimensionales de interés localizados en la escena o espacio de trabajo. No obstante, gran parte de la teoría desarrollada hasta el momento se basa en el uso de objetos con geometría simple como puntos, líneas, cilindros y esferas (características locales); o, de acuerdo al conocido *problema de correspondencia* (seguimiento e igualación), en objetos más complejos cuya proyección al plano de imagen es procesada para finalmente reducirlo a un objeto geométrico simple.

En contraposición, los momentos de imagen representan características globales de un objeto de interés arbitrario proyectado en el plano de imagen. El principal objetivo de este capítulo es extender el uso de objetos de interés simples hacia el uso de objetos de interés más complejos en el control servo-visual directo de manipuladores. Particularmente, el objeto de interés será un objeto plano con forma arbitraria y las características de imagen se obtendrán a través de los momentos de imagen de dicho objeto plano.

En el análisis se considera el modelo dinámico del manipulador de  $n$  g.d.l., el cual es expresado mediante (40) y descrito nuevamente aquí:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (45)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de posiciones articulares,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares

aplicados,  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia simétrica y definida positiva,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz asociada a las fuerzas centrífugas y de Coriolis y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitacionales.

Los controladores diseñados corresponden a la estructura de un controlador por Jacobiano transpuesto que muestran robustez ante incertidumbres en los parámetros de la cámara y en los parámetros 3D del objeto de interés.

### III.1 Configuración cámara fija

#### III.1.1 Formulación

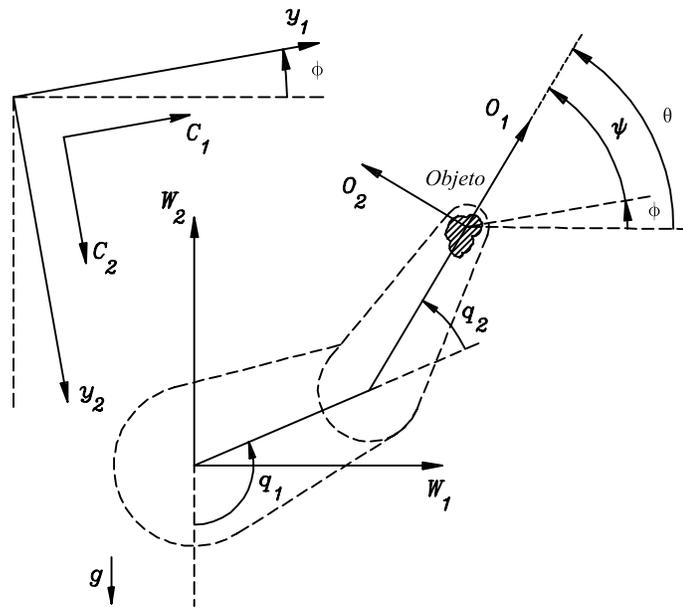


Figura 15: Vista del manipulador planar en configuración cámara fija.

Considere un manipulador planar de  $n$  g.d.l. y una cámara fija observando al manipulador con un objeto plano de forma arbitraria atado en su órgano terminal. La Figura 15 presenta una vista de este sistema robótico. En esta figura también se puede observar el marco coordenado de mundo  $\Sigma_W$  en la base del manipulador, el marco de la cámara  $\Sigma_C$  fijo en algún lugar de manera que se proyecte en el plano de imagen  $y_1 - y_2$

el objeto de interés y el marco del objeto  $\Sigma_O$  atado al órgano terminal del manipulador donde se localiza el objeto de interés. Note que se está utilizando el modelo de imagen de la cámara con lente delgada descrito en la Subsección II.1.3 y que el eje óptico de la cámara apunta en dirección perpendicular al plano de movimiento del manipulador, de esta manera los planos  $W_1 - W_2$ ,  $O_1 - O_2$ ,  $C_1 - C_2$  y  $y_1 - y_2$  son paralelos entre sí (esto guarda correspondencia con el sistema descrito en la Subsección II.2.5). El ángulo  $\phi$  denota la rotación del marco de la cámara respecto a  $W_3$ ,  $\theta$  es la orientación del plano  $O_1 - O_2$  respecto a  $W_1$  y  $\psi = \theta - \phi$  es la orientación del plano  $O_1 - O_2$  en el plano de imagen. Puesto que el marco  $\Sigma_O$  está atado al órgano terminal, la posición de éste (el órgano terminal) respecto a  $\Sigma_W$  es expresada mediante el vector  $\mathbf{O}_W^O \in \mathbb{R}^3$ .

Esto indica que el modelo de imagen utilizado es expresado mediante (27), es decir, un punto  $\mathbf{x}_O \in \mathbb{R}^3$  en el objeto de interés  $\mathcal{O}_O$  respecto al marco del objeto  $\Sigma_O$  se transforma a coordenadas del marco de la cámara en  $\mathbf{x}_C \in \mathbb{R}^3$  y mediante el modelo de la cámara con lente delgada, éste a su vez, se mapea al plano de imagen en un punto  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ . En forma simplificada este modelo de imagen se describe nuevamente aquí:

$$\mathbf{y} = \gamma \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

donde  $\gamma$  es una constante en función de los parámetros de la cámara y  $[u_0 \ v_0]^T$  denota el centro de la imagen.

Observe que si el manipulador planar es rotacional, es decir, con todas las articulaciones rotacionales, entonces  $\theta = \sum_{i=1}^n q_i - \pi/2$  y  $\psi = \sum_{i=1}^n q_i - \pi/2 - \phi$ . De otra manera, en la sumatoria sólo se incluirían los ángulos de las articulaciones que fueran rotacionales, si se denota por  $\Sigma_{q_r}$  tal suma de ángulos de las articulaciones rotacionales, entonces tenemos

$$\theta = \Sigma_{q_r} - \pi/2 \quad \text{y} \quad \psi = \Sigma_{q_r} - \pi/2 - \phi.$$

Ahora defina un vector de características de imagen  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$  ( $r \geq m$ , donde  $m$  es la

dimensión del espacio operacional) en función de los momentos de imagen  ${}^y m_{ij}$  de la proyección en el plano de imagen del objeto de interés. Note que también pueden ser utilizados los momentos centrales de imagen  ${}^y \mu_{ij}$  debido a que existe una relación entre ellos expresada por (20). De acuerdo con (31) y (36) los momentos de imagen están en función de las variables  $\psi$  y  $\mathbf{O}_W^O$ , las cuales a su vez están en función del vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$ ; esto significa que

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{s}({}^y m_{ij}(\mathbf{q})) \\ &= \mathbf{s}(\mathbf{q}).\end{aligned}$$

Así, la variación respecto al tiempo del vector de características de imagen  $\dot{\mathbf{s}}$  puede determinarse mediante

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ &= J_s(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

donde

$$J_s(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Obsérvese que la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen tanto regulares como centrales también está en función de los propios momentos de imagen, según lo muestra (129) y (137) del Apéndice C.

Ahora bien, si se logra la siguiente factorización en el vector de características de imagen  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} = \gamma A(\phi) \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (47)$$

con  $A(\phi) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  una matriz ortogonal y constante, entonces

$$\dot{\mathbf{s}} = \gamma A(\phi) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

$$= \gamma A(\phi) J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) \dot{\mathbf{q}} \quad (48)$$

donde

$$J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (49)$$

Por otro lado, denótese con  $\mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^r$  el vector deseado de características de imagen que se supone constante. También se supone que existe al menos un vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}_d$ , desconocido pero aislado, donde el órgano terminal del manipulador cumple con  $\mathbf{s}_d$ . Una manera de establecer la referencia  $\mathbf{s}_d$  es mediante el método de *enseñar-por-muestra* (teach-by-showing) (Weiss *et al.*, 1987).

Finalmente, defina el vector de error de características de imagen  $\tilde{\mathbf{s}}$  como

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_d - \mathbf{s}.$$

Si  $\mathbf{s} = \gamma A(\phi) \mathbf{f}(\mathbf{q})$  entonces

$$\tilde{\mathbf{s}} = \gamma A(\phi) [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})]. \quad (50)$$

En resumen, el problema de control consiste en diseñar un controlador para el sistema recién descrito tal que determine los pares  $\boldsymbol{\tau}$  para mover el manipulador de manera que el vector de características de imagen  $\mathbf{s}$  alcance el vector de características deseado  $\mathbf{s}_d$  previamente establecido; esto es, el objetivo de control es llevar asintóticamente a cero el vector de características de imagen  $\tilde{\mathbf{s}}$ , lo cual es expresado mediante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{0}. \quad (51)$$

### III.1.2 Controlador

El controlador diseñado corresponde a la estructura de un controlador por Jacobiano transpuesto, el cual fue introducido originalmente por Takegaki y Arimoto (1981) y aplicado al control servo-visual directo en el caso de características de imagen puntuales en Kelly (1996). Partiendo de que el vector de características de imagen cumple con  $\mathbf{s} = \gamma A(\phi) \mathbf{f}(\mathbf{q})$ , lo cual es descrito en (47); el controlador es expresado mediante

$$\boldsymbol{\tau} = J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (52)$$

donde  $K_p \in \mathbb{R}^{r \times r}$  es una matriz simétrica y definida positiva llamada *ganancia proporcional* y  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es otra matriz simétrica y definida positiva denominada *ganancia derivativa*.

Cabe destacar que el controlador necesita las mediciones de las posiciones articulares  $\mathbf{q}$  y de las velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$ , el conocimiento del vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  y el cálculo del Jacobiano  $J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$ . Dicho Jacobiano, dependiendo de la selección del vector de características de imagen  $\mathbf{s}$ , requiere de la medición directa en el plano de imagen de ciertos momentos de imagen y del previo conocimiento de algunos parámetros 3D del objeto de interés, de la cámara y del manipulador. Sin embargo, no es necesario resolver la cinemática inversa del sistema robótico.

El sistema en malla cerrada corresponde a una ecuación diferencial autónoma no lineal y se obtiene sustituyendo en el modelo dinámico del manipulador (45) el controlador (52):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}};$$

el cual, en términos del vector de estados  $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ , se expresa mediante

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Los puntos de equilibrio del sistema en malla cerrada (53) satisfacen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{q}_e \in \mathbb{R}^n$  es la solución de

$$J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}.$$

Supóngase que el Jacobiano  $J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$  es continuamente diferenciable con respecto a cada elemento de  $\mathbf{q}$  y que es de rango pleno en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ ; entonces el punto de equilibrio

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

es un punto de equilibrio aislado de (53), debido a que también se ha supuesto que  $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  tiene solución aislada en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ .

El análisis de estabilidad será llevado a cabo mediante el método directo de Lyapunov (ver por ejemplo Kelly y Santibáñez (2003) y Vidyasagar (1993)). En este sentido, considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \gamma [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})]^T K_p [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})],$$

la cual es una función definida positiva localmente ya que en el primer término, mediante la Propiedad 1 del modelo dinámico del manipulador (ver Subsección II.3.2),  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0$ ; y en el segundo término  $\gamma > 0$ ,  $K_p = K_p^T > 0$  por diseño y se ha supuesto que  $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) = \gamma A(\phi) [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})] = \mathbf{0}$  tiene solución aislada en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ . Note que se ha utilizado (50).

Derivando respecto al tiempo la función candidata de Lyapunov, se obtiene

$$\dot{V}(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \gamma [\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_d) - \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q})]^T K_p [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})]. \quad (54)$$

Note que  $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_d) = \mathbf{0}$  y, de acuerdo a (49),  $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) = J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) \dot{\mathbf{q}}$ ; de esta manera, sustituyendo esto último y la ecuación de malla cerrada (53) en (54), resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T [J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \\ &\quad \gamma [J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) \dot{\mathbf{q}}]^T K_p [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})] \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T [J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}}] + \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} - \\ &\quad \gamma \dot{\mathbf{q}}^T J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})] \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T [J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}} - \gamma J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p [\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q})] - K_v \dot{\mathbf{q}}] + \\ &\quad \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Ahora, mediante la Propiedad 2 del modelo dinámico del manipulador (ver Subsección II.3.2) y del hecho de que en relación a (50):  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\gamma} A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}}$ , puesto que  $A(\phi)$  es una matriz ortogonal; la derivada respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov finalmente queda

$$\dot{V}(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}}.$$

Debido a que  $K_v = K_v^T > 0$  por diseño, entonces  $\dot{V}(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es una función semidefinida negativa en forma global. Por lo tanto, se puede concluir, de acuerdo al método directo de Lyapunov, que el punto de equilibrio

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

es un punto de equilibrio estable.

Como se mencionó, el sistema en malla cerrada es autónomo, por lo tanto se puede estudiar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio mediante el teorema de LaSalle (ver por ejemplo Kelly y Santibáñez (2003) y Vidyasagar (1993)). Para este propósito, en la región

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} : \dot{V}(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \right\},$$

se obtiene el conjunto invariante sobre el sistema en malla cerrada (53) como  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\phi)^T \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ . Y de acuerdo con las suposiciones impuestas sobre  $J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$  y  $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{q})$ , la última ecuación se satisface en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ . Por lo tanto, de acuerdo al teorema de LaSalle, se demuestra que el punto de equilibrio

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

es asintóticamente estable en forma local, significando que  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0}$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$  siempre y cuando  $\mathbf{q}_d - \mathbf{q}(0)$  y  $\dot{\mathbf{q}}(0)$  sean suficientemente pequeñas. Ahora, debido a que  $\mathbf{q}_d - \mathbf{q} = \mathbf{0}$  implica que  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ , entonces, de acuerdo a (50), se tiene que  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  es cierto si y sólo si  $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ ; por lo tanto, el objetivo de control (51) es satisfecho.

### III.1.3 Análisis de robustez

Basado en el desarrollo realizado en Kelly (1996), en esta subsección se analiza la robustez del controlador (52) ante parámetros 3D del objeto de interés y de la cámara. Para este análisis, se utilizará el primer método de Lyapunov en lugar del método directo de Lyapunov (ver por ejemplo Vidyasagar (1993)).

Básicamente, se analizará la incertidumbre ante  $\phi$  y ante parámetros en el Jacobiano  $J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$ ; por lo tanto sólo se cuenta con una estimación  $\hat{\phi}$  del ángulo  $\phi$  y con una estimación  $\hat{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$  del Jacobiano  $J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$ . Esto modifica la ley de control (52) a

la siguiente:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\hat{\phi})^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (55)$$

El sistema en malla cerrada, para este caso, se obtiene sustituyendo el controlador (55) en el modelo dinámico del manipulador (45), resultando

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \hat{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\hat{\phi})^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}};$$

el cual en términos del vector de estados  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$  donde  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ , se reescribe como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[ \hat{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\hat{\phi})^T \tilde{\mathbf{s}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix}. \quad (56)$$

De esta forma, el sistema en malla cerrada es un sistema autónomo con un punto de equilibrio en el origen.

Para efectos de linealizar el sistema (56), se aplicará el siguiente lema (Kelly, 1996):

*Lema 1:* Considere el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = D(\mathbf{x})\mathbf{x} + E(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (57)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $D(\mathbf{x})$  y  $E(\mathbf{x})$  son funciones no lineales  $n \times n$  de  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  es una función no lineal  $n \times 1$  de  $\mathbf{x}$ . Suponga que  $\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , por lo tanto  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio del sistema (57). Entonces, el sistema linealizado de (57) alrededor del punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  está dado por

$$\dot{\mathbf{z}} = \left[ D(\mathbf{0}) + E(\mathbf{0}) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \right] \mathbf{z} \quad (58)$$

donde  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ . △△△

Siguiendo el Lema 1, defínase  $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ , de tal manera que a partir de (56) y

utilizando (50), tenemos:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & -M(\mathbf{q})^{-1}[K_v + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \end{bmatrix} \\ E(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma M(\mathbf{q})^{-1} \hat{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})^T K_p A(\hat{\phi})^T A(\phi) \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El Jacobiano de  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  es

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente con (58) y utilizando la Propiedad 3 del modelo dinámico del manipulador (ver Subsección II.3.2), el sistema en malla cerrada (56) linealizado alrededor del punto de equilibrio  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0}$  resulta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & -M(\mathbf{q}_d)^{-1} K_v \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma M(\mathbf{q}_d)^{-1} \hat{J}(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*)^T K_p A(\hat{\phi})^T A(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*) & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{z} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & -M(\mathbf{q}_d)^{-1} K_v \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma M(\mathbf{q}_d)^{-1} \hat{J}(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*)^T K_p A(\hat{\phi})^T A(\phi) J(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*) & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{z} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \gamma M(\mathbf{q}_d)^{-1} \hat{J}(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*)^T K_p A(\hat{\phi})^T A(\phi) J(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*) & -M(\mathbf{q}_d)^{-1} K_v \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (59) \end{aligned}$$

donde  ${}^y m_{ij}^*$  es igual a  ${}^y m_{ij}$  evaluado en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ .

Ahora, defínase la matriz de error de estimación del Jacobiano  $\tilde{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$  como

$$\tilde{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) = \hat{J}(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) - J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}), \quad (60)$$

y el error de estimación del ángulo  $\tilde{\phi}$  como

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi} - \phi.$$

En lo que sigue, para simplificar el desarrollo, se considerará un manipulador de 2 g.d.l. (no redundante) con la dimensión del espacio de características de imagen igual a la dimensión del espacio operacional, es decir,  $n = m = r = 2$ . También se considerará  $K_p = k_p I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  (con  $k_p > 0$ ) y  $A(\phi) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una *matriz de rotación elemental* (ver por ejemplo Sciavicco y Siciliano (2000)), de tal suerte que

$$\begin{aligned} A(\hat{\phi})^T A(\phi) &= A(\tilde{\phi})^T = A(-\tilde{\phi}) \\ \frac{A(\tilde{\phi})^T - A(\phi)}{2} &= \text{sen}(\tilde{\phi}) I_{a_2} \\ \frac{A(\tilde{\phi})^T + A(\phi)}{2} &= \text{cos}(\tilde{\phi}) I_2 \end{aligned} \quad (61)$$

donde  $I_{a_2}$  es una matriz antisimétrica de  $2 \times 2$  con norma unitaria e  $I_2$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ . La última ecuación implica que si  $\text{cos}(\tilde{\phi}) > 0$  entonces  $A(\tilde{\phi}) > 0$ .

Por lo tanto y además observando que  $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T \quad \mathbf{z}_2^T]^T$ , (59) puede reescribirse así:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M(\mathbf{q}_d)^{-1}[F + G] & -M(\mathbf{q}_d)^{-1}K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

donde

$$F = \gamma k_p J(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*)^T A(\tilde{\phi})^T J(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*) \quad (63)$$

y

$$G = \gamma k_p \tilde{J}(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*)^T A(\tilde{\phi})^T J(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij}^*). \quad (64)$$

La prueba de estabilidad de (62) se llevará a cabo mediante la siguiente función candidata de Lyapunov propuesta en Kelly (1996):

$$V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \frac{1}{2}[\varepsilon\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2]^T M(\mathbf{q}_d)[\varepsilon\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2] + \frac{1}{2}\mathbf{z}_1^T [F + \varepsilon K_v - \varepsilon^2 M(\mathbf{q}_d)]\mathbf{z}_1$$

donde<sup>6</sup>

$$\varepsilon = \frac{\lambda_m\{K_v\}}{2\lambda_M\{M(\mathbf{q}_d)\}}$$

es una constante positiva, ya que tanto  $K_v$  como  $M(\mathbf{q}_d)$  son matrices simétricas definidas positivas. Esto significa también que  $\lambda_m\{K_v\} > \varepsilon\lambda_M\{M(\mathbf{q}_d)\}$ , lo que implica que la matriz  $K_v - \varepsilon M(\mathbf{q}_d)$  es definida positiva. Finalmente, supóngase que  $A(\tilde{\phi}) > 0$ , si este es el caso entonces la matriz  $F$  será definida positiva (debido a la suposición inicial de que  $J(\mathbf{q}_d, {}^y m_{ij})$  es de rango pleno). Por lo tanto la función candidata de Lyapunov, bajo las implicaciones anteriores, es definida positiva en forma global.

Derivando respecto al tiempo la función candidata de Lyapunov resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) &= [\varepsilon\dot{\mathbf{z}}_1 - \dot{\mathbf{z}}_2]^T M(\mathbf{q}_d)[\varepsilon\dot{\mathbf{z}}_1 - \dot{\mathbf{z}}_2] + \frac{1}{2}\mathbf{z}_1^T [F + \varepsilon K_v - \varepsilon^2 M(\mathbf{q}_d)]\dot{\mathbf{z}}_1 + \\ &\quad \frac{1}{2}\mathbf{z}_1^T [F^T + \varepsilon K_v - \varepsilon^2 M(\mathbf{q}_d)]\dot{\mathbf{z}}_1 \\ &= [\varepsilon\dot{\mathbf{z}}_1 - \dot{\mathbf{z}}_2]^T M(\mathbf{q}_d)[\varepsilon\dot{\mathbf{z}}_1 - \dot{\mathbf{z}}_2] + \mathbf{z}_1^T [\varepsilon K_v - \varepsilon^2 M(\mathbf{q}_d)]\dot{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{z}_1^T \left[ \frac{F + F^T}{2} \right] \dot{\mathbf{z}}_1. \end{aligned}$$

Sustituyéndole (62) y simplificando queda

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) &= [\varepsilon\dot{\mathbf{z}}_1 - \dot{\mathbf{z}}_2]^T M(\mathbf{q}_d) [-\varepsilon\dot{\mathbf{z}}_2 - [M(\mathbf{q}_d)^{-1}[F + G]\mathbf{z}_1 - M(\mathbf{q}_d)^{-1}K_v\mathbf{z}_2]] - \\ &\quad \mathbf{z}_1^T [\varepsilon K_v - \varepsilon^2 M(\mathbf{q}_d)]\dot{\mathbf{z}}_2 - \mathbf{z}_1^T \left[ \frac{F + F^T}{2} \right] \dot{\mathbf{z}}_2 \\ &= -\varepsilon\mathbf{z}_1^T [F + G]\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^T [K_v - \varepsilon M(\mathbf{q}_d)]\dot{\mathbf{z}}_2 + \mathbf{z}_2^T G\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_1^T \left[ \frac{F - F^T}{2} \right] \dot{\mathbf{z}}_2. \end{aligned} \tag{65}$$

---

<sup>6</sup>La notación  $\lambda_m\{A\}$  y  $\lambda_M\{A\}$  indican el eigenvalor mínimo y máximo de una matriz  $A$ , respectivamente.

Luego, utilizando (60) y sustituyendo (63) y (64); (65) puede reescribirse, eliminando los argumentos obvios por simplicidad, como

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\gamma k_p \varepsilon \mathbf{z}_1^T \left[ \frac{\hat{J}^T A(\tilde{\phi})^T \hat{J} + \hat{J}^T A(\tilde{\phi}) \hat{J}}{2} \right] \mathbf{z}_1 + \gamma k_p \varepsilon \mathbf{z}_1^T \hat{J}^T A(\tilde{\phi})^T \tilde{J} \mathbf{z}_1 - \\ &\quad \mathbf{z}_2^T [K_v - \varepsilon M(\mathbf{q}_d)] \mathbf{z}_2 + \gamma k_p \mathbf{z}_2^T \left[ \tilde{J}^T A(\tilde{\phi})^T [\hat{J} - \tilde{J}] \right] \mathbf{z}_1 - \\ &\quad \frac{1}{2} \gamma k_p \mathbf{z}_1^T \left[ [\hat{J} - \tilde{J}]^T A(\tilde{\phi})^T [\hat{J} - \tilde{J}] - [\hat{J} - \tilde{J}]^T A(\tilde{\phi}) [\hat{J} - \tilde{J}] \right] \mathbf{z}_2.\end{aligned}$$

Observe que para cualquier matriz  $N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , lo siguiente se cumple:

$$N^T I_{a_2} N = \det\{N\} I_{a_2}.$$

De acuerdo a lo anterior y considerando (61), la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias de (62) satisface

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\gamma k_p \varepsilon \lambda_m \{ \cos(\tilde{\phi}) \hat{J}^T \hat{J} \} \|\mathbf{z}_1\|^2 + \gamma k_p \varepsilon \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| \|\mathbf{z}_1\|^2 - \\ &\quad \lambda_m \{ K_v \} \|\mathbf{z}_2\|^2 + \varepsilon \lambda_M \{ M \} \|\mathbf{z}_2\|^2 + \gamma k_p \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| \|\mathbf{z}_1\| \|\mathbf{z}_2\| + \gamma k_p \|\tilde{J}\|^2 \|\mathbf{z}_1\| \|\mathbf{z}_2\| + \\ &\quad \gamma k_p |\text{sen}(\tilde{\phi})| \left[ |\det\{\hat{J}\}| + 2\|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + |\det\{\tilde{J}\}| \right] \|\mathbf{z}_1\| \|\mathbf{z}_2\| \\ &\leq - \left[ \|\mathbf{z}_1\| \quad \|\mathbf{z}_2\| \right] \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{z}_1\| \\ \|\mathbf{z}_2\| \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}v_{11} &= \gamma k_p \varepsilon \lambda_m \{ \cos(\tilde{\phi}) \hat{J}^T \hat{J} \} - \gamma k_p \varepsilon \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| \\ v_{12} &= v_{21} = -\frac{1}{2} \gamma k_p \left[ \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + \|\tilde{J}\|^2 + |\text{sen}(\tilde{\phi})| \left[ |\det\{\hat{J}\}| + 2\|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + |\det\{\tilde{J}\}| \right] \right] \\ v_{22} &= \frac{1}{2} \lambda_m \{ K_v \}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es definida

negativa si  $v_{11} > 0$  y si  $v_{11}v_{22} - v_{12}^2 > 0$ . Esto conduce a las siguientes desigualdades:

$$\|\tilde{J}\| < \cos(\tilde{\phi}) \frac{\lambda_m\{\hat{J}^T \hat{J}\}}{\|\hat{J}\|} \quad (66)$$

$$\lambda_m^2\{K_v\} > \frac{\gamma k_p \lambda_M\{M\} \left[ \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + \|\tilde{J}\|^2 + |\text{sen}(\tilde{\phi})| \left[ |\det\{\hat{J}\}| + 2\|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + |\det\{\tilde{J}\}| \right] \right]^2}{\cos(\tilde{\phi}) \lambda_m\{\hat{J}^T \hat{J}\} - \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\|} \quad (67)$$

El valor  $\cos(\tilde{\phi}) > 0$  de acuerdo a la suposición inicial:  $A(\tilde{\phi}) > 0$ . Entonces, en conclusión, cumpliéndose (66), la Desigualdad (67) indica que existirá una matriz simétrica definida positiva  $K_v$  suficientemente grande tal que el punto de equilibrio  $[z_1^T \ z_2^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$  del sistema linealizado (62) sea asintóticamente estable. Esto significa que, de acuerdo al primer método de Lyapunov, el punto de equilibrio  $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$  del sistema en malla cerrada no lineal original (56) es asintóticamente estable y mediante las implicaciones realizadas al final de la subsección anterior, entonces se garantiza el cumplimiento del objetivo de control (51).

### III.1.4 Selección de características de imagen

En esta subsección se describirán dos vectores de características de imagen que están en función de los momentos de imagen de la proyección en el plano de imagen de un objeto plano con forma arbitraria. Dichos vectores de características de imagen cumplen con los requerimientos del controlador expresado en (52) o, en su versión con incertidumbres, en (55). El primero de ellos es el centroide del objeto en el plano de imagen y el segundo es una combinación de momentos de imagen de orden dos.

#### Centroide $y_g$

El arreglo adoptado entre el manipulador y la cámara corresponde a la configuración cámara fija con eje óptico perpendicular al plano de movimiento del manipulador, de

esta manera, el análisis desarrollado en la Subsección II.2.5 puede ser utilizado para encontrar el Jacobiano correspondiente al centroide del objeto de interés y necesario en los controladores (52) o (55). La Ecuación (32) representa el mapeo del centroide  $\mathbf{x}_{gO}$  del objeto de interés (respecto a  $\Sigma_O$ ) localizado en el órgano terminal del manipulador, hacia el plano de imagen; dicha ecuación se escribe nuevamente aquí:

$$\mathbf{y}_g = \gamma \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} + \begin{bmatrix} \gamma c_1 + u_0 \\ \gamma c_2 + v_0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

donde en este caso

$$\psi = \Sigma_{q_r} - \pi/2 - \phi, \quad (69)$$

con  $\Sigma_{q_r}$  la suma de todos los ángulos de las articulaciones rotacionales; las variables  $c_1$  y  $c_2$  se expresan mediante

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(\phi)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] + \text{sen}(\phi)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C] \\ c_2 &= \text{sen}(\phi)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] - \cos(\phi)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C]; \end{aligned}$$

$\gamma$ ,  $\phi$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $O_{W_1}^C$  y  $O_{W_2}^C$  son parámetros de la cámara; y  $[O_{W_1}^O \ O_{W_2}^O]^T$  denota la posición del órgano terminal del manipulador respecto al plano  $W_1 - W_2$ .

Observe que para este caso:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{\Sigma}_{q_r} \\ \dot{c}_1 &= \cos(\phi)\dot{O}_{W_1}^O + \text{sen}(\phi)\dot{O}_{W_2}^O \\ \dot{c}_2 &= \text{sen}(\phi)\dot{O}_{W_1}^O - \cos(\phi)\dot{O}_{W_2}^O. \end{aligned} \quad (70)$$

Ahora, debido a que se trata de un manipulador planar, de acuerdo a (38), las

velocidades lineal y angular del órgano terminal (respecto a  $\Sigma_W$ ) son, respectivamente:

$$\mathbf{v}_W = \begin{bmatrix} \dot{O}_{W_1}^O \\ \dot{O}_{W_2}^O \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_W \\ \mathbf{w}_W \end{bmatrix} = [\dot{O}_{W_1}^O \quad \dot{O}_{W_2}^O \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{\psi}]^T = J_{G_W}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

o en forma simplificada

$$\begin{bmatrix} \dot{O}_{W_1}^O \\ \dot{O}_{W_2}^O \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_{G_{126_W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (71)$$

donde  $J_{G_{126_W}}(\mathbf{q})$  son los renglones 1, 2 y 6 del Jacobiano geométrico  $J_{G_W}(\mathbf{q})$  del manipulador.

Ahora bien, derivando respecto al tiempo (68) y sustituyéndole (70) y (71), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_g &= \gamma \begin{bmatrix} -\text{sen}(\psi) & -\text{cos}(\psi) \\ -\text{cos}(\psi) & \text{sen}(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} \dot{\psi} + \gamma \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{bmatrix} \\ &= \gamma \left[ \begin{bmatrix} -\text{sen}(\psi) & -\text{cos}(\psi) \\ -\text{cos}(\psi) & \text{sen}(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} \dot{\psi} + \begin{bmatrix} \text{cos}(\phi)\dot{O}_{W_1}^O + \text{sen}(\phi)\dot{O}_{W_2}^O \\ \text{sen}(\phi)\dot{O}_{W_1}^O - \text{cos}(\phi)\dot{O}_{W_2}^O \end{bmatrix} \right] \\ &= \gamma \begin{bmatrix} \text{cos}(\phi) & \text{sen}(\phi) & -\text{sen}(\psi)x_{gO_1} - \text{cos}(\psi)x_{gO_2} \\ \text{sen}(\phi) & -\text{cos}(\phi) & -\text{cos}(\psi)x_{gO_1} + \text{sen}(\psi)x_{gO_2} \end{bmatrix} J_{G_{126_W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (72) \end{aligned}$$

De acuerdo a (69) y mediante identidades trigonométricas, se puede llegar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{cos}(\psi) &= \text{sen}(\Sigma_{q_r}) \text{cos}(\phi) - \text{cos}(\Sigma_{q_r}) \text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\psi) &= -\text{cos}(\Sigma_{q_r}) \text{cos}(\phi) - \text{sen}(\Sigma_{q_r}) \text{sen}(\phi). \quad (73) \end{aligned}$$

Consecuentemente, (72) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_g &= \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}}_{A(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_3(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \\ 0 & -1 & -c_4(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \end{bmatrix}}_{J(\mathbf{q}, \mathbf{y}_{m_{ij}})} J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \gamma A(\phi) J(\mathbf{q}, \mathbf{y}_{m_{ij}}) \dot{\mathbf{q}},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}c_3(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) &= \cos(\Sigma_{q_r})x_{gO_1} - \sin(\Sigma_{q_r})x_{gO_2} \\ c_4(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) &= \sin(\Sigma_{q_r})x_{gO_1} + \cos(\Sigma_{q_r})x_{gO_2};\end{aligned}\tag{74}$$

es decir, el centroide  $\mathbf{y}_g$  (dependiente de los momentos de imagen de orden uno) cumple con lo requerido por (48) y por ende, puede ser utilizado en los controladores (52) o (55). Cabe destacar que el Jacobiano  $J(\mathbf{q}, \mathbf{y}_{m_{ij}})$  depende de  $\mathbf{x}_{gO}$ , el cual es un parámetro 3D del objeto de interés; del Jacobiano geométrico del manipulador  $J_{G_{126W}}(\mathbf{q})$ ; y de las mediciones de las posiciones articulares  $\mathbf{q}$ . Si el centroide del objeto de interés  $\mathbf{x}_{gO}$  coincidiera con el origen del marco  $\Sigma_O$ , entonces se tendría el mismo sistema robótico que en Kelly (1996).

## Características de imagen en función de los momentos de imagen de orden dos

A continuación se describirá un vector de características de imagen en función de los momentos de imagen de orden dos que cumple con los requerimientos de los controladores (52) o (55). En este sentido, es necesario determinar la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen de orden dos, tanto regulares como centrales. Esto se realizará apoyándose en las expresiones generales de la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen (129) y (137) del Apéndice C.

Así, a partir de (129),  ${}^y\dot{m}_{11}$  puede expresarse mediante

$$\begin{aligned} {}^y\dot{m}_{11} &= \gamma {}^y m_{01} \dot{c}_1 + \gamma {}^y m_{10} \dot{c}_2 + [{}^y m_{02} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{01}] \dot{\psi} + \\ &\quad [- {}^y m_{20} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{10}] \dot{\psi} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma [{}^y m_{01} \cos(\phi) + {}^y m_{10} \text{sen}(\phi)] \\ \gamma [{}^y m_{01} \text{sen}(\phi) - {}^y m_{10} \cos(\phi)] \\ {}^y m_{02} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{01} - {}^y m_{20} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{10} \end{bmatrix}^T J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (75) \end{aligned}$$

donde (70) y (71) se han sustituido. Observe que a través de (20):

$$\begin{aligned} {}^y m_{20} &= {}^y \mu_{20} + y_{g_1} {}^y m_{10} \\ {}^y m_{02} &= {}^y \mu_{02} + y_{g_2} {}^y m_{01}, \end{aligned}$$

por lo tanto, utilizando (68) y estas dos últimas ecuaciones:

$$\begin{aligned} &{}^y m_{02} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{01} - {}^y m_{20} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{10} = \\ &-\gamma [\text{sen}(\psi) x_{g_{O_1}} + \cos(\psi) x_{g_{O_2}}] {}^y m_{01} - \gamma [\cos(\psi) x_{g_{O_1}} - \text{sen}(\psi) x_{g_{O_2}}] {}^y m_{10} + {}^y \mu_{02} - {}^y \mu_{20}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (73), (74) y esto último en (75),  ${}^y\dot{m}_{11}$  finalmente puede expresarse como

$$\begin{aligned} {}^y\dot{m}_{11} &= \gamma [\cos(\phi) \quad -\text{sen}(\phi)] \begin{bmatrix} {}^y m_{01} & -{}^y m_{10} \\ -{}^y m_{10} & -{}^y m_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_3(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_O}) \\ 0 & 1 & c_4(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_O}) \end{bmatrix} J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \\ &\quad [0 \quad 0 \quad {}^y \mu_{02} - {}^y \mu_{20}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (76) \end{aligned}$$

Ahora, aplicando nuevamente (129) para  ${}^y\dot{m}_{20}$  y  ${}^y\dot{m}_{02}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} {}^y\dot{m}_{20} &= 2\gamma {}^y m_{10} \dot{c}_1 + 2 [{}^y m_{11} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{10}] \dot{\psi} \\ {}^y\dot{m}_{02} &= 2\gamma {}^y m_{01} \dot{c}_2 + 2 [- {}^y m_{11} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{01}] \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Considere la semiresta  $s_{aux} = \frac{1}{2}[{}^y m_{02} - {}^y m_{20}]$ , de tal manera que su derivada respecto al tiempo  $\dot{s}_{aux}$ , siguiendo los mismos argumentos que para  ${}^y m_{11}$ , resulta

$$\begin{aligned} \dot{s}_{aux} = & \gamma [\text{sen}(\phi) \quad \text{cos}(\phi)] \begin{bmatrix} {}^y m_{01} & -{}^y m_{10} \\ -{}^y m_{10} & -{}^y m_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_3(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \\ 0 & 1 & c_4(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \end{bmatrix} J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \\ & [0 \quad 0 \quad 2{}^y \mu_{11}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (77)$$

La variación respecto al tiempo de los momentos centrales de imagen de orden dos se puede encontrar mediante (137), obteniéndose

$$\begin{aligned} {}^y \dot{\mu}_{11} &= [{}^y \mu_{02} - {}^y \mu_{20}] \dot{\psi} = [0 \quad 0 \quad {}^y \mu_{02} - {}^y \mu_{20}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ {}^y \dot{\mu}_{20} &= {}^y \mu_{11} \dot{\psi} = [0 \quad 0 \quad {}^y \mu_{11}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ {}^y \dot{\mu}_{02} &= -{}^y \mu_{11} \dot{\psi} = [0 \quad 0 \quad -{}^y \mu_{11}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (78)$$

Una vez establecida la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen de orden dos, tanto regulares como centrales; enseguida se presenta el vector de características de imagen en función de los momentos de orden dos a consideración, el cual es expresado mediante

$$\mathbf{s}_{m_2} = \begin{bmatrix} {}^y m_{11} - {}^y \mu_{11} \\ \frac{1}{2}[{}^y m_{02} - {}^y m_{20}] + {}^y \mu_{20} - {}^y \mu_{02} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la variación respecto al tiempo del vector de características a consideración  $\dot{\mathbf{s}}_{m_2}$  se determina a partir de (76), (77) y (78), resultando

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_{m_2} &= \begin{bmatrix} {}^y \dot{m}_{11} - {}^y \dot{\mu}_{11} \\ \frac{1}{2}[{}^y \dot{m}_{02} - {}^y \dot{m}_{20}] + {}^y \dot{\mu}_{20} - {}^y \dot{\mu}_{02} \end{bmatrix} \\ &= \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \text{cos}(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \text{cos}(\phi) \end{bmatrix}}_{A(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^y m_{01} & -{}^y m_{10} \\ -{}^y m_{10} & -{}^y m_{01} \end{bmatrix}}_{J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_3(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \\ 0 & 1 & c_4(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \end{bmatrix}}_{J_{G_{126W}}(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

$$= \gamma A(\phi) J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (79)$$

por lo que  $\mathbf{s}_{m_2}$  es otro vector de características de imagen que cumple las condiciones para los controladores (52) y (55). Nuevamente, el Jacobiano  $J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$  depende del parámetro 3D del objeto de interés  $\mathbf{x}_{gO}$ , del Jacobiano geométrico del manipulador  $J_{G_{126W}}(\mathbf{q})$ , de las mediciones de las posiciones articulares  $\mathbf{q}$  y adicionalmente, de los momentos de imagen de orden uno.

Note que

$$\mathbf{s}'_{m_2} = {}^y m_{00}^p \begin{bmatrix} {}^y m_{11} - {}^y \mu_{11} \\ \frac{1}{2} [{}^y m_{02} - {}^y m_{20}] + {}^y \mu_{20} - {}^y \mu_{02} \end{bmatrix} \quad (80)$$

donde  $p \in \mathbb{R}$  es una constante, con derivada temporal

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}'_{m_2} &= \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}}_{A(\phi)} \underbrace{{}^y m_{00}^p \begin{bmatrix} {}^y m_{01} & -{}^y m_{10} \\ -{}^y m_{10} & -{}^y m_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_3(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \\ 0 & 1 & c_4(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \end{bmatrix}}_{J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})} J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \gamma A(\phi) J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

es otro vector de características de imagen aceptable (puesto que en la configuración del sistema robótico considerada el área del objeto  ${}^y m_{00}$  es constante).

### III.1.5 Simulaciones

Para ilustrar el desempeño del control servo-visual directo descrito en secciones anteriores, se presentarán simulaciones utilizando el modelo de un manipulador de 2 grados de libertad que se encuentra en el Laboratorio de Robótica de CICESE. Este manipulador es llamado “Robot Pelicano” y consiste de dos eslabones rígidos interconectados con articulaciones rotacionales. Los actuadores son motores eléctricos, los cuales se encuentran conectados directamente en cada articulación sin la necesidad de transmisión de movimiento por bandas o engranes. El motor de la primer articulación es capaz de suministrar hasta 15 [N m], mientras que el motor de la segunda articu-

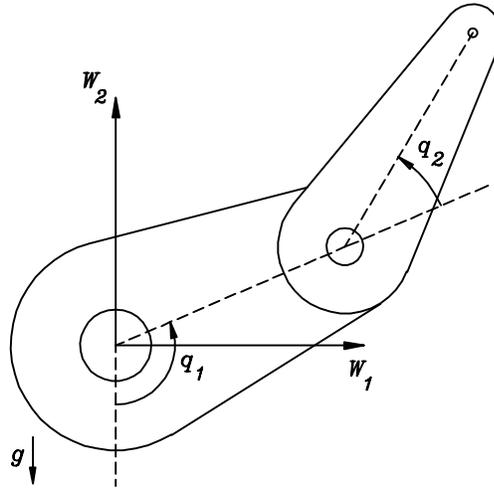


Figura 16: Esquema del Robot Pelicano.

lación sólo 4 [N m]. Un esquema de dicho manipulador puede apreciarse en la Figura 16.

El modelo del manipulador puede ser consultado en Campa (2004). Respecto a su modelo dinámico (45), su matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es expresada mediante:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0.3353 + 0.0244 \cos(q_2) & 0.0127 + 0.0122 \cos(q_2) \\ 0.0127 + 0.0122 \cos(q_2) & 0.0127 \end{bmatrix} \quad [\text{N m s}^2/\text{rad}]. \quad (81)$$

La matriz asociada a las fuerzas centrífugas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  del manipulador es:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -0.0122 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -0.0122 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 - 0.0122 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ 0.0122 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{N m s}/\text{rad}]. \quad (82)$$

Y su vector de gravedad  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  está dado mediante

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 11.5081 \text{sen}(q_1) + 0.4596 \text{sen}(q_1 + q_2) \\ 0.4596 \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad [\text{N m}]. \quad (83)$$

Ahora, su Jacobiano geométrico  $J_{G_{126W}}(\mathbf{q})$  es el siguiente:

$$J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l[\cos(q_1) + \cos(q_1 + q_2)] & l \cos(q_1 + q_2) \\ l[\sin(q_1) + \sin(q_1 + q_2)] & l \sin(q_1 + q_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (84)$$

donde  $l = 0.26$  [m].

Tabla III: Parámetros de la cámara.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Factor de conversión ([m] a [pixeles])	$\alpha$	72000	pixeles/m
Distancia focal de la lente	$\lambda$	0.0075	m
Centro de la imagen	$[u_0 \ v_0]^T$	$[160 \ 120]^T$	pixeles
Posición del marco de la cámara	$\mathbf{O}_W^C$	$[0 \ 0 \ 3]^T$	m
Orientación del marco de la cámara	$\phi$	$10\pi/180$	rad

Respecto a la cámara, la Tabla III presenta los parámetros tanto intrínsecos como extrínsecos de la cámara, los cuales corresponden a la configuración entre la cámara y el manipulador adoptada. Note que son un total de ocho parámetros, sin embargo, el controlador sólo necesita de la estimación del parámetro  $\phi$ .

Con el propósito de comparar el desempeño del control servo-visual directo diseñado con otros esquemas de control, se simularán dos escenarios. En el primer escenario el objeto de interés será una región enmarcada por un cuadrado de 0.05 [m] por lado colocado en el órgano terminal y centrado en el origen del plano  $O_1 - O_2$ ; a este objeto lo nombraremos *Objeto de interés 1*. Este escenario corresponde a lo que regularmente ocurre en los esquemas tradicionales de control servo-visual donde el centroide de un disco o cuadrado es utilizado para finalmente reducirlo a un objeto puntual de interés. Sin embargo, en este caso, no se seleccionará el centroide como característica de imagen sino el vector de características de imagen en función de los momentos de imagen de orden dos propuesto. Los momentos Cartesianos del objeto de interés 1 hasta de orden dos, respecto al plano  $O_1 - O_2$ , se muestran en la Tabla IV.

En el segundo escenario, el objeto de interés será una especie de “ele”, cuyas dimen-

Tabla IV: Momentos Cartesianos del objeto de interés 1 respecto a  $O_1 - O_2$ .

Momento	Valor	Unidades
${}^O m_{00}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$\text{m}^2$
${}^O m_{10}$	0	$\text{m}^3$
${}^O m_{01}$	0	$\text{m}^3$
$\mathbf{x}_{gO}$	$[0 \ 0]^T$	$\text{m}$
${}^O m_{11}$	0	$\text{m}^4$
${}^O m_{20}$	$5.2083 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O m_{02}$	$5.2083 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O \mu_{11}$	0	$\text{m}^4$
${}^O \mu_{20}$	$5.2083 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O \mu_{02}$	$5.2083 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O \beta$	indeterminado	rad

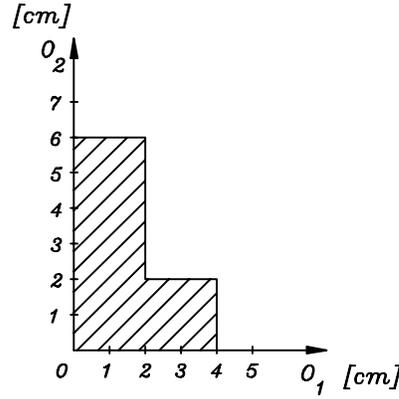


Figura 17: Objeto de interés 2.

siones se muestran en la Figura 17. Nómbrase a este objeto como *objeto de interés 2*. En este escenario, como puede verse, el objeto de interés tiene una forma más compleja. Aunque pudo haber sido de una forma más arbitraria, se seleccionó este objeto con la intención de clarificar las simulaciones. Los momentos Cartesianos del objeto de interés 2 hasta de orden dos, respecto a  $O_1 - O_2$ , se concentran en la Tabla V.

En ambos escenarios, respecto a los parámetros 3D del objeto de interés, el controlador sólo requiere una estimación del centroide del objeto  $\mathbf{x}_{gO}$ .

El vector de características de imagen seleccionado entonces, para los dos escenarios corresponde a (80) con  $p = -1$ , denótese con  $\mathbf{s}_a$  a este vector de características de

Tabla V: Momentos Cartesianos del objeto de interés 2 respecto a  $O_1 - O_2$ .

Momento	Valor	Unidades
${}^O m_{00}$	$1.6 \times 10^{-3}$	$\text{m}^2$
${}^O m_{10}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$\text{m}^3$
${}^O m_{01}$	$4 \times 10^{-5}$	$\text{m}^3$
$\mathbf{x}_{gO}$	$[1.5 \ 2.5]^T \times 10^{-2}$	$\text{m}$
${}^O m_{11}$	$4.8 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O m_{20}$	$5.3333 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O m_{02}$	$1.4933 \times 10^{-6}$	$\text{m}^4$
${}^O \mu_{11}$	$-1.2 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O \mu_{20}$	$1.7333 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O \mu_{02}$	$4.9333 \times 10^{-7}$	$\text{m}^4$
${}^O \beta$	$-1.2490$	$\text{rad}$

imagen expresado mediante

$$\mathbf{s}_a = \frac{1}{{}^y m_{00}} \begin{bmatrix} {}^y m_{11} - {}^y \mu_{11} \\ \frac{1}{2} [{}^y m_{02} - {}^y m_{20}] + {}^y \mu_{20} - {}^y \mu_{02} \end{bmatrix},$$

con Jacobiano  $J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij})$  descrito por

$$J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) = \begin{bmatrix} y_{g2} & -y_{g1} \\ -y_{g1} & -y_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_3(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \\ 0 & 1 & c_4(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gO}) \end{bmatrix} J_{G_{126W}}(\mathbf{q}).$$

## Escenario 1

La condición inicial para el Escenario 1 considerada corresponde al reposo del manipulador con  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$  [rad]. Mediante el método de enseñar-por-muestra se calculó el valor del vector de características de imagen deseado  $\mathbf{s}_{a_d}$  en la configuración del manipulador tal que  $\mathbf{q}_d = [45\pi/180 \ 90\pi/180]^T$  [rad]. Esto arroja el siguiente resultado:

$$\mathbf{s}_{a_d} = \begin{bmatrix} 2.9638 \\ -1.6741 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ [pixeles}^2\text{]}.$$

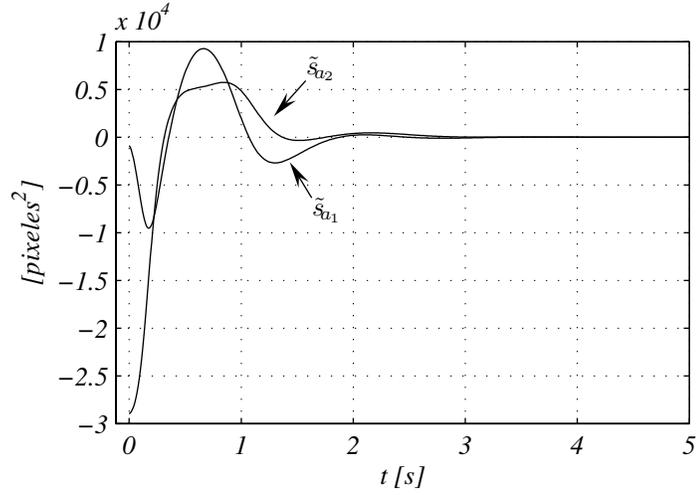


Figura 18: Evolución respecto al tiempo de  $\tilde{\mathbf{s}}_a$  para el Escenario 1.

El controlador (55) se sintonizó con las siguientes ganancias:

$$K_p = 4I_2 \times 10^{-6} \quad \text{y} \quad K_v = 0.8I_2,$$

con una  $\hat{\phi} = 0$  [rad] y una  $\hat{l} = 0.95l$ . Lo cual satisface las desigualdades (66) y (67), pues

$$\begin{aligned} \|\tilde{J}\| &< \cos(\tilde{\phi}) \frac{\lambda_m\{\hat{J}^T \hat{J}\}}{\|\hat{J}\|} \\ 5.4882 &< 14.9826 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_m^2\{K_v\} &> \frac{\gamma k_p \lambda_M\{M\} \left[ \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + \|\tilde{J}\|^2 + |\sin(\tilde{\phi})| \left[ |\det\{\hat{J}\}| + 2\|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + |\det\{\tilde{J}\}| \right] \right]^2}{\cos(\tilde{\phi}) \lambda_m\{\hat{J}^T \hat{J}\} - \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\|} \\ 0.6400 &> 0.5689. \end{aligned}$$

La Figura 18 muestra la evolución respecto al tiempo de los errores de características de imagen  $\tilde{\mathbf{s}}_a$ . Obsérvese que en aproximadamente 3 [s] este vector de error es prácticamente nulo, indicando que el objetivo de control se cumple.

La traza del centroide  $\mathbf{y}_g$  del objeto de interés 1 se presenta en la Figura 19. También

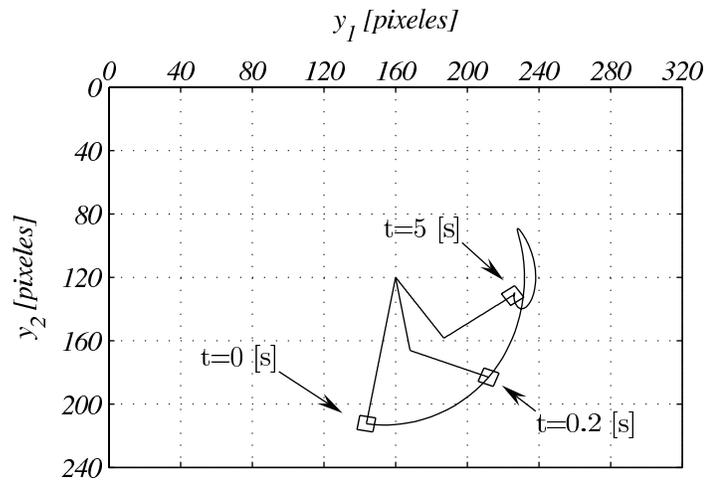


Figura 19: Traza del centroide  $y_g$  del objeto de interés para el Escenario 1.

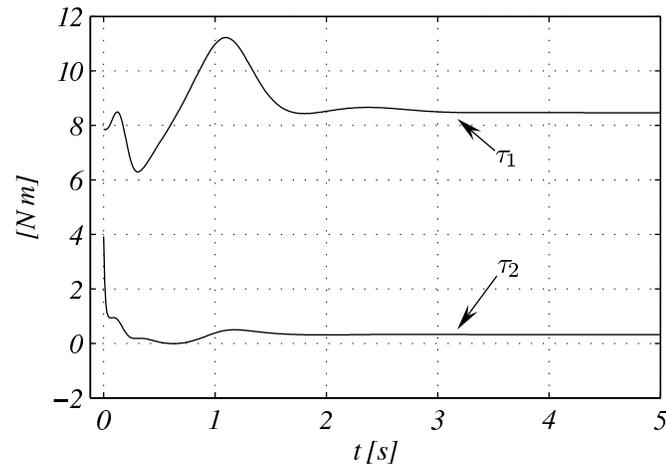


Figura 20: Pares aplicados en el Escenario 1.

en esta figura se pueden observar instantáneas de la configuración del manipulador y el objeto de interés en la condición inicial cuando  $t = 0$  [s], comenzando la evolución de la simulación cuando  $t = 0.2$  [s] y al finalizar la simulación cuando  $t = 5$  [s].

Finalmente, la Figura 20 reporta la evolución contra el tiempo de los pares articulares aplicados a cada articulación. Nótese que  $|\tau_1| < 4$  [N m] y  $|\tau_2| < 15$  [N m], es decir, los pares aplicados al manipulador en el Escenario 1 no rebasan los límites de los pares que los motores del Robot Pelicano puede suministrar.

## Escenario 2

En el Escenario 2 se utiliza el objeto de interés 2 mostrado en la Figura 17 y con parámetros 3D concentrados en la Tabla V. La condición inicial para este escenario corresponde al manipulador en reposo con vector de posición  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$  [rad]. De igual forma que en el escenario anterior, mediante el método de enseñar-por-muestra se calculó el valor del vector de características de imagen deseado  $\mathbf{s}_{a_d}$  en la configuración deseada del manipulador tal que  $\mathbf{q}_d = [45\pi/180 \ 90\pi/180]^T$  [rad]. Obteniéndose el siguiente valor deseado para  $\mathbf{s}_{a_d}$ :

$$\mathbf{s}_{a_d} = \begin{bmatrix} 2.8408 \\ -1.7333 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ [pixeles}^2\text{]}.$$

El controlador (55) se sintonizó con las mismas ganancias:

$$K_p = 4I_2 \times 10^{-6} \quad \text{y} \quad K_v = 0.8I_2;$$

pero con las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= 0.5\phi \\ {}^O\hat{x}_{g_{O_1}} &= 0.5 {}^Ox_{g_{O_1}} \\ {}^O\hat{x}_{g_{O_2}} &= 0.5 {}^Ox_{g_{O_2}} \\ \hat{l} &= 0.95l. \end{aligned}$$

Lo cual, nuevamente, satisface las desigualdades (66) y (67), debido a que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{J}}\| &< \cos(\tilde{\phi}) \frac{\lambda_m\{\hat{\mathcal{J}}^T \hat{\mathcal{J}}\}}{\|\hat{\mathcal{J}}\|} \\ 7.8242 &< 15.8702 \end{aligned}$$

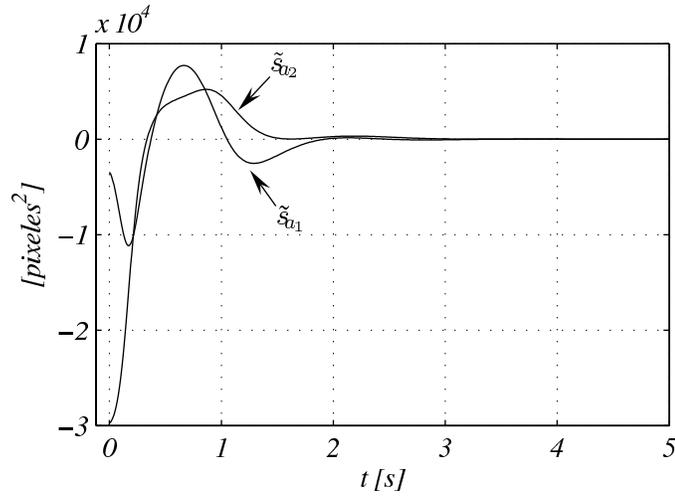


Figura 21: Evolución respecto al tiempo de  $\tilde{\mathbf{s}}_a$  para el Escenario 2.

$$\lambda_m^2\{K_v\} > \frac{\gamma k_p \lambda_M\{M\} \left[ \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + \|\tilde{J}\|^2 + |\sin(\tilde{\phi})| \left[ |\det\{\hat{J}\}| + 2\|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + |\det\{\tilde{J}\}| \right] \right]^2}{\cos(\tilde{\phi}) \lambda_m\{\hat{J}^T \hat{J}\} - \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\|}$$

$$0.6400 > 0.5524.$$

Observe de las Figuras 21, 22 y 23 que el desempeño es similar en ambos escenarios. El objeto de interés en el segundo escenario es más complejo, sin embargo, el sistema se comporta adecuadamente. El error del vector de características de imagen prácticamente es nulo en aproximadamente 3 [s], según se puede apreciar en la Figura 21, lo que muestra que el objetivo de control es logrado.

Así mismo, la traza del centroide  $\mathbf{y}_g$  del objeto de interés 2 se reporta en la Figura 22 junto con 3 instantáneas de la configuración del manipulador y del objeto de interés en la condición inicial cuando  $t = 0$  [s], cuando  $t = 0.2$  [s] y cuando finaliza la simulación en  $t = 5$  [s]. Finalmente, en la Figura 23 se aprecia que tampoco en este escenario se rebasan los límites de los pares que los motores del Robot Pelicano puede suministrar.

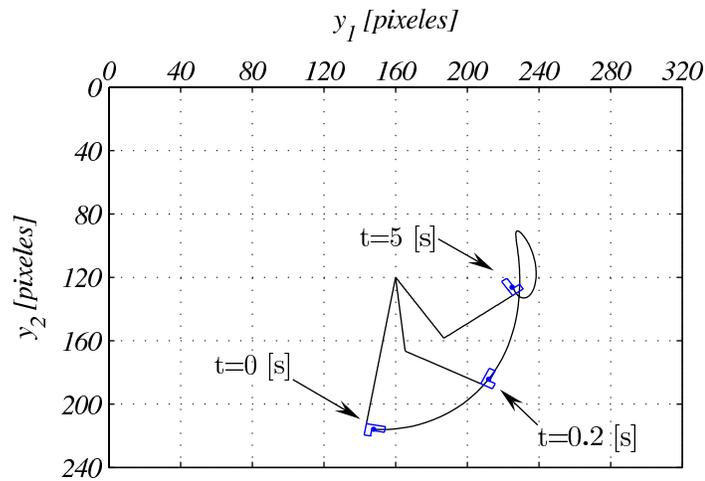


Figura 22: Traza del centroide  $\mathbf{y}_g$  del objeto de interés para el Escenario 2.

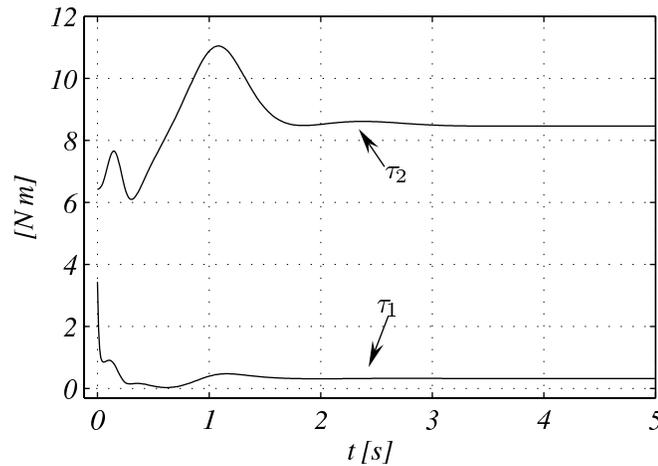


Figura 23: Pares aplicados en el Escenario 2.

## III.2 Configuración cámara en mano

### III.2.1 Formulación y ley de control

Para el caso de un manipulador en configuración cámara en mano considere la Figura 24. De esta forma, el sistema robótico se compone de un manipulador planar de  $n$  g.d.l. con una cámara atada en su órgano terminal. Observe el marco coordenado de mundo  $\Sigma_W$  en la base del manipulador; el marco de la cámara  $\Sigma_C$  solidario al órgano terminal del manipulador de manera que se proyecte en el plano de imagen  $y_1 - y_2$  el objeto

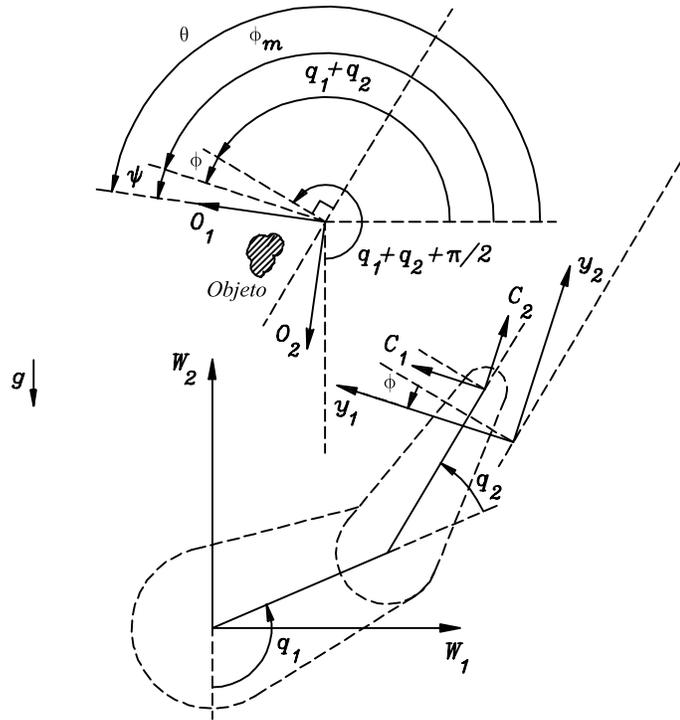


Figura 24: Vista del manipulador planar en configuración cámara en mano.

de interés; y el marco del objeto  $\Sigma_O$  fijo en algún lugar del medio ambiente donde se localiza el objeto de interés. El modelo de imagen considerado corresponde al modelo de la cámara con lente delgada con eje óptico apuntando en dirección perpendicular al plano del objeto, este arreglo también es descrito en la Subsección II.1.3. Note que los planos  $W_1 - W_2$ ,  $O_1 - O_2$ ,  $C_1 - C_2$  y  $y_1 - y_2$  son paralelos entre sí, lo cual corresponde con el sistema descrito en la Subsección II.2.5. En este caso, la constante  $\phi$  denota una posible rotación del marco de la cámara respecto al órgano terminal (ver detalle en la Figura 24), la constante  $\theta$  es la orientación del plano  $O_1 - O_2$  respecto a  $W_1$ , la variable  $\psi$  es la orientación del plano  $O_1 - O_2$  en el plano de imagen y la variable  $\phi_m = \theta - \psi$ . La posición del órgano terminal respecto a  $\Sigma_W$  es denotada por el vector  $\mathbf{O}_W^C \in \mathbb{R}^3$ , debido a que el marco  $\Sigma_C$  está atado al órgano terminal justo en su extremo final.

De esta manera, la formulación de la configuración cámara en mano es muy similar a la formulación de la configuración cámara fija descrita anteriormente. Sólo que en

este caso:

$$\theta = \Sigma_{q_r} + \psi + \phi \quad \text{y} \quad \psi = \theta - \phi - \Sigma_{q_r}$$

donde  $\Sigma_{q_r}$  denota la suma de todos los ángulos de las articulaciones rotacionales. Cabe mencionar que debe tenerse cuidado en la definición de la matriz de rotación  $R_W^C(\cdot)$  del marco de la cámara respecto a  $\Sigma_W$  definida en (25), ya que en este caso de cámara en mano dicha matriz está en función de

$$\phi_m = \Sigma_{q_r} + \phi, \tag{85}$$

en contraste con el caso de cámara fija que está en función de  $\phi$ .

Por lo tanto, el modelo del manipulador es (45); el modelo de imagen es descrito por (46); el vector de características de imagen  $\mathbf{s}$  debe expresarse en función de los momentos de imagen de la proyección de un objeto de interés plano con forma arbitraria en el plano de imagen que cumpla con (47) y (48); el vector de error de características de imagen  $\tilde{\mathbf{s}}$  debe definirse como en (50); para que finalmente, el objetivo de control sea expresado mediante (51).

Consecuentemente, para esta configuración de cámara en mano, los controladores (52) y (55) también cumplirán con el objetivo de control (51); siempre y cuando se satisfagan las suposiciones impuestas y, para el caso del controlador (55), también las desigualdades (66) y (67).

### III.2.2 Selección de características de imagen

#### Centroide $\mathbf{y}_g$

Considérese nuevamente la Ecuación (32), la cual mapea el centroide  $\mathbf{x}_{gO}$  del objeto de interés (respecto a  $\Sigma_O$ ) hacia el plano de imagen:

$$\mathbf{y}_g = \gamma \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} + \begin{bmatrix} \gamma c_1 + u_0 \\ \gamma c_2 + v_0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

donde en este caso

$$\psi = \theta - \phi - \Sigma_{q_r}, \quad (87)$$

con  $\Sigma_{q_r}$  la suma de todos los ángulos de las articulaciones rotacionales; las variables  $c_1$  y  $c_2$  (en función de  $\phi_m$  y no  $\phi$ ) se expresan mediante

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(\phi_m)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] + \text{sen}(\phi_m)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C] \\ c_2 &= \text{sen}(\phi_m)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] - \cos(\phi_m)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C]; \end{aligned} \quad (88)$$

$[O_{W_1}^O \ O_{W_2}^O]^T$  denota el vector de posición constante del plano  $O_1 - O_2$  respecto al plano  $W_1 - W_2$ ; y  $\gamma$ ,  $\phi$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $O_{W_1}^C$  y  $O_{W_2}^C$  son parámetros de la cámara. Note que  $[O_{W_1}^C \ O_{W_2}^C]^T$  también representa la posición del órgano terminal del manipulador respecto al plano  $W_1 - W_2$ .

Observe que para este caso:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\dot{\Sigma}_{q_r} \\ \dot{c}_1 &= -\cos(\phi_m)\dot{O}_{W_1}^C - \text{sen}(\phi_m)\dot{O}_{W_2}^C - c_2\dot{\Sigma}_{q_r} \\ \dot{c}_2 &= -\text{sen}(\phi_m)\dot{O}_{W_1}^C + \cos(\phi_m)\dot{O}_{W_2}^C + c_1\dot{\Sigma}_{q_r}. \end{aligned} \quad (89)$$

Nuevamente, como se trata de un manipulador planar:

$$\begin{bmatrix} \dot{O}_{W_1}^C \\ \dot{O}_{W_2}^C \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix} = J_{G_{126W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (90)$$

donde  $J_{G_{126W}}(\mathbf{q})$  son los renglones 1, 2 y 6 del Jacobiano geométrico  $J_{G_W}(\mathbf{q})$  del manipulador.

Ahora bien, derivando respecto al tiempo (86) y sustituyéndole (89) y (90), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_g &= \gamma \begin{bmatrix} -\text{sen}(\psi) & -\text{cos}(\psi) \\ -\text{cos}(\psi) & \text{sen}(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} \dot{\psi} + \gamma \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{bmatrix} \\ &= \gamma \left[ \begin{bmatrix} -\text{sen}(\psi) & -\text{cos}(\psi) \\ -\text{cos}(\psi) & \text{sen}(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} \dot{\psi} + \begin{bmatrix} -\text{cos}(\phi_m)\dot{O}_{W_1}^C - \text{sen}(\phi_m)\dot{O}_{W_2}^C - c_2\dot{\Sigma}_{q_r} \\ -\text{sen}(\phi_m)\dot{O}_{W_1}^C + \text{cos}(\phi_m)\dot{O}_{W_2}^C + c_1\dot{\Sigma}_{q_r} \end{bmatrix} \right] \\ &= \gamma \begin{bmatrix} -\text{cos}(\phi_m) & -\text{sen}(\phi_m) & \text{sen}(\psi)x_{gO_1} + \text{cos}(\psi)x_{gO_2} - c_2 \\ -\text{sen}(\phi_m) & \text{cos}(\phi_m) & \text{cos}(\psi)x_{gO_1} - \text{sen}(\psi)x_{gO_2} + c_1 \end{bmatrix} J_{G_{126W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (91) \end{aligned}$$

De acuerdo a (85), (87) y mediante identidades trigonométricas, se puede llegar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{cos}(\phi_m) &= \text{cos}(\Sigma_{q_r}) \text{cos}(\phi) - \text{sen}(\Sigma_{q_r})\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi_m) &= \text{sen}(\Sigma_{q_r}) \text{cos}(\phi) + \text{cos}(\Sigma_{q_r})\text{sen}(\phi) \\ \text{cos}(\psi) &= \text{cos}(\theta - \Sigma_{q_r}) \text{cos}(\phi) + \text{sen}(\theta - \Sigma_{q_r})\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\psi) &= \text{sen}(\theta - \Sigma_{q_r}) \text{cos}(\phi) - \text{cos}(\theta - \Sigma_{q_r})\text{sen}(\phi). \quad (92) \end{aligned}$$

Consecuentemente, (91) puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{y}}_g = \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \text{cos}(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \text{cos}(\phi) \end{bmatrix}}_{A(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} -\text{cos}(\Sigma_{q_r}) & -\text{sen}(\Sigma_{q_r}) & c_5(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gW}) \\ -\text{sen}(\Sigma_{q_r}) & \text{cos}(\Sigma_{q_r}) & c_6(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gW}) \end{bmatrix}}_{J(q, y_{m_{ij}})} J_{G_{126W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$= \gamma A(\phi) J(\mathbf{q}, {}^y m_{ij}) \dot{\mathbf{q}},$$

donde

$$\begin{aligned} c_5(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) &= \text{sen}(\theta - \Sigma_{q_r}) x_{g_{O_1}} + \text{cos}(\theta - \Sigma_{q_r}) x_{g_{O_2}} - \text{sen}(\Sigma_{q_r}) [O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] + \\ &\quad \text{cos}(\Sigma_{q_r}) [O_{W_2}^O - O_{W_2}^C] \\ c_6(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) &= \text{cos}(\theta - \Sigma_{q_r}) x_{g_{O_1}} - \text{sen}(\theta - \Sigma_{q_r}) x_{g_{O_2}} + \text{cos}(\Sigma_{q_r}) [O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] + \\ &\quad \text{sen}(\Sigma_{q_r}) [O_{W_2}^O - O_{W_2}^C]. \end{aligned} \quad (93)$$

Observe que tanto  $c_5(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W})$  como  $c_6(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W})$  dependen de  $\mathbf{x}_{g_O}$  y de los parámetros de ubicación del marco del objeto respecto a  $\Sigma_W$ , es decir, dependen de  $\theta$  y  $\mathbf{O}_W^O$ ; esto significa que en realidad se está dependiendo del centroide del objeto de interés  $\mathbf{x}_{g_W}$  respecto al plano  $W_1 - W_2$ , además del vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$ .

### Características de imagen en función de los momentos de imagen de orden dos

Primero derívese respecto al tiempo los momentos de imagen de orden dos, tanto regulares como centrales, apoyándose en las expresiones generales de la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen (129) y (137) del Apéndice C.

Entonces, a partir de (129),  ${}^y \dot{m}_{11}$  puede expresarse mediante

$$\begin{aligned} {}^y \dot{m}_{11} &= \gamma {}^y m_{01} \dot{c}_1 + \gamma {}^y m_{10} \dot{c}_2 + [{}^y m_{02} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{01}] \dot{\psi} + \\ &\quad [-{}^y m_{20} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{10}] \dot{\psi} \\ &= \begin{bmatrix} -\gamma [{}^y m_{01} \text{cos}(\phi_m) + {}^y m_{10} \text{sen}(\phi_m)] \\ -\gamma [{}^y m_{01} \text{sen}(\phi_m) - {}^y m_{10} \text{cos}(\phi_m)] \\ -[{}^y m_{02} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{01} - {}^y m_{20} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{10}] - c_2 \gamma {}^y m_{01} + c_1 \gamma {}^y m_{10} \end{bmatrix}^T \cdot \\ &\quad J_{G_{126_W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (94)$$

donde (89) y (90) se han sustituido. Observe que a través de (20):

$$\begin{aligned} {}^y m_{20} &= {}^y \mu_{20} + y_{g_1} {}^y m_{10} \\ {}^y m_{02} &= {}^y \mu_{02} + y_{g_2} {}^y m_{01}, \end{aligned}$$

por lo tanto, utilizando (86) y estas dos últimas ecuaciones:

$$\begin{aligned} -[{}^y m_{02} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{01} - {}^y m_{20} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{10}] = \\ \gamma [\text{sen}(\psi) x_{g_{O_1}} + \text{cos}(\psi) x_{g_{O_2}}] {}^y m_{01} + \gamma [\text{cos}(\psi) x_{g_{O_1}} - \text{sen}(\psi) x_{g_{O_2}}] {}^y m_{10} - {}^y \mu_{02} + {}^y \mu_{20}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (88), (92), (93) y esto último en (94),  ${}^y \dot{m}_{11}$  finalmente puede expresarse como

$$\begin{aligned} {}^y \dot{m}_{11} &= \gamma [\text{cos}(\phi) \quad -\text{sen}(\phi)] \begin{bmatrix} -{}^y m_{01} & {}^y m_{10} \\ {}^y m_{10} & {}^y m_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos}(\Sigma_{q_r}) & \text{sen}(\Sigma_{q_r}) & -c_5(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) \\ -\text{sen}(\Sigma_{q_r}) & \text{cos}(\Sigma_{q_r}) & c_6(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) \end{bmatrix} \\ &J_{G_{126_W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - [0 \quad 0 \quad {}^y \mu_{02} - {}^y \mu_{20}] J_{G_{126_W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (95)$$

Ahora, aplicando nuevamente (129) para  ${}^y \dot{m}_{20}$  y  ${}^y \dot{m}_{02}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} {}^y \dot{m}_{20} &= 2\gamma {}^y m_{10} \dot{c}_1 + 2[{}^y m_{11} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{10}] \dot{\psi} \\ {}^y \dot{m}_{02} &= 2\gamma {}^y m_{01} \dot{c}_2 + 2[-{}^y m_{11} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{01}] \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Considere la semirecta  $s_{aux} = \frac{1}{2}[{}^y m_{02} - {}^y m_{20}]$ , de tal manera que su derivada respecto al tiempo  $\dot{s}_{aux}$ , siguiendo los mismos argumentos que para  ${}^y \dot{m}_{11}$ , resulta

$$\begin{aligned} \dot{s}_{aux} &= \gamma [\text{sen}(\phi) \quad \text{cos}(\phi)] \begin{bmatrix} -{}^y m_{01} & {}^y m_{10} \\ {}^y m_{10} & {}^y m_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos}(\Sigma_{q_r}) & \text{sen}(\Sigma_{q_r}) & -c_5(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) \\ -\text{sen}(\Sigma_{q_r}) & \text{cos}(\Sigma_{q_r}) & c_6(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) \end{bmatrix} \\ &J_{G_{126_W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + [0 \quad 0 \quad 2{}^y \mu_{11}] J_{G_{126_W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (96)$$

La variación respecto al tiempo de los momentos centrales de imagen de orden dos

se puede encontrar mediante (137), obteniéndose

$$\begin{aligned}
{}^y\dot{\mu}_{11} &= [{}^y\mu_{02} - {}^y\mu_{20}]\dot{\psi} = -[0 \quad 0 \quad {}^y\mu_{02} - {}^y\mu_{20}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\
{}^y\dot{\mu}_{20} &= {}^y\mu_{11}\dot{\psi} = -[0 \quad 0 \quad {}^y\mu_{11}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\
{}^y\dot{\mu}_{02} &= -{}^y\mu_{11}\dot{\psi} = -[0 \quad 0 \quad -{}^y\mu_{11}] J_{G_{126W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}.
\end{aligned} \tag{97}$$

Considere el vector de características de imagen en función de los momentos de imagen de orden dos siguiente:

$$\mathbf{s}_{m_2} = \begin{bmatrix} {}^ym_{11} - {}^y\mu_{11} \\ \frac{1}{2}[{}^ym_{02} - {}^ym_{20}] + {}^y\mu_{20} - {}^y\mu_{02} \end{bmatrix}.$$

Entonces la variación respecto al tiempo del vector de características de imagen  $\dot{\mathbf{s}}_{m_2}$  se determina a partir de (95), (96) y (97), resultando

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{s}}_{m_2} &= \begin{bmatrix} {}^y\dot{m}_{11} - {}^y\dot{\mu}_{11} \\ \frac{1}{2}[{}^y\dot{m}_{02} - {}^y\dot{m}_{20}] + {}^y\dot{\mu}_{20} - {}^y\dot{\mu}_{02} \end{bmatrix} \\
&= \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}}_{A(\phi)} \\
&\quad \underbrace{\begin{bmatrix} -{}^ym_{01} & {}^ym_{10} \\ {}^ym_{10} & {}^ym_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Sigma_{q_r}) & \text{sen}(\Sigma_{q_r}) & -c_5(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gW}) \\ -\text{sen}(\Sigma_{q_r}) & \cos(\Sigma_{q_r}) & c_6(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{gW}) \end{bmatrix} J_{G_{126W}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}}_{J(\mathbf{q}, {}^ym_{ij})} \\
&= \gamma A(\phi) J(\mathbf{q}, {}^ym_{ij})\dot{\mathbf{q}},
\end{aligned} \tag{98}$$

También note que

$$\mathbf{s}'_{m_2} = {}^ym_{00}^p \begin{bmatrix} {}^ym_{11} - {}^y\mu_{11} \\ \frac{1}{2}[{}^ym_{02} - {}^ym_{20}] + {}^y\mu_{20} - {}^y\mu_{02} \end{bmatrix} \tag{99}$$

donde  $p \in \mathbb{R}$  es una constante, con derivada temporal

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}'_{m_2} &= \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}}_{A(\phi)} \cdot \\ &\quad \underbrace{{}^y m_{00}^p \begin{bmatrix} -y_{m_{01}} & y_{m_{10}} \\ y_{m_{10}} & y_{m_{01}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Sigma_{q_r}) & \text{sen}(\Sigma_{q_r}) & -c_5(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) \\ -\text{sen}(\Sigma_{q_r}) & \cos(\Sigma_{q_r}) & c_6(\mathbf{q}, \mathbf{x}_{g_W}) \end{bmatrix}}_{J(\mathbf{q}, y_{m_{ij}})} J_{G_{126W}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \gamma A(\phi) J(\mathbf{q}, y_{m_{ij}}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

### III.2.3 Simulaciones

A continuación se presentan simulaciones para la configuración cámara en mano. Se utilizará, nuevamente, el Robot Pelicano (ver Figura 16); cuyo modelo dinámico (45) contiene los elementos (81), (82) y (83). Su Jacobiano geométrico es expresado mediante (84).

Tabla VI: Parámetros intrínsecos de la cámara.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Factor de conversión ([m] a [píxeles])	$\alpha$	72000	píxeles/m
Distancia focal de la lente	$\lambda$	0.0075	m
Centro de la imagen	$[u_0 \ v_0]^T$	$[160 \ 120]^T$	píxeles

La cámara atada al órgano terminal del manipulador tiene los parámetros intrínsecos concentrados en la Tabla VI, esto significa que se está utilizando la misma cámara que en las simulaciones para la configuración cámara fija. Los parámetros extrínsecos de la cámara son expresados mediante  $R_W^C(\phi_m)$  y  $\mathbf{O}_W^C$  según se describe en la Subsección III.2.1; y también por el parámetro  $\phi$ , que en este caso es

$$\phi = 10\pi/180 \quad [\text{rad}].$$

La ubicación del marco del objeto está en función de los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}\theta &= 0 \quad [\text{rad}] \\ \mathbf{O}_W^O &= [0.5 \quad -0.5 \quad -3]^T \quad [\text{m}].\end{aligned}$$

Se utilizó el objeto de interés 2 de la Figura 17 con momentos Cartesianos respecto al plano  $O_1 - O_2$  expresados en la Tabla V.

Se ha seleccionado el mismo vector de características de imagen  $\mathbf{s}_a$  de la configuración cámara fija, correspondiente a (99) con  $p = -1$ .

También, en estas simulaciones, la condición inicial corresponde al manipulador en reposo con vector de posición  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$  [rad]. Y por el método de enseñar-por-muestra se calculó el valor del vector de características de imagen deseado  $\mathbf{s}_{a_d}$  en la configuración deseada del manipulador tal que  $\mathbf{q}_d = [20\pi/180 \quad 20\pi/180]^T$  [rad], obteniéndose

$$\mathbf{s}_{a_d} = \begin{bmatrix} 2.9607 \\ -0.45283 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad [\text{píxeles}^2].$$

El controlador (55) se sintonizó con las siguientes ganancias:

$$K_p = 1.6I_2 \times 10^{-6} \quad \text{y} \quad K_v = 0.17 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

estimando solamente:

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= 0.9\phi \\ {}^O\hat{x}_{g_{O_1}} &= 0.9 {}^Ox_{g_{O_1}} \\ {}^O\hat{x}_{g_{O_2}} &= 0.9 {}^Ox_{g_{O_2}},\end{aligned}$$

y conservando los valores para  $l$ ,  $\theta$  y  $\mathbf{O}_W^O$ , a manera de no demandar pares superiores a los que los motores del manipulador pueden dar. Esto, así satisface las desigualdades

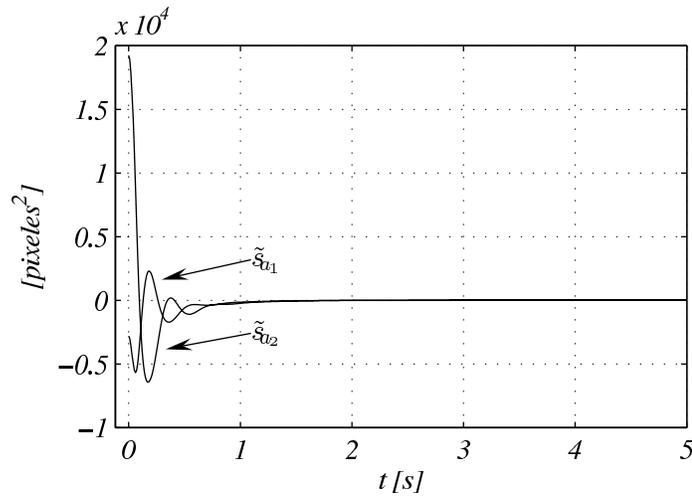


Figura 25: Evolución respecto al tiempo de  $\tilde{s}_a$ .

(66) y (67), debido a que

$$\|\tilde{J}\| < \cos(\tilde{\phi}) \frac{\lambda_m\{\hat{J}^T \hat{J}\}}{\|\hat{J}\|}$$

$$1.0091 < 2.7781$$

$$\lambda_m^2\{K_v\} > \frac{\gamma k_p \lambda_M\{M\} \left[ \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + \|\tilde{J}\|^2 + |\sin(\tilde{\phi})| \left[ |\det\{\hat{J}\}| + 2\|\hat{J}\| \|\tilde{J}\| + |\det\{\tilde{J}\}| \right] \right]^2}{\cos(\tilde{\phi}) \lambda_m\{\hat{J}^T \hat{J}\} - \|\hat{J}\| \|\tilde{J}\|}$$

$$0.0289 > 0.0262.$$

Las Figuras 25, 26 y 27 muestran el desempeño del sistema robótico recién descrito. El error del vector de características de imagen prácticamente es nulo en aproximadamente 2 [s], según se observa en la Figura 25. Esto indica que el objetivo de control es satisfecho.

La traza del centroide  $\mathbf{y}_g$  del objeto de interés 2 se grafica en la Figura 26 junto con 3 instantáneas de la configuración del objeto de interés en la condición inicial cuando  $t = 0$  [s], cuando  $t = 0.05$  [s] y cuando finaliza la simulación en  $t = 5$  [s]. Como se mencionó, la simulación presentada no demanda pares mayores a los que los motores del manipulador puede suministrar, esto es apreciado a través de la Figura 27.

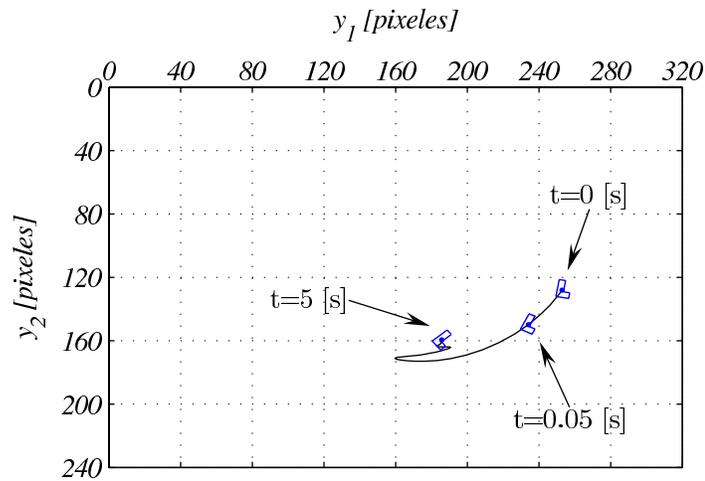


Figura 26: Traza del centroide  $\mathbf{y}_g$  del objeto de interés.

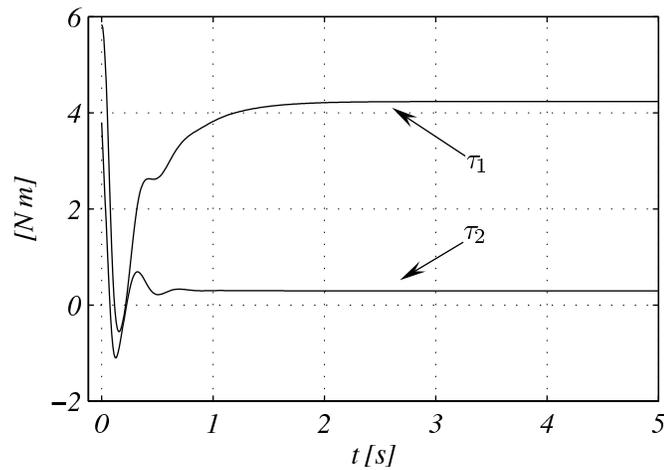


Figura 27: Pares aplicados.

Finalmente, se presenta una simulación donde las desigualdades (66) y (67) no se cumplen y tampoco hay especial cuidado en los pares aplicados por los actuadores. Esto con la intención de mostrar que dichas desigualdades son un tanto restrictivas. Considérese las mismas condiciones expuestas anteriormente para la simulación de la configuración cámara en mano, solamente con diferencias en los parámetros del controlador.

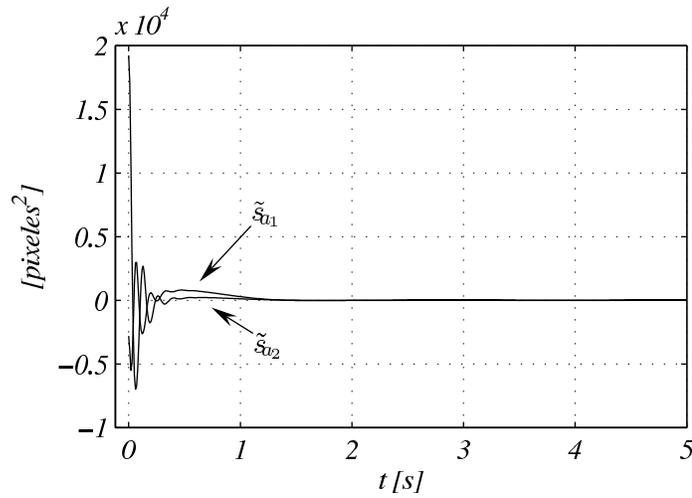


Figura 28: Evolución respecto al tiempo de  $\tilde{\mathbf{s}}_a$ .

Las ganancias del controlador, en este caso, son

$$K_p = 2I_2 \times 10^{-5} \quad \text{y} \quad K_v = 0.3 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

con las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= 0 \quad [\text{rad}] \\ {}^O\hat{x}_{gO_1} &= 0 \quad [\text{m}] \\ {}^O\hat{x}_{gO_2} &= 0 \quad [\text{m}] \\ \hat{\theta} &= 10\pi/180 \quad [\text{rad}] \\ \hat{l} &= 0.8l \\ \hat{\mathbf{O}}_W^O &= 0.8\mathbf{O}_W^O. \end{aligned}$$

Obsérvese en la Figura 28 la evolución contra el tiempo del error de características de imagen  $\tilde{\mathbf{s}}_a$  para este escenario. A pesar de las estimaciones de los parámetros en el controlador tan burdas,  $\tilde{\mathbf{s}}_a$  es prácticamente cero en aproximadamente 1.5 [s].

### III.3 Conclusiones

Se ha diseñado un control servo-visual directo para manipuladores planares tanto en configuración cámara fija como en configuración cámara en mano, con el eje óptico de la cámara perpendicular al plano de movimiento del robot. El objeto de interés es un objeto plano de forma arbitraria, es decir, puede ser de geometría compleja. Se ha propuesto un vector de características de imagen globales en función de los momentos de imagen de dicho objeto de interés y con base en el tema de transformación de momentos es que se desarrolla la variación respecto al tiempo de dichos momentos; representando así, un desarrollo alternativo al descrito por Chaumette (2004).

El controlador corresponde a la estructura de un controlador por Jacobiano transpuesto el cual se demuestra, por el método directo de Lyapunov, que es robusto ante parámetros 3D del objeto de interés, de la cámara y del Jacobiano geométrico del robot.

Las simulaciones, tanto en el escenario con cámara fija como con cámara en mano, validan el cumplimiento del objetivo de control. Además muestran que todavía es posible encontrar otras condiciones en los parámetros estimados menos restrictivas tal que el objetivo de control se siga cumpliendo.

## IV Navegación servo-visual de unicyclos

En este capítulo se describe el análisis y síntesis de un control servo-visual para la navegación de unicyclos. La referencia del sistema de control se basa en la filosofía de campos de velocidad, donde dicho campo de velocidad se especifica directamente en el plano de imagen (Kelly *et al.*, 2004a). De esta manera, cada punto en el plano de imagen tendrá asociado un vector de velocidad deseado para establecer el movimiento del unicyclo. Una referencia especificada de este modo no posee al tiempo como parámetro. La configuración utilizada corresponde a la denominada cámara fija con eje óptico perpendicular al plano de movimiento del robot.

De la misma forma que ha sucedido en la aplicación del control servo-visual en manipuladores, el control servo-visual en los robots móviles, y específicamente en los unicyclos, típicamente se establece mediante un objeto de interés con geometría simple u objetos más complejos descritos con características de imagen locales. Uno de los objetivos del presente capítulo es abordar el tema del control servo-visual en unicyclos con modelo cinemático utilizando características de imagen globales.

En este sentido, se hará uso de los momentos de imagen de un objeto de interés plano pero con forma irregular (contrariamente a lo que se venía manejando, ya que en aquellos casos la forma era arbitraria) para la determinación de las características de imagen. Adicionalmente, se diseñará el controlador de manera que no dependa de los parámetros (intrínsecos o extrínsecos) de la cámara, el cual será un controlador dinámico (De Luca y Di Benedetto, 1993).

### IV.1 Formulación

Considere un robot móvil tipo unicyclo con dos ruedas actuadas independientemente, como el descrito en la Sección II.4; cuyo modelo cinemático es dado por (44) y reescrito

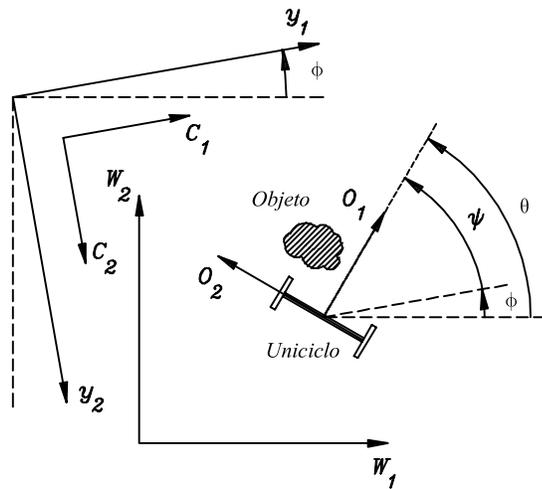


Figura 29: Vista de planta del unicyclo en configuración cámara fija.

para mayor claridad aquí:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{W_1} \\ x_{W_2} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (100)$$

donde  $x_{W_1}$  y  $x_{W_2}$  denotan la posición y  $\theta$  la orientación del unicyclo. Las componentes del vector de entrada  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$  son la velocidad lineal y angular del unicyclo, respectivamente.

Ahora considere una cámara fija observando el unicyclo con un objeto de interés plano y de forma irregular atado en su parte superior. El objeto de interés debe ser irregular en el sentido de que los momentos Cartesianos del objeto de interés respecto a su plano de definición, el plano  $O_1 - O_2$ , sean tales que

$${}^O\mu_{11} \neq 0 \quad \text{y} \quad {}^O\mu_{20} \neq {}^O\mu_{02}.$$

La Figura 29 muestra una vista de planta de este sistema robótico. También, en esta misma figura, obsérvese el marco coordenado de mundo  $\Sigma_W$  fijo en algún lugar del medio ambiente, el marco solidario a la cámara fija  $\Sigma_C$  de manera que se proyecte en

el plano de imagen  $y_1 - y_2$  el objeto de interés y el marco del objeto  $\Sigma_O$  atado en el unicycle donde se define el objeto de interés.

Asimismo, considérese el modelo de imagen de la cámara con lente delgada descrito en la Subsección II.1.3. Note que el eje óptico de la cámara apunta en dirección perpendicular al plano de movimiento del unicycle, de esta manera los planos  $W_1 - W_2$ ,  $O_1 - O_2$ ,  $C_1 - C_2$  y  $y_1 - y_2$  son paralelos entre sí, lo cual guarda correspondencia con el sistema descrito en la Subsección II.2.5. El ángulo  $\phi$  denota la rotación del marco de la cámara respecto a  $W_3$ ,  $\theta$  es la orientación del plano  $O_1 - O_2$  respecto a  $W_1$  y  $\psi = \theta - \phi$  es la orientación del plano  $O_1 - O_2$  en el plano de imagen. Suponga que el marco  $\Sigma_O$  está localizado sobre el punto medio del eje que une las dos ruedas a una altura convenientemente nula, de manera que

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{O}_W^O,$$

es decir, el vector de posición del origen de  $\Sigma_O$  respecto a  $\Sigma_W$  es igual a la posición del unicycle.

Por lo tanto, el modelo de imagen corresponde a (27), significando que un punto  $\mathbf{x}_O \in \mathbb{R}^3$  en el objeto de interés  $\mathcal{O}_O$  respecto al marco del objeto  $\Sigma_O$  se transforma a coordenadas del marco de la cámara en  $\mathbf{x}_C \in \mathbb{R}^3$  y mediante el modelo de la cámara con lente delgada, éste a su vez, se mapea al plano de imagen en un punto  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ . Dicho modelo se reescribe nuevamente aquí:

$$\mathbf{y} = \gamma \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

donde  $\gamma$  es una constante en función de los parámetros de la cámara y  $[u_0 \ v_0]^T$  denota el centro de la imagen.

El mapeo del centroide del objeto de interés  $\mathbf{x}_{g_O}$  respecto a  $\Sigma_O$ , al plano de imagen

en  $\mathbf{y}_g$  está dado por (32), la cual se reescribe aquí:

$$\mathbf{y}_g = \gamma \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{gO} + \begin{bmatrix} \gamma c_1 + u_0 \\ \gamma c_2 + v_0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

donde en este caso

$$\psi = \theta - \phi, \quad (103)$$

y las variables  $c_1$  y  $c_2$  se expresan mediante

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(\phi)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] + \text{sen}(\phi)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C] \\ c_2 &= \text{sen}(\phi)[O_{W_1}^O - O_{W_1}^C] - \cos(\phi)[O_{W_2}^O - O_{W_2}^C]; \end{aligned}$$

$\gamma$ ,  $\phi$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $O_{W_1}^C$  y  $O_{W_2}^C$  son parámetros de la cámara; y  $[O_{W_1}^O \ O_{W_2}^O]^T$  denota la posición del unicycle respecto al plano  $W_1 - W_2$ .

De esta manera, derivando respecto al tiempo (102), sutituyendo (100), resulta

$$\dot{\mathbf{y}}_g = \gamma \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi)x_{gO_1} - \cos(\psi)x_{gO_2} \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi)x_{gO_1} + \text{sen}(\psi)x_{gO_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo (104), produce

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}}_g &= \gamma u_2 \begin{bmatrix} -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi)x_{gO_1} + \text{sen}(\psi)x_{gO_2} \\ -\cos(\psi) & \text{sen}(\psi)x_{gO_1} + \cos(\psi)x_{gO_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \\ &\quad \gamma \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi)x_{gO_1} - \cos(\psi)x_{gO_2} \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi)x_{gO_1} + \text{sen}(\psi)x_{gO_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

la cual puede escribirse en forma compacta como

$$\ddot{\mathbf{y}}_g = \gamma J_1(\psi, u_2) \mathbf{u} + \gamma J_2(\psi) \mathbf{z} \quad (105)$$

donde  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$ ,  $\mathbf{z} = [\dot{u}_1 \ \dot{u}_2]^T$ ,

$$J_1(\psi, u_2) = u_2 \begin{bmatrix} -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi)x_{gO_1} + \text{sen}(\psi)x_{gO_2} \\ -\cos(\psi) & \text{sen}(\psi)x_{gO_1} + \cos(\psi)x_{gO_2} \end{bmatrix},$$

y

$$J_2(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi)x_{gO_1} - \cos(\psi)x_{gO_2} \\ -\text{sen}(\psi) & -\cos(\psi)x_{gO_1} + \text{sen}(\psi)x_{gO_2} \end{bmatrix}.$$

Nótese que  $\det\{J_2(\psi)\} = -x_{gO_1}$ , por lo que si  $x_{gO_1} \neq 0$  entonces existe la inversa de  $J_2(\psi)$ .

El modelo (105) es el sistema a controlar con  $\mathbf{z}$  la entrada y  $\mathbf{y}_g$  la salida. El movimiento del unicycle será especificado por medio de un campo de velocidad deseado  $\mathbf{v}(\mathbf{y}_g)$  definido en el plano de imagen por

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}_g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Se supone que el campo de velocidad es acotado y suave. El campo de velocidad deseado  $\mathbf{v}(\mathbf{y}_g)$  define un vector tangente (la velocidad deseada del centroide  $\dot{\mathbf{y}}_{gd}$  en el plano de imagen) en cada punto del plano de imagen.

Ahora bien, defínase el error de campo de velocidad  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$  como

$$\mathbf{e} = \mathbf{v}(\mathbf{y}_g) - \dot{\mathbf{y}}_g, \quad (106)$$

y considérese el conocimiento previo de los momentos Cartesianos  $^O m_{ij}$  hasta de orden 2 (respecto a  $\Sigma_O$ ) del objeto de interés atado al robot. También, supóngase que se conoce una cota máxima  $\gamma_M$  de  $\gamma$  (del modelo de imagen), es decir,

$$0 < \gamma < \gamma_M. \quad (107)$$

Por lo tanto, el problema de control consiste en diseñar un controlador para el

sistema recién descrito tal que determine las velocidades  $\mathbf{u}$  para mover el uniciclo, de manera que la velocidad del centroide en el plano de imagen  $\dot{\mathbf{y}}_g$  del objeto de interés siga el campo de velocidad deseado  $\mathbf{v}(\mathbf{y}_g)$ ; por ende, el objetivo de control es llevar asintóticamente a cero el error  $\mathbf{e}$ , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}. \quad (108)$$

## IV.2 Controlador

El controlador diseñado es un controlador dinámico, el cual es expresado mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= J_2(\psi)^{-1} \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y}_g)}{\partial \mathbf{y}_g} J_2(\psi) - J_1(\psi, \xi_2) \right] \boldsymbol{\xi} + K[\mathbf{v}(\mathbf{y}_g) - \boldsymbol{\eta}] \right] \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{x}} &= -A\boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{x} + A\mathbf{y}_g + \mathbf{v}(\mathbf{y}_g) \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (109)$$

donde  $K = \text{diag}\{k_1, k_2\} > 0$  y  $A = \text{diag}\{a_1, a_2\} > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} a_1 &> \gamma_M k_1 \\ a_2 &> \gamma_M k_2. \end{aligned} \quad (110)$$

Como puede observarse, el controlador (109) no depende de los parámetros de la cámara ni de la medición de velocidades, sin embargo, depende del parámetro 3D del objeto de interés  $\mathbf{x}_{gO}$  y de la medición de las variables en espacio de imagen  $\mathbf{y}_g$  y  $\psi$ .

El centroide del objeto en el plano de imagen  $\mathbf{y}_g$  se calcula directamente en el plano

de imagen por medio de los momentos de imagen del objeto de interés, ya que

$$\mathbf{y}_g = \frac{1}{y_{m_{00}}} \begin{bmatrix} y_{m_{10}} \\ y_{m_{01}} \end{bmatrix}.$$

El parámetro 3D correspondiente al centroide del objeto de interés  $\mathbf{x}_{gO}$  respecto a  $O_1 - O_2$  se consigue directamente del conocimiento previo (por suposición inicial) de los momentos del objeto hasta de orden dos respecto a  $O_1 - O_2$ , puesto que

$$\mathbf{x}_{gO} = \frac{1}{O_{m_{00}}} \begin{bmatrix} O_{m_{10}} \\ O_{m_{01}} \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, la medición de la orientación  $\psi$  del plano  $O_1 - O_2$  en el plano de imagen puede ser obtenida por odometría (algo muy similar sucede en los manipuladores, debido a que en ese caso  $\psi$  está en función de la medición de las posiciones articulares) o, aprovechando el hecho de que se suponen conocidos los momentos del objeto de interés hasta de orden dos respecto a  $O_1 - O_2$ , mediante (37); es decir, sólo habría que calcular la orientación del eje principal  ${}^y\beta$  en el plano de imagen y con  ${}^O\beta$  conocido, entonces se puede calcular  $\psi$  a través de (37).

Para la prueba del cumplimiento del objetivo de control, considérese la derivada respecto al tiempo de (118), expresada mediante

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y}_g)}{\partial \mathbf{y}_g} \dot{\mathbf{y}}_g - \ddot{\mathbf{y}}_g; \quad (111)$$

tal que sustituyéndole el controlador (109) y las ecuaciones (104) y (105), se encuentra que la dinámica del error  $\dot{\mathbf{e}}$  es gobernada por

$$\dot{\mathbf{e}} = -\gamma K[\mathbf{v}(\mathbf{y}_g) - \boldsymbol{\eta}]. \quad (112)$$

Ahora defina

$$\bar{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}_g - \boldsymbol{\eta},$$

con derivada respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}} = \gamma K[\mathbf{v}(\mathbf{y}_g) - \boldsymbol{\eta}] - A\bar{\mathbf{y}}, \quad (113)$$

puesto que de (111), sustituyendo (112):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_g &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y}_g)}{\partial \mathbf{y}_g} \dot{\mathbf{y}}_g - \dot{\mathbf{e}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y}_g)}{\partial \mathbf{y}_g} \dot{\mathbf{y}}_g + \gamma K[\mathbf{v}(\mathbf{y}_g) - \boldsymbol{\eta}] \end{aligned}$$

y del controlador (109):

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -A\boldsymbol{\eta} + A\dot{\mathbf{y}}_g + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y}_g)}{\partial \mathbf{y}_g} \dot{\mathbf{y}}_g.$$

Observe que la dinámica del sistema (112)-(113) tiene un punto de equilibrio en  $\mathbf{e} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  y  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ , utilizando (118) y debido a que tanto  $A$  como  $K$  son matrices definidas positivas por diseño.

Para la prueba de estabilidad asintótica de ese punto de equilibrio, propóngase la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}},$$

la cual es definida positiva en forma global y cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (112) y (113) resulta

$$\dot{V}(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{y}}) = -\gamma \mathbf{e}^T K \mathbf{e} - (-\gamma k_1 + a_1) \bar{y}_1^2 - (-\gamma k_2 + a_2) \bar{y}_2^2,$$

por lo que si  $a_1 > \gamma k_1$  y  $a_2 > \gamma k_2$  entonces  $\dot{V}(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{y}}) < 0$ , globalmente. Estas condiciones se cumplen, debido a la suposición inicial (107) y a las condiciones en el controlador

(110).

Consecuentemente, invocando el método directo de Lyapunov (ver por ejemplo Vidyasagar (1993)), tanto  $\mathbf{e}$  como  $\bar{\mathbf{y}}$  tienden a cero en forma exponencial. Con esto queda probado que el objetivo de control (108) es satisfecho.

### IV.3 Simulaciones

En esta sección se describen simulaciones para comprobar el desempeño del controlador (109). Los parámetros intrínsecos de la cámara fija se concentran en la Tabla VI y sus parámetros extrínsecos son:

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_W^C &= [0 \ 0 \ 2.5]^T \quad [\text{m}] \\ \phi &= 15\pi/180 \quad [\text{rad}].\end{aligned}$$

Se utilizó el objeto de interés 2 de la Figura 17 con momentos Cartesianos respecto al plano  $O_1 - O_2$  expresados en la Tabla V.

Las condiciones iniciales de la simulación corresponden a la configuración  $x_{W_1} = -0.35$  [m],  $x_{W_2} = 0.30$  [m] y  $\theta = -30\pi/180$  [rad]; y

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(0) &= -53000[1 \ 1]^T.\end{aligned}$$

El controlador se sintonizó con las siguientes ganancias:

$$\begin{aligned}A &= 500I_2 \\ K &= 0.02I_2.\end{aligned}$$

La Figura 30 muestra la referencia o campo de velocidad deseado. Obsérvese que

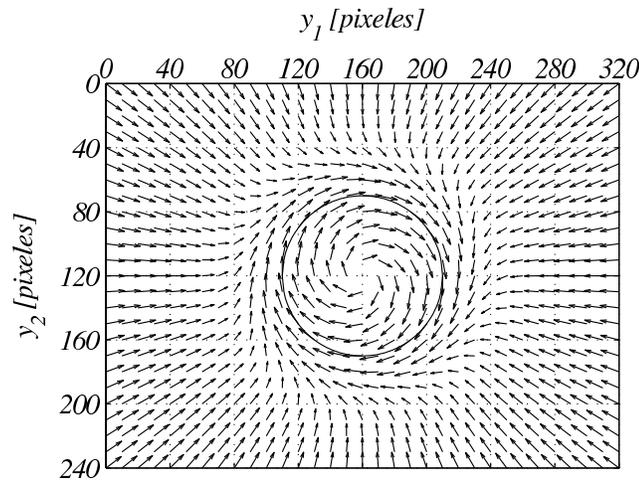


Figura 30: Campo de velocidad deseado  $\mathbf{v}(\mathbf{y}_g)$ .

el flujo, en el campo de velocidad deseado, tiende a una trayectoria circular con centro en  $\mathbf{y}_c = [y_{c1} \ y_{c2}]^T = [160 \ 120]^T$  [pixeles] y radio  $r_0 = 50$  [pixeles]. Dicho campo de velocidad es expresado mediante

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}_g) = -2c_7(\mathbf{y}_g) \begin{bmatrix} y_{g1} - y_{c1} \\ y_{g2} - y_{c2} \end{bmatrix} + 2c_8(\mathbf{y}_g) \begin{bmatrix} -[y_{g2} - y_{c2}] \\ y_{g1} - y_{c1} \end{bmatrix} \quad (114)$$

donde

$$\begin{aligned} c_7(\mathbf{y}_g) &= \frac{k_0 \tanh(\lambda_x f(\mathbf{y}_g))}{\|\nabla f(\mathbf{y}_g)\| + \epsilon} \\ c_8(\mathbf{y}_g) &= \frac{k_{v0} e^{-\alpha_x f^2(\mathbf{y}_g)}}{\|\nabla f(\mathbf{y}_g)\| + \delta} \\ f(\mathbf{y}_g) &= [y_{g1} - y_{c1}]^2 + [y_{g2} - y_{c2}]^2 - r_0^2, \end{aligned}$$

y  $k_0 = k_{v0} = 30$ ,  $\epsilon = \delta = 0.001$ ,  $\alpha_x = 5 \times 10^{-8}$ ,  $\lambda_x = 0.0001$ .

La Figura 31 presenta la traza del centroide del objeto de interés en el plano de imagen. Dicha traza se observa que, después de un transitorio, prácticamente se encuentra sobre la trayectoria circular especificada por el campo de velocidad deseado. Para comprobar el cumplimiento del objetivo de control, la Figura 32 muestra la evolución contra

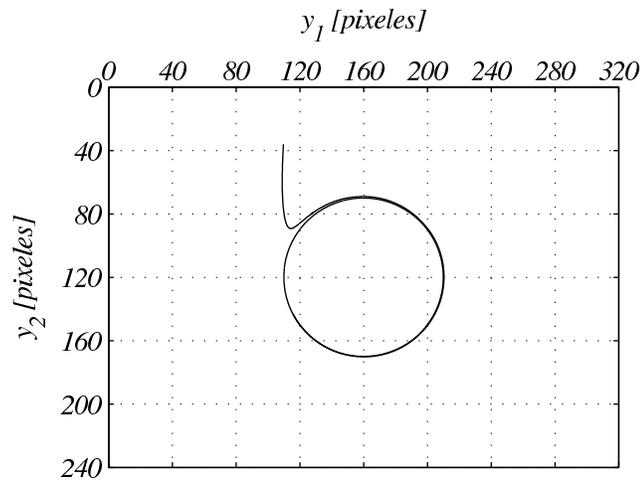


Figura 31: Traza del centroide  $\mathbf{y}_g$ .

el tiempo de la norma del error  $\|\mathbf{e}\|$ ; la cual es prácticamente cero después de 2 [s] de empezada la simulación.

Finalmente, para corroborar que el centroide del objeto en el plano de imagen  $\mathbf{y}_g$  siga el camino circular deseado, defínase el error de contorno  $e_c$  como la mínima distancia entre el centroide  $\mathbf{y}_g$  y el camino circular deseado en el plano de imagen, esto es

$$e_c = \left| \sqrt{[y_{c1} - y_{g1}]^2 + [y_{c2} - y_{g2}]^2} - r_0 \right|.$$

La Figura 33 reporta la evolución contra el tiempo de dicho error de contorno  $e_c$ , observándose que después de 12 [s] el camino trazado por el centroide del objeto de interés, para cuestiones prácticas, está sobre el camino circular deseado.

Cabe mencionar que el controlador (109) es relativamente sensible a los parámetros 3D del objeto de interés. La Figura 34 expone la traza del centroide  $\mathbf{y}_g$  cuando los parámetros 3D del objeto de interés se estiman al 50%, es decir, cuando se realiza la siguiente estimación:

$$\hat{\mathbf{x}}_{gO} = 0.5\mathbf{x}_{gO}$$

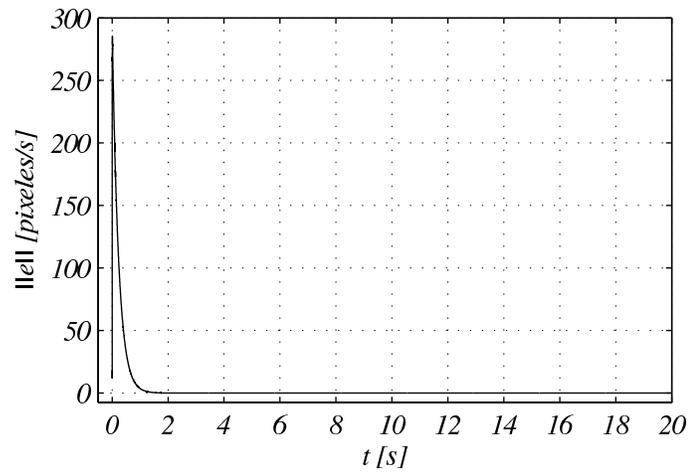


Figura 32: Evolución respecto al tiempo de  $\|e\|$ .

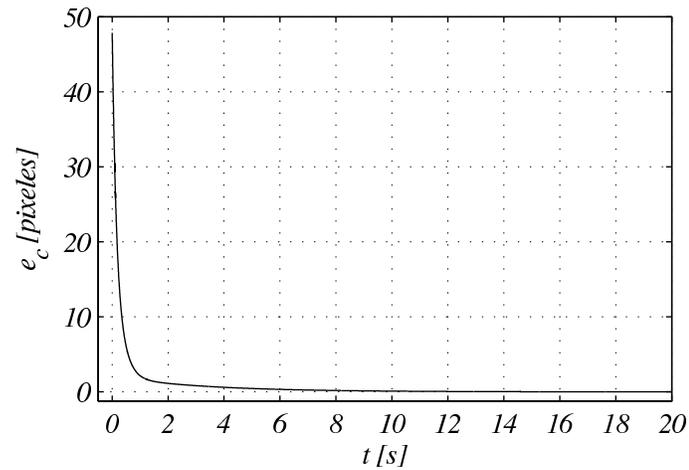


Figura 33: Evolución respecto al tiempo de  $e_c$ .

$${}^o\hat{\beta} = 0.5{}^o\beta.$$

Obsérvese en esta misma figura que la traza sigue siendo un camino circular, sin embargo, el radio del círculo trazado es mayor que los 50 píxeles especificados mediante el campo de velocidad deseado (círculo con trazo discontinuo). La norma del error del campo de velocidad en estado estacionario se encuentra alrededor de 3.3 [píxeles/s] y el error de contorno en estado estacionario es de 5.15 [píxeles].

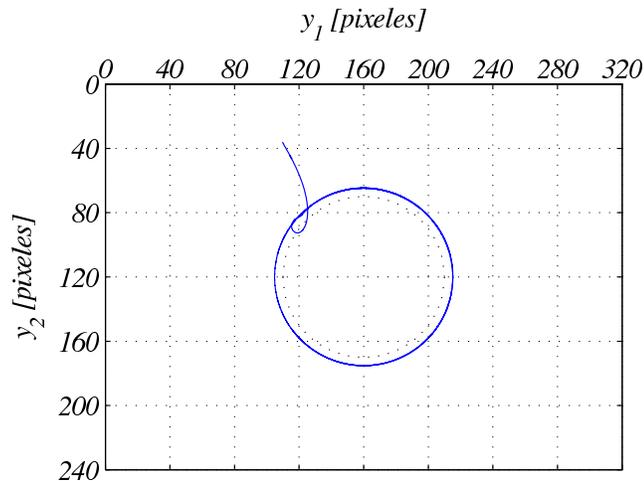


Figura 34: Traza del centroide  $\mathbf{y}_g$  estimando los parámetros 3D del objeto al 50%.

#### IV.4 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un controlador servo-visual dinámico para la navegación por campos de velocidad de un unicycle. La configuración abordada corresponde a la denominada cámara fija con eje óptico perpendicular al plano de movimiento del unicycle. El objetivo de control se establece directamente en el plano de imagen en función del centroide del objeto de interés, el cual es un objeto plano con forma irregular. El controlador no depende de la medición de velocidad de variable alguna y tampoco depende de los parámetros intrínsecos o extrínsecos de la cámara. Sin embargo, sí depende de parámetros 3D del objeto de interés, dichos parámetros son sus momentos Cartesianos hasta de orden dos referidos a su plano de definición.

Finalmente, las simulaciones muestran el desempeño favorable de este sistema robótico.

## V Conclusiones generales

En este capítulo se exponen las conclusiones generales a las que se llegó a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis y también se describen brevemente los problemas que quedaron abiertos para investigaciones futuras.

El presente trabajo de tesis ha contemplado, por una parte, el desarrollo de un sistema de visión para el procesamiento de imágenes en tiempo real; y por otra, el análisis y diseño de controladores servo-visuales tanto para manipuladores como para robots móviles tipo unicycle.

La primer parte de este trabajo de tesis se refleja en el sistema de visión de tiempo real denominado RTSVC, cuyas características más importantes son las siguientes:

- Operación bajo RTLinux, un sistema operativo de tiempo real con arquitectura abierta y código fuente libre.
- Capacidad de mostrar y almacenar tanto datos como imágenes.
- Editor integrado que facilita tanto la programación del algoritmo de extracción de información de la imagen como la programación de otras operaciones necesarias en un lenguaje similar a C.
- Capacidad de comunicación remota vía puerto serie.
- Compatibilidad con diversas tarjetas y cámaras.

Ahora bien, como resultado principal de este trabajo de tesis, se diseñan controladores servo-visuales utilizando características de imagen globales de objetos de interés relativamente complejos. La mayoría de los trabajos reportados en la literatura hacen uso de objetos de interés con geometría simple tales como puntos, líneas, cilindros y esferas; o utilizan objetos de interés más complejos pero procesan su proyección en el plano de imagen para finalmente reducirlos a objetos simples. En este sentido, este

proyecto de tesis, propone la utilización de objetos de interés planos con forma ya sea arbitraria o irregular; así mismo, se propone una selección de características de imagen globales en base a combinaciones de momentos de imagen de la proyección en el plano de imagen de dicho objeto de interés.

Se presenta la forma explícita de la variación respecto al tiempo de cualquier momento de imagen (regular o central) de un objeto (en el plano de imagen) producto de la proyección en el plano de imagen de un objeto de interés plano y de forma arbitraria; en la configuración donde el plano del objeto de interés es paralelo al plano de imagen.

En lo que respecta a manipuladores, se abordan básicamente con el objetivo de control especificado en el plano de imagen y denominado regulación. El modelo dinámico es considerado en el análisis y se diseñan controladores basados en la estructura del controlador por Jacobiano transpuesto tanto para la configuración cámara fija como para la configuración cámara en mano. La estabilidad del sistema robótico y su robustez ante incertidumbres en parámetros 3D del objeto de interés, de la cámara y del Jacobiano geométrico del manipulador; se analizan en el sentido de Lyapunov.

En tanto que para los unicyclos, se diseña un controlador servo-visual para la navegación de un unicyclo en configuración cámara fija. Dicho controlador se basa en la filosofía de campos de velocidad y no necesita del conocimiento previo de los parámetros de la cámara. Una característica importante de este controlador es que tampoco necesita de la medición de velocidad de variable alguna. Sin embargo, depende de parámetros 3D del objeto de interés, el cual debe ser plano y de forma irregular.

## **V.1 Problemas abiertos**

Como una consecuencia inmediata de este trabajo de tesis se tiene la posible extensión de los resultados descritos hacia una configuración más general entre el robot y la cámara, tanto en el desarrollo de la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen como en el diseño del controlador por Jacobiano transpuesto para manipu-

ladores y en el diseño del controlador para la navegación de unicyclos. En este trabajo de tesis se utilizó la configuración donde el eje óptico de la cámara es perpendicular al plano de movimiento del robot; esto con la intención de simplificar el problema y hacer énfasis en la utilización de objetos de interés complejos con una selección de características de imagen globales.

A continuación se presentan diferentes puntos que representan problemas abiertos para investigaciones futuras:

- Búsqueda de condiciones menos restrictivas que garanticen que el controlador servo-visual directo por Jacobiano transpuesto en un manipulador sea robusto ante variación de parámetros.
- Diseño de controladores servo-visuales directos en manipuladores que no necesiten el conocimiento del vector de pares gravitacionales.
- Diseño de controladores servo-visuales que resuelvan el problema de seguimiento tanto en unicyclos como en manipuladores.
- Diseño de controladores servo-visuales donde se utilice un sistema de visión estéreo o multicámara.
- Diseño de controladores servo-visuales que resuelvan el problema de regulación en unicyclos.
- Diseño de controladores servo-visuales para la formación de unicyclos.

## LITERATURA CITADA

- Ahluwalia, R. y L. Fogwell. 1986. "A modular approach to visual servoing". Proceedings of the *1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. San Francisco, CA. April. 943–950.
- Aicardi, M., G. Casalino, A. Bicchi y A. Balestrino. 1995. "Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques". *IEEE Robotics and Automation Magazine*. 2(1): 27–35.
- Allen, P. K., B. Yoshimi y A. Timcenko. 1991. "Real-time visual servoing". Proceedings of the *1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Sacramento, CA. April. 851–856.
- Andersson, R. L. 1987. "Real time expert system to control a robot ping-pong player". PhD Thesis, University of Pennsylvania. 339 pp.
- Arimoto, S. 1996. *Control Theory of Non-linear Mechanical Systems: A Passivity-based and Circuit-theoretic Approach*. Oxford University Press. New York. 280 pp.
- Behal, A., P. Setlur, W. Dixon y D. M. Dawson. 2005. "Adaptive position and orientation regulation for the camera in hand problem". *Journal of Robotic Systems*. 22(9): 457–473.
- Bell, G. y W. Wilson. 1996. "Coordinated controller design for position based robot visual servoing in Cartesian coordinates". Proceedings of the *1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Minneapolis, Minnesota. April. 1650–1655.
- Benhimane, S., E. Malis, P. Rives y J. R. Azinheira. 2005. "Vision-based control for car platooning using homography decomposition". Proceedings of the *2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Barcelona, Spain. April. 2161–2166.

- Benhimane, S. y E. Malis. 2006. “Homography-based 2D visual servoing”. Proceedings of the *2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Orlando, Florida. May. 2397–2402.
- Bien, Z., W. Jang y J. Park. 1993. “Characterization and use of feature Jacobian matrix for visual servoing”. K. Hashimoto, Ed. *Visual servoing*. Singapore: World Scientific, pp. 317–363.
- Bolton, D. W. 1968. “The multinomial theorem”. *The Mathematical Gazette*. 52(382): 336–342.
- Brockett, R. W. 1983. “Asymptotic stability and feedback stabilization”. R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, Eds. *Differential Geometric Control Theory*. Birkhäuser, Boston, MA, pp. 181–191.
- Bugarin, E. y R. Kelly. 2007. “Transformation of moments: Potential applications to visual servoing”. *4th Latin America IEEE Robotic Symposium / IX Congreso Mexicano de Robótica*. Monterrey, N. L., México. Noviembre.
- Bugarin, E. y R. Kelly. 2008. “RTSVC: Real-time system for visual control of robots”. *International Journal of Imaging Systems and Technology*. 18(4): 251–256.
- Bukowski, R., L. S. Haynes, Z. Geng, N. Coleman, A. Santucci, K. Lam, A. Paz, R. May y M. DeVito. 1991. “Robot hand-eye coordination rapid prototyping environment”. Proceedings of *ISIR*. October. 16.15–16.28.
- Campa, R. 2004. “Laboratorio de Robótica: Catálogo de Mecanismos”. Reporte interno (no publicado), CICESE. Ensenada, México. 21 pp.
- Campion, G., B. dAndrea Novel y G. Bastin. 1991. “Controllability and state feedback stabilization of nonholonomic wheeled mechanical systems”. Canudas de Wit, Ed. *Advanced Robotic Control*. Springer-Verlag, pp. 106–124.

- Canudas de Wit, C. y O. J. Sørndalen. 1992. “Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 37(11): 1791–1797.
- Canudas de Wit, C., B. Siciliano y G. Bastin (Eds.). 1996. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag. London, U. K. 392 pp.
- Carelli, R., J. Santos-Victor, F. Roberti y S. Tosetti. 2006. “Direct visual tracking control of remote cellular robots”. *Robotics and Autonomous Systems*. 54: 805–814.
- Castaño, A. y S. A. Hutchinson. 1994. “Visual compliance: Task-directed visual servo control”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*. 10(3): 334–342.
- Chaumette, F. 2002. “A first step toward visual servoing using image moments”. Proceedings of the *2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Lausanne, Switzerland. May. 378–383.
- Chaumette, F. 2004. “Image moments: A general and useful set of features for visual servoing”. *IEEE Transactions on Robotics*. 20(4): 713–723.
- Cheah, C. C., C. Liu y J. J. E. Slotine. 2007. “Adaptive vision based tracking control of robots with uncertainty in depth information”. Proceedings of the *2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy. April. 2817–2822.
- Chen, J., A. Behal, D. Dawson y Y. Fang. 2003a. “2.5D visual servoing with a fixed camera”. Proceedings of the *2003 IEEE American Control Conference*. Denver, CO. June. 3442–3447.
- Chen, J., A. Behal, D. N. Dawson y W. E. Dixon. 2003b. “Adaptive visual servoing in the presence of intrinsic calibration uncertainty”. Proceedings of the *42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii, USA. December. 5396–5401.

- Chen, J., W. Dixon, D. Dawson y M. McIntyre. 2006a. “Homography-based visual servo tracking control of a wheeled mobile robot”. *IEEE Transactions on Robotics*. 22(2): 407–416.
- Chen, J., W. E. Dixon, D. M. Dawson y M. McIntyre. 2006b. “Homography-based visual servo tracking control of a wheeled mobile robot”. *IEEE Transactions on Robotics*. 22(2): 407–416.
- Chesi, G., E. Malis y R. Cipolla. 2000. “Automatic segmentation and matching of planar contours for visual servoing”. Proceedings of the *2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. San Francisco, CA, USA. April. 2753–2758.
- Clocksini, W. F., J. S. E. Bromley, P. G. Davey, A. R. Vidler y C. G. Morgan. 1985. “An implementation of model-based visual feedback for robot arc welding of thin sheet steel”. *International Journal of Robotics Research*. 4(1): 13–26.
- A. Crespo y A. Alonso. 2006. “Una panorámica de los sistemas de tiempo real”. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. 4(2): 8–18.
- Collewet, C. y F. Chaumette. 2000. “A contour approach for image-based control on objects with complex shape”. Proceedings of the *2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Takamatsu, Japan. November. 751–756.
- Conticelli, F., B. Allotta y P. K. Khosla. 1999. “Image-based visual servoing of non-holonomic mobile robots”. Proceedings of the *38th Conference on Decision and Control*. Phoenix, Arizona, USA. December. 3496–3501.
- Corke, P. I. y R. P. Paul. 1989. “Video-rate visual servoing for robots”. Technical Report MS-CIS-89-18. University of Pennsylvania. 13 pp.

- Corke, P. I. 1993. "Visual control of robot manipulators - A review". K. Hashimoto, Ed. *Visual servoing*. Singapore: World Scientific, pp. 1–31.
- Corke, P. I. 1997. *Visual control of robots: High-performance visual servoing*, John Wiley & Sons, Inc. New York, NY. 353 pp.
- Corke, P. I. y S. A. Hutchinson. 2001. "A new partitioned approach to image-based visual servo control". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 17(4): 507–515.
- Costescu, N., D. Dawson y M. Loffler. 1999. QMotor 2.0 - a real-time PC based control environment. *IEEE Control Systems Magazine*. 19(3):68–76.
- d'Andrea-Novel, B., G. Campion y G. Bastin. 1995. "Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization". *International Journal of Robotics Research*. 14(6): 543–559.
- Das, A. K., R. Fierro, V. Kumar, B. Southall, J. Spletzer y C. J. Taylor. 2001. "Real-time vision-based control of a nonholonomic mobile robot". Proceedings of the *2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seoul, Korea. May. 1714–1719.
- De Luca, A. y M. D. Di Benedetto. 1993. "Control of nonholonomic systems via dynamic compensation". *Kybernetika*. 29(6): 593–608.
- De Luca, A., G. Oriolo y C. Samson. 1998. "Feedback control of a nonholonomic car-like robot". J. P. Laumond, Ed. *Robot Motion Planning and Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. London, UK: Springer, pp. 171–253.
- Dixon, W., D. Dawson, E. Zergeroglu y A. Behal. 2001a. *Nonlinear Control of Wheeled Mobile Robots*. Springer. London, U. K. 195 pp.

- Dixon, W. E., D. M. Dawson, E. Zergeroglu y A. Behal. 2001b. “Adaptive tracking control of a wheeled mobile robot via an uncalibrated camera system”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics–Part B: Cybernetics*. 31(3): 341–352.
- Dunbabin, M., P. Corke y G. Buskey. 2004. “Low-cost vision-based AUV guidance system for reef navigation”. Proceedings of the *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. New Orleans, LA. May. 7–12.
- Espiiau, B., F. Chaumette y P. Rives. 1992. “A new approach to visual servoing in robotics”. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 8(3): 313–326.
- Fang, Y., A. Behal, W. E. Dixon y D. M. Dawson. 2002a. “Adaptive 2.5D visual servoing of kinematically redundant robot manipulators”. Proceedings of the *41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, NV. December. 2860–2865.
- Fang, Y., D. M. Dawson, W. E. Dixon y M. S. de Queiroz. 2002b. “2.5D visual servoing of wheeled mobile robots”. Proceedings of the *41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, NV. December. 2866–2871.
- Fang, Y., W. E. Dixon, D. M. Dawson y P. Chawda. 2005. “Homography-based visual servo regulation of mobile robots”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics–Part B: Cybernetics*. 35(5): 1041–1050.
- Feddema, J. y O. Mitchell. 1989. “Vision-guided servoing with feature-based trajectory generation”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*. 5(5): 691–700.
- Feddema, J. T., C. S. Lee y O. R. Mitchell. 1991. “Weighted selection of image features for resolved rate visual feedback control”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*. 7(1): 31–47.
- Forsyth, D. A. y J. Ponce. 2002. *Computer vision: A modern approach*. Prentice Hall. 949 pp.

- Gangloff, J., M. de Mathelin y G. Abba. 1999. "Visual servoing of a 6DOF manipulator for unknown 3D profile following". Proceedings of the *1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Detroit, Michigan. May. 3236–3242.
- Geschke, C. 1981. "A robot task using visual tracking". *Robotics Today*, pp. 39–43.
- Gilbert, A. L., M. K. Giles, G. M. Flachs, R. B. Rogers y H. U. Yee. 1980. "A real-time video tracking system". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2(1): 47–56.
- Giordano, P. R., A. De Luca y G. Oriolo. "3D structure identification from image moments". Proceedings of the *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Pasadena, CA, USA. May. 93–100.
- Gonzalez, R. C. y R. E. Woods. 1992. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Publishing Company. New York. 716 pp.
- Graham, R. L., D. E. Knuth y O. Patashnik. 1989. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company. New York. 625 pp.
- Hager, G. D. y S. Hutchinson. 1996. "Special section on vision-based control of robot manipulators". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 12(5): 651–670.
- Hager, G. D. 1997. "A modular system for robust positioning using feedback from stereo vision". *IEEE Transactions on Robotics y Automation*. 13(4): 582–595.
- Hager, G. D., D. J. Kriegman, A. S. Georghiadis y O. Ben-Shahar. 1998. "Toward domain-independent navigation: Dynamic vision and control". Proceedings of the *37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL. December. 3257–3262.
- Han, W.-G. y T.-Y. Kuc. 1998. "Robust object tracking of robot manipulator using low-cost vision system". Proceedings of the *1998 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. San Diego, CA. October. 3501–3506.

- Hashimoto, K. y N. Toshiro. 1997. "Visual servoing of nonholonomic cart". Proceedings of the *1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Albuquerque, NM. April. 1719–1724.
- Hespanha, J., Z. Dodds, G. D. Hager y A. S. Morse. 1998. "What can be done with an uncalibrated stereo system". Proceedings of the *1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Leuven, Belgium. May. 1366–1372.
- Hill, J. y W. T. Park. 1979. "Real time control of a robot with a mobile camera". *9th ISIR*. Washington, D. C. March. 233–246.
- Horn, B. K. P. 1986. *Robot Vision*. MIT Press. Cambridge, MA. 509 pp.
- Hosada, K. y M. Asada. 1994. "Versatile visual servoing without knowledge of true Jacobian". Proceedings of the *1994 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Munich, Germany. September. 186–191.
- Houshangi, N. 1990. "Control of a robotic manipulator to grasp a moving target using vision". Proceedings of the *1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Cincinnati, OH. May. 604–609.
- Hu, M. K. 1962. "Visual pattern recognition by moment invariants". *IRE Transactions on Information Theory*. 8(2): 179–187.
- Hutchinson, S., G. Hager y P. Corke. 1996. "A tutorial on visual servoing". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 12(5): 651–670.
- Jägersand, M., O. Fuentes y R. Nelson. 1997. "Experimental evaluation of uncalibrated visual servoing for precision manipulation". Proceedings of the *1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Albuquerque, NM. April. 2874–2880.

- Jarabek, M. y D. Capson. 1998. "Robot position servoing using visual gap measurements". Proceedings of the *1998 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*. St. Paul, MN. May. 26–30.
- Jung, D., J. Heinzmann y A. Zelinsky. 1998. "Range and pose estimation for visual servoing of a mobile robot. Proceedings of the *1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Leuven, Belgium. May. 1226–1231.
- Kalata, P. R. 1984. "The tracking index: A generalized parameter for  $\alpha - \beta$  and  $\alpha - \beta - \gamma$  target trackers". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 20(2): 174–182.
- Kelly, R. 1996. "Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 12(5): 759–766.
- Kelly, R., R. Carelli, O. Nasisi, B. Kuchen y F. Reyes. 2000. "Stable visual servoing of camera-in-hand robotic systems". *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 5(1): 39–48.
- Kelly, R. y F. Reyes. 2000. "On vision systems identification with application to fixed-camera robotics systems". *International Journal of Imaging Systems and Technology*. 11(3): 170–180.
- Kelly, R. y V. Santibáñez. 2003. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Prentice Hall. Madrid. 344 pp.
- Kelly, R., E. Bugarin y R. Campa. 2004a. "Application of velocity field control to visual navigation of mobile robots". *5th IFAC/EURON Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*. Lisbon. July.
- Kelly, R., J. Moreno y R. Campa. 2004b. "Visual servoing of planar robots via velocity fields". Proceedings of the *43rd Conference on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island, Bahamas. December. 4028–4033.

- Kelly, R., V. Sanchez, E. Bugarin y H. Rodriguez. 2005. "A fixed-camera controller for visual guidance of mobile robots via velocity fields". Proceedings of the *2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Barcelona, Spain. April. 3148–3153.
- Kelly, R., E. Bugarin, I. Cervantes y J. Alvarez-Ramirez. 2006a. "Monocular direct visual servoing for regulation of manipulators moving in the 3D Cartesian space". Proceedings of the *45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA. December. 1782–1787.
- Kelly, R., E. Bugarin y V. Sanchez. 2006b. "Image-based visual control of nonholonomic mobile robots via velocity fields: Case of partially calibrated inclined camera". Proceedings of the *45th Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA. December. 3071–3076.
- Kim, B. H., D. K. Roh, J. M. Lee, M. H. Lee, K. Son, M. C. Lee, J. W. Choi y S. H. Han. 2001. "Localization of a mobile robot using images of a moving target". Proceedings of the *2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seoul, Korea. May. 253–258.
- Komuro, T. y M. Ishikawa. 2007. "A moment-based 3D object tracking algorithm for high-speed vision". Proceedings of the *2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy. April. 58–63.
- Kragic, D., A. Miller y P. Allen. 2001. "Realtime tracking meets online grasp planning". Proceedings of the *2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seoul, Korea. May. 2460–2465.
- Kragic, D. y H. I. Christensen. "Survey on visual servoing for manipulation". Technical Report. ISRN KTH/NA/P02/01SE. Computational Vision and Active Perception Laboratory, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. 58 pp.

- López-Nicolás, G., C. Sagüés, J. J. Guerrero, D. Kragic y P. Jensfelt. 2006. “Non-holonomic epipolar visual servoing”. Proceedings of the *2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Orlando, Florida. May. 2378–2384.
- Li, P., F. Chaumette y O. Tahri. 2005. “A shape tracking algorithm for visual servoing”. Proceedings of the *2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Barcelona, Spain. April. 2847–2852.
- Lenz, R. K. y R. Y. Tsai. 1988. “Techniques for calibration of the scale factor and image center for high accuracy 3-D machine vision metrology”. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 10(5): 713–720.
- Lu, C. P., E. Mjolsness y G. D. Hager. 1996. “Online computation of exterior orientation with application to hand-eye calibration”. *Mathematical and Computer Modelling*. 24(5-6): 121–143.
- Ma, Y., J. Kosěćá y S. Sastry. 1997. “Vision guided navigation for a nonholonomic mobile robot”. Proceedings of the *36th Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA. December. 3069–3074.
- Malis, E., F. Chaumette y S. Boudet. 1999. “2-1/2-D visual servoing”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*. 15(2): 238–250.
- Malis, E. 2004. “Visual servoing invariant to changes in camera-intrinsic parameters”. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 20(1): 143–147.
- Mariottini, G. L., D. Prattichizzo y G. Oriolo. 2004. “Epipole-based visual servoing for nonholonomic mobile robots”. Proceedings of the *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. New Orleans, LA. May. 497–503.
- Martinet, P. y J. Gallice. 1999. “Position based visual servoing using a nonlinear approach”. Proceedings of the *1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Kyongju, Korea. October. 17–21.

- Maruyama, A. y M. Fujita. 1997. “Robust visual servo control for planar manipulators with the eye-in-hand configurations”. Proceedings of the *36th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA. December. 2551–2552.
- Mehta, S. S., G. Hu, N. R. Gans y W. E. Dixon. 2006. “Adaptive vision-based collaborative tracking control of an UGV via a moving airborne camera: A daisy chaining approach”. Proceedings of the *45th Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA. December. 3867–3872.
- Mejías, L., J. F. Correa e I. Mondragón. 2007. “COLIBRI: A vision-Guided UAV for Surveillance and Visual Inspection”. Proceedings of the *2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy. April. 2760–2761.
- Mezouar, Y. y F. Chaumette. 2000. “Path planning in image space for robust visual servoing”. Proceedings of the *2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. San Francisco, CA. April. 2759–2764.
- Miyazaki, F. y Y. Masutani. 1990. “Robustness of sensory feedback control based on imperfect Jacobian”. H. Miura and S. Arimoto, Eds. *Robotics Research: The Fifth International Symposium*. Cambridge, MA: MIT Press, pp. 201–208.
- Morin, P. y C. Samson. 1996. “Time-varying exponential stabilization of chained systems based on a backstepping technique”. Proceedings of the *35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan. December. 1449–1454.
- Nakabo, Y. y M. Ishikawa. 1998. “Visual impedance using 1ms visual feedback system”. Proceedings of the *1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Leuven, Belgium. May. 2333–2338.
- Nakabo, Y., I. Ishii and M. Ishikawa. 2002. “3D tracking using two high-speed vision systems”. Proceedings of the *2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Lausanne, Switzerland. October. 360–365.

- Nakamura, Y., K. Kishi y H. Kawakami. 2001. “Heartbeat synchronization for robotic cardiac surgery”. Proceedings of the *2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seoul, Korea. May. 2014–2019.
- Nasisi, O. y R. Carelli. 2003. “Adaptive servo visual robot control”. *Robotics and Autonomous Systems*. 43: 51–78.
- Nelson, B. y N. Papanikolopoulos. 1998. “Special issue of visual servoing”. *IEEE Robotics and Automation Magazine*. 5(4): 521–536.
- Okhotsimsky, D., A. Platonov, I. Belousov, A. Boguslavsky, G. Borovin, S. Yemeljyanov, M. Komarov, V. Sazonov y S. Sokolov. 1997. “Vision system for automatic capturing a moving object by the robot manipulator”. Proceedings of the *1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Grenoble, France. September. 1073–1079.
- Papanikolopoulos, N. P., B. J. Nelson y P. K. Khosla. 1995. “Six degree-of-freedom hand/eye visual tracking with uncertain parameters”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*. 11(5): 725–732.
- Piepmeyer, J. A., G. V. McMurray y H. Lipkin. 2004. “Uncalibrated dynamic visual servoing”. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*. 20(1): 143–147.
- Pissard-Gibollet, R. y P. Rives. 1995. “Applying visual servoing techniques to control a mobile hand-eye system”. Proceedings of the *1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Nagoya, Japan. May. 166–171.
- Prokop, R. J. y A. P. Reeves. 1992. “A survey of moments based techniques for unoccluded object representation”. *Graphical Models and Image Processing*. 54(5): 438–460.
- Renaud, P., E. Cervera y P. Martinet. 2004. “Towards a reliable vision-based mobile

- robot formation control”. Proceedings of the *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Sendai, Japan. October. 3176–3181.
- Rives, P., R. Pissard-Gibollet y K. Kapellos. 1993. “Development of a reactive mobile robot using real time vision”. *Third International Symposium on Experimental Robotics*. Kyoto, Japan. October. 486–500.
- Rizzi, A. A. y D. E. Koditschek. 1991. “Preliminary experiments in spatial robot juggling”. *The 2nd. International Symposium on Experimental Robotics*. Toulouse, France. June. 282–298.
- Rosen, C. A., C. Agin, G. Andeen y J. Berger. 1976. “Machine intelligence research applied to industrial automation”. Sixth report. Technical Report. SRI International. PB-289827/8, NSF/RA-761655.
- Ruf, A., M. Tonko, R. Horaud y H.-H. Nagel. 1997. “Visual tracking of an end-effector by adaptive kinematic prediction”. Proceedings of the *1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Grenoble, France. September. 893–898.
- Samson, C. 1991. “Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart”. C. Canudas de Wit, Ed. *Advanced Robot Control*. Birkhäuser, Boston, MA, pp. 125–151.
- Sawano, S., J. Ikeda, N. Utsumi, H. Kiba, Y. Ohtani y A. Kikuchi. 1983. “A sealing robot system with visual seam tracking”. Proceedings of the *1983 International Conference on Advanced Robotics*. Tokyo, Japan. September. 351–358.
- Sciavicco, L. y B. Siciliano. 2000. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer-Verlag. London. 378 pp.
- Shen, X. J. y J. M. Pan. 2003. “Simple adaptive control for visual servoing”. Proceedings

- of the *Second International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Xi'an, China. November. 976–979.
- Shirai, Y. y H. Inoue. 1973. “Guiding a robot by visual feedback in assembling tasks”. *Pattern Recognition*. 5: 99–108.
- Soria, C. M., R. Carelli, R. Kelly y J. M. Ibarra. 2006. “Coordinated control of mobile robots based on artificial vision”. *International Journal of Computers, Communications, and Control*. 1(2):85–94.
- Sossa, J. H. 2006. *Rasgos Descriptores para el Reconocimiento de Objetos*. Instituto Politécnico Nacional. México. 245 pp.
- Spong, M. W. y M. Vidyasagar. 1989. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, New York, NY. 352 pp.
- Stieber, M., M. McKay y G. Vukovich. 1999. “Vision-based sensing and control for space robotics applications”. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 48(4): 807–812.
- Swokowski, E. W. 1988. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición. México. 1097 pp.
- Tahri, O. y F. Chaumette. 2005. “Point-based and region-based image moments for servoing of planar objects”. *IEEE Transactions on Robotics*. 21(6): 1116–1127.
- Takegaki, M. y S. Arimoto. 1981. “A new feedback method for dynamic control of manipulators”. *ASME, Transactions, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 103:119–125.
- Tatlicioglu, E., D. M. Dawson y B. Xian. 2007. “Adaptive visual servo regulation control for camera-in-hand configuration with a fixed-camera extension”. Proceedings of the *46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA. December. 2339–2344.

- Teague, M. R. 1980. "Image analysis via the general theory of moments". *Journal of the Optical Society of America*. 70(8): 920–930.
- Tsakiris, D. P., P. Rives y C. Samsom. 1997. "Applying visual servoing techniques to control nonholonomic mobile robots". Proceedings of the *1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Grenoble, France. September.
- Tu, H. y L. C. Fu. 1995. "Application of image moment flow of a RPP to 6 DOF visual tracking". Proceedings of the *34th Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA. December. 3757–3758.
- Vidyasagar, M. 1993. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall. Segunda Edición. New Jersey, USA. 498 pp.
- Wang, H. Y., S. Itani, T. Fukao y N. Adachi. 2001. "Image-based visual adaptive tracking control of nonholonomic mobile robots". Proceedings of the *2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Maui, HI, USA. November. 1–6.
- Wang, H. Y., H. Liu y D. Zhou. 2008. "Adaptive visual servoing using point and line features with an uncalibrated eye-in-hand camera". *IEEE Transactions on Robotics*. 24(4): 843–857.
- Wang, J. y H. Cho. 2008. "Micropeg and hole alignment using image moments based visual servoing method". *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 55(3): 1286–1294.
- Weiss, L. E., A. C. Sanderson y C. P. Neuman. 1987. "Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback". *IEEE Journal of Robotics and Automation*. RA-3(5): 404–417.
- Wells, G., C. Venaille y C. Torras. 1996. "Vision-based robot positioning using neural networks". *Image and Vision Computing*. 14(10): 715–732.

- Wetsmore, D. B. y W. J. Wilson. 1991. “Direct dynamic control of a robot using an end-point mounted camera and Kalman filter position estimation”. *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Sacramento, CA. April. 2376–2384.
- Wilhelm, R., *et al.* 2008. “The worst-case execution-time problem: Overview of methods and survey of tools”. *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*. 7(3): 36.1–36.53.
- Wilson, W., C. W. Hulls y G. Bell. 1996. “Relative end-effector control using Cartesian position based visual servoing”. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 12(5): 684–696.
- Zergeroglu, E., D. Dawson, M. de Queiroz y A. Behal. 1999. “Vision-based non-linear tracking controllers with uncertain robot-camera parameters”. *Proceedings of the 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Atlanta, GA. September. 854–859.

# APÉNDICES

## A Sistema de visión: RTSVC

El presente apéndice describe un sistema computacional para el procesamiento de imágenes en tiempo real bajo RTLinux. A diferencia de la arquitectura tradicional multiprocesador, este sistema computacional aprovecha el reciente desarrollo tecnológico y es diseñado para trabajar sobre una PC con un solo procesador en tiempo real. Su ambiente de programación es muy similar al lenguaje de programación C y ofrece una interfaz gráfica de usuario amigable. La utilidad del sistema se ilustra mediante su aplicación experimental en la navegación de un robot móvil con cámara fija de alta velocidad. Estos experimentos fueron realizados procesando la imagen y ejecutando el controlador dentro de un mismo ciclo a una frecuencia de 100 [Hz].

El sistema de visión aquí presentado tiene el objetivo de trabajar en tiempo real a altas velocidades. Aprovechando los recientes avances tecnológicos, el sistema requiere de una computadora personal con un solo procesador (más una cámara y su tarjeta digitalizadora, por supuesto). Hoy en día, combinando la alta capacidad y velocidad de procesamiento de los procesadores actuales con las ventajas que ofrece un sistema operativo de tiempo real se puede competir con los sistemas que utilizan arquitecturas basadas en multiprocesadores (Costescu *et al.*, 1999).

Se ha seleccionado Linux y RTLinux como sistema operativo de tiempo real debido a que son de arquitectura abierta y código fuente libre. Linux es un sistema operativo que tuvo sus inicios en 1991 y actualmente ha tenido un crecimiento tal que puede ser instalado en una amplia variedad de arquitecturas, incluyendo computadoras Alpha de Compaq, SPARC de Sun, PowerPC de Motorola, Apple Macintosh e IBM. Existen muchos grupos de programadores alrededor del mundo que están haciendo modificaciones al núcleo de Linux para hacerlo de tiempo real, ejemplos son ART-Linux, KURT, QLinux, RTLinux y RTAI. RTLinux es la variante original desarrollada para convertir a Linux en sistema operativo de tiempo real.

En este apéndice, primero se presentarán conceptos relacionados con sistemas de

tiempo real, luego se detallará el diseño del sistema de visión, después se describirá la utilidad del sistema mediante la experimentación de un control servo-visual aplicado a un robot móvil tipo unicycle y, finalmente, se reportarán ciertos puntos afines con la caracterización del sistema de visión.

## A.1 Sistemas de tiempo real

Un *sistema de tiempo real* es un sistema computacional donde la respuesta de la aplicación en presencia de estímulos externos debe realizarse dentro de un plazo de tiempo establecido (Crespo y Alonso, 2006). De esta definición es claro que no existe la necesidad de que el sistema tenga una respuesta rápida, no obstante, es suficiente que la respuesta sea predecible respecto al tiempo. Si las acciones del sistema deben ser producidas dentro de un plazo obligatorio, entonces se tendría un *sistema de tiempo real duro*. Ahora, si la pérdida puntual de cualquiera de los plazos puede producir que el sistema tenga una operación degradada durante un intervalo de tiempo que debe ser limitado y esto permite que el sistema recupere su operación normal de una manera rápida, entonces el sistema sería un *sistema de tiempo real blando*.

En un sistema computacional, el *sistema operativo* sirve como una interfaz entre la aplicación y los recursos del sistema. Si el sistema operativo cumple con determinados requerimientos para dar soporte a aplicaciones de tiempo real entonces dicho sistema es llamado *sistema operativo de tiempo real*. Básicamente, estos requerimientos son (Crespo y Alonso, 2006):

- Multiprogramación: Un sistema operativo de tiempo real debe ser capaz de dar soporte a varias tareas o procesos simultáneamente (o al menos que lo parezca), atendiendo sus plazos y prioridades.
- Predecibilidad de servicios y garantía de ejecución: La planeación de una aplicación de tiempo real debe poderse analizar y su ejecución debe garantizarse

bajo diferentes criterios, como por ejemplo su prioridad. El número de niveles de prioridad soportadas debe ser como mínimo 32.

- Gestión de tiempo: El sistema debe ser capaz de manejar temporizadores (preferentemente de alta resolución) tal que las aplicaciones especifiquen adecuadamente sus restricciones temporales.

También, un sistema operativo de tiempo real debe poseer una interfaz de programación (Application Programming Interface), mecanismos de comunicación y sincronización entre tareas o procesos y una gestión de memoria segura y predecible.

Un sistema operativo de tiempo real es una plataforma de ejecución de un sistema de tiempo real, consecuentemente, es responsabilidad del programador desarrollar su sistema de una manera adecuada para lograr las restricciones temporales impuestas.

## A.2 Descripción del sistema

El Sistema de Tiempo Real para el Control Visual (RTSVC por sus siglas en inglés) es un sistema computacional de tiempo real bajo RTLinux que asiste y facilita el desarrollo de experimentos con robots dotados de percepción visual. Sus principales características son:

- Operación bajo RTLinux, un sistema operativo de tiempo real con arquitectura abierta y código fuente libre.
- Capacidad de mostrar y almacenar tanto datos como imágenes.
- Editor integrado que facilita tanto la programación del algoritmo de extracción de información de la imagen como la programación de otras operaciones necesarias en un lenguaje similar a C.
- Capacidad de comunicación remota vía puerto serie.

- Compatibilidad con diversas tarjetas y cámaras.

El diseño de este sistema consta de dos módulos principales que a continuación se detallan.

### A.2.1 Módulo de edición

El módulo de edición es el proceso del sistema de visión que corre al iniciar la aplicación y es el que se encarga de reunir todos los datos necesarios para la realización de algún experimento, además de compilar y ejecutar el otro módulo que conforma el sistema, el módulo de ejecución. Su programación está basada en el código fuente libre de una aplicación que cuenta con un editor muy sofisticado llamado Anjuta.

Este módulo de edición hace uso pleno de la característica del sistema operativo RTLinux de ser multiusuario y multitarea. De tal manera que la edición se clasifica por usuario y por proyecto. Es decir, cada usuario puede guardar sus preferencias en cuanto a la interfaz gráfica y en cuanto a sus programas de experimentación.

Básicamente la toma de datos se clasifica en:

- Datos de dispositivo
- Datos de edición
- Datos de proyecto

Los cuales se describen a continuación.

#### Datos de dispositivo

El sistema es capaz de trabajar con conjuntos *cámara-tarjeta digitalizadora* de dos tipos:

(a) *Cámara-tarjeta digitalizadora* con manejador de dispositivo (driver) compatible con “Video4Linux”.

Video4Linux es una interfaz de programación (Application Program Interface) que provee rutinas genéricas para acceder algún dispositivo multimedia y realizar operaciones sobre él. De manera que permite acceder un dispositivo sin la necesidad de usar diferentes conjuntos de funciones para cada dispositivo diferente, lo cual simplifica la escritura tanto de aplicaciones como de manejadores de dispositivo.

Video4Linux no tiene soporte para tiempo real por lo que si es seleccionado entonces el experimento no será de tiempo real duro.

(b) *Cámara-tarjeta digitalizadora* con manejador de dispositivo (driver) para RTLinux.

Si el conjunto *cámara-tarjeta digitalizadora* cuenta con manejador de dispositivo para RTLinux entonces se puede garantizar que los experimentos sean en tiempo real duro. El módulo de edición tiene una utilería para la instalación de un manejador de dispositivo de este tipo.

### **Datos de edición**

Aquí se contemplan los datos tales como tipo de letra, tamaño de tabulador, selección de impresora, etc.; que facilitan la edición del proyecto.

### **Datos de proyecto**

Cada proyecto cuenta con un programa principal de nombre “nombre\_proyecto.rtsvc.c” el cual facilita la programación del experimento incluyendo el algoritmo de extracción de información de la imagen y el flujo en general. Su diagrama de flujo se muestra en la Figura 35.

Para facilitar la extracción de datos de la imagen se ha creado una estructura denominada *RtsvcWindow* la cual contiene datos asociados a una sub-ventana de proce-

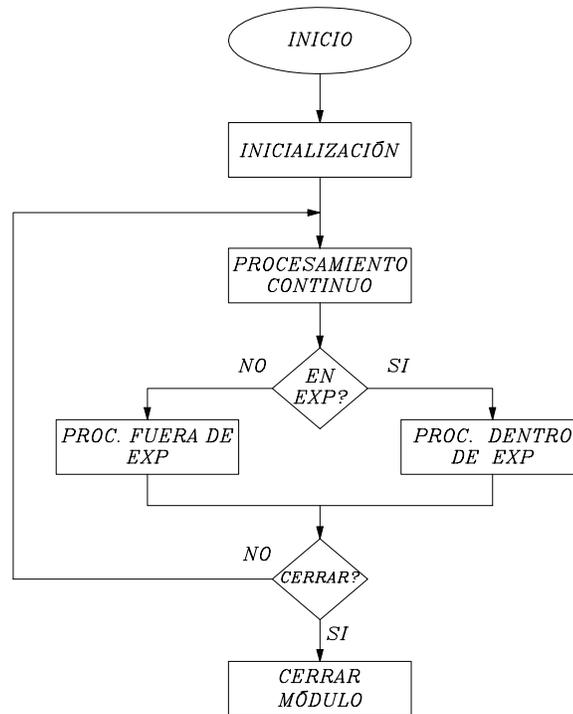


Figura 35: Diagrama de flujo del programa principal “nombre\_proyecto.rtsvc.c”

samiento como lo son su tamaño y su centro, entre otros datos.

Otros datos adicionales tomados como datos de proyecto están en una utilidad denominada “Manejador de variables” en donde se seleccionan las variables a graficar, desplegar y almacenar.

### A.2.2 Módulo de ejecución

Una vez editado por completo un proyecto particular se está en condiciones de compilar y correr el módulo de ejecución. La compilación de este módulo incluye una reorganización de sus fuentes para poder ser compilado satisfactoriamente. La Figura 36 muestra su diagrama de operación general y puede observarse que consta de seis hilos en espacio de usuario más dos hilos en espacio de núcleo. Si el experimento es de tiempo real duro entonces el proceso de tiempo de real será cargado, en caso contrario no lo será. Para la comunicación interprocesos se utiliza el mecanismo de memoria

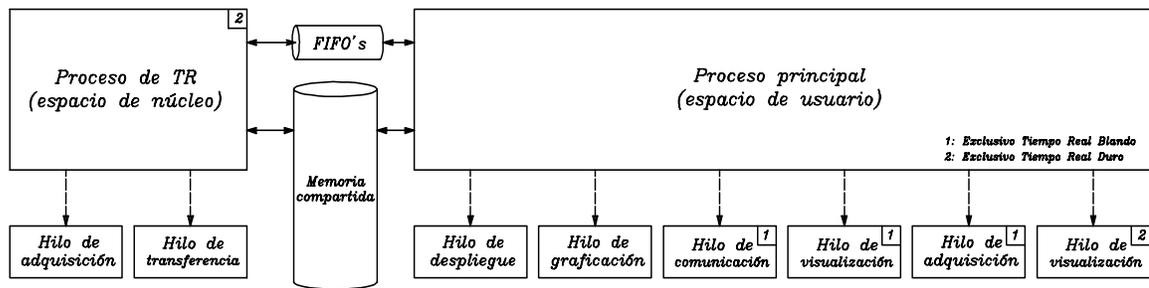


Figura 36: Diagrama de operación general del módulo de ejecución.

compartida y de tuberías (FIFO's). Así como para la sincronización entre ellos se hace el uso de semáforos.

La Figura 37 muestra la interfaz de usuario del módulo de ejecución. En el centro de esta interfaz se observa la sección principal de visualización de video. La imagen en esta figura presenta un rectángulo negro con dos puntos blancos dentro de él más 4 puntos negros. Los puntos blancos han servido como puntos característicos ya que calculándose sus centroides se han dejado sus trazas en la imagen. También pueden verse marcas estáticas establecidas por el usuario y que en este caso son un cuadrado, un círculo y una cruz. Decorando la sección de visualización de video se encuentra una barra de botones, una barra de despliegue de información útil tal como el conteo de ciclos perdidos y una barra de estados; alrededor de esta sección se encuentra el despliegue y las gráficas en línea de datos seleccionados previamente por el usuario. Note en esta misma figura que la interfaz de usuario del módulo de ejecución está superpuesta a la interfaz de usuario del módulo de edición.

### A.3 Aplicación del sistema al guiado de unicyclos

A continuación se verificará la utilidad del sistema a través de la aplicación de un control servo-visual para la navegación de unicyclos mediante campos de velocidad (Kelly *et al.*, 2006b). El sistema de visión está instalado en una PC con procesador Pentium IV a 2.4 GHz, con una cámara de video digital UNIQ (modelo: UF1000-CL)

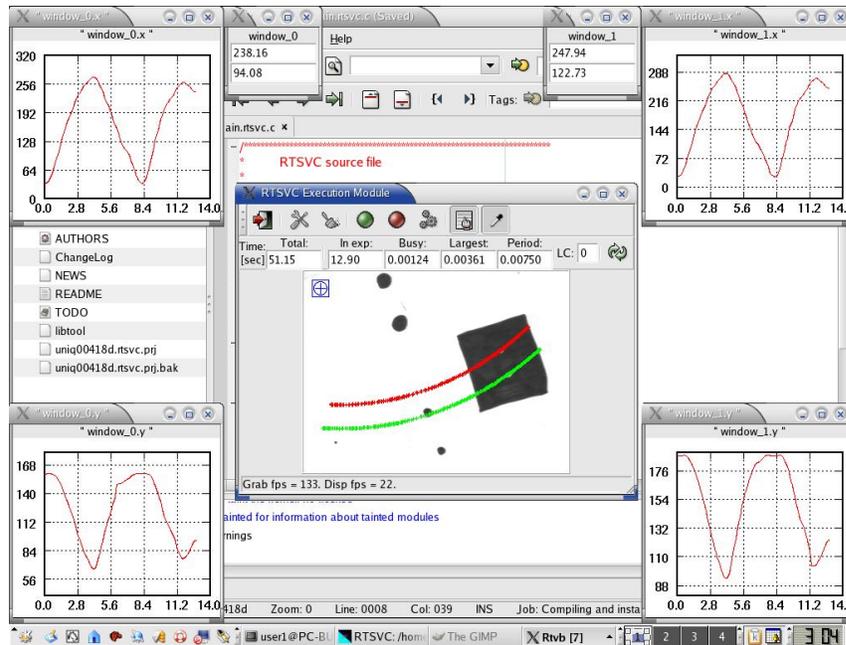


Figura 37: Interfaz de usuario del módulo de ejecución.

y con una tarjeta procesadora de video ARVOO (modelo: Leonardo PCI64-CL-DB-X100-C-256). El unicycle utilizado es el YSR-A de Yujin, dicho robot cuenta con dos ruedas actuadas independientemente y el envío de las consignas de velocidad para cada rueda se hace por medio de un transmisor de RF conectado al puerto serie.

La puesta del experimento consiste en colocar una cámara fija en algún lugar del espacio de trabajo con cierta inclinación tal que observe el plano de movimiento del unicycle. El controlador utilizado requiere de información que se procesa de las imágenes obtenidas a través de la cámara, como lo son la posición y orientación del robot móvil (en coordenadas de imagen). Para este fin, se localizan 2 discos blancos en la parte superior del unicycle.

La especificación del movimiento deseado se realiza a través de un campo de velocidad en coordenadas de imagen. En este caso se experimentará con un campo de velocidad cuyas líneas de flujo tienden a un círculo con centro en  $\mathbf{y}_c = [y_{c1} \ y_{c2}]^T = [160 \ 120]^T$  [píxeles] y con radio  $r_0 = 50$  [píxeles], como el especificado en (114) y

mostrado en la Figura 30.

### A.3.1 Modelado

El sistema robótico cuenta con dos sistemas coordenados, uno fijo en algún lugar del espacio de trabajo ( $\Sigma_W$ ) y otro atado a la cámara ( $\Sigma_C$ ).  $\mathbf{O}_W^C$  es el vector de posición del origen de  $\Sigma_C$  respecto de  $\Sigma_W$  y  $\phi_\gamma$  es el ángulo de inclinación de la cámara (para más detalles, ver (Kelly *et al.*, 2006b)).

El modelo del robot móvil considerado está dado por (Canudas de Wit *et al.*, 1996; Dixon *et al.*, 2001a)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{W_1} \\ x_{W_2} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (115)$$

donde  $\mathbf{x}_W = [x_{W_1} \ x_{W_2} \ 0]^T$  denota su posición y  $\theta$  su orientación, ambos con respecto a  $\Sigma_W$ . Las componentes de entrada  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$  son la velocidad lineal y angular del robot, respectivamente.

El modelo de imagen es obtenido a partir de transformaciones y proyección en perspectiva (Hutchinson *et al.*, 1996; Kelly, 1996); el cual está dado por

$$\mathbf{y} = \frac{\alpha\lambda}{x_{C_3} - \lambda} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (116)$$

donde  $\mathbf{x}_C = [x_{C_1} \ x_{C_2} \ x_{C_3}]^T$  representa la posición del robot respecto del marco de la cámara  $\Sigma_C$ ,  $\lambda$  es la longitud focal,  $\alpha$  es un factor de conversión de metros a píxeles y  $[u_0 \ v_0]^T$  es el centro de la imagen.

La orientación del robot en coordenadas de imagen  $\psi$  está dada por

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{\tan(\theta)[\lambda \cos(\phi_\gamma) + O_{W_3}^C]}{x_{C_1} \tan(\theta) \text{sen}(\phi_\gamma) + x_{C_3} - \lambda} \right). \quad (117)$$

### A.3.2 Sistema de control

Defínase el error de campo de velocidad como

$$\mathbf{e} = \mathbf{v}(\mathbf{y}) - \dot{\mathbf{y}} \quad (118)$$

donde  $\mathbf{v}(\mathbf{y})$  es el campo de velocidad deseado. De esta manera el objetivo de control queda especificado por  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$ .

Defínase  $\varphi(\mathbf{y})$  como el ángulo del campo de velocidad en el punto  $\mathbf{y}$ . Por lo tanto,  $\varphi(\mathbf{y})$  satisface

$$\tan(\varphi(\mathbf{y})) = -\frac{v_2(\mathbf{y})}{v_1(\mathbf{y})},$$

para  $v_1(\mathbf{y}) \neq 0$ , y puede ser obtenido mediante

$$\varphi(\mathbf{y}) = \text{atan2}(-v_2(\mathbf{y}), v_1(\mathbf{y})).$$

Esta función produce un ángulo entre  $-\pi$  y  $\pi$ . Para mantener compatibilidad, el ángulo  $\psi$  debe pertenecer también entre  $-\pi$  y  $\pi$ . Se denotará por  $\bar{\psi}$  tal ángulo, esto es,

$$\bar{\psi} = \text{mod}(\psi - \pi, 2\pi) - \pi \text{sign}(\psi - \pi).$$

Un controlador que garantiza el cumplimiento del objetivo de control es el siguiente (Kelly *et al.*, 2006b):

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\eta(\mathbf{y}, \psi)} \|\mathbf{v}(\mathbf{y})\| \\ u_2 &= \frac{1}{\zeta(\mathbf{y}, \psi)} \left[ k \sin(\varphi(\mathbf{y}) - \bar{\psi}) + \|\mathbf{v}(\mathbf{y})\| \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}^T \begin{bmatrix} \cos(\bar{\psi}) \\ -\sin(\bar{\psi}) \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (119)$$

donde  $k$  es una ganancia positiva y

$$\eta(\mathbf{y}, \psi) = \frac{[\text{sen}(\phi_\gamma)[y_2 - v_0] + \alpha\lambda \cos(\phi_\gamma)]^2}{[\lambda \cos(\phi_\gamma) + O_{W_3}^C] \sqrt{\xi(\mathbf{y}, \psi)}}$$

$$\zeta(\mathbf{y}, \psi) = -\frac{\xi(\mathbf{y}, \psi)}{\alpha\lambda[\text{sen}(\phi_\gamma)[y_2 - v_0] + \alpha\lambda \cos(\phi_\gamma)]},$$

con

$$\xi(\mathbf{y}, \psi) = \left[ \text{sen}(\phi_\gamma)[\cos(\psi)[y_2 - v_0] + \text{sen}(\psi)[y_1 - u_0]] + \alpha\lambda \cos(\psi) \cos(\phi_\gamma) \right]^2 + [\alpha\lambda \text{sen}(\psi)]^2.$$

### A.3.3 Experimentos

La ejecución del controlador (119) junto con el sistema de visión que aquí se describe, con el equipo mencionado, permite capturar y procesar las imágenes en tiempo real duro a una cadencia de 100 Hz.

Los parámetros de visión son:  $\lambda = 0.0075$  [m],  $\alpha = 72000$  [píxeles/m],  $u_0 = 160$  [píxeles] y  $v_0 = 120$  [píxeles]. La altura de la cámara respecto del marco del robot es  $O_{W_3}^C = 1.35$  [m] y su ángulo de orientación  $\phi_\gamma = -2.44$  [rad].

La Figura 38 presenta una secuencia del movimiento del robot móvil capturada por la cámara. En la Figura 38.(a) puede observarse la condición inicial del experimento junto con el camino circular deseado, en tanto que las Figuras 38.(b), (c) y (d) muestran instantáneas del movimiento del robot a los 9, 17 y 33 segundos del experimento junto con la traza, respectivamente. Es de notarse, según se ve en la traza, que el movimiento del robot es coordinado y no brusco tendiente a las líneas de flujo del campo de velocidad deseado. Estas imágenes son parte del video que fue capturado en línea durante el experimento, aunque el procesamiento de las imágenes fue en tiempo real duro el despliegue no lo fue así, es por esto que la traza en algunos segmentos presenta discontinuidades.

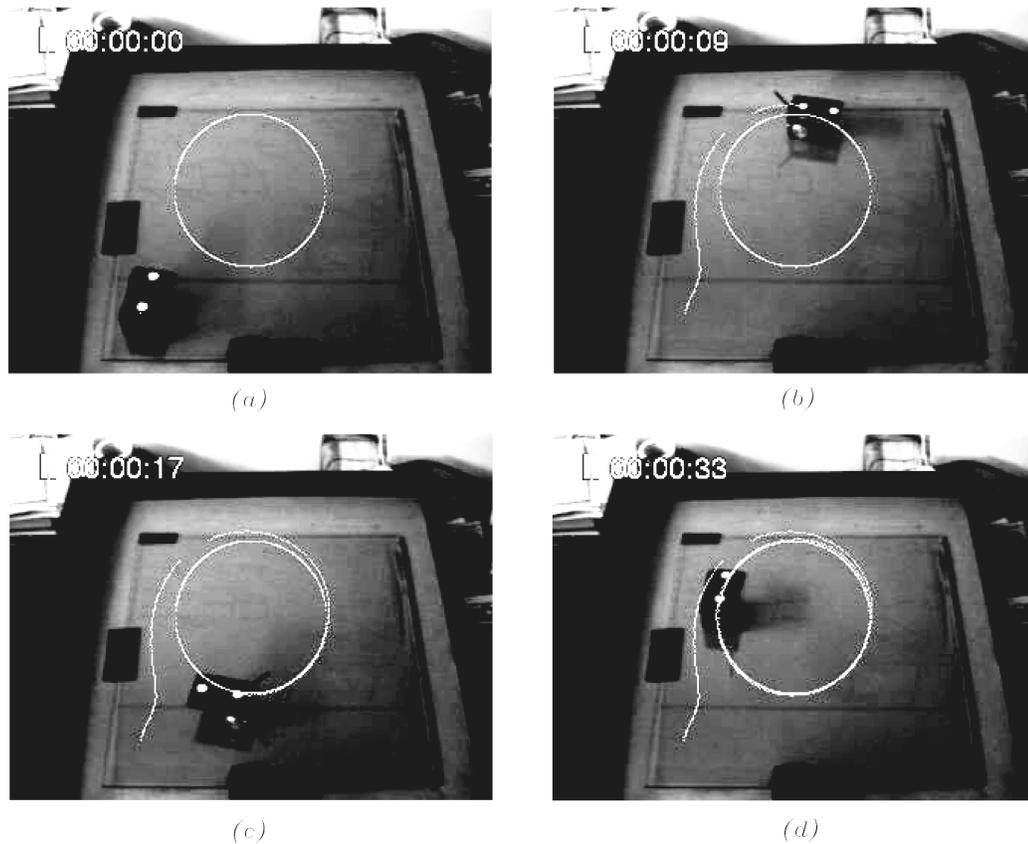


Figura 38: Secuencia del movimiento del robot móvil.

#### A.4 Sobre la caracterización del sistema de visión

Un sistema de tiempo real duro debe satisfacer de manera obligatoria restricciones de tiempo. En general, son necesarias cotas superiores de tiempos de ejecución para mostrar la satisfacción de estos requerimientos, desafortunadamente, obtener dichas cotas superiores es una operación complicada (Wilhelm *et al.*, 2008).

Una tarea típicamente presenta ciertas variaciones en sus tiempos de ejecución dependiendo de los datos de entrada y de los diferentes comportamientos del medio ambiente. El tiempo de ejecución más corto es llamado el *mejor caso de tiempo de ejecución* (BCET por sus siglas en inglés) y el tiempo más largo se le conoce como el *peor caso de tiempo de ejecución* (WCET por sus siglas en inglés). Por lo que una estimación del WCET para un sistema de tiempo real sería lo conveniente.

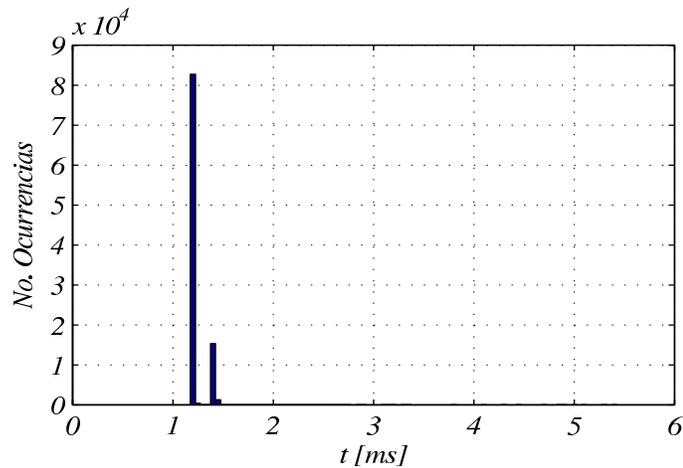


Figura 39: Histograma de los tiempos de ejecución del primer caso.

Básicamente, existen dos tipos de métodos para estimar el WCET de un sistema: los *estáticos* y los *basados en medición*. Los métodos estáticos se basan en un modelo del procesador y en el código de la aplicación mientras que los basados en medición toman mediciones directas de los tiempos y encuentran los tiempos de ejecución observados máximo y mínimo.

La caracterización del sistema de visión RTSVC será llevado a cabo mediante un método basado en medición, en donde la medición directa del tiempo se realizará utilizando el reloj interno de la computadora; ya que representa una buena alternativa en vista de que se pueden introducir retardos significativos adicionales si se utiliza un sistema de medición de tiempo externo.

Ahora bien, el sistema de visión está instalado en una PC con procesador Pentium IV a 2.4 GHz, con una cámara de video digital UNIQ (modelo: UF1000-CL) y con una tarjeta procesadora de video ARVOO (modelo: Leonardo PCI64-CL-DB-X100-C-256). De manera que se adquieren imágenes de 320x240 píxeles en tiempo real hacia la computadora para su posterior procesamiento.

Se reportarán 2 casos para la medición del WCET en el sistema de visión. El primero de ellos consta de un algoritmo común de extracción de centroide de una

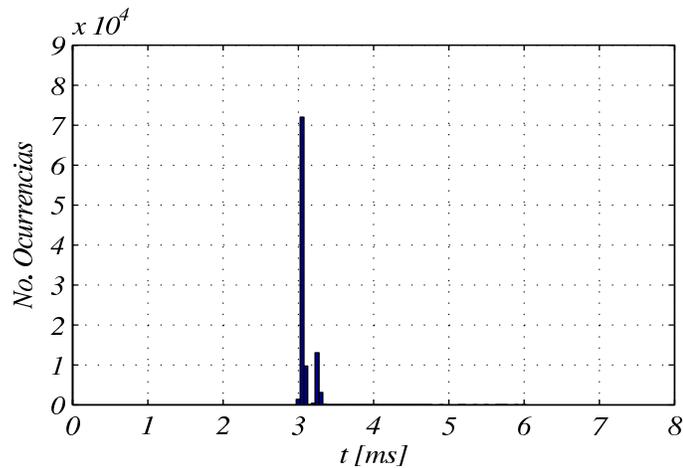


Figura 40: Histograma de los tiempos de ejecución del segundo caso.

ventana de procesamiento de 20x20 píxeles a una cadencia de adquisición de 100 [Hz] y de despliegue en pantalla de 17 [Hz]. Realizándose 20 experimentos con 5000 muestras en cada uno. La Figura 39 muestra el histograma de los tiempos de ejecución para este caso. El promedio de los tiempos de ejecución para este caso es de 1.2502 [ms] con desviación estándar de 0.0015 [ms]. El WCET observado es de 5.3846 [ms] y el BCET observado es de 1.2066 [ms]. También se tomaron mediciones de tiempo de ciclo, obteniéndose el mayor tiempo de ciclo de 10.0264 [ms] y el menor tiempo de ciclo de 9.7909 [ms].

El segundo caso corresponde a un algoritmo de extracción de contorno por LaPlace en una ventana de procesamiento de 50x50 píxeles a una cadencia también de [100] Hz en la adquisición y de 17 [Hz] en el despliegue. También se realizaron 20 experimentos con 5000 muestras en cada uno. La Figura 40 presenta el histograma de los tiempos de ejecución para el segundo caso. El promedio de los tiempos de ejecución para este caso es de 3.0958 [ms] con desviación estándar de 0.0040 [ms]. El WCET observado es de 7.0046 [ms] y el BCET observado es de 2.9903 [ms]. En las mediciones de tiempo de ciclo se obtuvo que el mayor tiempo de ciclo fue de 10.0318 [ms] y el menor tiempo de ciclo fue de 9.9698 [ms]. En la Figura 41 se muestra el histograma de los tiempos de ciclo para este segundo caso.

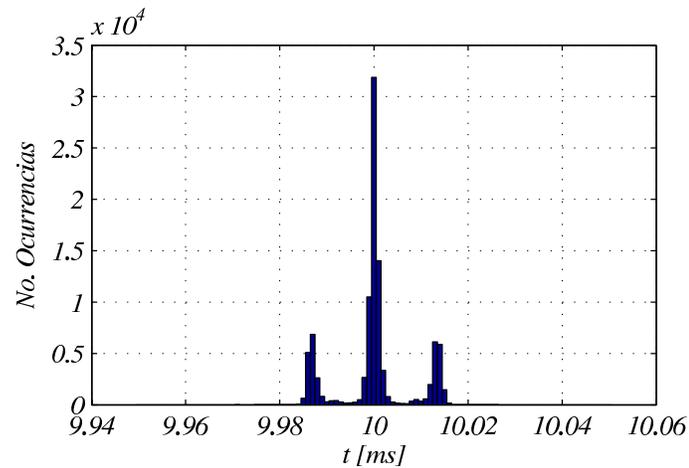


Figura 41: Histograma de los tiempos de ciclo para el segundo caso.

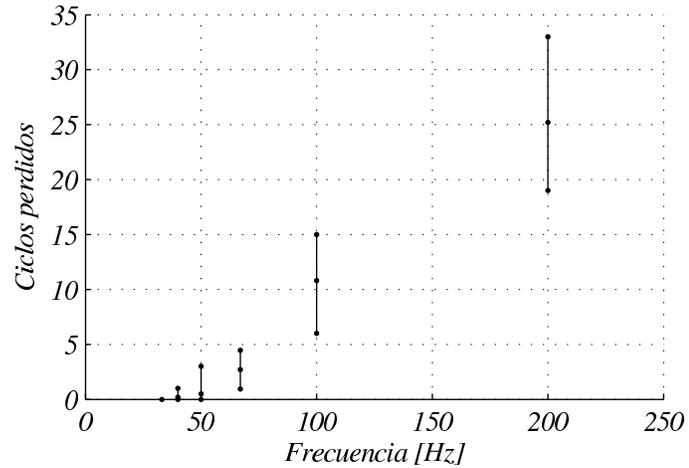


Figura 42: Gráfica de ciclos perdidos con el sistema sobrecargado.

En ambos casos, la computadora con el sistema de visión sólo estaba dedicada a la ejecución de los experimentos en cuestión.

Finalmente, se realizaron pruebas del sistema de visión sobrecargándolo con un procesamiento común de extracción de centroide pero sobre una ventana de procesamiento de 100x100 píxeles y con la computadora ocupándose a la vez con accesos a la red y a disco duro. La Figura 42 describe el conteo de ciclos perdidos en 6 series de experimentos con 10 corridas cada uno a 200, 100, 67, 50, 40 y 33 [Hz], respectivamente. Cada corrida fue de 2 minutos accedando a la red en el primer minuto y al disco duro

en el segundo minuto. Como puede observarse, a 33 [Hz] el acceso a red y a disco duro no tiene efecto sobre el sistema de visión. Sin embargo, por ejemplo, a 100 [Hz] se tuvo una pérdida en promedio de 10.8 ciclos con una desviación estándar de 3.58 ciclos. Una pérdida de ciclo significa que el tiempo de ejecución tardó más del 30% del especificado.

## B Teorema multinomial y ley distributiva para sumatorias múltiples

### B.1 Teorema multinomial

El teorema multinomial provee la manera de multiplicar expresiones de la forma

$$[x_1 + x_2 + \cdots + x_m]^n$$

donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos. A continuación se enuncia este teorema, para más detalles ver Bolton (1968) y Graham *et al.* (1989):

**Teorema 2.** Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos. Entonces

$$[x_1 + x_2 + \cdots + x_m]^n = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$$

donde  $k_1, k_2, \dots, k_m$  son enteros no negativos tal que  $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ .  $\triangle\triangle\triangle$

**Ejemplo 1.** Calcular  $[x + y + z]^3$ .

*Solución.*

$$\begin{aligned} [x + y + z]^3 &= \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{3!}{k_1! k_2! k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} \\ &= \frac{3!}{0!0!3!} x^0 y^0 z^3 + \frac{3!}{0!1!2!} x^0 y^1 z^2 + \frac{3!}{0!2!1!} x^0 y^2 z^1 + \frac{3!}{0!3!0!} x^0 y^3 z^0 + \\ &\quad \frac{3!}{1!0!2!} x^1 y^0 z^2 + \frac{3!}{1!1!1!} x^1 y^1 z^1 + \frac{3!}{1!2!0!} x^1 y^2 z^0 + \frac{3!}{2!0!1!} x^2 y^0 z^1 + \\ &\quad \frac{3!}{2!1!0!} x^2 y^1 z^0 + \frac{3!}{3!0!0!} x^3 y^0 z^0 \\ &= z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 + 3xz^2 + 6xyz + 3xy^2 + 3x^2z + 3x^2y + x^3. \end{aligned}$$

□□□

## B.2 Ley distributiva para sumatorias múltiples

La ley distributiva para sumatorias múltiples establece lo siguiente (Graham *et al.*, 1989):

$$\sum_{j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}} x_j y_k = \left[ \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j \right] \left[ \sum_{k \in \mathcal{K}} y_k \right]$$

donde  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{K}$  son conjuntos de índices válidos. De esta manera el producto de dos sumatorias simples se transforma en una sumatoria múltiple o viceversa.

**Ejemplo 2.** Considere el siguiente desarrollo:

$$\sum_{j=\{0,1\}, k=\{1,2\}} x_j y_k = x_0 y_1 + x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_1 y_2.$$

Ahora el producto de sumatorias simples:

$$\left[ \sum_{j=\{0,1\}} x_j \right] \left[ \sum_{k=\{1,2\}} y_k \right] = [x_0 + x_1] [y_1 + y_2] = x_0 y_1 + x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_1 y_2.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=\{0,1\}, k=\{1,2\}} x_j y_k = \left[ \sum_{j=\{0,1\}} x_j \right] \left[ \sum_{k=\{1,2\}} y_k \right]$$

□□□

## C Variación respecto al tiempo de los momentos de imagen

En este apéndice se desarrolla la forma analítica de la variación respecto al tiempo tanto de los momentos regulares de imagen como de los momentos centrales de imagen del sistema detallado en la Subsección II.2.5.

### C.1 Momentos regulares de imagen

La variación respecto al tiempo de los momentos regulares de imagen  ${}^y m_{ij}$  se puede obtener derivando (31) respecto al tiempo, de esta manera tenemos

$$\begin{aligned}
{}^y m_{ij} &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} k_1 [\gamma \cos(\psi)]^{k_1-1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi} + \\
&\quad \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} k_2 [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2-1} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} + \\
&\quad \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} k_3 [\gamma c_1 + u_0]^{k_3-1} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_1] + \\
&\quad \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad l_1 [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1-1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} + \\
&\quad \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} l_2 [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2-1} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi} + \\
&\quad \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} l_3 [\gamma c_2 + v_0]^{l_3-1} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_2] \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6
\end{aligned} \tag{120}$$

donde  $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2$  y  $l_3$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 + k_3 = i$  y  $l_1 + l_2 + l_3 = j$ ; y por simplicidad

$$\begin{aligned}
a_1 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} k_1 [\gamma \cos(\psi)]^{k_1-1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{\dot{\psi}} \\
a_2 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} k_2 [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2-1} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \cos(\psi)]^{\dot{\psi}} \\
a_3 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} k_3 [\gamma c_1 + u_0]^{k_3-1} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_1] \\
a_4 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad l_1 [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1-1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \cos(\psi)]^{\dot{\psi}} \\
a_5 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} l_2 [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2-1} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{\dot{\psi}} \\
a_6 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} l_3 [\gamma c_2 + v_0]^{l_3-1} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_2].
\end{aligned}$$

Primero obsérvese  $a_3$ . Si  $k'_3 = k_3 - 1$  e  $i' = i - 1$  entonces  $k_1 + k_2 + k'_3 = i'$  y  $a_3$  se expresa como

$$\begin{aligned}
a_3 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k'_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i' + 1]!}{k_1! k_2! [k'_3 + 1]!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [k'_3 + 1] [\gamma c_1 + u_0]^{k'_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_1] \\
&= i \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k'_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k'_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k'_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_1],
\end{aligned}$$

puesto que  $\frac{k'_3+1}{[k'_3+1]!} = \frac{1}{k'_3!}$  e  $[i' + 1]! = i i'!$ . De esta manera, de acuerdo a (31),  $a_3$  se

simplifica a

$$a_3 = i\gamma^y m_{i-1,j}\dot{c}_1. \quad (121)$$

Ahora obsérvese  $a_6$ . Si  $l'_3 = l_3 - 1$  e  $j' = j - 1$  entonces  $l_1 + l_2 + l'_3 = j'$  y  $a_6$  puede expresarse mediante

$$\begin{aligned} a_6 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l'_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{[j' + 1]!}{l_1! l_2! [l'_3 + 1]!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [l'_3 + 1] [\gamma c_2 + v_0]^{l'_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_2] \\ &= j \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l'_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j'!}{l_1! l_2! l'_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l'_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \dot{c}_2], \end{aligned}$$

ya que  $\frac{l'_3+1}{[l'_3+1]!} = \frac{1}{l'_3!}$  y  $[j' + 1]! = jj'!$ . Así, de acuerdo a (31),  $a_6$  finalmente queda

$$a_6 = j\gamma^y m_{i,j-1}\dot{c}_2. \quad (122)$$

De la misma manera, los términos restantes pueden expresarse de acuerdo al cambio de variables correspondiente, sin embargo, para estos casos los índices de los momentos  $O m_{ij}$  también sufren modificaciones. Considérense primero  $a_1$  y  $a_2$ , que después del cambio de variables quedan

$$\begin{aligned} a_1 &= [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi} i \gamma^2 \sum_{k'_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i-1]!}{k'_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\ &\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k'_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k'_1+1+l_1, k_2+l_2} \\ a_2 &= [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} i \gamma^2 \sum_{k_1, k'_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i-1]!}{k_1! k'_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\ &\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k'_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k'_2+1+l_2}. \end{aligned} \quad (123)$$

Ahora bien, el desarrollo de (31) para el momento de imagen  ${}^y m_{i-1,j+1}$  resulta

$${}^y m_{i-1,j+1} = \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i-1]! [j+1]!}{k_1! k_2! k_3! l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} \quad (124)$$

donde  $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2$  y  $l_3$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 + k_3 = i - 1$  y  $l_1 + l_2 + l_3 = j + 1$ .

De acuerdo a la Identidad (139) del Apéndice D, (124) puede expresarse como

$$\begin{aligned} {}^y m_{i-1,j+1} &= [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i-1]!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\ &\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} + \\ &\quad [-\gamma \cos(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i-1]!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\ &\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} + \\ &\quad [\gamma c_2 + v_0] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i-1]!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{j!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\ &\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2}, \end{aligned}$$

de tal suerte que las primeras dos dobles sumatorias guardan relación con  $a_1$  y  $a_2$  de (123), respectivamente; y sustituyendo (31) en la última doble sumatoria, tenemos

$$i\dot{\psi} {}^y m_{i-1,j+1} = a_1 + a_2 + i\dot{\psi} [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{i-1,j},$$

es decir,

$$a_1 + a_2 = i [{}^y m_{i-1,j+1} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{i-1,j}] \dot{\psi}. \quad (125)$$

Ahora considere a  $a_4$  y  $a_5$ , que después de los cambios de variables correspondientes

pueden expresarse mediante

$$\begin{aligned}
a_4 &= [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} j \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{[j-1]!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\
&\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1+1, k_2+l_2} \\
a_5 &= [\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi} j \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{[j-1]!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\
&\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2+1}. \tag{126}
\end{aligned}$$

En este caso, considere el desarrollo de (31) para  ${}^y m_{i+1, j-1}$  siguiente:

$$\begin{aligned}
{}^y m_{i+1, j-1} &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{[i+1]!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{[j-1]!}{l_1! l_2! l_3!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2} \tag{127}
\end{aligned}$$

donde  $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2$  y  $l_3$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 + k_3 = i + 1$  y  $l_1 + l_2 + l_3 = j - 1$ .

Nuevamente, aplicando la Identidad (139) del Apéndice D, (127) resulta

$$\begin{aligned}
{}^y m_{i+1, j-1} &= [\gamma \cos(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{[j-1]!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\
&\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+1+l_1, k_2+l_2} + \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{[j-1]!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\
&\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+1+l_2} + \\
&\quad [\gamma c_1 + u_0] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{i!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{[j-1]!}{l_1! l_2! l_3!} \cdot \\
&\quad [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} [\gamma c_1 + u_0]^{k_3} \cdot \\
&\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} [\gamma c_2 + v_0]^{l_3} O m_{k_1+l_1, k_2+l_2}
\end{aligned}$$

donde las primeras dos dobles sumatorias se relacionan con  $a_4$  y  $a_5$  de (126), respectivamente; y sustituyendo (31) en la última doble sumatoria, obtenemos

$$j\dot{\psi} {}^y m_{i+1,j-1} = -a_4 - a_5 + j\dot{\psi} [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{i,j-1},$$

esto es,

$$a_4 + a_5 = j [- {}^y m_{i+1,j-1} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{i,j-1}] \dot{\psi}. \quad (128)$$

Finalmente, sustituyendo (121), (122), (125) y (128) en (120) se encuentra la variación respecto al tiempo de cualquier momento regular de imagen  ${}^y \dot{m}_{ij}$ , expresada mediante

$$\begin{aligned} {}^y \dot{m}_{ij} = & i\gamma {}^y m_{i-1,j} \dot{c}_1 + j\gamma {}^y m_{i,j-1} \dot{c}_2 + i [{}^y m_{i-1,j+1} - [\gamma c_2 + v_0] {}^y m_{i-1,j}] \dot{\psi} + \\ & j [- {}^y m_{i+1,j-1} + [\gamma c_1 + u_0] {}^y m_{i,j-1}] \dot{\psi} \end{aligned} \quad (129)$$

## C.2 Momentos centrales de imagen

Para encontrar la forma analítica de la variación respecto al tiempo de los momentos centrales de imagen  ${}^y \dot{\mu}_{ij}$  puede derivarse respecto al tiempo (36), resultando

$$\begin{aligned} {}^y \dot{\mu}_{ij} = & \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} k_1 [\gamma \cos(\psi)]^{k_1-1} [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ & [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} {}^O \mu_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \text{sen}(\psi)] \dot{\psi} + \\ & \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} k_2 [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{k_2-1} \cdot \\ & [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} {}^O \mu_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} + \\ & \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ & l_1 [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{l_1-1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} {}^O \mu_{k_1+l_1, k_2+l_2} [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} + \\ & \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ & [-\gamma \text{sen}(\psi)]^{l_1} l_2 [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2-1} {}^O \mu_{k_1+l_1, k_2+l_2} [\gamma \text{sen}(\psi)] \dot{\psi} \end{aligned}$$

$$= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \quad (130)$$

donde  $k_1, k_2, l_1$  y  $l_2$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 = i$  y  $l_1 + l_2 = j$ ; y por simplicidad

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} k_1 [\gamma \cos(\psi)]^{k_1-1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} O_{\mu_{k_1+l_1, k_2+l_2}} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi} \\ b_2 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} k_2 [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2-1} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} O_{\mu_{k_1+l_1, k_2+l_2}} [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} \\ b_3 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ &\quad l_1 [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1-1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} O_{\mu_{k_1+l_1, k_2+l_2}} [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} \\ b_4 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} l_2 [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2-1} O_{\mu_{k_1+l_1, k_2+l_2}} [\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Primero obsérvense  $b_1$  y  $b_2$ . Si  $k'_1 = k_1 - 1$ ,  $k'_2 = k_2 - 1$  e  $i' = i - 1$  entonces para  $b_1$  tenemos  $k'_1 + k_2 = i'$  y para  $b_2$  resulta  $k_1 + k'_2 = i'$ , por lo tanto  $b_1$  y  $b_2$  se expresan como

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma^2 \sum_{k'_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i' + 1]!}{[k'_1 + 1]! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [k'_1 + 1] [\gamma \cos(\psi)]^{k'_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} O_{\mu_{k'_1+1+l_1, k_2+l_2}} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi} \\ &= [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi} i \gamma^2 \sum_{k'_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i - 1]!}{k'_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k'_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} O_{\mu_{k'_1+1+l_1, k_2+l_2}} \\ b_2 &= \gamma^2 \sum_{k_1, k'_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i' + 1]!}{k_1! [k'_2 + 1]!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [k'_2 + 1] [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k'_2} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} O_{\mu_{k_1+l_1, k'_2+1+l_2}} [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} \\ &= [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi} i \gamma^2 \sum_{k_1, k'_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i - 1]!}{k_1! k'_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k'_2} \cdot \\ &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} O_{\mu_{k_1+l_1, k'_2+1+l_2}}, \end{aligned} \quad (131)$$

puesto que para  $b_1$ :  $\frac{k'_1+1}{[k'_1+1]!} = \frac{1}{k'_1!}$  y para  $b_2$ :  $\frac{k'_2+1}{[k'_2+1]!} = \frac{1}{k'_2!}$ ; y en ambos casos  $[i'+1]! = ii'!$ .

Realizando un cambio de variables similar,  $b_3$  y  $b_4$  pueden expresarse mediante

$$\begin{aligned}
 b_3 &= [-\gamma \cos(\psi)] \dot{\psi}^j \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l'_1, l'_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{[j-1]!}{l'_1! l'_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\
 &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l'_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l'_2} \text{ }^O \mu_{k_1+l'_1+1, k_2+l'_2} \\
 b_4 &= [\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \dot{\psi}^j \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i!}{k_1! k_2!} \frac{[j-1]!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\
 &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} \text{ }^O \mu_{k_1+l_1, k_2+l_2+1}.
 \end{aligned} \tag{132}$$

Ahora bien, de acuerdo a (36) el desarrollo para  ${}^y \mu_{i-1, j+1}$  es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 {}^y \mu_{i-1, j+1} &= \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i-1]!}{k_1! k_2!} \frac{[j+1]!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\
 &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} \text{ }^O \mu_{k_1+l_1, k_2+l_2}
 \end{aligned}$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $l_1$  y  $l_2$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 = i - 1$  y  $l_1 + l_2 = j + 1$ .

Note que mediante la Identidad (138) del Apéndice D, este desarrollo queda

$$\begin{aligned}
 {}^y \mu_{i-1, j+1} &= [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i-1]!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\
 &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} \text{ }^O \mu_{k_1+l_1+1, k_2+l_2} + \\
 &\quad [-\gamma \cos(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i-1]!}{k_1! k_2!} \frac{j!}{l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\
 &\quad [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} \text{ }^O \mu_{k_1+l_1, k_2+l_2+1}.
 \end{aligned} \tag{133}$$

De esta manera relacionando (131) con (133) tenemos

$$b_1 + b_2 = i \text{ }^y \mu_{i-1, j+1} \dot{\psi}. \tag{134}$$

En una forma similar, se puede desarrollar  ${}^y\mu_{i+1,j-1}$ :

$${}^y\mu_{i+1,j-1} = \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{[i+1]! [j-1]!}{k_1! k_2! l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} {}^O\mu_{k_1+l_1, k_2+l_2}$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $l_1$  y  $l_2$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 = i + 1$  y  $l_1 + l_2 = j - 1$ ; y aplicarle la Identidad (138) del Apéndice D, resultando

$${}^y\mu_{i+1,j-1} = [\gamma \cos(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i! [j-1]!}{k_1! k_2! l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} {}^O\mu_{k_1+1+l_1, k_2+l_2} + \\ [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)] \gamma^2 \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{i! [j-1]!}{k_1! k_2! l_1! l_2!} [\gamma \cos(\psi)]^{k_1} [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{k_2} \cdot \\ [-\gamma \operatorname{sen}(\psi)]^{l_1} [-\gamma \cos(\psi)]^{l_2} {}^O\mu_{k_1+l_1, k_2+1+l_2}. \quad (135)$$

En este sentido, relacionando (132) con (135) obtenemos

$$b_3 + b_4 = -j {}^y\mu_{i+1,j-1} \dot{\psi}. \quad (136)$$

Finalmente, sustituyendo (134) y (136) en (130) se encuentra la variación respecto al tiempo de los momentos centrales de imagen  ${}^y\dot{\mu}_{ij}$ , expresada a través de

$${}^y\dot{\mu}_{ij} = [i {}^y\mu_{i-1,j+1} - j {}^y\mu_{i+1,j-1}] \dot{\psi}. \quad (137)$$

## D Identidades en sumatorias

En este apéndice se detallan dos identidades que se utilizan en la derivación de la variación respecto al tiempo de los momentos de imagen.

### D.1 Identidad 1

*Proposición 1.* Sea  $n$  un entero no negativo. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2} \frac{[n+1]!}{k_1! k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} m_{k_1, k_2} &= x_1 \sum_{l_1, l_2} \frac{n!}{l_1! l_2!} x_1^{l_1} x_2^{l_2} m_{l_1+1, l_2} + \\ & x_2 \sum_{l_1, l_2} \frac{n!}{l_1! l_2!} x_1^{l_1} x_2^{l_2} m_{l_1, l_2+1} \end{aligned} \quad (138)$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $l_1$  y  $l_2$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 = n + 1$  y  $l_1 + l_2 = n$ .

*Prueba.* Note que la identidad también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2} \frac{[n+1]!}{k_1! k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} m_{k_1, k_2} &= \sum_{l_1, l_2} \frac{n!}{l_1! l_2!} x_1^{l_1+1} x_2^{l_2} m_{l_1+1, l_2} + \\ & \sum_{l_1, l_2} \frac{n!}{l_1! l_2!} x_1^{l_1} x_2^{l_2+1} m_{l_1, l_2+1} \\ &= d_1 + d_2 \end{aligned}$$

donde por simplicidad

$$\begin{aligned} d_1 &= \sum_{l_1, l_2} \frac{n!}{l_1! l_2!} x_1^{l_1+1} x_2^{l_2} m_{l_1+1, l_2} \\ d_2 &= \sum_{l_1, l_2} \frac{n!}{l_1! l_2!} x_1^{l_1} x_2^{l_2+1} m_{l_1, l_2+1}. \end{aligned}$$

De tal manera que para sumar términos semejantes entre  $d_1$  y  $d_2$ , tal que se puedan igualar con los correspondientes términos en el lado izquierdo de la igualdad, se requiere que en  $d_1$ :  $l_1 + 1 = k_1$  y  $l_2 = k_2$  y en  $d_2$ :  $l_1 = k_1$  y  $l_2 + 1 = k_2$ . Observe que en  $d_1$  el

índice  $k_1 \geq 1$  y en  $d_2$  el índice  $k_2 \geq 1$ . En este sentido, los coeficientes de la suma de  $d_1 + d_2$  son:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{[k_1 - 1]!k_2!} + \frac{n!}{k_1![k_2 - 1]!} &= \frac{n!k_1}{k_1!k_2!} + \frac{n!k_2}{k_1!k_2!} \\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!}[k_1 + k_2] \\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!}[n + 1] \\ &= \frac{[n + 1]!}{k_1!k_2!}, \end{aligned}$$

puesto que en  $d_1$ :  $[k_1 - 1]! = \frac{k_1!}{k_1}$ , en  $d_2$ :  $[k_2 - 1]! = \frac{k_2!}{k_2}$ ,  $k_1 + k_2 = n + 1$  y  $n![n + 1] = [n + 1]!$ . Es decir, los coeficientes de la suma  $d_1 + d_2$  son iguales a los coeficientes del lado izquierdo de la igualdad, y la proposición queda demostrada.  $\triangle\triangle\triangle$

## D.2 Identidad 2

*Proposición 2.* Sea  $n$  un entero no negativo. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{[n + 1]!}{k_1!k_2!k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} m_{k_1, k_2} &= x_1 \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} m_{l_1+1, l_2} + \\ &x_2 \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} m_{l_1, l_2+1} + \\ &x_3 \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} m_{l_1, l_2} \end{aligned} \quad (139)$$

donde  $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2$  y  $l_3$  son enteros no negativos tales que  $k_1 + k_2 + k_3 = n + 1$  y  $l_1 + l_2 + l_3 = n$ .

*Prueba.* La identidad también puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{[n + 1]!}{k_1!k_2!k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} m_{k_1, k_2} &= \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} x_1^{l_1+1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} m_{l_1+1, l_2} + \\ &\sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} x_1^{l_1} x_2^{l_2+1} x_3^{l_3} m_{l_1, l_2+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1! l_2! l_3!} x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3+1} m_{l_1, l_2} \\ &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

donde por simplicidad

$$\begin{aligned} e_1 &= \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1! l_2! l_3!} x_1^{l_1+1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} m_{l_1+1, l_2} + \\ e_2 &= \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1! l_2! l_3!} x_1^{l_1} x_2^{l_2+1} x_3^{l_3} m_{l_1, l_2+1} + \\ e_3 &= \sum_{l_1, l_2, l_3} \frac{n!}{l_1! l_2! l_3!} x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3+1} m_{l_1, l_2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, para sumar términos semejantes entre  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , tal que se puedan igualar con los correspondientes términos en el lado izquierdo de la igualdad; se requiere que en  $e_1$ :  $l_1 + 1 = k_1$ ,  $l_2 = k_2$  y  $l_3 = k_3$ ; en  $e_2$ :  $l_1 = k_1$ ,  $l_2 + 1 = k_2$  y  $l_3 = k_3$ ; y en  $e_3$ :  $l_1 = k_1$ ,  $l_2 = k_2$  y  $l_3 + 1 = k_3$ . Observe que en  $e_1$  el índice  $k_1 \geq 1$ , en  $e_2$  el índice  $k_2 \geq 1$  y en  $e_3$  el índice  $k_3 \geq 1$ . De esta manera, los coeficientes de la suma de  $e_1 + e_2 + e_3$  son:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{[k_1 - 1]! k_2! k_3!} + \frac{n!}{k_1! [k_2 - 1]! k_3!} + \frac{n!}{k_1! k_2! [k_3 - 1]!} &= \frac{n! k_1}{k_1! k_2! k_3!} + \frac{n! k_2}{k_1! k_2! k_3!} + \frac{n! k_3}{k_1! k_2! k_3!} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} [k_1 + k_2 + k_3] \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} [n + 1] \\ &= \frac{[n + 1]!}{k_1! k_2! k_3!}, \end{aligned}$$

debido a que en  $e_1$ :  $[k_1 - 1]! = \frac{k_1!}{k_1}$ , en  $e_2$ :  $[k_2 - 1]! = \frac{k_2!}{k_2}$ , en  $e_3$ :  $[k_3 - 1]! = \frac{k_3!}{k_3}$ ,  $k_1 + k_2 + k_3 = n + 1$  y  $n! [n + 1] = [n + 1]!$ . Es decir, los coeficientes de la suma  $e_1 + e_2 + e_3$  son iguales a los coeficientes del lado izquierdo de la igualdad, y la proposición queda demostrada. △△△