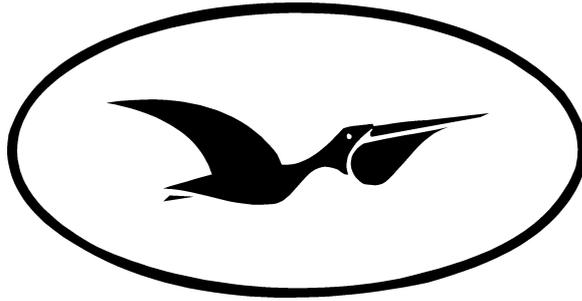


CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA



DIVISIÓN DE CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE SISMOLOGÍA

**Sobre la Ecuación Característica de las
Ondas de Rayleigh y Stoneley**

TESIS

para obtener el grado de Maestro en Ciencias que presenta:

Joel Antúnez García

Junio del 2003
Ensenada, Baja California, México

RESUMEN de la tesis de JOEL ANTÚNEZ GARCÍA, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA con orientación en SISMOLOGÍA. Ensenada, Baja California, México. Junio 30, 2003.

SOBRE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE LAS ONDAS DE RAYLEIGH Y DE STONELEY

Resumen aprobado por:

Dr. Pratap N. Sahay Sahay
Director de la tesis

En esta tesis se ha aplicado un método muy robusto para encontrar las raíces de las ecuaciones características que aparecen en los problemas de onda de Rayleigh y de Stoneley, las cuales son funciones discontinuas. El método se basa en el problema de Privalov que aparece en la teoría de integrales de Cauchy. En este método se construye una función univaluada y continua que contiene los mismos ceros que los de la función discontinua.

Las ecuaciones características que aparecen en estos problemas, contienen términos con raíces cuadradas sujetas a la restricción de que la parte real de éstas sea positiva. Ésta restricción asegura apropiadamente la condición de radiación. En el dominio complejo estas ecuaciones características pueden verse como funciones multivaluadas. La restricción para las raíces cuadradas se incorpora fácilmente si se define apropiadamente la hoja de Riemann y los cortes ramales. La función univaluada así definida es discontinua a lo largo de los cortes ramales y contiene los ceros y los polos de la ecuación característica. Utilizando el problema de Privalov, que aparece en la teoría de integrales de Cauchy, esta función se puede expresar como el producto de dos funciones: una función que contiene información de las discontinuidades a lo largo del corte ramal y que no contiene ceros ni polos, y la otra función que contiene ceros y polos pero que es continua a lo largo del corte ramal. Para obtener un polinomio cuyos ceros sean los mismos que los de la ecuación característica, la función que contiene los ceros y los polos se expande en series de Laurent en el dominio analítico.

Para una reología visco-elástica, el método tradicional con el cual se analiza la ecuación característica de Rayleigh predice la existencia de dos ondas. Puesto que para el caso elástico la existencia de una y sólo una onda de Rayleigh se encuentra firmemente establecido, la predicción de dos ondas de Rayleigh en el caso visco-elástico contradice el principio de correspondencia. Al aplicar a este problema el método que se basa en la teoría de integrales de Cauchy, se obtiene una y sólo una raíz. Aunque con anterioridad

Romeo (2001) ya había obtenido éste resultado, para mayor claridad y comprensión de ésta metodología en esta tesis se han trabajado nuevamente estos resultados. Además se han implementado numéricamente las expresiones analíticas de la velocidad de Rayleigh y de la atenuación para el caso de un medio con baja atenuación así como también para un medio con alta atenuación. Los resultados obtenidos en esta tesis para un medio con baja atenuación concuerdan con los resultados obtenidos por Press y Healy (1957). De una revisión cuidadosa a la metodología tradicional, se encuentra que las predicciones erróneas provienen simplemente de no incluir la restricción existente en los términos de las raíces cuadradas durante los cálculos.

Con el propósito de extender la aplicación del método basado en las integrales de Cauchy, también se han obtenido en esta tesis, las raíces que aparecen al problema de Stoneley, i. e. ondas que se propagan a lo largo de la interface de contacto entre un sólido y un fluido. Tradicionalmente se obtienen numéricamente y la existencia de más de una raíz es un problema abierto. El análisis que se presenta en esta tesis muestra que sólo existe una raíz para este problema. Además se ha implementado numéricamente la solución analítica y se han calculado los valores para la velocidad de la onda de Stoneley en el rango (permitido) de la razón de Poisson para el agua y el aire.

Palabras clave: ecuación característica de Rayleigh, ecuación característica de Stoneley, función multivaluada, integrales de Cauchy.

ABSTRACT of the thesis presented by JOEL ANTÚNEZ GARCÍA as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in EARTH SCIENCES with orientation to SEISMOLOGY. Ensenada, Baja California, México. June 30th, 2003.

ON THE CHARACTERISTIC EQUATION OF RAYLEIGH AND STONELEY WAVES

A very robust method to find roots of a discontinuous function is applied to the characteristic equation that arises in the Rayleigh wave and the Stoneley wave problems. The method is based upon the Privalov problem that arises in the theory of Cauchy integrals. It constructs a univalent continuous function which has the same zeros as that of the given discontinuous function.

The characteristic equation in these problems contains square root terms which have restriction that their real part must be positive. This restriction is to ensure proper radiation condition. In a complex domain these characteristic equations may be viewed as a multi-valued function. The restriction on its square-root terms can easily be incorporated by choosing the appropriate Riemann sheet and defining suitable branch-cut(s). The single valued function thus defined is discontinuous along the branch-cut and has the zeros and poles of the characteristic equation. Utilizing the Privalov problem, that arises in the theory of Cauchy integrals, this function can be split into the product of two functions: a function that contains information about the discontinuity along the branch cut and does not contain any zeros or poles, and the other function that contains zeros and poles but is continuous along the branch cut. By Laurent series expansion of the latter function, in its domain of analyticity, the polynomial is obtained whose zeros are the same as that of the zeros of the characteristic equation.

For visco-elastic rheology the traditional method of analysis of the characteristic equation of Rayleigh wave predicts the existence of two waves. This prediction of two Rayleigh waves contradicts the correspondence principle because for elastic rheology the existence of one and only one Rayleigh wave is firmly established. The Cauchy integral based method put forth above, when applied to this problem one and only one root is found. This result was obtained earlier by Romeo (2001), but for clarity and understanding this calculation has been reworked in this thesis. The closed form expressions of the Rayleigh velocity and attenuation thus obtained are numerically implemented for the cases of a low-loss medium as well as high-loss medium. The results of Press and Healy (1957), which apply for a low-loss medium, are in complete agreement with the results obtained in this thesis. A careful re-examination of the calculations of

the traditional analysis yields that its flawed prediction about two viscoelastic Rayleigh waves simply arise because of ignoring the restrictions on the square root terms by the methodology.

In order to further extend of the applicability of this Cauchy integral based methodology the roots of the characteristic equation that arise in the Stoneley problem, i. e. interface wave at solid-fluid contact, is also worked out in this thesis. Traditionally the approach has been numerical, and the existence of more than one root for it has been an open issue. The analysis carried out in this thesis shows that there is one and only one root for this problem. The closed form solution obtained herein is numerically implemented, and the values of the Stoneley wave velocity for the cases of the fluid being water and air, for entire range of (permitted) Poisson ratio of solid, are computed.

Keywords: Rayleigh characteristic equation, Stoneley characteristic equation, multi-valued function, Cauchy integrals.

AGRADECIMIENTOS

A CONACyT por haberme apoyado económicamente, lo cuál me permitió realizar mis estudios de posgrado en CICESE y con ello, el haber podido obtener mi grado de maestro en ciencias.

A mi asesor el Dr. Pratap N. Sahay por haberme mostrado una visión más amplia de la física.

A mis compañeras de cubículo Selene Solorza y Adriana Arroyo, por haberme brindado esos “cinco minutos” de discusión que aclararon varias de mis dudas.

A mis compañeros de estudios Carlos Narcía, Jose M. Chora y Rosa Berumen por haber compartido conmigo varias noches de desvelo.

A Cynthia P. Castro, por ser una mujer tan importante en mi vida.

A todos y a cada uno de mis amigos, que de alguna manera influyeron en mi vida y supieron estar en el momento correcto...

...Pero sin temor, puede decir que creo que fue una gran aventura para mí el haberme metido desde joven por ciertos caminos, que me han llevado a ciertas consideraciones y máximas, con las que he formado un método, en el cual paréceme que tengo un medio para aumentar gradualmente mi conocimiento y elevarlo hasta el punto más alto a que la mediocridad de mi ingenio y la brevedad de mi vida pueden permitirle llegar.

René Descartes (1596-1650)

Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verite dans les sciences

Índice General

I	Introducción	1
II	La Ecuación Característica de Rayleigh para un Medio con Reología Visco-Elástica	4
II.1	Conceptos Básicos en Visco-Elasticidad	5
II.2	Formulación del Problema: El Modo de Rayleigh	6
II.3	El Procedimiento Tradicional de Racionalización de la Ecuación Característica de Rayleigh	9
II.3.1	Un Breve Repaso Histórico de la Aplicación de este Procedimiento	11
III	Un Método Basado en las Integrales de Cauchy	13
III.1	La Integral de Cauchy	14
III.2	El Problema de Privalov: La Descomposición de una Función Discontinua	16
III.3	Los Ceros de una Función Discontinua	19
III.3.1	Representación Polinomial de una Función Discontinua	19
IV	La Raíz de la Ecuación Característica de Rayleigh	22
IV.1	Análisis de la Ecuación Característica de Rayleigh	22
IV.1.1	Puntos Ramales y Puntos Singulares de la Función de Rayleigh .	23
IV.1.2	Cortes Ramales de la Función de Rayleigh	24
IV.1.3	Las Discontinuidades de la Función de Rayleigh a Través de los Cortes Ramales	26
IV.1.4	Construcción del Polinomio Racional de la Función de Rayleigh .	27
IV.2	La Lentitud S de la Onda de Rayleigh	28
IV.3	El Límite Elástico	29
IV.4	Resultados Numéricos de la Velocidad y el Factor de Calidad de la Onda de Rayleigh	30
IV.5	El Factor de Calidad $Q_{R(\text{approx})}$ para un Medio con muy Baja Disipación .	31
IV.5.1	Discusión de los Resultados Numéricos	32

V	La Raíz de la Ecuación Característica de Stoneley	37
V.1	La Ecuación Característica de Stoneley	37
V.2	Análisis de la Ecuación Característica de Stoneley en el Plano Complejo .	38
V.2.1	Puntos y Cortes Ramales de la Función de Stoneley	39
V.2.2	Las Discontinuidades de la Función de Stoneley a Través de los Cortes Ramales	41
V.2.3	Construcción del Polinomio Racional de la Función de Stoneley .	43
V.3	La Lentitud S_∞ de la Onda de Stoneley	44
V.4	Resultados Numéricos para la Velocidad de la Onda de Stoneley	45
V.4.1	Discusión de los Resultados Numéricos	46
VI	Conclusiones	49
	Bibliografía	52

Índice de Figuras

Fig.		Pág.
1	Representación de un arco Γ en el plano complejo, dentro del cual, t y t_o son un punto arbitrario y un punto fijo respectivamente.	15
2	Opciones para asociar al punto $z = 1$ un corte ramal.	24
3	Cortes Ramales de la Función de Rayleigh	25
4	Comparación de la razón elástica (Razón _E) y visco-elástica (Razón _{VE}) versus la razón de Poisson ν para: (a) $Q_\alpha = 10$, $Q_\beta = 3$. (b) $Q_\alpha = 100$, $Q_\beta = 30$. (c) $Q_\alpha = 1000$, $Q_\beta = 300$	34
5	Comparación del factor de calidad exacto Q_R y del aproximado $Q_{R(\text{approx})}$ versus la razón de Poisson.	35
6	Diferencia porcentual entre Q_R y $Q_{R(\text{approx})}$ en función de la razón de Poisson ν para distintos valores de Q_α y Q_β	36
6	Cortes Ramales de la función de Stoneley	40
7	(a) Comparación de las velocidades de la onda de Stoneley y de Rayleigh en función de la razón de Poisson ν considerando como fluido aire. Obsérvese que las velocidades han sido normalizadas en términos de la velocidad de cizalla β_∞ (b) gráfica de la razón C_F/β_∞	47
8	(a) Comparación de las velocidades C de la onda de Stoneley y de Rayleigh en función de la razón de Poisson ν considerando como fluido agua. Obsérvese que las velocidades han sido normalizadas en términos de la velocidad de cizalla β_∞ (b) gráfica de la razón C_F/β_∞	48

Índice de Tablas

Tabla	Pág.
I Valores de la densidad ρ_F y de la velocidad de propagación del sonido C_F en agua y aire.	45

Capítulo I

Introducción

En general, las ondas superficiales de Rayleigh o de Stoneley son el resultado del acoplamiento de los movimientos de las ondas de compresión y cizalla. Este tipo de ondas se encuentran confinadas a la superficie de contacto entre dos medios y se propagan paralelamente a lo largo de esta superficie, mientras que, su amplitud decrece exponencialmente en la dirección perpendicular a la superficie de contacto. Particularmente para las ondas de Rayleigh uno de estos medios es el vacío. Debido a que la señal de este tipo de ondas domina sobre la señal de las ondas de cuerpo, en sismogramas de período largo, son de vital importancia para delimitar la estructura de la corteza y el manto superior de la Tierra. También son ampliamente utilizadas en ingeniería geotécnica y ciencia de materiales para pruebas no destructivas, lo que permite la caracterización de medios someros sin la necesidad de realizar perforaciones o tomar muestras.

Desde el punto de vista teórico la existencia de las ondas superficiales, ya sean de Rayleigh o de Stoneley, es determinada por las raíces de la ecuación característica correspondiente. Cuando se consideran ondas del tipo de Rayleigh con reología visco-elástica, el método tradicional de solución de la ecuación característica, predice la existencia de dos ondas de Rayleigh. Debido a que para un medio con reología elástica la existencia de una y sólo una onda de Rayleigh se encuentra firmemente establecido. Se pone seriamente en duda el mérito del método tradicional.

La ecuación característica de Rayleigh, contiene dos términos con raíces cuadradas con la restricción de que la parte real de éstas raíces sea positiva. En el dominio complejo esta ecuación se puede ver como una función multivaluada, en donde la restricción en las raíces cuadradas puede incorporarse fácilmente si se definen adecuadamente los cortes ramales y si se elige apropiadamente una hoja de Riemman. De esta manera, la función en esta hoja de Riemman será uni-valuada y contendrá ceros, polos y discontinuidades a lo largo de los cortes ramales. Precisamente estamos interesados en encontrar los ceros de esta función. Una vez definida la hoja de Riemman para la función puede aplicarse un método que se basa en la teoría del problema de Privalov. Este método nos permite expresar la función como el producto de dos funciones: Una contiene la información relacionada con las discontinuidades y es analítica en todo el dominio complejo, y la otra contiene los ceros y los polos. La expansión en series de Laurent de estas funciones alrededor de los polos, nos permite obtener un polinomio que contiene los mismos ceros que la ecuación característica.

Este método ha sido empleado anteriormente para obtener las raíces de la ecuación característica de Rayleigh por Nkemzi (1997) y por Romeo (2001) para el caso de reología elástica y visco-elástica respectivamente. Se ha demostrado que el polinomio que contiene las raíces no triviales de esta ecuación, es un polinomio de primer orden. Por lo tanto la ecuación característica de Rayleigh admite una y solo una raíz (aún en el caso de reología visco-elástica) que determina la velocidad con la cual se propaga la onda de Rayleigh. Este resultado claramente respeta el principio de correspondencia e indica que el método tradicional introduce soluciones ficticias. Sin embargo, las bases y la aplicación del método basado en la teoría del problema Privalov, han sido expuestas en la literatura de manera abstracta. Lo que ha llevado a concluir a algunos autores (Malischewsky, 2000) que las soluciones del método tradicional son suficientes.

En esta tesis se realiza un análisis sistemático de la ecuación característica de Rayleigh para un medio visco-elástico. Se exponen de manera clara las bases de la teoría

del problema de Privalov y su aplicación en la solución de la ecuación característica de Rayleigh. Se demuestra que la creencia común de la existencia de dos ondas de Rayleigh para un medio visco-elástico, resulta de no aplicar la restricción de que los términos de las raíces cuadradas de la ecuación característica de Rayleigh sean positivas. De hecho se encuentra que después de aplicar esta restricción sólo una raíz es admisible, lo cual satisface el principio de correspondencia. Adicionalmente, se emplea esta metodología para resolver la ecuación característica de las ondas de Stoneley en una interfase sólida-líquida. En este caso, se encuentra que sólo una raíz es físicamente admisible. Estos últimos resultados nos permiten ver el gran potencial de este método en comparación con el método tradicional para obtener soluciones a la ecuación característica de ondas superficiales.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo II se presenta el marco teórico de la ecuación característica de las ondas de Rayleigh en un medio con reología visco-elástica. En este mismo capítulo se discute la manera en que tradicionalmente se obtienen las raíces de la ecuación característica. En el capítulo III, se introducen los conceptos básicos de la metodología basada en el problema de Privalov. En el capítulo IV se emplea el método discutido en el capítulo III para analizar la ecuación característica de Rayleigh cuando se considera un medio con reología visco-elástica. Se demuestra inequívocamente que esta ecuación sólo contiene una solución no trivial, la cual determina la velocidad con la que la onda de Rayleigh se propaga en un medio visco-elástico. A partir de esta solución y como resultado de aplicar el límite elástico, se determina la velocidad con la cual la onda de Rayleigh se propaga en un medio con reología elástica. También se obtienen resultados numéricos para la velocidad y el factor de calidad de la onda de Rayleigh, este último es comparado con la expresión obtenida por Press y Healy, 1957. En el capítulo VI, se analizan las raíces de la ecuación característica de Stoneley para interfase sólida-líquida. Se encuentra que esta ecuación admite sólo una solución física. En base a esta solución se presentan algunos resultados numéricos para la velocidad de la onda Stoneley. Finalmente, en el capítulo VIII se presentan las conclusiones obtenidas de la presente tesis.

Capítulo II

La Ecuación Característica de Rayleigh para un Medio con Reología Visco-Elástica

En este capítulo se presenta la formulación de la ecuación característica de Rayleigh para un medio con reología visco-elástica. Esto implica aplicar las condiciones de frontera en una superficie libre, es decir, los esfuerzos en la superficie son nulos y la condición de radiación, la cual implica que las amplitudes decaen en profundidad.

En este capítulo se considera una reología visco-elástica del tipo Kelvin-Voigt, la cual es ampliamente utilizada en sismología. En la primera sección se presenta una breve revisión de esta reología y los conceptos básicos y notacionales relacionados a ésta. En la segunda sección, se plantea la condición para la existencia del modo de Rayleigh en términos de la formulación general del problema de eigenvalor, lo cual conduce a obtener la ecuación característica de ondas de Rayleigh. Finalmente en la última sección, se ilustra el empleo del método tradicional de racionalización y se discuten las implicaciones que conlleva su aplicación, así como también, se presenta una breve reseña histórica de algunos autores que han empleado este método erróneamente.

II.1 Conceptos Básicos en Visco-Elasticidad

Para explicar la atenuación observada en las ondas sísmicas, convencionalmente las ecuaciones constitutivas de elasticidad se modifican de manera que incluyan este fenómeno. La atenuación puede deberse a un gran número de mecanismos físicos, sin embargo, desde el punto vista fenomenológico es considerada como una simple modificación de las ecuaciones constitutivas de elasticidad. Uno de los modelos más simples, el cual es la base para ciertas generalizaciones, consiste en la superposición lineal de dos mecanismos de resistencia a la deformación: *Elasticidad lineal* y *Viscosidad de Stokes*. El mecanismo análogo para este tipo de reología consiste en la combinación en paralelo de un resorte y un amortiguador. Un material de este tipo se le conoce como un material Kelvin-Voigt. En este modelo, las componentes del esfuerzo se relacionan linealmente con las componentes de la deformación. De esta manera las componentes de la deformación resultante satisfacen el principio de superposición. La relación constitutiva para un medio visco-elástico, homogéneo e isotrópico con reología del tipo Kelvin-Voigt es

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda' \frac{\partial e_{kk}}{\partial t} \delta_{ij} + 2\mu' \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Aquí las componentes del tensor de deformación e_{ij} estan relacionadas en términos de las componentes del campo vectorial de desplazamientos u_i como

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.2)$$

Los parámetros materiales λ , λ' , μ y μ' de la eq. (2.1) se relacionan con las velocidades de compresión y cizalla como

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha_\infty^2 \left(1 - i\omega \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} \right) \\ \beta^2 &= \beta_\infty^2 \left(1 - i\omega \frac{\mu'}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_\infty^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ \beta_\infty^2 &= \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (2.4)$$

son las velocidades de compresión y cizalla respectivamente para un medio elástico, ρ es la densidad del medio y ω es la frecuencia angular. Las expresiones (2.3) pueden

expresarse en términos de otro parámetro físico: el factor de calidad Q . El factor de calidad Q permite determinar que tan elástico es un medio (el inverso de este parámetro indica que tan disipativo es un medio) y se define como la distancia medida en longitudes de onda en la cual la amplitud decrece por un factor de $e^{-\pi}$. Si se considera la velocidad compleja $V = V_r - iV_i$ (la cual puede ser α o β), el factor de calidad puede definirse como

$$Q = -\frac{V_r}{2V_i}. \quad (2.5)$$

En términos de este parámetro la velocidades α y β de la ecuación (2.4) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha_\infty^2 \left(1 - i \frac{Q_\alpha}{(Q_\alpha^2 - \frac{1}{4})} \right) \\ \beta^2 &= \beta_\infty^2 \left(1 - i \frac{Q_\beta}{(Q_\beta^2 - \frac{1}{4})} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

En donde es claro que cuando $Q_\alpha \rightarrow \infty$ y $Q_\beta \rightarrow \infty$, se recobran las velocidades elásticas α_∞ y β_∞ respectivamente.

II.2 Formulación del Problema: El Modo de Rayleigh

Considérese un sistema de coordenadas cartesiano con el eje z positivo hacia abajo. También considérese un semi-espacio homogéneo e isotrópico que ocupa el dominio $z \geq 0$ delimitado por la superficie de esfuerzos libres en $z = 0$. De manera que los movimientos se encuentren confinados a lo largo de la superficie $z = 0$, el campo de ondas debe de propagarse a lo largo de la dirección horizontal y decaer en dirección vertical, i. e., su representación en el dominio de Fourier debe de construirse con campos que contengan solamente números de onda cuya componente imaginaria sea positiva

$$e^{i(kx+qz-\omega t)} \quad \Im m(q) > 0. \quad (2.7)$$

Para que el ansatz (2.7) sea válido, debe satisfacer la ecuación de movimiento homogénea

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} \quad (2.8)$$

en donde las componentes del tensor de esfuerzos $\sigma_{ij,j}$ están dadas por la ec. (2.1). La condición de frontera libre de esfuerzos en la superficie $z = 0$ implica que

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_{zx}|_{z=0} = 0. \quad (2.9)$$

Para deducir las condiciones para las cuales el ansatz (2.7) es aceptable, definamos el siguiente vector de estado \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

el cual como podemos ver, se encuentra en términos de las componentes de los desplazamientos y de los esfuerzos. Siguiendo el procedimiento estándar descrito por Aki y Richards (2002, §5.4), las ecuaciones de movimiento (2.8) y las relaciones constitutivas (2.1) son rescritas en forma matricial, lo cual nos permite obtener el siguiente sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica del problema

$$\frac{d}{dz} \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (2.11)$$

Aquí $\tilde{\mathbf{F}}$ es la representación de Fourier para \mathbf{F} en el dominio del número de onda horizontal k y la frecuencia ω

$$\mathbf{F}(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}(k, \omega, z) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega \quad (2.12)$$

y \mathbf{A} es la matriz de orden 4 cuyas componentes dependen de las velocidades complejas α y β , del número de onda horizontal k y la frecuencia ω como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{1}{\rho\beta^2} & 0 \\ -ik \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{\rho\alpha^2} \\ 4k^2 \rho \beta^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) - \rho\omega^2 & 0 & 0 & -ik \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \\ 0 & -\rho\omega^2 & -ik & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

La solución general de la eq. (2.11) es

$$\tilde{\mathbf{F}} = \sum_{j=1}^4 a_j \mathbf{T}_j(k, \omega) e^{iq_j z} \quad (2.14)$$

donde los términos a_j son constantes arbitrarias que son determinadas por las condiciones iniciales y las condiciones de frontera del problema. q_j y \mathbf{T}_j son los valores y vectores propios de la matriz \mathbf{A} respectivamente. Los valores propios expresados explícitamente en términos de las velocidades complejas, el número de onda horizontal y la frecuencia angular son

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2} = q_\alpha \\ q_2 &= \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2} = q_\beta \\ q_3 &= -q_\alpha \\ q_4 &= -q_\beta \end{aligned} \quad (2.15)$$

y sus correspondientes vectores propios son

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} \alpha k \\ \alpha q_\alpha \\ 2i\rho\alpha\beta^2 k q_\alpha \\ i\rho\alpha(\omega^2 - 2\beta^2 k^2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \beta^2 q_\beta \\ -\beta k \\ i\rho\beta(\omega^2 - 2\beta^2 k^2) \\ -2i\rho\beta^3 k q_\beta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} \alpha k \\ -\alpha q_\alpha \\ -2i\rho\alpha\beta^2 k q_\alpha \\ i\rho\alpha(\omega^2 - 2\beta^2 k^2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} -\beta^2 q_\beta \\ -\beta k \\ i\rho\beta(\omega^2 - 2\beta^2 k^2) \\ 2i\rho\beta^3 k q_\beta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aquí los valores propios q_j representan el número de onda en la componente vertical. Puesto que $z > 0$, la condición (2.7) implica que sólo aquellos q_j que satisfagan la condición $\Im m(q_j) > 0$ son aceptables. Como $q_1 = -q_3$ y $q_2 = -q_4$, se tiene que sólo un elemento en cada uno de esos pares satisface la condición requerida. Supongamos que $\Im m(q_1) > 0$ y $\Im m(q_2) > 0$, entonces el campo de onda asociado con los números de onda q_3 y q_4 no puede ser considerado i. e. $a_3 = a_4 = 0$. Por lo tanto el sub-espacio de la solución general bajo esta restricción es

$$\mathbf{F}(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk d\omega \sum_{j=1}^2 a_j \mathbf{T}_j(k, \omega) e^{i(kx + q_j z - \omega t)}. \quad (2.17)$$

Para que esta solución sea válida, debe de satisfacer las condiciones de frontera libre de esfuerzos en $z = 0$ (ec. 2.9). Los esfuerzos σ_{xz} y σ_{zz} son, respectivamente, las componentes 3 y 4 del vector de estado \mathbf{F} . Por consiguiente, después de evaluar el

sistema (2.17) en $z = 0$ y considerar sólo las componentes σ_{xz} y σ_{zz} el sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{bmatrix} 2\alpha\beta k q_\alpha & (\omega^2 - 2\beta^2 k^2) \\ \alpha(\omega^2 - 2\beta^2 k^2) & -2\beta^3 k q_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Para obtener soluciones no triviales ($a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$), el determinante de la matriz debe ser cero, de donde se obtiene la siguiente expresión

$$\left(2 - \frac{\omega^2}{\beta^2 k^2}\right)^2 = 4 \frac{q_\beta q_\alpha}{k^2}. \quad (2.19)$$

Esta ecuación sugiere que para un valor dado de la frecuencia ω el número de onda k se encuentra cuantificado, por lo cual, no tiene un espectro continuo como en (2.17). Estos valores son determinados por las raíces de la eq. (2.19).

Introduciendo $\frac{\omega}{k} = C$, factorizando k en q_α y q_β para ω real y positiva, obtenemos que

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2} = ik \sqrt{1 - \frac{C^2}{\alpha^2}} \\ q_\beta &= \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2} = ik \sqrt{1 - \frac{C^2}{\beta^2}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

De donde la restricción (2.7) implica que

$$\Re e \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\beta^2}} \right) > 0, \quad \Re e \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\alpha^2}} \right) > 0 \quad (2.21)$$

lo cuál nos permite parametrizar la eq. (2.19) en términos de una sola variable como

$$\left(2 - \frac{C^2}{\beta^2}\right)^2 = 4 \sqrt{1 - \frac{C^2}{\beta^2}} \sqrt{1 - \frac{C^2}{\alpha^2}}. \quad (2.22)$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación característica de Rayleigh.

II.3 El Procedimiento Tradicional de Racionalización de la Ecuación Característica de Rayleigh

Las raíces de la ecuación secular de Rayleigh (2.22), determinan la velocidad con la cual se propagan las ondas de Rayleigh en un medio visco-elástico. Sin embargo, estas raíces no pueden ser obtenidas directamente, debido a que los términos de las raíces cuadradas

que aparecen en ella no permiten racionalizarla. El procedimiento más simple y el cual ha sido tradicionalmente empleado para racionalizar esta ecuación, consiste en elevarla al cuadrado. Este procedimiento nos permite obtener potencias enteras en C , y por ende, se puede obtener una expresión polinomial. Para ilustrar más claramente este proceso, nótese que la ecuación característica de Rayleigh es de la forma

$$A(z) = B(z), \quad (2.23)$$

donde

$$A = (2 - z)^2, \quad B = \sqrt{1 - z}\sqrt{1 - \gamma z}, \quad (2.24)$$

con $z = C^2/\beta^2$ y $\gamma = \beta^2/\alpha^2$.

Después de elevar al cuadrado la ecuación (2.23) y de algunos desarrollos algebraicos se obtiene que

$$A(z)^2 - B(z)^2 = z[z^3 - 8z^2 + (24 - 16\gamma)z - 16(1 - \gamma)] = 0. \quad (2.25)$$

Claramente la raíz $z = 0$ es una solución de la ecuación (2.23) pero como implica procesos no propagativos ($C = 0$), no es de interés físico. Entonces, el polinomio cúbico (entre paréntesis cuadrados)

$$z^3 - 8z^2 + (24 - 16\gamma)z - 16(1 - \gamma) \quad (2.26)$$

contiene las raíces no triviales de (2.25). Nótese que las raíces de este polinomio cúbico se pueden encontrar en los libros de fórmulas estándares (como en Selby, 1971).

Obsérvese que la ecuación (2.25) puede obtenerse de manera alterna si re-escribimos la ecuación (2.23) como $f = A - B = 0$ y la multiplicamos por la función $f' = A + B = 0$. De esta manera, la ecuación (2.25) además de contener las raíces de f , contiene también las raíces de f' . Debido a que no es posible diferenciar las raíces de f y de f' , se corre el riesgo de obtener soluciones ficticias y considerarlas como soluciones a la ecuación característica de Rayleigh.

$$f(z)f'(z) = A(z)^2 - B(z)^2 = 0$$

II.3.1 Un Breve Repaso Histórico de la Aplicación de este Procedimiento

En 1887 Rayleigh derivó la ecuación (2.22) para el caso de un medio con reología elástica ($Q_\alpha = \infty$, $Q_\beta = \infty$) e introdujo el procedimiento esbozado anteriormente para obtener las soluciones a ésta. Sin embargo, notó que, aunque este polinomio contiene raíces complejas, éstas no deben de ser consideradas ya que los desplazamientos asociados a ellas no son admisibles. Para determinar las raíces que aseguran la existencia de ondas que decaen en profundidad y que son confinadas a la superficie libre, Rayleigh impuso la restricción de que la parte real de las raíces cuadradas (que incluye la ecuación característica de Rayleigh) debe ser positiva. Como ejemplo numérico particular, Rayleigh consideró un sólido incompresible y mostró que sólo una de las raíces del polinomio satisface la restricción impuesta y además que la velocidad con la cual se propaga esta onda es menor que la velocidad de la onda de cizalla.

Sesenta y cinco años después, Knopoff (1952) extendió los resultados numéricos de Rayleigh para el rango completo de la razón de Poisson. Más tarde Hayes y Rivlin (1962), con base en el argumento de que todos los parámetros que incluye la ecuación característica de Rayleigh en el caso elástico son reales, demostraron de manera heurística que la ecuación de Rayleigh no admite soluciones complejas. Sin embargo, aunque este resultado ya era evidente, al no emplear la restricción impuesta por Rayleigh admitieron la posibilidad de la existencia de más de una onda Rayleigh. Más tarde, Currie junto con Hayes y O'leary (1977) analizaron el caso de un medio con reología visco-elástica. En este caso, dado que los parámetros en general son complejos, demostraron que dos raíces satisfacían las condiciones de propagación de ondas de Rayleigh. *El principio de correspondencia* establece que para una solución formal en el caso elástico, debe de existir una y sólo una solución para el caso visco-elástico. Evidentemente los resultados de Currie et. al. violan este principio. Sin embargo, en los trabajos de Currie y O'leary (1978) y Currie (1979), se continúa la investigación de la propagación de ondas de Rayleigh en un medio visco-elástico en términos del procedimiento tradicional y de nuevo ignoran la validez del principio de correspondencia.

Como se ha observado a lo largo de esta discusión, el procedimiento que Rayleigh utilizó para obtener la raíz de la ecuación característica de ondas de Rayleigh ha sido adoptado y usado tradicionalmente como un método. Como previamente se hizo notar en la sección anterior, este método introduce raíces *ficticias* a la ecuación característica de Rayleigh. Éstas sin la restricción que Rayleigh impuso, abren la posibilidad de ser consideradas y a conducir a resultados ambiguos como los que Currie et. al. obtuvieron.

Para finalizar la discusión de esta sección, hago notar que después de haber transcurrido más de un siglo del trabajo de Rayleigh, aún hoy en día el problema de la propagación de ondas de Rayleigh no ha sido comprendido apropiadamente. La evidencia palpable se encuentra en los textos escritos por Caviglia y Morro (1992, § 5.2-3) y Carcione (2001, § 3.7) al incluir en parte de su trabajo las discusiones de Currie y Hayes sin ninguna objeción.

Capítulo III

Un Método Basado en las Integrales de Cauchy

En este capítulo consideraremos una función F multivaluada (o discontinua) con un polo de orden finito en infinito. Para esta función, en el plano complejo se puede definir una hoja de Riemann, de tal manera, que la función sea analítica (excepto en infinito) y sus discontinuidades queden aisladas únicamente a lo largo de los cortes ramales. En esta hoja de Riemann la teoría del problema de Privalov (para referencia véase Muskhelishvili (1952) y Henrici (1974)) nos permite representar esta función como

$$F(z) = R(z)e^{g(z)} \quad (3.1)$$

donde

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(t)}{t - z} dt. \quad (3.2)$$

Aquí R es una función racional que contiene los ceros y los polos de la función F , G es el cociente de los límites laterales F^+ y F^- a lo largo del arco Γ (determinado por los cortes ramales de F) y se define como

$$G(t) = \frac{F^+(t)}{F^-(t)}. \quad (3.3)$$

Por lo tanto $g(z)$ es una función que contiene información acerca de las discontinuidades de la función $F(z)$ a lo largo del corte ramal Γ y necesita ser de orden finito en infinito.

Debido a que $e^{g(z)} \neq 0$ en todo el dominio complejo, directamente de la ecuación (3.1) se puede representar R como

$$R(z) = F(z)e^{-g(z)}. \quad (3.4)$$

El cual como se dijo, es un polinomio que contiene los ceros y los polos de la función F . Si aislamos la singularidad de F en infinito, entonces podemos asegurar que R sólo contiene los ceros de F . En otras palabras, podemos obtener una representación polinomial para los ceros de F si expandemos en series de Laurent los términos a la derecha de la ecuación (3.4). Como consecuencia, tenemos un método que nos permite obtener sin ambigüedades las raíces de la ecuación característica para ondas de interfase ya sean de Rayleigh o de Stoneley.

Con el propósito de abordar de manera más profunda el método basado en la teoría de Privalov, en la siguiente sección se introducirá un tipo especial de integral de Cauchy, así como también las condiciones para la existencia de ésta. En base a este tipo de integral de Cauchy en la sección II se planteará el problema de Privalov y su solución. Finalmente en la tercera sección, obtendremos de manera general la representación polinomial de una función discontinua en términos de la solución del problema de Privalov.

III.1 La Integral de Cauchy

Sea $\Gamma(t)$ un arco simple y regular definido en el plano complejo (Figura 1), i. e. una curva suave que no se intersecta a si misma. A lo largo de este arco, definamos una función $h(t)$ ¹ continua a trozos en el dominio complejo. Ahora consideremos la representación de una cierta función g en términos de la siguiente integral

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t)}{t - z} dt, \quad (3.5)$$

la cual se encuentra definida en el dominio complejo. Esta integral es conocida como una integral del tipo Cauchy ó integral de Cauchy. Debe de notarse que aunque la

¹De aquí en adelante se define a t como un parámetro complejo $t = x + iy$ que describe el conjunto puntos que se encuentran en el arco Γ .

definición de esta integral es similar a la definición del teorema integral de Cauchy, ambas definiciones no son equivalentes. La integral (3.5) existe en el sentido de Riemann, si los límites laterales g^+ y g^- de esta integral a lo largo del arco Γ tienden a un valor definido. Para esto se requiere que la función $h(t)$ satisfaga una cierta condición de regularidad. Esta regularidad es garantizada si esta función satisface la condición de Hölder.

Una función $h(t)$ se dice que satisface la condición de Hölder si existen constantes A y η , $0 < \eta \leq 1$, tales que para cualquier par de puntos (t, t_0) que se encuentre en el arco Γ se cumple la desigualdad

$$|h(t) - h(t_0)| \leq A|t - t_0|^\eta. \tag{3.6}$$

En otras palabras, si existe un intervalo $|t - t_0|$ para el cual se pueda fijar el par de constantes A y η de manera que la desigualdad (3.6) se cumpla, entonces la regularidad de la función $h(t)$ a lo largo del arco Γ es garantizada.

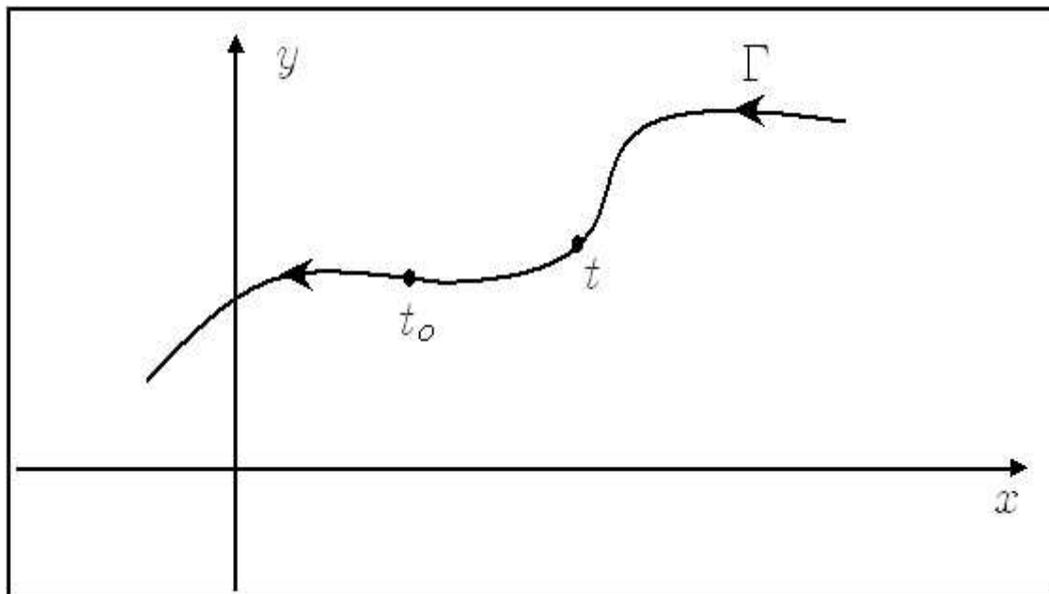


Figura 1: Representación de un arco Γ en el plano complejo, dentro del cual, t y t_0 son un punto arbitrario y un punto fijo respectivamente.

En términos de esta condición, el siguiente teorema establece la existencia de los límites de la integral de Cauchy (3.5).

TEOREMA 1 *Sea h una función continua a trozos en un arco simple y regular Γ y sea t un punto arbitrario e interior a Γ . Además considérese que h representa la discontinuidad de una función g cuyos límites laterales a lo largo del arco Γ son g^+ y g^- . Si h satisface la condición de Hölder para todo t elemento de Γ , entonces los límites laterales de la integral de Cauchy (3.5) existen para cada t y dada una aproximación no tangencial se satisfacen las fórmulas de Sokhotskyi*

$$\begin{aligned} g^+(t) &= g(t) + \frac{1}{2}h(t) \\ g^-(t) &= g(t) - \frac{1}{2}h(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Los detalles de la demostración de este teorema se encuentran en Henrici, 1974 § 14.1 p. 94.

III.2 El Problema de Privalov: La Descomposición de una Función Discontinua

El problema de Privalov consiste en encontrar una función F de variable compleja con las siguientes características: (i) que sea analítica en cualquier punto de una hoja de Riemann excepto en infinito, donde ésta puede tener un polo de orden finito y (ii) que los límites prescritos $F^+(t)$ y $F^-(t)$ a lo largo del arco Γ sean tales que la discontinuidad $G(t)$ pueda expresarse como²

$$F^+(t) - G(t)F^-(t) = 0. \tag{3.8}$$

donde se requiere que $G(t) \neq 0$ y cumpla con la condición de Hölder.

Un Problema Sencillo Asociado al Problema de Privalov

Para obtener la solución general del problema de Privalov, se derivará primero la solución a un problema más simple. Considérese la construcción de una función F que

²Para este tipo de discontinuidad, el problema es enunciado como el problema homogéneo de Privalov. Para el problema no homogéneo, aparece un término adicional diferente de zero a la derecha de la eq. (3.8).

cumpla con las siguientes características (i) que sea analítica en todo punto de una hoja de Riemann (incluyendo los puntos en ∞) y (ii) que la discontinuidad G a lo largo de un arco Γ se pueda definir como en (3.8).

La simplicidad de este problema recae en que la función que nos interesa encontrar es analítica en todo el dominio complejo donde se encuentra definida una hoja de Riemann. Para obtener la solución de este problema en particular, consideremos la siguiente integral de Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\log G(t)}{t - z} dt \quad (3.9)$$

y supongamos que la solución F es de la forma

$$F(z) = e^{g(z)}. \quad (3.10)$$

Debido a que $e^{g(z)} \neq 0$ para todo punto dado en una hoja de Riemann excepto a lo largo del arco Γ , evidentemente la analiticidad requerida para (3.10) en esa hoja de Riemann se satisface. Para probar que esta función satisface la condición (3.8), consideremos la aplicación de las fórmulas de Sokhotskyi (3.7) a (3.9), de lo cual se obtiene que

$$g^+(t) = g^-(t) + \log G(t). \quad (3.11)$$

De (3.10) el límite lateral F^+ es

$$F^+(t) = e^{g^+(t)}$$

empleando (3.11), el lado derecho de esta ecuación se puede re-escribir como

$$\begin{aligned} F^+(t) &= e^{g^-(t) + \log G(t)} \\ &= G(t)e^{g^-(t)} \\ &= G(t)F^-(t), \end{aligned}$$

por lo tanto la condición de discontinuidad (3.8) se satisface. Debe de notarse que la solución (3.10) no es única, debido a que el producto de ésta con una función entera también satisface los requerimientos de analiticidad, así como también los de discontinuidad.

La Solución General al Problema de Privalov

Ahora se procederá a construir la solución general F al problema de Privalov para la cual se requiere que: (i) en infinito no sea analítica ya que en ese punto existe un polo de orden finito y (ii) la discontinuidad G a lo largo del arco Γ sea definida por (3.8). Por claridad, introduciremos la notación F_o para denotar la solución particular $e^{g(z)}$, la cual es analítica en todo el dominio complejo y contiene las mismas discontinuidades que F .

Consideremos primero el cociente

$$R(z) = \frac{F(z)}{F_o(z)}. \quad (3.12)$$

De esta definición aparentemente el cociente R es al menos analítico en todo los puntos del plano complejo excepto en ∞ donde la función F no lo es. Si suponemos que todos los límites F_o^+ , F_1^+ , F_o^- , F_1^- existen y son diferentes de cero, el cociente R es continuo a lo largo del arco Γ como se demuestra a continuación

$$\begin{aligned} R^+(t) &= \frac{F^+(t)}{F_o^+(t)} \\ &= \frac{G(t)F^-(t)}{G(t)F_o^-(t)} \\ &= R^-(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En consecuencia, para todos los puntos del dominio complejo donde esta definida la hoja de Riemann (los cuales no pertenecen a el arco Γ), R tiene la analiticidad demandada para la función F , y a lo largo del arco Γ es continua, contrariamente a F . Por lo tanto la solución general F al problema de Privalov tiene la forma

$$\begin{aligned} F(z) &= R(z)F_o(z) \\ &= R(z)e^{g(z)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

para la cual se encuentra que la condición de discontinuidad requerida (3.8) se satisface automáticamente, debido a que a lo largo del arco Γ , F_o tiene las mismas discontinuidades que F y R contiene los ceros y los polos de F . Entonces (3.14) es la solución deseada.

III.3 Los Ceros de una Función Discontinua

Considérese una función discontinua F que contenga un polo de orden finito en infinito, para la cual, estamos interesados en determinar sus ceros (o las raíces). En términos de la solución al problema de Privalov, el polinomio asociado a esta función esta dado por la ecuación (3.14) como

$$R(z) = F(z)e^{-g(z)}. \quad (3.15)$$

En general, este polinomio contiene los ceros y los polos de la función F . Si consideramos un dominio en el plano complejo, el cual no incluya el punto $z = \infty$, es posible determinar únicamente los ceros del polinomio R si se hace una expansión en series de Laurent en este dominio. Los detalles de esta construcción son discutidos a continuación.

III.3.1 Representación Polinomial de una Función Discontinua

Sea F una función analítica en cualquier punto de una hoja de Riemann excepto en infinito, donde ésta tiene un polo de orden finito. Considérese la representación en el plano complejo de F en series de Laurent en torno al origen $(0,0)$ para un contorno cerrado que no incluye el punto singular $z = \infty$, la cual es

$$F(z) = \sum_{n=0}^k b_n z^n = b_o + b_1 z + b_1 z^2 + \dots + b_k z^k \quad (3.16)$$

donde k es un número entero y finito.

Debido a que $e^{-g(z)}$ es diferente de cero y además no contiene ninguna singularidad en todo el dominio complejo, su representación en series de Laurent (en torno al origen) esta dada por

$$e^{-g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + \dots \quad (3.17)$$

entonces el polinomio (3.15) en términos de (3.16) y de (3.17) es

$$\begin{aligned} R(z) &= \left(\sum_{n=0}^k b_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \right) \\ &= (b_o + b_1 z + b_1 z^2 + \dots + b_k z^k) \\ &\quad (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_k z^{-k} + a_{k+1} z^{-(k+1)} + \dots) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ya que en este dominio la función F no contiene ninguna singularidad, entonces R es racional y sólo contiene ceros, por lo tanto sólo la parte principal de (3.18) debe de ser considerada. Ésta se obtiene después de retener términos hasta z^0 y está dada por

$$R(z) = \sum_{m=0}^s r_m z^m. \quad (3.19)$$

Aquí s es un número finito que determina el orden de este polinomio y

$$\begin{aligned} r_0 &= b_0 + b_1 a_1 + \dots + b_{k-1} a_{k-1} + b_k a_k \\ r_1 &= b_2 + b_2 a_1 + \dots + b_k a_{k-1} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ r_s &= b_k \end{aligned} \quad (3.20)$$

son los coeficientes del polinomio. Ya que para una función F en particular los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_k son dados, sólo resta obtener los coeficientes a_n .

Los Coeficientes a_n

Recordando de la ec. (3.9) que $-g(z)$ es

$$-g(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(t)}{1-\frac{t}{z}} dt,$$

y notando que

$$\left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^n,$$

entonces la representación en series de Laurent de $g(z)$ es

$$-g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_k}{z^{k+1}}; \quad \text{donde} \quad I_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^k \ln G(t) dt. \quad (3.21)$$

Ahora empleando la identidad

$$\frac{d}{dz} \left(e^{-g(z)} \right) = \frac{d(-g(z))}{dz} e^{-g(z)} \quad (3.22)$$

para relacionar los coeficientes a_n de la expansión en serie de (3.17) con las integrales I_k de la ec. (3.21), sustituimos las ecuaciones (3.17) y (3.21) en (3.22) de manera que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{-(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) I_k z^{-(k+2)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (3.23)$$

o explícitamente

$$\begin{aligned}
 (a_1 z^{-2} + 2a_2 z^{-3} + 3a_3 z^{-5} + \dots) &= (I_o z^{-2} + 2I_1 z^{-3} + 3I_2 z^{-4} + \dots)(1 + a_1 z^{-1} + \\
 &\quad a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots) \\
 &= I_o z^{-2} + (2I_1 + a_1 I_o) z^{-3} + (3I_2 + 2a_1 I_1 \\
 &\quad + a_2 I_o) z^{-4} + \dots
 \end{aligned}$$

Después de igualar potencias, los coeficientes a_n quedan relacionados en términos de las integrales I_k de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 z^{-2} : a_1 &= I_o, \\
 z^{-3} : a_2 &= I_1 + \frac{I_o^2}{2}, \\
 z^{-4} : a_3 &= \frac{1}{3} \left[3I_2 + 2I_1 I_o + I_o \left(I_1 + \frac{I_o^2}{2} \right) \right], \\
 z^{-5} : a_4 &= \frac{1}{4} \left[4I_3 + 3I_2 I_o + 2I_1 \left(I_1 + \frac{I_o^2}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{I_o}{3} \left(3I_2 + 2I_1 I_o + I_o \left(I_1 + \frac{I_o^2}{2} \right) \right) \right] \\
 &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 z^{-n} : a_n &= \frac{1}{n} (nI_{n-1} + (n-1)I_{n-2}a_1 + \dots + 1 \cdot I_o a_{n-1}).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Capítulo IV

La Raíz de la Ecuación

Característica de Rayleigh

En este capítulo, se empleará el método que se basa en la teoría del problema Privalov (vease el capítulo anterior) para obtener, analíticamente, la raíz de la ecuación característica de Rayleigh. A manera de proceder sistemáticamente, en la primera sección de este capítulo se analiza la ecuación característica de Rayleigh (o función de Rayleigh). Posteriormente, se procederá a construir el polinomio racional R que contiene las raíces de la ecuación característica de Rayleigh. Se demostrará que este polinomio sólo acepta una y sólo una raíz física, la cual determina la velocidad con que se propaga la onda de Rayleigh. Además, para el caso elástico y visco-elástico, se presentarán las expresiones para la lentitud de la onda de Rayleigh.

Finalmente, en la cuarta sección se presentan algunos resultados numéricos para tres escenarios de reología visco-elástica. El principal resultado de este capítulo es el haber demostrado que la función de Rayleigh solo admite una raíz, aún para el caso visco-elástico, i. e. el principio de correspondencia es respetado.

IV.1 Análisis de la Ecuación Característica de Rayleigh

Las raíces no triviales de la ecuación característica de Rayleigh (eq. 2.22) para un medio visco-elástico, pueden obtenerse de manera más conveniente si re-expresamos ésta en

función de la lentitud ($S = 1/C$) como

$$F(z) = \sqrt{\sigma}(2z - 1)^2 - 4z\sqrt{z - 1}\sqrt{\sigma z - 1} = 0 \quad (4.1)$$

sujeta a las restricciones

$$\Re\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sigma z}}\right) > 0 \quad \text{y} \quad \Re\left(\sqrt{1 - \frac{1}{z}}\right) > 0. \quad (4.2)$$

donde $z = (\beta/C)^2$ es una variable adimensional y $\sigma = (\alpha/\beta)^2 = a + ib$ es un parámetro adimensional complejo para el cual a y b son constantes reales. Nótese que para esta función la solución $z = 0$ no es admisible.

$$z = (\beta/C)^2, \quad \sigma = (\alpha/\beta)^2 = a + ib$$

IV.1.1 Puntos Ramales y Puntos Singulares de la Función de Rayleigh

Para la siguiente discusión, es conveniente expresar la función de Rayleigh en forma polar como

$$F(z) = R_o^{1/2} e^{i\theta_o/2} \left(2r e^{i\theta} - 1\right)^2 - 4r(R_o R_1 R_2)^{1/2} e^{i\left(\theta + \frac{\theta_o + \theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \\ \sigma &= R_o e^{i\theta_o}, \quad R_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, & \theta_o &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \\ z - 1 &= R_1 e^{i\theta_1}, \quad R_1 = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}, & \theta_1 &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x - 1}\right), \\ z - \frac{1}{\sigma} &= R_2 e^{i\theta_2}, \quad R_2 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{a^2 + b^2}\right)^2}, & \theta_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{y + \frac{b}{a^2 + b^2}}{x - \frac{a}{a^2 + b^2}}\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para un ciclo completo alrededor del punto $z = 1$, el cual no incluye el punto $z = \frac{1}{\sigma}$, el valor de θ_1 cambia por 2π mientras que los valores de θ y θ_2 se incrementan y decreentan alternadamente y finalmente retornan a su valor inicial, entonces la función (4.3) se transforma a

$$R_o^{1/2} e^{i\theta_o/2} \left(2r e^{i\theta} - 1\right)^2 + i4r(R_o R_1 R_2)^{1/2} e^{i\left(\theta + \theta_1 + \frac{\theta_o + \theta_2}{2}\right)}.$$

Un argumento similar es válido para demostrar que cuando se realiza un ciclo alrededor del punto $z = \frac{1}{\sigma}$ la función (4.3) también cambia. Entonces, es claro que los puntos

$$z = 1 \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{\sigma} \tag{4.5}$$

son los puntos ramales de la función $F(z)$ que se encuentran localizados en el cuarto cuadrante del plano complejo.

Debemos de notar que el punto $z = \infty$ no es un punto ramal, esto se puede ver si sustituimos $z = \frac{1}{z'}$ en (4.1) como

$$F\left(\frac{1}{z'}\right) = \sqrt{\sigma} \left(2\frac{1}{z'} - 1\right)^2 - 4\frac{1}{z'} \sqrt{\frac{1}{z'} - 1} \sqrt{\frac{1}{z'} - \frac{1}{\sigma}} \sim \frac{1}{z'^2} \quad \text{cuando} \quad z' \rightarrow 0 \tag{4.6}$$

Lo cual implica que $z' = 0$ es un polo de segundo orden de $F\left(\frac{1}{z'}\right)$. Por lo tanto, $z = \infty$ es un polo de segundo orden de $F(z)$, y no existen puntos ramales en $z = \infty$.

IV.1.2 Cortes Ramales de la Función de Rayleigh

Para la selección de los cortes ramales de la función de Rayleigh, consideremos por simplicidad únicamente el punto ramal $z = 1$. Para este punto ramal, existen dos maneras de asociarle un corte ramal a la función de Rayleigh a lo largo del eje real: (i) que el corte se defina para el rango $-\infty \leq x < 1$ ó (ii) que el corte se defina para el rango $1 < x \leq \infty$. Ambas representaciones se muestran en la figura 2.

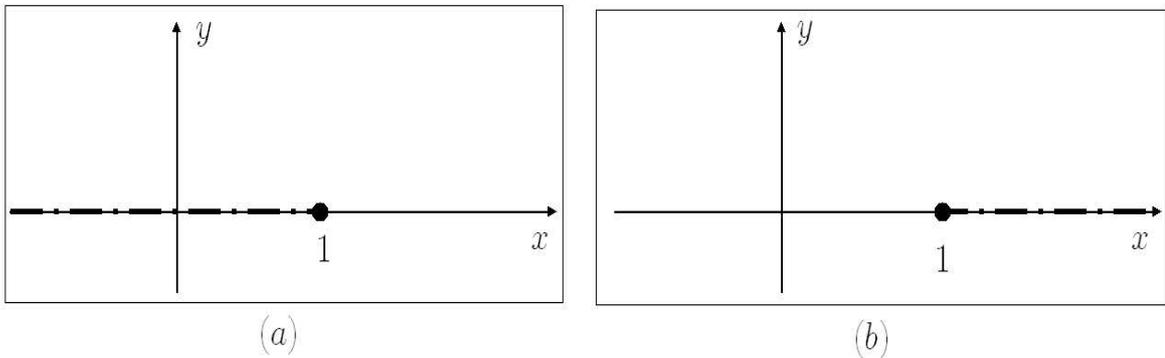


Figura 2: Opciones para asociar al punto $z = 1$ un corte ramal.

Aunque ambas representaciones son válidas para asociar un corte ramal a este punto, no se puede elegir una u otra arbitrariamente. La segunda restricción de la ecuación (4.2) implica que sólo el corte ramal mostrado en la figura 2-a es permitido. Nótese que este corte restringe a la función a tomar sólo puntos a lo largo del eje real positivo, lo cual no satisface el corte ramal de la figura 2-(b). De manera similar, podemos argumentar con base en la restricción (4.2), que el corte ramal asociado al punto ramal $z = 1/\sigma$ se puede definir a lo largo de la recta localizada en plano complejo como,

$$y = \frac{x}{\sigma} \quad \text{para} \quad -\infty \leq x < 1.$$

Aunque de manera independiente las discontinuidades asociadas a cada punto ramal continúan sobre el eje negativo real hacia infinito, la discontinuidad “efectiva” de la función de Rayleigh se encuentra confinada únicamente a unos segmentos de estos cortes ramales. Tales cortes ramales se pueden parametrizar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(t) &= t & \frac{1}{a} \leq t \leq 1 \\ \Gamma_{12}(t) &= t & 0 \leq t \leq \frac{1}{a} \\ \Gamma_{21}(t) &= t & 0 \leq t \leq \frac{1}{\sigma} \end{aligned} \tag{4.7}$$

los cuales se muestran en la figura 3.

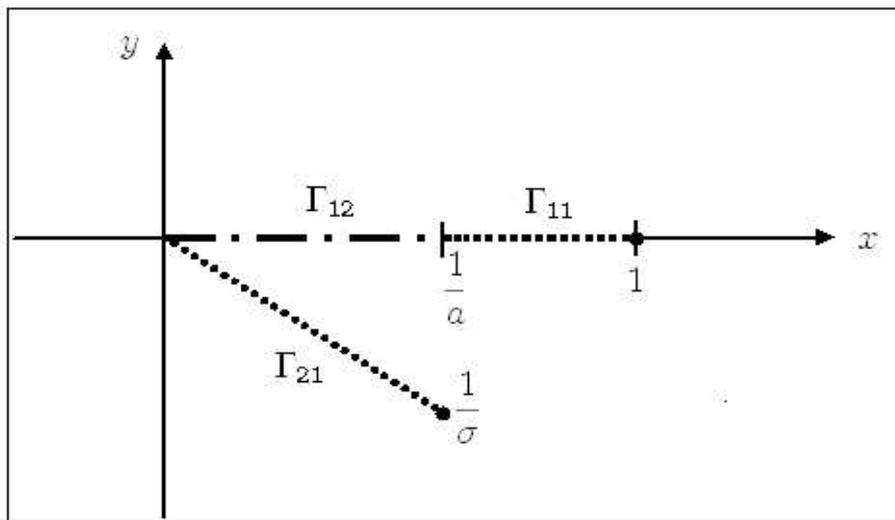


Figura 3: Cortes Ramales de la Función de Rayleigh

Se puede demostrar que fuera de estos arcos, la función de Rayleigh es analítica. Con estos tres cortes ramales podemos definir el arco $\Gamma = \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{21}$ en donde la función de Rayleigh (4.1) es discontinua, y en términos de este, es definida la hoja de Riemann.

IV.1.3 Las Discontinuidades de la Función de Rayleigh a Través de los Cortes Ramales

Para cada uno de los cortes ramales definidos por la ec. (4.7), las discontinuidades de la función de Rayleigh están dadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{F^+(t)|_{\Gamma_{11}}}{F^-(t)|_{\Gamma_{11}}} = \frac{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 - 4it\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 + 4it\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}} = \frac{1 - iH_1(t)}{1 + iH_1(t)} \\ G_{12} &= \frac{F^+(t)|_{\Gamma_{12}}}{F^-(t)|_{\Gamma_{12}}} = \frac{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 + 4t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 - 4t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}} = \frac{1 - iH_1(t)}{1 + iH_1(t)} \\ G_{21} &= \frac{F^+(t)|_{\Gamma_{21}}}{F^-(t)|_{\Gamma_{21}}} = \frac{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 - 4t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 + 4t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}} = \frac{1 - iH_1(t)}{1 + iH_1(t)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

después de aplicar el logaritmo a cada una de estas expresiones y empleando la identidad, vease Churchill, (1992) § 29,

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i+z}{i-z} \right) \quad (4.9)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \ln G_{11} &= -2i \tan^{-1} H_1(t) = -2i\theta_1(t) \\ \ln G_{12} &= -2i \tan^{-1} H_2(t) = -2i\theta_2(t) \\ \ln G_{21} &= 2i \tan^{-1} H_2(t) = 2i\theta_2(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aquí

$$H_1(t) = \frac{4t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2} \quad \text{y} \quad H_2(t) = i \frac{4t\sqrt{1-t}\sqrt{1-\sigma t}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2}. \quad (4.11)$$

De donde podemos hacer las siguientes observaciones: (i) Para todo punto t definido en cada uno de los cortes $G_{11}(t) \neq 0$, $G_{12}(t) \neq 0$ y $G_{21}(t) \neq 0$ y (ii) En los puntos extremos

$$\begin{aligned} G_{11}(1) &= 1, \\ G_{11}(1/a) &= G_{12}(1/a) \neq 0, \\ G_{12}(0) &= G_{21}(0) = 1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Entonces, existe la continuación uniforme de cada una de estas funciones en los puntos en que se unen. Además, cada una de estas funciones es de orden finito en infinito. Por lo tanto, éstas cumplen con los requerimientos del problema de Privalov y por ende la función g puede definirse como

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(t)}{t-z} dt = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{1/a}^1 \frac{\theta_1(t)}{t-z} dt - \int_0^{1/a} \frac{\theta_2(t)}{t-z} dt + \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{\theta_2(t/\sigma)}{t-z} dt \right). \quad (4.13)$$

IV.1.4 Construcción del Polinomio Racional de la Función de Rayleigh

De la solución al problema de Privalov discutido en el capítulo IV, el polinomio racional $R(z)$ que contiene las mismas raíces que la función $F(z)$ está dado por

$$R(z) = F(z)e^{-g(z)}. \quad (4.14)$$

Para la función de Rayleigh, $g(z)$ está dado por la ecuación (4.13). Entonces solo resta obtener la representación polinomial de $R(z)$, de la manera en que se discutió en la sección IV.3.

Representación en Series de $F(z)$

De acuerdo a (4.6) la función F tiene un polo de segundo orden en infinito, por consiguiente podemos obtener su representación en series de Laurent expandiendola alrededor de esta singularidad.

La representación en series de Laurent para los términos de las raíces cuadradas de la función de Rayleigh son

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma z - 1} &= \sqrt{\sigma z} \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma z}} = \sqrt{\sigma z} \left(1 - \frac{1}{2}(\sigma z)^{-1} - \frac{1}{8}(\sigma z)^{-2} - \frac{1}{16}(\sigma z)^{-3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{128}(\sigma z)^{-4} + O[z^{-5}] - \dots \right) \\ \sqrt{z - 1} &= \sqrt{z} \sqrt{1 - \frac{1}{z}} = \sqrt{z} \left(1 - \frac{1}{2}(z)^{-1} - \frac{1}{8}(z)^{-2} - \frac{1}{16}(z)^{-3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{128}(z)^{-4} + O([z^{-4}]) + \dots \right). \end{aligned}$$

Substituyendo estos términos en la función de Rayleigh y después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$F(z) = 2\sigma^{1/2}(1 - \sigma^{-1})z - \frac{3}{2}\sigma^{1/2} - \frac{1}{2}(\sigma^{-3/2} - 2\sigma^{-1/2}) + O[z^{-1}] \quad (4.15)$$

Representación en Series de $R(z)$

Utilizando la representación en series de $F(z)$ dada por la ecuación (4.15) y de $e^{-g(z)}$, la cual se obtuvo previamente en la sección IV.3 y está dada por la ecuación (3.17), la representación en serie del polinomio racional $R(z)$ para la función de Rayleigh es

$$R(z) = \left[2\sigma^{1/2}(1 - \sigma^{-1})z - \frac{3}{2}\sigma^{1/2} - \frac{1}{2}(\sigma^{-3/2} - 2\sigma^{-1/2}) \right] + 2\sigma^{1/2}(1 - \sigma^{-1})a_1 + O[z^{-1}] + \dots \quad (4.16)$$

Como $R(z)$ es racional, entonces la forma de R es determinada únicamente por su parte principal. Si se retienen sólo potencias positivas hasta z^0 en (4.16) se obtiene que la parte principal de este polinomio es

$$R(z) \approx 2\sigma^{1/2}(1 - \sigma^{-1}) \left[z + a_1 - \frac{2 + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)^2}{4\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)} \right], \quad (4.17)$$

en donde a_1 es dada por (3.24) en términos de (3.21) y (4.13) como

$$I_o = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{1/a}^1 \theta_1(t) dt + \int_0^{1/a} \theta_2(t) dt - \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \theta_2(t/\sigma) dt \right). \quad (4.18)$$

IV.2 La Lentitud S de la Onda de Rayleigh

Por inspección directa del polinomio (4.17) se puede concluir que éste contiene sólo una raíz. Recordando que $z = \beta^2/C^2$, entonces la lentitud de la onda de Rayleigh $S = 1/C$ es determinada por

$$S = \frac{1}{\beta_\infty} \left[\frac{2 + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)^2}{4\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)} - I_o \right]^{1/2}. \quad (4.19)$$

IV.3 El Límite Elástico

En el límite elástico los factores de calidad tienden a infinito

$$Q_\alpha \rightarrow \infty, \quad Q_\beta \rightarrow \infty, \quad (4.20)$$

lo cual implica que las velocidades α y β asumen los valores reales de las velocidades elásticas (2.4) y la razón σ queda únicamente en términos de ellas como

$$\lim_{Q_\alpha \rightarrow \infty} \lim_{Q_\beta \rightarrow \infty} \sigma = \left(\frac{\alpha_\infty}{\beta_\infty} \right)^2 = a. \quad (4.21)$$

También para las ecuaciones (4.10) y (4.11) en este límite obtenemos que

$$\lim_{Q_\alpha \rightarrow \infty} \lim_{Q_\beta \rightarrow \infty} \theta_1(t) = \tan^{-1} \left(4 \frac{t\sqrt{at-1}\sqrt{1-t}}{\sqrt{a}(2t-1)^2} \right), \quad (4.22)$$

$$\lim_{Q_\alpha \rightarrow \infty} \lim_{Q_\beta \rightarrow \infty} \theta_2(t) = \tan^{-1} \left(4i \frac{t\sqrt{1-at}\sqrt{1-t}}{\sqrt{a}(2t-1)^2} \right). \quad (4.23)$$

Debido a que en este límite los cortes ramales en (4.18) se encuentran sobre el eje real, las dos últimas integrales a la derecha de esta ecuación se cancelan, esto puede ser demostrado si introducimos el cambio de variable $\tau = t/\sigma$ en la última integral del lado derecho de (4.18)

$$\begin{aligned} \lim_{Q_\alpha \rightarrow \infty} \lim_{Q_\beta \rightarrow \infty} I_o &= -\frac{1}{\pi} \left(\int_{1/a}^1 \theta_1(t) dt + \int_0^{1/a} \theta_2(t) dt - \int_0^{1/a} \theta_2(\tau) d\tau \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{1/a}^1 \theta_1(t) dt. \end{aligned}$$

Finalmente, de (4.19) se tiene que la lentitud para las ondas de Rayleigh (S_∞) en el límite elástico es

$$S_\infty = \lim_{Q_\alpha \rightarrow \infty} \lim_{Q_\beta \rightarrow \infty} S = \frac{1}{\beta_\infty} \left[\frac{2 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2}{4 \left(1 - \frac{1}{a}\right)} + \frac{1}{\pi} \int_{1/a}^1 \tan^{-1} \left(4 \frac{t\sqrt{at-1}\sqrt{1-t}}{\sqrt{a}(2t-1)^2} \right) dt \right]^{1/2}. \quad (4.24)$$

Nótese que todos los parámetros que incluye esta solución son reales, entonces la raíz que determina la lentitud de la onda Rayleigh es real. Esto implica, como era de esperarse, que para el caso elástico la velocidad de onda Rayleigh ($C_\infty = 1/S_\infty$) también es real.

IV.4 Resultados Numéricos de la Velocidad y el Factor de Calidad de la Onda de Rayleigh

En esta sección, se obtendrán algunos resultados numéricos para la velocidad y el factor de calidad de la onda de Rayleigh obtenidos a partir de las expresiones (4.19) y (4.24). Para los resultados numéricos de la velocidad de onda de Rayleigh se empleará la relación $C = 1/S$ y se comparará la velocidad visco-elástica vs. elástica en términos de la razón entre la velocidad de Rayleigh y la velocidad de cizalla. La razón elástica y visco-elástica respectivamente las definiremos como

$$\begin{aligned} \text{Razón}_E &= C_\infty / \beta_\infty \\ \text{Razón}_{VE} &= \Re [C] / \beta_\infty \end{aligned} \quad (4.25)$$

en donde C_∞ es la velocidad de la onda de Rayleigh para un medio con reología elástica y $\Re [C]$ es la parte real de la velocidad de Rayleigh para un medio con reología visco-elástica.

Para la obtención numérica del factor de calidad de la onda de Rayleigh, éste puede definirse en términos de la ecuación (2.5) como

$$Q_R = \frac{\Re [C]}{-2\Im [C]} = \frac{\Re \left[\frac{1}{S} \right]}{-2\Im \left[\frac{1}{S} \right]} \quad (4.26)$$

donde S está dada por la ecuación (4.19). Éste factor de calidad sera comparado numéricamente con la expresión aproximada para el factor de calidad obtenido por Press y Heally, 1957.

Todos los resultados numéricos serán gráficos contra la razón de Poisson ν (ó parámetro material), el cual puede definirse en términos de las velocidades elásticas α_∞ y β_∞ como

$$\nu = \frac{1 - 2 \left[\frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty} \right]^2}{2 \left(1 - \left[\frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty} \right]^2 \right)} \quad (4.27)$$

Quizá las comparaciones numéricas del factor de calidad sean las más importantes de esta sección, debido a que uno de los trabajos teórico-experimental más sobresaliente en el campo de visco-elasticidad se debe a Press y Heally. El mérito de su trabajo recae

en que obtuvieron, de manera aproximada, una expresión muy simple para determinar el factor de calidad de la onda de Rayleigh (el cual denotaremos como $Q_{R(aprox)}$) en términos de los factores de calidad de las ondas de corte y cizalla Q_α y Q_β , respectivamente. De acuerdo con los resultados experimentales reportados en su trabajo, su expresión predice razonablemente el factor de calidad observado.

Con la intención de ilustrar el procedimiento de Press y Heally, se presentará a continuación la formulación de su expresión, la cual fue propiamente rescrita más tarde por McDonald, 1959.

IV.5 El Factor de Calidad $Q_{R(aprox)}$ para un Medio con muy Baja Disipación

Para un medio con muy baja disipación la calidad elástica del medio Q es muy alta. Entonces, la velocidad de una onda de Rayleigh en este medio es un cero de la ecuación

$$\left(2 - \frac{C^2}{\beta^2}\right)^2 = 4\sqrt{1 - \frac{C^2}{\beta^2}}\sqrt{1 - \frac{C^2}{\alpha^2}} \quad (4.28)$$

dado que $Q_\alpha \gg 1/4$ y $Q_\beta \gg 1/4$, de la ecuación (2.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha_\infty^2 \left(1 - i\frac{1}{Q_\alpha}\right) \\ \beta^2 &= \beta_\infty^2 \left(1 - i\frac{1}{Q_\beta}\right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

de manera análoga la velocidad de onda de Rayleigh puede definirse como

$$C^2 = C_\infty^2 \left(1 - i\frac{1}{Q_R}\right). \quad (4.30)$$

Nótese que esta última expresión sugiere la existencia de sólo una onda de Rayleigh. A manera de obtener una expresión que relacione el factor de calidad $Q_{R(aprox)}$ de la onda de Rayleigh con los factores Q_α y Q_β , hay que elevar al cuadrado la ecuación (4.28) en términos de las expresiones (4.29) y (4.30) para así obtener

$$\left[2 - b \left\{ \frac{1-i(1/Q_{R(aprox)})}{1-i(1/Q_\beta)} \right\}^2\right]^2 = 16 \left[1 - b \left\{ \frac{1-i(1/Q_{R(aprox)})}{1-i(1/Q_\beta)} \right\}^2\right] \left[1 - a \left\{ \frac{1-i(1/Q_{R(aprox)})}{1-i(1/Q_\alpha)} \right\}^2\right] \quad (4.31)$$

donde $a = C_{R\infty}/\alpha_\infty$ y $b = \beta_\infty/\alpha_\infty$ son las razones elásticas.

Después de expandir esta función en términos de series de Taylor y retener términos del orden $(1/Q)$, se encuentra que la parte real de esta ecuación corresponde al polinomio cúbico que aparece en el caso elástico (ec. 2.25). De la parte imaginaria se puede obtener la relación para el factor de calidad $Q_{R(\text{approx})}$ en términos de Q_α y Q_β como

$$\frac{1}{Q_{R(\text{approx})}} = \frac{1-m}{Q_\beta} + \frac{m}{Q_\alpha} \quad (4.32)$$

donde

$$m = \frac{a(2-b)(1-b)}{a(2-b)(1-b) - b(1-a)(2-3b)}. \quad (4.33)$$

Nótese que aunque esta expresión fue obtenida en términos del método tradicional de racionalización, si la velocidad dada por la ecuación (4.30) satisface la restricción (2.21), entonces estaremos asegurando que la expresión (4.32) es válida.

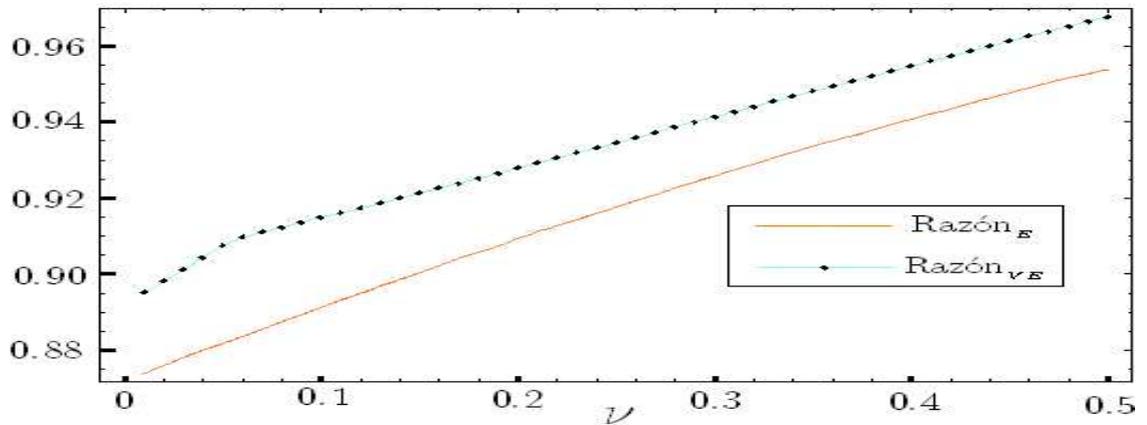
IV.5.1 Discusión de los Resultados Numéricos

En esta sección consideraremos tres escenarios de reología visco-elástica. La razón para la elección de los factores de calidad Q_α y Q_β mostrados en cada figura, tiene como finalidad: (i) Mostrar la desviación de la velocidad de Rayleigh visco-elástica de la elástica y (ii) mostrar la manera en que Q_R se encuentra acotada entre los distintos valores de Q_α y Q_β .

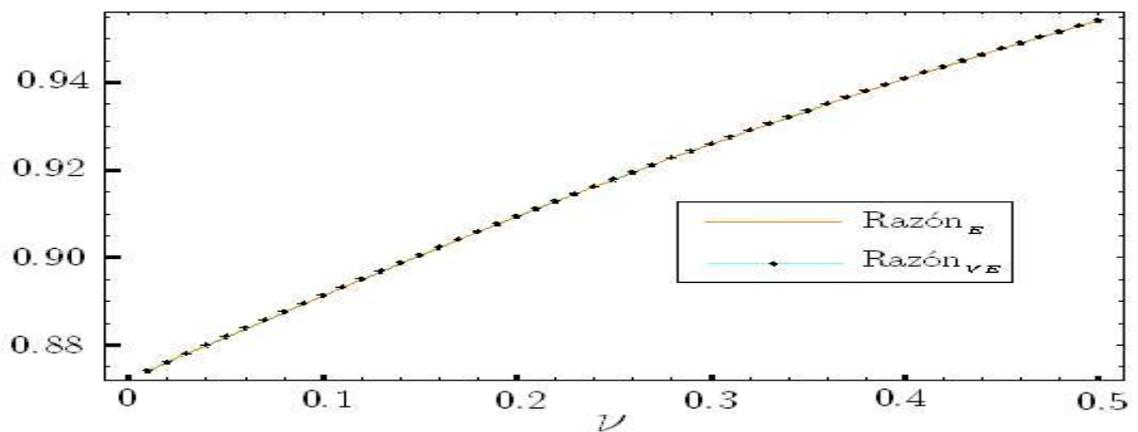
La figura (4) muestra particularmente las siguientes características: (i) La onda de Rayleigh siempre es menor que la velocidad de cizalla. (ii) Conforme el medio se vuelve menos disipativo, la velocidad de la onda de Rayleigh converge al valor elástico y (iii) La velocidad de onda de Rayleigh en un medio altamente disipativo es mayor que la velocidad de Rayleigh en un medio elástico. Este último resultado surge como consecuencia de notar que el módulo de las velocidades visco-elásticas de corte y cizalla (2.6) es mayor que el módulo de la onda elástica, por lo tanto es natural que la velocidad de onda Rayleigh visco-elástica sea mayor que la elástica en un medio altamente atenuativo.

En la figura 5 también notamos las siguientes características: (i) El comportamiento de Q_R y $Q_{R(\text{approx})}$ es el mismo. (ii) El valor de Q_R se encuentra delimitado por el valor

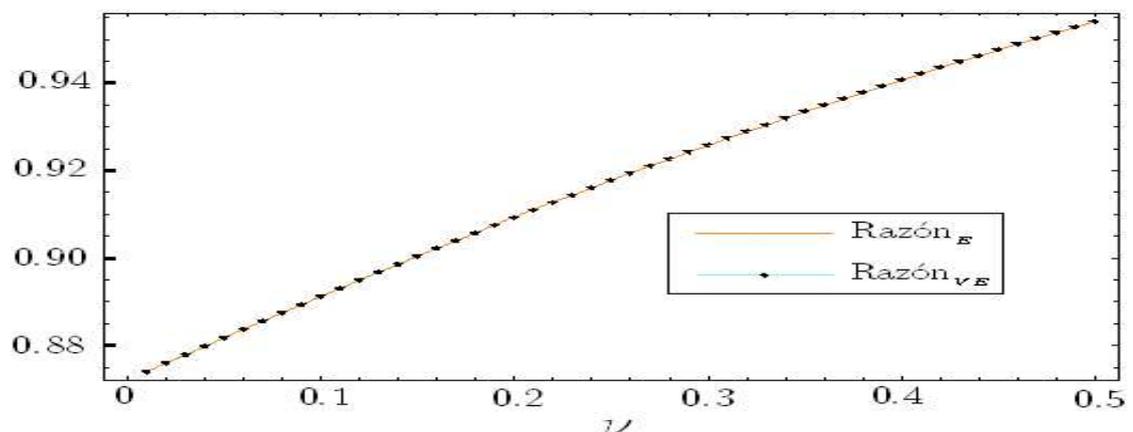
de Q_β y siempre es menor que Q_α , lo que implica que las ondas de Rayleigh son más disipativas que las ondas de compresión y (ii) La aproximación de Press and Heally es una buena aproximación aún para medios disipativos. Finalmente, en la figura 6 se muestra la diferencia porcentual entre los valores de Q_R y $Q_{R_{aprox}}$ para los distintos valores de Q_α y Q_β . Es notorio que para el caso más disipativo que presentamos (figura 6-a) la mayor diferencia porcentual es de alrededor de un 3%. Esto implica que si se considera una reología visco-elástica del tipo Kelvin-Voigt para describir un medio muy disipativo, la aproximación de Press y Heally es considerablemente aceptable.



(a)



(b)



(c)

Figura 4: Comparación de la razón elástica ($Razón_E$) y visco-elástica ($Razón_{vE}$) versus la razón de Poisson ν para: (a) $Q_\alpha = 10$, $Q_\beta = 3$. (b) $Q_\alpha = 100$, $Q_\beta = 30$. (c) $Q_\alpha = 1000$, $Q_\beta = 300$.

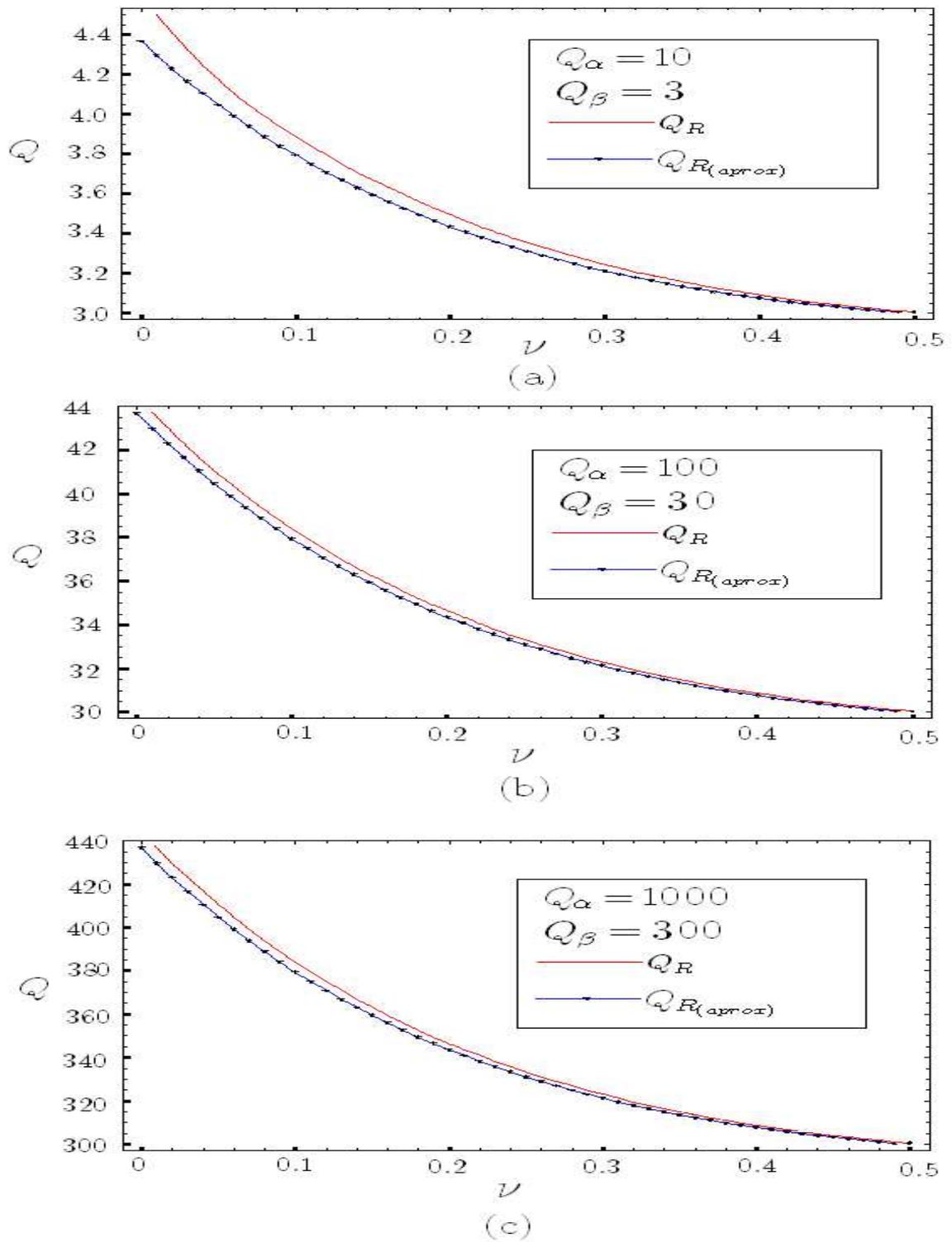


Figura 5: Comparación del factor de calidad exacto Q_R y del aproximado $Q_{R(\text{approx})}$ versus la razón de Poisson.

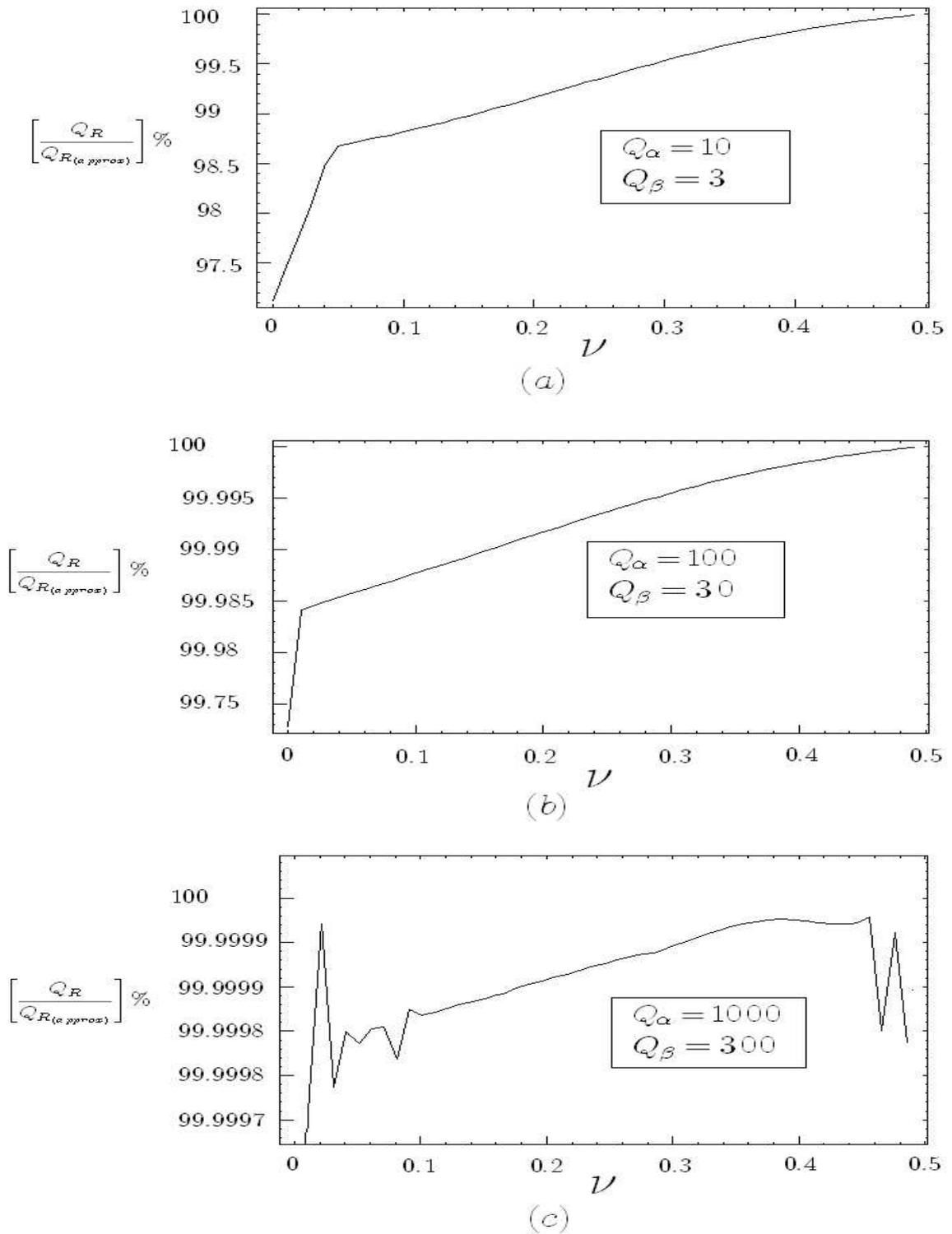


Figura 6: Diferencia porcentual entre Q_R y $Q_{R(\text{approx})}$ en función de la razón de Poisson ν para distintos valores de Q_α y Q_β .

Capítulo V

La Raíz de la Ecuación

Característica de Stoneley

El propósito de este capítulo, es el de obtener la raíz que determina la velocidad con la cual la onda de Stoneley se propaga a lo largo de una interfase sólida-líquida. Al igual que en el capítulo anterior, se empleará la metodología descrita en el capítulo III para su obtención.

La organización de este capítulo está dado en cuatro secciones. En la primera sección, se introduce brevemente el concepto de onda de Stoneley y la ecuación característica que predice la existencia de este tipo de onda. En la segunda sección, después de que esta función es analizada en el plano complejo, se procederá a obtener el polinomio racional R de esta función. En la tercera sección, la raíz que determina la velocidad de la onda de Stoneley es obtenida. Finalmente en la cuarta sección, en términos de esta expresión se presentarán algunos resultados numéricos de la velocidad de onda de Stoneley.

V.1 La Ecuación Característica de Stoneley

Al igual que la onda de Rayleigh, la onda de Stoneley es una onda superficial con la diferencia que ésta se presenta en la interfase de dos medios en contacto. Consideremos dos medios homogéneos e isotrópicos, para los cuales la superficie de contacto se

encuentra en $z = 0$. El primer medio consiste de un fluido de densidad ρ_F y modulo de incompresibilidad k_F y se encuentra confinado a $z \leq 0$. El segundo medio consiste de un sólido con densidad ρ , constantes de Lamé λ y μ y se encuentra confinado a $z > 0$. La existencia de ondas que se propagan a lo largo de la superficie de contacto entre dos medios y que decaen exponencialmente conforme éstas penetran ambos medios, fue demostrada por Stoneley (1927).

Particularmente para el caso de interfase sólida-liquida, la ecuación característica de Stoneley (Para referencia vease:Viktorov (1967), § 6 y Caviglia (1992), § 5.4) es

$$F(C) = \left(2 - \frac{C^2}{\beta_\infty^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{C^2}{\beta_\infty^2}}\sqrt{1 - \frac{C^2}{\alpha_\infty^2}} + \frac{\rho_F}{\rho} \left(\frac{C}{\beta_\infty}\right)^4 \frac{\sqrt{1 - \frac{C^2}{\alpha_\infty^2}}}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{C_F^2}}} = 0 \quad (5.1)$$

sujeta a las restricciones

$$\Re\left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\alpha_\infty^2}}\right) > 0, \quad \Re\left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\beta_\infty^2}}\right) > 0 \quad \text{y} \quad \Re\left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{C_F^2}}\right) > 0. \quad (5.2)$$

Aquí $\alpha_\infty, \beta_\infty$ son las velocidades de compresión y cizalla elásticas definidas en la ec. (2.4) y C_F es la velocidad con la cual se propaga el sonido en el fluido y esta dada por

$$C_F^2 = \frac{k_F}{\rho_F} \quad (5.3)$$

V.2 Análisis de la Ecuación Característica de Stoneley en el Plano Complejo

Al igual que en el capítulo anterior la ecuación (5.1) puede ser expresada en términos de la lentitud como

$$F(z) = \sqrt{\sigma}(2z - 1)^2 - 4z\sqrt{z - 1}\sqrt{\sigma z - 1} + \sqrt{\sigma_F} \frac{\rho_F}{\rho} \frac{\sqrt{\sigma z - 1}}{\sqrt{\sigma_F z - 1}} = 0 \quad (5.4)$$

sujeta a las restricciones

$$\Re\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sigma z}}\right) > 0, \quad \Re\left(\sqrt{1 - \frac{1}{z}}\right) > 0 \quad \text{y} \quad \Re\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_F z}}\right) > 0, \quad (5.5)$$

con $z = \beta_\infty^2/C^2$, $\sigma = \alpha_\infty^2/\beta_\infty^2$ y $\sigma_F = C_F^2/\beta_\infty^2$. Debido a que $C_F^2 < \beta_\infty^2 < \alpha_\infty^2$ es claro que

$$\sigma_F < 1 < \sigma \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\sigma} < 1 < \frac{1}{\sigma_F} \quad (5.6)$$

Nótese que la función de Stoneley (5.4) no admite la solución $z = 0$.

V.2.1 Puntos y Cortes Ramales de la Función de Stoneley

Debido a que para la función de Stoneley (5.4) el punto $z = 1/\sigma_F$ es una singularidad que no se encuentra en infinito, no cumple con los requerimientos del problema de Privalov. Sin embargo si multiplicamos ambos lados de esta ecuación por el término

$$\sqrt{\sigma_F z - 1}$$

la función de Stoneley puede re-escribirse de la siguiente manera

$$F(z) = \sqrt{\sigma} \sqrt{\sigma_F z - 1} (2z - 1)^2 - 4z \sqrt{\sigma_F z - 1} \sqrt{z - 1} \sqrt{\sigma z - 1} + \sqrt{\sigma} \frac{\rho_F}{\rho} \sqrt{\sigma z - 1} = 0 \quad (5.7)$$

Obsérvese que esta función evidentemente no es equivalente a la función (5.4), sin embargo debido a que la ecuación característica de Stoneley (al igual que la de Rayleigh) se obtiene de imponer las condiciones de frontera a la matriz de estado y exigir que el determinante de esta matriz sea igual a cero, uno puede elegir libremente la manera de representar la ecuación característica de Stoneley. Cualquiera de las representaciones funcionales dadas por las ecuaciones (5.4) y (5.7) es válida, pero es más reconocida la primera debido a que directamente se puede recobrar el caso de onda de Rayleigh cuando $\rho_F \rightarrow 0$. De cualquier manera, ambas funciones contienen los mismos ceros y para propósitos de obtener los ceros de la ecuación característica de Stoneley consideraremos la ecuación (5.7) sujeta a las condiciones de frontera (5.6).

De igual manera que en el capítulo IV se puede demostrar que para la función de Stoneley (5.7), los puntos

$$z = 1, \quad z = \frac{1}{\sigma} \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{\sigma_F} \quad (5.8)$$

son los puntos ramales de ésta y se encuentran a lo largo del eje real positivo. Además, el punto $z = \infty$ es un polo de segundo orden. Nótese también que el punto $z = 0$ no es un cero de esta función.

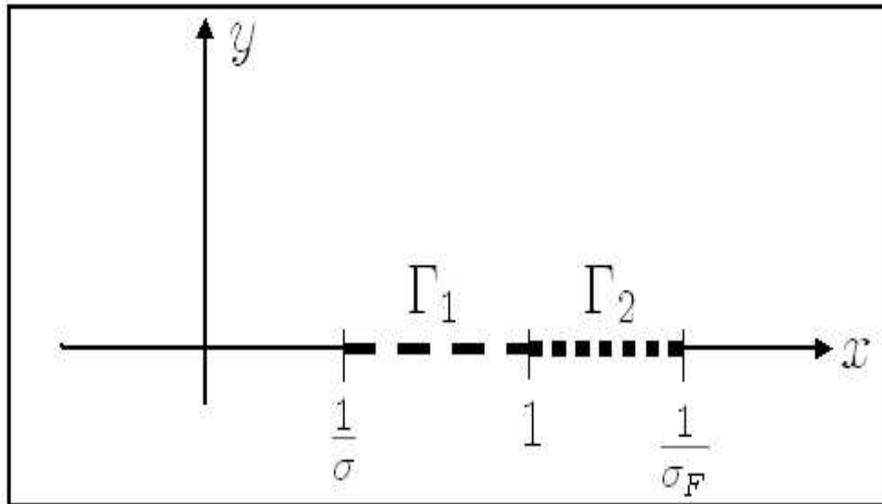


Figura 6: Cortes Ramales de la función de Stoneley

Se puede demostrar que los cortes ramales “efectivos” que satisfacen la restricción (5.5) están definidos como

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= t & \frac{1}{\sigma} \leq t < 1 \\ \Gamma_2(t) &= t & 1 \leq t < \frac{1}{\sigma_F} \end{aligned} \tag{5.9}$$

los cuales se muestran en la figura 6. Con estos dos cortes ramales se puede definir el arco $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, el cual define la hoja de Riemann apropiada para la función de Stoneley.

V.2.2 Las Discontinuidades de la Función de Stoneley a Través de los Cortes Ramales

Para cada uno de los cortes ramales definidos previamente por la ecuación (5.9), las discontinuidades de la función de Stoneley están dadas de la siguiente manera

$$G_1(t) = \frac{F^+(t)|_{\Gamma_1}}{F^-(t)|_{\Gamma_1}} = \frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\sigma_F}t(2t-1)^2+4t\sqrt{1-\sigma_F}t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}+\frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}}{-i\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\sigma_F}t(2t-1)^2+4t\sqrt{1-\sigma_F}t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}+\frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}} \quad (5.10)$$

$$= \frac{1-iH_1(t)}{1+iH_1(t)},$$

$$G_2(t) = \frac{F^+(t)|_{\Gamma_2}}{F^-(t)|_{\Gamma_2}} = \frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\sigma_F}t(2t-1)^2-4it\sqrt{1-\sigma_F}t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1}+\frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}}{-i\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\sigma_F}t(2t-1)^2+4it\sqrt{1-\sigma_F}t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1}+\frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}} \quad (5.11)$$

$$= -\frac{1+iH_2(t)}{1-iH_2(t)}.$$

Aquí

$$H_1(t) = \frac{4t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}+\frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\left(\frac{\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{1-\sigma_F}t}\right)}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2} \quad (5.12)$$

y

$$H_2(t) = \frac{\rho\sqrt{1-\sigma_F}t(\sqrt{\sigma}(2t-1)^2-4t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1})}{\rho_F\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln G_1 &= -2i \tan^{-1} H_1(t) = -2i\theta_1(t), \\ \ln G_2 &= 2i \tan^{-1} H_2(t) + i\pi = 2i\theta_2(t) + i\pi. \end{aligned} \quad (5.13)$$

De donde podemos hacer las siguientes observaciones: (i) Para todo t definido para cada uno de los cortes $G_1(t) \neq 0$ y $G_2(t) \neq 0$ (ii) En los puntos extremos

$$\begin{aligned} G_1(1/\sigma) &= 1 \\ G_1(1) &= G_2(1) \neq 0 \\ G_2(1/\sigma_F) &= 1 \end{aligned} \quad (5.14)$$

cabe hacer notar que el punto $t = 1/\sigma_F$ no es un punto singular a lo largo del arco Γ , entonces la continuación uniforme de cada una de estas funciones en los puntos en que se unen, existe. Además, cada una de estas funciones es de orden finito en infinito. Por lo tanto, se cumplen todos los requerimientos del problema de Privalov y por ende podemos definir la función g como

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln G(t)}{t-z} dt = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{1/\sigma}^1 \frac{\theta_1(t)}{t-z} dt - \int_1^{1/\sigma_F} \frac{\theta_2(t)}{t-z} dt \right) \quad (5.15)$$

Se abre aquí un paréntesis para notar que la discontinuidad a lo largo del corte ramal Γ_2 , la cual está dada por la ecuación (5.11), puede escribirse equivalentemente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G_2(t) &= \frac{F^+(t)|_{\Gamma_2}}{F^-(t)|_{\Gamma_2}} = \frac{i\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\sigma_F}t(2t-1)^2 - 4it\sqrt{1-\sigma_F}t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1} + \frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}}{-i\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\sigma_F}t(2t-1)^2 + 4it\sqrt{1-\sigma_F}t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1} + \frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}} \\ &= \frac{1-iH'_2(t)}{1+iH'_2(t)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

en donde

$$H'_2(t) = \frac{\frac{\rho_F}{\rho}\sqrt{\sigma_F}\left(\frac{\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{1-\sigma_F}t}\right)}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 - 4t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1}}. \quad (5.17)$$

Debido a que el punto $t = 1/\sigma_F$ pertenece al arco Γ_2 , éste representa una singularidad para la función H'_2 , lo que implicaría que G_2 no es continua en ese punto. Sin embargo, esta representación es útil para mostrar que en el límite en que la densidad del fluido ρ_F tiende a cero, la discontinuidad a lo largo de este arco no contribuye. De las ecuaciones (5.10) y (5.17) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_F \rightarrow \infty} H_1(t) &= \frac{4t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2} = h_1(t) \\ \lim_{\rho_F \rightarrow \infty} H'_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_F \rightarrow \infty} G_1(t) &= \frac{1-ih_1(t)}{1+ih_1(t)} \\ \lim_{\rho_F \rightarrow \infty} G_2(t) &= 1, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_F \rightarrow \infty} \ln G_1(t) &= \tan^{-1} \left(4 \frac{t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2} \right) \\ \lim_{\rho_F \rightarrow \infty} \ln G_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

por lo tanto, sólo la discontinuidad a lo largo del arco Γ_1 contribuye y ésta es la misma que aparece para el caso de onda de Rayleigh con reología elástica (ecuación 4.22). Notese que este último resultado no hubiera sido posible obtenerlo si hubieramos considerado la función G_2 en términos de la representación (5.11), ya que en este límite esta función no es continua. Más adelante se demostrará, en base a estos resultados, que la solución de onda de Stoneley converge a la solución de onda de Rayleigh en el caso límite en que ρ_F tiende a cero, lo cual sugiere que la solución de onda Rayleigh es un caso muy particular de la ecuación característica de Stoneley.

V.2.3 Construcción del Polinomio Racional de la Función de Stoneley

Dado que los elementos necesarios para derivar el polinomio racional R han sido obtenidos, sólo resta obtener su representación en términos de series de Laurent como a continuación se indica.

Representación en Series de $F(z)$

Ya que la función de Stoneley (5.7) contiene un polo de segundo orden en infinito, por consiguiente podemos obtener su representación en series de Laurent expandiéndola alrededor de esta singularidad. Aquí la representación en series de Laurent para los términos de las raíces cuadradas de esta función son

$$\begin{aligned}
 \sqrt{z-1} &= \sqrt{z}\sqrt{1-\frac{1}{z}} = \sqrt{z}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} - \frac{1}{16}z^{-3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5}{128}z^{-4} + O(z^{-5}) + \dots\right) \\
 \sqrt{\sigma z-1} &= \sqrt{\sigma z}\sqrt{1-\frac{1}{\sigma z}} = \sqrt{\sigma z}\left(1 - \frac{1}{2}(\sigma z)^{-1} - \frac{1}{8}(\sigma z)^{-2} - \frac{1}{16}(\sigma z)^{-3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5}{128}(\sigma z)^{-4} + O(z^{-5}) - \dots\right) \\
 \sqrt{\sigma_F z-1} &= \sqrt{\sigma_F z}\sqrt{1-\frac{1}{\sigma_F z}} = \sqrt{\sigma_F z}\left(1 - \frac{1}{2}(\sigma_F z)^{-1} - \frac{1}{8}(\sigma_F z)^{-2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{16}(\sigma_F z)^{-3} - \frac{5}{128}(\sigma_F z)^{-4} + O(z^{-5}) \right. \\
 &\quad \left. - \dots\right)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Substituyendo estos términos en la función de Rayleigh y después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$F(z) = -2(1 - \sigma^{-1})\sqrt{\sigma\sigma_F z} \left(z - \frac{2+(1-\sigma^{-1})^2+2\left(\frac{\rho_F}{\rho}\right)+2(1-\sigma^{-1})\sigma_F^{-1}}{4(1-\sigma^{-1})} + O[z^{-1}] + \dots \right) \tag{5.20}$$

Representación en Series de $R(z)$

Utilizando la representación en series de $F(z)$ de la ecuación (5.20) y de $e^{-g(z)}$ la cual se obtuvo previamente en la sección IV.3 y está dada por la ec. (3.17), el polinomio R

que se obtiene después de realizar el producto de estas dos funciones es

$$R(z) = \sqrt{\sigma\sigma_F} z \left(z + a_1 - \frac{2+(1-\sigma^{-1})^2+2(1-\sigma^{-1})\sigma_F^{-1}+2\left(\frac{\rho_F}{\rho}\right)}{4(1-\sigma^{-1})} + O[z^{-1}] + \dots \right). \quad (5.21)$$

Como $R(z)$ no contiene ninguna singularidad y es racional, entonces la forma de R esta únicamente determinada por su parte principal. Si retenemos las potencias positivas hasta z^0 en (4.16) tenemos que la parte principal de este polinomio es

$$R(z) \approx \sqrt{\sigma\sigma_F} z \left(z + a_1 - \frac{2 + (1 - \sigma^{-1})^2 + 2(1 - \sigma^{-1})\sigma_F^{-1} + 2\left(\frac{\rho_F}{\rho}\right)}{4(1 - \sigma^{-1})} \right). \quad (5.22)$$

en donde a_1 es determinada por (3.24) en términos de (3.21) y (5.15) como

$$I_o = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{1/\sigma}^1 \theta_1(t) dt - \int_1^{1/\sigma_F} \theta_2(t) dt - \frac{\pi}{2} \int_1^{1/\sigma_F} dt \right] \quad (5.23)$$

V.3 La Lentitud S_∞ de la Onda de Stoneley

Debido a que $z = 0$ no es una raíz de la función de Stoneley. La única raíz admisible del polinomio (5.22) que determina la lentitud $S = 1/C$ de la onda Stoneley es

$$S_\infty = \frac{1}{\beta_\infty} \left\{ \frac{2+(1-\sigma^{-1})^2+2(1-\sigma^{-1})\sigma_F^{-1}+2\left(\frac{\rho_F}{\rho}\right)}{4(1-\sigma^{-1})} + \frac{1}{\pi} \left[\int_{1/\sigma}^1 \theta_1(t) dt - \int_1^{1/\sigma_F} \theta_2(t) dt - \frac{\pi}{2} \int_1^{1/\sigma_F} dt \right] \right\}^{1/2} \quad (5.24)$$

o de manera explícita

$$S_\infty = \frac{1}{\beta_\infty} \left\{ \frac{2+(1-\sigma^{-1})^2+2(1-\sigma^{-1})\sigma_F^{-1}+2\left(\frac{\rho_F}{\rho}\right)}{4(1-\sigma^{-1})} + \frac{1}{\pi} \left[\int_{1/\sigma}^1 \tan^{-1} \left(\frac{4t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1} + \sqrt{\sigma_F} \left(\frac{\rho_F}{\rho}\right) \left(\frac{\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{1-\sigma_F t}}\right)}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2} \right) dt - \int_1^{1/\sigma_F} \tan^{-1} \left(\frac{\rho\sqrt{1-\sigma_F t}(\sqrt{\sigma}(2t-1)^2 - 4t\sqrt{t-1}\sqrt{\sigma t-1})}{\rho_F\sqrt{\sigma_F}\sqrt{\sigma t-1}} \right) dt - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_F} - 1 \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (5.25)$$

Como caso particular, considérese el caso en el que la densidad del fluido ρ_F tiende a cero. Debido a que en el vacío las ondas mecánicas no se propagan $V_F = 0$, lo cual implica que

$$\lim_{\rho_F \rightarrow 0} \sigma_F = 0.$$

Al final de la sección V.2.2 se discutió que sólo la discontinuidad a lo largo del arco Γ_1 contribuía, entonces la ecuación (5.23) puede re-escribirse en términos de (5.18) como

$$\lim_{\rho_F \rightarrow 0} I_o = -\frac{1}{\pi} \int_{1/\sigma}^1 \tan^{-1} \left(4 \frac{t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2} \right) dt$$

entonces

$$\lim_{\rho_F \rightarrow 0} S_\infty = \frac{1}{\beta_\infty} \left\{ \frac{2 + (1 - \sigma^{-1})^2}{4(1 - \sigma^{-1})} + \frac{1}{\pi} \int_{1/\sigma}^1 \tan^{-1} \left(4 \frac{t\sqrt{1-t}\sqrt{\sigma t-1}}{\sqrt{\sigma}(2t-1)^2} \right) dt \right\}^{1/2} \quad (5.26)$$

la cual es equivalente a la lentitud de la de onda de Rayleigh (4.24).

V.4 Resultados Numéricos para la Velocidad de la Onda de Stoneley

A continuación se presentan resultados numéricos obtenidos para la velocidad ($C = 1/S$) de la onda de Stoneley a partir de las expresión (5.25). Para el cálculo de estos resultados, se han considerado dos tipos de fluidos: aire y agua. Los parámetros relevantes para cada uno de estos fluidos se presentan en la siguiente tabla

Fluido	ρ_F [kg/m^3]	C_F [m/s]
Aire	1.29	331
Agua	1×10^3	1435

Tabla I: Valores de la densidad ρ_F y de la velocidad de propagación del sonido C_F en agua y aire.

Adicionalmente, sólo se ha considerado un sólido con una densidad ρ de $8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y con una velocidad de compresión α_∞ de 4000 m/s .

Los resultados numéricos para cada uno de los casos se muestran en las figuras (7) y (8). En ambas figuras la primer gráfica muestra una comparación de la velocidad de la onda de Stoneley y la onda de Rayleigh, las cuales son normalizadas por la velocidad de cizalla β_∞ , en función de la razón de Poisson. La segunda gráfica muestra la velocidad

C_F , con la que se propaga el sonido en el fluido, normalizada por la velocidad de cizalla β_∞ del sólido en función de la razón de Poisson.

Para los cálculos numéricos todos los parámetros son constantes excepto la velocidad de cizalla β_∞ , la cual se determina a partir de la velocidad de compresión α_∞ y la razón de Poisson como

$$\beta_\infty = \alpha_\infty \sqrt{\frac{\nu - 1/2}{\nu - 1}} \quad (5.27)$$

V.4.1 Discusión de los Resultados Numéricos

En ambas figuras se observa que la velocidad de la onda de Stoneley siempre es menor que la velocidad de onda de Rayleigh y a su vez éstas son menores que la velocidad de cizalla del sólido. Nótese que la razón C/β_∞ en la figura (8-a) no es graficada para todo el rango de la razón de Poisson. Esto se debe a que para $\nu > 0.42$ la velocidad del sonido en el fluido C_F es mayor que la velocidad de cizalla del sólido β_∞ como se muestra en la figura (8-b). Dado que todos los parámetros son reales, el considerar velocidades $C_F > \beta_\infty$ violaría la tercer restricción impuesta por la ecuación (5.5). Entonces, la existencia de la velocidad de la onda Stoneley para una configuración sólido-fluido en particular, no necesariamente se encuentra asegurada en todo el dominio de la razón de Poisson.

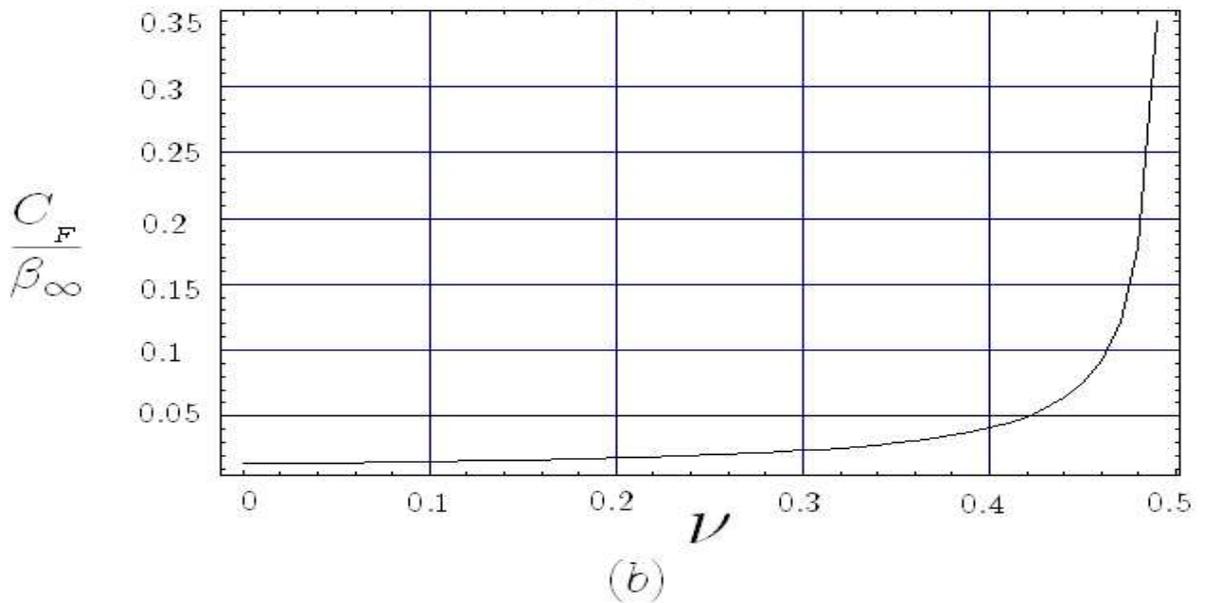
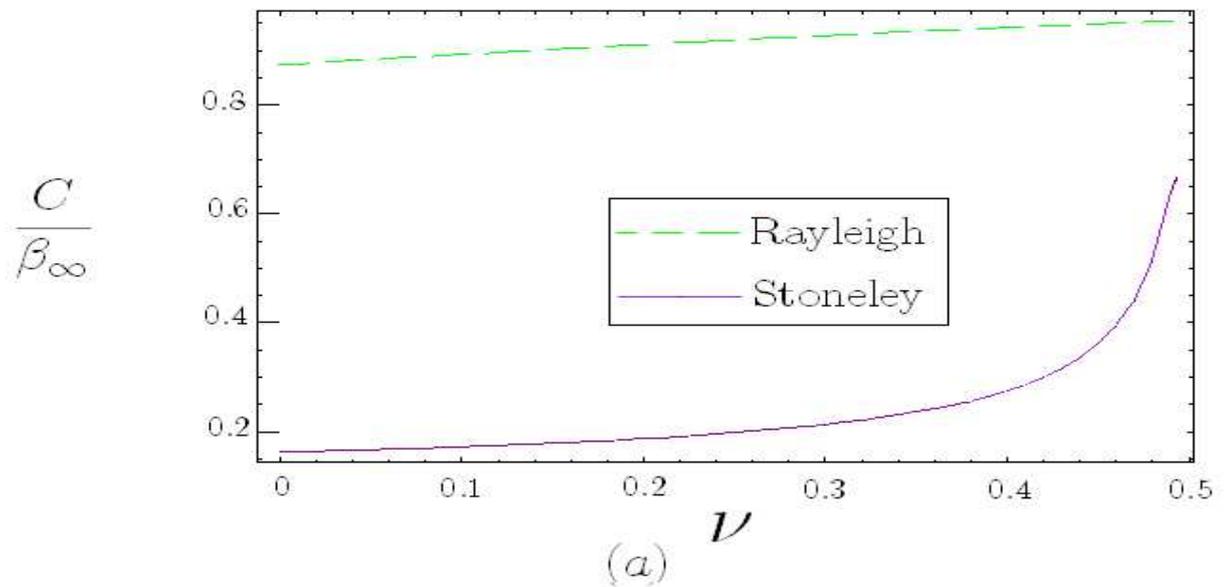


Figura 7: (a) Comparación de las velocidades de la onda de Stoneley y de Rayleigh en función de la razón de Poisson ν considerando como fluido aire. Obsérvese que las velocidades han sido normalizadas en términos de la velocidad de cizalla β_∞ (b) gráfica de la razón C_F/β_∞

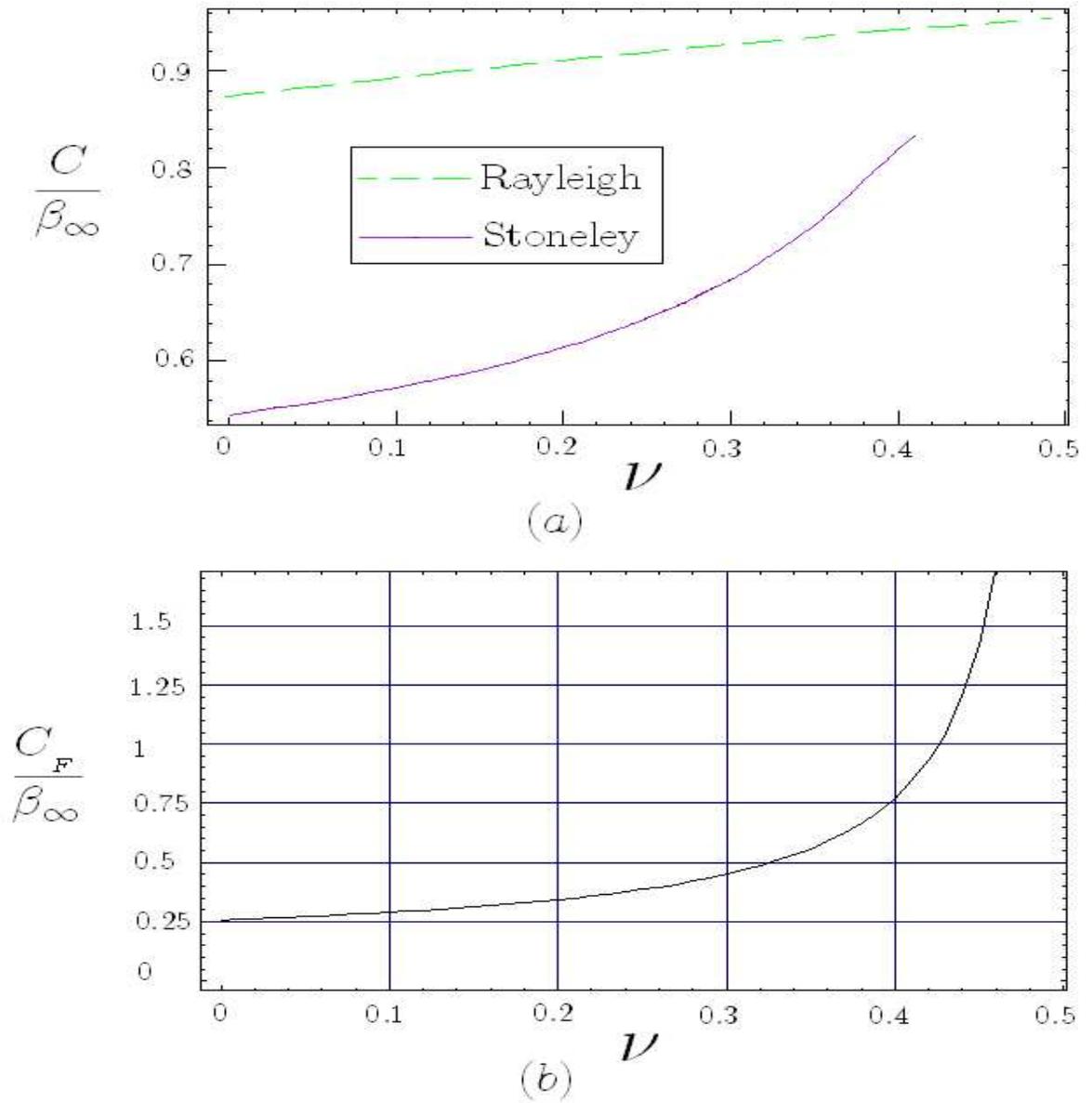


Figura 8: (a) Comparación de las velocidades C de la onda de Stoneley y de Rayleigh en función de la razón de Poisson ν considerando como fluido agua. Obsérvese que las velocidades han sido normalizadas en términos de la velocidad de cizalla β_∞ (b) gráfica de la razón C_F/β_∞

Capítulo VI

Conclusiones

Los principales resultados de esta tesis son el haber demostrado que la ecuación característica de Rayleigh así como la de Stoneley, admiten sólo una solución física. Además en ambos casos, se obtuvo una expresión analítica para la raíz que determina esta solución. Lo cual para el caso de onda de Rayleigh nos permitió, contrario a los resultados de Currie et al. (1980), establecer claramente la validez del principio de correspondencia.

Aún cuando la expresión para la raíz de Rayleigh fue obtenida previamente por Romeo (2000), en esta tesis se han presentado por primera vez resultados numéricos para distintas reologías visco-elásticas. Sin embargo, la solución analítica para la raíz de la ecuación característica de Stoneley es la primera vez que se obtiene, así como también, algunos resultados numéricos obtenidos a partir de esta solución.

Dentro de las contribuciones de esta tesis, no sólo destaca el haber descrito de una manera sencilla la teoría del problema de Privalov como un método para obtener las raíces de la ecuación característica de Rayleigh y de Stoneley, sino que además, las soluciones obtenidas por este método toman sentido físico al incluir dentro de su formulación la restricción a la que se encuentran sujetas la existencia de este tipo de ondas.

Por otro lado, hago hincapié en que el método con que tradicionalmente se racionaliza la ecuación de Rayleigh no es erróneo. Sin embargo, las soluciones que se obtienen a partir de este método deben de estar sujetas a las restricciones propias del problema, lo cual asegura la existencia de sólo una onda de Rayleigh. Así lo muestran los resultados

numéricos obtenidos en el capítulo IV. En donde se hace notar que a pesar de que la expresión aproximada de Press y Healy (1957) ha sido obtenida en términos del método de racionalización, toma como hipótesis la existencia de sólo una onda de Rayleigh. Por lo tanto, predice satisfactoriamente el comportamiento de las ondas de Rayleigh para medios con muy baja disipación.

Bibliografía

- K. Aki and P. G. Richards. 2002. "Quantitative Seismology". University Science Books. Décima edición. Sausalito, California. 700 pp.
- J. M. Carcione. 2001. "Waves Fields in Real Media". Klaus Helbig and Sven Treitel, Inc. Volumen **31**. Primera edición. New York. 390 pp.
- G. Caviglia and A. Morro. 1992. "Inhomogeneous Waves in Solids and Fluids". World Scientific Publishing. Volumen **4**, Inc. Primera edición. New Jersey. 301 pp.
- R. V. Churchill y J. W. Brown. 1992. "Variable Compleja y Aplicaciones". Mc Graw Hill, Inc. Quinta edición. México. 402 pp.
- P. K. Currie, M. A. Hayes and P. M. O'Leary. 1997. "Viscoelastic Surface Waves on a Standard linear Solid". Q. Appl. Math. **35**, 35-53 p.
- P. K. Currie and P. M. O' Leary. 1978. "Viscoelastic Rayleigh Waves II". Q. Appl. Math. **35**. 445-454 p.
- P. K. Currie. 1979. "Viscoelastic Surface Waves on Standard Linear Solid*". Q. Appl. Math., **37**. 332-336 p.
- M. Hayes and R. S. Rivlin. 1962. "A Note on the Secular Equation for Rayleigh Waves."ZAMP. **13**, 80-83 p.
- P. Henrici. 1974. "Computational Complex Analysis". John Wiley and Sons, Inc. Volumen **3**. New York. 637 pp.

- L. Knopoff. 1952. "On Rayleigh wave velocities". Bull. Seismol. Soc. Amer. **42** 307-308 p.
- C. G. Lai and G. J. Rix. 2002. "Solution of the Rayleigh Eigenproblem in Viscoelastic Media". Bull. Seism. Soc. Am. **92**. 2297-2309 p.
- P. G. Malischewsky. 2000. "Comment to A New Formulula for the Velocity of Rayleigh Waves by D. Nkemzi". Wave Motion. **31**. 93-96 p.
- J. R. Mcdonald. 1959. "Rayleigh-Wave Dissipation Functions in Low-Loss Media". Geophys. J., **2**. 132-135 p.
- N. I. Muskhelishvili. 1952. "Singular Integral Equations". Noordhoff LTD Groningen, Primera edición. Holanda. 447 pp.
- D. Nkemzi. 1997. "A New Formula for the Velocity of Rayleigh Waves". Wave Motion. **26**. 199-205 pp.
- F. Press and J. Healy. 1957. "Absorption of Rayleigh Waves in Low-Loss Media". J. Appl. Phys. **28**, 1323-1325 p.
- Lord Rayleigh. 1887. "On waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid". Proc. London Math. Soc. **17**. 4-11 p.
- M. Romeo. 2001. "Rayleigh Waves on a Viscoelastic solid Half-Space". J. A. S. A. **110**. 59-67 p.
- S. M. Selby. 1971. "Standard Mathematical Tables". CRC Books. Decimonovena edición. Ohio. 710 pp.
- R. Stoneley. 1927. "Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids". Proc. Roy. Soc. London, **106**. 416-428 p.
- I. A. Viktorov. 1967. "Rayleigh and Lamb Waves". Plenum Press. Primer edición. New York. 154 pp.