

TESIS DEFENDIDA POR

Héctor Igor Pérez Aguilar

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Director del Comité

Dra. Elena Tchaikina Kolesnikova

Miembro del Comité

Dr. Serguei Stepanov

Miembro del Comité

Dr. Raúl Rangel Rojo

Miembro del Comité

Dr. Alexei A. Maradudin

Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon

*Coordinador del programa de
posgrado en Óptica*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

7 de julio de 2009

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ÓPTICA**

**PROPAGACIÓN Y ESPARCIMIENTO DE LUZ EN SISTEMAS CON
GEOMETRÍAS CONFINANTES**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

HÉCTOR IGOR PÉREZ AGUILAR

Ensenada, Baja California, México, julio de 2009

RESUMEN de la tesis de **HÉCTOR IGOR PÉREZ AGUILAR**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ÓPTICA con orientación en ÓPTICA FÍSICA. Ensenada, Baja California, julio de 2009.

PROPAGACIÓN Y ESPARCIMIENTO DE LUZ EN SISTEMAS CON GEOMETRÍAS CONFINANTES

Resumen aprobado por:

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Director de Tesis

Se presenta un estudio teórico y experimental de la propagación y esparcimiento de luz difusa a través de sistemas con geometrías confinantes, tales como rendijas y guías de onda con estrechamientos. De interés especial es la posibilidad de encontrar efectos de cuantización en la transmitancia de este tipo de sistemas. Los efectos de cuantización se revelan por la forma escalonada de las curvas de transmitancia en función de las dimensiones de la abertura de la rendija o de la sección estrecha de la guía, lo cual contrasta con la dependencia lineal que se podría esperar con base en argumentos de óptica geométrica.

En la parte experimental, exploramos un par de técnicas para adelgazar fibras ópticas multimodales mientras se monitoreaba la intensidad de la luz transmitida por ellas. En la primera se aplica calor para reblandecer una pequeña zona de la fibra mientras ésta se tensiona. En la segunda, el adelgazamiento se produce atacando químicamente la superficie de la fibra. Los resultados obtenidos muestran que la transmitancia en función del tiempo puede presentar fluctuaciones bruscas y regulares. Aunque estas fluctuaciones hacen plausible la presencia de efectos de cuantización de la transmitancia en los sistemas estudiados, los resultados no son concluyentes al respecto.

Para los estudios teóricos, desarrollamos un par de herramientas computacionales. La primera, conocida como el método de la ecuación integral, fue utilizada para estudiar la transmisión de luz difusa a través de rendijas metálicas y de conductor perfecto. La segunda, conocida como el método del propagador de la matriz R , se utilizó para el estudio de guías de onda dieléctricas con estrechamientos y rugosidad.

Los resultados para rendijas metálicas muestran la presencia de efectos de cuantización de la transmitancia para el caso de iluminación con polarización s , pero no para polarización p . Encontramos que la rugosidad superficial puede modificar de manera significativa las curvas de transmitancia, produciendo resultados que son cualitativamente similares a los encontrados con las fibras adelgazadas con ácido. La iluminación cónica, o fuera del plano, suaviza las curvas de transmitancia y enmascara los efectos buscados. Para guías de onda dieléctricas, encontramos que los efectos de cuantización se presentan con ambas polarizaciones. Para estrechamientos graduales, la forma de las curvas teóricas se acerca al comportamiento observado en los resultados experimentales para las fibras estiradas bajo calentamiento.

Palabras Clave: Esparcimiento de luz, propagación de ondas, guías de onda.

ABSTRACT of the thesis presented by **HÉCTOR IGOR PÉREZ AGUILAR**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of DOCTOR IN SCIENCES in OPTICS with orientation in PHYSICAL OPTICS. Ensenada, Baja California, July 2009.

LIGHT PROPAGATION AND SCATTERING IN CONFINED SYSTEMS

We present a theoretical and experimental study of the propagation and scattering of diffuse light through confined systems, such as slits and waveguides with constrictions. Of special interest is the possibility of finding quantization effects in the transmittance of this kind of systems. The quantization effects are revealed by the staircase-like form of the transmittance curves as functions of the dimensions of the slit opening or the narrow section of the waveguide, which contrasts with the linear dependency that one would expect on the basis of geometrical optics.

We explored a pair of experimental techniques to thin multimodal optical fibers while monitoring the intensity of the light transmitted by them. In the first one, a small zone of the fiber was heated and softened while the fiber was under tension. In the second one, the thinning was achieved by attacking chemically the surface of the fiber. The results show that, as a function of time, the transmittance can present abrupt and regular fluctuations. Although these fluctuations might indicate the presence of quantization effects in the studied systems, the results are not conclusive on the matter.

For the theoretical studies, we implemented a pair of computational tools. The first one, known as the integral equation method, was used to study the transmission of diffuse light through metallic and perfectly conducting slits. The second one, known as the R-matrix propagator method, was used to the study dielectric waveguides with narrowings and roughness.

The results for metallic slits show that the quantization effects of the transmittance are present for the case of illumination with s polarization, but not with p polarization. We find that surface roughness can modify the transmittance curves significantly, producing results that are qualitatively similar to the ones found with the fibers thinned with acid. The effect of using conical or out-of-plane illumination is to smooth out the transmittance curves and mask the effects sought. For dielectric waveguides, we found that the quantization effects appear with both polarizations. For gradual taperings, the shape of the theoretical curves approaches the behavior observed in the experimental results for fibers stretched under heating.

Keywords: Light scattering, wave propagation, waveguides.

*Al nacimiento de
una nueva luz*

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional que me brindó durante toda mi formación educativa para llegar a la meta.

A mi princesa por su apoyo y comprensión durante mi ausencia por motivo de los estudios de Doctorado.

Al Dr. Eugenio Méndez, quien me ayudó incondicionalmente en la realización de la presente tesis, además de su apoyo y comprensión cuando más lo necesitaba. Mi más sincero agradecimiento por dedicarme su valioso tiempo y paciencia.

A todos los miembros del comité de tesis por su colaboración, comentarios y críticas constructivas que me ayudaron para terminar este trabajo.

A la Dra. Ileana Márquez por su apoyo y ayuda que me brindó en el laboratorio, al Dr. Claudio Valencia en la parte interesante y divertida de la tesis (las ecuaciones que lo dicen todo), a Fabián Alonso por sus “chicanadas” para realizar los experimentos y a Javier Dávalos por la realización de algunas componentes ópticas.

A las chicas VIP, Noemi, Ileana y Patricia por hacer los momentos divertidos y alegres dentro y fuera del laboratorio.

A mis amigos y compañeros por compartir las parrandas y aventuras durante la trayectoria de estudio.

A los investigadores, estudiantes y personal del departamento de óptica que me brindaron su ayuda y enseñanza académica.

Al CONACyT y proyecto de investigación por su apoyo económico.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	xii
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1. Sinopsis de la tesis	10
II. MÉTODOS EXPERIMENTALES	12
II.1. Guías de onda dieléctricas	12
II.2. Fibras con estrechamientos	18
II.2.1. Adelgazamiento por calor y tensión	20
II.2.2. Adelgazamiento por ataque químico	25
III. EL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL	30
III.1. Consideraciones preliminares	30
III.1.1. Los campos electromagnéticos	32
III.2. Las funciones fuente	33
III.2.1. Discretización de las ecuaciones integrales	35
III.3. El Campo Incidente	41
III.4. La Potencia Incidente	43
III.5. El Campo Esparcido	46
III.6. La Potencia Esparcida	48
III.6.1. Los coeficientes de reflexión y transmisión	49
III.7. Verificación del Método	50
IV. RENDIJAS CON ILUMINACIÓN DIFUSA	52
IV.1. Rendijas ideales	52
IV.2. Rendijas ideales con iluminación difusa	54
IV.3. Sistemas más realistas	59

Contenido (continuación)

	Página
IV.3.1. Rendija metálica	59
IV.3.2. Efectos de rugosidad	60
IV.3.3. Incidencia fuera del plano	65
IV.4. Conclusiones parciales	72
V. GUÍAS DE ONDA CON SECCIÓN TRANSVERSAL VARIABLE	74
V.1. Planteamiento del problema	75
V.2. Ecuaciones de Maxwell	76
V.3. Propagador de la matriz R	83
V.4. Los campos incidente y reflejado	86
V.5. El campo transmitido	87
V.6. Las potencias incidente y transmitida	88
V.7. Verificación del método	89
VI. GUÍAS DE ONDA CON ESTRECHAMIENTOS Y RUGOSIDAD	92
VI.1. Guías de onda dieléctricas	92
VI.2. Guías de onda con estrechamiento abrupto	94
VI.3. Efectos de rugosidad	98
VI.4. Guías de onda con estrechamiento suave	102
VI.5. Conclusiones parciales	105
VII. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	107
REFERENCIAS	115
A. POTENCIAS INCIDENTE Y ESPARCIDA EN ESPARCIMIENTO CÓNICO	123

Lista de Figuras

Figura		Página
1	La conductancia de contactos puntuales como función del voltaje de la compuerta demuestra la cuantización de la conductancia en unidades $2e^2/h$. El ancho de la constricción crece con el aumento del voltaje aplicado a la compuerta (ver el recuadro). Tomado de la referencia van Wees <i>et al.</i> (1988).	5
2	Diagramas esquemáticos que muestran las secciones transversal y longitudinal de una fibra óptica con índice de refracción tipo escalón. El modo de propagación de la guía puede considerarse en términos de rayos que viajan a un ángulo θ , para el cual la condición de auto-consistencia se satisface. En la figura, la región más oscura representa el índice de refracción mayor.	13
3	Distribuciones del campo para modos de propagación TE.	18
4	Diagrama del proceso de estiramiento de una fibra óptica por el mecanismo de calentamiento y tensión.	21
5	Arreglo experimental para estirar una fibra óptica multimodal por el mecanismo de calentamiento y tensión. La flecha indica la dirección de movimiento de la platina con motor a pasos.	22
6	Intensidad de la transmitancia detectada como función del tiempo mientras la fibra está bajo tensión y calor. Los diámetros de la flama son de aproximadamente (a) 8 mm y (b) 3 mm sobre la fibra.	24
7	Arreglo experimental para adelgazar una fibra óptica multimodal por el mecanismo de ataque químico.	26
8	Intensidad de la transmitancia detectada como función del tiempo, mientras la fibra está bajo ataque químico. Las concentraciones de ácido fluorhídrico son de (a) 100% y (b) 10%. La fuente de iluminación es un láser de He-Ne con longitud de onda de 632.8 nm.	27
9	Intensidad de la transmitancia detectada como función del tiempo. Las concentraciones de ácido fluorhídrico son de (a) 100% y (b) 10%. La fuente de iluminación es un diodo láser con longitud de onda de 1550 nm.	29
10	Esquema del sistema estudiado. Los M cuerpos están caracterizados por constantes dieléctricas complejas $\epsilon_j(\omega)$	31

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
11	Esquema de una rendija de ancho l y de espesor d . La longitud del sistema es $L = 2b+l$. Sobre el plano $x_3 = d$, el semi ancho del módulo del haz gaussiano incidente es g . Los ángulos de incidencia θ_0 y esparcimiento θ_s (para reflexión y transmisión) están definidos como positivos en el sentido indicado en la figura.	42
12	Coefficiente de transmisión de una rendija perfectamente conductora para el caso de polarización s como función del ancho de la abertura y el ángulo de incidencia. El espesor de la rendija es $d = 3.8\lambda$ y el semi ancho del haz gaussiano es $g = 7.2\lambda$	54
13	Coefficiente de transmisión de una rendija perfectamente conductora para el caso de polarización p como función del ancho de la abertura y el ángulo de incidencia. El espesor de la rendija es $d = 3.8\lambda$ y el semi ancho del haz gaussiano es $g = 7.2\lambda$	55
14	Potencia transmitida a través de una rendija perfectamente conductora de espesor $d = 0.8\lambda$ (línea continua) y $d = 3.8\lambda$ (línea punteada) para un haz difuso con polarización s (a) y p (b).	56
15	Transmitancia de una rendija perfectamente conductora para polarización p excitando solamente los modos pares o impares. La longitud de la rendija es $d = 3.8\lambda$ y los demás parámetros son los mismos que se usan en la figura 14. La línea continua corresponde a la excitación de los modos simétricos y la línea punteada a los modos antisimétricos.	58
16	Transmitancia de una rendija perfectamente conductora (línea continua) y metálica (línea punteada) de espesor $d = 3.8\lambda$ para un haz difuso con polarización s (a) y p (b).	60
17	Contorno de una rendija gruesa con paredes aleatoriamente rugosas. . .	61
18	Transmitancia de la luz por rendijas perfectamente conductoras de espesor $d = 3.8\lambda$ para dos realizaciones con paredes aleatoriamente rugosas. Los parámetros que definen la rugosidad son $\delta = 0.2\lambda$ y $a = 0.4\lambda$. La iluminación es difusa y con polarización s.	62

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
19	Promedio de la transmitancia de una rendija perfectamente conductora con paredes aleatoriamente rugosas. Los espesores son $d = 0.8\lambda$ (línea continua) y $d = 3.8\lambda$ (línea punteada). Los parámetros que definen la rugosidad son $\delta = 0.2\lambda$ y $a = 0.4\lambda$. La iluminación es difusa y con polarización s.	64
20	Promedio de la potencia transmitida a través de una rendija rugosa perfectamente conductora de espesor $d = 3.8\lambda$. (a) Desviaciones estándar de las alturas $\delta = 0.07\lambda$ (línea continua) y $\delta = 0.2\lambda$ (línea punteada) con una longitud de correlación $a = 0.4\lambda$. (b) Longitudes de correlación $a = 0.4\lambda$ (línea continua) y $a = 1.2\lambda$ (línea punteada) con una desviación estándar de alturas $\delta = 0.2\lambda$	65
21	(a) Rendija con paredes rugosas aleatorias independientes. (b) Promedio de la transmitancia de una rendija perfectamente conductora con rugosidad aleatoria y espesor $d = 3.8\lambda$. Los parámetros que definen la rugosidad son $\delta = 0.2\lambda$ y $a = 0.4\lambda$. La iluminación es difusa y con polarización s.	66
22	Diagrama esquemático de la rendija bajo condiciones cónicas de iluminación.	68
23	Transmitancia de una rendija perfectamente conductora de espesor $d = 3.8\lambda$, iluminada con luz difusa no polarizada. La curva con la línea continua corresponde a la polarización σ , la línea punteada a polarización π y la línea con rayas y puntos a luz no polarizada.	72
24	Diagrama de la geometría considerada. Un haz gaussiano incide sobre la abertura de una guía de onda. Las regiones laterales tienen índice de refracción n_2 y definen el canal de la guía, de ancho l e índice de refracción n_1 . Las paredes del canal de la guía tienen rugosidad aleatoria en la región $L_r \geq x_3 \geq 0$. La región de cálculo en la dirección x_1 está limitada por la condición $ x_1 \leq L_{x_1}/2$, con capas absorbentes de PML en los límites del dominio.	76
25	Constantes de propagación de los modos guiados y de la cubierta para el ancho del núcleo de la guía $l = 2.0\lambda$ definido por dos medios con índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.0$. (a) El logaritmo natural de la parte real de los valores propios. (b) La parte imaginaria de los valores propios.	82

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
26	Valor absoluto de las funciones propias que corresponden a los modos de propagación (a)-(e) y de la cubierta (f) para el ancho del núcleo de la guía $l = 2.0\lambda$	83
27	Excitación de modos guiados en una guía de onda dieléctrica. El ancho del núcleo $l = 2.0\lambda$ está definido por dos medios con índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.0$. El haz gaussiano con polarización s incide a un ángulo $\theta_0 = 30^\circ$	84
28	Transmitancia de una rendija metálica de espesor $d = 2.4\lambda$ para un haz difuso con polarización (a) s y (b) p. La línea continua corresponde al método integral y la línea punteada al método de la matriz R.	90
29	Esquema de una guía onda dieléctrica multimodal con rugosidad.	93
30	Esquema de una guía dieléctrica con un estrechamiento abrupto.	95
31	Transmitancia a través de una guía de onda dieléctrica con estrechamiento abrupto de longitud $d = 2.4\lambda$ e índices de refracción del canal $n_1 = 1.45$ y la cubierta $n_2 = 1.30$ (línea continua), $n_2 = 1.36$ (línea punteada) y $n_2 = 1.40$ (línea con rayas y puntos). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.	96
32	Transmitancia a través de una guía de onda dieléctrica de índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.36$ con estrechamiento abrupto de longitudes $d = 0.01\lambda$ (línea continua), $d = 2.4\lambda$ (línea punteada) y $d = 50\lambda$ (línea con rayas y puntos). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.	97
33	Esquema de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento abrupto con paredes aleatoriamente rugosas.	99
34	Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con una sección de la constricción rugosa de longitud $L_r = 25\lambda$ y desviaciones estándar de alturas $\delta = 0.006$ (línea continua), $\delta = 0.058$ (línea punteada) y $\delta = 0.144$ (línea con rayas y puntos). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.	100

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
35	Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con paredes rugosas para $\delta = 0.144$. La constricción tiene longitud $d = 500\lambda$ y sección rugosa de longitud $L_r = 25\lambda$ (línea continua) y $L_r = 100\lambda$ (línea punteada). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.	101
36	Esquema de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento gradual.	102
37	Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento suave. La longitud central de estrechamiento $L_w = 5000\lambda$ y la longitud de transición de estrechamiento $L_0 = 1250\lambda$ con $N_c = 10$ (línea continua), 50 (línea punteada) y 100 (línea con rayas y puntos) capas. La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.	104
38	Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento adiabático de longitudes $L_0 = 50\lambda$ (línea continua), $L_0 = 250\lambda$ (línea punteada), $L_0 = 750\lambda$ (línea con rayas y puntos) y $L_0 = 2500\lambda$ (línea con puntos pequeños). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.	105
39	Intensidad de la transmitancia detectada en función del tiempo. (a) La fibra está bajo tensión y calor. (b) La fibra está bajo ataque químico.	108
40	(a) Contorno de una rendija perfectamente conductora con paredes aleatoriamente rugosas. (b) Transmitancia de la luz por rendijas perfectamente conductoras con paredes planas y rugosas.	110
41	Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con (b) una sección de la constricción rugosa y (d) con un estrechamiento gradual.	113

Lista de Tablas

Tabla	Página
I Transmisión normalizada para una rendija perfectamente conductora de ancho $l = \lambda/\pi$ para diferentes espesores.	51

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

En los modelos más sencillos la luz que se propaga en un medio homogéneo, como el aire que nos rodea o un vidrio de ventana, lo hace de manera rectilínea y con una velocidad de propagación bien definida. Esta propagación en línea recta puede verse afectada si se introducen regiones con propiedades ópticas distintas a las del medio, produciéndose el fenómeno de *esparcimiento*. Cuando la perturbación producida por las inhomogeneidades es pequeña ocurre el esparcimiento sencillo. En este régimen la luz, a lo largo de su propagación, interactúa solamente una vez con un centro esparcidor. Las aproximaciones clásicas para tratar el problema funcionan en diferentes regímenes, que dependen del tamaño y la forma del centro esparcidor. Se utiliza el esparcimiento de Rayleigh cuando los centros esparcidores son mucho más pequeños que la longitud de onda (Rayleigh, 1871; van de Hulst, 1981; Bohren y Huffman, 1983) y la óptica geométrica cuando son mucho más grandes que ella. Para partículas esféricas de tamaño arbitrario, Gustav Mie (Mie, 1908; van de Hulst, 1981; Bohren y Huffman, 1983) encontró una solución rigurosa.

Por otro lado, en el régimen de esparcimiento múltiple, la luz interactúa con muchos elementos del medio. Con luz monocromática el campo esparcido presenta fluctua-

ciones que se pueden caracterizar en términos de sus diferentes momentos estadísticos. Normalmente el campo promedio es cero, debido a que la fase sigue una distribución uniforme. Las variaciones de intensidad, llamadas “speckle” o “moteado”, se suavizan al utilizar luz policromática y es por eso que tradicionalmente se han utilizado teorías basadas en el transporte de energía (Chandrasekhar, 1960) para tratar el problema. En dichas teorías se desprecian los efectos de interferencia y se estudia solamente la propagación de la intensidad promedio. Una aproximación a la teoría del transporte que es muy utilizada es la llamada teoría de difusión (Morse y Feshbach, 1953; Ishimaru, 1978; John y Pang, 1996).

En la interacción de luz con medios desordenados podemos distinguir dos regímenes. En el primero, el medio contiene centros esparcidos “débiles” separados por distancias relativamente grandes, como es el caso de una atmósfera con polvo. En el segundo, el medio es ópticamente más denso y, como ejemplos, podemos mencionar la pintura blanca y los cristales fotónicos.

Hasta hace algunos años, se pensaba que los efectos de interferencia podían ser ignorados aún en medios ópticamente densos. Sin embargo, ahora se sabe que algunos procesos de esparcimiento múltiple sobreviven al ser promediados sobre un conjunto de realizaciones. Estos efectos se conocen como *efectos coherentes* o de *localización* (John, 1985; Sheng y Zhang, 1986; Condat y Kirkpatrick, 1987). En 1958, P.W. Anderson (Anderson, 1958) propuso que el desorden en ciertos sólidos cristalinos era el responsable de la transición de conductor a aislante que experimentaban dichos sólidos a bajas temperaturas. No obstante, fue sólo hasta mediados de los años 80 en que se inició la búsqueda de analogías ópticas con la localización de Anderson (John, 1984; Anderson, 1985).

El efecto de localización más conocido en óptica es el efecto de *retroesparcimiento*

reforzado. Este efecto se manifiesta como un pico en la dirección de retroesparcimiento en la distribución angular de luz esparcida por el medio (Kuga, 1984; Akkermans y Maynard, 1985; van Albada y Lagendijk, 1985; Wolf y Maret, 1985; Sheng, 1995; Wiersma *et al.*, 1997). El retroesparcimiento reforzado conocido también como *localización débil* es debido a efectos de interferencia constructiva en la dirección de retroesparcimiento; en esta dirección las ondas, que se propagan a lo largo de una trayectoria de esparcimiento múltiple en direcciones opuestas están siempre en fase y por lo tanto interfieren constructivamente. De manera cualitativa, se puede decir que la luz al tratar de propagarse por un medio aleatorio llega un momento que empieza a regresarse hacia la fuente. El fenómeno ha sido observado y estudiado en esparcimiento por partículas pequeñas (Kuga, 1984; Akkermans y Maynard, 1985; van Albada y Lagendijk, 1985; Wolf y Maret, 1985) y por superficies aleatorias (Méndez y O'Donnell, 1987; O'Donnell y Méndez, 1987; Maradudin *et al.*, 1990). Aunque hay observaciones anteriores sobre el fenómeno, conocido como el efecto de oposición, no fue sino hasta el trabajo de Kuga (1984) que el fenómeno se interpretó correctamente.

Aunque los problemas de esparcimiento en sistemas abiertos han sido los más estudiados, el esparcimiento en sistemas con geometrías confinantes es también interesante y, a la fecha, existen un gran número de problemas abiertos. Entre ellos se pueden mencionar la propagación de ondas coherentes a través de guías de onda desordenadas. Las guías de onda son interesantes para estudios de esparcimiento múltiple debido a que son sistemas en los que se puede tener dimensionalidad reducida y baja absorción (Sánchez-Gil *et al.*, 1998, 1999; Sánchez-Gil y Freilikher, 2003). El estudio de la propagación de ondas clásicas y cuánticas en presencia de imperfecciones, tanto de volumen como de superficie (Altshuler y Lee, 1988; Beenakker y van Houten, 1991; Sheng, 1995; van Houten y Beenakker, 1990), tienen importancia por su aplicación en la transmisión

de señales y, al mismo tiempo, representa un campo fértil de estudio teórico y experimental.

Los estudios sobre el transporte de electrones a través de guías de onda o sistemas desordenados casi unidimensionales se ha centrado en las consecuencias de las inhomogeneidades y defectos aleatoriamente distribuidos sobre el desorden de volumen. Particularmente, los estudios de la conductividad de sistemas con dimensiones pequeñas ha sido tema de interés por varias décadas (Anderson, 1958; Landauer, 1970; Buttiker, 1988; Kander *et al.*, 1990; Torres *et al.*, 1994; García-Mochales *et al.*, 1996; Costa-Kramër *et al.*, 1997), y es conocido que los efectos mecánico cuánticos deben ser tomados en cuenta para caracterizar la transmisión de electrones en este tipo de sistemas (Todorov y Sutton, 1993; Pascual *et al.*, 1995). En 1988, B. J. van Wees *et al.* (1988) y D. A. Wharam *et al.* (1988) descubrieron que una constricción pequeña en un gas de electrones bidimensional muestra cuantización de la conductancia en unidades de $2e^2/h$ (ver figura 1), donde e es la carga del electrón y h es la constante de Planck. La constricción está formada por contactos cuánticos puntuales¹ del orden de la longitud de onda de Fermi. El efecto se presenta como una secuencia de escalones de la conductancia en los que los saltos corresponden a un número entero de cuantos de conductancia conforme el ancho de la constricción va variando. Una explicación elemental de este efecto se basa en el hecho de que el contacto puntual actúa de alguna manera como una guía de onda de electrones (van Houten *et al.*, 1988; Beenakker *et al.*, 1989). De esta manera, cuando el ancho de la guía de onda es N veces la longitud de onda de Fermi cada sub-banda o modo de la guía de onda transversal contribuye con un número

¹Un contacto cuántico puntual (quantum point contact, QPC) es una constricción estrecha entre dos regiones electroconductoras, de un ancho comparable a la longitud de onda electrónica (de nanómetro a micrómetro).

entero N de cuantos de conductancia ($2e^2/h$). Por consiguiente, ya que el número N de modos ocupados es necesariamente un entero, se sigue de este argumento simple que la conductancia total está cuantizada y es de la forma

$$G = 2 \frac{e^2}{h} N. \quad (1)$$

Dicha cuantización fue observada experimentalmente por Grinstein y Mazenko (1986).

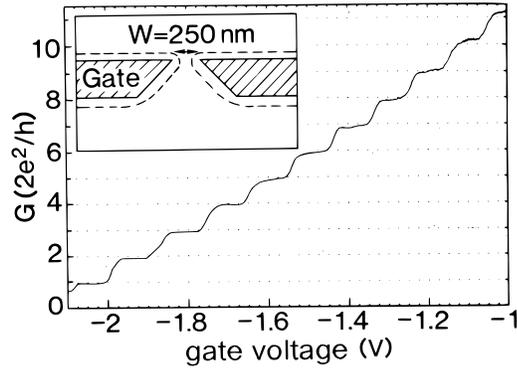


Figura 1. La conductancia de contactos puntuales como función del voltaje de la compuerta demuestra la cuantización de la conductancia en unidades $2e^2/h$. El ancho de la constricción crece con el aumento del voltaje aplicado a la compuerta (ver el recuadro). Tomado de la referencia van Wees *et al.* (1988).

Para obtener la ecuación (1), se parte de la solución de la ecuación Schrödinger para geometrías con contactos puntuales angostos y regiones adyacentes amplias, imponiendo además el empatamiento de las funciones de onda y sus derivadas en la entrada y salida de la constricción. Los coeficientes de transmisión resultantes determinan la conductancia por medio de la fórmula de Landauer (Landauer, 1957; Economou y Soukoulis, 1981) generalizada (Fisher y Lee, 1981) para N modos o canales

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^N T_n, \quad (2)$$

la cual puede ser expresada como

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n,m=1}^N |t_{mn}|^2 \equiv \frac{2e^2}{h} \text{Tr } \mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger, \quad (3)$$

donde $T_n = \sum_{m=1}^N |t_{mn}|^2$ está en términos de la matrix \mathbf{t} de las amplitudes de probabilidad de transmisión desde el modo n hasta el modo m . Este problema de acoplamiento de modos ha sido resuelto numéricamente para contactos puntuales con una variedad de formas (Haanappel y van der Marel, 1989; Szafer y Stone, 1989; Tekman y Ciraci, 1989a,b; van der Marel y Haanappel, 1989; Escapa y García, 1990) y analíticamente para geometrías especiales (Levinson, 1988). Cuando se considera el acoplamiento de modos a la entrada y salida de la constricción, se pueden distinguir las transiciones abruptas de las graduales (adiabáticas) entre las regiones anchas y angostas.

El caso de una constricción adiabática ha sido estudiado por Glazman *et al.* (1988), Yacoby (1990) y Payne (1989). El transporte a través de una constricción cuyo ancho l varía gradualmente no presenta esparcimiento de sub-bandas o modos transversales de la guía de onda. Un incremento adiabático relativamente pequeño del ancho no produce reflexiones y, en consecuencia, no afecta la conductancia de la guía. Por esta razón, una constricción adiabática mejora la precisión de la cuantización de la conductancia pero no es un requisito para observarla (Escapa y García, 1990).

A través de cálculos numéricos y analíticos se ha mostrado que la expresión (1) es una buena aproximación para el caso de constricciones abruptas, especialmente si la región estrecha tiene una longitud óptima (Levinson, 1988; Haanappel y van der Marel, 1989; Szafer y Stone, 1989; van der Marel y Haanappel, 1989). Para canales cortos ocurren variaciones en la ecuación (1) debido principalmente a los modos evanescentes (o modos cuyas constantes de propagación no corresponden a un modo de la guía) que tienen una probabilidad de transmisión diferente de cero. Para constricciones largas con transiciones abruptas también es necesario tomar en cuenta las reflexiones a la entrada y la salida del canal. Se ha encontrado que la longitud óptima para la observación de escalones bien definidos está dada por la expresión $L_{\text{opt}} = 0.32\sqrt{2l\lambda_F}$, donde l es el

ancho de la constricción y λ_F es la longitud de Fermi (van der Marel y Haanappel, 1989). Para una longitud $L > L_{\text{opt}}$ los cálculos muestran que la conductancia presenta oscilaciones regulares que reducen su valor por debajo del valor cuantizado. Estas oscilaciones se suavizan al incrementar la temperatura (Szafer y Stone, 1989; van Wees *et al.*, 1991). Lo mismo ocurre con el “efecto de trompeta” (constricción adiabática) (Escapa y García, 1989; Tekman y Ciraci, 1989a,b).

La cuantización de la conductividad electrónica tiene analogías ópticas en problemas de propagación de luz a través de aberturas y guías de onda con estrechamientos. Sin embargo, el experimento no es tan natural para la luz como para electrones (van Houten y Beenakker, 1990, 1996).

Para visualizar dicha analogía de la conductancia, consideramos luz monocromática, de frecuencia ω y polarización s , que incide sobre una guía de onda de conductor perfecto. La componente del campo eléctrico $E_2(x_1, x_3)$ satisface la ecuación de onda escalar bidimensional

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k^2 \right) E_2(x_1, x_3) = 0, \quad (4)$$

donde $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ es el vector de onda, c la velocidad de la luz y λ la longitud de onda. La ecuación (4) es idéntica a la ecuación de Schrödinger para la función de onda $\Psi(x_1, x_3)$ de un electrón en el nivel de Fermi en un gas de electrones bidimensional, con la identificación de $k = k_F$. Si consideramos que el gas de electrones está confinado por un pozo de potencial infinito, las condiciones de frontera también son las mismas para los dos problemas; es decir, que la función de onda Ψ y el campo eléctrico E_2 son iguales a cero en cualquier punto de la frontera. Para el problema óptico, el flujo de energía está dado por el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) = \frac{c}{8\pi k} \text{Re} (iE_2 \nabla E_2^*). \quad (5)$$

La expresión (5) es idéntica, excepto por un factor numérico, a la expresión mecánico cuántica para el flujo de la partícula $(\hbar/m) \text{Re}(i\Psi\nabla\Psi^*)$. De esta manera se tiene que, la razón de las potencias transmitida e incidente en un problema óptico es la misma que la de las corrientes transmitida e incidente en el problema electrónico equivalente.

En óptica, usualmente se estudian problemas de propagación cuando el sistema se ilumina por una sola onda plana. Sin embargo, en un gas de electrones bidimensional los electrones inciden de todas direcciones con una distribución isotrópica. Para tener una iluminación equivalente en el problema óptico, se requiere una iluminación difusa. Por analogía con el problema de transporte electrónico, se tiene entonces que la probabilidad de transmisión no normalizada T está cuantizada de manera proporcional al número N de modos transversales de la guía

$$T = \sum_{n=1}^N T_n \approx \alpha N = \alpha \left[\frac{2l}{\lambda} \right]_{\text{ent}}, \quad (6)$$

donde α es una constante, l es el ancho de la abertura de la rendija y el símbolo $[\]_{\text{ent}}$ denota que $2l/\lambda$ es reducido al entero más cercano hacia abajo. Por consiguiente, de la ecuación (2) se tiene que la potencia transmitida T es equivalente a la conductancia adimensional $g = G/(2e^2/h)$ en sistemas electrónicos, $T = g$, lo cual corresponde al número de modos de propagación en una guía de onda.

Se han reportado estudios experimentales sobre la transmitancia de rendijas (Montie *et al.*, 1991). En ellos se usó un difusor bidimensional para lograr la iluminación difusa en un plano perpendicular al eje de la rendija. El difusor consistió esencialmente de un arreglo aleatorio de fibras ópticas paralelas a la rendija. La luz difusa transmitida por una rendija metálica de ancho variable fue detectada utilizando una esfera integradora. Los resultados muestran un crecimiento de la conductancia óptica o potencia transmitida en forma de escalera, conforme el ancho de la rendija se va incrementando.

Un nuevo escalón ocurre cuando el ancho de la rendija es igual a media longitud de onda de la luz, $l = n\lambda/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$); es decir, un nuevo modo de propagación es permitido en la rendija, como en el problema de un gas de electrones bidimensionales previamente descrito. El problema general de transmisión de luz difusa a través de rendijas metálicas con y sin rugosidad ha sido estudiado recientemente con métodos numéricos que se describirán en esta tesis (Pérez *et al.*, 2009).

Además del resultado de la rendija, recientemente se han reportado resultados teóricos (Albaladejo *et al.*, 2007; Botten *et al.*, 2007) y experimentales (Dai *et al.*, 2008) que involucran guías de onda con cristales fotónicos. Éstos representan una analogía óptica de la transmisión de electrones. Por otro lado, se han reportado resultados teóricos de la propagación de ondas coherentes a través de guías de onda perfectamente conductoras con constricciones y desorden superficial (García-Martín *et al.*, 1997; Sánchez-Gil *et al.*, 1998; García-Martín *et al.*, 1998; Sánchez-Gil *et al.*, 1999; García-Martín y Sáenz, 2005). Sin embargo, no hay estudios ni teóricos ni experimentales sobre el problema de transmisión de luz difusa a través de guías de onda dieléctricas con estrechamientos y rugosidad aleatoria.

El objetivo central de esta tesis es realizar aportaciones en esta dirección. La motivación general está dada por la búsqueda de analogías ópticas entre problemas de transporte electrónico y propagación de luz a través de aberturas y guías de onda con estrechamientos y rugosidad superficial. Se presentan resultados tanto experimentales como teóricos utilizando técnicas numéricas rigurosas.

I.1. Sinopsis de la tesis

En el capítulo II, se inicia con una revisión y descripción fenomenológica de la propagación de luz en guías de onda dieléctricas en el contexto del problema a estudiar. Posteriormente, se describen dos técnicas experimentales para producir estrechamientos en fibras ópticas, y así tratar de observar efectos de cuantización de la transmitancia con estos sistemas. La primera técnica consiste en el adelgazamiento de fibras multimodales por medio de calor y tensión. La segunda consiste en el estrechamiento de la fibra por ataque químico.

En el tercer capítulo se presenta el plantamiento teórico utilizado para estudiar la transmitancia de luz difusa a través de rendijas metálicas ópticamente gruesas. El método se conoce como el *método de la ecuación integral* (Maradudin *et al.*, 1990; Mendoza-Suárez y Méndez, 1997; Valencia *et al.*, 2003). Considerando la invariancia del sistema en la dirección de la rendija y partiendo del segundo teorema integral de Green, se obtiene un par de ecuaciones integrales con las cuales se puede determinar el campo dentro y fuera del metal en términos de un par de funciones fuente. Dichas funciones fuente están definidas como el campo magnético y su derivada normal, para el caso de la polarización p, y como el campo eléctrico y su derivada normal, para la polarización s, evaluados en la superficie de la rendija. Estas funciones fuente se calculan numéricamente a partir de un sistema de ecuaciones matriciales que se resuelven utilizando un método conocido como descomposición LU (Lower Upper Decomposition).

En el cuarto capítulo se aplica el método descrito en el capítulo III a uno de los problemas de interés en la tesis. Se presentan cálculos de la transmitancia de luz difusa a través de rendijas perfectamente conductoras y metálicas. Posteriormente, se presentan cálculos para rendijas más realistas, considerando efectos de rugosidad en las paredes

de la rendija, así como el caso de esparcimiento cónico o iluminación fuera del plano perpendicular a la rendija.

En el quinto capítulo se describe un método diferencial para estudiar problemas de propagación y esparcimiento de ondas electromagnéticas a través de guías de onda planas dieléctricas con estrechamientos y rugosidad superficial o de volumen. Se trata de un método de expansión modal conocido como el *método del propagador de la matriz R* (Elson, 2001). Se inicia con las ecuaciones de Maxwell expresadas en el espacio de Fourier en forma discreta. Para una geometría dada se encuentra la solución en términos de los valores propios y las funciones propias, que representan los modos de propagación de la guía de onda.

En el sexto capítulo se aplica el método de la matriz R descrito en el capítulo V a los problemas de interés. Se presentan resultados para la propagación de luz difusa a través de guías de onda dieléctricas. En particular, los efectos de cuantización de la transmitancia por guías de onda dieléctricas con estrechamientos abruptos y suaves. Posteriormente, se consideran los efectos de rugosidad superficial.

Finalmente, en el séptimo capítulo se presenta una discusión sobre los resultados obtenidos y las conclusiones más importantes de la tesis.

Capítulo II

MÉTODOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se presenta una breve revisión de los fundamentos teóricos de las guías de onda dieléctricas (fibras ópticas), enfocándonos sobre los aspectos relevantes para los problemas a tratar en el resto del capítulo. Posteriormente, se describen dos técnicas experimentales para adelgazar fibras e intentar observar efectos de cuantización de la transmitancia con ellas. La primera técnica consiste en el estrechamiento de fibras multimodales por medio del mecanismo de calentamiento y tensión. La segunda técnica consiste en el adelgazamiento de la fibra con un mecanismo de ataque químico. Se presentan resultados experimentales correspondientes a cada caso.

II.1. Guías de onda dieléctricas

En 1897, Lord Rayleigh publicó un análisis de la propagación de ondas electromagnéticas en tubos de conducción circulares y rectangulares, o guías de onda como actualmente se conocen. Una guía de onda es una estructura que consiste de un núcleo compuesto de un material con índice de refracción mayor que el del medio que lo rodea. A pesar de que existen diferentes formas de guiar la luz, en óptica, las guías más comunes son

las guías dieléctricas. Por su geometría y configuración las guías se pueden clasificar como planas, de canal o cilíndricas. La guía de onda plana es la estructura más simple y está formada por dos medios semi infinitos que rodean a una rebanada de un material transparente. Para este tipo de guías de onda se presentará un análisis teórico y numérico en los capítulos III y V.

El tipo de guía de onda más usada es la fibra óptica, que tiene forma cilíndrica y se puede doblar hasta cierto punto. El material más usado para fabricarlas es el silicio ya sea puro o con algunas impurezas. Las fibras tipo escalón están compuestas generalmente de un cilindro de vidrio, llamado núcleo, con un índice de refracción y una cubierta de vidrio o plástico de índice de refracción menor. En la figura 2 se muestra un esquema de este tipo de fibra.

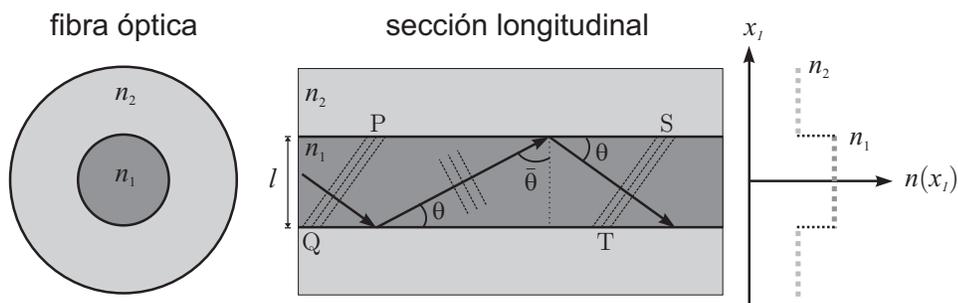


Figura 2. Diagramas esquemáticos que muestran las secciones transversal y longitudinal de una fibra óptica con índice de refracción tipo escalón. El modo de propagación de la guía puede considerarse en términos de rayos que viajan a un ángulo θ , para el cual la condición de auto-consistencia se satisface. En la figura, la región más oscura representa el índice de refracción mayor.

La luz que se propaga a través de una fibra óptica, se ve obligada a seguir trayectorias determinadas por sus paredes, cumpliendo las siguientes dos condiciones: la reflexión total interna y la condición de auto-consistencia.

La reflexión total interna consiste en que, cuando el ángulo de incidencia θ en la interfase es mayor que un ángulo crítico θ_c , la luz que viaja en un medio homogéneo

es reflejada totalmente en la interfase de éste con un medio de índice de refracción menor. Para que se cumpla esta condición, el ángulo de incidencia en cada interfase debe ser mayor que el ángulo crítico correspondiente. La aplicación de la ley de Snell a la geometría mostrada en la figura 2(b), provee una relación entre el ángulo crítico θ_c y los índices de refracción del núcleo n_1 y de la cubierta n_2 . Se tiene que $\theta_c = \arcsen \frac{n_2}{n_1}$.

Por otro lado, la condición de auto-consistencia (o de resonancia transversal) establece que la onda al reflejarse dos veces consecutivas en las interfases se debe reproducir a sí misma. Los campos que satisfacen esta condición se llaman *modos guiados* o *modos de propagación* de la guía de onda. Por el término de modo, se entiende una onda elemental característica de la guía de onda que se propaga con una velocidad de fase, velocidad de grupo, distribución transversal de intensidad y polarización bien definidas. Para estados de polarización lineales se habla de los modos transversal eléctrico TE, en los que el vector del campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia y por lo tanto no tiene una componente longitudinal, y los modos transversal magnético TM, en los que el vector del campo magnético es perpendicular al plano de incidencia y, por consiguiente, no tiene una componente longitudinal. La componente longitudinal es la dirección de propagación a lo largo de la guía.

Para determinar los modos de la guía de onda, se puede seguir un tratamiento formal de la solución de las ecuaciones de Maxwell en los medios interno y externo con las condiciones de frontera apropiadas (Marcuse, 1974). Para esto, habitualmente es necesario resolver un problema de valores propios; al hacerlo se obtienen los valores propios y las funciones propias correspondientes a la propagación de la luz en la guía. Los valores propios están relacionados con las constantes de propagación; es decir, con los índices de refracción efectivos propios de los modos de propagación. Las funciones propias corresponden a las distribuciones de campo de los modos de propagación. Este

tratamiento se describe de manera más formal en el capítulo V.

No obstante, en algunos casos el problema de valores propios puede obtenerse con un tratamiento matemático más sencillo basado en la óptica geométrica. Como ilustración del cálculo de los modos de propagación, se presenta un método heurístico que impone la condición de auto-consistencia para determinar los ángulos de rebote y las constantes de propagación de los modos de la guía de onda.

Consideremos el campo que se propaga en la guía de onda dieléctrica en la forma de una onda electromagnética transversal monocromática de longitud de onda $\lambda = \lambda_0/n_1$. La dirección de propagación hace un ángulo θ con las paredes de la guía, que es más pequeño que el ángulo crítico complementario $\bar{\theta}_c$. La onda viaja con una velocidad de fase $c_1 = c_0/n_1$ y vector de onda cuyas componentes son: $k_1 = n_1 k_0 \sin \theta$, $k_2 = 0$ y $k_3 = n_1 k_0 \cos \theta$, donde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ es el número de onda en el vacío.

En la figura 2 se aprecia que los frentes de onda P-Q y S-T son paralelos. Para llegar desde P-Q hasta su posición, el frente de onda S-T sufrió reflexiones dentro de la guía. En ausencia de la guía el frente de onda P-Q llegaría a la posición S-T recorriendo un camino óptico que es diferente. La onda que ha realizado más reflexiones, llega con un retraso con respecto a la que llega directamente. Además, en cada reflexión puede haber cambios de fase φ_r , por lo que la diferencia de fase total entre las dos ondas será la suma de ambos desfases. De esta manera, por la condición de auto-consistencia, el corrimiento de fase entre las dos posibilidades para llegar a S-T debe ser cero o un múltiplo de 2π radianes,

$$2k_1 l - 2\varphi_r = 2\pi m, \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

El corrimiento de fase de la reflexión φ_r como función del ángulo θ para cada estado

de polarización es

$$\tan\left(\frac{\varphi_r}{2}\right) = \eta \left(\frac{\text{sen}^2 \bar{\theta}_c}{\text{sen}^2 \theta} - 1\right)^{1/2}, \quad (8)$$

donde

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{polarización TE,} \\ \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 & \text{polarización TM.} \end{cases}$$

Para cada estado de polarización, la ecuación (7) restringe los valores del ángulo de propagación a valores discretos θ_m correspondientes a cada valor de m , el cual define un modo guiado o modo de propagación de la guía de onda.

Sustituyendo en la ecuación (7) el valor de φ_r correspondiente a cada polarización, se llega a las siguientes ecuaciones de valores propios

$$\tan \frac{k_1 l}{2} = \eta \frac{\gamma}{k_1} \quad \text{modos pares} \quad (9)$$

y

$$\tan \frac{k_1 l}{2} = -\eta \frac{k_1}{\gamma} \quad \text{modos impares.} \quad (10)$$

En estas ecuaciones se hacen las siguientes identificaciones:

$$k_1^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta_m^2, \quad (11)$$

$$\gamma^2 = \beta_m^2 - n_2^2 k_0^2, \quad (12)$$

donde se ha introducido el parámetro β_m definido como

$$\beta_m = n_1 k_0 \cos \theta_m = n_m k_0, \quad (13)$$

con n_m el índice de refracción efectivo del m -ésimo modo. En términos de la constante de propagación β_m o del índice de refracción efectivo n_m , la condición de guiado se puede escribir como $k_0 n_2 \leq \beta_m \leq k_0 n_1$ o $n_2 \leq n_m \leq n_1$, respectivamente.

En las ecuaciones (9) y (10) los valores del ángulo de propagación para los modos guiados se determinan a partir de los valores del parámetro β_m , que surgen de la solución

de las ecuaciones de valores propios. Ya que éstas son ecuaciones trascendentales la solución es multivaluada.

El número de modos TE o TM puede calcularse a partir de la expresión

$$N = \left[\frac{V}{\pi} \right]_{\text{ent}}, \quad (14)$$

donde el símbolo $[\]_{\text{ent}}$ indica que el número entre los corchetes se redondea al número entero mayor más próximo y el parámetro $V = k_0 l \text{NA}$ especifica las características de la guía de onda. $\text{NA} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ es la abertura numérica de la guía que define el intervalo de los ángulos de aceptación para el acomplamiento de ondas.

Dependiendo del número de modos que sorportan, las guías de onda o fibras ópticas se pueden clasificar en fibras monomodo y multimodo. Esto depende a su vez del diámetro de la fibra, de los índices de refracción de los medios y de la longitud de onda de la luz que se propaga.

Las fibras monomodales usualmente tienen un núcleo pequeño (un diámetro de algunos pocos micrómetros) y pueden guiar un sólo modo transversal para cada polarización. Las fibras multimodales usualmente tienen un núcleo más grande o una diferencia mayor entre los índices de refracción del núcleo y de la cubierta que las fibras monomodales; de esta manera pueden soportar varios modos con diferentes distribuciones transversales de intensidad.

Las distribuciones del campo transversal se pueden obtener utilizando la óptica ondulatoria o electromagnética. Para esto, partimos de las ecuaciones de Maxwell y consideramos las tres regiones que forman la guía. Se considera una onda armónica propagándose en la dirección x_3 . Suponiendo una geometría bidimensional, se tiene invariancia a lo largo del eje x_2 , y podemos considerar por separado los modos TE y los modos TM. Las condiciones anteriores y las relaciones entre los campos electro-

magnéticos \vec{E} y \vec{H} para cada polarización conducen a la siguiente ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \psi(x_1, x_3)}{\partial x_1^2} + n_{1,2}^2 k_0^2 - \beta^2 \psi(x_1, x_3) = 0, \quad (15)$$

donde la función $\psi(x_1, x_3)$ representa a $E_2(x_1, x_3)$ (la componente 2 del campo eléctrico) para el caso de la polarización TE y a $H_2(x_1, x_3)$ (la componente 2 del campo magnético) para el caso de la polarización TM.

Imponiendo las condiciones de frontera se obtienen las posibles soluciones fundamentales para los campos, o los modos de la guía. Una onda que se propaga en la guía puede expresarse como una superposición de estos modos. La forma de los primeros modos se muestra de manera pictórica en la figura 3.

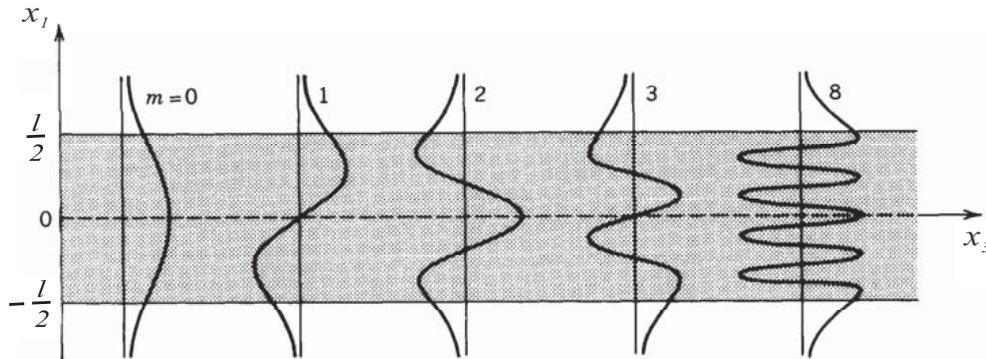


Figura 3. Distribuciones del campo para modos de propagación TE.

II.2. Fibras con estrechamientos

Recientemente, se ha propuesto el uso de fibras monomodales estrechas (Lacroix *et al.*, 1986; Birks y Li, 1992) como una alternativa para desarrollar una variedad de sensores (Birks, 1989; Villatoro *et al.*, 2003; Díaz-Herrera *et al.*, 2004; Wang *et al.*, 2005) y acopladores (Payne *et al.*, 1985; Wright, 1985; Burns y Abebe, 1987; Félix *et al.*, 2007),

así como el estudio del microscopio óptico de barrido, el cual combina la tecnología de la sonda de barrido con el microscopio óptico (Ohtsu, 1995; Lazarev *et al.*, 2003; Moar *et al.*, 2006; Luo *et al.*, 2007).

Al estrechar una fibra es normalmente deseable que no escape luz y que ésta se acople a los modos de orden más bajo. Para esto es de fundamental importancia la geometría del estrechamiento (Birks, 1989). Si el estrechamiento es suficientemente largo, y la transición entre la fibra inalterada y la región adelgazada es suficientemente suave, la pérdida de la potencia óptica en el acoplamiento puede ser muy baja. A este proceso de transición se le conoce como estrechamiento adiabático (Snyder y Love, 1983). Si las condiciones no se cumplen, el acoplamiento es menos efectivo y las pérdidas de transmisión son altas, como ocurre con los estrechamientos abruptos y cortos normalmente producidos con una empalmadora. La adiabaticidad de las fibras estrechas depende principalmente del proceso de fabricación. Sin embargo, en este trabajo no se desea la condición adiabática sino una variación suave del diámetro de la fibra que permita observar el efecto de cuantización de la transmitancia.

Una de las técnicas reportadas para producir fibras ópticas estrechas es el calentamiento local de una fibra sin revestimiento que simultáneamente es estirada. Este mecanismo conocido como quemador itinerante (travelling burner) fue propuesto por Kenny y colaboradores (Kenny *et al.*, 1991). El estrechamiento es suave y largo, y sus parámetros geométricos pueden ser ajustados modificando las condiciones del proceso de calentamiento y tensión. Esta técnica para producir las fibras ópticas estrechas produce un perfil de adelgazamiento característico, dictado por la fuente de calor y el mecanismo para tensionar los extremos de las fibras (Birks, 1989; Kenny *et al.*, 1991; Salazar *et al.*, 2001; Villatoro *et al.*, 2003; Díaz-Herrera *et al.*, 2004).

Otra de las técnicas utilizadas para adelgazar fibras ópticas es el ataque químico

(Turner, 1984; Hoffmann *et al.*, 1995). Varios métodos basados en ataque químico han sido propuestos en la literatura para producir diferentes geometrías de puntas finas de fibra óptica. Entre ellos están los ataques estático y dinámico con una solución de ácido fluorhídrico (HF) (Hoffmann *et al.*, 1995). Cuando una fibra descubierta se sumerge en una solución de ácido HF, se produce una corrosión en la frontera ácido-vidrio, generando un desbastamiento y una rugosidad aleatoria en la superficie de la fibra. El grado de adelgazamiento depende del tiempo de exposición.

A continuación, se describen los mecanismos para la fabricación de fibras estrechas que se emplearon en este trabajo de tesis.

II.2.1. Adelgazamiento por calor y tensión

Como se ha reportado por varios autores, una fibra óptica se puede adelgazar aplicando simultáneamente calor y una tensión controlada en los extremos de la fibra. Al calentar la fibra a una temperatura mayor a 900°C ésta se reblandece. Si se mantiene una tensión sobre los extremos de la fibra, como se ilustra en la figura 4, la región sobre la cual se aplica la fuente de calor se estira, incrementándose lentamente la longitud y reduciéndose así la sección transversal del cilindro.

Para lograr esto, se puede utilizar como fuente térmica un arco eléctrico (Bobb y Krumboltz, 1991), un láser de CO_2 emitiendo radiación a una longitud de onda de $10.6\ \mu\text{m}$ (Valaskovic *et al.*, 1995), la flama producida por un soplete que utiliza gases diversos (Kenny *et al.*, 1991), o bien una resistencia que se calienta al pasar una corriente por ella. La fuente térmica se puede aplicar directamente o también se puede utilizar un micro horno cerámico para uniformizar la aplicación del calor (Salazar *et al.*, 2001). Para estirar la fibra, se pueden utilizar sujetadores que jalan los extremos de la fibra en

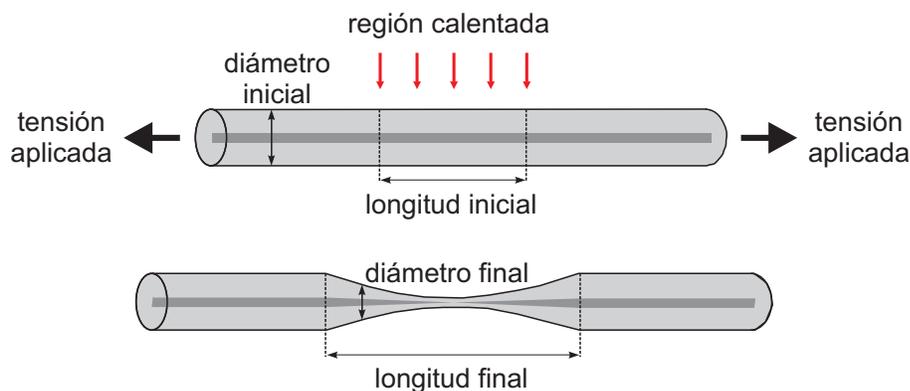


Figura 4. Diagrama del proceso de estiramiento de una fibra óptica por el mecanismo de calentamiento y tensión.

direcciones contrarias. Las tensiones pueden ser controladas por varios medios: pesas, resortes, o motores de pasos (Birks, 1989; Salazar *et al.*, 2001; Villatoro *et al.*, 2003).

A continuación describimos los métodos utilizados en esta tesis para fabricar fibras estrechas utilizando mecanismos de calentamiento y tensión.

El arreglo utilizado para producir estrechamientos en fibras por calentamiento se muestra en la figura 5. El arreglo permite, al mismo tiempo, monitorear la transmitancia de la fibra.

Los componentes que se utilizaron para la realización del experimento son los siguientes: una fibra multimodal, sujetadores con ranura tipo “V groove” (diseñados en el laboratorio de mecánica fina, CICESE), un soplete con gas butano y oxígeno, conectores tipo FC, un difusor, una platina con motor a pasos (klinger) con resolución de $0.1 \mu\text{m}$ y componentes ópticas necesarias para el montaje. La fibra AFS105 es de índice de refracción escalonado, el diámetro del núcleo es de $105 \mu\text{m}$ y el de la fibra con cubierta es de $125 \mu\text{m}$, que tiene una abertura numérica de 0.22. La fuente de luz fue un láser de He-Ne que emite a una longitud de onda de 632.8 nm . Para la detección se utilizó un fotoreceptor Nirvana, modelo 2007 de New Focus sensible en el rango de

longitudes de onda de 400-1070 nm, un amplificador de amarre de fases (lock-in) modelo SR830 de Stanford, y un cortador de haz óptico (chopper). Para el control de la platina y la adquisición de datos se utilizó una interfaz GPIB y programas desarrollados por nosotros en MATLAB.

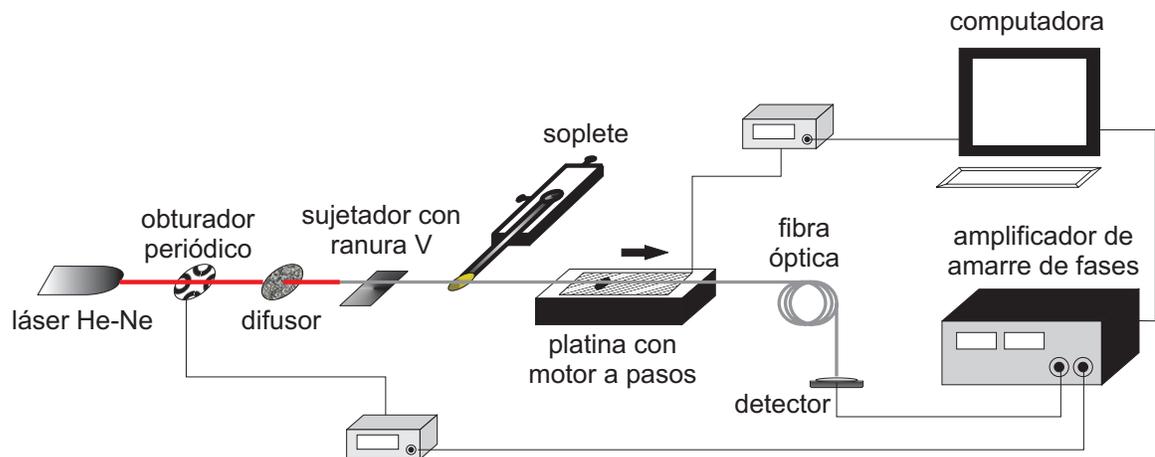


Figura 5. Arreglo experimental para estirar una fibra óptica multimodal por el mecanismo de calentamiento y tensión. La flecha indica la dirección de movimiento de la platina con motor a pasos.

El proceso fundamental de preparación es sencillo, sin embargo se debe realizar con cuidado.

Para preparar el experimento, se corta un tramo de aproximadamente 1.5 m de fibra óptica con pinzas especiales, considerando que debe ser suficientemente largo para poder sujetarlo por los extremos. La región de la fibra que se va a adelgazar, se deja remojar en acetona durante un lapso de 2 minutos y se remueve el forro de plástico exterior de la fibra (jacket) con pinzas especiales. La región descubierta se consideró por lo menos 2 cm más larga que la región sobre la que actúa la fuente térmica. La fibra se sujetó de un extremo con un soporte montado en la platina con motor a pasos y del otro con una montura fija que permite el acoplamiento de la fuente de luz (ver figura 5). Para el acoplamiento de la luz no se utilizaron lentes sino solamente un difusor, esto

con la idea de alimentar los 74 modos que soporta la fibra uniforme para un sólo tipo de polarización. El otro extremo de la fibra se adaptó a un conector tipo FC para acoplar la luz transmitida al fotodetector. El amplificador de amarre de fases se sincronizó con la señal de modulación de referencia dada por el cortador de haz óptico.

El soplete fue colocado en una montura de traslación de tres ejes para controlar la interacción de la flama con la fibra óptica. Se utilizó una flama pequeña, producida por una mezcla controlable de gas butano y oxígeno, para calentar la sección descubierta de la fibra óptica. La flama tenía un diámetro de aproximadamente 3 mm. Con el fin de uniformizar el calentamiento de la fibra con la flama del soplete, se consideró inicialmente utilizar un tubo cerámico de 7.5 cm de longitud, con un diámetro interno de 1.6 mm y un diámetro externo de 3.2 mm. La idea era que el tubo funcionara como un micro horno para que la flama no se aplicara directamente sobre las fibras, sino sobre el tubo cerámico con la fibra contenida en el interior de éste. Sin embargo, la temperatura proporcionada por el soplete no fue suficiente para que el micro horno permitiera el reblandecimiento de la fibra. Por esta razón, fue necesario aplicar directamente la flama sobre la sección de fibra que se deseaba adelgazar.

Para obtener el adelgazamiento en la fibra se realizó primeramente un precalentado, antes de activar el programa en la computadora e iniciar el desplazamiento horizontal del soporte montado en la platina con motor a pasos. Se realizaron varias pruebas, encontrándose que la velocidad óptima para adelgazar las fibras era de $80 \mu\text{m/s}$. Durante este proceso, se detecta la intensidad de la luz transmitida y se captura con el programa. Una vez que se estira la fibra a una distancia deseada, se detiene la platina y se detiene el flujo de gas en el soplete.

Como ejemplos, en la figura 6 mostramos un par de curvas de intensidad transmitida como función del tiempo. Para el caso de la figura 6(a) se aplicó una temperatura mayor

que para el de la figura 6(b). Para tomar los datos de la figura 6(a) se utilizó una flama de aproximadamente 8 mm de diámetro sobre la fibra. Esto ocasionó que el tiempo de adelgazamiento de la fibra fuera corto, para recorrer el estiramiento total de 4.5 cm. En la figura 6(a) se observa solamente un decaimiento rápido de la transmitancia durante los últimos 3 segundos del proceso. El estiramiento de la fibra se siguió hasta llegar la ruptura de las mismas. Por otro lado, aplicando una temperatura menor y un diámetro de la flama de aproximadamente 3 mm, el estiramiento de la fibra fue de 14.4 cm durante 30 minutos. En la figura 6(b) se observa el decrecimiento de la transmitancia con fluctuaciones regulares para los últimos 60 segundos del proceso de estiramiento. Se podría pensar que estas fluctuaciones en forma de “escalones perturbados” marcan la desaparición de modos guiados en la fibra. Para poder concluir esto, sin embargo, era necesario tener una guía teórica y poder sistematizar el experimento. Por un lado, teníamos dificultades para controlar el diámetro y la longitud de estrechamiento de la fibra. Decidimos, además, no seguir con este método por problemas de seguridad en el laboratorio.

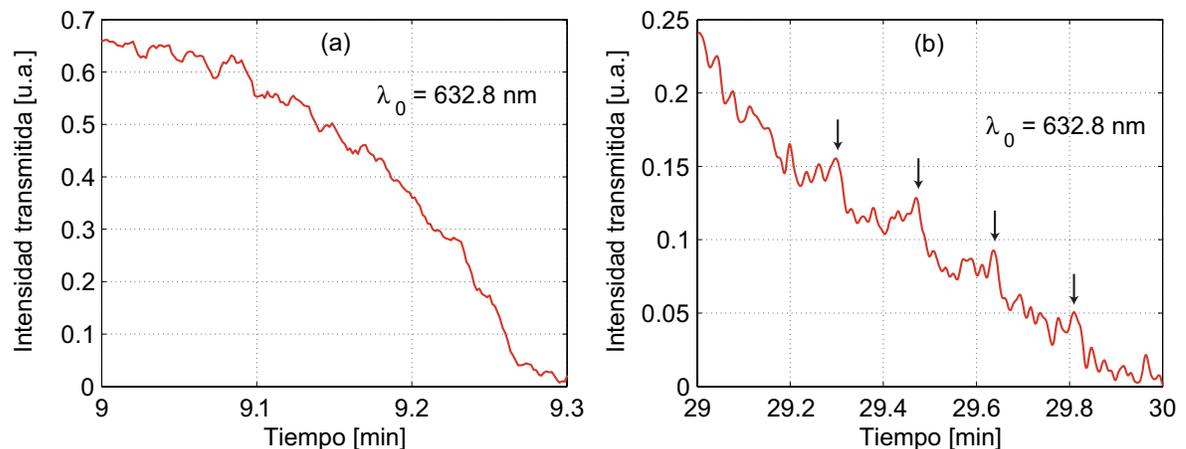


Figura 6. Intensidad de la transmitancia detectada como función del tiempo mientras la fibra está bajo tensión y calor. Los diámetros de la flama son de aproximadamente (a) 8 mm y (b) 3 mm sobre la fibra.

II.2.2. Adelgazamiento por ataque químico

El otro método utilizado para estirar fibras ópticas multimodales consistió en un método de ataque químico que se describe a continuación.

En la figura 7 se presenta un esquema que muestra la técnica utilizada. Los componentes que se utilizaron para la realización del experimento son los siguientes: una fibra multimodal, una cubeta de plástico con dimensiones de $10 \times 10 \times 45$ mm, conectores tipo FC, un filtro espacial con un objetivo de microscopio de abertura numérica de 0.25, ácido fluorhídrico y componentes ópticas necesarias para el montaje. La fibra AFS50 es de índice de refracción escalonado, el diámetro del núcleo es de $50 \mu\text{m}$ y el de la fibra con cubierta es de $125 \mu\text{m}$, que tiene una abertura numérica de 0.22. Se utilizaron dos fuentes de luz, que fueron un láser de He-Ne con longitud de onda de 632.8 nm y un diodo láser con longitud de onda de 1550 nm, serie CQF938 de JDS Uniphase. Para la detección se utilizó un fotoreceptor Nirvana, modelo 2007 de New Focus en el rango de longitud de onda de 400-1070 nm, un detector de InGaAs modelo D400FC de Thorlabs sensible en el rango de longitud de onda de 800-1700 nm, un amplificador de amarre de fases (lock-in) modelo SR830 de Stanford y un cortador de haz óptico (chopper). Para el control del amplificador de amarre de fases y la adquisición de datos se utilizó una interfaz GPIB y un programa en MATLAB desarrollado por nosotros.

Para preparar el experimento, se corta el tramo de aproximadamente 1 m de fibra óptica con pinzas especiales, considerando que debe ser suficientemente largo para poder sujetarlo por los extremos. La región de la fibra que se va a adelgazar, se deja remojar en acetona durante un lapso de 2 minutos y se remueve el forro de plástico exterior de la fibra con pinzas especiales. La región descubierta se consideró de aproximadamente 1 cm de largo que corresponde a las dimensiones horizontales de la cubeta de plástico. En

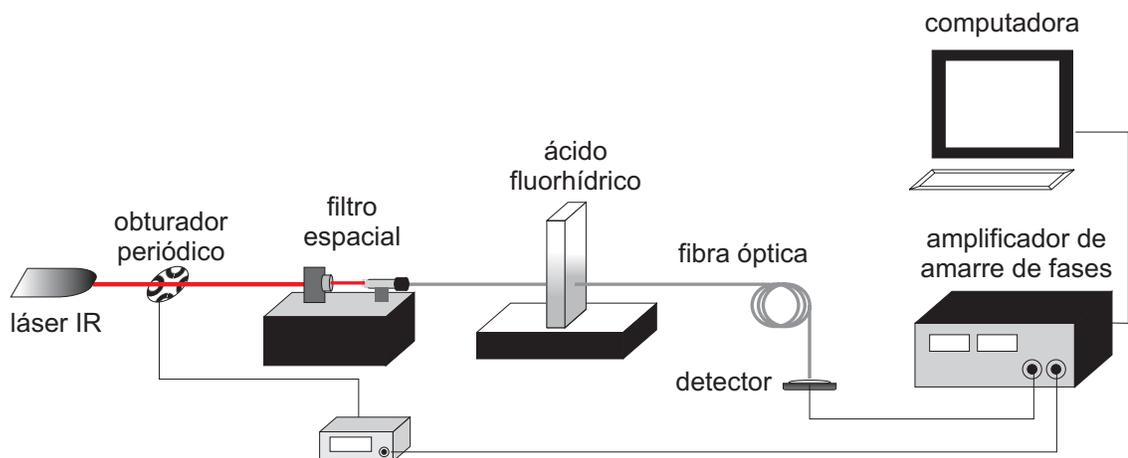


Figura 7. Arreglo experimental para adelgazar una fibra óptica multimodal por el mecanismo de ataque químico.

la cubeta se hacen dos perforaciones de aproximadamente el diámetro de la cubierta de la fibra a una altura de 1 cm. La fibra se coloca en la cubeta a través de las perforaciones quedando uno de los extremos sujeto a una montura que permite el acoplamiento de la fuente de luz (ver figura 7). Para el acoplamiento de la luz se utilizó un filtro espacial con un objetivo de microscopio de abertura numérica de 0.25. Para alimentar todos los modos de la fibra con luz láser, se pintó la cara de entrada de la fibra con una capa delgada de pintura blanca. Esta capa actúa como difusor. El otro extremo de la fibra se adoptó a un conector tipo FC para acoplar la luz transmitida al fotodetector. El amplificador se sincronizó con la señal de modulación de referencia dada por el cortador de haz óptico.

Para el adelgazamiento de la fibra se utilizaron varias concentraciones de ácido fluorhídrico C_a en dilución con agua. Se realizaron varias pruebas encontrando una concentración de ácido óptima para el adelgazamiento de las fibras $C_a = 10\%$. Durante la exposición de la fibra al ácido, se detecta la intensidad de la luz transmitida y se captura por el programa. El proceso se realizó hasta llegar a la ruptura de la fibra.

En la figura 8 mostramos la intensidad transmitida como función del tiempo, mientras la fibra está bajo ataque químico. Consideramos primero luz de un láser de He-Ne con longitud de onda $\lambda_0 = 632.8$ nm y el uso del fotoreceptor Nirvana. Para esta longitud de onda y con el diámetro del núcleo de $50 \mu\text{m}$ la fibra soporta 35 modos para un sólo tipo de polarización. Para el caso de la figura 8(a) se aplicó una concentración de ácido HF $C_a = 100\%$ sobre la sección de la fibra descubierta. El tiempo de exposición necesario para adelgazar la fibra completamente fue de 47 minutos. En la figura 8(a) se observa solamente un desvanecimiento rápido de la transmitancia durante los últimos 17 minutos de exposición de la fibra. Por otro lado, aplicando una concentración de ácido $C_a = 10\%$ en agua se logra un tiempo de exposición de 123 minutos. En la figura 8(b) se observa el decrecimiento de la transmitancia con pequeñas variaciones en la curva para los últimos 23 minutos bajo ataque químico.

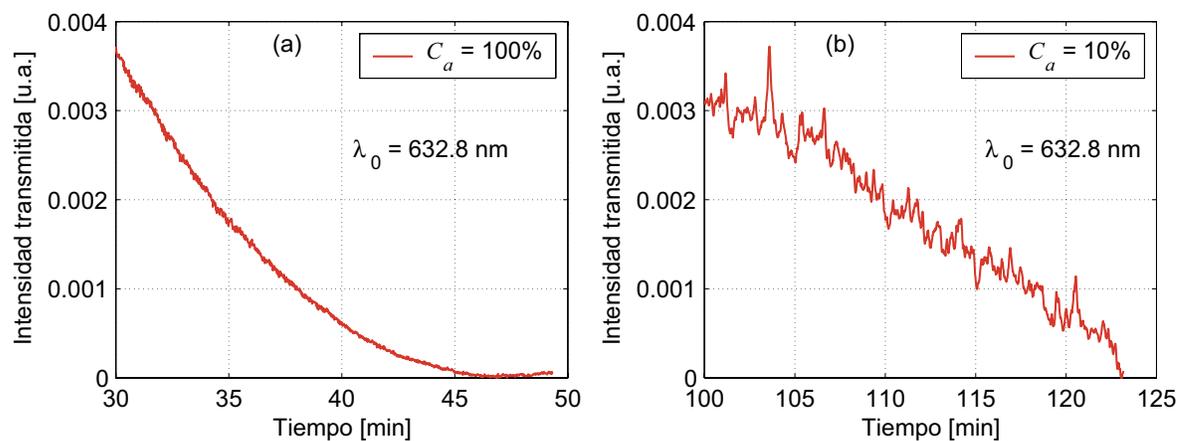


Figura 8. Intensidad de la transmitancia detectada como función del tiempo, mientras la fibra está bajo ataque químico. Las concentraciones de ácido fluorhídrico son de (a) 100% y (b) 10%. La fuente de iluminación es un láser de He-Ne con longitud de onda de 632.8 nm.

El efecto de la rugosidad generada por el ácido es crítico para la longitud de onda de 632.8 nm. Por esta razón, no observamos el decrecimiento de la transmitancia con fluctuaciones regulares. En cambio, para una iluminación en el infrarrojo el efecto de

la rugosidad es menos importante.

Ahora consideramos el experimento con luz de un diodo láser con longitud de onda de 1550 nm y el detector de InGaAs. Para esta longitud de onda la fibra soporta 15 modos para un sólo tipo de polarización. En la figura 9 se muestra la intensidad transmitida como función del tiempo mientras la fibra está bajo ataque químico. Para el caso de la figura 9(a) se aplicó una concentración de ácido HF $C_a = 100\%$ sobre la sección de la fibra descubierta. El tiempo de exposición necesario para adelgazar la fibra completamente fue de 30 minutos. En la figura 9(a) se observa solamente un decrecimiento casi lineal de la transmitancia durante los últimos 10 minutos bajo ataque químico. Por otro lado, aplicando la concentración de ácido $C_a = 10\%$ se logró un tiempo de exposición más grande. En la figura 9(b) se observa el decrecimiento de la transmitancia con fluctuaciones más regulares en la curva para los últimos 25 minutos de exposición. Las fluctuaciones en forma de “escalones” son similares a los resultados de la figura 6(b) y es de esperarse que marquen la presencia de modos guiados para diámetros del núcleo de la fibra pequeños, pero es difícil monitorear el diámetro de la fibra durante el proceso.

Aunque no se observó el comportamiento escalonado esperado, los comportamientos encontrados en las figuras 6(b) y 9(b) son cualitativamente similares a los encontrados con nanoalambres (Pascual *et al.*, 1995; Li y Tao, 1998) y guías de onda perfectamente conductoras con rugosidad superficial (García-Martín *et al.*, 1997). Esto puede indicar que las oscilaciones en las curvas de la transmitancia son debidas a la rugosidad generada en la superficie de la fibra ya sea por el estiramiento o por la acción del ácido fluorhídrico. Sin embargo, se podría decir que este tipo de sistemas no se conoce bien y no se han publicado resultados ni teóricos ni experimentales al respecto. Es por ello que se decidió

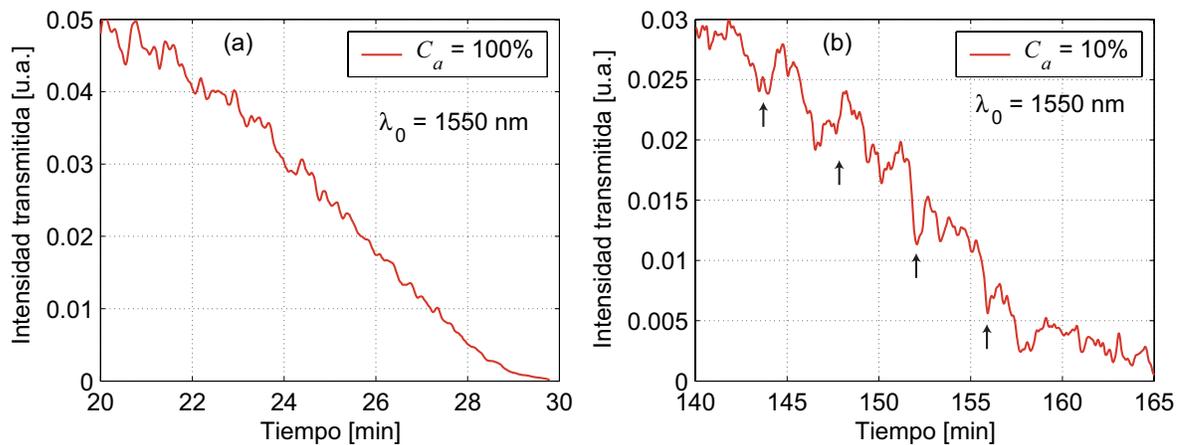


Figura 9. Intensidad de la transmitancia detectada como función del tiempo. Las concentraciones de ácido fluorhídrico son de (a) 100% y (b) 10%. La fuente de iluminación es un diodo láser con longitud de onda de 1550 nm.

que el estudio de la propagación de luz en guías de onda con estrechamientos y rugosidad con métodos rigurosos era una misión que valía la pena. Los resultados que se obtienen con estos métodos pueden ayudar en la interpretación de resultados y en la planeación de nuevos experimentos. Los métodos que se desarrollan en este trabajo de tesis para resolver problemas de propagación de ondas en sistemas con geometrías confinantes son el método de la ecuación integral y el método de la matriz R. El planteamiento de estos métodos se describen en los siguientes capítulos.

Capítulo III

EL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

En este capítulo se describe una técnica rigurosa para modelar la interacción de la luz con un sistema de cuerpos bidimensionales (geometría cilíndrica). La técnica se conoce como el método de la ecuación integral. El método se aplica, en particular, para estudiar la propagación de luz difusa a través de rendijas. Se presenta un plantamiento teórico que permite evaluar los coeficientes de reflexión y transmisión de rendijas con geometrías arbitrarias. Además, se hace una comparación del método con resultados previamente publicados.

III.1. Consideraciones preliminares

El sistema bajo estudio está formado por M cuerpos invariantes a lo largo del eje x_2 , como se muestra en la figura 10. La región 0 está caracterizada por el índice de refracción real $n_0(\omega) = \sqrt{\epsilon_0(\omega)}$, y las regiones de 1 hasta M están definidas por las curvas Γ_j y caracterizadas por los índices de refracción $n_j(\omega)$ o, alternativamente, por las constantes dieléctricas $\epsilon_j(\omega)$. Las curvas que describen los perfiles pueden ser escritos

en términos de un sólo parámetro t_j de la siguiente manera

$$\vec{r}_j(t_j) = [\xi_j(t_j), \eta_j(t_j)]. \quad (16)$$

Las funciones vectoriales $\vec{r}_j(t_j)$ describen las fronteras de los M objetos como funciones de los parámetros t_j (Valencia *et al.*, 2003).

Debido a la geometría bidimensional las ondas incidentes pueden clasificarse como Transversal Eléctrica (TE), conocida también como polarización s, en la que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia $[\vec{E} = (0, E_2, 0)]$ o Transversal Magnética (TM), conocida también como polarización p, en la que el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia $[\vec{H} = (0, H_2, 0)]$. Estos casos pueden tratarse separadamente. Se describe ahora el método para calcular los campos y potencias esparcidas. Detalles adicionales sobre algunos aspectos del método pueden encontrarse en (Maradudin *et al.*, 1990; Mendoza-Suárez y Méndez, 1997; Valencia *et al.*, 2003).

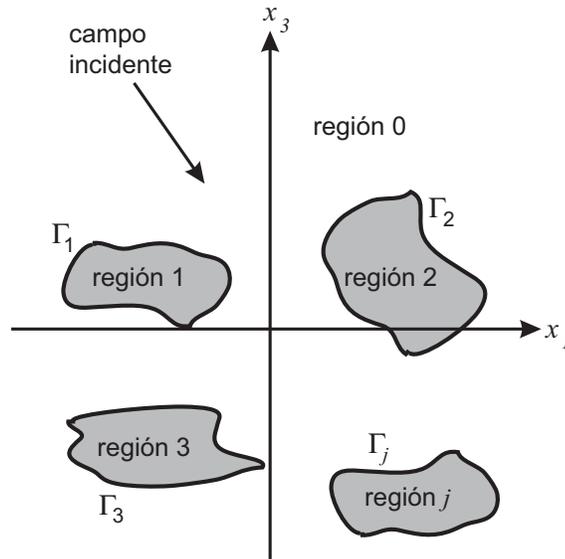


Figura 10. Esquema del sistema estudiado. Los M cuerpos están caracterizados por constantes dieléctricas complejas $\epsilon_j(\omega)$.

III.1.1. Los campos electromagnéticos

Se considera que el sistema es iluminado por un haz de luz monocromático y que el plano de incidencia es el plano x_1x_3 . El campo electromagnético total puede ser representado por

$$\Psi(\vec{r}, t) = [0, \psi(\vec{r}), 0] \exp(-i\omega t),$$

donde $\vec{r} = (x_1, x_3)$ y $\psi(\vec{r})$ una función escalar que representa a $E_2(x_1, x_3)$ (la segunda componente del campo eléctrico) para el caso de la polarización s y a $H_2(x_1, x_3)$ (la segunda componente del campo magnético) para el caso de la polarización p. Las funciones $\psi(x_1, x_3)$ satisfacen entonces ecuaciones de Helmholtz en la región 0

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi^{(0)}(\vec{r}) = 0, \quad (17a)$$

y en las regiones de 1 hasta M

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi^{(j)}(\vec{r}) = 0. \quad (17b)$$

Las condiciones de frontera que satisfacen los campos al cruzar la interfase son importantes en la formulación del problema. En particular, requerimos que las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos al pasar de un medio a otro sean continuas. En consecuencia, las condiciones de frontera que satisfacen $\psi^{(0)}(\vec{r})$ y $\psi^{(j)}(\vec{r})$ en la superficie de los cuerpos son

$$\psi^{(0)}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_j} = \psi^{(j)}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_j}, \quad (18a)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \psi^{(0)}(\vec{r})}{\partial N_j} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_j} = \frac{1}{\epsilon_j(\omega)} \frac{\partial \psi^{(j)}(\vec{r})}{\partial N_j} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_j}, \quad (18b)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial N_j} = \left[-\eta'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \quad (19)$$

es el operador de la derivada normal (no normalizado) a lo largo del vector $\vec{N}_j = [-\eta'_j(t_j), \xi'_j(t_j)]$ que apunta de la superficie del j -ésimo cuerpo hacia el medio 0.

III.2. Las funciones fuente

Se consideran las funciones de Green, $G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ y $G_j(\vec{r}|\vec{r}')$ como soluciones de las ecuaciones

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_0(\vec{r}|\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (20a)$$

y

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_j(\vec{r}|\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (20b)$$

respectivamente. La función $G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ es la función de Green para el vacío y satisface una condición de radiación, mientras que $G_j(\vec{r}|\vec{r}')$ es para el interior del j -ésimo cuerpo y satisface una condición de absorción. En el desarrollo del trabajo se utilizan representaciones de estas funciones en términos de funciones de Hankel y en términos de su espectro angular (Maradudin *et al.*, 1990). Las representaciones de estas funciones son

$$G_0(\vec{r}|\vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \exp\{iq(x_1 - x'_1) + i\alpha_0(q)|x_3 - x'_3|\} \quad (21a)$$

$$= i\pi H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} [(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{1/2} \right) \quad (21b)$$

y

$$G_j(\vec{r}|\vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_j(q)} \exp\{iq(x_1 - x'_1) + i\alpha_j(q)|x_3 - x'_3|\} \quad (22a)$$

$$= i\pi H_0^{(1)} \left(n_j(\omega) \frac{\omega}{c} [(x_1 - x'_1)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{1/2} \right), \quad (22b)$$

donde

$$\alpha_{0,j}(q) = \begin{cases} \left[(n_{0,j}(\omega) \frac{\omega}{c})^2 - q^2 \right]^{1/2} & q^2 < \frac{\omega^2}{c^2}, \\ i \left[q^2 - (n_{0,j}(\omega) \frac{\omega}{c})^2 \right]^{1/2} & q^2 > \frac{\omega^2}{c^2}, \end{cases}$$

y $H_0^{(1)}(z)$ es una función de Hankel de primera clase y de orden cero.

Como punto de partida para la derivación de una expresión para el campo esparcido, se usa el segundo teorema integral de Green (Jackson, 1999), que establece que

$$\int_V d^3x (u\nabla^2v - v\nabla^2u) = \int_\Sigma ds \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (23)$$

donde $u(\vec{x})$ y $v(\vec{x})$ son campos escalares arbitrarios definidos en un volumen V rodeado por una superficie cerrada Σ , y $\partial/\partial n$ es la derivada a lo largo de la normal a la superficie dirigida hacia afuera del volumen V .

Para la región 0, se hace la sustitución $u = \psi^{(0)}(\vec{r})$ y $v = G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ en la ecuación (23). Además, usando las ecuaciones (17), (20a) y las condiciones de frontera (18a) se obtiene el campo $\psi^{(0)}(\vec{r})$ de la siguiente manera

$$\psi^{(0)}(\vec{r}) = \psi_{inc}^{(0)}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial G_0(\vec{r}|t'_j)}{\partial N_j} \psi^{(0)}(t'_j) - G_0(\vec{r}|t'_j) \chi^{(0)}(t'_j) \right] dt'_j. \quad (24)$$

En esta expresión, $\psi_{inc}^{(0)}(\vec{r})$ representa el campo incidente y la suma de integrales representa el campo esparcido. Para llegar a la ecuación (24) se ha usado el hecho de que el elemento de arco de la curva Γ_j está dado por $ds_j = \phi_j(t_j)dt_j$. Las funciones fuente $\psi^{(0)}(t_j)$ y $\chi^{(0)}(t_j)$ que representan los valores del campo y su derivada normal evaluadas sobre la superficie son expresadas como

$$\psi^{(0)}(t_j) = \psi^{(0)}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_j}, \quad (25a)$$

$$\chi^{(0)}(t_j) = \frac{\partial \psi^{(0)}(\vec{r})}{\partial N_j} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_j}. \quad (25b)$$

Similarmente, para la función de Green y su derivada normal se tiene que

$$G_0(\vec{r}|t_j) = G_0(\vec{r}|\vec{r}') \Big|_{\vec{r}'=\vec{r}_j}, \quad (26a)$$

$$\frac{\partial G_0(\vec{r}|t_j)}{\partial N_j} = \frac{\partial G_0(\vec{r}|\vec{r}')}{\partial N_j} \Big|_{\vec{r}'=\vec{r}_j}. \quad (26b)$$

Siguiendo los mismos pasos para la j -ésima región, donde $u = \psi^{(j)}(\vec{r})$ y $v = G_j(\vec{r}|\vec{r}')$, el campo $\psi^{(j)}(\vec{r})$ puede ser expresado como

$$\theta_j(\vec{r})\psi^{(j)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial G_j(\vec{r}|t'_j)}{\partial N_j} \psi^{(j)}(t'_j) - G_j(\vec{r}|t'_j) \chi^{(j)}(t'_j) \right] dt'_j, \quad (27)$$

donde $\theta_j(\vec{r})$ es uno para puntos dentro del medio j y cero para otro caso. Las ecuaciones (24) y (27) forman un sistema de ecuaciones integrales con las que se puede obtener el campo total en el medio de incidencia y de esparcimiento.

Para calcular el campo esparcido usando el segundo término del lado derecho de la ecuación (24), primero es necesario encontrar una forma de obtener las funciones fuente a partir de las ecuaciones integrales. Para esto, se hace una aproximación del punto de observación en la región 0 a la superficie de la región i . Por lo tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones integrales acopladas

$$\psi^{(0)}(t_i) = \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial G_0(t_i|t'_j)}{\partial N_j} \psi^{(0)}(t'_j) - G_0(t_i|t'_j) \chi^{(0)}(t'_j) \right] dt'_j, \quad (28)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial G_j(t_i|t'_j)}{\partial N_j} \psi^{(0)}(t'_j) - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} G_j(t_i|t'_j) \chi^{(0)}(t'_j) \right] \delta_{ij} dt'_j, \quad (29)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

con $i = 1$ hasta M , y las expresiones $\varepsilon_{0,j} = \varepsilon_{0,j}(\omega)$ para la polarización p y $\varepsilon_{0,j} = 1$ para la polarización s.

III.2.1. Discretización de las ecuaciones integrales

Las ecuaciones (28) y (29) constituyen un conjunto de $2M$ ecuaciones integrales inhomogéneas acopladas que pueden ser resueltas numéricamente para obtener los valores

límite del campo $\psi^{(0)}(t_j)$ y su derivada normal $\chi^{(0)}(t_j)$ sobre la superficie de los cuerpos esparcidos.

Las ecuaciones integrales (28) y (29), pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\psi^{(0)}(t_i) = \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[\Psi_0(t_i|t'_j) \psi^{(0)}(t'_j) - \Phi_0(t_i|t'_j) \chi^{(0)}(t'_j) \right] dt'_j, \quad (30)$$

$$0 = - \int_{\Gamma_j} \left[\Psi_j(t_i|t'_j) \psi^{(0)}(t'_j) - \frac{\varepsilon_j(\omega)}{\varepsilon_0(\omega)} \Phi_j(t_i|t'_j) \chi^{(0)}(t'_j) \right] \delta_{ij} dt'_j, \quad (31)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_j(t_i|t'_j) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left(-\eta'_j(t'_j) \frac{\partial}{\partial x'_1} + \xi'_j(t'_j) \frac{\partial}{\partial x'_3} \right) G_j(\vec{r}^+ | \vec{r}') \Big|_{\vec{r}^+ = \vec{r}_i + \nu \hat{N}_i, \vec{r}' = [\xi_j(t_j), \eta_j(t_j)]} \\ &= \frac{i}{4} \left(n_j \frac{\omega}{c} \right)^2 \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{H_1^{(1)} \left(n_j \frac{\omega}{c} [\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2]^{1/2} \right)}{n_j \frac{\omega}{c} [\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2]^{1/2}} \left[-\xi_\nu \eta'_j(t'_j) + \eta_\nu \xi'_j(t'_j) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

y

$$\begin{aligned} \Phi_j(t_i|t'_j) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0} G_j \left(\vec{r}_i + \nu \vec{N}_i | \xi_j(t'_j), \eta_j(t'_j) \right) \\ &= \frac{i}{4} \lim_{\nu \rightarrow 0} H_0^{(1)} \left(n_j \frac{\omega}{c} [\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2]^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

En las expresiones anteriores se han definido

$$\xi_\nu = \xi_i(t_i) - \xi_j(t'_j) - \frac{\nu \eta'_i(t_i)}{\phi(t_i)}, \quad (34a)$$

$$\eta_\nu = \eta_i(t_i) - \eta_j(t'_j) + \frac{\nu \xi'_i(t_i)}{\phi(t_i)}, \quad (34b)$$

y $\vec{N}_i = \vec{N}_i / \phi(t_i)$ es el vector normal unitario de $\vec{r}_i = [\xi_i(t_i), \eta_i(t_i)]$. Las funciones $\Psi_0(t_i|t'_j)$ y $\Phi_0(t_i|t'_j)$ se obtienen de las ecuaciones (32) y (33) con $n_j(\omega) = 1$, respectivamente.

Debido a que no es posible resolver de manera analítica el sistema de ecuaciones integrales acopladas, representadas por las ecuaciones (30) y (31), recurrimos a un

método numérico. Para esto es necesario convertir las ecuaciones antes citadas a ecuaciones matriciales, usando una aproximación de rectángulos para evaluar las integrales en intervalos pequeños. Considerando una longitud $L_j = \int_{\Gamma_j} dt_j$ para el j -ésimo cuerpo definido por la curva Γ_j , la longitud total L_T de los contornos de los M cuerpos es

$$L_T = \sum_{j=1}^M L_j.$$

Para cada longitud L_j , se introduce un conjunto $\{r_{j,n}\}$ de N_j puntos igualmente espaciados $r_{j,n} = [\xi_j(t_{j,n}), \eta_j(t_{j,n})]$ con $n = 1, 2, \dots, N_j$. Los puntos de muestreo están dados por

$$t_{j,n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta t_{j,n} + L_{j-1}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, M,$$

donde $L_0 = 0$ y $\Delta t_{j,n} = t_{j,n} - t_{j,n-1}$ es la separación entre los puntos $\{t_{j,n}\}$ para el j -ésimo cuerpo.

De esta forma, la ecuación (30) puede ser reescrita como

$$\psi^{(0)}(t_i) = \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \left[\Psi_0(t_i|t'_j) \psi^{(0)}(t'_j) - \Phi_0(t_i|t'_j) \chi^{(0)}(t'_j) \right] dt'_j. \quad (35)$$

Suponiendo que $\psi^{(0)}(t_j)$ y $\chi^{(0)}(t_j)$ son funciones de t_j que varían lentamente en cada intervalo $(t_{j,n} - \Delta t_{j,n}/2, t_{j,n} + \Delta t_{j,n}/2)$, la ecuación (35) se puede aproximar por

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(t_i) = & \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} \left[\psi^{(0)}(t_{j,n}) \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Psi_0(t_i|t'_j) dt'_j \right. \\ & \left. - \chi^{(0)}(t_{j,n}) \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Phi_0(t_i|t'_j) dt'_j \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Ahora, evaluando t_i en posiciones discretas $t_i = t_{i,m}$ se obtiene

$$\psi^{(0)}(t_{i,m}) = \psi_{inc}^{(0)}(t_{i,m}) + \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} \left[\Psi_{i,mn}^{(0)} \psi^{(0)}(t_{j,n}) - \Phi_{i,mn}^{(0)} \chi^{(0)}(t_{j,n}) \right], \quad (37)$$

donde

$$\Psi_{i,mn}^{(0)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Psi_0(t_{i,m}|t'_j) dt'_j \quad (38)$$

y

$$\Phi_{i,mn}^{(0)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Phi_0(t_{i,m}|t'_j) dt'_j. \quad (39)$$

De la misma manera se convierte la ecuación (31) en

$$\sum_{n=1}^{N_j} \left[\Psi_{mn}^{(j)} \psi^{(0)}(t_{j,n}) - \frac{\varepsilon_j(\omega)}{\varepsilon_0(\omega)} \Phi_{mn}^{(j)} \chi^{(0)}(t_{j,n}) \right] = 0, \quad (40)$$

donde

$$\Psi_{mn}^{(j)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Psi_j(t_{i,m}|t'_j) dt'_j \quad (41)$$

y

$$\Phi_{mn}^{(j)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Phi_j(t_{i,m}|t'_j) dt'_j. \quad (42)$$

Los elementos de las matrices $\Psi_{mn}^{(j)}$ y $\Phi_{mn}^{(j)}$ pueden ser determinados evaluando las integrales involucradas en las ecuaciones (41) y (42), mientras que los elementos $\Psi_{i,mn}^{(0)}$ y $\Phi_{i,mn}^{(0)}$ se pueden obtener de esos resultados haciendo $n_j(\omega) = 1$, respectivamente. Haciendo el cambio de variable $t_j = t_{i,n} + u$ las ecuaciones (41) y (42) se pueden escribir como

$$\Psi_{mn}^{(j)} = \int_{-\Delta t_{j,n}/2}^{\Delta t_{j,n}/2} \Psi_j(t_{i,m}|t_{i,n} + u) du, \quad (43a)$$

$$\Phi_{mn}^{(j)} = \int_{-\Delta t_{j,n}/2}^{\Delta t_{j,n}/2} \Phi_j(t_{i,m}|t_{i,n} + u) du, \quad (43b)$$

donde $\Psi_j(t_i|t'_j)$ y $\Phi_j(t_i|t'_j)$ están dadas por las ecuaciones (32) y (33), respectivamente.

En los casos en que $m \neq n$, los integrandos de las ecuaciones (43) no tienen singularidades para u en el rango de integración $(-\Delta t_{j,n}/2, \Delta t_{j,n}/2)$. Por lo tanto, a primer orden de $\Delta t_{j,n}$ los elementos de las matrices $\Psi_{mn}^{(j)}$ y $\Phi_{mn}^{(j)}$ se pueden escribir de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}^{(j)} &\approx \Psi_j(t_{i,m}|t_{i,n})\Delta t_{j,n} \\ &= \frac{i\Delta t_{j,n} n_j^2 \omega^2 H_1^{(1)} \left(n_j \frac{\omega}{c} [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2} \right)}{4 n_j \frac{\omega}{c} [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2}} \\ &\quad \times [-(\xi_m - \xi_n) \eta'_n + (\eta_m - \eta_n) \xi'_n] \end{aligned} \quad (44)$$

y

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}^{(j)} &\approx \Phi_j(t_{i,m}|t_{i,n})\Delta t_{j,n} \\ &= \frac{i\Delta t_{j,n} n_j \omega}{4 c} H_0^{(1)} \left(n_j \frac{\omega}{c} [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

donde se ha usado la notación $\xi_n = \xi_n(t_{i,n})$, $\xi'_n = \xi'_n(t_{i,n})$, $\eta_n = \eta_n(t_{i,n})$, $\eta'_n = \eta'_n(t_{i,n})$, $\xi_m = \xi_m(t_{i,m})$ y $\eta_m = \eta_m(t_{i,m})$.

Para evaluar los elementos de la diagonal, $\Psi_{mm}^{(j)}$ y $\Phi_{mm}^{(j)}$, se requiere un tratamiento especial debido a las singularidades que se presentan en las funciones $\Psi_j(t_i|t'_j)$ y $\Phi_j(t_i|t'_j)$ cuando los argumentos coinciden.

Para los elementos $\Phi_{mm}^{(j)}$ se parte de las ecuaciones (42) y (33)

$$\Phi_{mm}^{(j)} = \frac{i}{4} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{t_{j,m} - \Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,m} + \Delta t_{j,n}/2} H_0^{(1)} \left(n_j \frac{\omega}{c} \left\{ [\xi_m^{(\nu)}(t'_j)]^2 + [\eta_m^{(\nu)}(t'_j)]^2 \right\}^{1/2} \right) dt'_j, \quad (46)$$

donde se han definido

$$\xi_m^{(\nu)}(t'_j) = \xi_m - \xi_j(t'_j) - \nu \frac{\eta'_m}{\phi(t_m)}, \quad (47a)$$

$$\eta_m^{(\nu)}(t'_j) = \eta_m - \eta_j(t'_j) + \nu \frac{\xi'_m}{\phi(t_m)}, \quad (47b)$$

con la notación $\xi'_m = \xi'_m(t_{i,m})$ y $\eta'_m = \eta'_m(t_{i,m})$. Haciendo el cambio de variable $t'_j = t_{i,m} + u$ y un desarrollo de Taylor hasta segundo orden en u , la ecuación (46) se

puede expresar como

$$\Phi_{mm}^{(j)} = \frac{i}{4} \lim_{\nu \rightarrow 0} 2 \int_0^{\Delta t_{j,n}/2} H_0^{(1)} \left(n_j \frac{\omega}{c} [\eta^2 + a_\nu^2 u^2]^{1/2} \right) du, \quad (48)$$

donde

$$a_\nu = \left[\phi^2(t_m) + \frac{\nu}{\phi(t_m)} (\xi_m'' \eta_m' - \xi_m' \eta_m'') \right]^{1/2}. \quad (49)$$

Usando el desarrollo en serie de Taylor para la función de Hankel (Abramovitz y Stegun, 1965)

$$H_0^{(1)}(z) = 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma z}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{i \gamma z}{\pi 2e} \right) \frac{z^2}{2} + \dots, \quad (50)$$

donde $\gamma = 1.781072$ es la constante de Euler y aplicando el límite cuando $\nu \rightarrow 0$, la ecuación (48) se puede aproximar como

$$\Phi_{mm}^{(j)} \approx \frac{i}{4} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma n_j \frac{\omega}{c} \phi(t_m) \Delta t_{j,m}/2}{2e} \right) \Delta t_{j,m} \right].$$

Aplicando nuevamente la ecuación (50), se puede escribir los elementos de la diagonal de la forma

$$\Phi_{mm}^{(j)} = \frac{i \Delta t_{j,m}}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{n_j \frac{\omega}{c} \phi(t_m) \Delta t_{j,m}}{2e} \right). \quad (51)$$

Similarmente, para evaluar los elementos $\Psi_{mm}^{(j)}$ se parte de las ecuaciones (41) y (32)

$$\begin{aligned} \Psi_{mm}^{(j)} &= \frac{i}{4} n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{t_{j,m} - \Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,m} + \Delta t_{j,n}/2} \frac{H_1^{(1)} \left(n_j \frac{\omega}{c} \left[(\xi_m^{(\nu)})^2 + (\eta_m^{(\nu)})^2 \right]^{1/2} \right)}{n_j \frac{\omega}{c} \left[(\xi_m^{(\nu)})^2 + (\eta_m^{(\nu)})^2 \right]^{1/2}} \\ &\quad \times \left[-\xi_m^{(\nu)} \eta_j' (t_j') + \eta_m^{(\nu)} \xi_j' (t_j') \right] dt_j'. \end{aligned} \quad (52)$$

Haciendo el cambio de variable $t_j' = t_{i,m} + u$ y usando el resultado para valores pequeños de z (Abramovitz y Stegun, 1965)

$$\frac{H_1^{(1)}(z)}{z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \right) - \frac{2i}{\pi z^2} + \frac{i}{\pi} \ln \frac{\gamma z}{2e} + \dots, \quad (53)$$

la ecuación (52) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Psi_{mm}^{(j)} &= \frac{i}{4} n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{-\Delta t_{j,n}/2}^{\Delta t_{j,n}/2} [b_\nu u^2 + c_\nu u + \nu \phi(t_m)] \\ &\quad \times \left[k_\nu + \frac{i}{2\pi} \ln \left(\frac{\nu^2}{a_\nu^2} + u^2 \right) - \frac{2i/\pi}{n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} a_\nu^2 \frac{\nu^2}{a_\nu^2} + u^2} \right] du, \end{aligned} \quad (54)$$

donde

$$\begin{aligned} b_\nu &= \frac{1}{2} \left[(\xi'_m \eta''_m - \xi''_m \eta'_m) + \frac{\nu}{\phi(t_m)} (\xi'_m \xi'''_m - \eta'_m \eta'''_m) \right], \\ c_\nu &= \frac{\nu}{\phi(t_m)} [\xi'_m \xi''_m - \eta'_m \eta''_m], \\ k_\nu &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} + \frac{i}{\pi} \ln \frac{\gamma}{2e} + \frac{i}{\pi} \ln \left(n_j \frac{\omega}{c} |a_\nu| \right), \end{aligned}$$

y se ha usado la notación $\xi''_m = \xi''_m(t_{i,m})$, $\eta''_m = \eta''_m(t_{i,m})$, $\xi'''_m = \xi'''_m(t_{i,m})$ y $\eta'''_m = \eta'''_m(t_{i,m})$.

Finalmente, aplicando el límite cuando $\nu \rightarrow 0$ en la ecuación (54) se obtiene que

$$\Psi_{mm}^{(j)} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta t_{j,m}}{4\pi\phi^2(t_m)} (\xi'_m \eta''_m - \xi''_m \eta'_m). \quad (55)$$

De esta manera, con las ecuaciones (44), (45), (51) y (55), se obtienen los elementos de las matrices $\Psi_{mn}^{(0,j)}$ y $\Phi_{mn}^{(0,j)}$ para calcular las funciones fuente $\psi^{(0)}(t_{j,n})$ y $\chi^{(0)}(t_{j,n})$ que aparecen en las ecuaciones (28) y (29), respectivamente.

Para cuerpos perfectamente conductores el problema se simplifica considerablemente, debido a que una de las condiciones de frontera es cero. Es decir, para la polarización s la función $\psi^{(0)}(t_j) = 0$ y para la polarización p la función $\chi^{(0)}(t_j) = 0$.

III.3. El Campo Incidente

Para tratar el problema de difracción por una rendija con el método previamente descrito es necesario hacer ciertas consideraciones. Como el tamaño del sistema debe ser

finito, para evitar efectos de borde se utilizará como haz incidente un haz gaussiano cuya intersección con el plano de la rendija tiene un ancho g . Este parámetro debe ser más pequeño que la longitud total del sistema $L = 2b + l$ y mucho más grande que el ancho de la abertura l (ver figura 11).

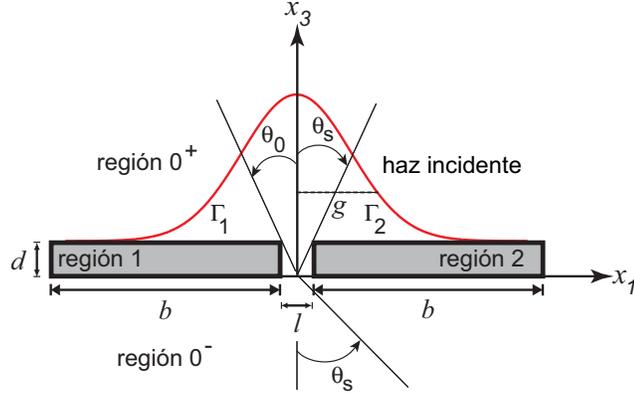


Figura 11. Esquema de una rendija de ancho l y de espesor d . La longitud del sistema es $L = 2b + l$. Sobre el plano $x_3 = d$, el semi ancho del módulo del haz gaussiano incidente es g . Los ángulos de incidencia θ_0 y esparcimiento θ_s (para reflexión y transmisión) están definidos como positivos en el sentido indicado en la figura.

Se requiere entonces una expresión matemática para describir un haz de este tipo que sea solución de las ecuaciones de Maxwell. Para obtener dicha expresión, se propone una forma funcional del campo incidente en términos de su espectro angular $A(q|k)$ de la siguiente manera

$$f(x_1, x_3) = \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} A(q|k) \exp\{iqx_1 - i\alpha_0(q)x_3\}, \quad (56)$$

donde $\alpha_0(q) = [(n_0\omega/c)^2 - q^2]^{1/2}$, con $\Re \alpha_0(q) > 0$ y $\Im \alpha_0(q) > 0$. Por consiguiente, el campo incidente puede ser escrito como

$$\psi_{inc}^{(0)}(x_1, x_3) = \psi_0 f(x_1, x_3), \quad (57)$$

donde ψ_0 es una constante con las unidades apropiadas. En nuestro caso, para un haz

gaussiano se propone la función

$$A(q|k) = \sqrt{\pi}g \exp \left\{ -g^2(q - k)^2/4 + i\alpha_0(q)d \right\}. \quad (58)$$

Sustituyendo la ecuación (58) en (57) y evaluando en $x_3 = d$

$$\psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) = \psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \sqrt{\pi}g \exp \left\{ -g^2(q - k)^2/4 \right\} \exp \{ iqx_1 \}, \quad (59)$$

se obtiene el campo incidente sobre dicho plano, es decir,

$$\psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) = \psi_0 \exp \{ ikx_1 \} \exp \left\{ -x_1^2/g^2 \right\}. \quad (60)$$

El parámetro $k = n_0(\omega/c) \sin \theta_0$, donde θ_0 representa el ángulo de incidencia. Esto muestra que sobre el plano $x_3 = d$ el campo incidente tiene una modulación gaussiana y una fase que es la de una onda plana con un ángulo de incidencia θ_0 . Es fácil obtener expresiones analíticas aproximadas para $\psi_{inc}^{(0)}(x_1, x_3)$ cuando $x_3 \neq d$. Sin embargo, para los cálculos numéricos es preferible evaluar este campo incidente por integración numérica de la ecuación (56) con base en el espectro angular dado por la ecuación (58).

III.4. La Potencia Incidente

Para calcular el coeficiente de reflexión diferencial (DRC¹), el cual representa la fracción de energía incidente sobre una superficie que es esparcida por unidad de ángulo, se necesita calcular el flujo incidente total y el flujo esparcido total. Para esto, se emplea el vector de Poynting \vec{S} , que proporciona la dirección y la magnitud del flujo de energía por unidad de tiempo. Empleando notación compleja se tiene que

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \times \vec{H}^*. \quad (61)$$

¹Por sus siglas en inglés, Differential Reflection Coefficient.

La parte real de esta expresión proporciona una medida de la irradiancia, o flujo de energía promedio por unidad de tiempo. Para el caso de la polarización s, de la ecuación (61) se tiene que la componente del vector de Poynting a lo largo del eje x_3 está dada por

$$S_3 = \frac{c}{8\pi} \Re\{-H_1^* E_2\}, \quad (62)$$

o bien, en términos del campo eléctrico,

$$S_3 = \frac{c^2}{8\pi\omega} \Re\left\{-iE_2 \frac{\partial E_2^*}{\partial x_3}\right\}. \quad (63)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el caso de la polarización p, la componente del vector de Poynting es

$$S_3 = \frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon(\omega)} \Re\left\{-iH_2^* \frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right\}. \quad (64)$$

Ahora, calculando la derivada del campo incidente (57)

$$\frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x_1, x_3)}{\partial x_3} = \psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} A(q|k) [-i\alpha_0(k)] \exp\{iqx_1 - i\alpha_0(q)x_3\}, \quad (65)$$

y haciendo una evaluación en $x_3 = d$ se obtiene

$$\left. \frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right|_{x_3=d} = -i\psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) \sqrt{\pi} g \exp\{-g^2(q-k)^2/4\} \exp\{iqx_1\}. \quad (66)$$

Hacemos notar que se ha supuesto que el haz que ilumina la rendija es mucho más grande que la longitud de onda, es decir, $(\omega/c)g \gg 1$. En esta situación, la exponencial en el integrando es relativamente angosta y está centrada en $q = k$, de manera que se puede considerar que $\alpha_0(q)$ es una constante sobre el rango en el cual el integrando es significativo. La expresión (66) entonces se puede escribir como

$$\left. \frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right|_{x_3=d} = -i\alpha_0(k)\psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \sqrt{\pi} g \exp\{-g^2(q-k)^2/4\} \exp\{iqx_1\}, \quad (67)$$

o bien,

$$\left. \frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right|_{x_3=d} = -i\alpha_0(k) \psi_{inc}^{(0)}(x_1, d). \quad (68)$$

Así, para la polarización s se tiene que

$$\begin{aligned} |S_3|_{x_3=d} &= \left| \Re \left\{ -\frac{ic^2}{8\pi\omega} \psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) [i\alpha_0(k) \psi_{inc}^{(0)*}(x_1, d)] \right\} \right| \\ &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \alpha_0(k) \left| \psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) \right|^2, \end{aligned} \quad (69)$$

y para la polarización p

$$\begin{aligned} |S_3|_{x_3=d} &= \left| \Re \left\{ -\frac{ic^2}{8\pi\omega\epsilon(\omega)} \psi_{inc}^{(0)*}(x_1, d) [-i\alpha_0(k) \psi_{inc}^{(0)}(x_1, d)] \right\} \right| \\ &= \frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon(\omega)} \alpha_0(k) \left| \psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) \right|^2. \end{aligned} \quad (70)$$

De esta manera, en general se puede escribir la componente 3 del vector de Poynting como

$$|S_3|_{x_3=d} = \frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon} \alpha_0(k) \left| \psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) \right|^2, \quad (71)$$

donde $\epsilon = \epsilon(\omega)$ para la polarización p, y $\epsilon = 1$ para la polarización s.

Para obtener la potencia incidente es necesario integrar sobre un área. El haz está confinado a lo largo de x_1 y, con límites de integración desde $-L/2$ hasta $L/2$, se cubre el total de la región iluminada. En la dirección x_2 , en la cual la rendija y el haz son invariantes, se integra sobre una longitud L_2 . Entonces, se puede escribir la potencia incidente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P_{inc}(k) &= \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \int_{-L_2/2}^{L_2/2} dx_2 |S_3|_{x_3=d} \\ &= L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon} \alpha_0(k) \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \left| \psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) \right|^2, \end{aligned} \quad (72)$$

y como

$$\psi_{inc}^{(0)}(x_1, d) = \psi_0 \exp\{ikx_1\} \exp\{-x_1^2/g^2\},$$

la expresión se reduce a

$$\begin{aligned}
 P_{inc}(k) &= L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \alpha_0(k) |\psi_0|^2 \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \exp\{-2x_1^2/g^2\} \\
 &= L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \alpha_0(k) |\psi_0|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} g.
 \end{aligned} \tag{73}$$

Por consiguiente, la potencia incidente es

$$P_{inc}(k) = L_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(k) \frac{c^2}{8\pi\varepsilon\omega} |\psi_0|^2. \tag{74}$$

III.5. El Campo Esparcido

El campo esparcido está representado por el segundo término del lado derecho de la ecuación (28). Partiendo de esta ecuación se puede obtener una expresión para los campos reflejado y transmitido en términos del espectro angular. Para esto, se usa una expansión en términos de ondas planas para la función de Green (Maradudin *et al.*, 1990) definida como

$$G_0(\vec{r}|\vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \exp\{iq(x_1 - x'_1) + i\alpha_0(q)|x_3 - x'_3|\}. \tag{75}$$

Partiendo de las derivadas parciales de la función de Green

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} G_0(\vec{r}|\vec{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi q}{\alpha_0(q)} \exp\{iq(x_1 - x'_1) + i\alpha_0(q)|x_3 - x'_3|\} \tag{76}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x'_3} G_0(\vec{r}|\vec{r}') = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} 2\pi \exp\{iq(x_1 - x'_1) + i\alpha_0(q)|x_3 - x'_3|\}, \tag{77}$$

donde el signo + es para $x_3 > x'_3$ y el signo - para $x_3 < x'_3$, se obtiene su derivada

normal de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial N_j} G_0(\vec{r}|\vec{r}') \right|_{\vec{r}'=(\xi_j(t_j), \eta_j(t_j))} &= \left[-\eta'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial x'_1} + \xi'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial x'_3} \right] G_0(\vec{r}|\vec{r}') \Big|_{\vec{r}'=(\xi_j(t_j), \eta_j(t_j))} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi}{\alpha_0(q)} [-\eta'_j(t_j)q \pm \xi'_j(t_j)\alpha_0(q)] \\
&\quad \times \exp \{ iq [x_1 - \xi_j(t_j)] + i\alpha_0(q)|x_3 - \eta_j(t_j)| \}. \quad (78)
\end{aligned}$$

Definiendo $\vec{Q} = (q, \pm\alpha_0(q))$, la ecuación (78) se puede reescribir como

$$\left. \frac{\partial}{\partial N_j} G_0(\vec{r}|\vec{r}') \right|_{\vec{r}'=(\xi_j(t_j), \eta_j(t_j))} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi}{\alpha_0(q)} [\vec{N}_j \cdot \vec{Q}] \exp \{ iq [x_1 - \xi_j(t_j)] + i\alpha_0(q)|x_3 - \eta_j(t_j)| \}. \quad (79)$$

Sustituyendo la ecuación (79) en el segundo término del lado derecho de la ecuación (28), el campo esparcido se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\psi_{sc}^{(0)}(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[\frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} [-i\vec{N}_j \cdot \vec{Q}] \psi^{(0)}(t_j) - \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \chi^{(0)}(t_j) \right] \\
&\quad \times \exp \{ iq [x_1 - \xi_j(t_j)] + i\alpha_0(q) |x_3 - \eta_j(t_j)| \} dt_j. \quad (80)
\end{aligned}$$

Volviendo a nuestra geometría, para el espacio $x_3 > d$, de la ecuación (80) se tiene que el campo reflejado es

$$\psi_{sc}^{(0)+}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^+(q|k) \exp \{ iqx_1 + i\alpha_0(q)x_3 \}, \quad (81a)$$

donde

$$S^+(q|k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} [i\vec{N}_j \cdot \vec{Q} \psi^{(0)}(t_j) + \chi^{(0)}(t_j)] \exp \{ -iq\xi_j(t_j) - i\alpha_0(q)\eta_j(t_j) \} dt_j,$$

y para el espacio $x_3 < 0$, el campo transmitido tiene la forma

$$\psi_{sc}^{(0)-}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^-(q|k) \exp \{ iqx_1 - i\alpha_0(q)x_3 \}, \quad (81b)$$

con

$$S^-(q|k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[i\vec{N}_j \cdot \vec{Q} \psi^{(0)}(t_j) + \chi^{(0)}(t_j) \right] \exp\{-iq\xi_j(t_j) + i\alpha_0(q)\eta_j(t_j)\} dt_j.$$

Por consiguiente el campo total, para la región $x_3 < 0$, se puede escribir como

$$\psi_{tot}^{(0)-}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} [A(q|k) + S^-(q|k)] \exp\{iqx_1 - i\alpha_0(q)x_3\}, \quad (82a)$$

y para la región $x_3 > d$ de la forma

$$\psi_{tot}^{(0)+}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^+(q|k) \exp\{iqx_1 + i\alpha_0(q)x_3\}, \quad (82b)$$

donde

$$\begin{aligned} S^\pm(q|k) &= \frac{i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left\{ i [q\eta'_j(t_j) \mp \alpha_0(q)\xi'_j(t_j)] \psi^{(0)}(t_j) - \chi^{(0)}(t_j) \right\} \\ &\quad \times \exp\left\{ -i [q\xi_j(t_j) \pm \alpha_0(q)\eta_j(t_j)] \right\} dt_j \end{aligned} \quad (83)$$

representa el espectro angular del campo esparcido.

Para el caso de transmisión $[S^-(q|k)]$ y $q < n_0(\omega/c)$, las componentes del vector de onda son $q = n_0(\omega/c) \sin \theta_t$ y $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c) \cos \theta_t$, mientras que para el caso de reflexión $[S^+(q|k)]$ y $q < n_0(\omega/c)$, $q = n_0(\omega/c) \sin \theta_r$ y $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c) \cos \theta_r$ (ver figura 11).

III.6. La Potencia Esparcida

Para obtener la expresión para la potencia esparcida, en términos del espectro angular del campo esparcido, se sigue un procedimiento análogo al caso de la potencia incidente.

De las expresiones (63), (64), (81) y (83) para los campos esparcidos, se obtiene la

siguiente expresión para la potencia esparcida

$$\begin{aligned}
P_{sc}^{\pm}(k) &= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \int dx_1 \Re e \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq'}{2\pi} \alpha_0(q) S^{\pm}(q|k) S^{\pm*}(q'|k) \\
&\quad \times \exp \{i(q - q')x_1 \pm i[\alpha_0(q) - \alpha_0^*(q')]x_3\} \\
&= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^{\pm}(q|k)|^2.
\end{aligned} \tag{84}$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (74) y (84), el coeficiente de reflexión diferencial puede ser expresado como

$$\left(\frac{\partial R}{\partial k} \right) = \frac{P_{sc}^{\pm}(k)}{P_{inc}(k)} = \pm \frac{1}{\mathcal{F}(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^{\pm}(q|k)|^2,$$

donde

$$\mathcal{F}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(k) |\psi_0|^2.$$

III.6.1. Los coeficientes de reflexión y transmisión

Utilizando las ecuaciones (82) y (83), se obtienen los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso de una rendija gruesa iluminada con un haz gaussiano

$$\rho(k) = \frac{P_{tot}^+(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{\mathcal{F}(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^+(q|k)|^2 \tag{85}$$

y

$$\tau(k) = \frac{P_{tot}^-(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{\mathcal{F}(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |A(q|k) + S^-(q|k)|^2. \tag{86}$$

Es importante mencionar, que el campo incidente aparece en la ecuación (86) porque el campo total en la región 0 es el resultado de la interferencia entre los campos incidente y esparcido. Para el balance de energía se debe tener que $\rho(k) + \tau(k) \leq 1$, donde la igualdad se debe cumplir para el caso de conductores perfectos.

III.7. Verificación del Método

Para verificar la validez del método utilizado, se presentan comparaciones con datos publicados basados en otros métodos. En la mayoría de los casos publicados se considera que la rendija se ilumina con una onda plana. En consecuencia, se normaliza la potencia transmitida por la potencia incidente en la región de la rendija y no por la potencia total incidente como hemos supuesto en la sección anterior. En nuestro caso, considerando que $g \gg l$, la potencia que intersecta la abertura de la rendija está dada por la expresión

$$P_l(k_0) = L_2 l \alpha_0(k) \frac{c^2}{8\pi\epsilon_0\omega} |\psi_0|^2, \quad (87)$$

y por lo tanto el coeficiente de transmisión de la rendija está dado por

$$\tau_l(k) = \frac{P_{tot}^-(k)}{P_l(k)} = \frac{1}{\mathcal{F}_l(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |A(q|k) + S^-(q|k)|^2, \quad (88)$$

donde

$$\mathcal{F}_l(k) = l \alpha_0(k) |\psi_0|^2. \quad (89)$$

Como un ejemplo del buen funcionamiento del método, en la tabla I se presentan resultados de la potencia transmitida total normalizada por la potencia incidente sobre la abertura [dada por la ecuación (87)] para diferentes espesores d de una rendija perfectamente conductora con iluminación con polarización s. Para los cálculos, se han supuesto los siguientes parámetros: $n_0 = 1$, $\lambda = \pi$, $l = 1$, $g = 23.33$ y $L = 141$. Es decir, que la rendija tiene un ancho $l = \lambda/\pi$ y se encuentra en aire. Los bloques rectangulares que forman la rendija fueron muestreados espacialmente con incrementos de $\Delta t = 1/20$. La tabla también incluye cálculos por otros autores (Mata Méndez *et al.*, 1983).

Tabla I. Transmisión normalizada para una rendija perfectamente conductora de ancho $l = \lambda/\pi$ para diferentes espesores.

Autor	Espesor d						
	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8
Mata	0.29748	0.1797	0.11005	0.04168	0.02568	0.01582	0.00975
Hongo	0.30048	0.18143	0.11108	0.04206	0.02509	0.01546	0.00950
Roumiguieres	0.29822	0.18013	0.11030	0.04177	0.02573	0.01585	0.00977
Resultados	0.30678	0.18419	0.11241	0.04236	0.02605	0.01602	0.00986

Los resultados muestran que el método integral da resultados confiables y es adecuado para abordar problemas de esparcimiento con rendijas metálicas. Éste, que es un problema de interés en esta tesis, se aborda en el siguiente capítulo.

Capítulo IV

RENDIJAS CON ILUMINACIÓN DIFUSA

En este capítulo se presentan resultados numéricos sobre la propagación de luz a través de rendijas perfectamente conductoras. Consideramos primero iluminación direccional, para estudiar después el caso de iluminación difusa. Posteriormente, tomamos en cuenta situaciones más realistas y estudiamos los efectos de conductividad finita, imperfecciones de la rendija y fenómenos de difracción cónica o iluminación fuera del plano. El estudio numérico está basado en el método de la ecuación integral descrito en el capítulo anterior.

IV.1. Rendijas ideales

En las figuras 12 y 13 se presentan resultados para el coeficiente de transmisión $\tau(k)$ [ecuación (86)] como función del ángulo de incidencia y el ancho de la abertura de una rendija perfectamente conductora de espesor $d = 3.8\lambda$. Con base en estos resultados se puede calcular e interpretar la transmitancia de la rendija cuando se ilumina con luz difusa. La semi longitud de la superficie a lo largo del eje x_1 fue elegida como

$b = 18\lambda$ y los bloques rectangulares fueron muestreados con intervalos de longitud igualmente espaciados $\Delta t = \lambda/15$. Dentro de intervalos razonables, la elección de estos parámetros del cálculo no es crítica para los resultados. La figura 12 corresponde al caso de polarización s. Considerando a la rendija como una guía de onda, al aumentar el ancho del canal se esperaría la aparición de nuevos modos cada media longitud de onda. Vemos en la figura que la transmitancia de la rendija crece abruptamente en estos puntos. También, se puede observar que para iluminación simétrica (a incidencia normal) los modos impares no se excitan y que para algunos ángulos la excitación de los modos pares es ineficiente. Entre estos cambios abruptos que dependen del ángulo de incidencia, la transmitancia puede crecer o decrecer linealmente como una función del ancho de la abertura. Por otro lado, con polarización p (ver figura 13), el coeficiente de transmisión muestra un crecimiento más suave, salvo por la presencia de algunas oscilaciones en las zonas en las que aparecen nuevos modos.

Una diferencia interesante entre las polarizaciones es que para una guía de onda cuyo ancho es menor que $\lambda/2$ no hay modos permitidos para la polarización s. En cambio, para la polarización p siempre habrá al menos un modo permitido. En general, un incremento en el ancho de la rendija sin permitir nuevos modos modifica los detalles de los modos de propagación. Es decir que, a pesar de que no hay más modos, la forma y las constantes de propagación de los modos existentes si cambian. Los resultados indican que para la polarización s el cambio en el modo no necesariamente permite el transporte de más potencia, lo cual contrasta con lo que sucede con la polarización p.

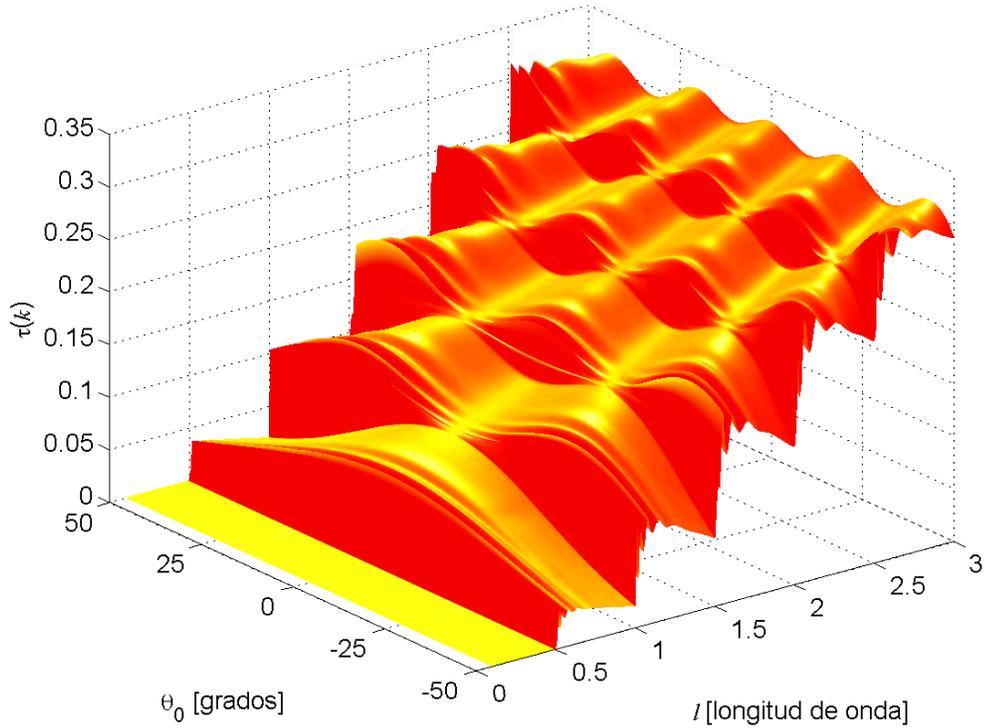


Figura 12. Coeficiente de transmisión de una rendija perfectamente conductora para el caso de polarización s como función del ancho de la abertura y el ángulo de incidencia. El espesor de la rendija es $d = 3.8\lambda$ y el semi ancho del haz gaussiano es $g = 7.2\lambda$.

IV.2. Rendijas ideales con iluminación difusa

Consideramos ahora el problema de la transmisión de luz difusa por rendijas. Para modelar la iluminación difusa se usa un conjunto de haces gaussianos como el descrito por las ecuaciones (56) y (57), que inciden a diferentes ángulos con fases aleatorias no correlacionadas. Los coeficientes de reflexión y transmisión, promediados sobre el conjunto de realizaciones, están dados por el promedio de los coeficientes de intensidad de reflexión y transmisión,

$$R = \frac{1}{N_{inc}} \sum_{i=1}^{N_{inc}} \rho(k_i), \quad T = \frac{1}{N_{inc}} \sum_{i=1}^{N_{inc}} \tau(k_i), \quad (90)$$

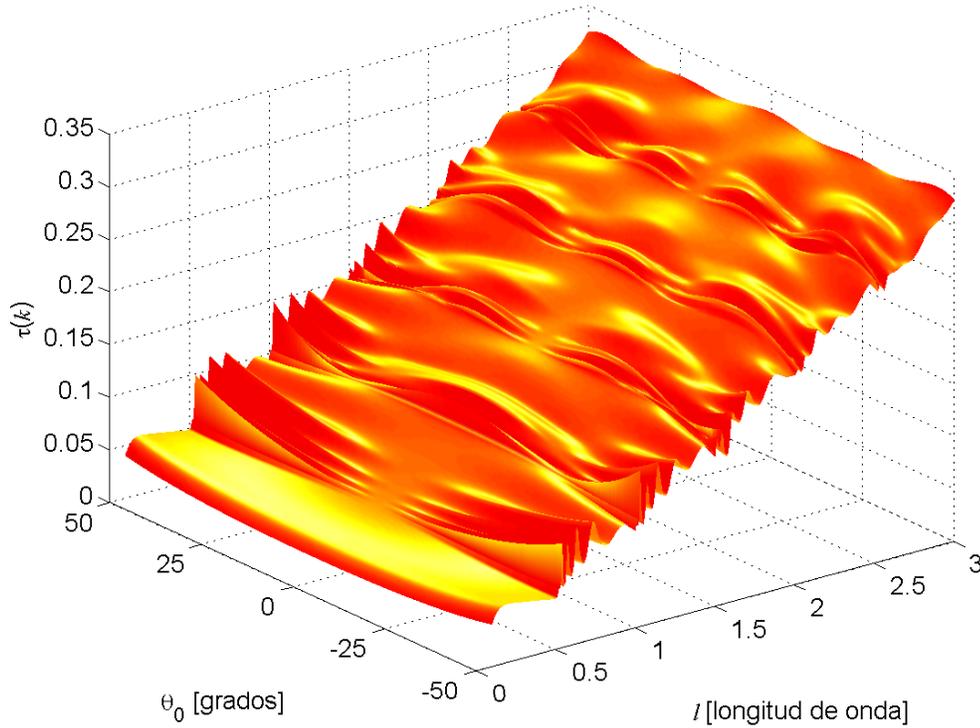


Figura 13. Coeficiente de transmisión de una rendija perfectamente conductora para el caso de polarización p como función del ancho de la abertura y el ángulo de incidencia. El espesor de la rendija es $d = 3.8\lambda$ y el semi ancho del haz gaussiano es $g = 7.2\lambda$.

donde N_{inc} es el número entero de ángulos de incidencia empleados y $\rho(k_i)$ y $\tau(k_i)$ están dados por las ecuaciones (85) y (86).

De esta manera, modelamos un sistema iluminado por un haz difuso con polarización s o p de semi ancho g (ver figura 11). A continuación se presentan algunos ejemplos de cálculos de la reflexión y transmisión por una rendija gruesa iluminada con luz difusa.

En la figura 14, se presentan cálculos para rendijas perfectamente conductoras de espesores $d = 0.8\lambda$ (línea continua) y $d = 3.8\lambda$ (línea punteada). La semi longitud de la superficie a lo largo del eje x_1 fue elegida como $b = 18\lambda$, variando el ancho de la rendija en el intervalo de $\lambda/10$ a 3λ . Para el muestreo sobre la superficie se utilizó un intervalo $\Delta t = \lambda/15$. El campo difuso incidente fue considerado como una

superposición de haces gaussianos de semi ancho $g = 7.2\lambda$, considerándose ángulos de incidencia θ_0 en el intervalo de -50° a 50° con pasos de 1° . Los resultados de la figura 14(a) corresponden a la intensidad transmitida para el caso de polarización s y la figura 14(b) para polarización p. Es importante mencionar que estos parámetros no se escogieron por alguna razón especial y que los resultados no dependen críticamente de ellos.

Para el caso de polarización s, se observa un incremento de la transmitancia en forma de escalones como función del ancho de la abertura. Los pasos ocurren a intervalos de media longitud de onda, marcando la presencia de nuevos modos guiados en la rendija (García-Martín *et al.*, 1997). Para la rendija más gruesa, los escalones presentan algunas oscilaciones. Por otro lado, en la figura 14(b) se muestran resultados para polarización p, en los que se observa solamente un crecimiento casi lineal de la transmitancia. Se aprecian algunos detalles en la vecindad de las marcas de media longitud de onda (donde aparecen los nuevos modos), pero el comportamiento escalonado no se presenta con esta polarización.

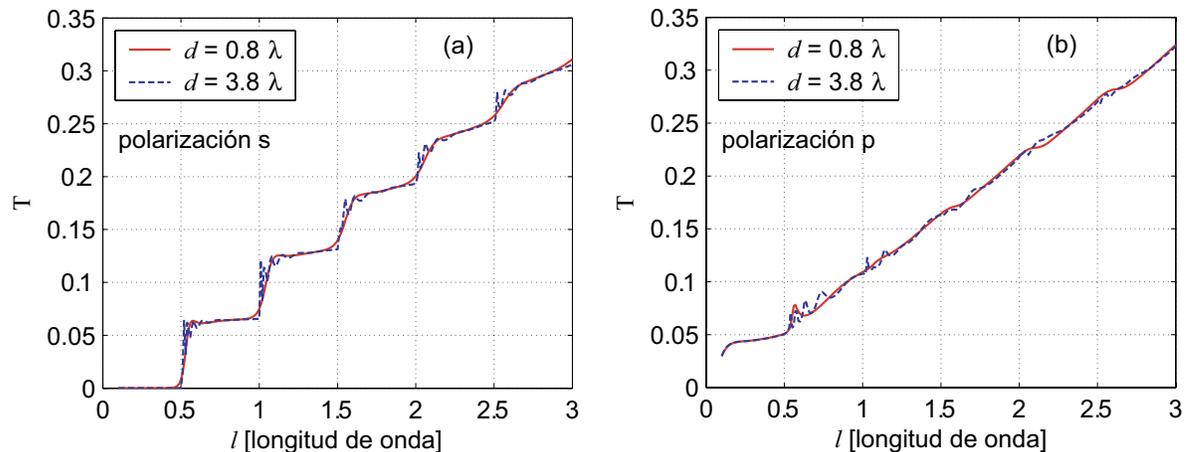


Figura 14. Potencia transmitida a través de una rendija perfectamente conductora de espesor $d = 0.8\lambda$ (línea continua) y $d = 3.8\lambda$ (línea punteada) para un haz difuso con polarización s (a) y p (b).

La diferencia en el comportamiento para los dos modos de polarización debe tener su origen en las condiciones de frontera. Para el caso de polarización s, el campo $[E_2(\vec{r})]$ debe ser cero sobre la superficie de un conductor perfecto, mientras que para la polarización p, es la derivada normal del campo $[H_2(\vec{r})]$ la que debe ser cero sobre la superficie. Para un conductor perfecto la densidad superficial de carga es cero debido a la condición de frontera para la polarización s. Por esta razón, la densidad de carga no influye en la aparición del efecto de cuantización de la transmitancia.

Es importante mencionar dos consecuencias de estas dos condiciones de frontera que pueden ayudar a entender la presencia o ausencia de los saltos en la transmitancia. Primero, para polarización p siempre hay un modo guiado mientras que en polarización s el primer modo aparece solamente hasta que $l = \lambda/2$. El segundo aspecto es que para polarización s el campo es igual a cero en las paredes de la rendija y viaja principalmente por el centro del canal de la guía de onda, mientras que para la polarización p la onda puede viajar pegada a las paredes del canal. Por lo tanto, la presencia o ausencia de los escalones en las curvas de la transmitancia deben estar relacionadas con una o ambas de estas diferencias. Para explorar la primera de ellas, se ha calculado la transmitancia de la rendija excitando solamente los modos pares o impares de la guía de onda. Esto se puede llevar a cabo iluminando la rendija con un campo incidente con la simetría apropiada. Consideramos entonces un campo incidente que consiste de la superposición de dos haces con ángulos de incidencia $-\theta_0$ y θ_0 ; cuando los haces están en fase el campo de iluminación tiene simetría par y cuando están π radianes fuera de fase el campo tiene simetría impar. La iluminación difusa se obtiene haciendo un promedio con parejas de haces de este tipo, variando el ángulo de incidencia θ_0 con fases aleatorias entre ellos.

En la figura 15, la curva superior (línea continua) corresponde a una excitación con iluminación simétrica y la curva inferior (línea punteada) es con iluminación anti-

simétrica. Se observa que el modo de orden cero es excitado solamente con la iluminación simétrica. En este caso, los nuevos modos (pares) son excitados cuando $l = m\lambda$. Por otro lado, con iluminación antisimétrica, el primer modo (impar) aparece cuando $l = \lambda/2$ y la presencia de los nuevos modos en $l = (m + \frac{1}{2})\lambda$ están marcados por oscilaciones en la curva. Así, a pesar de que el modo de orden cero no es excitado con este tipo de iluminación, los resultados no muestran el comportamiento escalonado que se obtiene con la polarización s. De estos resultados, se concluye que la presencia de los escalones no es debido a la ausencia del modo de orden cero y por consiguiente, debe estar relacionada con el hecho de que las regiones de la intensidad del campo más alto están cerca de las paredes de la guía de onda y no en el centro, como ocurre para un campo con polarización s.

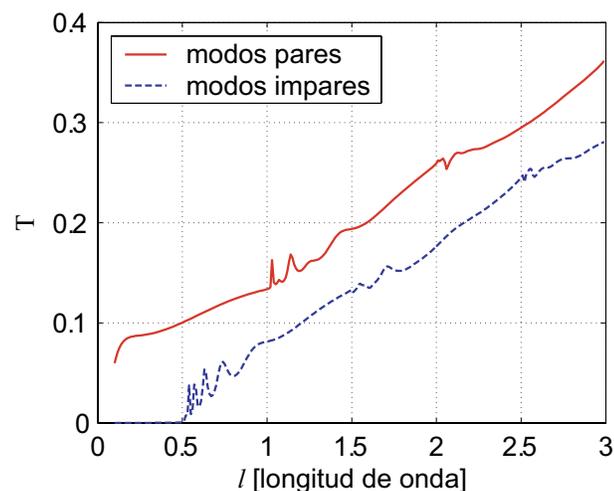


Figura 15. Transmitancia de una rendija perfectamente conductora para polarización p excitando solamente los modos pares o impares. La longitud de la rendija es $d = 3.8\lambda$ y los demás parámetros son los mismos que se usan en la figura 14. La línea continua corresponde a la excitación de los modos simétricos y la línea punteada a los modos antisimétricos.

Dada la ubicuidad del problema de difracción por rendijas y el número de estudios teóricos de este tema, es algo sorprendente que este comportamiento sólo haya sido reportado hasta hace algunos años (Montie *et al.*, 1991). Entonces, es razonable pre-

guntarse si con suposiciones más realistas como, la conductividad finita del material y la posible rugosidad en la superficie, estos efectos todavía son observables. El análisis a estas preguntas se presenta a continuación.

IV.3. Sistemas más realistas

IV.3.1. Rendija metálica

Ahora, se considera una rendija metálica y se comparan los resultados con los del caso de conductor perfecto. El índice de refracción de la plata para la longitud de onda $\lambda = 650$ nm es $n_c = 0.070 + 4.20i$. En la figura 16 se muestra la transmitancia de una rendija de plata (línea punteada) comparada con una rendija perfectamente conductora (línea continua). Se considera un espesor de la rendija $d = 3.8\lambda$.

Para el caso de polarización s, en la figura 16(a) vemos que la transmitancia también muestra un comportamiento escalonado, pero el primer paso ocurre para un ancho un poco por abajo de la media longitud de onda. De hecho, la curva completa parece estar corrida hacia la izquierda como consecuencia de la conductividad finita del metal, que permite al campo penetrar el material una distancia conocida como la profundidad de piel. El ancho efectivo de la rendija es entonces un poco mayor que el de la rendija de conductor perfecto. Sin embargo, la naturaleza escalonada de la transmitancia no es afectada por la conductividad del metal. Se puede observar también en la figura 16(a) que para anchos de la abertura l menores a $\lambda/2$, la rendija perfectamente conductora no trasmite luz, mientras que la transmitancia de una rendija metálica es pequeña pero diferente de cero. Esto es debido a que el espesor de la rendija es de sólo 3.8 longitudes de onda.

Para polarización p, la conductividad finita incrementa las fluctuaciones en la curva, sin embargo, se sigue manteniendo el crecimiento de la transmitancia sin cambios abruptos. Esto se puede apreciar en la figura 16(b). Para anchos de abertura pequeños, la rendija metálica transmite más luz que una rendija perfectamente conductora y para anchos más grandes la situación es inversa. Esto se debe a la excitación de plasmones de superficie en las paredes de la rendija que involucran pérdidas. Estas pérdidas no se tienen con conductores perfectos.

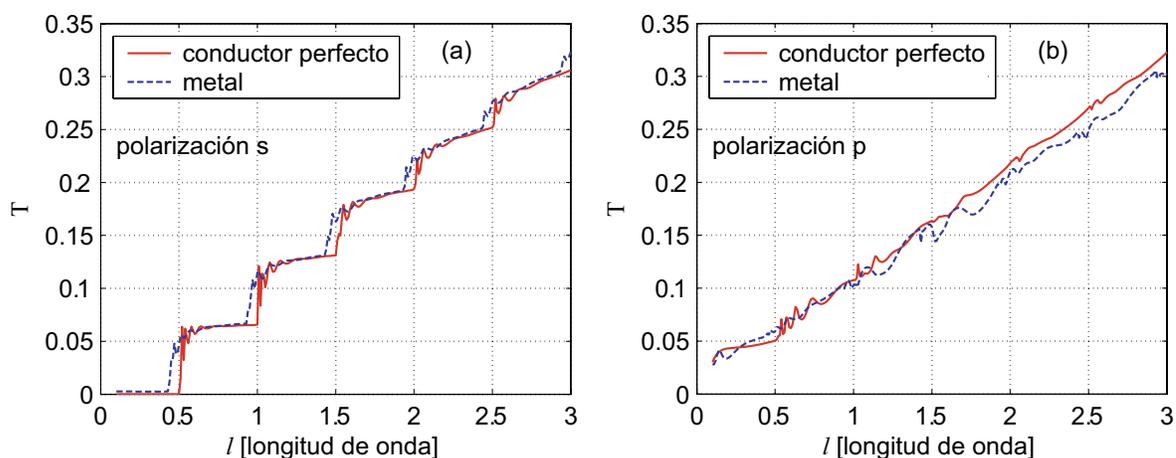


Figura 16. Transmitancia de una rendija perfectamente conductora (línea continua) y metálica (línea punteada) de espesor $d = 3.8\lambda$ para un haz difuso con polarización s (a) y p (b).

IV.3.2. Efectos de rugosidad

En la práctica es difícil tener rendijas con la geometría mostrada en la figura 11. Además de problemas de alineación y desviaciones en la figura de los bloques que forman la rendija, las paredes que la definen pueden ser rugosas. En esta sección, consideramos la propagación de luz a través de una rendija gruesa perfectamente conductora con paredes aleatoriamente rugosas. La geometría considerada se muestra en la figura 17. Primeramente, se presentan casos para rendijas cuyos perfiles son imágenes espejo el

uno del otro. Posteriormente, se presentan casos en los que las paredes de las rendijas son estadísticamente independientes.

Sobre las paredes verticales, la función de los perfiles superficiales puede ser expresada como $[\xi(x_3), x_3]$, donde $\xi(x_3)$ representa una realización de un proceso aleatorio con correlación gaussiana y cuya función de densidad de probabilidad (PDF¹) de alturas es una exponencial negativa. Utilizamos este tipo de distribución porque solamente tiene excavaciones en una dirección, evitando así la posibilidad de cruce entre las dos funciones aleatorias generadas. Perfiles con esta distribución se pueden obtener a través de la suma de los cuadrados de dos perfiles aleatorios independientes con distribución normal, en nuestro caso con media 0 y varianza 1. Con referencia a la figura 17 podemos ver que, de esta manera, los dos perfiles aleatorios no se intersectan el uno con el otro. La desviación estándar del proceso resultante es $\delta = \sqrt{2}\delta_g$, donde δ_g es la desviación estándar de los perfiles gaussianos originales.

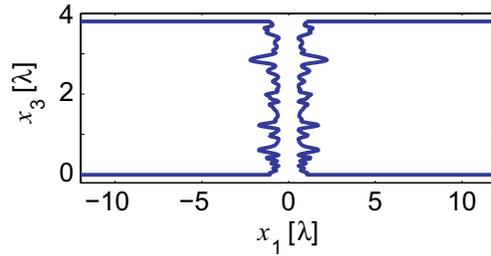


Figura 17. Contorno de una rendija gruesa con paredes aleatoriamente rugosas.

En la figura 18 se presentan cálculos de la transmisión de luz a través de una rendija perfectamente conductora con paredes aleatoriamente rugosas para el caso de iluminación difusa con polarización s. Las curvas mostradas corresponden a dos realizaciones independientes de la rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.4\lambda$

¹Por sus siglas en inglés, Probability Distribution Function.

y una desviación estándar de alturas $\delta = 0.2\lambda$. La longitud de la superficie con rugosidad a lo largo del eje x_3 fue elegida como $d = 3.8\lambda$ con un intervalo de muestreo $\Delta t = \lambda/33$. La semi longitud de la superficie a lo largo del eje x_1 fue considerada como $b = 18\lambda$ y sobre las secciones planas se usó un intervalo de muestreo $\Delta t = \lambda/15$. Para el campo difuso incidente se consideró un conjunto de haces gaussianos de semi ancho $g = 7.2\lambda$ con ángulos de incidencia θ_0 en el intervalo de -50° a 50° con pasos de 1° . Se presentan valores de la transmitancia en función del ancho de la rendija l en el intervalo de $\lambda/10$ a 3λ , donde l es el ancho original de la rendija de manera que su ancho promedio es ahora $l + 2\delta$.

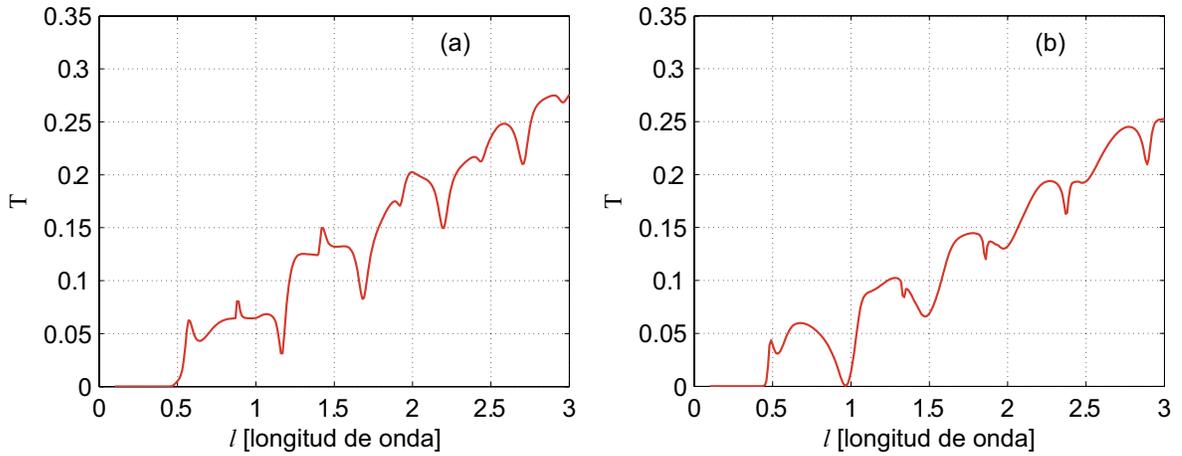


Figura 18. Transmitancia de la luz por rendijas perfectamente conductoras de espesor $d = 3.8\lambda$ para dos realizaciones con paredes aleatoriamente rugosas. Los parámetros que definen la rugosidad son $\delta = 0.2\lambda$ y $a = 0.4\lambda$. La iluminación es difusa y con polarización s.

Como las fluctuaciones de la rugosidad no tienen promedio cero tienden a incrementar el ancho efectivo de la rendija. Por esta razón, la transmitancia de la rendija puede ser diferente de cero antes de $l = \lambda/2$. También se observa que en lugar de tener un comportamiento de escalones para la transmitancia se obtiene una curva con picos angostos y valles anchos espaciados de manera periódica. Las posiciones de estos rasgos

y los detalles de la curva dependen de la realización particular de la función del perfil de la superficie. Es interesante mencionar que en algunos casos la transmitancia puede ser próxima a cero. Este comportamiento es consistente con resultados obtenidos con guías de onda perfectamente conductoras (García-Martín y Sáenz, 2005). Se ha encontrado que al abrirse un nuevo modo de propagación cuando se incrementa la abertura, los defectos que hacen más ancha la guía de onda pueden reducir la transmitancia considerablemente, y los defectos que la hacen más angosta tienden a producir un suavizado de las curvas de transmisión escalonadas.

Para visualizar los procesos que conducen a la presencia de estas depresiones, se considera un defecto que hace la guía de onda más ancha. Cuando un nuevo modo de propagación aparece en la región con defectos, la luz que se propaga en los otros modos puede, por efectos de esparcimiento, alimentar este nuevo modo y crear un estado espacialmente localizado. El estado está localizado porque el nuevo modo todavía es evanescente en la parte no perturbada de la guía de onda. Por otro lado, cuando el defecto hace la guía más angosta, la luz en el nuevo modo debe pasar a través del defecto, lo cual suaviza los saltos de la transmitancia.

Una implicación importante de estos resultados sobre el trabajo experimental en estos temas es que, si la rendija tiene pequeñas desviaciones se observará un comportamiento cualitativamente similar al mostrado en las gráficas de la figura 18 en vez de un comportamiento de escalones como el que se encuentra para una rendija perfecta.

En la figura 19 se presenta una estimación de la transmitancia promedio para rendijas de espesores $d = 0.8\lambda$ (línea continua) y $d = 3.8\lambda$ (línea punteada) y rugosidad aleatoria con $\delta = 0.2\lambda$ y $a = 0.4\lambda$. Los parámetros son los mismos que se emplearon para la figura 18 y el promedio de conjunto fue estimado de 50 realizaciones del perfil aleatorio. La rugosidad en las paredes de la rendija modifica el comportamiento

escalonado de la transmitancia y, conforme aumenta el espesor, aumenta el efecto de suavizado debido a la rugosidad.

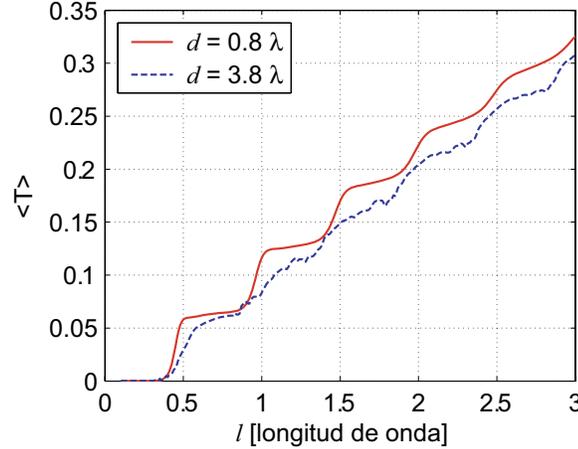


Figura 19. Promedio de la transmitancia de una rendija perfectamente conductora con paredes aleatoriamente rugosas. Los espesores son $d = 0.8\lambda$ (línea continua) y $d = 3.8\lambda$ (línea punteada). Los parámetros que definen la rugosidad son $\delta = 0.2\lambda$ y $a = 0.4\lambda$. La iluminación es difusa y con polarización s.

En la figura 20(a) se muestran curvas de transmitancia promedio para un espesor de la pantalla $d = 3.8\lambda$ y una longitud de correlación $a = 0.4\lambda$, con dos desviaciones estándar de alturas para los perfiles aleatorios $\delta = 0.07\lambda$ (línea continua) y $\delta = 0.2\lambda$ (línea punteada). Similarmente, en la figura 20(b) se muestra el promedio de la transmitancia para dos longitudes de correlación $a = 0.4\lambda$ (línea continua) y $a = 1.2\lambda$ (línea punteada) con una desviación estándar de alturas $\delta = 0.2\lambda$. Se observa que el promedio de la transmitancia es sensible a la desviación estándar de alturas pero que, al menos para los parámetros utilizados, la longitud de correlación de las fluctuaciones no tiene una influencia secundaria.

Ahora se presenta el caso más general en el que los perfiles aleatorios en las paredes de la rendija son diferentes [ver figura 21(a)]. En la figura 21(b) se muestra el promedio de la transmitancia para el caso de una rendija perfectamente conductora con paredes

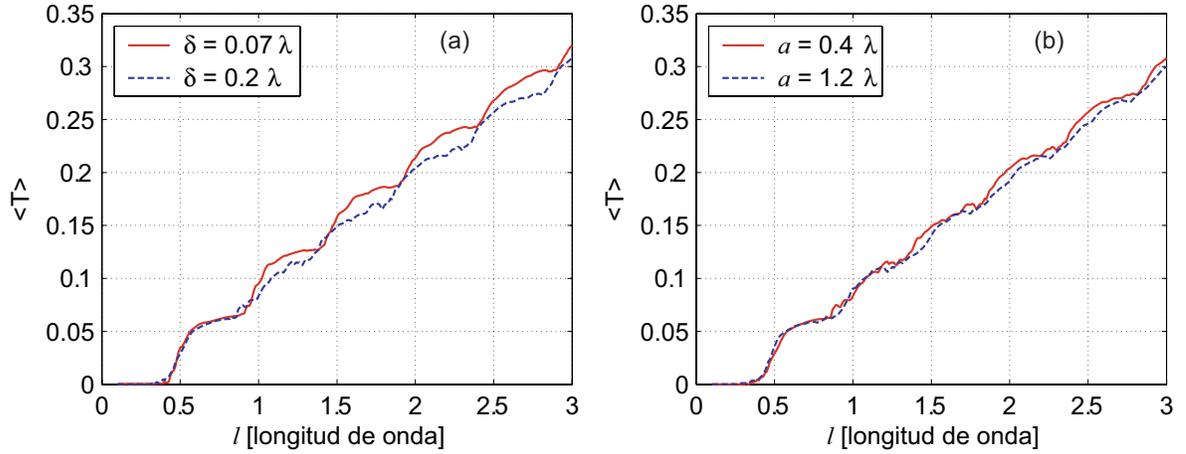


Figura 20. Promedio de la potencia transmitida a través de una rendija rugosa perfectamente conductora de espesor $d = 3.8\lambda$. (a) Desviaciones estándar de las alturas $\delta = 0.07\lambda$ (línea continua) y $\delta = 0.2\lambda$ (línea punteada) con una longitud de correlación $a = 0.4\lambda$. (b) Longitudes de correlación $a = 0.4\lambda$ (línea continua) y $a = 1.2\lambda$ (línea punteada) con una desviación estándar de alturas $\delta = 0.2\lambda$.

aleatoriamente rugosas iluminada difusamente con polarización s. Las curva mostrada corresponde a una rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.4\lambda$ y una desviación estándar de alturas $\delta = 0.2\lambda$. Se consideró la longitud de la superficie con rugosidad a lo largo del eje x_3 como $d = 3.8\lambda$ con un muestreo $\Delta t = \lambda/33$. Los demás parámetros son los mismos que se emplearon en la figura 18. Los resultados no difieren de manera significativa de los obtenidos cuando la rugosidad de las paredes está correlacionada.

IV.3.3. Incidencia fuera del plano

Hasta el momento, la iluminación que se ha considerado involucra vectores de onda contenidos solamente en el plano x_1x_3 . Consideramos ahora un sistema que es invariante a lo largo del eje x_2 , iluminado por una onda plana con un vector de onda que tiene una componente a lo largo de esta dirección. En la literatura esto se conoce como un problema de esparcimiento cónico (Maystre, 1984; Depine, 1991; Li *et al.*, 1994; Luna

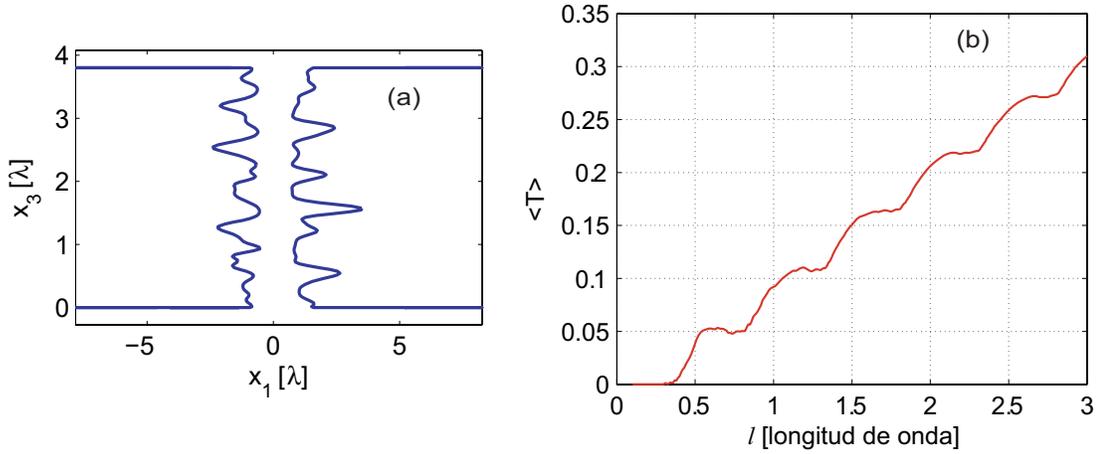


Figura 21. (a) Rendija con paredes rugosas aleatorias independientes. (b) Promedio de la transmitancia de una rendija perfectamente conductora con rugosidad aleatoria y espesor $d = 3.8\lambda$. Los parámetros que definen la rugosidad son $\delta = 0.2\lambda$ y $a = 0.4\lambda$. La iluminación es difusa y con polarización s.

y Méndez, 1995; Novikov y Maradudin, 1999). El nombre se debe al hecho de que con iluminación colimada, la luz difractada o esparcida describe un cono. La iluminación difusa, en general, involucra ondas que viajan en direcciones que no son perpendiculares a la abertura de la rendija, y el comportamiento de la transmitancia en estos casos es relevante para nuestro trabajo.

Para tratar problemas de esparcimiento cónico, es conveniente expresar el vector de onda incidente en componentes que son paralelas y perpendiculares a la abertura de la rendija.

El vector de onda incidente \vec{k} tiene magnitud $n_0(\omega/c)$, y hace un ángulo ϕ_0 con su proyección sobre el plano x_1x_3 . A su vez, su proyección hace un ángulo θ_0 con el eje x_3 . Sea ϕ_0 el ángulo cónico y θ_0 el ángulo de incidencia. Las componentes de \vec{k} son

$$k_1 = n_0 \frac{\omega}{c} \sin \theta_0 \cos \phi_0, \quad (91)$$

$$k_2 = n_0 \frac{\omega}{c} \sin \phi_0, \quad (92)$$

$$k_3 = -n_0 \frac{\omega}{c} \cos \theta_0 \cos \phi_0. \quad (93)$$

Es conveniente expresar la polarización del campo incidente en términos de los vectores unitarios $\hat{\pi}_i$ y $\hat{\sigma}_i$ definidos por (Novikov y Maradudin, 1999)

$$\hat{\pi}_i = \frac{\vec{k} \times \hat{x}_2}{|\vec{k} \times \hat{x}_2|} = \cos \theta_0 \hat{x}_1 + \sin \theta_0 \hat{x}_3, \quad (94)$$

$$\hat{\sigma}_i = \frac{\hat{\pi}_i \times \vec{k}}{|\hat{\pi}_i \times \vec{k}|} = -\sin \phi_0 \sin \theta_0 \hat{x}_1 + \cos \phi_0 \hat{x}_2 + \sin \phi_0 \cos \theta_0 \hat{x}_3. \quad (95)$$

Siguiendo las definiciones de Luna y Méndez (1995), llamamos polarización σ al caso en el que el vector del campo eléctrico vibra en la dirección $\hat{\sigma}_i$ y tiene componente E_2 a lo largo de x_2 . El campo magnético asociado está en la dirección $\hat{\pi}_i$ y, de la definición de este vector, es claro que no hay componente H_2 . Entonces, $H_2(x_1, x_3) = 0$ en todas partes, y el campo esparcido también tiene polarización σ ; es decir, que el vector del campo eléctrico esparcido vibra en la dirección $\hat{\sigma}_s$. Por otro lado, llamamos polarización π al caso en el que el vector del campo eléctrico vibra en la dirección de $\hat{\pi}_i$ y no tiene componente E_2 . En este caso $E_2(x_1, x_3) = 0$ en todas partes, y el campo esparcido está polarizado en la dirección $\hat{\pi}_s$. Cuando el ángulo cónico $\phi_0 = 0$, estas polarizaciones se convierten en s y p, respectivamente. De este modo, para conductores perfectos los dos modos de polarización están desacoplados y pueden tratarse separadamente.

La geometría del problema puede ser visualizada como un libro abierto en el cual damos vuelta a las hojas (ver figura 22). El vector unitario a lo largo del eje x_2 está a lo largo del lomo del libro y el vector de onda incidente \vec{k} está contenido en el plano de una página, a lo largo de una línea que une un punto del lomo con un punto sobre la página. Al voltear la página, este vector describe un cono. En este proceso el ángulo θ_0 cambia pero el ángulo ϕ_0 se mantiene constante. El vector unitario $\hat{\pi}_i$ es perpendicular a la página y $\hat{\sigma}_i$ está en el plano de la página. Se observa que $\hat{\pi}_i$, $\hat{\sigma}_i$ y \vec{k} son perpendiculares entre sí.

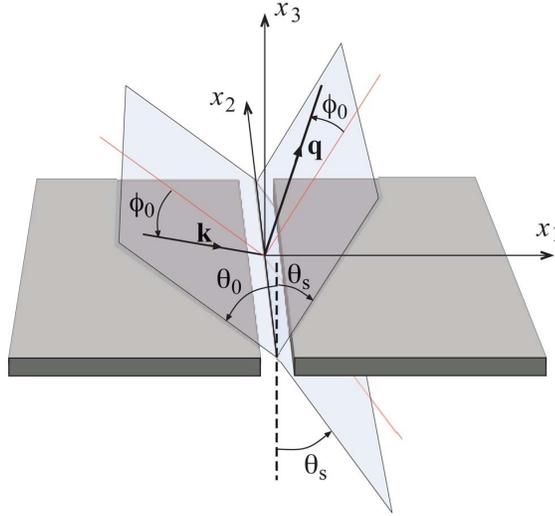


Figura 22. Diagrama esquemático de la rendija bajo condiciones cónicas de iluminación.

Debido a la invariancia traslacional del sistema a lo largo del eje x_2 , la componente 2 del vector de onda se conserva. Es decir, las componentes del vector de onda esparcido \vec{q} pueden ser escritas como

$$q_1 = n_0 \frac{\omega}{c} \sin \theta_s \cos \phi_0, \quad (96)$$

$$q_2 = n_0 \frac{\omega}{c} \sin \phi_0, \quad (97)$$

$$q_3 = \pm n_0 \frac{\omega}{c} \cos \theta_s \cos \phi_0, \quad (98)$$

donde el signo $+$ es para reflexión, el signo $-$ es para transmisión y θ_s es el ángulo de esparcimiento. Similarmente, la polarización del campo esparcido se puede expresar en términos de los vectores unitarios

$$\hat{\pi}_s = \frac{\vec{q} \times \hat{x}_2}{|\vec{q} \times \hat{x}_2|} = \mp \cos \theta_s \hat{x}_1 + \sin \theta_s \hat{x}_3, \quad (99)$$

$$\hat{\sigma}_s = \frac{\hat{\pi}_s \times \vec{q}}{|\hat{\pi}_s \times \vec{q}|} = -\sin \phi_0 \sin \theta_s \hat{x}_1 + \cos \phi_0 \hat{x}_2 \mp \sin \phi_0 \cos \theta_s \hat{x}_3, \quad (100)$$

donde los signos superiores son para reflexión y los inferiores para transmisión.

También debido a la invariancia traslacional del sistema a lo largo del eje x_2 , todos

los campos son de la forma (Jackson, 1999)

$$\vec{E}(x_1, x_2, x_3) = \vec{E}(x_1, x_3) \exp(ik_2 x_2), \quad (101)$$

$$\vec{H}(x_1, x_2, x_3) = \vec{H}(x_1, x_3) \exp(ik_2 x_2), \quad (102)$$

y es conveniente dividirlos en componentes a lo largo de x_2 y en componentes perpendiculares a esta dirección. De esta manera,

$$\vec{E}(x_1, x_3) = \vec{E}_\perp(x_1, x_3) + \hat{x}_2 E_2(x_1, x_3), \quad (103)$$

$$\vec{H}(x_1, x_3) = \vec{H}_\perp(x_1, x_3) + \hat{x}_2 H_2(x_1, x_3). \quad (104)$$

De las ecuaciones de Maxwell y la dependencia explícita de los campos en x_2 , se puede mostrar (Jackson, 1999) que los campos transversales están completamente determinados a partir de las componentes 2. Se encuentra que

$$\vec{E}_\perp(x_1, x_3) = \frac{i}{\left[n_0 \frac{\omega}{c} \cos \phi_0\right]^2} \left(k_2 \nabla_\perp E_2 + \frac{\omega}{c} [\hat{x}_2 \times \nabla_\perp H_2(x_1, x_3)] \right), \quad (105)$$

$$\vec{H}_\perp(x_1, x_3) = \frac{i}{\left[n_0 \frac{\omega}{c} \cos \phi_0\right]^2} \left(k_2 \nabla_\perp H_2 + \frac{\omega}{c} [\hat{x}_2 \times \nabla_\perp E_2(x_1, x_3)] \right), \quad (106)$$

donde $\nabla_\perp = (\partial/\partial x_1, 0, \partial/\partial x_3)$. Estas relaciones muestran que para resolver el problema de esparcimiento cónico es suficiente determinar $E_2(x_1, x_3)$ y $H_2(x_1, x_3)$.

La dependencia de los campos en x_2 dados por las ecuaciones (101) y (102), también implica que las componentes 2 de los campos satisfacen las ecuaciones de Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \left[n_0 \frac{\omega}{c} \cos \phi_0 \right]^2 \right) E_2(x_1, x_3) = 0, \quad (107)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \left[n_0 \frac{\omega}{c} \cos \phi_0 \right]^2 \right) H_2(x_1, x_3) = 0. \quad (108)$$

Con referencia a las ecuaciones (17), vemos que $\frac{\omega}{c}$ ha sido ahora reemplazado por $\frac{\omega}{c} \cos \phi_0$. Es decir, que se debe resolver el problema a una “longitud de onda efectiva” definida como

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{\cos \phi_0}, \quad (109)$$

y un “número de onda efectivo” como

$$\left[\frac{\omega}{c}\right]_e = \frac{\omega}{c} \cos \phi_0. \quad (110)$$

De esta manera, se pueden escribir las componentes del vector de onda como

$$k_e = k_1 = n_0 \left[\frac{\omega}{c}\right]_e \sin \theta_0 \quad (111)$$

y

$$\alpha_e(q) = \sqrt{n_0^2 \left[\frac{\omega}{c}\right]_e^2 - q^2} = n_0 \left[\frac{\omega}{c}\right]_e \cos \theta_0. \quad (112)$$

Sobre la superficie de un conductor perfecto, las componentes 2 de los campos satisfacen las siguientes condiciones de frontera

$$E_2(\xi(t), \eta(t)) = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial}{\partial N} H_2(x_1, x_3) \right|_{(x_1=\xi(t), x_3=\eta(t))} = 0. \quad (113)$$

Es importante notar que en este caso los campos E_2 y H_2 no se acoplan por las condiciones de frontera y que bajo estas circunstancias, el problema de difracción o esparcimiento cónico para el caso de conductores perfectos se puede estudiar con un tratamiento similar al ya descrito para la iluminación en el plano x_1x_3 , pero para la longitud de onda efectiva dada por la ecuación (109). Este resultado ha sido establecido con anterioridad por Maystre (1984). Para un campo incidente dado, el campo esparcido puede ser determinado con un procedimiento similar para el caso de esparcimiento en un plano previamente descrito. En el apéndice A se obtienen expresiones para las potencias incidente (184) y (189) y esparcida (185) y (190) en el caso cónico. Por consiguiente, los coeficientes de transmisión y reflexión se pueden expresar de la forma:

$$\tau(k_e) = \frac{P_{sc}^-(k)}{P_{inc}(k_e)} = \frac{1}{\mathcal{F}(k_e)} \int_{-n_0[\omega/c]_e}^{n_0[\omega/c]_e} \frac{dq}{2\pi} \alpha_e(q) |A(q|k_e) + S^-(q|k_e)|^2$$

y

$$\rho(k_e) = \frac{P_{sc}^+(k_e)}{P_{inc}(k_e)} = \frac{1}{\mathcal{F}(k_e)} \int_{-n_0[\omega/c]_e}^{n_0[\omega/c]_e} \frac{dq}{2\pi} \alpha_e(q) |S^+(q|k_e)|^2,$$

donde

$$\mathcal{F}(k_e) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_e(k_e) |\psi_{0\sigma,\pi}|^2$$

y

$$\alpha_e(k_e) = n_0 \left[\frac{\omega}{c} \right]_e \cos \theta_0$$

es la componente del vector de onda efectivo en la dirección de propagación. Para conductores perfectos se debe cumplir que $\rho(k_e) + \tau(k_e) = 1$.

En la figura 23, se presentan cálculos para la transmitancia de una rendija en un plano con iluminación difusa en la que se varía tanto el ángulo θ_0 como el ϕ_0 . Se presentan cálculos para las polarizaciones σ y π , junto con su promedio, el cual corresponde a iluminación con luz no polarizada. La iluminación difusa fue modelada como una superposición incoherente de haces gaussianos con ángulos cónicos ϕ_0 y ángulos de incidencia θ_0 desde -50° hasta 50° en pasos de 1° . Para los cálculos utilizamos $d = 3.8\lambda$, $b = 18\lambda$ y los mismos parámetros de muestreo que en los casos anteriores.

Para el caso de polarización σ (línea continua) se observa que antes de $l = \lambda/2$ la rendija no transmite porque no hay modos permitidos. Cuando $l = \lambda/2$ aparece un modo que se puede excitar con luz incidente en el plano x_1x_3 , pero la luz que corresponde a otros ángulos cónicos no pasa por la rendija porque su “longitud de onda efectiva” es más grande. Al aumentar el ancho de la rendija, luz que corresponde a otros ángulos cónicos logra propagarse a través de ella y esto explica el crecimiento gradual de la transmitancia. Así, cuando se tiene iluminación fuera del plano no se observa el comportamiento de escalones para la transmitancia.

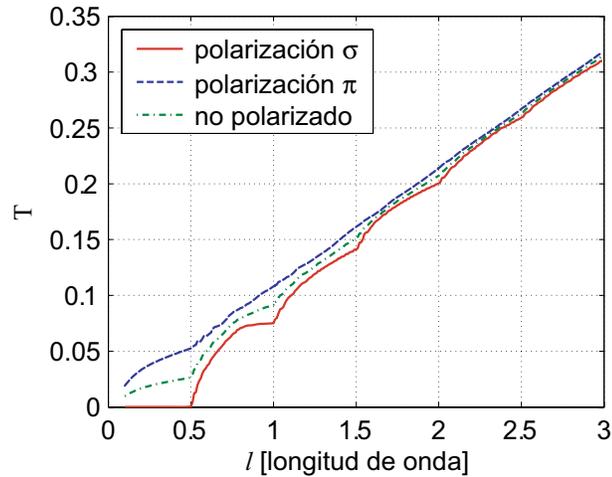


Figura 23. Transmitancia de una rendija perfectamente conductora de espesor $d = 3.8\lambda$, iluminada con luz difusa no polarizada. La curva con la línea continua corresponde a la polarización σ , la línea punteada a polarización π y la línea con rayas y puntos a luz no polarizada.

Como era de esperarse por los resultados de iluminación en el plano, para el caso de polarización π (línea punteada), no se observa un comportamiento escalonado para la transmitancia. Ésta crece monótonicamente como función del ancho de la abertura, sin rasgos particulares. La curva con rayas y puntos mostrada en la figura 23, corresponde al caso general de iluminación difusa no polarizada. A pesar de algunos rasgos cada media longitud de onda, no se observa el comportamiento escalonado. Esto correspondería a situaciones prácticas que involucran una rendija perfecta con iluminación difusa. Aunado al hecho de que no es fácil tener una rendija sin rugosidades, puede ayudar a entender porqué este efecto no se había observado anteriormente.

IV.4. Conclusiones parciales

En este capítulo se ha presentado un estudio de la transmisión de luz difusa a través de rendijas gruesas basado en el método de la ecuación integral. Para el caso de iluminación

en el plano perpendicular a la rendija y polarización s , la transmitancia crece de manera escalonada como función de su ancho. Los escalones ocurren a intervalos de media longitud de onda, coincidiendo con la aparición de nuevos modos en la guía de onda definida por las paredes de la rendija. El comportamiento de la transmitancia para polarización p es diferente, presentando esencialmente un crecimiento lineal con algunos rasgos pequeños a intervalos de media longitud de onda.

La rugosidad en las paredes de la rendija puede modificar sustancialmente el comportamiento de la transmitancia e impedir la observación de los escalones. La iluminación cónica, o fuera del plano, se puede tratar de manera equivalente como un cambio en la longitud de onda λ , por lo tanto, también modifica la forma de los escalones. Estos resultados muestran las dificultades prácticas que involucra la observación de estos efectos de cuantización.

Capítulo V

GUÍAS DE ONDA CON SECCIÓN TRANSVERSAL VARIABLE

A pesar de que el método integral puede ser utilizado para problemas de propagación en guías de onda, está limitado en sus capacidades porque para los problemas de interés, se requieren de dominios computacionales y memoria muy grandes. Para obtener resultados teóricos que sirvan de guía para la realización e interpretación de experimentos fue necesario desarrollar otro método, más adecuado al cálculo de problemas de propagación con distancias largas. En este capítulo, se presenta dicho método numérico. Con él, es posible modelar la propagación de luz en guías de onda con variaciones en su sección transversal y esparcimiento de volumen. Se trata de un método basado en expansiones modales, conocido como el método del propagador de la matriz R . El método descrito se utiliza para estudiar guías de onda dieléctricas multimodales con estrechamientos abruptos y suaves, buscando los efectos que tiene el cambio en el número de canales de transmisión con la propagación de luz.

V.1. Planteamiento del problema

El método del propagador de la matriz R se ha ido desarrollando a través del tiempo con contribuciones de varios autores y, recientemente, se ha utilizado para estudiar problemas de propagación y esparcimiento en guías de onda planas (Elson, 2001). En este método se buscan soluciones a las ecuaciones de Maxwell en términos de expansiones modales para el campo que se propaga en una guía de onda invariante en la dirección de propagación. Cuando la guía tiene variaciones en esta dirección se divide la geometría del problema en secciones que contienen capas invariantes, empatando las soluciones para diferentes capas a través de las condiciones de frontera entre ellas. Para disminuir efectos de borde debido al tamaño finito del dominio computacional, se emplea el método de Berenger (1994) de la capa perfectamente empatada (PML¹).

La geometría considerada se muestra en la figura 24. La guía de onda es excitada por un haz incidente monocromático de longitud de onda λ con un perfil de intensidad gaussiano. El problema es bidimensional ya que el campo incidente y la guía de onda son invariantes en la dirección x_2 . La región $x_3 > L_t$ consiste de un medio homogéneo con permitividad $\epsilon_0 = 1$. La región $x_3 \leq L_t$ consiste en general de tres medios, pero se considera que dos de ellos tienen permitividad $\epsilon_2 = n_2^2$ y, el otro, permitividad $\epsilon_1 = n_1^2$ en la región que corresponde al canal de la guía de onda de ancho L_c . Parte de la energía incidente se acopla en uno o más modos de la guía que tiene sección transversal constante en la región $L_t \geq x_3 \geq L_h$. En la región $L_h > x_3 \geq 0$ la sección transversal es variable (reducciones abruptas o suaves y rugosidad). En la región $x_3 < 0$ el canal de la guía tiene una sección transversal constante de ancho L'_c .

¹Por sus siglas en inglés, Perfect Matched Layer.

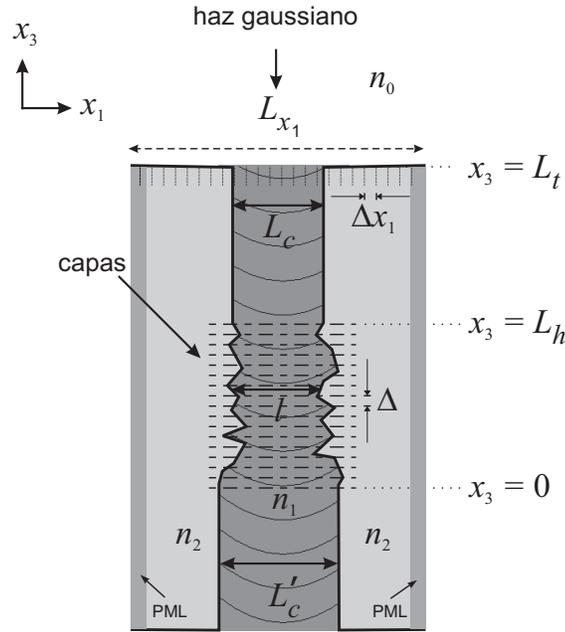


Figura 24. Diagrama de la geometría considerada. Un haz gaussiano incide sobre la abertura de una guía de onda. Las regiones laterales tienen índice de refracción n_2 y definen el canal de la guía, de ancho l e índice de refracción n_1 . Las paredes del canal de la guía tienen rugosidad aleatoria en la región $L_r \geq x_3 \geq 0$. La región de cálculo en la dirección x_1 está limitada por la condición $|x_1| \leq L_{x_1}/2$, con capas absorbentes de PML en los límites del dominio.

V.2. Ecuaciones de Maxwell

En la descripción del método modal seguimos un tratamiento similar al descrito por Elson (2001). Comenzamos con las ecuaciones de Maxwell para campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} armónicos de frecuencia ω :

$$\nabla \times \vec{E}(x_1, x_3) = i(\omega/c) \mu(x_1, x_3) \vec{H}(x_1, x_3), \quad (114)$$

$$\nabla \times \vec{H}(x_1, x_3) = -i(\omega/c) \epsilon(x_1, x_3) \vec{E}(x_1, x_3), \quad (115)$$

donde $\mu(x_1, x_3)$ es la permeabilidad y $\epsilon(x_1, x_3)$ es la permitividad. Nótese que $\mu(x_1, x_3)$ y $\epsilon(x_1, x_3)$ son funciones de la posición de manera que podemos incluir en la estructura de la guía de onda: la rugosidad, las inclusiones y las capas perfectamente empastadas. Debido a que la geometría se considera invariante en la dirección del eje x_2 el problema

es esencialmente escalar y podemos considerar por separado la polarización transversal eléctrica (TE) o s, donde $\vec{E} = (0, E_2, 0)$ y $\vec{H} = (H_1, 0, H_3)$, y la polarización transversal magnética (TM) o p, donde $\vec{E} = (E_1, 0, E_3)$ y $\vec{H} = (0, H_2, 0)$.

Reduciendo las ecuaciones (114) y (115) a dos dimensiones para el caso de la polarización s, llegamos a las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden

$$-i(\omega/c) H_1(x_1, x_3) = \beta_1(x_1, x_3) \frac{\partial E_2(x_1, x_3)}{\partial x_3}, \quad (116)$$

$$i(\omega/c) \mu_1(x_1, x_3) H_3(x_1, x_3) = \frac{\partial E_2(x_1, x_3)}{\partial x_1}, \quad (117)$$

$$i(\omega/c) E_2(x_1, x_3) = \alpha_1(x_1, x_3) \frac{\partial H_3(x_1, x_3)}{\partial x_1} - \alpha_3(x_1, x_3) \frac{\partial H_1(x_1, x_3)}{\partial x_3}, \quad (118)$$

donde

$$\mu_j(x_1, x_3) = 1 + 4\pi i \sigma_j^*(x_1, x_3) / \omega, \quad \varepsilon_j(x_1, x_3) = \epsilon(x_1, x_3) \mu_j(x_1, x_3), \quad (119)$$

$$\beta_j(x_1, x_3) = 1/\mu_j(x_1, x_3), \quad \alpha_j(x_1, x_3) = 1/\varepsilon_j(x_1, x_3), \quad (120)$$

para $j = 1$ ó 3 . Las funciones $\alpha_j(x_1, x_3)$, $\beta_j(x_1, x_3)$, $\varepsilon_j(x_1, x_3)$ y $\mu_j(x_1, x_3)$ dependientes de la posición y dirección describen los detalles de la geometría considerada (ver figura 24) a través de su dependencia de la permitividad escalar $\epsilon(x_1, x_3)$, la conductividad magnética $\sigma_j^*(x_1, x_3)$ y la conductividad eléctrica $\sigma_j(x_1, x_3)$. La conductividad de la capa del PML controla la absorción de los campos en la dirección j , a través de la relación $\sigma_j(x_1, x_3) = \epsilon(x_1, x_3) \sigma_j^*(x_1, x_3)$ requerida para empatar la impedancia y evitar reflexiones. Idealmente, el empatamiento de la impedancia elimina la reflexión cuando las ondas interactúan con las capas absorbentes del PML. Fuera de esta región podemos poner $\sigma_j(x_1, x_3) = \sigma_j^*(x_1, x_3) = 0$, regresando a la forma más usual de las ecuaciones de Maxwell.

Para resolver el problema es conveniente convertir las ecuaciones (116)-(118) a una representación en el espacio k a través de una transformada de Fourier, considerando

un sistema de tamaño finito en la dirección x_1 . La transformada de Fourier de una función continua $f(x)$, diferente de cero en el intervalo $[-L_{x_1}/2, L_{x_1}/2]$, está definida por la expresión

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ikx}. \quad (121)$$

Similarmente, la transformada de Fourier inversa de la función $F(k)$ está definida como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k) e^{-ikx}. \quad (122)$$

Para hacer la conversión al espacio k en un intervalo finito, muestreemos la coordenada x_1 en N puntos igualmente espaciados

$$x_{1m} = -L_{x_1}/2 + \left(m - \frac{1}{2}\right) \Delta x_1 \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, N,$$

donde $\Delta x_1 = L_{x_1}/N$. La ecuación (121) entonces puede ser escrita como

$$F(k) = \sum_{m=1}^N \int_{x_{1m}-\Delta x_1/2}^{x_{1m}+\Delta x_1/2} dx_1 f(x_1) e^{ikx_1} \simeq \sum_{m=1}^N \Delta x_1 f(x_{1m}) e^{ikx_{1m}}. \quad (123)$$

Similarmente, se muestrea k en N puntos igualmente espaciados

$$k_n = -k_{\max}/2 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta k \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N,$$

donde $\Delta k = 2\pi/L_{x_1}$. La ecuación (123) entonces queda expresada como

$$F(k_n) \simeq \Delta x_1 \sum_{m=1}^N f(x_{1m}) e^{ik_n x_{1m}}. \quad (124)$$

Similarmente, para la transformada de Fourier inversa, la ecuación (122) en forma discreta se puede escribir

$$f(x_1) = \sum_{n=1}^N \int_{k_n-\Delta k/2}^{k_n+\Delta k/2} \frac{dk}{2\pi} F(k) e^{-ikx_1} \simeq \sum_{n=1}^N \frac{\Delta k}{2\pi} F(k_n) e^{-ik_n x_1}, \quad (125)$$

o bien,

$$f(x_{1m}) \simeq \frac{1}{N\Delta x_1} \sum_{n=1}^N F(k_n) e^{-ik_n x_{1m}}, \quad (126)$$

donde se ha usado $\Delta k = 2\pi/N\Delta x_1$.

De las ecuaciones (124) y (126) se pueden definir los operadores de la transformada de Fourier \mathbf{F} y la transformada de Fourier inversa \mathbf{F}^{-1} en forma de matrices de $N \times N$ de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = \Delta x_1 \exp(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N\Delta x_1} \exp(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1),$$

donde \mathbf{k}_1 y \mathbf{x}_1 son vectores de N elementos. Aplicando estos operadores de transformación a las ecuaciones (116)-(118) se obtiene

$$-i(\omega/c) \mathbf{H}_1(k, x_3) = \beta_1(k, k') \frac{\partial \mathbf{E}_2(k', x_3)}{\partial x_3}, \quad (127)$$

$$i(\omega/c) \boldsymbol{\mu}_1(k, k') \mathbf{H}_3(k', x_3) = \mathbf{k} \mathbf{E}_2(k, x_3), \quad (128)$$

$$i(\omega/c) \mathbf{E}_2(k, x_3) = i\boldsymbol{\alpha}_1(k, k') \mathbf{k}' \mathbf{H}_3(k', x_3) - \boldsymbol{\alpha}_3(k, k') \frac{\partial \mathbf{H}_1(k', x_3)}{\partial x_3}, \quad (129)$$

donde \mathbf{k} y \mathbf{k}' ahora están definidas como matrices diagonales con elementos k_n y los campos \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_3 y \mathbf{E}_2 son vectores columna de N elementos con cada elemento correspondiente a k_n . Para escribir estas expresiones se han definido las matrices cuadradas de $N \times N$ como

$$\boldsymbol{\mu}_j(k, k') = \mathbf{F}(x_1, k) \boldsymbol{\mu}_j(x_1) \mathbf{F}^{-1}(x_1, k'), \quad (130)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j(k, k') = \mathbf{F}(x_1, k) \boldsymbol{\varepsilon}_j(x_1) \mathbf{F}^{-1}(x_1, k'), \quad (131)$$

$$\boldsymbol{\beta}_j(k, k') = \mathbf{F}(x_1, k) \boldsymbol{\beta}_j(x_1) \mathbf{F}^{-1}(x_1, k'), \quad (132)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j(k, k') = \mathbf{F}(x_1, k) \boldsymbol{\alpha}_j(x_1) \mathbf{F}^{-1}(x_1, k'), \quad (133)$$

donde las cantidades $\boldsymbol{\mu}_j(x_1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_j(x_1)$, $\boldsymbol{\beta}_j(x_1)$ y $\boldsymbol{\alpha}_j(x_1)$ son matrices diagonales con elementos $\mu_j(x_n)$, $\varepsilon_j(x_n)$, $\beta_j(x_n)$ y $\alpha_j(x_n)$, respectivamente.

Usando las ecuaciones (127)-(129), se obtiene la ecuación diferencial de segundo

orden

$$\frac{\partial^2 \psi(k, x_3)}{\partial x_3^2} = \alpha_3^{-1} \beta_3^{-1} [\beta_1^{-1} \mathbf{k} \gamma_1^{-1} \mathbf{k} - \mathbf{I}(\omega/c)^2] \psi(k, x_3) = \mathbf{M} \psi(k, x_3), \quad (134)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Se ha escrito esta ecuación en forma general para considerar las dos polarizaciones. Los parámetros dependen de la polarización y están definidos por

$$\begin{aligned} \psi(k, x_3) &= \mathbf{H}_2(k, x_3), & \phi(k, x_3) &= \mathbf{E}_1(k, x_3), \\ \gamma_1 &= \varepsilon_1, & \alpha_j &= 1/\varepsilon_j, & \beta_j &= 1/\mu_j, & F_p &= 1, \end{aligned}$$

para el caso TM o polarización p, y

$$\begin{aligned} \psi(k, x_3) &= \mathbf{E}_2(k, x_3), & \phi(k, x_3) &= \mathbf{H}_1(k, x_3), \\ \gamma_1 &= \mu_1, & \alpha_j &= 1/\mu_j, & \beta_j &= 1/\varepsilon_j, & F_p &= -1, \end{aligned}$$

para el caso TE o polarización s. En estas expresiones, $j = 1$ ó 3 . Las funciones ψ y ϕ son las componentes tangenciales de los campos en el plano $x_1 x_2$.

Dado que tenemos N valores discretos de k , la ecuación (134) representa N ecuaciones diferenciales acopladas. Cuando \mathbf{M} es independiente de x_3 , el sistema de ecuaciones se puede resolver por la técnica de diagonalización. Para este método es necesario encontrar los vectores y los valores propios de la matriz \mathbf{M} . Escribimos entonces $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{S} = \boldsymbol{\xi}^2 = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}$, donde las columnas de la matriz cuadrada \mathbf{S} son los vectores propios de \mathbf{M} y la matriz diagonal $\boldsymbol{\xi}^2$ contiene los valores propios de \mathbf{M} . La solución a la ecuación (134) se puede escribir de la forma

$$\psi(k, x_3) = \mathbf{S} (\mathbf{e}^{\boldsymbol{\xi} x_3} \mathbf{C}_+ + \mathbf{e}^{-\boldsymbol{\xi} x_3} \mathbf{C}_-), \quad (135)$$

y la otra componente tangencial del campo, que se sigue de la ecuación (127), es

$$\phi(k, x_3) = -i F_p (c/\omega) \alpha_3 \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} (\mathbf{e}^{\boldsymbol{\xi} x_3} \mathbf{C}_+ - \mathbf{e}^{-\boldsymbol{\xi} x_3} \mathbf{C}_-). \quad (136)$$

Las \mathbf{C}_\pm son constantes escalares y las matrices $\mathbf{e}^{\pm\xi x_3}$ son matrices diagonales donde el n -ésimo elemento de la diagonal es de la forma $\exp(\pm\xi_n x_3)$. Aquí, ξ_n es la raíz cuadrada del n -ésimo valor propio ξ_n^2 .

Los valores propios están relacionados con las constantes de propagación β_n ; es decir, con los índices de refracción efectivos propios de los modos de propagación. Cada valor propio está asociado a una función propia, que corresponde a la distribución de campo de los modos de propagación dependientes del perfil de índice de refracción y de la longitud de onda de la luz incidente.

Como ilustración, en la figura 25 se presentan los cálculos de las constantes de propagación de los modos para el caso de polarización s. La guía de onda dieléctrica tiene los índices de refracción del núcleo $n_1 = 1.5$ y de la cubierta $n_2 = 1.0$ con ancho del canal $L_c = 2\lambda$. El ancho total del sistema a lo largo del eje x_1 fue $L_{x_1} = 15.33\lambda$. Para el muestreo sobre el sistema se utilizó un intervalo $\Delta x_1 = \lambda/30$. En la figura 25(a) se muestra el logaritmo natural de la parte real de los valores propios y en la figura 25(b) la parte imaginaria de los valores propios.

En la figura 25(a) se observa que los cinco valores propios de orden más bajo corresponden a los valores negativos de mayor orden de la parte imaginaria de los valores propios como se muestran en la figura 25(b). Esto significa que los cinco corresponden a las constantes de propagación de la guía. En la figura 26 se muestra el valor absoluto de las funciones propias asociadas a los cinco valores propios. Estas funciones [26(a)-(e)] corresponden a los modos permitidos por la guía de onda. En la figura 26(f) se tomó otra de las funciones propias que corresponde a los modos evanescentes.

La figura 27 muestra la excitación y propagación de los modos considerados en la guía dieléctrica. En esta situación, la guía de onda soporta 5 modos guiados. La guía

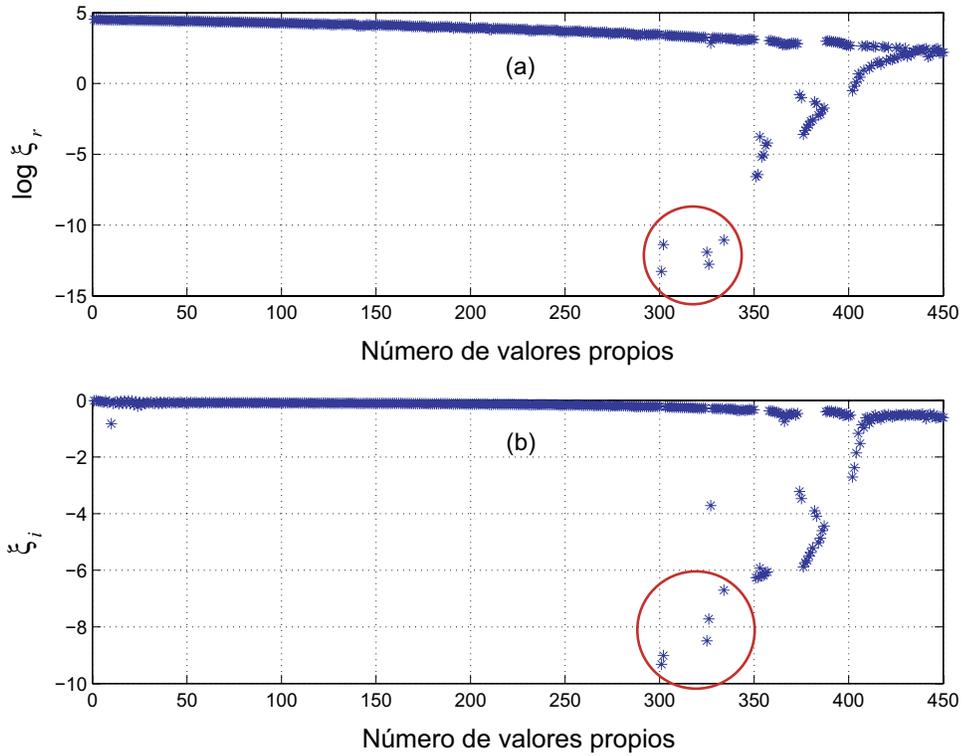


Figura 25. Constantes de propagación de los modos guiados y de la cubierta para el ancho del núcleo de la guía $l = 2.0\lambda$ definido por dos medios con índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.0$. (a) El logaritmo natural de la parte real de los valores propios. (b) La parte imaginaria de los valores propios.

de onda se excita haciendo incidir un haz gaussiano a un ángulo $\theta_0 = 30^\circ$. En la figura, se observa como parte de la luz se acopla a modos guiados mostrando claramente el canal que define la guía y como parte de la radiación se sale del canal perdiéndose en la cubierta.

Vale la pena hacer notar que el método descrito supone que la estructura es invariante en x_3 , pero la geometría a lo largo de x_1 , puede ser arbitraria. Es posible entonces considerar diferentes anchos de la guía e inclusiones en el canal del núcleo.

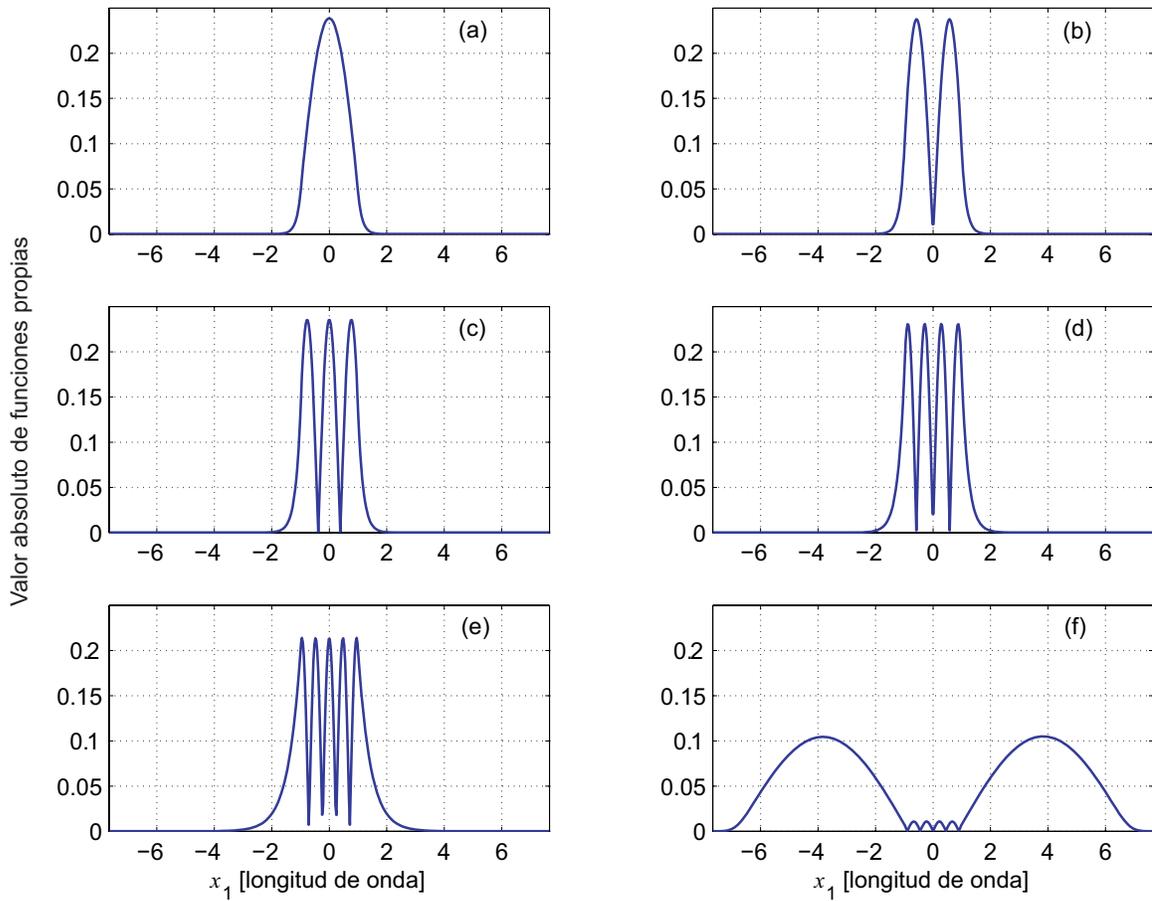


Figura 26. Valor absoluto de las funciones propias que corresponden a los modos de propagación (a)-(e) y de la cubierta (f) para el ancho del núcleo de la guía $l = 2.0\lambda$.

V.3. Propagador de la matriz \mathbf{R}

Las soluciones que hemos presentado corresponden a casos en los que la guía es invariante a lo largo de x_3 . Para estudiar la propagación de luz a través de sistemas con geometrías más generales, se considera una sucesión de capas cada una invariante en x_3 , tomando en cuenta el acoplamiento de la luz entre los modos de capas sucesivas imponiendo la continuidad de las componentes tangenciales de los campos. Una relación numéricamente estable para realizar el acoplamiento de los campos está dada por el algoritmo de la matriz \mathbf{R} . Se considera primero la propagación en una capa invariante en

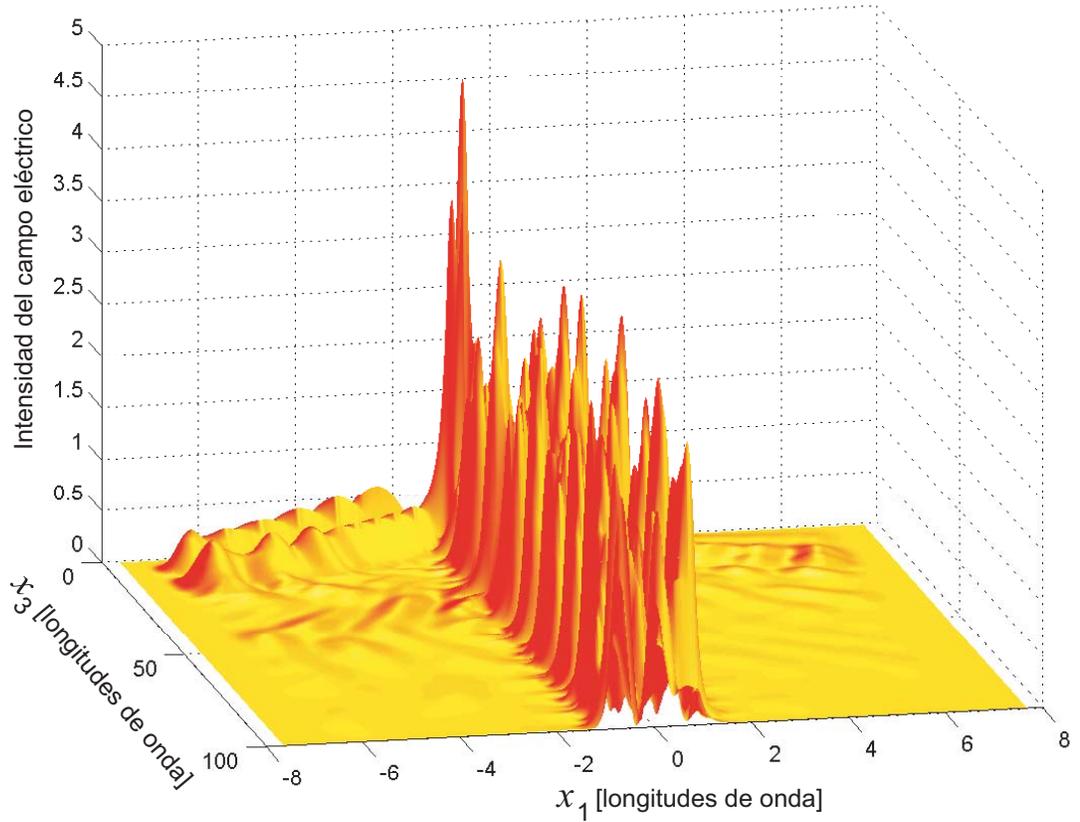


Figura 27. Excitación de modos guiados en una guía de onda dieléctrica. El ancho del núcleo $l = 2.0\lambda$ está definido por dos medios con índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.0$. El haz gaussiano con polarización s incide a un ángulo $\theta_0 = 30^\circ$.

x_3 que va desde x_3 hasta $x_3 + \Delta$. Los campos a la entrada y la salida están relacionados de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \phi(k, x_3) \\ \phi(k, x_3 + \Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11}(\Delta) & \mathbf{r}_{12}(\Delta) \\ \mathbf{r}_{21}(\Delta) & \mathbf{r}_{22}(\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(k, x_3) \\ \psi(k, x_3 + \Delta) \end{pmatrix}, \quad (137)$$

donde Δ es el espesor de la capa. Esta expresión define la matriz \mathbf{r} . Sustituyendo las ecuaciones (135) y (136) en la ecuación (137) se obtienen los elementos de la matriz \mathbf{r}

como

$$\mathbf{r}_{11}(\Delta) = -\mathbf{r}_{22}(\Delta) = iF_p(c/\omega) \alpha_3 \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} (e^{\xi\Delta} + e^{-\xi\Delta}) (e^{\xi\Delta} - e^{-\xi\Delta})^{-1} \mathbf{S}^{-1}, \quad (138)$$

$$\mathbf{r}_{12}(\Delta) = -\mathbf{r}_{21}(\Delta) = -2iF_p(c/\omega) \alpha_3 \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} (e^{\xi\Delta} - e^{-\xi\Delta})^{-1} \mathbf{S}^{-1}. \quad (139)$$

Entonces, la matriz \mathbf{r} relaciona los campos en los extremos de la capa invariante en x_3 . Haciendo uso de la continuidad de las componentes tangenciales de los campos se puede propagar el campo de una capa a otra. La relación entre los campos en los extremos de dos o más capas contiguas, desde x_3 hasta $x_3 + x_3^t$, se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}(k, x_3) \\ \boldsymbol{\phi}(k, x_3 + x_3^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11}(x_3^t) & \mathbf{R}_{12}(x_3^t) \\ \mathbf{R}_{21}(x_3^t) & \mathbf{R}_{22}(x_3^t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}(k, x_3) \\ \boldsymbol{\psi}(k, x_3 + x_3^t) \end{pmatrix}. \quad (140)$$

Aquí, x_3^t representa el espesor cumulativo de todas las capas. Las matrices \mathbf{R} se pueden calcular de manera recursiva con las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{11}(x_3^t) &= \mathbf{R}_{11}(x_3^t - \Delta) + \\ &\quad \mathbf{R}_{12}(x_3^t - \Delta) [\mathbf{r}_{11}(\Delta) - \mathbf{R}_{22}(x_3^t - \Delta)]^{-1} \mathbf{R}_{21}(x_3^t - \Delta), \end{aligned} \quad (141)$$

$$\mathbf{R}_{12}(x_3^t) = -\mathbf{R}_{12}(x_3^t - \Delta) [\mathbf{r}_{11}(\Delta) - \mathbf{R}_{22}(x_3^t - \Delta)]^{-1} \mathbf{r}_{12}(\Delta), \quad (142)$$

$$\mathbf{R}_{21}(x_3^t) = \mathbf{r}_{21}(\Delta) [\mathbf{r}_{11}(\Delta) - \mathbf{R}_{22}(x_3^t - \Delta)]^{-1} \mathbf{R}_{21}(x_3^t - \Delta), \quad (143)$$

$$\mathbf{R}_{22}(x_3^t) = \mathbf{r}_{22}(\Delta) - \mathbf{r}_{21}(\Delta) [\mathbf{r}_{11}(\Delta) - \mathbf{R}_{22}(x_3^t - \Delta)]^{-1} \mathbf{r}_{12}(\Delta). \quad (144)$$

El algoritmo recursivo (141)-(144), se obtiene de las ecuaciones (137) y (140) imponiendo la continuidad de los campos $\boldsymbol{\psi}$ y $\boldsymbol{\phi}$ a través de las fronteras que separan a las capas invariantes en x_3 . En los extremos del intervalo $0 \leq x_3 \leq L_t$, las condiciones de continuidad se pueden escribir como

$$\boldsymbol{\phi}(k, 0) = \boldsymbol{\phi}_t(k, 0); \quad \boldsymbol{\psi}(k, 0) = \boldsymbol{\psi}_t(k, 0), \quad (145)$$

$$\boldsymbol{\phi}(k, L_t) = \boldsymbol{\phi}_r(k, L_t) + \boldsymbol{\phi}_i(k, L_t); \quad \boldsymbol{\psi}(k, L_t) = \boldsymbol{\psi}_r(k, L_t) + \boldsymbol{\psi}_i(k, L_t), \quad (146)$$

donde los subíndices i , r y t denotan que los campos son incidente, reflejado y transmitido, respectivamente. De las ecuaciones (137) y (140) se observa que, considerando la primera capa y $x_3^t = \Delta_1$, se puede iniciar el ciclo recursivo con $\mathbf{R}_{ij}(\Delta_1) = \mathbf{r}_{ij}(\Delta_1)$. Calculando las matrices $\mathbf{r}_{ij}(\Delta_2)$ para la siguiente capa de espesor Δ_2 y con las matrices $\mathbf{R}_{ij}(\Delta_1)$ se pueden obtener las matrices $\mathbf{R}_{ij}(\Delta_1 + \Delta_2)$ con las ecuaciones (141)-(144). El ciclo se repite hasta llegar a $x_3 = 0$.

V.4. Los campos incidente y reflejado

Se considera que el sistema está iluminado por un haz gaussiano incidente desde la región homogénea $x_3 \geq L_t$ con índice de refracción n_0 , que escribimos como una superposición de ondas planas con semi ancho g y componente x_1 del vector de onda $k_0 = n_0(\omega/c) \sin \theta_0$, donde θ_0 es el ángulo de incidencia. Se escriben las componentes tangenciales ψ y ϕ del campo incidente en términos de su espectro angular

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_i(x_1, x_3) \\ \phi_i(x_1, x_3) \end{pmatrix} &= \frac{g}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp(-ik'x_1) \int_{-\omega/c}^{\omega/c} dk \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\cos \theta \end{pmatrix} F_p \\ &\times \exp \left[-\left(\frac{g}{2}\right)^2 (k - k_0)^2 \right] \exp \{i [kx_1 - \alpha_0(k)(x_3 - L_t)]\} \end{aligned} \quad (147)$$

donde ψ_0 es una constante con las unidades apropiadas y la componente x_3 del vector de onda es $\alpha_0(k) = \sqrt{(n_0\omega/c)^2 - k^2}$. El parámetro $F_p = 1$ para polarización p y $F_p = -1$ para polarización s. Aplicando la transformada de Fourier a los campos incidentes dados por la ecuación (147), obtenemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \psi_i(k, x_3) \\ \phi_i(k, x_3) \end{pmatrix} &= \frac{g}{2\sqrt{\pi}} F_p \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\cos\theta \end{pmatrix} \int_{-\omega/c}^{\omega/c} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp[ix_1(k-k')] \\
&\times \exp\left[-\left(\frac{g}{2}\right)^2 (k-k_0)^2\right] \exp[-i(x_3-L_t)\alpha_0(k)] \\
&= \frac{g}{2\sqrt{\pi}} F_p \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\cos\theta \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(k-k') \exp\left[-\left(\frac{g}{2}\right)^2 (k-k_0)^2\right] \\
&\times \exp[-i(x_3-L_t)\alpha_0(k)] \\
&= g\sqrt{\pi} F_p \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\cos\theta \end{pmatrix} \exp\left[-\left(\frac{g}{2}\right)^2 (k-k_0)^2\right] \\
&\times \exp[-i(x_3-L_t)\alpha_0(k)], \tag{148}
\end{aligned}$$

donde $\psi_i(k, L_t)$ y $\phi_i(k, L_t)$ son vectores columna cuyo n -ésimo elemento está dado por

$$\psi_i(k_n, x_3) = -\sqrt{\pi} g F_p \exp\left[-\left(\frac{g}{2}\right)^2 (k_n - k_0)^2\right] \exp[-i\alpha_0(k_n)(x_3 - L_t)], \tag{149}$$

$$\phi_i(k_n, x_3) = -F_p \psi_i(k_n, x_3) / \cos\theta, \tag{150}$$

cuando $k_n < (n_0\omega/c)$ y cero cuando $k_n > (n_0\omega/c)$. El n -ésimo elemento del vector de onda es $k_n = 2\pi n/L_x$ y $\alpha_0(k_n) = \sqrt{(n_0\omega/c)^2 - k_n^2}$.

La relación entre los campos reflejados se puede escribir como

$$\phi_r(k, x_3) = \mathbf{Z}(k) \psi_r(k, x_3), \tag{151}$$

donde la matriz diagonal $\mathbf{Z}(k)$ es

$$\mathbf{Z}(k) = F_p \frac{\sqrt{(\omega/c)^2 - k^2}}{(\omega/c)}. \tag{152}$$

V.5. El campo transmitido

También se puede establecer una relación entre los campos transmitidos en la región inhomogénea $x_3 \leq 0$ que corresponde a la guía con sección transversal constante. Para

ondas que se propagan solamente hacia abajo $\mathbf{C}_- = 0$, las soluciones del sistema dadas por las ecuaciones (135) y (136) se pueden reescribir como

$$\boldsymbol{\psi}_t(k, x_3) = \mathbf{S}e^{\xi x_3} \mathbf{C}_+, \quad (153)$$

$$\boldsymbol{\phi}_t(k, x_3) = -iF_p(c/\omega) \boldsymbol{\alpha}_3 \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} e^{\xi x_3} \mathbf{C}_+. \quad (154)$$

Evaluando la ecuación (153) en $x_3 = 0$ se obtienen las constantes

$$\mathbf{C}_+ = \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\psi}_t(k, 0),$$

que substituidas en las ecuaciones (153) y (154) nos dan las soluciones del campo transmitido en la forma

$$\boldsymbol{\psi}_t(k, x_3) = \mathbf{S}e^{\xi x_3} \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\psi}_t(k, 0), \quad (155)$$

$$\boldsymbol{\phi}_t(k, x_3) = -iF_p(c/\omega) \boldsymbol{\alpha}_3 \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} e^{\xi x_3} \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\psi}_t(k, 0). \quad (156)$$

Sustituyendo ahora la ecuación (155) evaluada en $x_3 = 0$ en la ecuación (156) se obtiene la relación entre los campos transmitidos en la región $x_3 \leq 0$, de la forma

$$\boldsymbol{\phi}_t(k, x_3) = -iF_p(c/\omega) \boldsymbol{\alpha}_3 \mathbf{S} \boldsymbol{\xi} \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\psi}_t(k, x_3) = \mathbf{T} \boldsymbol{\psi}_t(k, x_3). \quad (157)$$

V.6. Las potencias incidente y transmitida

Es importante establecer las relaciones entre los campos en las fronteras superiores e inferiores del sistema bajo estudio. Usando las ecuaciones (145), (146), (151), (157) y (140) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} - \mathbf{R}_{11}(\Delta) & -\mathbf{R}_{12}(\Delta) \\ -\mathbf{R}_{21}(\Delta) & \mathbf{Z} - \mathbf{R}_{22}(\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_t(k, 0) \\ \boldsymbol{\psi}_r(k, L_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{12}(\Delta) \boldsymbol{\psi}_i(k, L_t) \\ \mathbf{R}_{22}(\Delta) \boldsymbol{\psi}_i(k, L_t) - \boldsymbol{\phi}_i(k, L_t) \end{pmatrix}, \quad (158)$$

que puede ser resuelto para encontrar los campos en los planos $x_3 = 0$ y $x_3 = L_t$. Es decir, para encontrar $\psi_t(k, 0)$ y $\psi_r(k, L_t)$. Estos campos pueden utilizarse para encontrar los campos transmitidos para $x_3 < 0$, empleando las ecuaciones (155), (156) y (157).

Una vez calculados los campos, se obtienen las potencias incidente, reflejada y transmitida de la forma

$$P_i(k) = \Re \left\{ \sum_{n=-N/2}^{N/2} \phi_i(k_n, L_t) [\psi_i(k_n, L_t)]^* \right\}, \quad (159)$$

$$P_r(k) = \Re \left\{ \sum_{n=-N/2}^{N/2} \phi_r(k_n, 0) [\psi_r(k_n, 0)]^* \right\}, \quad (160)$$

$$P_t(k) = \Re \left\{ \sum_{n=-N/2}^{N/2} \phi_t(k_n, 0) [\psi_t(k_n, 0)]^* \right\}. \quad (161)$$

Utilizando las ecuaciones (159), (160) y (161), se pueden obtener los coeficientes de reflexión y transmisión de la siguiente forma:

$$\rho(k) = \frac{P_r(k)}{P_i(k)} \quad (162)$$

y

$$\tau(k) = \frac{P_t(k)}{P_i(k)}, \quad (163)$$

donde $P_i(k)$ es la potencia del haz incidente y $k = \frac{\omega}{c} \sin \theta_0$. Para el balance de energía se debe tener que $\rho(k) + \tau(k) \leq 1$.

V.7. Verificación del método

Para verificar la validez del método utilizado, se considera una rendija metálica (ver figura 11) y se comparan los resultados obtenidos con los del método de la ecuación integral desarrollado en los capítulos III y IV. El índice de refracción de la plata a

la longitud de onda $\lambda = 659.5$ nm es $n_c = 0.050 + 4.4830i$. La figura 28 muestra la comparación de la transmitancia normalizada como una función del ancho de la abertura para una rendija de plata con ambas polarizaciones. Se considera un espesor de la rendija de $d = 2.4\lambda$ como en casos anteriores se utilizaron bloques de plata de longitud de $b = 18\lambda$ y con un intervalo de muestreo $\Delta x_1 = \lambda/60$ se varió el ancho de la rendija en el intervalo de $\lambda/10$ a 3λ . El campo difuso incidente fue considerado como una superposición incoherente de haces gaussianos de semi ancho $g = 3.04\lambda$, con ángulos de incidencia θ_0 en el intervalo de -50° a 50° con pasos de 1° . Los resultados de la figura 28(a) corresponden a la intensidad transmitida para el caso de la polarización s y la figura 28(b) para la polarización p.

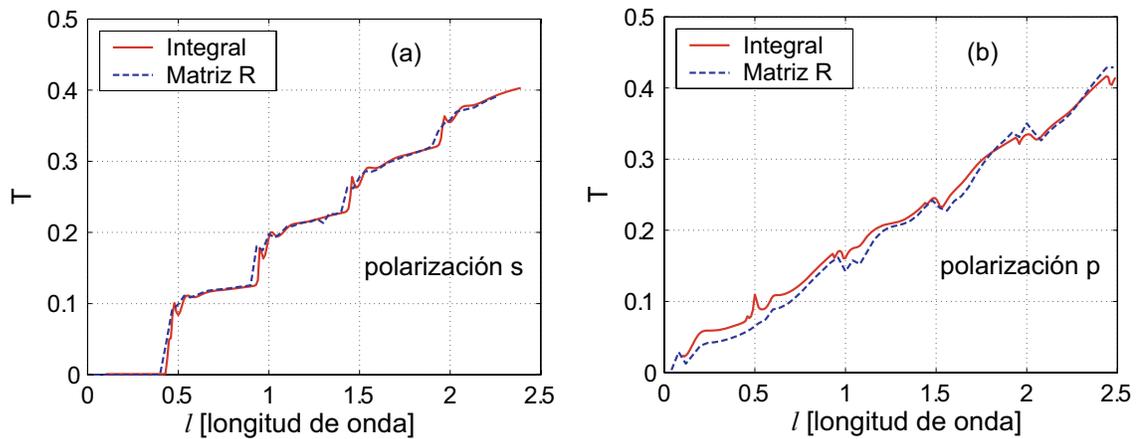


Figura 28. Transmitancia de una rendija metálica de espesor $d = 2.4\lambda$ para un haz difuso con polarización (a) s y (b) p. La línea continua corresponde al método integral y la línea punteada al método de la matriz R.

Para el caso de polarización s, las curvas muestran un comportamiento escalonado pero el primer paso ocurre a un ancho menor a media longitud de onda, como consecuencia de la conductividad finita. Es decir, el campo penetra dentro del material debido a la profundidad de piel de éste. Vemos que hay un buen acuerdo entre los resultados obtenidos con los dos métodos.

Para el caso de la polarización p, se obtiene una curva de transmitancia creciente sin cambios abruptos. Una vez más, vemos que los cálculos realizados con el método de la matriz R (línea punteada) coinciden con los que se realizaron con el método integral (línea continua). Esto da cierta confianza sobre el funcionamiento del método y la escritura de los programas.

Concluimos entonces que el método de la matriz R es adecuado para abordar problemas de esparcimiento en guías de onda con sección transversal variable. Con él, es posible estudiar sistemas que involucran distancias de propagación mucho más largas que con el método integral o con el FDTD². En el siguiente capítulo se abordan varios problemas de propagación de luz en guías de onda con estrechamientos y rugosidad utilizando este método.

²Por sus siglas en inglés, Finite-Difference Time-Domain.

Capítulo VI

GUÍAS DE ONDA CON ESTRECHAMIENTOS Y RUGOSIDAD

En este capítulo se presentan algunos resultados de la propagación de luz a través de guías de onda dieléctricas. Se exploran, en particular, efectos de cuantización de la transmitancia en guías de onda dieléctricas multimodales con estrechamientos y rugosidad. Se considera que la iluminación es difusa, de tal forma que alimenta todos los modos de la guía.

VI.1. Guías de onda dieléctricas

La situación física estudiada se muestra esquemáticamente en la figura 29. La geometría del problema consiste en una guía de onda dieléctrica formada por dos medios semi-infinitos que rodean una capa de material transparente. La guía de onda es excitada por un haz difuso monocromático de longitud de onda λ con polarización s o p y con un perfil de intensidad gaussiano de semi ancho g . El problema es bidimensional ya que el campo incidente y la guía de onda son invariantes en la dirección x_2 . La región $x_3 > L_t$ consiste de un medio homogéneo con índice de refracción $n_0 = 1$. La siguiente

y (150), que inciden a diferentes ángulos con fases aleatorias no correlacionadas. Los coeficientes de reflexión y transmisión, promediados sobre el conjunto de realizaciones, están dados por el promedio de los coeficientes de intensidad de reflexión y transmisión,

$$R = \frac{1}{N_{inc}} \sum_{i=1}^{N_{inc}} \rho(k_i), \quad T = \frac{1}{N_{inc}} \sum_{i=1}^{N_{inc}} \tau(k_i), \quad (165)$$

donde N_{inc} es el número entero de ángulos de incidencia empleados y $\rho(k_i)$ y $\tau(k_i)$ están dados por las ecuaciones (162) y (163), respectivamente. El número de ángulos de incidencia N_{inc} está determinado por el ángulo de aceptación $\theta_a = \arcsen \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ formado por el cono de rayos aceptados por la guía de onda dieléctrica, de la forma

$$N_{inc} = \frac{2\theta_a}{\Delta\theta}, \quad (166)$$

donde $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$ es la separación entre los ángulos $\{\theta_i\}$.

VI.2. Guías de onda con estrechamiento abrupto

Para seguir una analogía con la propagación de luz difusa a través de una rendija consideramos primero el caso de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento abrupto como se muestra en la figura 30. La región del canal de la guía con sección transversal angosta define una rendija de espesor d e índice de refracción n_1 . A continuación, se presentan algunos ejemplos de cálculos de transmisión por tal sistema.

En la figura 31, se presentan cálculos de la transmisión de luz difusa a través de la guía de onda dieléctrica con un estrechamiento abrupto. El ancho total del sistema a lo largo del eje x_1 fue $L_{x_1} = 15.22\lambda$. Esta longitud se divide en $N = 761$ segmentos de longitud $\Delta x_1 = L_{x_1}/N = \lambda/50$. Para las guías de onda anterior y posterior a la región angostada se consideró un ancho $L_c = 5\lambda$ y una longitud a lo largo del eje x_3

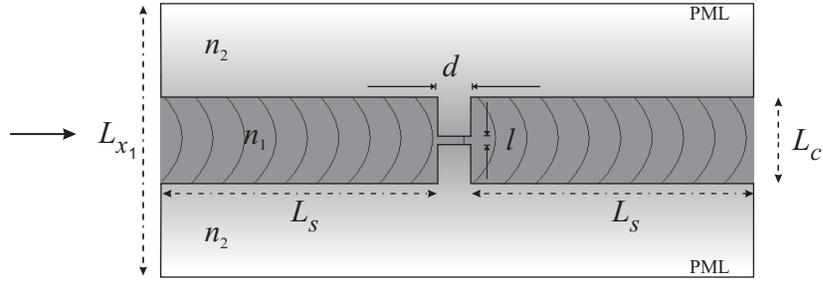


Figura 30. Esquema de una guía dieléctrica con un estrechamiento abrupto.

de $L_s = 1000\lambda$. Esta longitud es suficiente para que sólo los modos guiados lleguen al extremo del dominio computacional (plano $x_3 = L_h$). La región del canal con sección transversal angosta corresponde a una constricción abrupta, en la forma de una rendija de espesor $d = 2.4\lambda$, cuyo ancho l varía en el intervalo de $\lambda/10$ a 5λ . Para el canal se consideró un índice de refracción $n_1 = 1.45$ y para la cubierta los índices de refracción $n_2 = 1.30$ (línea continua), $n_2 = 1.36$ (línea punteada) y $n_2 = 1.40$ (línea con rayas y puntos). Para cada uno de los casos por su ángulo de aceptación están determinados los ángulos de incidencia θ_0 en los intervalos de -42° a 42° , de -32° a 32° y de -13° a 13° con pasos de 1° , respectivamente. Las regiones PML de cada uno de los lados de la guía están formadas por una capa de espesor $\delta_{PML} = 1.25\lambda$. Considerando $A_{PML} = 3$ se calculan $N_{PML} = 63$ valores de la ecuación (164), variando η a partir del punto medio de cada capa de la región PML. El campo difuso incidente fue considerado como una superposición de haces gaussianos de semi ancho $g = 3.044\lambda$. Los resultados de la figura 31(a) corresponden al caso de polarización s y los de la figura 31(b) a la polarización p. Es importante mencionar que para los parámetros de discretización se escogieron valores que permiten optimizar espacio de memoria computacional, pero los resultados no dependen críticamente de ellos. Para facilitar la visualización en todas la gráficas presentadas en este capítulo se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.

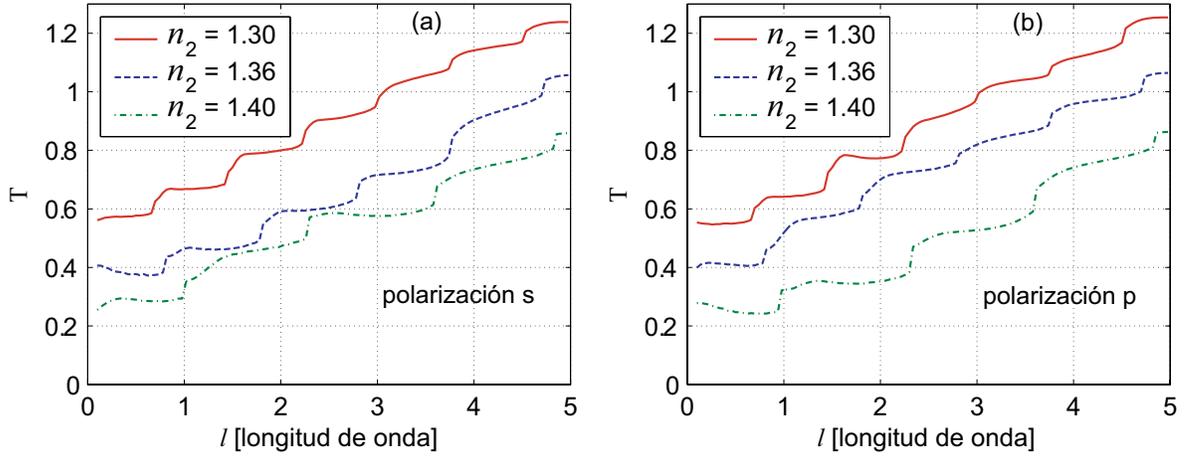


Figura 31. Transmitancia a través de una guía de onda dieléctrica con estrechamiento abrupto de longitud $d = 2.4\lambda$ e índices de refracción del canal $n_1 = 1.45$ y la cubierta $n_2 = 1.30$ (línea continua), $n_2 = 1.36$ (línea punteada) y $n_2 = 1.40$ (línea con rayas y puntos). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.

Para ambas polarizaciones, se observa un incremento de la transmitancia en forma de escalones como función del ancho de la abertura de la constricción abrupta. Los pasos ocurren a intervalos de 0.76, 0.96 y 1.24 longitudes de onda para los índices de refracción $n_2 = 1.30$ (línea continua), $n_2 = 1.36$ (línea punteada) y $n_2 = 1.40$ (línea con rayas y puntos), respectivamente. Los valores corresponden aproximadamente a intervalos de $1 / \left(2\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)$ longitudes de onda, marcando la presencia de nuevos modos guiados en el canal de la guía. Es interesante notar que en la figura 31(b) se muestran resultados para polarización p, en los que también presentan el comportamiento escalonado. Esto contrasta con el caso de una rendija metálica, en el que sólo se observaba un crecimiento casi lineal de la transmitancia.

En la figura 32, se presentan cálculos de la transmitancia de la luz a través de guías de onda con constricciones abruptas de longitudes $d = 0.01\lambda$ (línea continua), $d = 2.4\lambda$ (línea punteada) y $d = 50\lambda$ (línea con rayas y puntos). En la región del canal se consideró un índice de refracción $n_1 = 1.45$, mientras que para la cubierta $n_2 = 1.36$.

Para el campo difuso incidente se consideró una superposición de haces gaussianos de semi ancho $g = 3.044\lambda$. Dado que la guía tiene un ángulo de aceptación $\theta_a = 31.52^\circ$, los ángulos de incidencia θ_0 utilizados están en el intervalo de -32° a 32° con pasos de 1° . Los demás parámetros son los mismos que se emplearon para la figura 31. Los resultados de la figura 32(a) corresponden al caso de polarización s y los de la figura 32(b) a la polarización p.

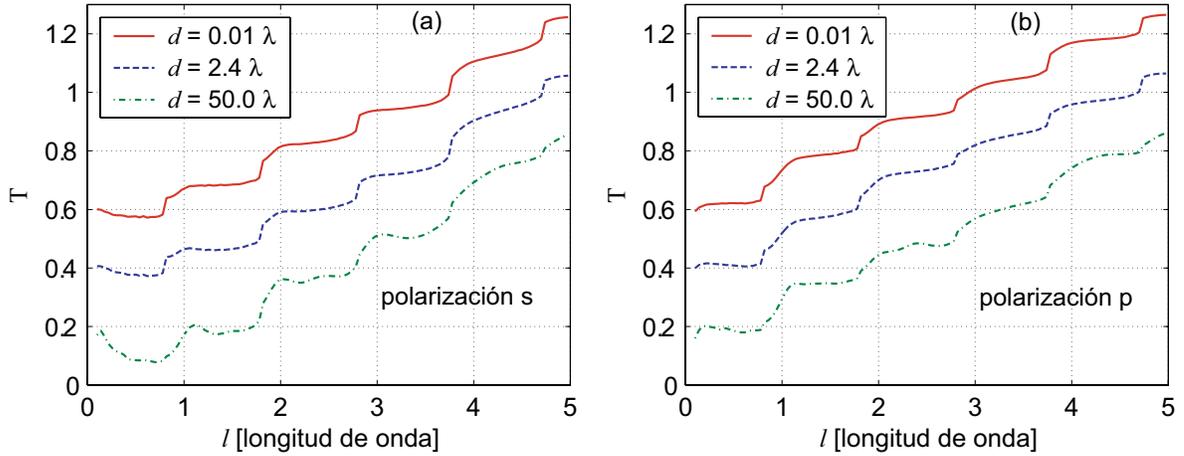


Figura 32. Transmitancia a través de una guía de onda dieléctrica de índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.36$ con estrechamiento abrupto de longitudes $d = 0.01\lambda$ (línea continua), $d = 2.4\lambda$ (línea punteada) y $d = 50\lambda$ (línea con rayas y puntos). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.

Para el caso de polarización s [figura 32(a)], se observa un incremento de la transmitancia en forma de escalones como función del ancho de la abertura. Los pasos ocurren a intervalos de 0.96 longitudes de onda, marcando la presencia de nuevos modos de propagación en la guía. Para la constricción o rendija más larga, los escalones presentan algunas variaciones que modifican la forma de los primeros escalones. Por otro lado, en la figura 32(b) se muestran resultados para polarización p, en los que se observan pequeños detalles en los escalones sin afectar mucho el comportamiento de la transmitancia para constricciones más largas.

La semejanza en el comportamiento para los dos modos de polarización tiene su origen en las condiciones de frontera. El requerimiento de las condiciones de frontera son que las componentes tangenciales de los campos E_2 y H_3 para el caso de la polarización s, y las componentes tangenciales de los campos H_2 y E_3 para el caso de la polarización p, deben ser iguales en las interfases entre los medios adyacentes. De esta manera, a diferencia del caso del metal no se tiene una situación en la que la onda pueda viajar pegada a las paredes del canal. Más bien, las regiones de intensidad del campo más alto están en el centro de la guía de onda. Debido a esto, se tiene la presencia de los escalones en las curvas de la transmitancia para ambas polarizaciones.

Dada la dificultad de tener una guía de onda con la geometría mostrada en la figura 30 es razonable preguntarse, si con situaciones más realistas como variaciones graduales en la sección transversal del canal y rugosidad en la superficie, se podrían todavía observar. Motivados por estas preguntas se presentan los cálculos en las siguientes secciones.

VI.3. Efectos de rugosidad

La forma idealizada del angostamiento de la guía mostrada en la figura 30 podría ser difícil de conseguirse en la práctica. Por ejemplo, las paredes que definen la guía angosta podrían tener una rugosidad. En esta sección, consideramos la propagación de luz a través de una guía de onda dieléctrica con paredes aleatoriamente rugosas. La geometría considerada se muestra en la figura 33. Se presentan casos para guías de onda con una constricción rugosa cuyos perfiles de las paredes son estadísticamente independientes.

Para generar las paredes aleatoriamente rugosas, se considera que el segmento rugoso consiste de una serie de capas angostas (espesor $\frac{\lambda}{2}$) con anchos aleatorios y no correla-

cionados. La función de los perfiles superficiales puede ser expresada como $[\xi(x_3), x_3]$, donde $\xi(x_3)$ representa una realización de un proceso aleatorio cuya función de densidad de probabilidad de alturas es uniforme en el intervalo definido $[a, b]$ con media $\mu = \frac{1}{2}(a + b)$ y desviación estándar de alturas $\delta = \frac{1}{2\sqrt{3}}(b - a)$. En la figura 33, se puede ver que, los dos perfiles aleatorios se intersectan cuando la separación de los mismos es pequeña. Por esta razón, en los cálculos se considera una separación mayor a la desviación estándar de alturas δ para evitar el traslape entre ellos mismos.

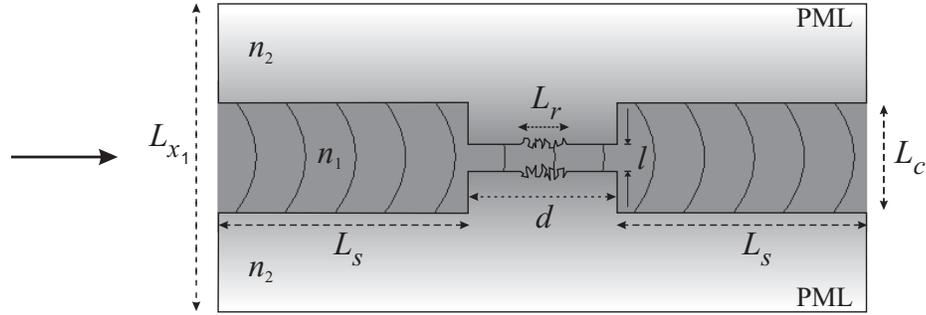


Figura 33. Esquema de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento abrupto con paredes aleatoriamente rugosas.

En la figura 34 se presentan cálculos de la transmisión de luz a través de una guía de onda dieléctrica con paredes aleatoriamente rugosas para los casos de iluminación difusa con polarización s y p. Los dos medios que forman la guía de onda simétrica tienen índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.36$. La longitud del sistema a lo largo del eje x_1 fue considerada como $L_{x_1} = 15.22\lambda$ y se utilizó un intervalo de muestreo $\Delta x_1 = \lambda/50$. Para las regiones inicial y final con sección transversal constante, se consideró un canal de la guía de ancho $L_c = 5\lambda$ y longitud $L_s = 1000\lambda$. La longitud de la constricción es $d = 500\lambda$. La longitud de la sección con rugosidad se escogió como $L_r = 25\lambda$ y se dividió en $N_c = 50$ capas de espesor $\Delta = \lambda/2$. Para el campo difuso incidente se consideró un conjunto de haces gaussianos de semi ancho $g = 3.044\lambda$ con ángulos de

incidencia θ_0 en el intervalo de -32° a 32° con pasos de 1° . Los demás parámetros son los mismos que se emplearon para la figura 31. Se presentan valores de la transmitancia en función del ancho de la constricción l en el intervalo de $\lambda/5$ a 5λ , donde l es el ancho promedio por considerarse el proceso aleatorio definido en un intervalo simétrico con media $\mu = 0$. Las curvas mostradas corresponden a una realización con desviaciones estándar de alturas $\delta = 0.006$ (línea continua), $\delta = 0.058$ (línea punteada) y $\delta = 0.144$ (línea con rayas y puntos). Los resultados de la figura 34(a) corresponden al caso de polarización s y los de la figura 34(b) a la polarización p.

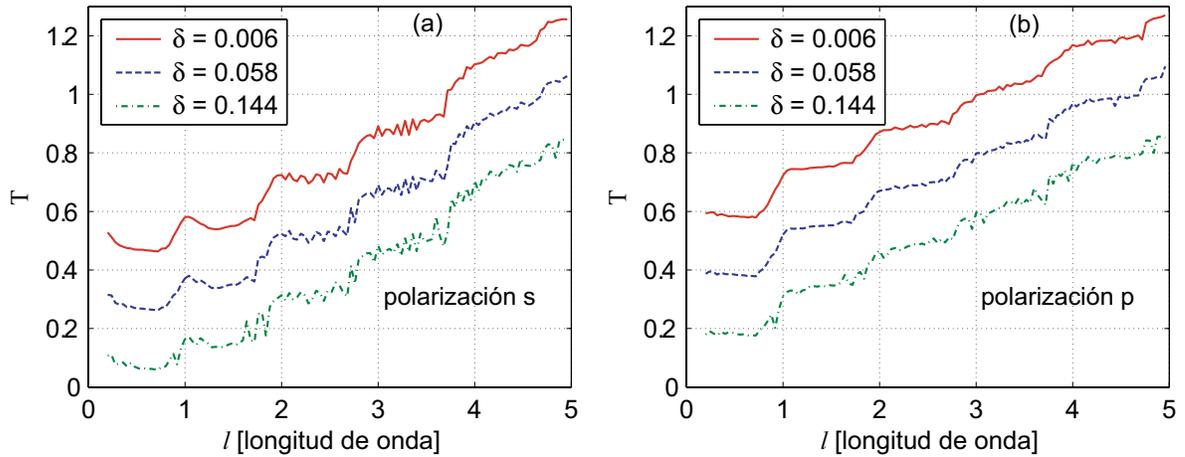


Figura 34. Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con una sección de la constricción rugosa de longitud $L_r = 25\lambda$ y desviaciones estándar de alturas $\delta = 0.006$ (línea continua), $\delta = 0.058$ (línea punteada) y $\delta = 0.144$ (línea con rayas y puntos). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.

Para el caso de polarización s, en la figura 34(a) vemos que la transmitancia también muestra un comportamiento escalonado, pero con algunas oscilaciones pequeñas en el tercer y cuarto escalón para la desviación estándar de alturas $\delta = 0.006$ (línea continua). Sin embargo, al aumentar las fluctuaciones de la rugosidad para $\delta = 0.144$ (línea con rayas y puntos), presentan perturbaciones mayores y tienden a desvanecer el comportamiento de los escalones. Similarmente, para el caso de polarización p, la

figura 34(b) muestra la transmitancia con variaciones pequeñas y se observa solamente un crecimiento casi lineal a partir del segundo escalón.

En la figura 35, se muestran cálculos de la transmisión de luz a través de guías de onda con constricciones rugosas de longitud $d = 500\lambda$ para los casos de iluminación difusa con polarización s [figura 35(a)] y p [figura 35(b)]. Las curvas mostradas corresponden a una realización con perfiles aleatorios independientes con una media $\mu = 0$ y una desviación estándar de alturas $\delta = 0.144\lambda$. Las longitudes de las secciones con rugosidad se escogieron como $L_r = 25\lambda$ (línea continua) y $L_r = 100\lambda$ (línea punteada) y se muestrearon con un intervalo de $\Delta = \lambda/2$. La longitud de las secciones planas antes y después de la rugosidad fue de $(d - L_r)/2$. Se presentan valores de la transmitancia en función del ancho promedio de la constricción rugosa l en el intervalo de $\lambda/5$ a 5λ . Los demás parámetros son los mismos que se emplearon para la figura 34.

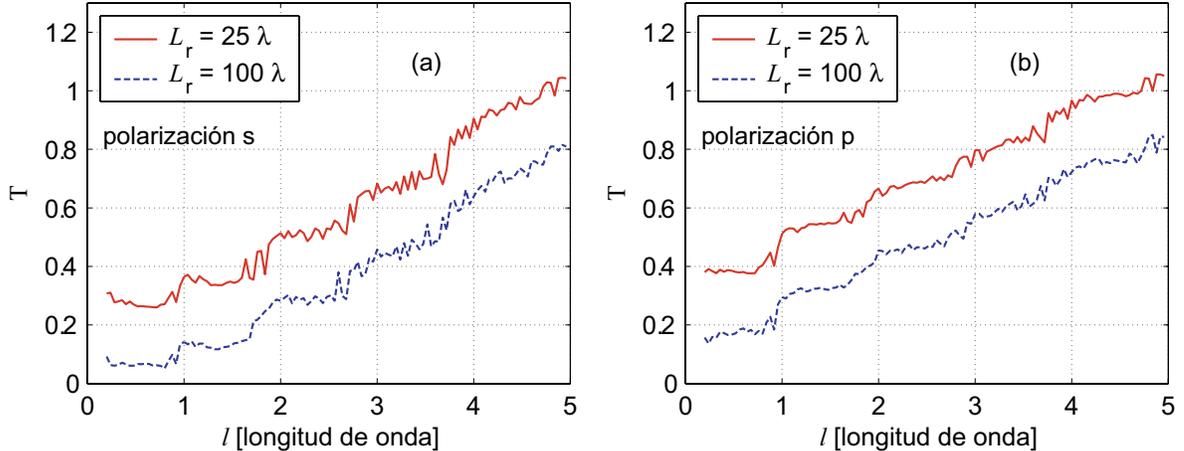


Figura 35. Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con paredes rugosas para $\delta = 0.144$. La constricción tiene longitud $d = 500\lambda$ y sección rugosa de longitud $L_r = 25\lambda$ (línea continua) y $L_r = 100\lambda$ (línea punteada). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.

De la figura 35, vemos que la curva de transmitancia presenta perturbaciones mayores para una longitud de la sección rugosa $L_r = 25\lambda$ (línea continua) que para $L_r =$

índices de refracción $n_1 = 1.45$ y $n_2 = 1.36$. La longitud de la superficie formada por los dos medios a lo largo del eje x_1 fue considerada como $L_{x_1} = 15.22\lambda$ con un intervalo de muestreo $\Delta x_1 = \lambda/50$. En las regiones inicial y final uniformes del canal de la guía se consideró un ancho del canal de $L_c = 5\lambda$ y una longitud $L_s = 10000\lambda$. La longitud de transición de estrechamiento a lo largo del eje x_3 fue elegida como $L_0 = 1250\lambda$ con $N_c = 10$ (línea continua), 50 (línea punteada) y 100 (línea con rayas y puntos) capas. La función del perfil adiabático se expresa por la función gaussiana de ancho $c = L_0/2 = 625\lambda$. La longitud de la sección central de estrechamiento fue elegida como $L_w = 5000\lambda$. Para el campo difuso incidente se consideró un conjunto de haces gaussianos de semi ancho $g = 3.044\lambda$ con ángulos de incidencia θ_0 en el intervalo de -32° a 32° con pasos de 1° . Los demás parámetros son los mismos que se emplearon en los casos anteriores. En la figura se presentan valores de la transmitancia en función del ancho de la cintura de estrechamiento l en el intervalo de $\lambda/10$ a 5λ . Los resultados de la figura 37(a) corresponden al caso de polarización s y la figura 37(b) a la polarización p.

En la figura 37, vemos que la transmitancia muestra un comportamiento escalonado, en el que el primer paso ocurre para un ancho un poco por abajo de 0.96 longitudes de onda. Estos cálculos fueron para ambos casos de la polarización. Se puede observar también en la figura 37(a) que para el caso de $N_c = 10$ capas de espesor $\Delta = 250\lambda$ (línea continua) la curva de transmitancia presenta perturbaciones pequeñas en los escalones. En cambio, para $N_c = 100$ capas de espesor $\Delta = 25\lambda$ (línea con rayas y puntos) el comportamiento de los escalones está más marcado y definido.

En la figura 38, se muestran cálculos de la transmisión de luz a través de guías de onda con estrechamientos graduales para los casos de iluminación difusa con polariza-

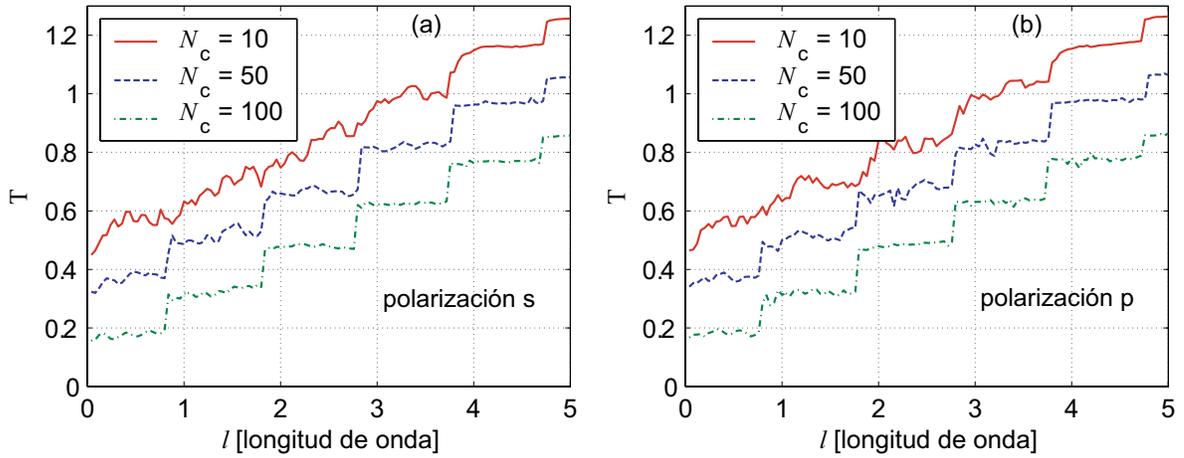


Figura 37. Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento suave. La longitud central de estrechamiento $L_w = 5000\lambda$ y la longitud de transición de estrechamiento $L_0 = 1250\lambda$ con $N_c = 10$ (línea continua), 50 (línea punteada) y 100 (línea con rayas y puntos) capas. La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.

ciones s [figura 38(a)] y p [figura 38(b)]. En las regiones inicial y final de la guía se consideró un ancho del canal de $L_c = 5\lambda$ y una longitud $L_s = 10000\lambda$. La longitud de la sección central del estrechamiento fue elegida como $L_w = 5000\lambda$. Las curvas mostradas corresponden a longitudes de transición de estrechamiento de $L_0 = 50\lambda$ (línea continua), $L_0 = 250\lambda$ (línea punteada), $L_0 = 750\lambda$ (línea con rayas y puntos) y $L_0 = 2500\lambda$ (línea con puntos pequeños), las cuales están divididas en $N_c = 50$ capas de espesores $\Delta = 2\lambda$, $\Delta = 10\lambda$, $\Delta = 30\lambda$ y $\Delta = 100\lambda$, respectivamente. Los demás parámetros son los mismos que se emplearon para la figura 37.

En la figura 38, se presentan cálculos de la transmitancia en función del ancho de la cintura de estrechamiento l en el intervalo de $\lambda/10$ a 5λ . Se observa un incremento de la transmitancia en forma de escalones como función del ancho de la cintura de adelgazamiento de la guía de onda para ambas polarizaciones. Los pasos ocurren a intervalos de aproximadamente 0.96 longitudes de onda, que además, marcan la presencia de nuevos modos guiados. Para longitudes de transición cortas, los escalones están bien definidos

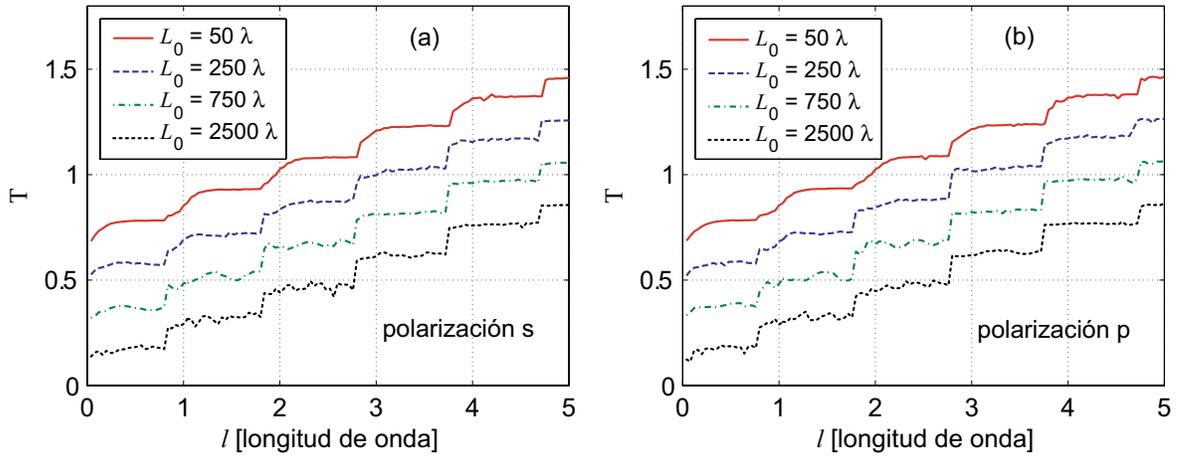


Figura 38. Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con un estrechamiento adiabático de longitudes $L_0 = 50\lambda$ (línea continua), $L_0 = 250\lambda$ (línea punteada), $L_0 = 750\lambda$ (línea con rayas y puntos) y $L_0 = 2500\lambda$ (línea con puntos pequeños). La iluminación es difusa con polarización s (a) y p (b). Por claridad, se han desplazado las curvas por múltiplos de 0.2 unidades.

pero los brincos no están muy marcados. Por otro lado, para longitudes más largas de la transición se observan fluctuaciones en los tres primeros escalones sin modificar el comportamiento. Esto se debe, sin embargo, a efectos de discretización, que podríamos considerar como una rugosidad artificial.

VI.5. Conclusiones parciales

Se ha presentado un estudio de la transmisión de la luz difusa a través de guías de onda dieléctricas multimodales con estrechamientos y rugosidad. Para el caso de iluminación con luz difusa s polarizada, la transmitancia crece de manera escalonada como función del ancho de la abertura del canal de la guía. Los pasos ocurren a intervalos de $1 / \left(2\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)$ longitudes de onda cuando la guía permite la propagación de nuevos modos. Es interesante que el comportamiento de la transmitancia para polarización p también presenta un crecimiento en forma de escalones, a diferencia de una rendija o

guía metálica.

Para los casos de estrechamientos abruptos o suaves de varias longitudes de onda los escalones van acompañados con pequeñas fluctuaciones. Pero, dentro de los parámetros explorados no se encontraron diferencias considerables entre los casos tomados en cuenta sobre el comportamiento de la transmitancia.

La rugosidad en las paredes de la guía con estrechamientos abruptos puede modificar sustancialmente el comportamiento de la transmitancia impidiendo la observación de los escalones. Estos resultados pueden ser de ayuda para explicar las dificultades para observar estos efectos de cuantización de la transmitancia en situaciones prácticas.

Capítulo VII

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha presentado un estudio teórico y experimental de la propagación de luz difusa a través de guías de onda metálicas y dieléctricas con rugosidad y estrechamientos. El trabajo está motivado en gran parte por analogías entre problemas de transporte electrónico y propagación de luz a través de sistemas con geometrías confinantes.

En este capítulo se da una visión integral del trabajo desarrollado, presentando un breve resumen y una discusión comparativa entre los resultados obtenidos con los métodos experimentales y numéricos utilizados. Posteriormente, con base en los resultados obtenidos, se enuncian las conclusiones más importantes del trabajo.

Como parte del trabajo, se han desarrollado e implementado técnicas experimentales para producir estrechamientos en fibras ópticas multimodales y explorar las consecuencias de esto en la transmitancia. Por el lado teórico, presentamos un par de herramientas computacionales para modelar problemas de propagación y esparcimiento de luz en guías de onda metálicas y dieléctricas con discontinuidades, rugosidades periódicas o aleatorias o inclusiones de volumen.

Para abordar los problemas de interés de manera experimental utilizamos dos técnicas.

La primera consiste en estirar fibras ópticas multimodales aplicando calentamiento local y tensión. Utilizando una flama pequeña, se calentó una sección de la fibra óptica y se tensionó utilizando una platina con motor. Durante el proceso, se realizaron mediciones de la intensidad transmitida en función del tiempo. Los resultados experimentales muestran que el decaimiento de la transmitancia no es monótono, presentando brinco y fluctuaciones que tienen cierta regularidad cuando el diámetro de la fibra es de sólo algunas micras. Resultados representativos de esto se presentaron en la figura 6(b), que reproducimos aquí como la figura 39(a) para facilitar la discusión.

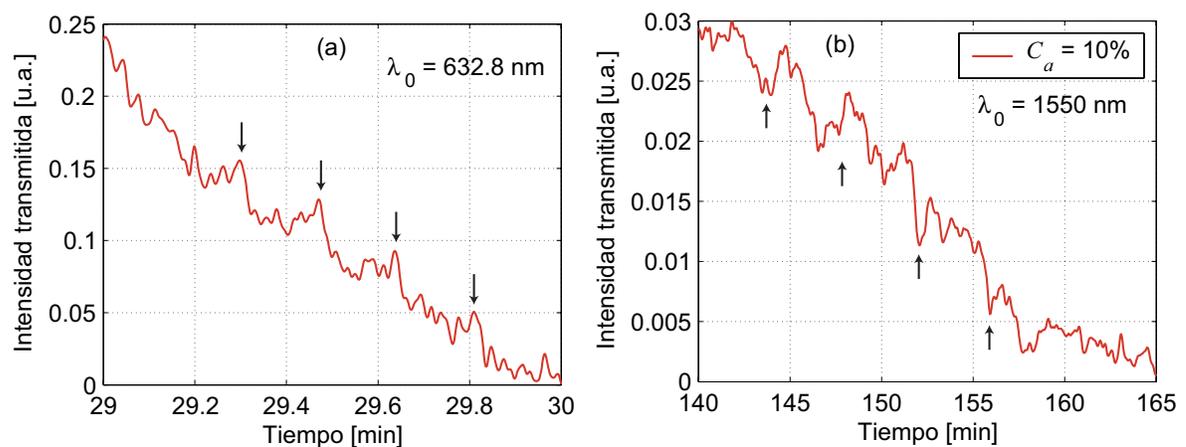


Figura 39. Intensidad de la transmitancia detectada en función del tiempo. (a) La fibra está bajo tensión y calor. (b) La fibra está bajo ataque químico.

La segunda técnica utilizada para adelgazar fibras ópticas multimodales consistió en sumergirlas en una solución de ácido fluorhídrico. El ataque químico produce una corrosión en la frontera ácido-vidrio, generando un adelgazamiento y una rugosidad aleatoria en la superficie de la fibra. La exposición al ácido va reduciendo el diámetro de la fibra. Los resultados muestran que en ciertas situaciones, la intensidad transmitida por la fibra óptica en función del tiempo presenta un decaimiento con brinco y oscilaciones. Estos resultados se presentaron en la figura 9(b) y se reproducen aquí

como la figura 39(b).

En los resultados experimentales mostrados en la figura 39(b) vemos que, aunque parece haber ciertas indicaciones o vestigios de un comportamiento escalonado para la transmitancia no es completamente claro. Por otro lado, tampoco era claro en el momento de realizar estos experimentos si los sistemas explorados deberían presentar este tipo de comportamiento. Se esperaba encontrar efectos de cuantización con base en argumentos cualitativos pero, a la fecha, no se han publicado cálculos teóricos al respecto. Debido a esto, se decidió que era importante abordar estos problemas con herramientas teóricas rigurosas. Esto ayudaría a decidir, por un lado, si deberíamos esperar este tipo de efectos y, por el otro, el nivel de control que deberíamos tener sobre la fabricación de los sistemas.

Con respecto a la parte teórica, desarrollamos e implementamos dos técnicas numéricas rigurosas. La primera se conoce como el método de la ecuación integral. Partiendo del segundo teorema integral de Green se obtiene un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas, al campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial cuya solución determina las “funciones fuente”, con las que se puede calcular el campo esparcido. Con este método se trata la propagación de luz difusa a través de rendijas metálicas ópticamente gruesas.

Para el caso de rendijas perfectamente conductoras iluminadas con polarización s , se encontró que la transmitancia crece en forma de escalones en función del ancho de la abertura. En contraste, las curvas de transmitancia para polarización p sólo muestran algunos detalles en la vecindad de las marcas de media longitud de onda sin presentar el comportamiento escalonado. Este resultado fue algo sorprendente y se realizaron pruebas para tratar de entenderlo. Hemos concluido que la diferencia en el comportamiento para

los dos modos de polarización está relacionado con el hecho de que con polarización p, las regiones de intensidad del campo más alta están cerca de las paredes de la guía de onda, y no en el centro del canal, como ocurre para un campo con polarización s.

Los resultados no son muy diferentes cuando se consideran materiales conductores con conductividad finita. Los escalones siguen apareciendo con polarización s, aunque las curvas están ligeramente corridas hacia la izquierda, debido a la penetración del campo en el metal (profundidad de piel). Para polarización p, la conductividad finita incrementa las fluctuaciones en la curva, pero se conserva un crecimiento de la transmitancia sin cambios abruptos. Por otro lado, encontramos que la rugosidad en las paredes de la rendija sí modifica el comportamiento de las curvas de transmitancia y distorsiona de manera importante la forma de los escalones. Estos resultados se presentaron en la figuras 14(a) y 18(a), y se reproducen aquí en la figura 40.

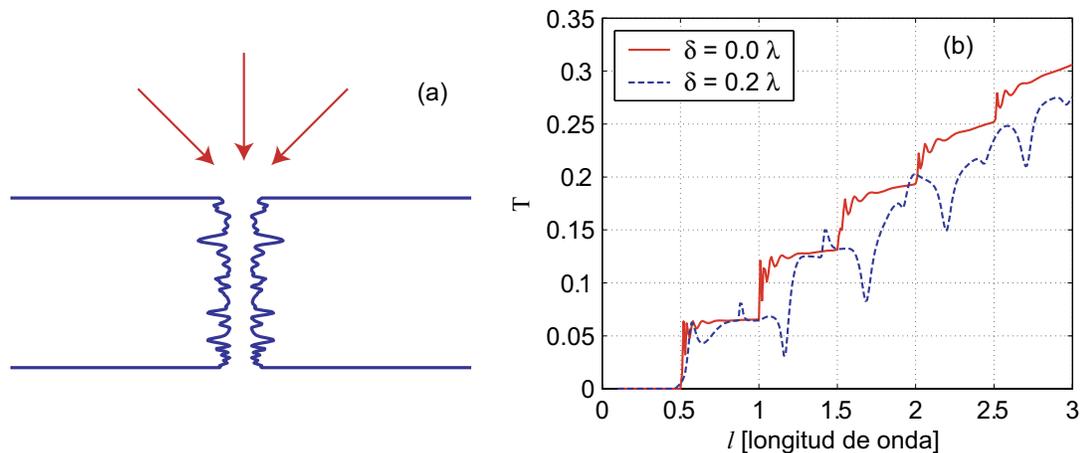


Figura 40. (a) Contorno de una rendija perfectamente conductora con paredes aleatoriamente rugosas. (b) Transmitancia de la luz por rendijas perfectamente conductoras con paredes planas y rugosas.

Debido a que normalmente la iluminación difusa no viene solamente del plano perpendicular a la abertura de la rendija, se consideró el efecto de utilizar iluminación cónica. Encontramos que este tipo de iluminación produce un suavizado que hace desa-

parecer los escalones de las curvas de transmitancia. Los resultados obtenidos muestran las dificultades prácticas que involucra la observación de los efectos buscados para el caso de rendijas metálicas.

Aunque el método de la ecuación integral puede ser utilizado para estudiar problemas de propagación no resulta práctico para sistemas largos, pues los requerimientos computacionales que involucra son muy altos. Para tratar sistemas similares a los estudiados experimentalmente fue necesario implementar otro método. Éste es un método de expansión modal conocido como el método del propagador de la matriz R , y permite estudiar problemas de propagación que involucran distancias mucho más largas que los que se pueden considerar con el método integral.

En este método, se inicia con las ecuaciones de Maxwell expresadas en el espacio de Fourier en forma discreta y se considera que el sistema es invariante en dos direcciones. Se encuentra una base para las soluciones posibles en términos de los valores y funciones propias del sistema, que para una guía representan las constantes y los modos de propagación.

Cuando el sistema no es invariante en la dirección de propagación se hace una discretización de éste, aproximándolo como una secuencia de rebanadas o capas invariantes. El sistema completo se resuelve de manera consistente para una excitación (campo incidente) dada, tomando en cuenta la continuidad de las componentes tangenciales de los campos en las fronteras entre estas rebanadas invariantes.

Con este método, estudiamos la propagación de luz en guías de onda dieléctricas multimodales con estrechamientos abruptos, suaves y con rugosidad superficial. Se comprobó, además que para el caso de rendijas metálicas los resultados obtenidos con los dos métodos numéricos fueran consistentes.

Para el caso de guías de onda dieléctricas con estrechamientos abruptos, se obtu-

vieron resultados del coeficiente de transmisión como función del ancho de la abertura del canal. Los resultados muestran que para el caso de polarización s, la transmitancia crece abruptamente a intervalos de $1 / \left(2\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)$ longitudes de onda, donde n_1 y n_2 son los índices de refracción que caracterizan la guía. A diferencia de lo que ocurre con una rendija metálica para polarización p, el comportamiento de la transmitancia también es escalonado. Para estrechamientos abruptos de unas cuantas longitudes de onda de espesor, los escalones están bien definidos, mientras que para constricciones mucho más largas se presentan fluctuaciones que modifican la forma de los primeros escalones. Esto se debe, sin embargo, a efectos de discretización, que podríamos considerar como una rugosidad artificial.

El hecho de que en este caso sí se observan escalones con ambos modos de polarización se debe a que la luz viaja principalmente por el centro del canal, y no pegada a las paredes como puede ocurrir con metales altamente conductores y polarización p.

Estudiamos también el caso de estrechamientos graduales en las guías y los efectos que puede producir la rugosidad superficial. Los resultados representativos se presentaron en las figuras 34(a) y 38(a), y se reproducen aquí en la figura 41.

Para estrechamientos muy suaves los primeros escalones presentan algunas oscilaciones que deben desaparecer al hacer más fina la discretización pero, fuera de eso, no encontramos diferencias importantes entre estos dos tipos de estrechamientos. Esto, al menos para las longitudes y parámetros considerados. Por otro lado, la rugosidad en las paredes de la sección estrechada de la guía si puede modificar el comportamiento de la transmitancia, suavizando los escalones e introduciendo otras fluctuaciones.

Podemos ahora hacer una comparación cualitativa de los resultados entre las figuras 39, 40 y 41. Observamos que los resultados experimentales presentan características

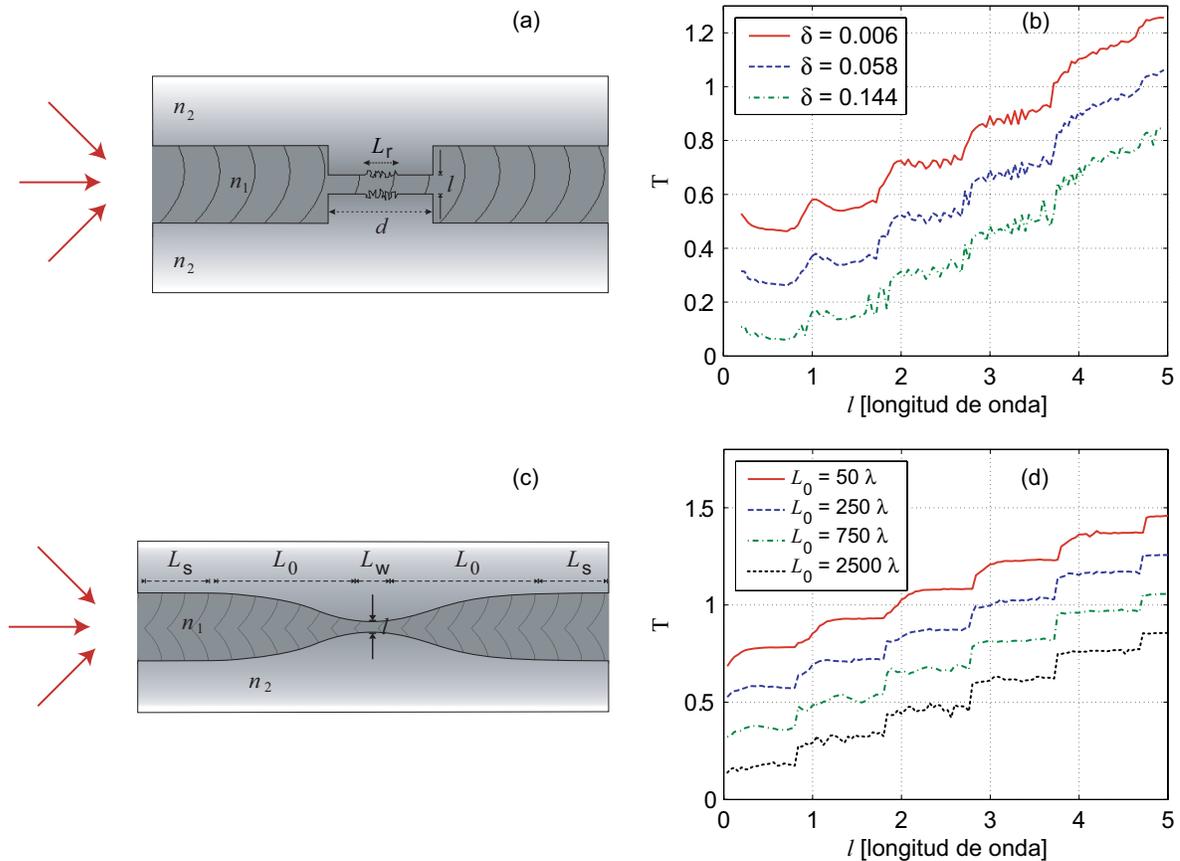


Figura 41. Transmitancia de la luz a través de una guía de onda dieléctrica con (b) una sección de la constricción rugosa y (d) con un estrechamiento gradual.

similares a los de algunos resultados numéricos. Los brincos y las fluctuaciones regulares debido a la rugosidad que se observan sobre todo en la figura 40(b), son parecidos a los de la figura 39(b).

Concluimos entonces que las observaciones con la fibra alterada con ácido son consistentes con efectos de cuantización en fibras rugosas, modificadas por efectos de rugosidad. Evidencia adicional sobre esto es que las fluctuaciones se reducen cuando la longitud de onda es más grande, lo cual equivale a reducir la rugosidad. Vale la pena recordar que la figura 39(b) fue tomada utilizando una longitud de onda de 1550 nm y que las curvas tomadas con una longitud de onda de 632.8 nm presentaban un

comportamiento más ruidoso, en el que no se alcanzan a ver fluctuaciones periódicas.

Por otro lado, los resultados experimentales mostrados en la figura 39(a) si parecen tener escalones, aunque con algo de ruido. Las curvas parecieran indicar que se trata de efectos de cuantización para una guía con transiciones suaves (ver por ejemplo la figura 41(d) para $L_0 = 2500\lambda$) y un poco de rugosidad.

Estos resultados indican que para mejorar los resultados experimentales es necesario evitar la rugosidad en la superficie de las guías y considerar fibras ópticas multimodales que soporten pocos modos (con un diámetro pequeño y una longitud de onda grande).

Aunque es difícil concluir de manera definitiva que se observaron los efectos de cuantización en los sistemas experimentales, los cálculos numéricos hacen ver más plausible esa posibilidad. Los cálculos también muestran que los efectos ocurren con guías de onda dieléctricas bidimensionales, cuestión que no era clara al iniciar el trabajo.

Referencias

- Abramovitz, M. y Stegun, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, primera edición. 1046 pp.
- Akkermans, E. y Maynard, R. (1985). Weak Localization and Anharmonicity of Phonons. *Phys. Rev. B*, **32**(12): 7850–7862.
- Albaladejo, S., Sáenz, J. J., Lester, M., Froufe-Pérez, L. S., y García-Martín, A. (2007). Optical conductance of waveguides built into finite photonic crystals. *Appl. Phys. Lett.*, **91**(6): 061107(1)–061107(3).
- Altshuler, B. L. y Lee, P. A. (1988). Disordered electronic systems. *Phys. Today*, **36**: 36–44.
- Anderson, P. W. (1958). Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Phys. Rev.*, **109**(5): 1492–1505.
- Anderson, P. W. (1985). The question of classical localization: A theory of white paint? *Phil. Mag. B*, **52**: 505–509.
- Beenakker, C. W. J. y van Houten, H. (1991). Quantum transport in semiconductor nanostructures. *Solid State Phys.*, **44**: 1–228.
- Beenakker, C. W. J., van Houten, H., y van Wees, B. J. (1989). Skipping orbits, traversing trajectories, and quantum ballistic transport in microstructures. *Superlattices and Microstructures*, **5**(1): 127–132.
- Berenger, J. P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.*, **114**: 185–200.
- Birks, T. A. (1989). Twist-induced tuning in tapered fiber couplers. *Appl. Opt.*, **28**(19): 4226–4233.
- Birks, T. A. y Li, Y. W. (1992). The shape of fiber tapers. *J. Lightwave Technol.*, **10**(4): 432–438.
- Bobb, L. C. y Krumboltz, H. D. and Shankar, P. M. (1991). Pressure sensor that uses bent biconically tapered single-mode fibers. *Opt. Lett.*, **16**(2): 112–114.
- Bohren, C. F. y Huffman, D. R. (1983). *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley and Sons, Inc., New York, primera edición. 530 pp.

- Botten, L. C., Asatryan, A. A., Nicorovici, N. A., McPhedran, R. C., y de Sterke, C. M. (2007). Generalisation of the transfer matrix formulation of the theory of electron and photon conductance. *Phys. B: Cond. Matt.*, **394**(2): 320–324.
- Burns, W. K. y Abebe, M. (1987). Coupling model for fused fiber couplers with parabolic taper shape. *Appl. Opt.*, **26**(19): 4190–4192.
- Buttiker, M. (1988). Absence of backscattering in the quantum hall effect in multiprobe conductors. *Phys. Rev. B*, **38**(14): 9375–9389.
- Chandrasekhar, S. (1960). *Radiative Transfer*. Dover, Mineola, N. Y., primera edición. 393 pp.
- Condat, C. A. y Kirkpatrick, T. R. (1987). Resonant scattering and localization of acoustic waves. *Phys. Rev. B*, **36**(13): 6782–6793.
- Costa-Kramär, J. L., García, N., García-Mochales, P., Serena, P. A., Marqués, M. I., y Correia, A. (1997). Conductance quantization in nanowires formed between micro and macroscopic metallic electrodes. *Phys. Rev. B*, **55**(8): 5416–5424.
- Dai, W., Wang, B., Koschny, T., y Soukoulis, C. M. (2008). Experimental verification of quantized conductance for microwave frequencies in photonic. *Phys. Rev. B*, **78**(7): 073109(1)–073109(4).
- Depine, R. (1991). Antispecular enhancement in s- and p-polarized electromagnetic waves scattered from random gratings. *Opt. Lett.*, **16**: 1457–1459.
- Díaz-Herrera, N., Navarrete, M. C., Esteban, O., y Gonzalez-Cano, A. (2004). A fibre-optic temperature sensor based on the deposition of a thermochromic material on an adiabatic taper. *Meas. Sci. Technol.*, **15**: 353–358.
- Economou, E. N. y Soukoulis, C. M. (1981). Static conductance and scaling theory of localization in one dimension. *Phys. Rev. Lett.*, **46**(9): 618–621.
- Elson, J. M. (2001). Propagation in planar waveguides and the effects of wall roughness. *Opt. Express*, **9**(9): 461–475.
- Escapa, L. y García, N. (1989). On the ballistic conductance of small contacts and its resonant structure - trumpet effect washes out resonant structure. *J. Phys.: Condens. Matter*, **1**: 2125–2129.
- Escapa, L. y García, N. (1990). Is the observed quantized conductance on small contacts due to coherent ballistic transport? *Appl. Phys. Lett.*, **56**(10): 901–903.
- Félix, M., Salazar, D., Castro, J., y Márquez, H. (2007). Experimental measurement of fused fiber coupler and m-z interferometer performance as WDM devices. *Fiber and Integrated Optics*, **26**(4): 187–200.

- Fisher, D. S. y Lee, P. A. (1981). Relation between conductivity and transmission matrix. *Phys. Rev. B*, **23**(12): 6851–6854.
- García-Martín, A. y Sáenz, J. J. (2005). Statistical properties of wave transport through surface-disordered waveguides. *Waves in Random and Complex Media*, **15**(2): 229–268.
- García-Martín, A., Torres, J. A., Sáenz, J. J., y Nieto-Vesperinas, M. (1997). Transition from diffusive to localized regimes in surface corrugated optical waveguides. *Appl. Phys. Lett.*, **71**(14): 1912–1914.
- García-Martín, A., Torres, J. A., Sáenz, J. J., y Nieto-Vesperinas, M. (1998). Intensity distribution of modes in surface corrugated waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, **80**: 4165–4168.
- García-Mochales, P., Serena, P. A., García, N., y Costa-Kramër, J. L. (1996). Conductance in disordered nanowires: Forward and backscattering. *Phys. Rev. B*, **53**(15): 10268–10280.
- Glazman, L. I., Lesovick, G. B., Khmel'nitskii, D. E., y Shekhter, R. I. (1988). Reflectionless quantum transport and fundamental ballistic-resistance steps in microscopic constrictions. *JETP Lett.*, **48**(4): 238–241.
- Grinstein, G. y Mazenko, G. (1986). *Directions in Condensed Matter Physics*, Vol. 1. World Scientific, Singapore, primera edición. 252 pp.
- Haanappel, E. G. y van der Marel, D. (1989). Conductance oscillations in two-dimensional sharvin point contacts. *Phys. Rev. B*, **39**(8): 5484–5487.
- Hoffmann, P., Dutoit, B., y Salathe, R. P. (1995). Comparison of mechanically drawn and protection layer chemically etched optical fiber tips. *Ultramicroscopy*, **61**: 165–170.
- Ishimaru, A. (1978). *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Vol. 1. Academic Press, New York, primera edición. 333 pp.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. Wiley and Sons, Inc., New York, tercero edición. 808 pp.
- John, S. (1984). Electromagnetic absorption in a disordered medium near a photon mobility edge. *Phys. Rev. Lett.*, **53**: 2169–2172.
- John, S. (1985). Localization and absorption of waves in a weakly dissipative disordered medium. *Phys. Rev. B*, **31**(1): 304–309.
- John, S. y Pang, G. (1996). Theory of Lasing in a Multiple-Scattering Medium. *Phys. Rev. A*, **54**(4): 3642–3652.

- Kander, I., Imry, Y., y Sivan, U. (1990). Effects of channel opening and disorder on the conductance of narrow wires. *Phys. Rev. B*, **41**(18): 12941–12944.
- Kenny, R. K., Birks, T. A., y Oakley, K. P. (1991). Control of optical fibre taper shape. *Electron. Lett.*, **27**(18): 1654–1656.
- Kuga, Y. e Ishimaru, J. (1984). Retroreflectance from a Dense Distribution of Spherical Particles. *J. Opt. Soc. Am. A*, **1**(8): 831–835.
- Lacroix, S., Bourbonnais, R., Gonthier, F., y Bures, J. (1986). Tapered monomode optical fibers: Understanding large power transfer. *Appl. Opt.*, **25**(23): 4421–4425.
- Landauer, R. (1957). Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM J. Res. Dev.*, **1**: 223–231.
- Landauer, R. (1970). Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *Philos. Mag.*, **21**: 863–867.
- Lazarev, A., Fang, N., Luo, Q., y Zhang, X. (2003). Formation of fine near-field scanning optical microscopy tips. part i. by static and dynamic chemical etching. *Rev. Sci. Instrum.*, **74**(8): 3679–3683.
- Levinson, I. B. (1988). Quantum-mechanical conductivity of a ballistic point contact. *JETP Lett.*, **48**(5): 301–304.
- Li, C. Z. y Tao, N. J. (1998). Quantum transport in metallic nanowires fabricated by electrochemical deposition-dissolution. *Appl. Phys. Lett.*, **72**(8): 894–896.
- Li, L., Chan, C. H., y Tsang, L. (1994). Numerical simulation of conical diffraction of tapered electromagnetic waves from random rough surfaces and applications to passive remote sensing. *Radio Sci.*, **29**: 587–598.
- Luna, R. E. y Méndez, E. R. (1995). Scattering by one-dimensional random rough metallic surfaces in a conical configuration. *Opt. Lett.*, **20**(7): 657–659.
- Luo, J. L., Fan, Y., Zhou, H., Gu, W., y Xu, W. (2007). Fabrication of different fine fiber tips for near field scanning optical microscopy by a simple chemical etching technique. *Chin. Opt. Lett.*, **5**: S232–S234.
- Maradudin, A. A., Michel, T., McGurn, A. R., y Méndez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **203**(2): 255–307.
- Marcuse, D. (1974). *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Press, New York, segunda edición. 257 pp.
- Mata Méndez, O., Cadilhac, M., y Petit, R. (1983). Diffraction of a two-dimensional electromagnetic beam wave by a thick slit pierced in a perfectly conducting screen. *J. Opt. Soc. Am.*, **73**(3): 328–331.

- Maystre, D. (1984). Rigorous vector theories of diffraction gratings. *in Progress in Optics*, E. Wolf ed., **XXI**: 3–67.
- Méndez, E. R. y O'Donnell, K. A. (1987). Observation of Depolarization and Backscattering Enhancement in Light Scattering from Gaussian Random Surfaces. *Opt. Commun.*, **61**(2): 91–95.
- Mendoza-Suárez, A. y Méndez, E. R. (1997). Light scattering by reentrant fractal surfaces. *Appl. Opt.*, **36**(15): 3521–3531.
- Mie, G. (1908). Contributions to the optics of turbid media, particularly of colloidal metal solutions. *Ann. Phys.*, **25**(3): 377–445.
- Moar, P. N., Love, J. D., Ladoucer, F., y Cahill, W. (2006). Waveguide analysis of heat-drawn and chemically etched probe tips for scanning near-field optical microscopy. *Appl. Opt.*, **45**(25): 6442–6456.
- Montie, E. A., Cosman, E. C., Hooft, G. W. t., Van der Mark, M., y Betnakker, C. W. J. (1991). Observation of the optical analogue of quantized conductance of a point contact. *Nature*, **350**(6319): 594–595.
- Morse, P. M. y Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, Vol. 2. McGraw-Hill, New York, primera edición. 997 pp.
- Novikov, I. V. y Maradudin, A. A. (1999). The stokes matrix in conical scattering from a one-dimensional perfectly conducting randomly rough surface. *Radio Sci.*, **34**: 599–614.
- O'Donnell, K. A. y Méndez, E. R. (1987). Experimental Study of Scattering from Characterized Random Surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**(7): 1194–1205.
- Ohtsu, M. (1995). Progress of high-resolution photon scanning tunneling microscopy due to a nanometric fiber probe. *J. Lightwave Technol.*, **13**(7): 1200–1221.
- Pascual, J. I., Méndez, J., Gómez-Herrero, J., Baro, A. M., García, N., Landman, U., Luedtke, W. D., Bogachek, E. N., y Cheng, H. P. (1995). Properties of metallic nanowires: From conductance quantization to localization. *Science*, **267**(5205): 1793–1795.
- Payne, F. P., Hussey, C. D., y Yataki, M. S. (1985). Modeling fused single-mode-fibre couplers. *Electron. Lett.*, **21**: 461–462.
- Payne, M. C. (1989). Adiabaticity in quantum transport. *J. Phys.: Condens. Matter*, **1**(30): 4939–4946.
- Pérez, H. I., Valencia, C. I., Méndez, E. R., y Sánchez-Gil, J. A. (2009). On the transmission of diffuse light through thick slits. *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**(4): 909–918.

- Rayleigh, J. W. S. (1871). On the scattering of light by small particles. *Philos. Mag.*, **41**: 41447–41454.
- Salazar, D., Félix, M. A., Ángel-Valenzuela, J., y Márquez, H. (2001). A simple technique to obtain fused fiber optics couplers. *Intrumentation and Development*, **5**(3): 170–174.
- Sánchez-Gil, J. A. y Freilikher, V. (2003). Local and average fields inside surface-disordered waveguides: Resonances in the one-dimensional anderson localization regime. *Phys. Rev. B*, **68**(7): 075103–075108.
- Sánchez-Gil, J. A., Freilikher, V., Yurkevich, I., y Maradudin, A. A. (1998). Coexistence of ballistic transport, diffusion, and localization in surface disordered waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, **80**: 948–951.
- Sánchez-Gil, J. A., Freilikher, V., Maradudin, A. A., y Yurkevich, I. V. (1999). Reflection and transmission of waves in surface-disordered waveguides. *Phys. Rev. B*, **59**: 5915–5925.
- Sheng, P. (1995). *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*. Academic Press, New York, segunda edición. 333 pp.
- Sheng, P. y Zhang, Z. Q. (1986). Scalar-wave localization in a two-component composite. *Phys. Rev. Lett.*, **57**(15): 1879–1882.
- Snyder, A. W. y Love, J. D. (1983). *Optical Waveguide Theory*. Academic Press, New York, primera edición. 766 pp.
- Szafer, A. y Stone, D. (1989). Theory of quantum conduction through a constriction. *Phys. Rev. Lett.*, **62**(3): 300–303.
- Tekman, E. y Ciraci, S. (1989a). Novel features of quantum conduction in a constriction. *Phys. Rev. B*, **39**(12): 8772–8775.
- Tekman, E. y Ciraci, S. (1989b). Effects of the constriction geometry on quasi-one-dimensional transport: Adiabatic evolution and resonant tunneling. *Phys. Rev. B*, **40**(12): 8559–8562.
- Todorov, T. N. y Sutton, A. P. (1993). Jumps in electronic conductance due to mechanical instabilities. *Phys. Rev. Lett.*, **70**(14): 2138–2141.
- Torres, J. A., Pascual, J. I., y Sáenz, J. J. (1994). Theory of conduction through narrow constrictions in a three-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, **49**(23): 16581–16584.
- Turner, D. R. (1984). Etch procedure for optical fibers. *US Patent*, **4**: 469–554.

- Valaskovic, G. A., Holton, M., y Morrison, G. H. (1995). Parameter control, characterization, and optimization in the fabrication of optical fiber near-field probes. *Appl. Opt.*, **34**(7): 1215–1228.
- Valencia, C. I., Méndez, E. R., y Mendoza, B. S. (2003). Second-harmonic generation in the scattering of light by two-dimensional particles. *J. Opt. Soc. Am. B*, **20**(10): 2150–2161.
- van Albada, M. P. y Lagendijk, A. (1985). Observation of Weak Localization of Light in a Random Medium. *Phys. Rev. Lett.*, **55**(24): 2692–2695.
- van de Hulst, H. C. (1981). *Light Scattering by Small Particles*. Dover, New York, primera edición. 470 pp.
- van der Marel, D. y Haanappel, E. G. (1989). Model calculations of the quantum ballistic transport in two-dimensional constriction-type microstructures. *Phys. Rev. B*, **39**(11): 7811–7820.
- van Houten, H. y Beenakker, C. W. J. (1990). Quantum Point Contacts and Coherent Electron Focusing. *Analogies in Optics and Micro Electronics*, **1**: 203–225.
- van Houten, H. y Beenakker, C. W. J. (1996). Quantum point contacts. *Phys. Today*, **49**: 22–27.
- van Houten, H., van Wees, B. J., y Beenakker, C. W. J. (1988). *Quantum and Classical Ballistic Transport in Constricted Two-Dimensional Electron Gas*, Vol. 83. Springer-Verlag, Berlin. 198-207.
- van Wees, B. J., van Houten, H., Beenakker, C. W. J., Williamson, J. G., Kouwenhoven, L. P., van der Marel, D., y Foxon, C. T. (1988). Quantized Conductance of Point Contacts in a Two-Dimensional Electron Gas. *Phys. Rev. Lett.*, **60**(9): 848–850.
- van Wees, B. J., Kouwenhoven, Willems, E. M. M., Harmans, C. J. P. M., Mooij, J. E., van Houten, H., Beenakker, C. W. J., Williamson, J. G., y Foxon, C. T. (1991). Quantum ballistic and adiabatic electron transport studied with quantum point contacts. *Phys. Rev. B*, **43**(15): 12431–12453.
- Villatoro, J., Monzon-Hernandez, D., y Mejia, E. (2003). Fabrication and modeling of uniform-waist single-mode tapered optical fiber sensors. *Appl. Opt.*, **42**(13): 2278–2283.
- Wang, S. F., Chiu, M. H., Hsu, J. C., Chang, R. S., y Wang, F. T. (2005). Theoretical analysis and experimental evaluation of d-type optical fiber sensor with a thin gold film. *Opt. Commun.*, **253**: 283–289.

- Wharam, D. A., Thornton, T. J., Newbury, R., Pepper, M., Ahmed, H., Frost, J. E. F., Hasko, D. G., Peacock, D. C., Ritchie, D. A., y Jones, G. A. C. (1988). One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, **21**(8): L209–L214.
- Wiersma, D. S., Bartolini, P., Lagendijk, A., y Righini, R. (1997). Localization of light in a disordered medium. *Nature*, **390**(18): 671–673.
- Wolf, P. E. y Maret, G. (1985). Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, **55**(24): 2696–2699.
- Wright, J. V. (1985). Variational analysis of fused taper couplers. *Electron. Lett.*, **21**: 1064–1065.
- Yacoby, A. e Imry, Y. (1990). Quantization of the conductance of ballistic point contacts beyond the adiabatic approximation. *Phys. Rev. B*, **41**(8): 5341–5350.

Apéndice A

POTENCIAS INCIDENTE Y ESPARCIDA EN ESPARCIMIENTO CÓNICO

En este apéndice se obtienen expresiones para las potencias incidente y esparcida en el caso cónico.

Consideramos la representación general de un campo cónico en términos de su espectro angular. En general, el campo eléctrico se puede escribir de la forma

$$\vec{E}(x_1, x_2, x_3) = E_0 \int \frac{dq_1}{2\pi} \int \frac{dq_2}{2\pi} B(q_1, q_2) \exp\{i(q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3)\} \hat{a}(q_1, q_2), \quad (167)$$

donde $q_3 = \pm \sqrt{(n_0 \omega / c)^2 - q_2^2 - q_1^2}$ y $\hat{a}(q_1, q_2)$ es el vector de polarización de las ondas planas, que depende de dos componentes q_1 y q_2 . El signo de q_3 depende de si la propagación del campo es hacia arriba (+) o hacia abajo (-). Para el caso cónico, se requiere que

$$B(q_1, q_2) = 2\pi A(q_1) \delta(q_2 - k_2). \quad (168)$$

Es decir, que todas las ondas planas con las que se construye el campo tienen un vector de onda cuya componente a lo largo de x_2 es constante. Entonces,

$$\vec{E}(x_1, x_2, x_3) = E_0 e^{ik_2 x_2} \int \frac{dq_1}{2\pi} A(q_1) e^{iq_1 x_1 \pm i\alpha_e(q_1) x_3} \hat{a}(q_1), \quad (169)$$

donde $\alpha_e(q_1) = \sqrt{(n_0\omega/c)^2 - k_2^2 - q_1^2}$.

Para haces, $A(q_1)$ es una función angosta que tiene su máximo cuando q_1 es igual a la componente 1 del número de onda incidente (es decir, $q_1 = k_1$). Si suponemos que $\hat{a}(q_1)$ no varía de manera significativa en el intervalo de integración, se puede escribir como una constante $\hat{a}(k_1)$. De esta manera, el campo incidente se expresa como

$$\begin{aligned}\vec{E}(x_1, x_2, x_3)_{inc} &= E_0 e^{ik_2 x_2} \int \frac{dq_1}{2\pi} A(q_1) e^{iq_1 x_1 \pm i\alpha_e(q_1) x_3} \hat{a}(k_1) \\ &= e^{ik_2 x_2} E_0 f_e(x_1, x_3) \hat{a}(k_1).\end{aligned}\quad (170)$$

Entonces, para la polarización σ , escribimos el campo incidente de la forma

$$\vec{E}_\sigma(x_1, x_2, x_3)_{inc} = \exp\{ik_2 x_2\} E_{0\sigma} f_e(x_1, x_3) \hat{\sigma}_i, \quad (171)$$

donde la componente en x_2 está dada por

$$E_2(x_1, x_3)_{inc} = \cos \phi_0 E_{0\sigma} f_e(x_1, x_3) = \psi_{0\sigma} f_e(x_1, x_3). \quad (172)$$

Similarmente, para la polarización π se tiene que

$$\vec{E}_\pi(x_1, x_2, x_3)_{inc} = \exp\{ik_2 x_2\} E_{0\pi} f_e(x_1, x_3) \hat{\pi}_i, \quad (173)$$

y la componente del campo incidente en x_2 es

$$H_2(x_1, x_3)_{inc} = -n_0 \cos \phi_0 E_{0\pi} f_e(x_1, x_3) = \psi_{0\pi} f_e(x_1, x_3). \quad (174)$$

De esta manera, $\psi_{inc}^{(0)}(x_1, x_3)$ representa $E_2(x_1, x_3)_{inc}$ o $H_2(x_1, x_3)_{inc}$ con

$$\psi_{0\sigma} = \cos \phi_0 E_{0\sigma} \quad \text{o} \quad \psi_{0\pi} = -n_0 \cos \phi_0 E_{0\pi}, \quad (175)$$

respectivamente.

Considerando el espectro angular de la siguiente forma

$$A(q|k_e) = \sqrt{\pi} g \exp\{-g^2(q - k_e)^2/4 + i\alpha_e(q)d\}, \quad (176)$$

la dependencia funcional del campo incidente se puede expresar como

$$f_e(x_1, x_3) = \int_{-n_0(\omega/c)\cos\phi_0}^{n_0(\omega/c)\cos\phi_0} \frac{dq}{2\pi} \sqrt{\pi} g e^{-g^2(q-k_e)^2/4} e^{i\alpha_e(q)(d-x_3)} e^{iqx_1}. \quad (177)$$

Se observa que $f_e(x_1, x_3)$ es un campo incidente que tiene la misma forma que el haz incidente en el plano (57), pero calculado a la longitud de onda efectiva dada por la ecuación (109).

Para calcular las potencias incidente y esparcida se seguirá un procedimiento similar al del caso de incidencia en el plano x_1x_3 . Empezamos con la expresión general para un campo cónico en términos de su espectro angular, dada por la ecuación (169). El campo eléctrico esparcido con polarización σ puede ser escrito de la forma

$$\vec{E}_{sc}^{(\sigma)}(x_1, x_2, x_3) = e^{ik_2x_2} \int \frac{dq}{2\pi} C_\sigma(q) e^{iqx_1 \pm i\alpha_e(q)x_3} \hat{\sigma}(q), \quad (178)$$

con lo cual la componente x_2 está dada por

$$E_2(x_1, x_3)_{sc} = \cos\phi_0 \int \frac{dq}{2\pi} C_\sigma(q) e^{iqx_1 \pm i\alpha_e(q)x_3}. \quad (179)$$

Por analogía con el problema en el que la incidencia está en el plano x_1x_3 , escribimos el campo esparcido de la forma

$$\psi_{sc}^{(0)\pm}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^\pm(q|k_e) \exp\{iqx_1 \pm i\alpha_e(q)x_3\}, \quad (180)$$

donde

$$\begin{aligned} S^\pm(q|k_e) &= \frac{i}{2\alpha_e(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left\{ i [q\eta'_j(t_j) \mp \alpha_e(q)\xi'_j(t_j)] \psi^{(0)}(t_j) - \chi^{(0)}(t_j) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -i [q\xi_j(t_j) \pm \alpha_e(q)\eta_j(t_j)] \right\} dt_j. \end{aligned} \quad (181)$$

Para el caso de transmisión $[S^-(q|k_e)]$ y $q < n_0(\omega/c)_e$, las componentes del vector de onda son $q = n_0(\omega/c)_e \sin\theta_t$ y $\alpha_e(q) = n_0(\omega/c)_e \cos\theta_t$, mientras que para el caso

de reflexión $[S^+(q|k)]$ y $q < n_0(\omega/c)_e$, y las componentes del vector de onda son $q = n_0(\omega/c)_e \sin \theta_r$ y $\alpha_e(q) = n_0(\omega/c)_e \cos \theta_r$.

Comparando las ecuaciones (179) y (180), se concluye que

$$C_\sigma(q) = \frac{S^\pm(q|k_e)}{\cos \phi_0}.$$

Para el caso de la polarización σ , partiendo de la componente x_3 del vector de Poynting definido por la ecuación (61) e integrando sobre x_1 y x_2 , se obtiene la potencia incidente que pasa por un área $L_1 L_2$

$$\begin{aligned} P_{inc}^{(\sigma)}(k_e) &= -L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} |E_{0\sigma}|^2 \int \frac{dq}{2\pi} |A_\sigma(q|k_e)|^2 \alpha_e(q) \\ &\approx -L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} \alpha_e(k_e) |E_{0\sigma}|^2 \int \frac{dq}{2\pi} |A_\sigma(q|k_e)|^2. \end{aligned} \quad (182)$$

Utilizando la forma del espectro angular del campo incidente, tenemos que

$$|A_\sigma(q|k_e)|^2 = \pi g^2 \exp\{-g^2(q - k_e)^2/2\}, \quad (183)$$

y la ecuación (182) se puede escribir como

$$\begin{aligned} P_{inc}^{(\sigma)}(k_e) &= -L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} \pi g^2 |E_{0\sigma}|^2 \alpha_e(k_e) \frac{1}{\sqrt{2\pi}g} \\ &= -L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega \cos^2 \phi_0} \pi g^2 |\psi_{0\sigma}|^2 \alpha_e(k_e) \frac{1}{\sqrt{2\pi}g}. \end{aligned} \quad (184)$$

Similarmente, la potencia esparcida es

$$\begin{aligned} P_{sc}^{(\sigma)}(k_e) &= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} \int \frac{dq}{2\pi} \alpha_e(q) |C_\sigma(q)|^2 \\ &= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega \cos^2 \phi_0} \int \frac{dq}{2\pi} \alpha_e(q) |S^\pm(q|k_e)|^2, \end{aligned} \quad (185)$$

Para el caso de la polarización π , siguiendo un procedimiento similar al caso de la polarización σ , de la ecuación (169) los campos esparcidos son

$$\vec{E}_{sc}^{(\pi)}(x_1, x_2, x_3) = e^{ik_2 x_2} \int \frac{dq}{2\pi} C_\pi(q) e^{iqx_1 \pm i\alpha_e(q)x_3} \hat{\pi}(q), \quad (186)$$

$$\vec{H}_{sc}^{(\pi)}(x_1, x_2, x_3) = -n_0 e^{ik_2 x_2} \int \frac{dq}{2\pi} C_\pi(q) e^{iqx_1 \pm i\alpha_e(q)x_3} \hat{\sigma}(q), \quad (187)$$

y la componente x_2 de $\vec{H}_{sc}^{(\pi)}(x_1, x_2, x_3)$ está dada por

$$H_2(x_1, x_3)_{sc} = -n_0 \cos \phi_0 \int \frac{dq}{2\pi} C_\pi(q) e^{iqx_1 \pm i\alpha_e(q)x_3}. \quad (188)$$

Con esto, se concluye que

$$C_\pi(q) = -\frac{S^\pm(q|k_e)}{n_0 \cos \phi_0}.$$

Con un análisis similar al caso de la polarización σ , la potencia incidente es

$$\begin{aligned} P_{inc}^{(\pi)}(k_e) &= -L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} \pi g^2 |E_{0\pi}|^2 \alpha_e(k_e) \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \\ &= -L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega n_0^2 \cos^2 \phi_0} \pi g^2 |\psi_{0\pi}|^2 \alpha_e(k_e) \frac{1}{\sqrt{2\pi g}}, \end{aligned} \quad (189)$$

mientras que la potencia esparcida tiene la forma

$$\begin{aligned} P_{sc}^{(\pi)}(k_e) &= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} \int \frac{dq}{2\pi} \alpha_e(q) |C_\pi(q)|^2 \\ &= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega n_0^2 \cos^2 \phi_0} \int \frac{dq}{2\pi} \alpha_e(q) |S^\pm(q|k_e)|^2. \end{aligned} \quad (190)$$