**Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California**

**Maestría en Ciencias**

**en Oceanografía Física**

# Estadística Lagrangiana de la turbulencia bidimensional en un dominio finito

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

**Lenin Moisés Flores Ramírez**

Ensenada, Baja California, México

2017

Tesis defendida por

## Lenin Moisés Flores Ramírez

y aprobada por el siguiente Comité

**Dr. Luis Zavala Sansón**
Director del Comité

Dr. Paula Pérez Brunius

Dr. Ernesto García Mendoza

**Dr. Cuauhtémoc Turrent Thompson**
Coordinador del Programa de Posgrado en Oceanografía Física

**Dra. Rufina Hernández Martínez**
Director de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta **Lenin Moisés Flores Ramírez** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física.

**Estadística Lagrangiana de la turbulencia bidimensional en un dominio finito**

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón
Director de tesis

En este trabajo se estudia la estadística Lagrangiana de la turbulencia bidimensional en un dominio finito por medio de simulaciones numéricas. El objetivo es determinar la influencia del confinamiento sobre las medidas estadísticas de la dispersión de trazadores pasivos inmersos en un flujo turbulento. Con esta finalidad se realizaron experimentos de dispersión de partículas sobre dominios cuadrados de distinto tamaño, pero manteniendo las características del flujo dispersor idénticas. La motivación del estudio es establecer una conexión con problemas de dispersión en cuencas cerradas (lagos o mares interiores), donde el transporte y destino de los trazadores pueden estar relacionados con las dimensiones de la cuenca.

Los resultados muestran que los regímenes de dispersión son modificados porque las partículas eventualmente llenan el dominio. En consecuencia, las medidas estadísticas (dispersión absoluta, relativa y la curtosis de la distribución de separaciones relativas) adquieren un valor constante a tiempos largos. Estos valores fueron calculados analíticamente para dominios cerrados con diferente geometría (cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos y elipses). En particular, para la estadística de pares se encontró que el valor de la curtosis de saturación cuando las partículas se han decorrelacionado es 1.7 para un dominio cuadrado de tamaño arbitrario, y de 5/3 para un círculo de radio arbitrario. Estos son valores exactos que están asociados con dominios cerrados, mientras que para un dominio sin fronteras el valor de la curtosis es 2. Por otro lado, se definió el tiempo de saturación del dominio mediante el valor límite de la dispersión absoluta. Este tiempo puede ser alterado por factores como la ubicación de la fuente de partículas o las características del flujo dispersor. Finalmente, se encontró que el centro de masa de una nube de partículas que comienza en el centro de una caja cerrada solo puede viajar en promedio un décima parte del tamaño del dominio. Estos resultados se pueden aplicar en el diseño y análisis de experimentos Lagrangianos en cuerpos de agua con fronteras, los cuales son útiles en problemas de dispersión de contaminantes, material biológico o cualquier otro tipo de trazador.

Palabras Clave: **dispersión turbulenta, confinamiento, tiempo de saturación**

Abstract of the thesis presented by **Lenin Moisés Flores Ramírez** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Physical Oceanography.

**Lagrangian Statistics of two-dimensional turbulence on a finite domain**

Abstract approved by:

Dr. Luis Zavala Sansón
Thesis director

In this thesis we study the Lagrangian statistics of two-dimensional turbulence in a finite domain by means of numerical simulations. The objective is to determine the influence of the closed boundaries on statistical measures of the dispersion of passive tracers immersed in a turbulent flow. For this purpose, particle dispersion experiments were performed on square domains with different sizes, but maintaining the same characteristics of the dispersing flow. The motivation is to establish a connection with problems of dispersion in closed basins (lakes or interior seas), where the transport and fate of tracers might be related to the dimensions of the basin.

The results show that the dispersion regimes are modified because particles eventually fill the domain. Consequently, the statistical measures (absolute and relative dispersion and the kurtosis of the relative separation distribution) reach a constant value at long times. These values were calculated analytically for closed domains with different geometries (squares, rectangles, triangles, circles and ellipses). In particular, for the pair statistics it was found that the saturation value of the kurtosis when particles are decorrelated is 1.7 for a square domain of arbitrary size, and 5/3 for a circle of arbitrary radius. These are exact values associated with closed domains, whereas for a unbounded domain the value of the kurtosis is 2. On the other hand, we defined the saturation time of the domain using the limit value of absolute dispersion. This time is modified by factors like the location of the source of particles or the characteristics of the dispersing flow. Finally we found that the center of mass of a cloud of particles starting at the center of a closed box can only travel on average one-tenth of the size of the domain. These results can be applied on the design and analysis of Lagrangian experiments on oceanic closed basins, which are useful on problems of dispersion of pollutants, biological material or any other kind of tracer.

Keywords: **turbulent dispersion, confinement, saturation time**

# Dedicatoria

***A mi mamá, mi abuela y mi hermana,***

***las mujeres especiales de mi vida***

***A mi papá y mi hermano***

# Agradecimientos

Al Dr. Luis Zavala Sansón por el compromiso, paciencia y plena dedicación en la realización de este trabajo. Gracias por compartir sus conocimientos y experiencias, el estudiante sigue el camino de su maestro.

Al comité de tesis: Dra. Paula Pérez Brunius y Dr. Ernesto García Mendoza. Gracias por su confianza y sus excelentes contribuciones al trabajo de tesis.

A mis amigos Javier y Arturo, los mejores estudiantes de doctorado que he conocido. He aprendido mucho de ustedes y por ello estoy muy agradecido.

A mis amigos Gemma, Iris y René. Mi tiempo en Ensenada fue interesante, pero gracias a ustedes lo fue aún más. Ha sido una experiencia maravillosa.

A las amigas de Ciencias de la Tierra (o Fiesta): Laura, Rocío y Daniela. Gracias por tener siempre un lugar para mi.

A los amigos de la generación: Karyna, Nadia, Daniel, Eduardo, Nemesis y Raúl. Un abrazo fuerte para ustedes.

A mis amigos de Puerto Ángel. Gracias por seguir conmigo.

A los profesores del posgrado en Oceanografía Física. Todas sus enseñanzas son muy valiosas.

Al personal del CICESE y del Departamento de Oceanografía Física, en especial a Lupita Pacheco.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

# Tabla de contenido

Página

# Lista de figuras

Figura Página

# Lista de tablas

Tabla Página

# Capítulo 1. Introducción

La turbulencia es ubicua en la naturaleza: observamos su presencia en todas las escalas espaciales y temporales, desde una taza de café siendo revuelta hasta la formación de galaxias (Boffetta y Ecke, 2012). En mecánica de fluidos, una de las características de los flujos turbulentos es que involucran un amplio intervalo de escalas espaciales y temporales que coexisten y se superponen en el flujo (Mathieu y Scott, 2000). Por esta razón, la turbulencia influye enormemente en la advección de diferentes propiedades de un fluido como consecuencia de la interacción entre dichas escalas de movimiento.

La turbulencia puede manifestarse en dos dimensiones (2D). La turbulencia bidimensional es relevante porque permite modelar sistemas complejos como el océano y la atmósfera, donde la dirección vertical del movimiento es restringida por la acción de la rotación terrestre, la estratificación o la geometría del dominio (Tabeling, 2002). El papel fundamental de la dinámica de la turbulencia 2D lo tienen las concentraciones de vorticidad organizadas en estructura coherentes, las cuales inducen y mantienen procesos complejos de distorsión del campo de velocidad (Elhmaïdi *et al.*, 1993). Dichas estructuras se forman debido al fenómeno de la cascada inversa de energía, donde la energía inyectada en el flujo es transferida hacia las escalas espaciales mayores; un proceso que lo acompaña es la cascada directa de enstrofía hacia las escalas menores. Este escenario está ausente en flujos tridimensionales, donde el comportamiento es opuesto, es decir, la energía va hacia las escalas pequeñas (Kraichnan y Montgomery, 1980; Rutgers, 1998; Bruneau y Kellay, 2005). Los flujos 2D han sido de utilidad para describir de manera aproximada el movimiento de vórtices coherentes en el océano y el transporte de trazadores pasivos por parte de estas estructuras (Provenzale, 1999).

Entender los mecanismos de transporte y procesos de mezcla es una tarea importante que tiene gran relevancia desde el punto de vista teórico y práctico en problemas oceanográficos. Por ejemplo, el estudio de difusión y caos en sistemas geofísicos, o bien para analizar problemas de interés e impacto social, tales como la dispersión de nutrientes o contaminantes en el agua de mar y los consecuentes efectos sobre el ambiente (Lacorata *et al.*, 2001). En muchos de estos problemas el mecanismo dominante es el transporte advectivo, por lo cual la propiedad del flujo o el material inmerso en el fluido está siendo mezclado por el movimiento desordenado descrito por las fluctuaciones de la velocidad (Yeung, 2001).

En estas situaciones es de utilidad adoptar un punto de vista Lagrangiano (Yeung, 2001), el cual consiste en seguir las trayectorias individuales de numerosas partículas liberadas en el flujo y registrar sus posiciones y velocidades. Las observaciones Lagrangianas en el océano se hacen utilizando boyas (o globos en la atmósfera) sobre la superficie o a diferentes profundidades (alturas) (LaCasce, 2008b). Con la información registrada nos es posible determinar cantidades estadísticas, las cuales tienen una relación estrecha con el flujo turbulento que dispersa a las partículas; por lo tanto, la dispersión turbulenta se estudia haciendo uso de la estadística Lagrangiana. En este sentido se han realizado numerosas investigaciones con el fin de entender claramente la estadística de una nube de partículas que es transportada por un flujo turbulento. Los estudios pioneros incluyen a Taylor (1921) que analizó la separación de una partícula desde la posición donde fue liberada; y Richardson (1926) que estudió la separación relativa entre pares de partículas. En el marco de la turbulencia 2D, la dinámica de la dispersión de partículas individuales y por pares, y su relación con el espectro de energía es resumida y aumentada en los estudios de Babiano *et al.* (1987) y Babiano *et al.* (1990) (así como las referencias que acompañan dichos trabajos). La revisión de Salazar y Collins (2009) dedica una parte al contexto de la dispersión de pares de partículas en turbulencia 2D, enfocándose en los resultados de experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas. Por otro lado, muchas de las medidas estadísticas Lagrangianas conocidas y los resultados de observaciones oceánicas se encuentran resumidos en el trabajo de LaCasce (2008b).

Existen varios factores que influyen en la dispersión turbulenta, y por lo tanto en la estadística Lagrangiana. Entre ellos destacan el flujo dispersor y el tipo de trazador (ya sea pasivo o activo). Otro factor importante es la dimensión del dominio donde se dispersan las partículas, incluyendo sus fronteras sólidas, lo cual es el tema de investigación en la presente tesis. Los comportamientos irregulares en la estadística pueden surgir porque las escalas de movimiento características no son suficientemente pequeñas comparadas con el tamaño del dominio, tal como mostró Artale *et al.* (1997) para flujos 2D simplificados. En situaciones geofísicas, las fronteras laterales de una cuenca (como el Golfo de California) ejercen una fuerte influencia en la circulación de boyas superficiales limitando su movimiento (Zavala Sansón, 2015). En turbulencia 2D, las paredes sólidas desempeñan un papel relevante en su evolución ya que actúan como fuentes de vorticidad que puede ser advectada al interior del flujo en forma de filamentos (van Heijst *et al.*, 2006). Esto tiene impacto sobre la estadística Lagrangiana, como es el caso de la aceleración de las partículas, la cual desarrolla valores extremos en regiones cercanas a la pared (Kadoch *et al.*, 2011). A diferencia de los trabajos anteriores, la atención del presente estudio está dirigida hacia la influencia del tamaño del dominio en la dispersión de partículas y su estadística subyacente.

En este trabajo realizamos un estudio de la dispersión de trazadores pasivos que son transportados por un flujo turbulento en un dominio finito, haciendo uso de simulaciones numéricas. Nos enfocamos en determinar la influencia del confinamiento sobre la estadística Lagrangiana, es decir, restringimos el movimiento de las partículas con la finalidad de alterar las medidas estadísticas. Para lograrlo se hicieron varios experimentos de dispersión en dominios cuadrados de distinto tamaño, pero manteniendo idénticas las caracteršticas del flujo turbulento en cada dominio. También se tiene como propósito definir y cuantificar, dado un flujo turbulento determinado, el tiempo en el que las partículas ocupan todo el dominio. El problema es una representación de la dispersión de un trazador en cuencas cerradas (como mares o lagos) y constituye un modelo sencillo de la situación donde se introduce algún contaminante desde una fuente puntual y se necesita determinar el tiempo en el que dicho agente externo alcanza a cubrir toda la cuenca.

El trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera. Al final de este capítulo se presentan los objetivos del trabajo. En el capítulo 2 se brinda el marco teórico del estudio, así como los métodos utilizados. Primero se describe la dinámica de la turbulencia 2D, enseguida definimos las medidas estadísticas Lagrangianas y sus apectos teóricos relevantes, y finalmente describimos el modelo numérico utilizado para las simulaciones. El capítulo 3 está dedicado a describir y caracterizar a la estadística Lagrangiana de la dispersión de partículas en el flujo turbulento 2D. En el capítulo 4 se estudia la influencia del tamaño del dominio sobre la dispersión Lagrangiana. Finalmente, en el capítulo 5, se presentan las discusiones y las conclusiones de la tesis.

## 1.1. Objetivos

### General

Estudiar la estadística Lagrangiana en turbulencia 2D en un dominio finito por medio de simulaciones numéricas.

### Específicos

1. Generar un flujo turbulento 2D forzado y estadísticamente estacionario, como base para realizar los experimentos de dispersión de partículas.
2. Obtener y describir las estadísticas de partículas individuales y por pares.
3. Determinar la influencia del confinamiento sobre las medidas estadísticas Lagrangianas.

# Capítulo 2. Teoría y métodos

## 2.1. Turbulencia en dos dimensiones

En esta sección describimos los principales aspectos teóricos relacionados con la dinámica del flujo turbulento en dos dimensiones (2D). Comenzamos describiendo las ecuaciones que gobiernan su movimiento y después se presenta el escenario de cascada doble de energía en el espacio espectral.

### 2.1.1. Ecuaciones de movimiento

Se considera un flujo turbulento 2D, homogéneo e incompresible en un plano cartesiano $(x, y)$. La evolución de su campo de velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u(x, y, t), v(x, y, t)]$ es descrita por la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - r\mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{1}$$

y la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

donde $p$ es la presión, $\nu$ la viscosidad cinemática, $\rho$ la densidad, $r$ el coeficiente de fricción lineal, $\mathbf{f} = (f^x, f^y)$ un forzamiento externo aplicado sobre el fluido, $t$ es el tiempo y $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. El término de fricción lineal, $-r\mathbf{u}$, es una manera de sustraer energía de las escalas grandes de movimiento (Vallis, 2006). Es posible reescribir la ec. (1) tomando su rotacional, lo que nos lleva a obtener

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \nu \nabla^2 \omega - r\omega + F, \tag{3}$$

donde $\omega$ es la componente vertical de la vorticidad del flujo definida como

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

mientras que $F$ es la componente vertical del rotacional del forzamiento. Adicionalmente, la condición de incompresibilidad (ec. 2) nos permite definir un campo escalar $\psi$, conocido como función de corriente, por medio del cual se obtiene el campo de velocidad:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5}$$

En consecuencia, la función de corriente se relaciona con la vorticidad

$$\omega = -\nabla^2 \psi, \tag{6}$$

y por medio de esto podemos escribir la ec. (3) de la siguiente forma

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \nu \nabla^2 \omega - r\omega + F, \tag{7}$$

donde $\frac{D}{Dt}$ es la derivada material y $J$ es el operador Jacobiano, el cual está definido como:

$$J(\omega, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}. \tag{8}$$

En ausencia de disipación y forzamiento, la ec. (7) se convierte en $\frac{D\omega}{Dt} = 0$, e indica que la vorticidad se conserva siguiendo el movimiento. Esto implica a su vez que se conservan las siguientes dos integrales: la energía cinética $E$, definida como:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int \int (u^2 + v^2) dx dy, \tag{9}$$

y la enstrofía $Z$, cuya definición es:

$$Z(t) = \frac{1}{2}\int\int \omega^2 dxdy. \tag{10}$$

El hecho de que estas dos cantidades se conserven simultáneamente da lugar a la presencia de dos intervalos inerciales en el espectro de energía, lo cual se describe a continuación.

### 2.1.2. Espectro de energía

La aproximación teórica de la distribución espectral de la energía $E(k)$ en la turbulencia 2D continuamente forzada fue presentada originalmente por Kraichnan (1967). En su formulación se considera que la energía $E$, inyectada en un cierto número de onda $k_f$, es distribuida en cierto intervalo de números de onda $k$, denominado subrango inercial, donde los términos no lineales de la ec. (1) dominan. Este intervalo está limitado por el número de onda más pequeño $k_L$, relacionado con el tamaño del dominio $L$, y el número de onda más grande $k_d$, donde ocurre la disipación (ver Figura 1). El espectro de energía es:

$$E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

en el intervalo $k_L < k < k_f$, donde $\epsilon$ es la razón de transferencia de energía. En este intervalo la energía va hacia los números de onda más pequeños, es decir, la energía se transfiere hacia las escalas grandes (cascada inversa de energía). Por otro lado, en el intervalo $k_f < k < k_d$, el espectro se comporta como

$$E(k) \propto \eta^{2/3} k^{-3},$$

donde $\eta$ es la tasa de transferencia de enstrofía. Aquí la enstrofía va hacia los números de onda más grandes, o sea, hacia las escalas pequeñas (cascada directa de enstrofía), donde eventualmente se disipa (Kraichnan, 1967). La combinación de la cascada inversa de energía y de enstrofía se conoce como cascada doble (Tabeling, 2002).

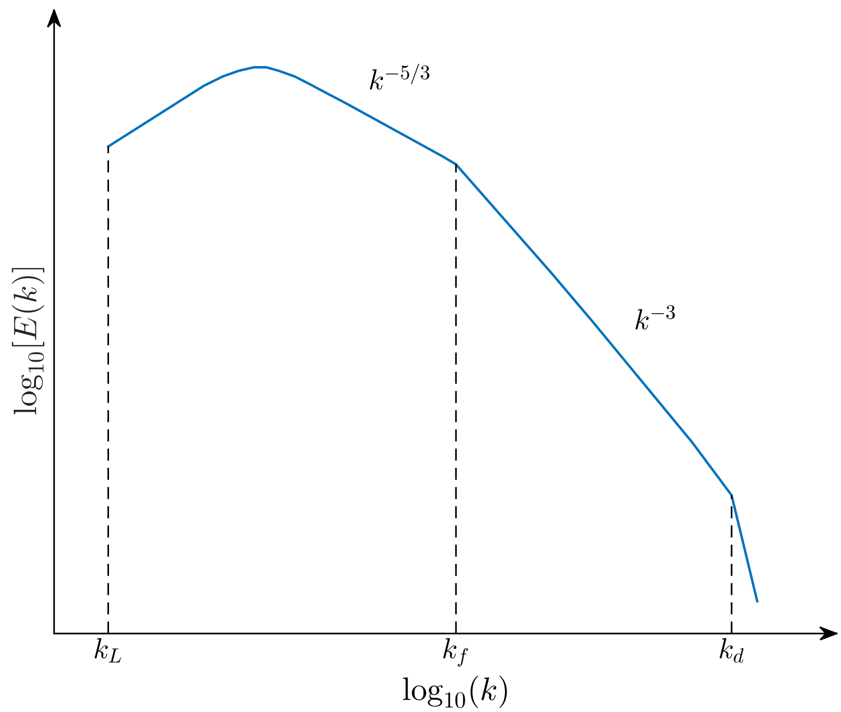


**Figura 1. Representación esquemática del espectro de energía de la turbulencia 2D forzada.**

### 2.2. Dispersión turbulenta

Los procesos de transporte de trazadores pasivos (partículas) o sustancias son dominados por la acción advectiva de fluctuaciones desordenadas espaciales y temporales de la velocidad. Como resultado, el punto de vista Lagrangiano es conceptualmente natural y de utilidad práctica para describir el transporte turbulento (Yeung, 2002). Debido a que el movimiento de las partículas individuales se vuelve impredecible, es necesario adoptar una descripción estadística (LaCasce, 2008b). Esta sección se enfoca en presentar las diferentes medidas estadísticas que se pueden aplicar cuando se cuenta con información Lagrangiana y los aspectos teóricos subyacentes a cada medida.

La estadística Lagrangiana se ocupa de los promedios de posiciones, velocidades y cantidades relacionadas de una nube de trazadores sobre varias realizaciones. La estadística se puede dividir en dos tipos. El primer tipo se enfoca en las partículas individuales, como las escalas Lagrangianas y la dispersión absoluta. Por otro lado, el segundo tipo se calcula a través de pares de partículas: si elegimos al tiempo como la variable independiente podemos calcular la dispersión relativa, la curtosis y las funciones de densidad de probabilidad (PDFs, por sus siglas en inglés) de pares de partículas (LaCasce, 2008a); por el contrario, si tomamos a la distancia como variable independiente calculamos cantidades como los exponentes de Lyapunov de escala finita (Artale *et al.*, 1997). La evolución de las partículas liberadas en el flujo turbulento 2D se estudiará usando ambos tipos de medidas.

### 2.2.1. Escalas Lagrangianas

Sea $u_i(t)$ la velocidad de una partícula en la dirección $i$ advectada por turbulencia 2D homogénea y estacionaria. La función de autocorrelación de la velocidad Lagrangiana se define como (Provenzale, 1999):

$$R_{ii} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\langle \frac{1}{\sigma_i^2} \int_0^T u_i(t) u_i(t+\tau) dt \right\rangle \tag{11}$$

donde $\langle \cdot \rangle$ indica un promedio del conjunto de partículas (ensamble), $\tau$ es un retraso de tiempo (lag), $\sigma_i^2$ es la varianza de la velocidad y $T$ es el periodo sobre el cual se realiza la integración. Una curva típica de autocorrelación se muestra en la Figura 2, la cual tiende a cero para tiempos largos porque la velocidad original de la partícula se decorrelaciona con su velocidad actual; por ello se puede establecer un tiempo en el cual ambas velocidades estén bien correlacionadas (Taylor, 1921). Este se conoce como escala integral de tiempo Lagrangiana y se define como

$$T_i^L = \int_0^\infty R_{ii}(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Se interpreta como el periodo al cual la partícula "recuerda"su trayectoria (Poulain y Niiler, 1989). Por otro lado, la escala espacial Lagrangiana promedio es:

$$L_i = \sigma_i^L \int_0^\infty R_{ii}(\tau) d\tau = \sigma_i^L T_i^L \tag{13}$$

donde la desviación estándar de la velocidad $\sigma_i^L$ se calcula al tiempo $t = T_i^L$ (Zavala Sansón, 2015).

La integral de la autocorrelación que aparece en las definiciones (12) y (13) es dependiente

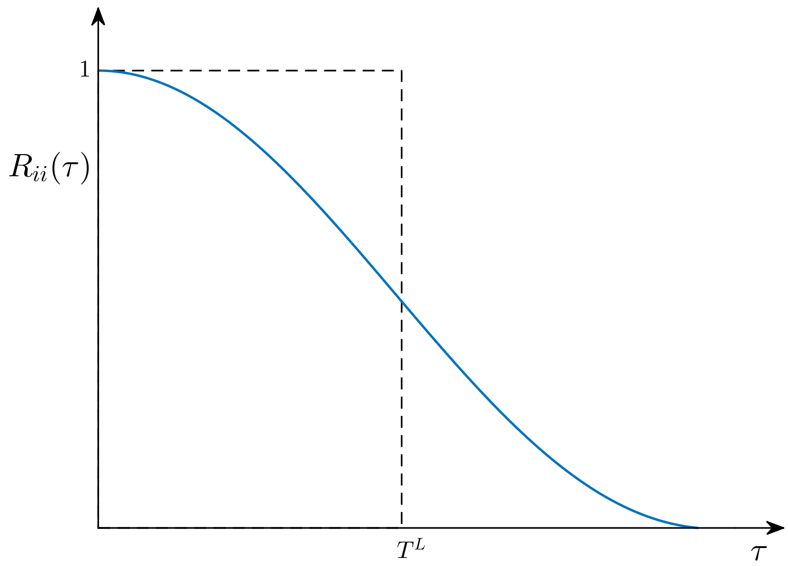


**Figura 2. Relación entre la función de autocorrelación y la escala integral de tiempo. El área del rectángulo de altura 1 y ancho $T^L$ es igual al área bajo la curva $R_{ii}$. Modificada de: Kundu y Cohen (2002).**

del tiempo y usualmente no se aproxima a un límite conforme $\tau$ aumenta. Una práctica común es integrar desde $\tau = 0$ hasta el tiempo del primer cruce de la curva por cero; el valor obtenido es el primer máximo de la escala integral y representa un límite superior (Poulain y Niiler, 1989).

### 2.2.2. Dispersión absoluta

La dispersión absoluta (o de partículas individuales) es la separación cuadrática media de las partículas desde su posición actual a una posición en un tiempo de referencia $t_0$ (cuando son liberadas):

$$\left\langle a_i^2 \right\rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} [x_i^k(t) - x_i^k(t_0)]^2, \tag{14}$$

donde $x_i^k$ es la posición de la partícula $k$ en la dirección $i$ y $N_p$ es el número de partículas del ensamble. Por lo tanto, es una medida promedio de como una partícula se aleja de su posición inicial. La difusión absoluta se define como la evolución temporal de la dispersión:

$$D_i(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle a_i^2 \right\rangle, \tag{15}$$

y mide la rapidez con la que las partículas son dispersadas (Zavala Sansón, 2015).

El comportamiento asintótico para la dispersión absoluta total fue originalmente descrito por Taylor (1921). Para tiempos cortos, $t \ll T^L$, la dispersión es una función cuadrática respecto al tiempo:

$$\left\langle a^2 \right\rangle = 2\left\langle E^L \right\rangle t^2, \tag{16}$$

el cual se denomina régimen balístico y depende de la energía cinética Lagrangiana promedio $\left\langle E^L \right\rangle$. A tiempos largos, $t \gg T^L$, las trayectorias de las partículas son independientes entre sí, análogo a la caminata aleatoria, y la dispersión absoluta es:

$$\left\langle a^2 \right\rangle = 2Dt, \tag{17}$$

donde $D$ es equivalente a un coeficiente de difusión. Este comportamiento se conoce como régimen de difusión estándar (Elhmaïdi *et al.*, 1993; Provenzale, 1999).

### 2.2.3. Dispersión relativa

La dispersión relativa se calcula como la separación cuadrática media entre pares de partículas:

$$\left\langle r_i^2 \right\rangle = \frac{1}{N_{\mathrm{par}}}\sum_{i \neq j}[x_i^p(t) - x_i^q(t)]^2, \tag{18}$$

donde $N_{\mathrm{par}}$ es el número de pares y $x_i^{p,q}$ son los desplazamientos de las partículas $p$ y $q$ a lo largo de la dirección $i$ (Zavala Sansón, 2015). Se trata de una medida de la separación que tienen un par de partículas conforme el tiempo avanza (LaCasce, 2010). Los pares de partículas liberadas en el flujo se separan en tres diferentes etapas o regímenes de dispersión dependiendo de su separación inicial $r_0$ y la escala de forzamiento $r_f$ de la turbulencia 2D. Es decir, existe una conexión entre el espectro de energía de la turbulencia 2D y la dispersión relativa, lo cual permite deducir la variación de dicha dispersión, en las escalas correspondientes al subrango inercial (LaCasce y Olhmann, 2003).

En el subrango inercial de la cascada directa de enstrofía, $r_0 < r_f$, la dispersión relativa es no local porque la separación que sufren las partículas está dominada principalmente por escalas de movimiento más grandes que su separación inicial. En este caso, la dispersión relativa crece exponencialmente con el tiempo :

$$\left\langle r^2 \right\rangle \propto \exp\left(\frac{t}{\tau *}\right). \tag{19}$$

donde $\tau *$ es un tiempo de dispersión característico (Babiano *et al.*, 1990). Este régimen de dispersión se conoce como ley exponencial o de Kraichnan-Lin (Babiano *et al.*, 1990), o bien como régimen de Lundgren (LaCasce, 2010).

Por otro lado, en el subrango inercial de la cascada de energía, $r_0 \geq r_f$, la dispersión se comporta de la siguiente manera:

$$\left\langle r^2 \right\rangle \propto t^3, \tag{20}$$

es decir, crece como una función cúbica del tiempo. Este se denomina régimen de Richardson-Obukhov (Babiano *et al.*, 1990), donde la dispersión es local porque las partículas se dispersan bajo la influencia de escalas comparables a su separación (LaCasce, 2008a).

Finalmente, si la separación que tienen las partículas es mayor a la de los vórtices que contienen energía, $r_0 \gg r_f$, sus velocidades están decorrelacionadas y la dispersión crece linealmente con el tiempo, $\langle r^2 \rangle \propto t$ (Koszalka *et al.*, 2009). Este se conoce como el régimen de Rayleigh (LaCasce, 2010; Beron-Vera y LaCasce, 2016) o de difusión estándar (Zavala Sansón *et al.*, 2017).

### 2.2.4. Funciones de densidad de probabilidad de separación entre pares

En esta sección se describen las PDFs de separaciones relativas $r$, donde la pregunta fundamental por resolver es: dado un par de partículas liberadas a un tiempo $t_0$ con una separación inicial $r_0$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar dicho par separado una distancia $r$ a tiempos subsecuentes? (Scatamacchia *et al.*, 2012). La discusión siguiente fue presentada originalmente por LaCasce (2010) junto con sus referencias citadas. En este trabajo se exponen solo algunos de los resultados más relevantes de este estudio.

Para un flujo turbulento 2D homogéneo, estacionario e isotrópico, las PDFs de las separaciones relativas $P(r,t)$ obedecen la ecuación de Fokker-Planck (Richardson, 1926):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa_2 r \frac{\partial p}{\partial r}\right), \tag{21}$$

donde $\kappa_2$ la difusividad relativa definida como:

$$\kappa_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle r^2 \right\rangle. \tag{22}$$

Primero se determina $\kappa_2$ en función de $r$ y una vez hecho esto es posible resolver la ecuación (21) para encontrar la PDF, dada la condición inicial $P(r,0) = (2\pi r)^{-1}\delta(r - r_0)$.

Para el régimen de Kraichnan-Lin (cascada de enstrofía), $r_0 < r_f$, la difusividad es

$$\kappa_2 = \frac{r^2}{T}, \tag{23}$$

donde $T \propto \eta^{-1/3}$ es una escala de tiempo y $\eta$ es la razón de disipación de enstrofía. La solución asociada a la ec. (21) es

$$P(r,t) = \frac{1}{4\pi^{3/2}(t/T)^{1/2} r_0^2} \exp\left(-\frac{[\ln(r/r_0) + 2t/T]^2}{4t/T}\right). \tag{24}$$

Una vez conocida la distribución, se pueden derivar los momentos estadísticos de la separaciones relativas mediante la ecuación:

$$\langle r^n \rangle = 2\pi \int_0^\infty r^{n+1} P(r,t) dr. \tag{25}$$

De esta forma, el segundo momento estadístico ($n = 2$), o sea la dispersión relativa, es:

$$\left\langle r^2 \right\rangle = r_0^2 \exp\left(\frac{8t}{T}\right). \tag{26}$$

Otra cantidad de interés es la curtosis $K$ o cuarto momento ($n = 4$) normalizado:

$$K(t) = \frac{\langle r^4(t) \rangle}{(\langle r^2(t) \rangle)^2}. \tag{27}$$

Para este régimen, la curtosis crece exponencialmente con el tiempo:

$$K = \exp\left(\frac{8t}{T}\right), \tag{28}$$

al igual que la dispersión relativa; se dice entonces que la PDF (24) no es autosimilar, es decir, las colas de la distribución son cada vez más extendidas conforme el tiempo avanza (i.e. no retiene su forma).

Por otro lado, para el régimen de Richardson-Obukhov (cascada inversa de energía), $r_0 > r_f$, la difusividad viene dada por

$$\kappa_2 = \beta r^{4/3}, \tag{29}$$

donde $\beta \propto \epsilon^{1/3}$, y $\epsilon$ es la razón de disipación de energía. La solución de la ec. (21) correspondiente es

$$P(r,t) = \frac{3}{4\pi\beta t (r_0 r)^{2/3}} I_2\left(\frac{9(r_0 r)^{1/3}}{2\beta t}\right) \exp\left(-\frac{9(r_0^{2/3} + r^{2/3})}{4\beta t}\right), \tag{30}$$

con $I_2$ la función de Bessel de segundo orden. Asimismo, la dispersión relativa asociada es (Graff *et al.*, 2015):

$$\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{5!}{2}\left(\frac{4\beta t}{9}\right)^3 M\left(6, 3, \frac{9r_0^{2/3}}{4\beta t}\right)\exp\left(-\frac{9r_0^{2/3}}{4\beta t}\right), \tag{31}$$

donde $M$ es la función de Kummer. Además la curtosis es:

$$K = 2\frac{\Gamma(9)}{[\Gamma(6)]^2}\exp\left(\frac{9r_0^{2/3}}{4\beta t}\right)\frac{M\left(9, 3, \frac{9r_0^{2/3}}{4\beta t}\right)}{\left[M\left(6, 3, \frac{9r_0^{2/3}}{4\beta t}\right)\right]^2}. \tag{32}$$

En el límite asintótico para tiempos largos, $\langle r^2 \rangle \approx 5.2675\beta^3 t^3$, que expresa el característico comportamiento $t^3$ de la dispersión relativa para este régimen; asimismo, la curtosis es $K = 2\frac{\Gamma(9)}{[\Gamma(6)]^2} = 5.6$, reflejando que la PDF (30) se vuelve autosimilar (Zavala Sansón *et al.*, 2017).

Finalmente para el régimen de Rayleigh, donde las velocidades de los pares no están correlacionadas, la difusividad es constante. Entonces la solución a la ec. (21) es

$$P(r,t) = \frac{1}{4\pi\kappa_2 t}\exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{4\kappa_2 t}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{2\kappa_2 t}\right), \tag{33}$$

donde $I_0$ es la función de Bessel modificada de orden cero. En el límite asintótico de tiempos largos y separaciones grandes, la ec. (33) se reduce a:

$$P(r,t) = \frac{1}{4\pi\kappa_2 t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa_2 t}\right). \tag{34}$$

De esta forma, la dispersión relativa es simplemente:

$$\left\langle r^2 \right\rangle = 4\kappa_2 t. \tag{35}$$

La curtosis tiene un valor constante $K = 2$, indicando que la distribución (34) es autosimilar.

### 2.2.5. Exponentes de Lyapunov de escala finita

Otra medida de dispersión entre pares de partículas son los exponentes de Lyapunov de escala finita (FSLE, por sus siglas en inglés), originalmente presentados por Artale *et al.* (1997) y Aurell *et al.* (1997). La idea principal de esta medida radica en promediar diferentes tiempos a distancias fijas, a diferencia de la estadística anterior, donde se promedian separaciones a tiempos fijos.

El procedimiento para obtener los exponentes consiste en tomar un par de partículas originalmente separadas una distancia $\delta$, y calcular el tiempo $\tau(\delta)$ que tardan en separarse una distancia $\alpha\delta$, asumiendo $\alpha > 1$. Este cálculo se realiza sobre todos los pares disponibles y en un intervalo de separaciones $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$, donde $\delta_0$ puede ser la menor separación inicial de las partículas, y $\delta_n$ está relacionada con el tamaño del dominio. De esta forma, los FSLE se definen como:

$$\lambda(\delta) = \frac{1}{\langle \tau(\delta) \rangle} \log(\alpha) \tag{36}$$

con $\langle \cdot \rangle$ un promedio de los tiempos de separación a cierta distancia $\delta$ o "tiempos de duplicación". En nuestro caso se usa $\alpha = \sqrt{2}$ (Lacorata *et al.*, 2001). Se trata de una medida de la razón promedio de separación de dos partículas (Artale *et al.*, 1997).

El comportamiento de $\lambda$ como una función de $\delta$ define tres diferentes regímenes (Artale *et al.*, 1997; Lacorata *et al.*, 2001). En términos del tamaño típico de los remolinos que contienen energía $r_f$:

1. $\lambda(\delta)$ =constante, para $\delta \ll r_f$
2. $\lambda(\delta) \propto \delta^{-2/3}$, para $\delta \geq r_f$
3. $\lambda(\delta) \propto \delta^{-2}$, para $\delta \gg r_f$

El primer régimen indica que los FSLE son constantes sobre un intervalo de escalas pequeñas; en este caso se tiene un separación exponencial de las partículas. El régimen intermedio es el de Richardson y corresponde al tamaño de los vórtices que contienen la energía.

El último es el régimen de dispersión estándar donde las velocidades de las partículas no están correlacionadas. Podemos esperar un régimen distinto a los anteriores, si la dispersión ocurre en un dominio de tamaño $L$. Para separaciones $\delta$ cercanas $\delta_{\max} \simeq \frac{L}{\sqrt{3}}$, los FSLE son (Artale *et al.*, 1997):

$$\lambda(\delta) \propto \frac{\delta_{\max} - \delta}{\delta}. \tag{37}$$

Esta ecuación define un régimen de saturación en los exponentes y ocurre porque las separaciones entre las partículas son limitadas por las fronteras de un dominio cerrado.

### 2.3. Modelo numérico

Las simulaciones numéricas se llevan a cabo con el programa de fortran `swevol.f`, el cual resuelve por diferencias finitas la ecuación (7). Una vez que la distribución inicial de vorticidad se especifica, la función de corriente se obtiene resolviendo la ecuación (3) mediante una transformada rápida de Fourier combinada con un solucionador (*solver*) tridiagonal; los términos difusivos son discretizados en el espacio por un esquema centrado de segundo orden y los términos advectivos mediante un esquema de Arakawa; la evolución temporal se resuelve usando el método explícito de Runge-Kutta de tercer orden (Orlandi, 1990a). Este modelo numérico fue desarrollado inicialmente por Orlandi y Verzicco para flujos 2D y los detalles más profundos se encuentran en Orlandi (1990b). Posteriormente se le hicieron algunas modificaciones: se ha incluido efectos de rotación (van Geffen, 1998), efectos topográficos y fricción no lineal de Ekman (Zavala Sansón y van Heijst, 2000), biología de nutrientes, fitoplancton y zooplacton (Zavala Sansón y Provenzale, 2009), y más recientemente forzamientos dependientes del tiempo (González Vera y Zavala Sansón, 2015).

La evolución subsecuente del movimiento de cada partícula liberada en el flujo con posición $(x_p, y_p)$ se rige por:

$$\frac{dx_p}{dt} = u(x_p, y_p, t), \tag{38a}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = v(x_p, y_p, t), \tag{38b}$$

con $p = 1, \ldots, N$ y $N$ el número de partículas advectadas en cada experimento. Estas ecuaciones se resuelven en el modelo integrando en el tiempo mediante un esquema de Runge-Kutta de orden 2 con un paso de tiempo dado.

# Capítulo 3. Estadística Lagrangiana

En este Capítulo presentamos las medidas estadísticas de la dispersión de partículas en un flujo turbulento 2D, continuamente forzado y confinado, obtenida a través de simulaciones numéricas. El objetivo es caracterizar la dispersión Lagrangiana en dichas simulaciones haciendo uso de las diferentes métricas y métodos presentados anteriormente. También es necesario verificar la presencia de los regímenes teóricos de dispersión conocidos para un flujo turbulento en un dominio infinito. El Capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 3.1 se describe el flujo turbulento generado en las simulaciones numéricas. La forma de liberar las partículas en el flujo se explica en la sección 3.2. Finalmente, el análisis estadístico de las partículas se presenta en dos partes: la estadística de una sola partícula en la sección 3.3, y la de dos partículas en la sección 3.4.

## 3.1. Características del flujo turbulento

Se realizaron simulaciones numéricas de turbulencia 2D forzada haciendo uso del modelo numérico descrito en la sección 2.3, que resuelve la ec. de vorticidad (7). En este estudio, el forzamiento consiste en una función sinusoidal de la forma:

$$F(x,y,t) = F_0 \underbrace{\sin(kx)\sin(ly)}_{f(x,y)} \underbrace{\exp\left[-(|x|^{20}+|y|^{20})/\delta_F^{20}\right]}_{g(x,y)} \underbrace{[1-\exp(-t/\tau_F)]}_{h(t)}, \qquad (39)$$

con $F_0$ la amplitud del forzamiento, $k = \frac{2\pi m}{L}, l = \frac{2\pi n}{L}$ numéros de onda que determinan la estructura espacial principal $f(x,y)$ y $L$ la longitud del dominio; se incluye también una función $g(x,y)$ de atenuación espacial con escala $\delta_F$ y otra función $h(t)$ de crecimiento temporal con escala $\tau_F$.

Podemos obtener una forma adimensional de la ecuación de vorticidad mediante las siguientes transformaciones:

$$x' = \frac{x}{L},\ y' = \frac{y}{L},\ t' = \frac{U}{L}t, \tag{40}$$

$$\omega' = \frac{L}{U}\omega,\ \psi' = \frac{1}{LU}\psi, \tag{41}$$

donde las variables primadas son adimensionales y $U$ es una escala característica de velocidad del flujo. Haciendo uso de las ecs. (40)-(41), la ec. de vorticidad (7) toma la forma:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} + J(\omega', \psi') = \frac{1}{Re}\nabla^2\omega' - \Pi_1\omega' + \underbrace{\Pi_2 f(x', y')g(x', y')h(t')}_{F(x',y',t')} \tag{42}$$

donde $Re = UL/\nu$ es el número de Reynolds, y $\Pi_1 = rL/U$ y $\Pi_2 = F_0L^2/U^2$ son números adimensionales relacionados con la fricción lineal y el forzamiento, respectivamente. En las simulaciones estos tres parámetros adimensionales caracterizan nuestro problema. Las ecuaciones y las variables mencionadas de aquí en adelante tiene las unidades correspondientes al S.I.

El dominio considerado es un cuadrado de longitud $L = 1$, discretizado con una malla de $513^2$ puntos (por lo que la resolución espacial es $\Delta x = \Delta y = 0.0019$) y un paso temporal $\Delta t = 0.1$. El tiempo final de todas las simulaciones es $t = 5000$. Se consideró una viscosidad del fluido $\nu = 10^{-6}$ y un coeficiente de fricción $r = 1.7 \times 10^{-3}$. Los parámetros del forzamiento, definido en la ec. (39), son $F_0 = 0.17$, $m, n = 20$, $\tau_F = 10$ y $\delta_F = 0.45$. En la Figura 3 se observa que el forzamiento consiste un patrón sinusoidal (tipo tablero de ajedrez) cuya intensidad se atenúa cerca de las paredes. Dicha atenuación se implementó para que las partículas no queden retenidas en las paredes por la influencia del forzamiento. Las condiciones de frontera (C.F.) de las paredes del cuadrado son de no-deslizamiento (i.e. las componentes de la velocidad son nulas en las paredes) y la condición inicial (C.I.) es un campo nulo de vorticidad. Los valores de los parámetros adimensionales son: $Re = u_{\text{rms}}L/\nu = 3574$, donde $u_{\text{rms}} = 3.574 \times 10^{-3}$ es la velocidad cuadrática media del flujo, $\Pi_1 = rL/u_{\text{rms}} = 0.475$ y $\Pi_2 = F_0L^2/u_{\text{rms}}^2 = 4.75657 \times 10^4$.

Inicialmente el fluido está en reposo y su movimiento se acelera conforme aumenta el forzamiento. Posteriormente el forzamiento alcanza un valor estacionario y el movimiento

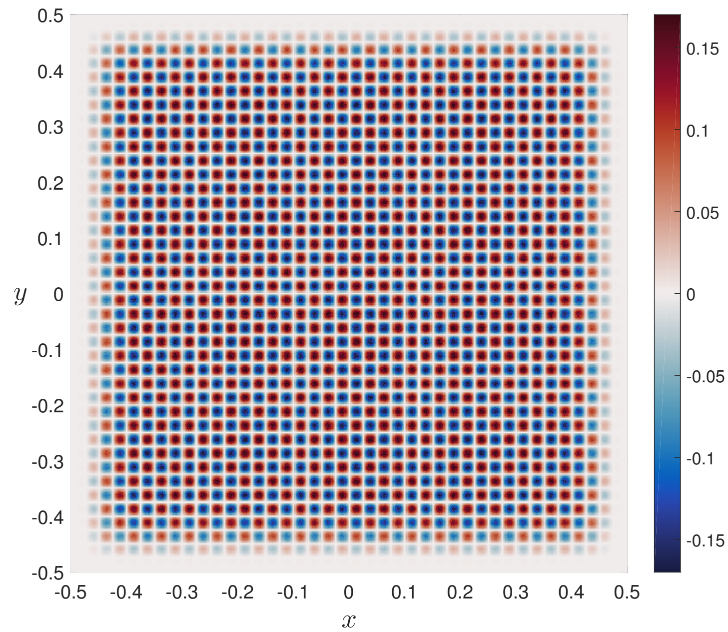


**Figura 3. Gráfica del forzamiento $F(x, y)$. Los parámetros usados son: $F_0 = 0.17$, $m = n = 20$, $L = 1$ y $\delta_F = 0.45$.**

del fluido presenta una configuración turbulenta. Un campo de vorticidad típico del flujo turbulento en el estado estadísticamente estacionario se muestra en la Figura 4. Podemos notar la presencia de vórtices de ambos signos en un flujo que consiste principalmente de filamentos (estructuras alargadas) de vorticidad. Cuando el flujo interactúa con las fronteras se genera vorticidad de signo opuesto, la cual ocasionalmente puede generar filamentos que son advectados lejos de la pared.

Otras cantidades características del flujo son la energía $E$ y la enstrofía $Z$, definidas en las ecs. (9) y (10), cuya evolución temporal se muestra en la Figura 5. Inicialmente ambas cantidades crecen hasta un valor máximo debido a que el forzamiento actúa de forma paulatina. Después alcanzan un estado estadísticamente estacionario, es decir, varían en torno a un valor constante, como se muestra con mayor detalle en los recuadros. En particular, la energía fluctúa alrededor de un valor medio $E = 1.496 \times 10^{-5}$ y la enstrofía alrededor de $Z = 0.128$. Lo anterior permite obtener otras cantidades: la microescala de Taylor es $l = \sqrt{E/Z} = 0.0108$, el tiempo de rotación local es $\tau_Z = 1/\sqrt{2Z} = 1.97$ y el número de Reynolds basado en la energía es $Re = L\sqrt{2E}/\nu = 5469.9$.

La Figura 6 presenta los espectros de energía calculados con los campos de velocidad para diferentes tiempos (indicado con flechas en la Figura 5a). A partir del espectro se determina

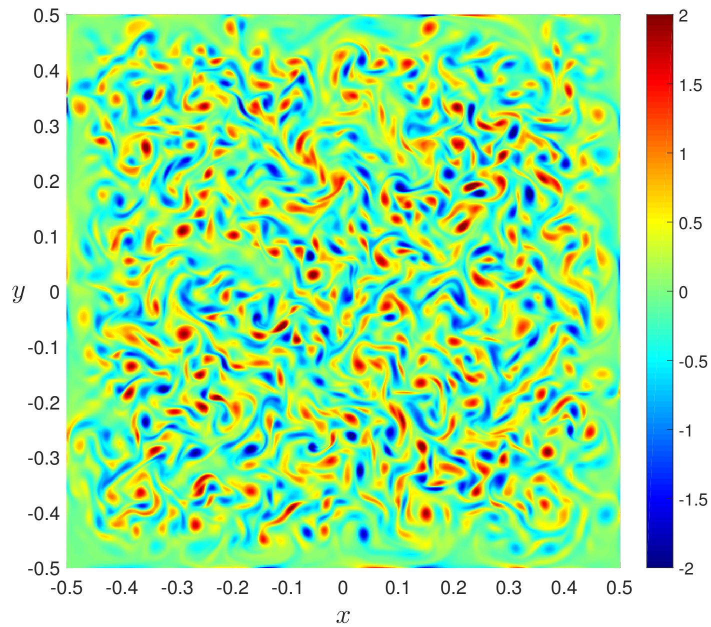


**Figura 4. Campo de vorticidad típico de la simulación de la turbulencia 2D forzada ($Re = 3574$).**

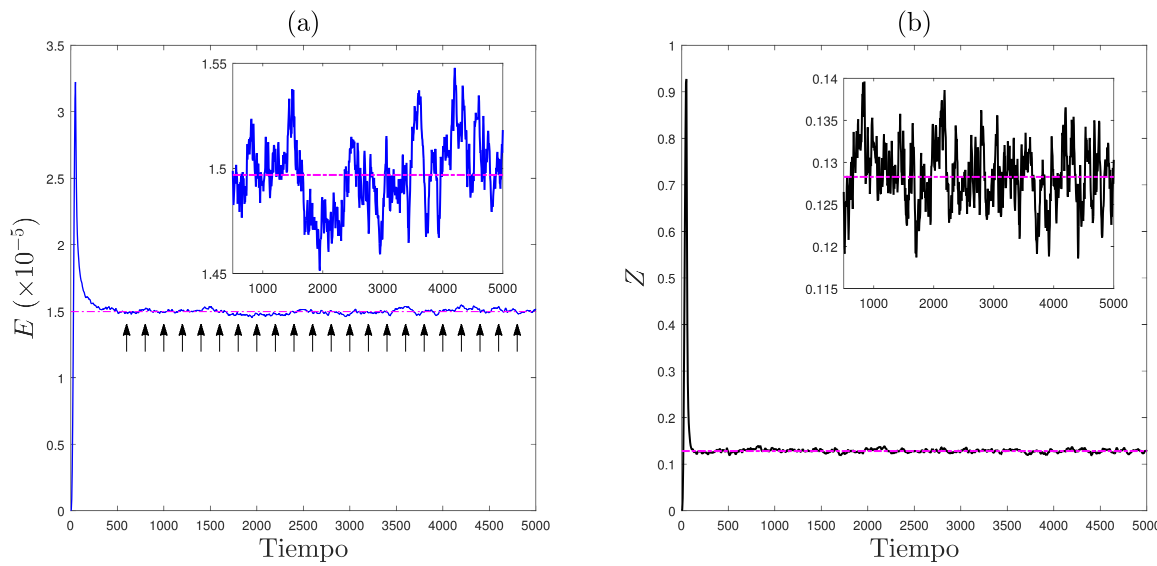


**Figura 5. Evolución temporal de la energía $E$ y enstrofía $Z$ en la simulación numérica. Las líneas punteadas representan un valor promedio $E = 1.496 \times 10^{-5}$ para la energía y $Z = 0.128$ para la enstrofía en el intervalo $500 \leq t \leq 5000$. Las flechas en el panel (a) representan los tiempos a los cuales se tomaron los campos de vorticidad como condición inicial en los experimentos de dispersión. Los recuadros muestran un acercamiento de las variaciones de $E$ y $Z$ respecto al valor promedio.**

el número de onda más energético $k_E = 18.849$ (línea vertical discontinua) y de forzamiento $k_f = 131.946$ (línea vertical continua). Estos dos números permiten a su vez calcular dos escalas útiles: la escala más energética $r_E = 2\pi/k_E = 0.3333$ y la escala de forzamiento $r_f = 2\pi/k_f = 0.04671$. Podemos observar que en el subrango inercial de la cascada inversa

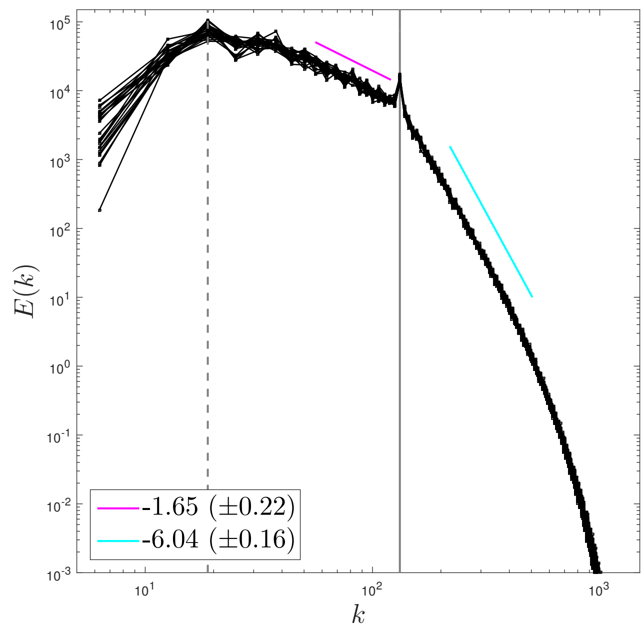


**Figura 6. Espectro de energía Euleriano $E(k)$ vs números de onda $k$. Las líneas verticales continua y discontinua representan los números de onda del forzamiento $k_f$ y el más energético $k_E$, respectivamente. Los valores en el recuadro representan las pendientes $\alpha$ obtenidas de un ajuste de la forma $k^\alpha$ y entre paréntesis el error asociado.**

de energía (números de onda menores a $k_f$, pero mayores a $k_E$), la pendiente es $-1.65$, muy cercana a la predicción de $-5/3$ hecha por Kraichnan (1967). Por otro lado, para números de onda mayores a $k_f$, la pendiente es cerca de $-6$, un valor mayor al teórico de $-3$ predicho para el subrango de la cascada de enstrofía (Kraichnan, 1967).

### 3.2. Experimentos Lagrangianos

El procedimiento para realizar los experimentos de advección de partículas en la turbulencia se describe a continuación. En el régimen estadísticamente estacionario ($E \sim$ const., $Z \sim$ const.) se toman 20 campos de vorticidad diferentes, cada uno separado del otro un lapso de $t = 200$ (flechas de la Figura 5a). Los campos se utilizan como C.I. de vorticidad para correr el modelo nuevamente bajo las mismas condiciones descritas en la sección anterior, excepto que en el forzamiento se omite la función temporal $h(t)$ de la ec. (39) con el fin de garantizar que el estado estadísticamente estacionario se mantenga. La duración de las simulaciones fue de $t = 1000$. De esta manera, se obtienen 20 realizaciones independientes del flujo turbulento.

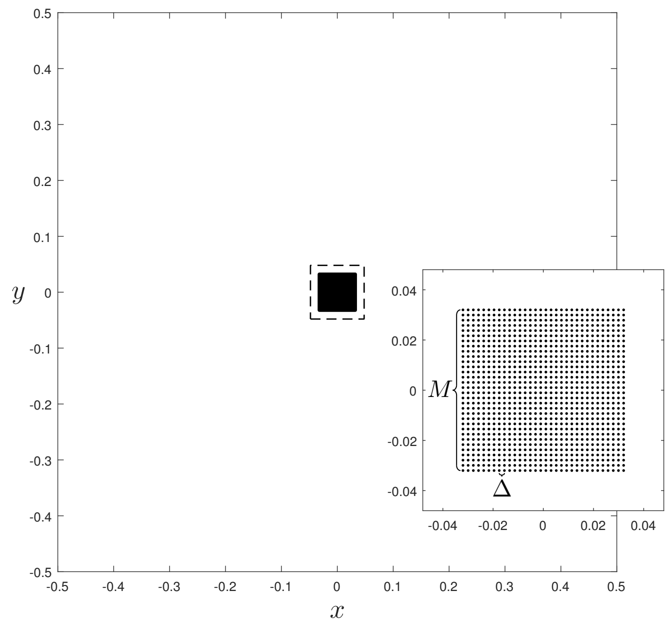


**Figura 7. Arreglo inicial de $M \times M$ partículas separadas una distancia $\Delta$ para los experimentos de dispersión.**

En cada una de las nuevas corridas se liberan $N = 1024$ partículas dispuestas en un arreglo cuadrado de $M \times M$ partículas (con $M = 32$) ubicado en el centro del dominio, todas separadas inicialmente una distancia $\Delta = 0.0021$ (Figura 7). Las posiciones de las partículas son registradas por el modelo cada $5\Delta t$. En consecuencia las medidas estadísticas se calculan en ensambles de un total de $N_p = 20N = 20480$ partículas con resolución temporal de $t = 0.5$.

En la Figura 8 se muestran las trayectorias de partículas advectadas por flujos turbulentos similares al de la Figura 4, provenientes de dos experimentos. En el primero (Figura 8a), las partículas se distribuyen hacia casi todas las direcciones del dominio. Por el contrario, en el segundo (Figura 8b) la mayoría de las partículas tiene una dirección preferencial, específicamente hacia la esquina inferior izquierda del dominio. En ambos casos se puede observar que eventualmente algunas partículas ven limitado su movimiento debido a la presencia de la pared.

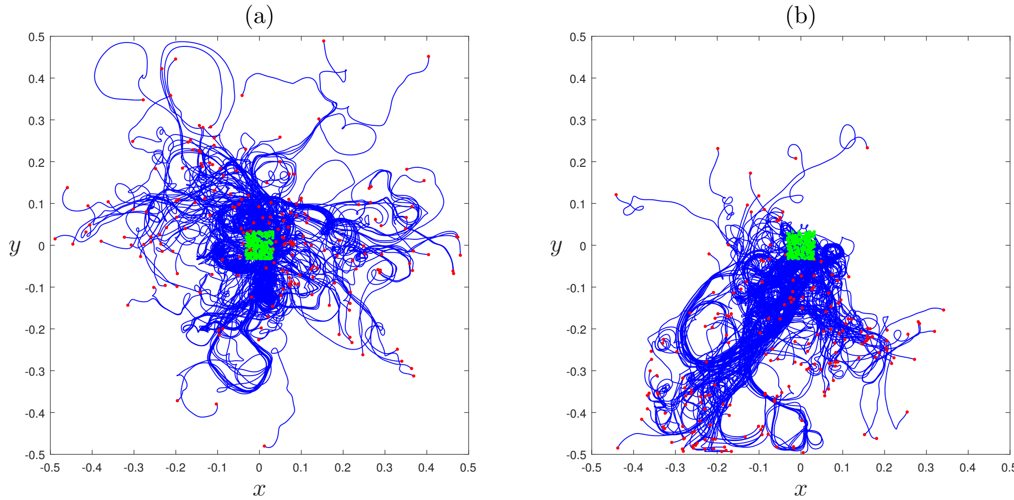


**Figura 8. Trayectorias de 200 partículas hasta un tiempo $t = 100$ para dos diferentes experimentos. Los puntos verdes y rojos representan las posiciones iniciales y finales de las partículas, respectivamente.**

### 3.3. Estadística de partículas individuales

En esta sección se presenta el análisis estadístico de las trayectorias de las partículas obtenidas mediante los experimentos descritos en la sección previa. Es importante decir que en cada uno de los experimentos ocurren distintos escenarios de dispersión, es por ello que calculamos los estadísticos tomando en cuenta 20 simulaciones.

#### Escalas Lagrangianas y dispersión absoluta

Un primer aspecto importante es conocer las escalas Lagrangianas espaciales y temporales. La escala Lagrangiana de tiempo $T_i^L$ en la dirección $i$ se obtiene haciendo uso de la ec. (12); por otro lado, la escala espacial Lagrangiana se obtiene a partir de la ec. (13). La Figura 9a muestra la función de autocorrelación de cada componente de la velocidad; las curvas terminan cuando su valor cruza el cero. La integración de esta función en el tiempo (ec. 12) nos lleva a valores asintóticos que corresponden a las escalas integrales de tiempo; de esta forma, sus valores correspondientes son $T_x^L = 9.028$ y $T_y^L = 9.002$ (Figura 9b). Entonces las escalas espaciales Lagrangianas son $L_x = 0.0413$ y $L_y = 0.0404$. Cabe resaltar que las escalas Lagrangianas para ambas componentes son muy similares, lo que denota el carácter isotrópico de la turbulencia al considerar 20 realizaciones.

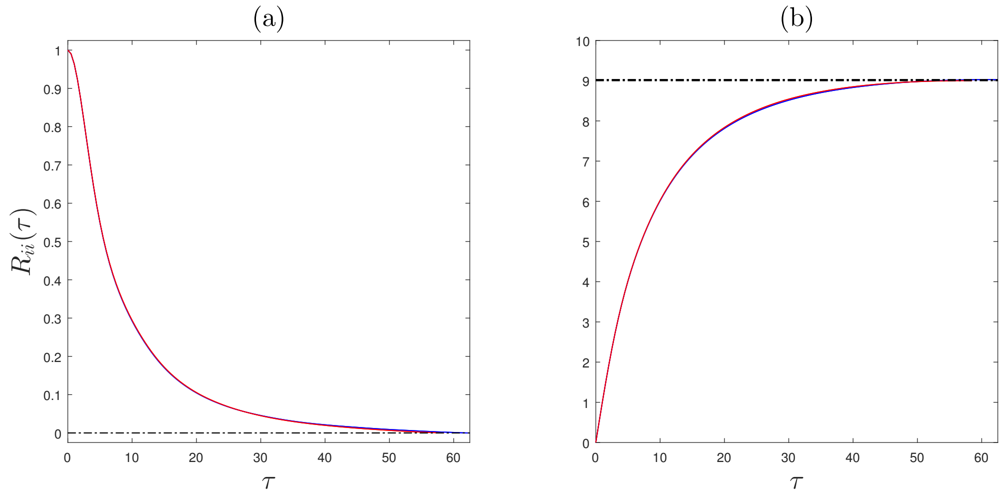


**Figura 9. (a) Función de autocorrelación de la velocidad para la componente $x$ (línea azul) y $y$ (línea roja). (b) Integral de la ec.** (12) **para ambas componentes. Las líneas discontinuas horizontales indican las escalas integrales de tiempo.**

Tenemos que recordar que la escala Lagragiana de tiempo se interpreta como el periodo en el cual la partícula "recuerda" su trayectoria, o sea, el lapso durante el cual su velocidad esta bien correlacionada (Zavala Sansón, 2015). Por lo tanto, cuando transcurre un lapso de $T^L = 9$, la velocidad actual de la partícula ya no está correlacionada con su velocidad original. Visto desde otra perspectiva, tomando en cuenta la escala espacial Lagrangiana, si una partícula se desplaza una distancia mayor a 0.04, entonces ya habrá "olvidado" su posición original. Las escalas integrales representan $\sim 1/100$ del tiempo de simulación total y $\sim 1/25$ del tamaño del dominio. A estas escalas espaciales y temporales, las partículas se encuentran lejos de la pared (en promedio). Por lo tanto no existe influencia de las paredes durante los tiempos iniciales de la dispersión. La escala integral de tiempo también determina un límite para los régimenes de la dispersión absoluta (Provenzale, 1999), la cual se discute a continuación.

Las componentes de la dispersión absoluta, definidas en la ec. (14), se muestran en la Figura 10. Ambas curvas de dispersión siguen un régimen balístico (curva $t^2$) desde $t = 0.5$ hasta $t = 9$. Entre $t = 70$ y 200 , las curvas son aproximadamente lineales, lo cual corresponde al régimen de difusión estándar (curva $t$). Para $t \geq 200$ la dispersión tiende hacia un valor constante como consecuencia del tamaño limitado del dominio. Los resultados muestran que se registran los límites $t^2$ (para $t \leq T^L$) y $t$ (para $t \gg T^L$) descritos por la teoría de Taylor para la dispersión absoluta (Elhmaïdi *et al.*, 1993). Asimismo nos indican que las paredes

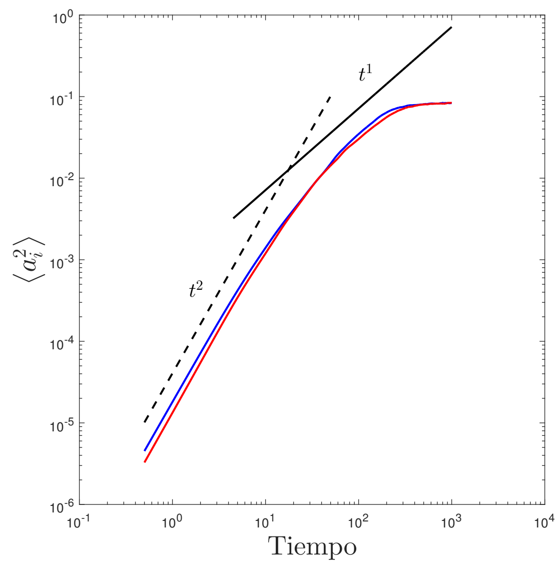


**Figura 10. Dispersión absoluta vs tiempo para la componente $x$ (línea azul) y $y$ (roja).**

influyen en la dispersión desde tiempos cercanos a 150.

### PDFs de velocidades y posiciones

Para finalizar esta sección nos enfocamos en las PDFs de las posiciones y las velocidades de las partículas. En primera instancia hablaremos de las distribuciones de las componentes $u$ y $v$ de la velocidad, las cuales se muestran en la Figura 11. Además se grafica una distribución gaussiana:

$$G(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2\sigma_i^2}\right), \tag{43}$$

con promedio cero y la misma desviación estandar $\sigma_i$ de las velocidades Lagrangianas para cada componente $i$ (Bracco *et al.*, 2000b). Cada componente de la velocidad se normaliza con su desviación estándar correspondiente. Consideramos dos tiempos diferentes, $t = 0.1T_i^L$ y $2T_i^L$, con el fin de dilucidar si las velocidades Lagrangianas son estadísticamente estacionarias e isotrópicas. Se observa que la distribución para ambas velocidades se asemeja muy ligeramente a una distribución gaussiana cuando $t = 0.1T_i^L$ (paneles a y b). La simetría $S$ es cercana a cero para ambas componentes. La curtosis $K$ es 2.4 y 2.8 para la componente $u$ y $v$, respectivamente; estos valores están por debajo de 3, que es la curtosis de una distribución normal. Para corroborar si la PDF es gaussiana, hacemos uso de la prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S). Esta es una prueba cuya hipótesis nula considera que la distribución de una variable no difiere de una distribución normal si la probabilidad K-S $p$ es mayor a un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ (una confiabilidad del 95 %). El valor de $p$ se obtiene a partir de la mayor diferencia entre las funciones de distribución acumuladas de la variable y de una gaussiana. Para nuestras PDF de velocidades ambos valores de $p$ son cercanos a cero, confirmando que dichas distribuciones no son gaussianas. Cuando $t = 2T_i^L$ ocurre algo similar a lo anterior: las simetrías son casi nulas y las curtosis están por debajo de 3. Las distribuciones parecen gaussianas, pero la prueba K-S revela con un valor de $p$ muy pequeño que no lo son. En resumen, las PDFs de las componentes de la velocidad no son gaussianas. Las distribuciones de ambas componentes no son muy diferentes entre sí, corroborando su carácter isotrópico; tampoco tienen variación temporal considerable, indicando un estado de la turbulencia estadísticamente estacionario.

Ahora se discuten las PDFs de las posiciones, mostradas en la Figura 12 junto a una distribución gaussiana de promedio nulo y la desviación estándar de los datos (análoga a la ec. 43); además agregamos otra curva que pertenece a una distribución exponencial:

$$H(x_i) = \frac{1}{2\gamma_i} \exp\left( \frac{-|x_i|}{\gamma_i} \right) \tag{44}$$

con $\gamma_i$ la desviación estándar de la posición $i$ (Bracco *et al.*, 2000b). Previamente a cada registro de las posiciones de las partículas se le ha restado su posición inicial. Las posiciones no se normalizan porque se espera una variación temporal y espacial de las distribuciones; lo anterior es la razón por la que adicionalmente se incluye la distribución (44). Consideramos los mismos tiempos que en las PDFs de velocidades. Para $t = 0.1T_i^L$ (paneles a y b), las distribuciones de ambas componentes tienen simetría negativa pero muy cercana a cero, curtosis menores a 3 y no son gaussianas ($p$ cercana a cero). En $t = 2T_i^L$ las distribuciones son más cercanas a la distribución exponencial si las posiciones están en el intervalo $(-0.1 < x, y < 0.1)$; fuera de ese intervalo la distribución sigue ligeramente a la curva gaussiana (paneles c y d). Los valores de la simetría son negativos para ambas componentes. La curtosis de la distribución de la posición $x$ es 2.98, muy cercano a 3. En ambos casos, la prueba K-S confirma que no están normalmente distribuidas. Resumiendo, en $t = 0.1T_i^L$, las PDFs de

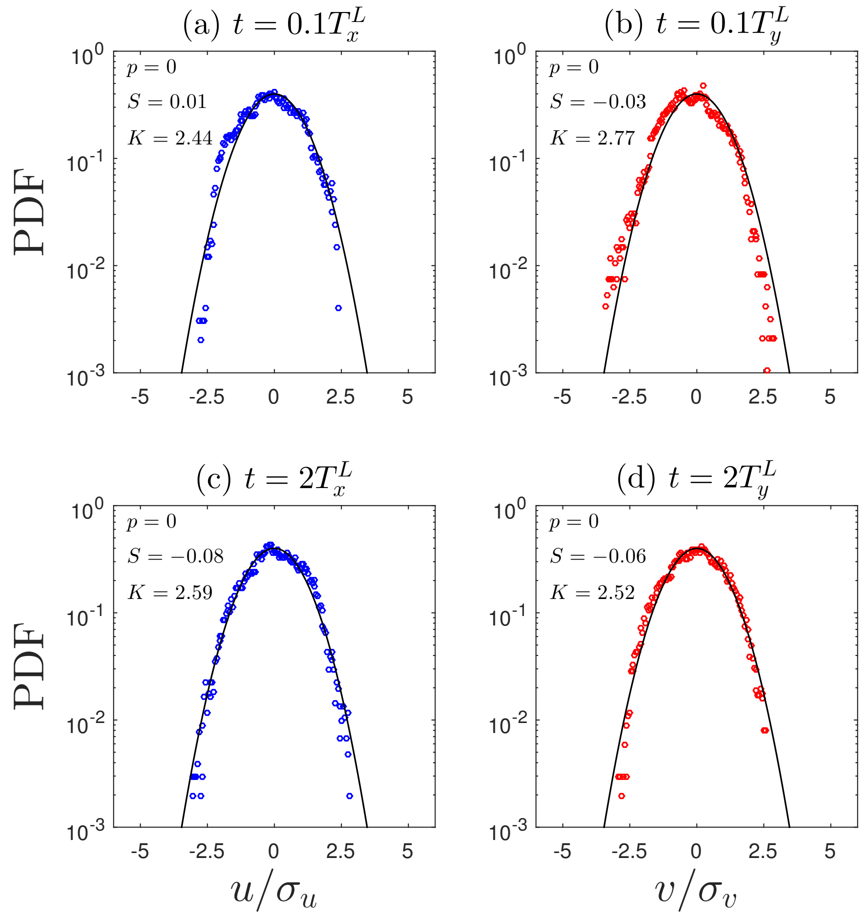


**Figura 11. PDFs normalizadas de las componentes de la velocidad $u$ (a,c) y $v$ (b, d) para los tiempos $t = 0.1T_i^L$ y $t = 2T_i^L$. Los números en el interior corresponden a la probabilidad K-S $p$, la simetría $S$ y la curtosis $K$. La línea sólida indica una distribución gaussiana.**

las posiciones no son gaussianas (comprobado por la prueba K-S), con curtosis $K < 3$ y ligeramente sesgadas. Podemos observar que las partículas comienzan a distribuirse en una región pequeña del dominio ($-0.02 < x, y < 0.02$). Para $t = 2T_i^L$, ocurre algo similar con las PDFs, excepto que se asemejan a una distribución exponencial en posiciones cercanas al cero. Para este tiempo, las partículas ocupan una región más grande del dominio ($-0.25 < x, y < 0.25$), pero todavía se encuentran lejos de las paredes.

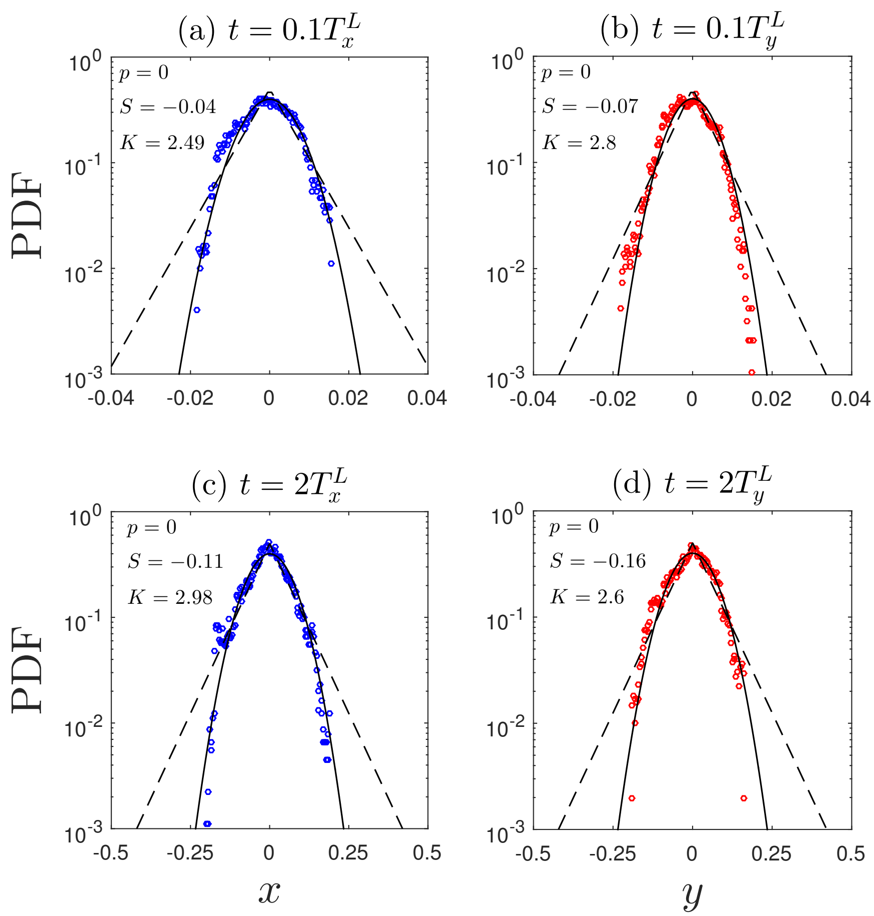


**Figura 12. PDFs de posiciones $x$ (a, b) y $y$ (c, d) para los tiempos $t = 0.1T_i^L$ y $t = 2T_i^L$. Los números en el interior corresponden a la probabilidad K-S $p$, la simetría $S$ y la curtosis $K$. La línea sólida (discontinua) indica una distribución gaussiana (exponencial).**

## 3.4. Estadística de pares de partículas

En la sección anterior se discutió la estadística de las trayectorias individuales de las partículas. Ahora analizaremos la estadística de las separaciones que sufren dos partículas entre sí cuando se desplazan en el flujo turbulento.

### Pares de partículas

En el arreglo inicial, las partículas están inicialmente separadas una distancia $\Delta = 0.0021$ en las direcciones $x$ y $y$. Sin embargo, es posible considerar otras separaciones iniciales; por ejemplo, los múltiplos de esa distancia. Como consecuencia, al calcular las estadísticas de las separaciones relativas, se consideran diferentes separaciones iniciales $r_0 = i\Delta$, con $i = 1, 2, 4, 7, 14, 21, 30$ (Figura 13). Esto nos permite definir la estadística para distintos valores

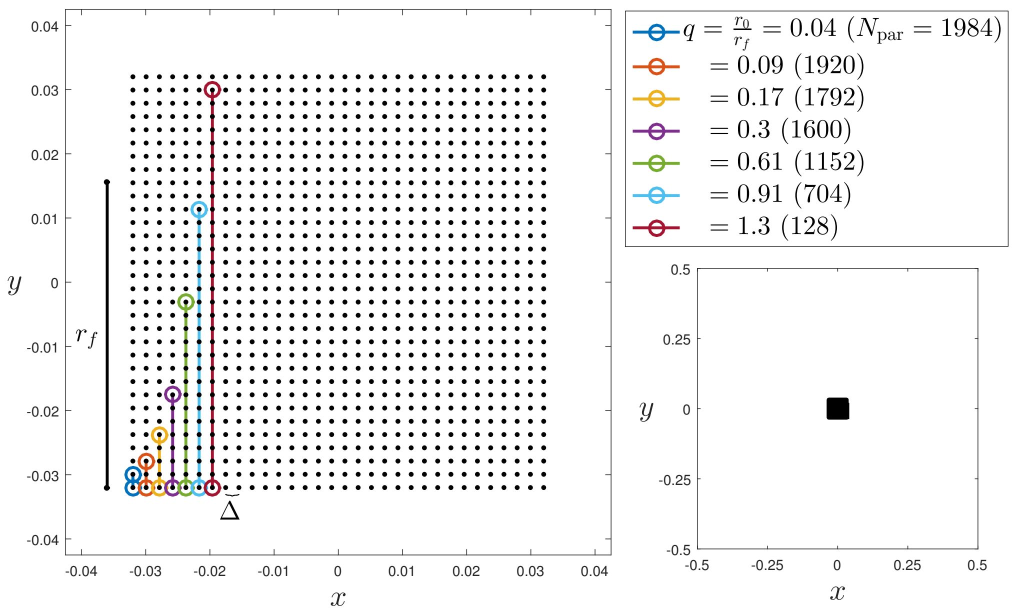


**Figura 13. Arreglo inicial de $32 \times 32$ partículas. Las líneas verticales indican la separación $r_0 = i\Delta$ ($i = 1, 2, 4, 7, 14, 21, 30$) que tienen dos partículas en el arreglo (encerradas en círculos). Se muestra también los valores de $q = r_0/r_f$ y entre paréntesis el número de pares correspondientes $N_{\text{par}}$.**

de la separación inicial normalizada con la escala de forzamiento, $q = r_0/r_f = i\Delta/r_f$. El número de pares disponibles en cada caso se obtiene a partir de la fórmula $N_{\text{par}} = 2M(M-i)$, donde $M = 32$ (recuadro en la Figura 13). El número total de pares usados para calcular las estadísticas es $20N_{\text{par}}$, ya que se consideran las 20 realizaciones independientes.

## Correlación e isotropía

En primera instancia es necesario determinar las separaciones a las que el movimiento de los pares de partículas está correlacionado. Para lograrlo hacemos uso de la correlación de las velocidades Lagrangianas, definida como:

$$R_{pq} = \frac{\langle \mathbf{u}^p \cdot \mathbf{u}^q \rangle_{p \neq q}}{2v^2} \tag{45}$$

donde $\langle\rangle$ representa un promedio sobre los pares disponibles, $v^2$ es la velocidad cuadrática media de las partículas $p$ y $q$, y $\mathbf{u}^p$ y $\mathbf{u}^q$ son sus velocidades individuales (Graff *et al.*, 2015). Esta función indica que tan bien correlacionadas están las velocidades de los pares de partículas conforme su separación promedio aumenta. Si los pares están apartados una

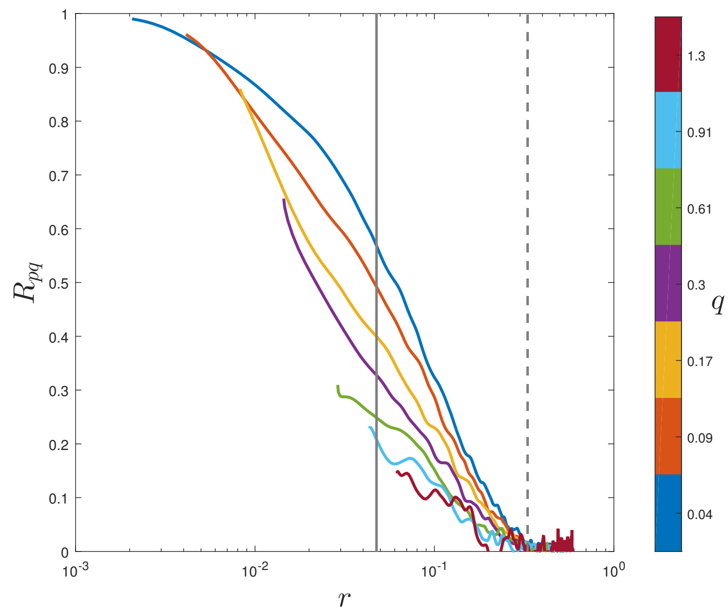


**Figura 14. Correlación normalizada de la velocidad de pares de partículas para varios $q = r_0/r_f$. La líneas verticales continua (discontinua) indica la escala de forzamiento $r_f$ (escala más energética $r_E$).**

distancia muy pequeña, se espera que la correlación sea alta; por el contrario, si la separación de los pares es grande, entonces la correlación entre las velocidades es baja; en ese punto, las partículas se han "olvidado" entre ellas.

La Figura 14 muestra que el movimiento de las partículas está bien correlacionado por debajo de $r = 10^{-2}$ para $0.04 \leq q \leq 0.17$, esto es, cuando las separaciones son pequeñas. Cuando las curvas se intersectan con la escala de forzamiento $r_f$, la correlación varía entre 0.4 y 0.55. Por el contrario para $q \geq 0.3$, la correlación de las velocidades es baja ($< 0.35$). Por encima de $r = 0.1$ el movimiento está decorrelacionado. En el momento que las curvas sobrepasan la escala más energética $r_E$, la correlación de las velocidades es prácticamente nula.

Otra cantidad importante es la isotropía de la dispersión, un requisito para comparar con las soluciones teóricas de la sección 2.2.4. Una manera de medir la isotropía es calculando la razón entre las componentes $x$ y $y$ de la dispersión relativa (definidas en la ec. 18), o sea $\langle r_x^2(t) \rangle / \langle r_y^2(t) \rangle$ (Morel y Larcheveque, 1974), tal como se muestra en la Figura 15. Entre $t = 0.5 - 50$, la isotropía fluctua ligeramente alrededor de 1 ($\pm 0.1$) para los distintos valores de $q$. Después de $t = 100$ se alcanza un valor máximo de isotropía, es decir, se da la mayor diferencia entre las componentes de la dispersión (entre 1.1 y 1.2). Para $t > 400$, la isotropía

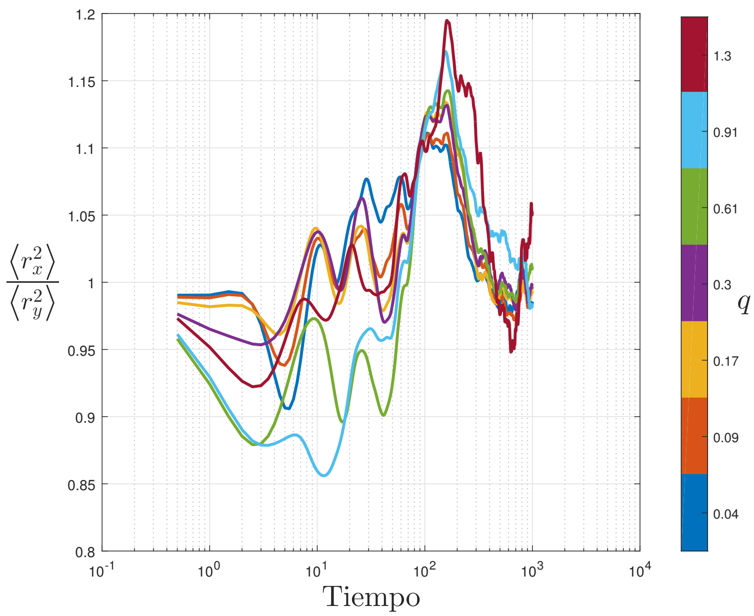


**Figura 15. Isotropía de la dispersión $\left\langle r_x^2(t) \right\rangle / \left\langle r_y^2(t) \right\rangle$ para distintos valores de $q = r_0/r_f$.**

para los diferentes valores de $q$ retoma valores cercanos a 1. Esto último se debe al tamaño limitado del dominio, las partículas ocupan la mayor parte del mismo y hacen que la dispersión sea similar en ambas direcciones. En términos generales se puede decir que la dispersión exhibe un comportamiento isotrópico, ya que ninguna de las componentes de la dispersión excede a la otra por más de un 20 % de su magnitud.

## Dispersión relativa

La evolución temporal de la dispersión relativa total para varias separaciones iniciales se muestra en la Figura 16. Inicialmente, cuando $0.5 < t < 10$, las curvas de dispersión para los diferentes valores de $q$ presentan una etapa de crecimiento exponencial correspondiente a un régimen de Kraichnan-Lin. Después el crecimiento de la dispersión conforme a la curva $t^3$ es evidente para $q = 0.04$ y $0.09$ (separaciones iniciales $r_0$ pequeñas), lo que revela la presencia del régimen de Richardson-Obukhov. Sin embargo, cuando el valor de $q$ aumenta (o sea $r_0$ ya no es pequeña), el crecimiento de la dispersión entre $r_f$ y $r_E$ es menor que $t^3$, llegando inclusive a crecer como $t^1$ (caso $q = 1.3$). Por encima de $r_f$, las curvas de dispersión convergen hacia un comportamiento muy parecido al descrito por la curva $t$, la dispersión crece linealmente con el tiempo, indicando un régimen de Rayleigh o de difusión estándar. El

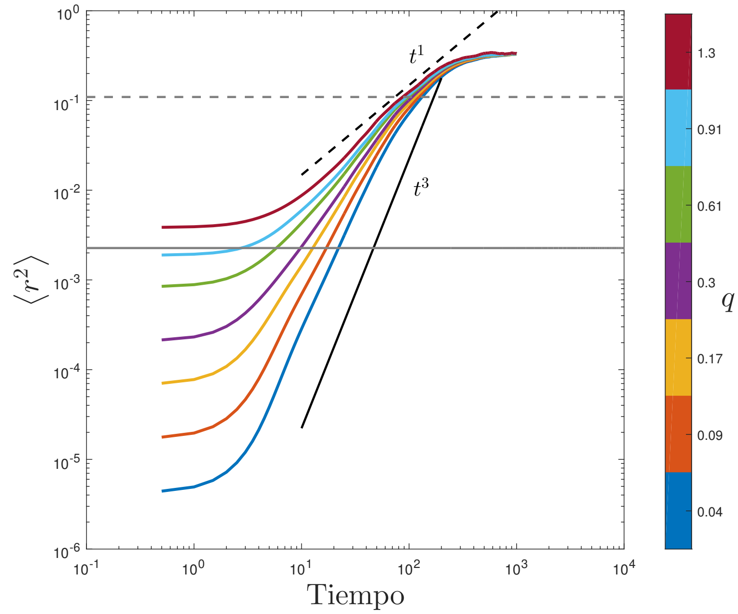


**Figura 16. Dispersión relativa $\langle r^2 \rangle$ vs tiempo para varios $q = r_0/r_f$. La líneas horizontales continua y discontinua indican las escalas de forzamiento $r_f$ y más energética $r_E$, respectivamente.**

crecimiento lineal se ve limitado por el tamaño del dominio, haciendo que la dispersión para los distintos $q$ tienda hacia un valor constante.

Las curvas de dispersión sugieren la existencia de los regímenes de dispersión de la turbulencia 2D; sin embargo es necesario más información al respecto. Otra forma para distinguir dichos regímenes consiste en analizar las PDFs de separación entre pares y observar las coincidencias que existan entre las curvas de las PDFs teóricas y las calculadas con los datos. Para construir las PDFs teóricas de Kraichnan-Lin, Richardson-Obukhov y Rayleigh (ecs. 24, 30 y 33), son necesarios la dispersión relativa escogida a un tiempo $\langle r^2(t_a) \rangle$, la separación inicial $r_0$ y un parámetro para cada distribución: $T$, $\beta$ y $\kappa_2$, obtenidos a partir de las dispersiones relativas teóricas, ecs. (26), (31) y (35), respectivamente. Para la distribución de Kraichnan-Lin, $T = 8t_a/\ln[\langle r^2(t_a) \rangle / r_0^2]$, y para la de Rayleigh, $\kappa_2 = \langle r^2(t_a) \rangle / 4t_a$. Para el modelo de Richardson-Obukhov, $\beta$ se calcula numéricamente escogiendo varios valores de este parámetro hasta que la dispersión dada por la ec. (31) coincida con la dispersión de los datos en $t_a$; se pueden considerar valores en torno a $\beta = 27r_0^{2/3}/20t_a$ (Graff *et al.*, 2015; Zavala Sansón *et al.*, 2017).

Las PDFs de los datos y teóricas a distintos tiempos para $q = 0.04$ se muestran en la Figura 17. Se aplica la prueba K-S a un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$, tal como se hizo en la sección previa, pero ahora con el fin de determinar si las distribuciones teórica y observada no difieren significativamente. Muy cerca del inicio, $t = 5$ (panel a), el comportamiento de las PDFs de los datos es muy similar a la de la curva de Kraichnan-Lin y así lo revela la prueba K-S con $p = 0.22$. En $t = 15$, la distribución todavia se parece a la PDF de Kraichnan-Lin ($p = 0.43$), sugiriendo que este régimen persiste por lo menos hasta este tiempo. Cuando $t = 50$ (panel c), ninguna de las PDFs teóricas parece representar a la de los datos para las distintas separaciones $r$. La prueba K-S con $p = 0.43$ sugiere que la distribución de los datos es similar a la curva de Richardson-Obukhov; sin embargo, podemos observar que se asemejan únicamente para separaciones $r > 0.1$. El comportamiento de la PDF de los datos es más parecido a una distribución exponencial. Finalmente, en $t = 200$ (panel d), adquiere una forma bastante similar a la distribución de Rayleigh ($p = 0.85$). En resumen, para $q = 0.04$, o sea una separación inicial pequeña, se presentan claramente los regímenes de Kraichnan-Lin y de Rayleigh, mientras que no fue así para el régimen de Richardson-Obukhov.

En la Figura 18 presentamos otra comparación entre PDFs provenientes de los datos y las distribuciones teóricas, esta vez para $q = 0.3$, una separación inicial menos pequeña. Para $t = 1.5$ (panel a), la distribución de los datos es muy cercana a las PDFs de Kraichnan-Lin ($p = 0.39$) y Richardson-Obukhov ($p = 0.28$). Por otro lado, cuando $t = 10$ (panel b), la curva de Richardson-Obukhov representa adecuadamente a la PDF de los datos para las distintas separaciones ($p = 0.39$). Despues, en $t = 30$ (panel c), la distribución de los datos adquiere una forma que no se asemeja a ninguna de las curvas teóricas. Se trata de una transición hacia la curva de Rayleigh, lo que ocurre hasta $t = 100$ (panel d) cuando son similares ($p = 0.93$).

El presente valor de $q$ significa una separación inicial mayor a la del caso anterior. De ahí que existan algunas diferencias entre las PDFs de ambos casos. Una de ellas tiene que ver con la presencia del régimen de Kraichnan-Lin; la distribución se presenta claramente cuando las separaciones iniciales son pequeñas (como en el caso anterior); a diferencia del caso actual donde las separaciones iniciales son más grandes. El régimen de Rayleigh se alcanzó a un tiempo menor en comparación al caso previo. Si la separación inicial entre los pares es grande entonces podemos esperar que la difusión estándar se alcance más rápidamente. Finalmente, lo más destacado es la presencia del régimen de Richardson-Obukhov en las PDFs de los datos, en contraste con el caso anterior, donde estuvo ausente, y en su lugar la distribución de los datos fue exponencial.

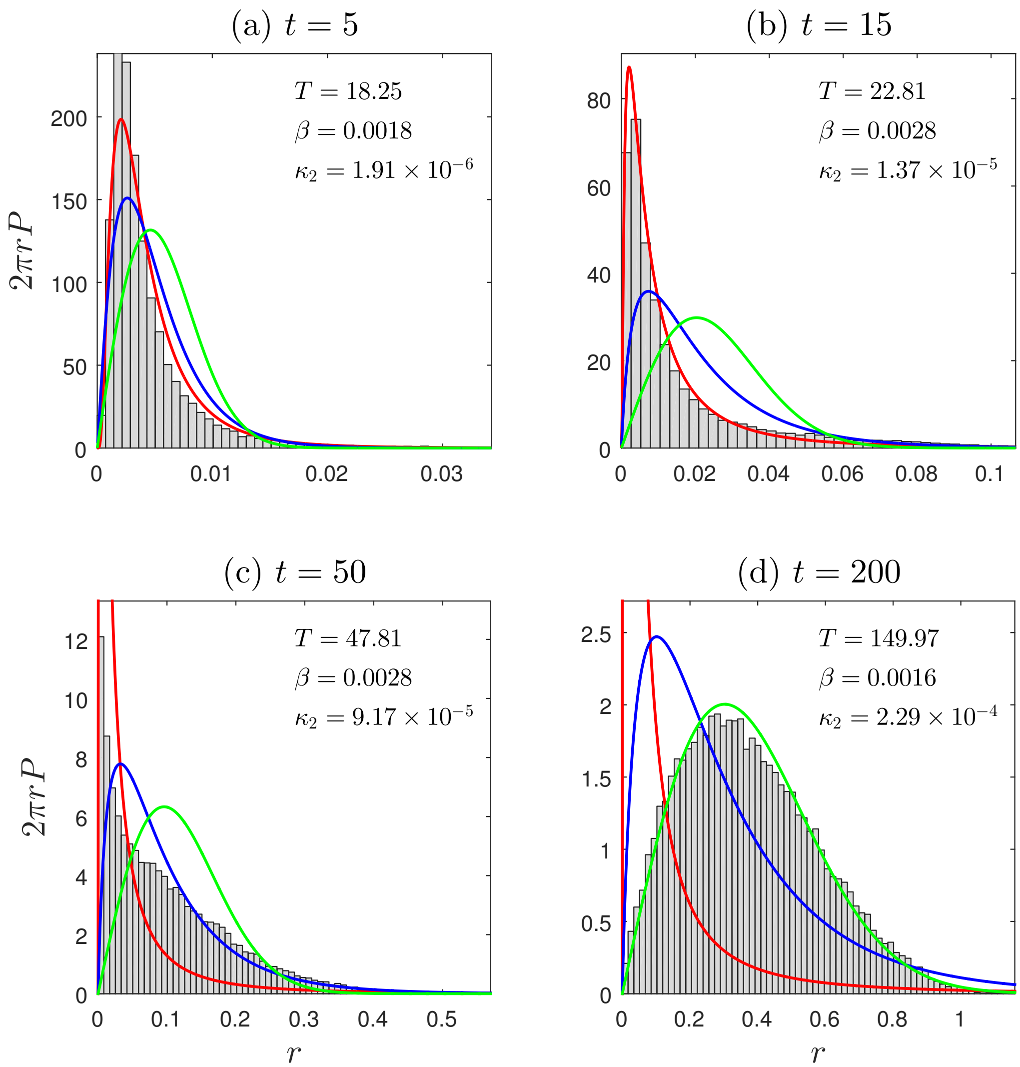


**Figura 17. PDF de separación entre pares $r$ para $q = 0.04$. Las barras indican las PDF de los datos a tiempos fijos $t_a$. Las líneas continuas representan las PDF teóricas de Kraichnan-Lin (roja), Richardson-Obukhov (azul) y Rayleigh (verde) construidas a partir de los parámetros $T$, $\beta$ y $\kappa_2$ mostrados.**

La curtosis $K$ representa el cuarto momento estadístico de una PDF (Figura 19) y nos brinda información sobre la forma y las alas de la distribución. Para $q = 0.04$ la curtosis crece rápidamente en forma exponencial (como ocurre en el régimen de Kraichnan-Lin) hasta alcanzar un máximo de 13 cerca de $t = 5$. Algo similar ocurre cuando $q = 0.09$, excepto que el valor máximo que alcanza es $K \sim 6.5$. En ambos casos la curtosis sobrepasa 5.6, el valor asintótico que representa al régimen de Richardson-Obukhov (línea horizontal discontinua). Para valores de $q \geq 0.17$ la curtosis no crece por encima de 4, pero tiende más facilmente a 2, el límite asintótico del régimen de Rayleigh (línea horizontal continua). Para $t > 100$ las curvas tienden hacia un valor común de curtosis por debajo de 2.

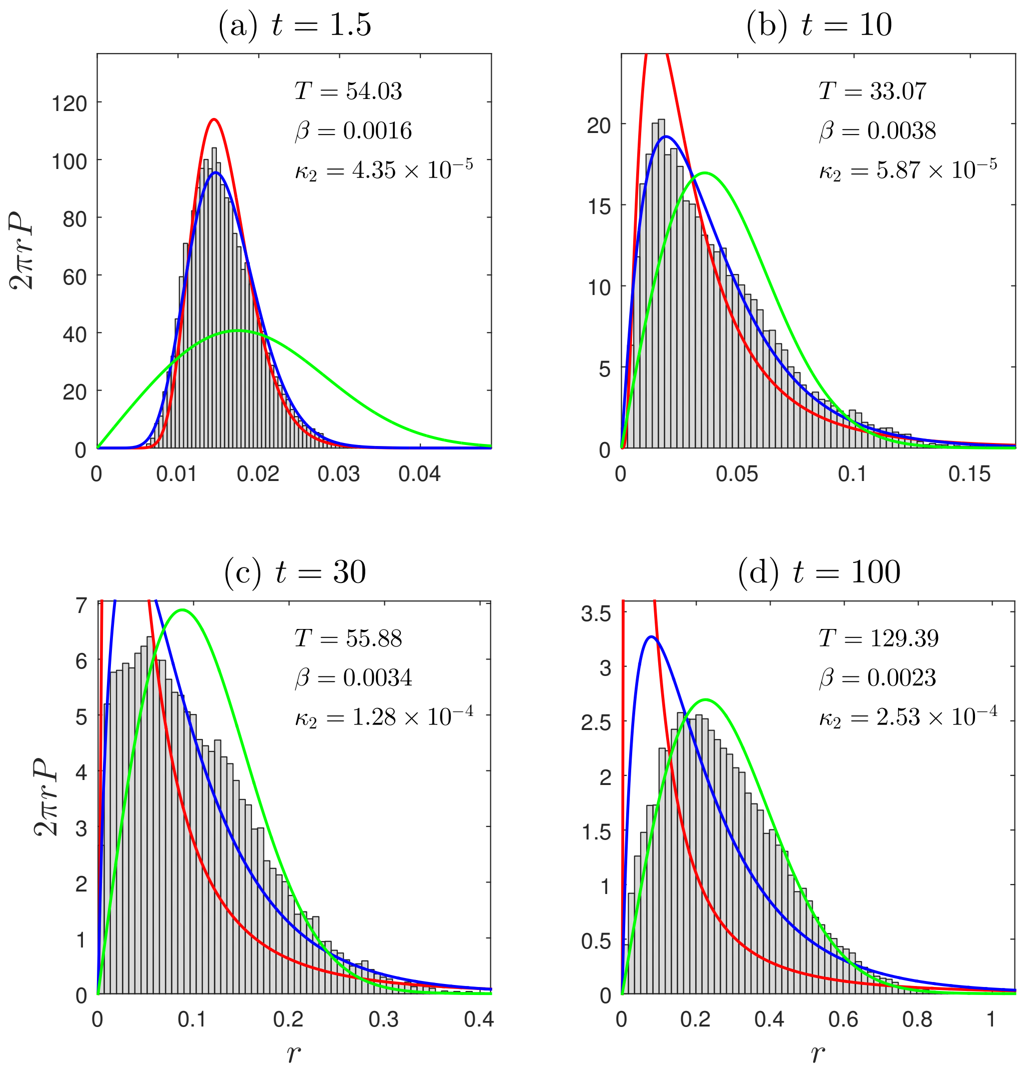


**Figura 18. PDF de separación entre pares $r$ para $q = 0.3$. Las barras indican las PDF de los datos a tiempos fijos $t_a$. Las líneas continuas representan las PDF teóricas de Kraichnan-Lin (roja), Richardson-Obukhov (azul) y Rayleigh (verde) construidas a partir de los parámetros $T$, $\beta$ y $\kappa_2$ mostrados.**

## Funciones de estructura de segundo orden

Además de analizar las separaciones entre dos partículas, también es importante examinar la diferencia de sus velocidades en función de su separación. La varianza de esta diferencia se conoce como función de estructura de segundo orden $S_{2i}$ y se define como:

$$S_{2i} = \left\langle (u_i^p - u_i^q)^2 \right\rangle = 2\upsilon^2 - 2 \left\langle u_i^p u_i^q \right\rangle , \tag{46}$$

donde $\langle\rangle$ es un promedio sobre los pares, $\upsilon^2$ es la velocidad cuadrática media de las partículas

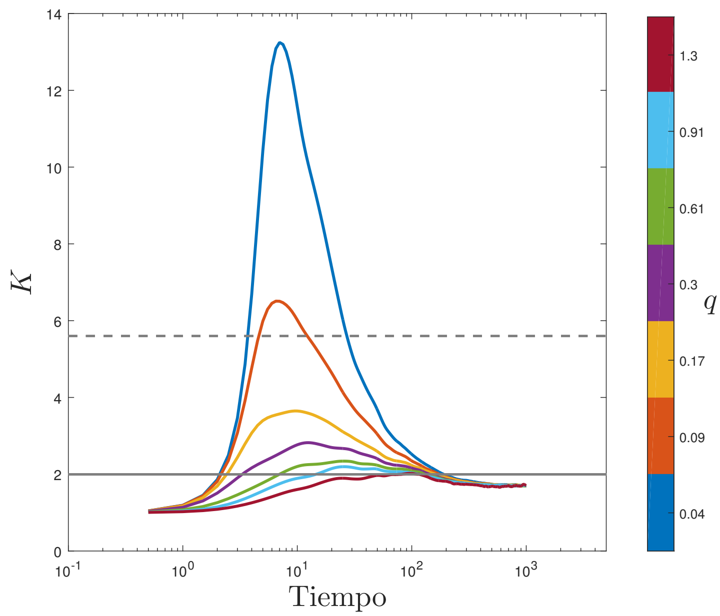


**Figura 19. Curtosis $K$ vs tiempo para distintos valores $q_0 = r_0/r_f$. Las líneas horizontales indican el valor asintótico de la curtosis para el régimen de Richardson-Obukhov $K = 5.6$ (línea horizontal discontinua) y para el de Rayleigh $K = 2$ (línea horizontal continua).**

$p$ y $q$ y $u_i^p$ y $u_i^q$ son sus correspondientes velocidades en la dirección $i$. La ec. (46) nos permite establecer una relación con la ec. (45). Si las velocidades no están correlacionadas, la función de estructura es únicamente el doble de la velocidad cuadrática media de las partículas. Por otro lado, si las velocidades están correlacionadas, la función tiene un valor mucho menor (LaCasce, 2008a). En el régimen de Kraichnan-Lin, la función de estructura de segundo orden total $S_2$ exhibe el siguiente comportamiento conforme a la separación $r$ (Bennett, 1984):

$$S_2(r) \propto r^2. \tag{47}$$

Por otro lado, para el régimen de Richardson-Obukhov, la función es:

$$S_2(r) \propto r^{2/3}. \tag{48}$$

Finalmente, para el régimen de Rayleigh, $S_2$ es constante con respecto a la separación (Beron-Vera y LaCasce, 2016).

En la Figura 20 se muestra la función de estructura total para distintos valores de $q$;

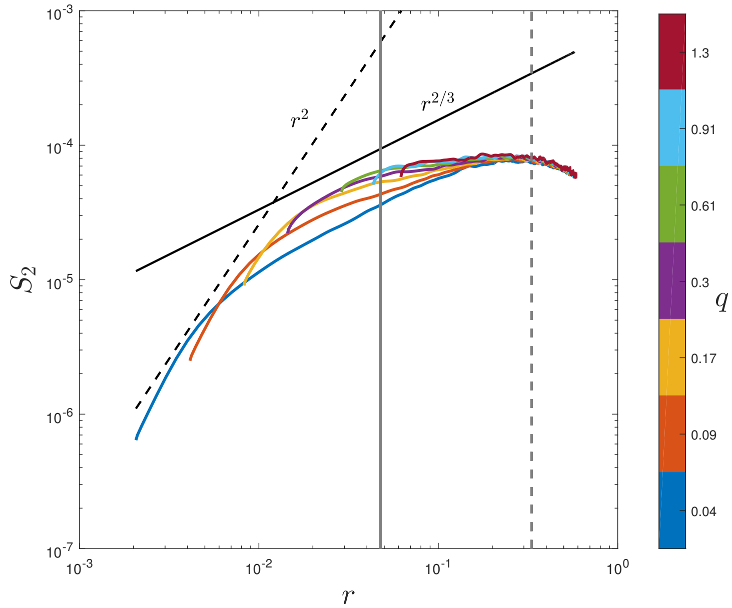


**Figura 20. Funciones de estructura de segundo orden $S_2$ vs la separación entre pares $r$ para distintos valores de $q = r_0/r_f$. Las líneas verticales continua y discontinua representan la escala de forzamiento $r_f$ y más energética $r_E$, respectivamente.**

además, se grafican las líneas que reprentan las ecs. (47) y (48). Para separaciones $r < 0.015$ y los casos $q = 0.04$ y 0.09, las funciones $S_2$ exhiben cierta similitud con la curva $r^2$. Por otro lado, solamente para $q = 0.04$, y en el intervalo $0.007 < r < 0.15$, la función crece de la forma $r^{2/3}$, como lo indica la ec. (48) para el régimen de Richardson-Obukhov. En ese intervalo, las curvas para $q = 0.09 - 0.3$ crecen conforme a la separación con una pendiente menor a 2/3. Las funciones $S_2$ para $q > 0.61$ solo adquieren un valor constante por encima de la escala de forzamiento $r_f$. De manera general, las curvas adquieren un valor constante después de $r = 0.15$, como se espera para el régimen de Rayleigh. Por otro lado, cuando sobrepasan la escala más energética $r_E$, tienden a disminuir ligeramente su valor.

## Exponentes de Lyapunov de escala finita

Para terminar el capítulo discutimos los FSLE $\lambda$, presentados en la subsección 2.2.5. Tenemos que recordar que ahora consideramos a la separación entre los pares como una variable independiente y en su lugar promediamos los tiempos a los que se da cierta separación $\delta$. Las curvas correspondientes a los FSLE se muestran en la Figura 21 y se calcularon para un tamaño de bin de 0.0015. Para valores de $\delta$ pequeños ($\delta < 0.03$), podemos observar que

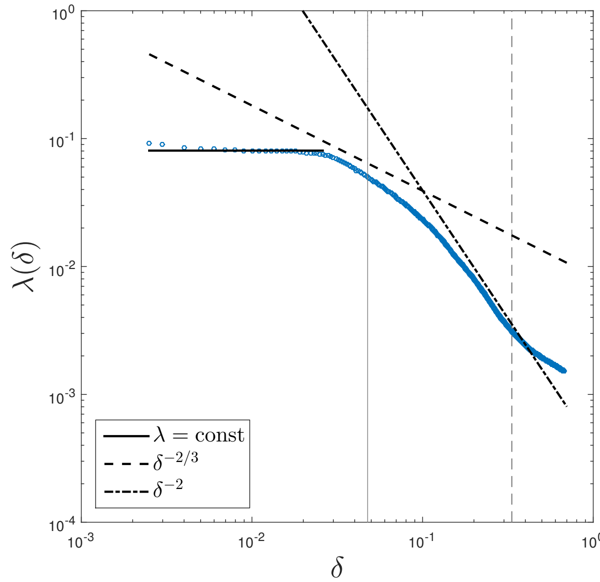


**Figura 21. Exponentes finitos de Lyapunov (FSLE) vs separaciones $\delta$. Las líneas verticales continua y discontinua representan la escala de forzamiento $r_f$ y más energética $r_E$, respectivamente.**

los exponentes toman un valor constante, lo cual caracteriza al régimen exponencial. Los exponentes presentan cierta similitud con la curva $\delta^{-2/3}$ del régimen de Richardson en las separaciones cercanas a $r_f$. En su lugar crecen en función de $\delta$ con una pendiente menor a $-2/3$. En el intervalo de separaciones $0.15 < \delta < r_E$, los exponentes se comportan de manera similar a la curva $\delta^{-2}$, por lo que se identifica al régimen de difusión estándar.

# Capítulo 4. Estadísticas Lagrangianas en un dominio finito

En el presente Capítulo se estudia los efectos del tamaño del dominio sobre la estadística Lagrangiana de partículas en un flujo turbulento 2D continuamente forzado. La finalidad es mostrar la influencia del confinamiento del fluido en la dispersión Lagrangiana. Para lograr lo anterior se utilizan las medidas estadísticas y métodos descritos en el Capítulo 2. En la sección 4.1 se describe el procedimiento para analizar el impacto del confinamiento. Después, la estadística de partículas individuales y de pares de partículas se presenta en la secciones 4.2 y 4.3, respectivamente.

## 4.1. Planteamiento del problema

Se analiza sistemáticamente la dispersión turbulenta sobre dominios de diferente tamaño con el propósito de determinar la influencia del confinamiento. Se considera el dominio original presentado en la sección 3.1: un cuadrado de longitud $L = 1$; adicionalmente, se consideran dos cuadrados cuyas longitudes son la mitad ($L = 0.5$) y la cuarta parte ($L = 0.25$) de la longitud del dominio original. De esta forma se cuenta con tres dominios cuadrados que llamaremos caja grande, mediana y chica, respectivamente (Figura 22). El aspecto más relevante de estas simulaciones es que las características del flujo son idénticas, lo único que cambia es el tamaño del dominio.

Se realizaron simulaciones numéricas de turbulencia 2D forzada en las cajas chica y mediana, a través del modelo numérico presentado en la sección 2.3. Los parámetros de las simulaciones son similares a los descritos en la sección 3.1, con excepción de los que muestra la Tabla 1. Estos parámetros son diferentes porque se tiene que considerar la reducción del tamaño del dominio. Los puntos de malla $\mathcal{N}$ se modifican con el fin de tener la misma resolución espacial en los tres casos. Asimismo, los números $m$ y $n$, que determinan la estructura espacial del forzamiento (ec. 39), son cambiados para mantener constante la escala de forzamiento $r_f$. En la Tabla 1 también se muestra algunas cantidades características del flujo (por ejemplo, la energía $E$ y la enstrofía $Z$); se puede decir que no existe variación significativa

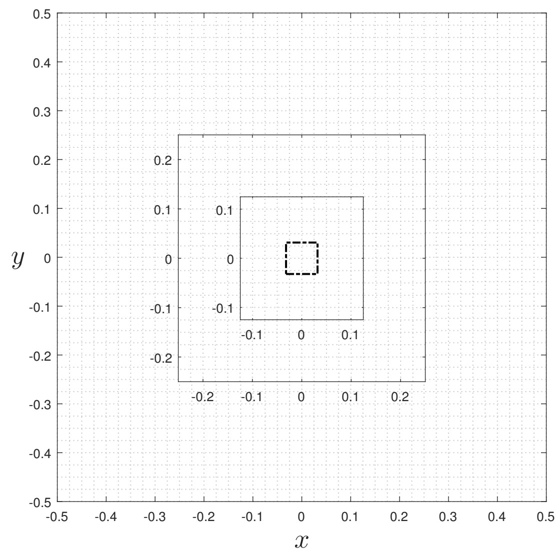


**Figura 22. Dominios considerados para los experimentos de dispersión. El cuadro con línea discontinua representa el arreglo inicial de las partículas.**

de sus valores. La escala más energética $r_E$ se reduce para las cajas mediana y chica. Esto es de esperarse por la disminución del tamaño de las cajas mientras se conserva $r_f$ constante.

Se hicieron experimentos de dispersión de partículas en cada caja mediante el mismo procedimiento descrito en la sección 3.2. Es decir, se realizaron 20 nuevas corridas del modelo con C.I. de vorticidad diferentes, tomadas de las simulaciones anteriores en régimen estadísticamente estacionario. En cada simulación un conjunto de $N = 1024$ partículas son liberadas en forma de un arreglo cuadrado de $32 \times 32$ ubicado en el centro de cada caja. La separación inicial mínima de las partículas fue nuevamente $\Delta = 0.0021$. Se evalúa la estadística Lagrangiana en ensambles de $N_p = 20480$ $(20N)$ partículas con resolución temporal de $t = 0.5$.

**Tabla 1. Parámetros característicos de las simulaciones numéricas realizadas en las cajas. La escala de forzamiento es $r_f = 0.0476$.**

| Caja | $L$ | $\mathcal{N}$ | $m, n$ | $\delta_F$ | $u_{\text{rms}}$ $(\times 10^{-3})$ | $E$ $(\times 10^{-5})$ | $Z$ | $l$ | $\tau_z$ | $r_E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grande | 1 | $513^2$ | 20 | 0.45 | 3.57 | 1.496 | 0.128 | 0.0108 | 1.97 | 0.333 |
| Mediana | 0.5 | $257^2$ | 10 | 0.225 | 3.45 | 1.411 | 0.146 | 0.0098 | 1.85 | 0.166 |
| Chica | 0.25 | $129^2$ | 5 | 0.1125 | 3.2 | 1.226 | 0.188 | 0.0081 | 1.65 | 0.083 |

## 4.2. Estadística de partículas individuales

### Dispersión absoluta desde el centro de las cajas

La dispersión absoluta total de cada una de las cajas se presenta en la Figura 23. Podemos observar que la dispersión en las tres cajas se comporta de manera similar a la curva $t^2$ en el intervalo $0.5 < t < 5$, lo que significa que presentan un régimen balístico. En estos experimentos, la presencia de dicho régimen no depende del tamaño de la caja, lo que significa que la dispersión de las partículas es similar en los primeros instantes y depende del flujo turbulento. El siguiente régimen, el de difusión estándar (curva $t$), es apreciable sólo en la caja grande ($70 < t < 200$) y la caja mediana ($30 < t < 70$), mientras que no es notorio en la caja chica, lo cual es consecuencia de su tamaño.

En algún momento las tres curvas de dispersión absoluta adquieren un valor constante, el cual se puede calcular de forma analítica con la siguiente integral:

$$\langle a_s^2 \rangle = \frac{1}{L^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{L^2}{6}, \tag{49}$$

donde $\langle a_s^2 \rangle$ se define como la dispersión absoluta de saturación. La ec. (49) representa el promedio de las distancias cuadráticas con respecto al centro de una caja de longitud $L$ de un conjunto de partículas distribuidas uniformemente. Esto significa que cuando las partículas saturan el dominio, la dispersión absoluta toma un valor de $\frac{1}{6}$ del área de la caja (líneas discontinuas horizontales de la Figura 23).

La dispersión absoluta de saturación también depende de la geometría del dominio. Para obtenerla, se calcula la integral de la ec. (49) sobre dominios diferentes, los cuales se muestran en la Figura 24, y después se divide el resultado entre el área total. Los cálculos se hacen respecto al centro de cada dominio. De esta forma, para un rectángulo de largo $H$ y ancho $W$ tenemos que

$$\langle a_s^2 \rangle = \frac{1}{HW} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{12}(H^2 + W^2).$$

Otro dominio es un triángulo rectángulo de base $B$ y altura $A$, para el cual la integral es

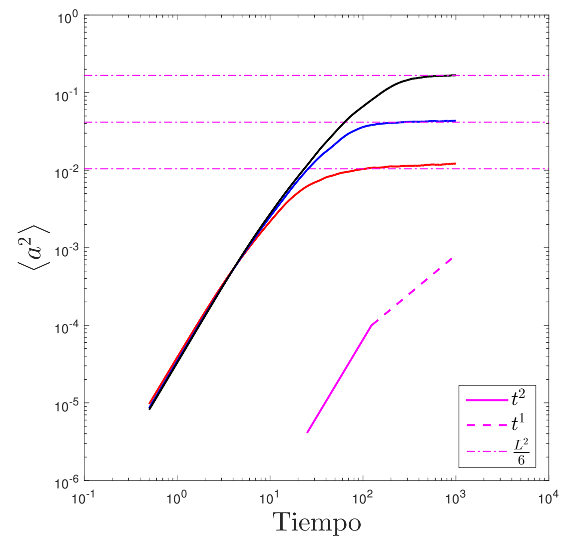


**Figura 23. Dispersión absoluta total para las cajas chica (línea roja), mediana (línea azul) y grande (línea negra). La línea continua magenta corresponde al régimen balístico ($t^2$) y la discontinua a la dispersión estándar ($t^1$). Las líneas discontinuas horizontales indican la dispersión absoluta de saturación definida en la ec.** (54)**.**

$$\left\langle a_s^2 \right\rangle = \frac{1}{(AB/2)} \int_0^A \int_0^{-\frac{A}{B}x+A} \left[ \left( x - \frac{B}{3} \right)^2 + \left( y - \frac{A}{3} \right)^2 \right] dxdy = \frac{1}{18}(B^2 + A^2).$$

En este caso partícular, hemos calculado la distancia cuadrática promedio de las partículas respecto al baricentro del triángulo $\left(\frac{B}{3}, \frac{A}{3}\right)$. Para encontrar la dispersión absoluta de saturación en dominios circulares, realizamos las integrales en coordenadas polares. Así, para un círculo de radio $R$

$$\left\langle a_s^2 \right\rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{R^2}{2}. \tag{50}$$

Finalmente, para una elipse con semiejes $a$ y $b$, con su frontera definida como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, hacemos la integración de forma directa (en coordenadas cartesianas), para obtener

$$\left\langle a_s^2 \right\rangle = \frac{1}{\pi ab} \int_{-b}^{b} \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} (x^2 + y^2) dxdy = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

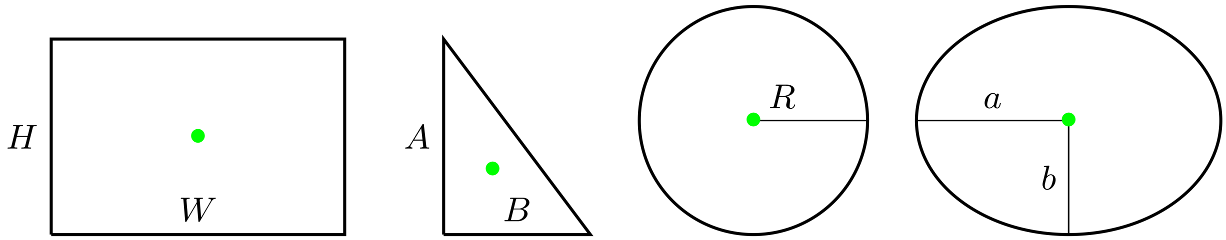


**Figura 24. Dominios sobre los cuales se calcula la dispersión absoluta de saturación $\langle a_s^2 \rangle$. El punto verde indica la posición respecto a la cual se calcula la distancia cuadrática promedio.**

Resumiendo, la dispersión absoluta de saturación para distintas geometrías es:

$$\langle a_s^2 \rangle = \begin{cases} \frac{1}{12}(H^2 + W^2), & \text{para un rectángulo de largo } H \text{ y ancho } W, \\ \frac{1}{18}(B^2 + A^2), & \text{para un triángulo de base } B \text{ y altura } A, \\ \frac{R^2}{2}, & \text{para un círculo de radio } R, \\ \frac{1}{4}(a^2 + b^2), & \text{para una elipse de semiejes } a \text{ y } b. \end{cases} \tag{51}$$

### Tiempo de saturación

El comportamiento de la dispersión absoluta nos dice el tiempo al cual el confinamiento del flujo turbulento empieza a limitar la distancia entre las posiciones inicial y actual (Kadoch *et al.*, 2011). Efectivamente, como observamos en la Figura 23, el tamaño de la caja provoca que la dispersión absoluta tome un valor constante después de cierto tiempo; en ese momento las partículas están distribuidas de manera uniforme en todo el dominio.

El procedimiento para calcular dicho tiempo de saturación $t_s$ es el siguiente: primero, obtenemos la dispersión absoluta total de los 20 experimentos de cada caja. Luego se encuentra el tiempo en el que cada curva de dispersión absoluta de los experimentos toma el valor dado por la ec. (49) (es decir, la dispersión absoluta de saturación). El resultado se muestra en la Figura 25. Podemos observar que el tiempo de saturación de la caja chica es menor comparado al correspondiente a la caja mediana, y a su vez, mucho menor al de la caja grande; esto es de esperarse: nos dice simplemente que las partículas saturan más rápidamente a una caja chica que a una caja grande. Por otro lado, la desviación estándar de la caja chica tiene

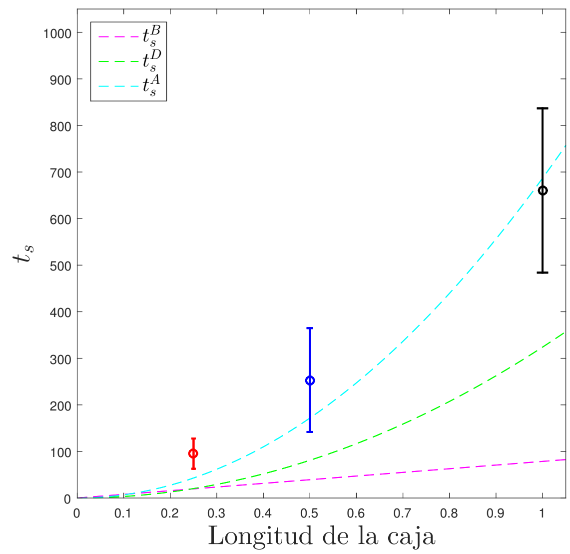


**Figura 25. Tiempo de saturación $t_s$ promedio (sobre el ensamble de 20 simulaciones) para las cajas chica (círculo rojo), mediana (círculo azul) y grande (círculo negro). Las barras verticales representan una desviación estándar. Las líneas punteadas magenta y verde representan los tiempos $t_s$ correspondientes al régimen puramente balístico y de difusión estándar, respectivamente.**

un valor menor comparado al resto de las cajas. Esto también es esperado, entre más grandes sean las cajas, las partículas tienen más espacio para desplazarse libremente y generar mayor variedad de escenarios de saturación de partículas en el dominio. Adicionalmente se aplicó un ajuste por mínimos cuadrados a los datos, en específico a una función parabólica; el resultado es una expresión de la forma $t_s^A = 686.67L^2$, la cual nos ayuda a encontrar el tiempo de saturación para otras cajas de distinta longitud.

Con el fin de comparar la información adquirida, se proponen los siguientes tiempos de saturación basados en los regímenes de dispersión absoluta (ver subsección 2.2.2). Para calcularlos se igualan las ecuaciones correspondientes a cada régimen [ecs. (16) y (17)] con la dispersión absoluta de saturación [ec. (49)], y se sustituye para $t = t_s$. De esta forma, el tiempo de saturación para el régimen balístico es:

$$t_s^B = \frac{1}{\sqrt{6b}} L, \tag{52}$$

donde $b$ es una constante; en esta ecuación $t_s^B$ varia linealmente en función de la longitud de la caja. Por otro lado, para el régimen de difusión estándar:

$$t_s^D = \frac{1}{12D}L^2, \tag{53}$$

donde $D$ es la difusión absoluta; se trata de una función parabólica con respecto al tamaño de la caja. Los valores de $b$ y $D$ se obtuvieron a través de ajustes por mínimos cuadrados de las ecuaciones de cada régimen [ecs. (16) y (17)] a las curvas de dispersión absoluta en diferentes periodos.

En la Figura 25 se muestran los tiempos de saturación correspondientes a cada régimen. Podemos observar que si el régimen de dispersión es puramente balístico, las cajas se llenan rápidamente. Por otro lado, si tuviésemos solamente un régimen de difusión estándar, las cajas de mayor tamaño se llenan lentamente en comparación con las cajas pequeñas. Los tiempos de saturación obtenidos de los experimentos tienen una magnitud mayor en comparación a los tiempos provenientes de los regímenes de dispersión. Esto es consecuencia de la transición entre el comportamiento $t^1$ (régimen de difusión estándar) a $t^0$ (donde la dispersión adquiere el valor $\frac{L^2}{6}$), ya que en ese periodo la dispersión es más lenta que en cualquiera de los otros regímenes. Dicha transición define un régimen de saturación y siempre estará presente en dominios cerrados (con cualquier geometría).

**Dispersión absoluta desde una pared**

Anteriormente se calculó la dispersión absoluta de un conjunto de partículas concentradas cerca del centro de las cajas; sin embargo, las partículas pueden dispersarse desde un origen arbitrario. Como ejemplo consideramos el caso donde el arreglo cuadrado de partículas se ubique inicialmente cerca de una pared del dominio (aquí solo vamos a considerar la dispersión en la caja grande). Las trayectorias de las partículas de un experimento se muestran en la Figura 26; se puede observar que el movimiento de las partículas se ve rápidamente restringido por la presencia de la frontera sólida, obligándolas a desplazarse a lo largo de la dirección $y$.

Es posible generalizar el valor de la dispersión absoluta de saturación $\langle a_s^2\rangle$ para un conjunto de partículas liberadas respecto a una posición $(x_0, y_0)$; para ello se calcula la siguiente

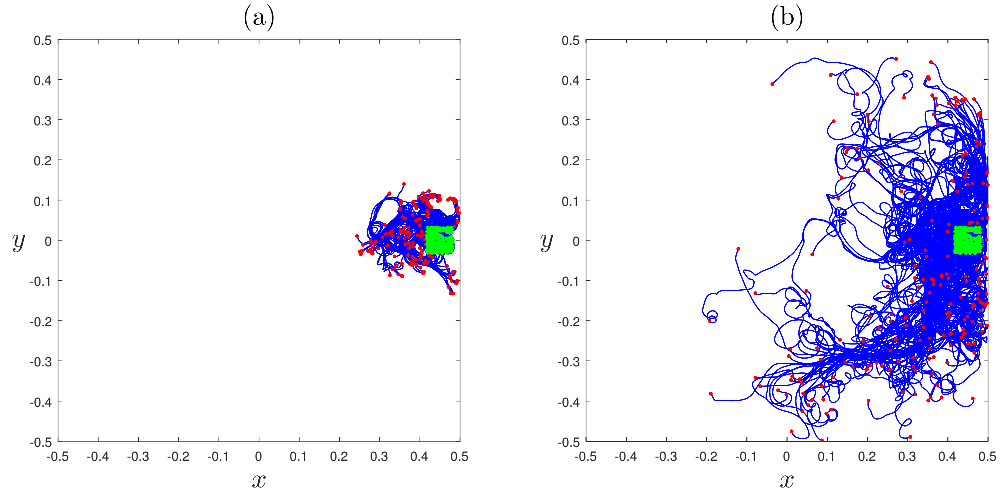


**Figura 26. Trayectorias de 200 partículas liberadas cerca de una pared de la caja grande para dos diferentes tiempos: (a) $t = 50$ y (b) $t = 200$. Los puntos verdes y rojos indican la posición inicial y final de cada partícula, respectivamente.**

integral:

$$\langle a_s^2 \rangle = \frac{1}{L^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] dx dy = \frac{L^2}{6} + x_0^2 + y_0^2. \tag{54}$$

Si la fuente de las partículas es el origen de la caja, la ec. (54) se convierte en la ec. (49); por otro lado, si las partículas se encuentran originalmente en $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ (i.e. una esquina de la caja), la ec. (54) es igual a $\frac{2}{3}L^2$. Esto nos permite saber que la dispersión absoluta de saturación está acotada en el intervalo $\frac{L^2}{6} \leq \langle a_s^2 \rangle \leq \frac{2L^2}{3}$. Una consecuencia es que el tiempo de saturación es menor cuando las partículas parten del origen, y el tiempo es máximo si las partículas comienzan en una esquina.

En el ejemplo de la Figura 26, el conjunto de partículas está centrado alrededor de $(x_0, y_0) = (0.45, 0)$, lo que significa que $\langle a_s^2 \rangle \simeq 0.3691$. En la Figura 27a se muestra la curva de dispersión absoluta total. Adicionalmente se muestra el valor de la dispersión absoluta de saturación. El tiempo de saturación en este escenario ($\sim 1000$) es mayor al tiempo calculado anteriormente con la nube de partículas que comienza cerca del centro ($\sim 687$).

Si analizamos las componentes de la dispersión absoluta (Figura 27b) se observa que ambas son diferentes a tiempos largos, lo que indica que alcanzan su valor límite en diferentes instantes. Por lo tanto, se pueden calcular las componentes de la dispersión absoluta de

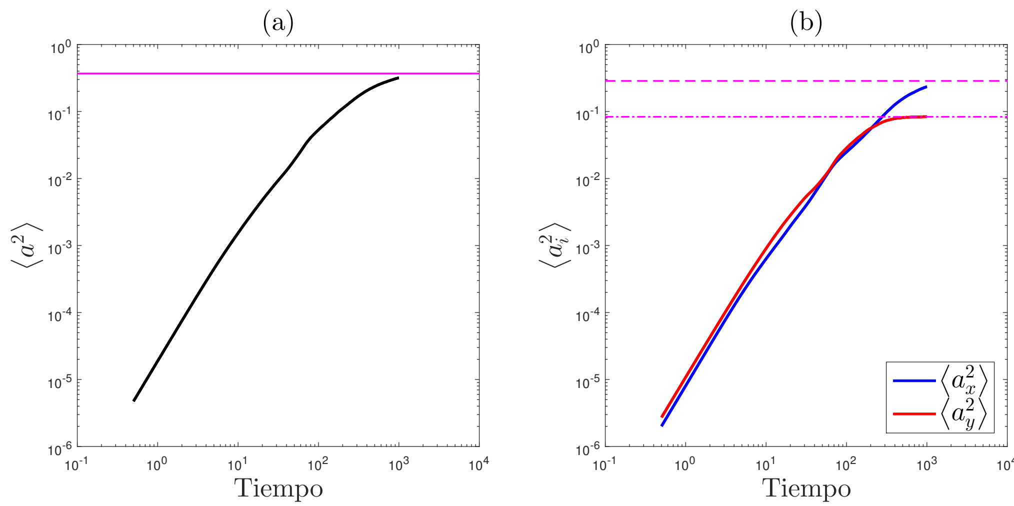


**Figura 27. Evolución temporal de la dispersión absoluta total (panel a) y de sus respectivas componentes (panel b) para el caso de partículas liberadas cerca de la pared. Las líneas horizontales indican los valores de saturación: $\langle a_s^2 \rangle \simeq 0.3691$ (línea contínua), $\langle a_{s,x}^2 \rangle \simeq 0.28583$ (línea discontínua) y $\langle a_{s,y}^2 \rangle = 1/12$ (línea punteada).**

saturación, las cuales resultan ser:

$$\langle a_{s,x}^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x - x_0)^2 dxdy = \frac{L^2}{12} + x_0^2, \tag{55}$$

$$\langle a_{s,y}^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (y - y_0)^2 dxdy = \frac{L^2}{12} + y_0^2, \tag{56}$$

En el presente caso $\langle a_{s,x}^2 \rangle \simeq 0.28583$ y $\langle a_{s,y}^2 \rangle = \frac{1}{12}$. Entonces, la componente $y$ de la dispersión alcanza el valor de saturación más rápidamente que la componente $x$ porque las paredes horizontales están a menor distancia $\left(\frac{L}{2}\right)$ que la pared vertical más lejana (que está a una distancia $\sim L$).

## 4.3. Estadística de pares de partículas

### Dispersión relativa

La evolución temporal de la dispersión relativa para cada una de las tres cajas se muestra en la Figura 28. Se toman en cuenta distintos valores $q$ (la razón de la separación inicial entre los pares de partículas y la escala de forzamiento). A partir de aquí retomamos el caso donde las partículas comienzan en el centro de cada caja. En primera instancia consideremos las curvas para $q = 0.04$, o una separación inicial pequeña (Figura 28a). Podemos observar que las curvas de dispersión de las cajas son idénticas por debajo de la escala de forzamiento $r_f$: presentan inicialmente un crecimiento exponencial (desde $t = 0.5$ hasta $t = 5$), y después crecen de forma similar a la curva $t^3$. Por encima de $r_f$, la dispersión relativa en cada caja se aleja consecutivamente de la ley de potencia al cubo para adquirir un valor constante; en los casos de la caja mediana y chica se puede observar el crecimiento lineal con respecto al tiempo. Algo similar ocurre para la dispersión relativa de las otras dos separaciones iniciales ($q = 0.17$ y $1.3$), es decir, la dispersión relativa en las cajas tiene un comportamiento similar en los primeros instantes de tiempo y gradualmente diverge hacia un valor constante debido a la finitud del dominio.

El valor límite de la dispersión relativa (valor de saturación) se puede calcular al considerar la separación cuadrática promedio entre dos partículas $p$ y $q$ distribuidas uniformemente en una caja de longitud $L$, es decir:

$$\left\langle r_s^2 \right\rangle = \frac{1}{L^4} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [(x^p - x^q)^2 + (y^p - y^q)^2] dx^p dx^q dy^p dy^q = \frac{L^2}{3}, \tag{57}$$

donde $\langle r_s^2 \rangle$ es la dispersión relativa de saturación. Entonces, cuando las cajas se encuentran llenas de partículas, la dispersión relativa es $\frac{1}{3}$ del área de la caja (líneas discontinuas horizontales de la Figura 28).

El valor de la integral (57) es distinto dependiendo de la geometría del dominio (ver Figura 24):

$$\left\langle r_s^2 \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{6}(H^2 + W^2), & \text{para un rectángulo de largo } H \text{ y ancho } W, \\ \frac{1}{9}(B^2 + A^2), & \text{para un triángulo de base } B \text{ y altura } A, \\ R^2, & \text{para un círculo de radio } R, \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2), & \text{para una elipse de semiejes } a \text{ y } b. \end{cases} \tag{58}$$

Nótese que $\langle r_s^2 \rangle = 2 \langle a_s^2 \rangle$ y que el resultado es independiente del origen de las partículas.

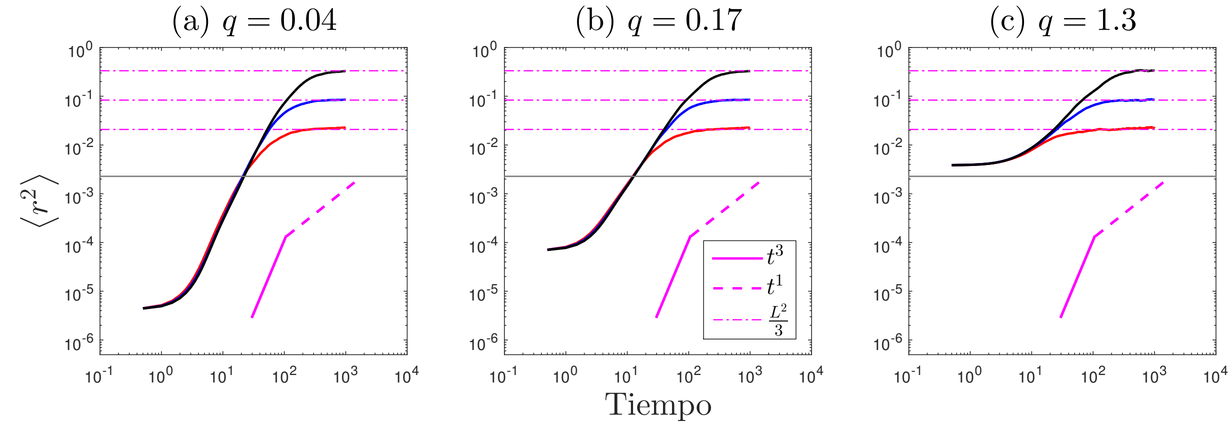


**Figura 28. Dispersión relativa $\langle r^2 \rangle$ vs tiempo para ciertos valores de $q = r_0/r_f$, correspondientes a las cajas chica (línea roja), mediana (línea azul) y grande (línea negra). La línea horizontal continua representa la escala de forzamiento $r_f$.**

## Curtosis

La curtosis calculada para las tres cajas y distintas separaciones iniciales (i.e. valores de $q$) se muestra en la Figura 29. Las curvas de curtosis se comportan de manera similar en tiempos cortos, en los que se da una fase de crecimiento exponencial hasta alcanzar un máximo. A tiempos largos la curtosis decae hacia un valor constante, el cual resulta ser el mismo para las tres cajas ($K = 1.7$) e independiente de la separación inicial.

Análogo a como se hizo con las dispersiones (absoluta y relativa) podemos calcular el valor límite de la curtosis cuando la caja está saturada de partículas. Para ello, se obtiene el cuarto momento estadístico de saturación $\langle r_s^4 \rangle$:

$$\langle r_s^4 \rangle = \frac{1}{L^4} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [(x^p - x^q)^2 + (y^p - y^q)^2]^2 dx^p dx^q dy^p dy^q = \frac{17}{90} L^4, \qquad (59)$$

donde el integrando representa la separación entre un par de partículas $p$ y $q$ a la cuarta potencia. De esta forma, utilizando la ec. (57), la curtosis de saturación es:

$$K = \frac{\langle r_s^4 \rangle}{\langle r_s^2 \rangle^2} = \frac{17L^4}{90} \cdot \frac{9}{L^4} = 1.7. \qquad (60)$$

Como se mencionó con anterioridad, este valor es exacto y no depende del tamaño de la caja,

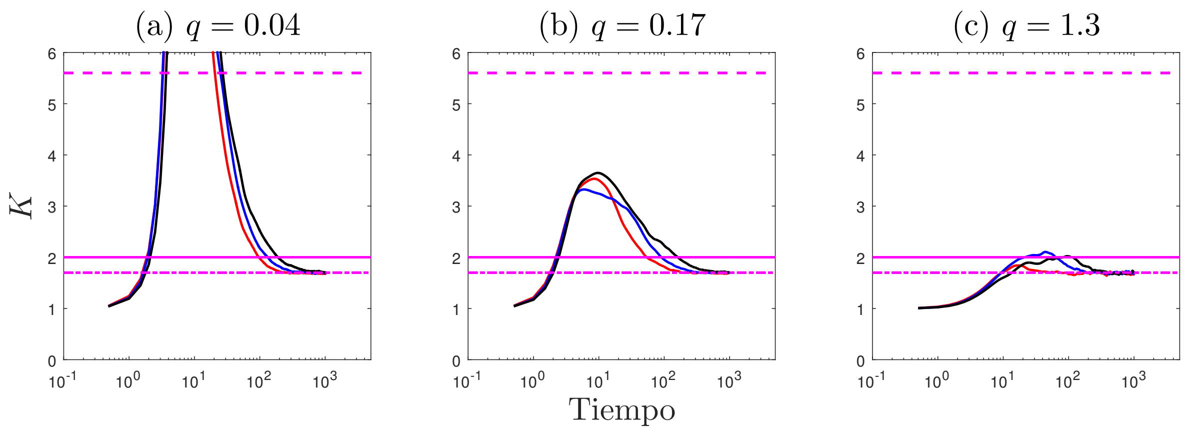


**Figura 29. Curtosis $K$ vs tiempo para distintos valores $q_0 = r_0/r_f$, correspondientes a las cajas chica (línea roja), mediana (línea azul) y grande (línea negra). Las líneas horizontales indican el valor asintótico de la curtosis para el régimen de Richardson-Obukhov $K = 5.6$ (línea discontinua), para el régimen de Rayleigh $K = 2$ (línea continua) y la curtosis de saturación $K = 1.7$ (línea punteada).**

aunque sí varía de acuerdo a la geometría del dominio, tal como se muestra a continuación:

$$K = \begin{cases} \frac{2}{5}\left[\frac{6H^4+5H^2W^2+6W^4}{(H^2+W^2)^2}\right], & \text{para un rectángulo de largo } H \text{ y ancho } W, \\ \frac{27}{10}\left[\frac{A^4+A^2B^2+B^4}{(A^2+B^2)^2}\right], & \text{para un triángulo de base } B \text{ y altura } A, \\ \frac{5}{3}, & \text{para un círculo de radio } R, \\ \frac{5}{6}\left[\frac{3a^4+2a^2b^2+3b^4}{(a^2+b^2)^2}\right], & \text{para una elipse de semiejes } a \text{ y } b. \end{cases} \tag{61}$$

Podemos notar que un dominio circular también tiene una curtosis de saturación constante, al igual que en las cajas cuadradas. La razón es que las separaciones relativas $r$ (incluyendo $r^2$ y $r^4$) en ambas direcciones del dominio tienen valores iguales. En estos casos tenemos un tipo de isotropía geométrica que genera curtosis constantes. Por el contrario, en dominios como el rectángulo, las curtosis dependen de las dimensiones del dominio porque las separaciones relativas son diferentes en ambas direcciones. Se puede observar que si hacemos $H = W$ recuperamos el resultado de la curtosis de saturación para una caja cuadrada ($K = 1.7$).

## Exponentes de Lyapunov de escala finita

Ahora describimos los FSLE $\lambda$ calculados para las tres cajas (Figura 30). Podemos observar la presencia de un régimen exponencial en las cajas grande y mediana ($\lambda = \text{const.}$) para

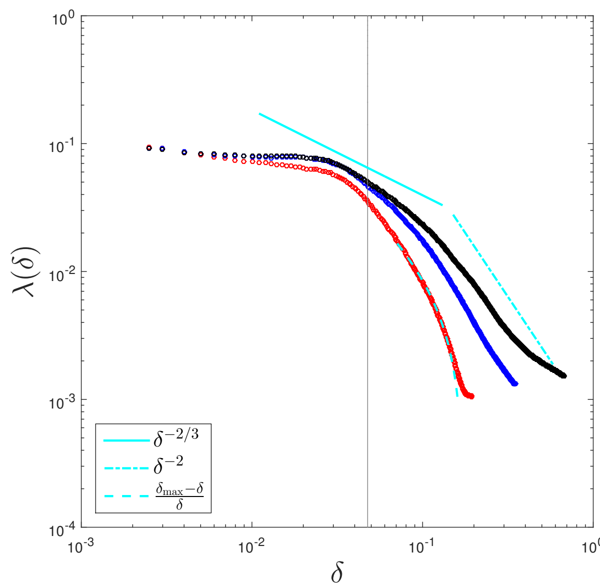


**Figura 30. Exponentes finitos de Lyapunov (FSLE) vs separaciones $\delta$ para las cajas chica (línea roja), mediana (línea azul) y grande (línea negra). Las líneas cyan indican los regímenes de Richardson (continua), de difusión estándar (punteada) y de saturación (discontinua), respectivamente. La línea vertical continua indica la escala de forzamiento $r_f$.**

las separaciones $\delta < 0.03$. Para la caja chica, este régimen ocurre para un número reducido de separaciones ($\delta < 0.01$). En separaciones cercanas a la escala de forzamiento, ninguno de los exponentes de las cajas se comporta como la curva $\delta^{-2/3}$, correspondiente al régimen de Richardson. Para las cajas grande y mediana, los exponentes crecen en función de $\delta$ con pendientes menores a $-2/3$.

Los exponentes siguen al régimen de difusión estándar (curva $\delta^{-2}$) en las cajas mediana y grande. La caja grande lo hace en $0.15 < \delta < 0.3$, mientras que la caja mediana en $0.1 < \delta < 0.3$, y para la caja chica en separaciones cercanas a la escala de forzamiento. La caja chica presenta además el régimen de saturación con $\delta_{\max} = 0.1748$. Los resultados muestran que para las cajas grande y mediana se identifican un régimen exponencial, otro régimen con $\delta^{-\alpha}$ ($\alpha < 2/3$) y el de difusión estándar; en contraste, para la caja chica, se observan los régimenes exponencial, de difusión estándar y de saturación, consecuencia del tamaño reducido del dominio.

**Centro de masa**

Cuando la turbulencia es homogénea, estacionaria e isotrópica, se espera que las partículas sean advectadas de manera uniforme en todas las direcciones del dominio. Sin embargo este no siempre es el caso cuando las separación inicial de las partículas es menor a la escala de forzamiento. Por lo tanto, existen escenarios donde las partículas son acarreadas en un sentido preferente, como ocurre en algunos de nuestros experimentos. En esta parte se discute el desplazamiento promedio de las partículas en un dominio finito cuando la dispersión tiene una dirección preferencial.

El desplazamiento promedio del conjunto de partículas en cada realización se puede cuantificar mediante el movimiento de su centro de masa:

$$\langle C_i(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_i^k \tag{62}$$

donde $x_i^k$ es la posición de la partícula $k$ en la dirección $i$ (LaCasce, 2008a). Si las partículas son liberadas en turbulencia isotrópica, el centro de masa permanece siempre ubicado en el origen del dominio porque dichas partículas son advectadas uniformemente en todas las direcciones. En el caso de nuestros experimentos, el centro de masa no permanece en el origen del dominio, sino que se desplaza; sin embargo, cuando las partículas eventualmente saturan el dominio, el centro de masa retoma su posición en el origen. Entonces podemos definir una trayectoria del centro de masa, $(\langle C_x(t) \rangle, \langle C_y(t) \rangle)$, como una forma de visualizar la distancia máxima $d$ que alcanza el centro de masa (o la nube de partículas) respecto al origen de la caja y el tiempo $t_d$ al que sucede. Para calcular $d$ y $t_d$, evaluamos la ec. (62) en ambas componentes para cada uno de los 20 experimentos hechos para las tres cajas.

En la Figura 31, la trayectoria del centro de masa de cada experimento se grafica para cada caja, asignándole el tiempo mediante colores. Si consideramos primero la caja chica (Figura 31a), podemos observar que el desplazamiento de los centros de masa se limitan (en promedio) a un círculo de radio $\langle d \rangle = 0.0299 \pm 0.0136$. Este límite es alcanzado a un tiempo promedio de $\langle t_d \rangle = 29.05 \pm 20.48$. Existen algunos experimentos donde el centro de masa viaja rápidamente en el dominio por encima del círculo, por ejemplo, el caso más extremo es $d_{\max} = 0.06$ a $t_d = 26.5$. La información anterior, junto con la obtenida para las cajas

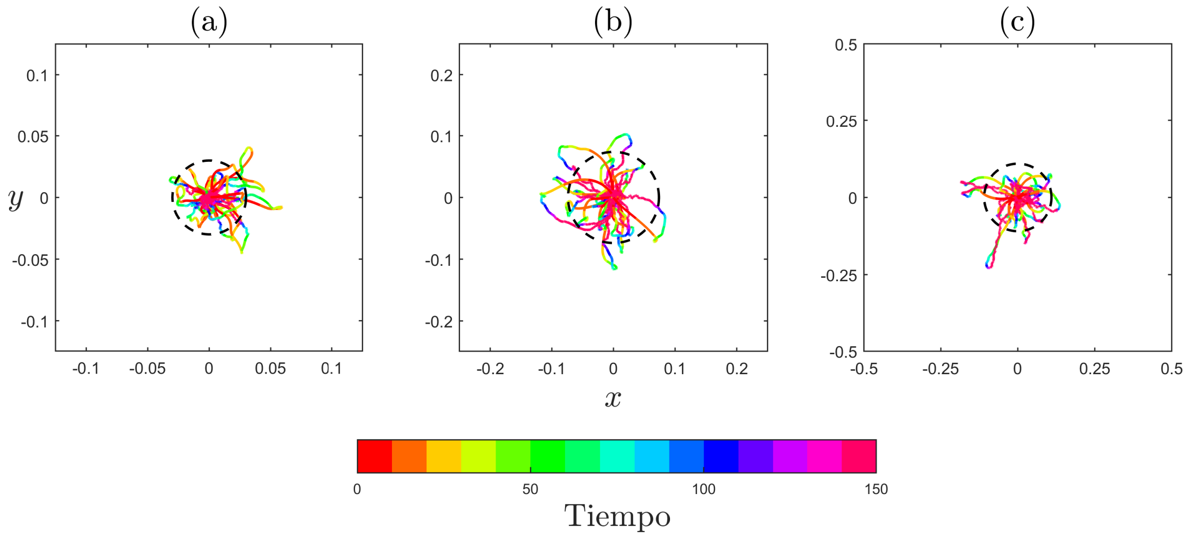


**Figura 31. Trayectoria del centro de masa en el dominio para los experimentos realizados en las cajas (a) chica, (b) mediana y (c) grande.**

mediana y grande, se encuentra resumida en la Tabla 2.

Cabe destacar dos aspectos de la información previa: primero, la razón entre la distancia máxima promedio y el dominio es aproximadamente $\langle d \rangle / L \sim 0.1$, es decir, la nube de partículas se desplaza (en promedio) un 10 % del tamaño de la caja; mientras que para los casos extremos, la relación es $\langle d \rangle / L \sim 0.25$ (25 % del tamaño). Segundo, los tiempos $t_d$ son muy variables, lo que indica que la forma en la que las partículas se distribuyen es diferente en cada experimento.

**Tabla 2. Desplazamiento promedio $\langle d \rangle$ del centro de masa para cada caja y el tiempo promedio $\langle t_d \rangle$ que le toma alcanzar dicha distancia. Se incluye además el desplazamiento máximo $d_{\max}$ de los diferentes experimentos.**

| Caja | $\langle d \rangle$ | $d_{\max}$ | $\frac{\langle d \rangle}{L}$ | $\frac{d_{\max}}{L}$ | $\langle t_d \rangle$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Chica ($L = 0.25$) | $0.0299 \pm 0.0136$ | 0.06 | 0.1196 | 0.24 | $29.05 \pm 20.48$ |
| Mediana ($L = 0.5$) | $0.0738 \pm 0.0296$ | 0.1188 | 0.1476 | 0.2376 | $74.85 \pm 48.53$ |
| Grande ($L = 1$) | $0.1094 \pm 0.0511$ | 0.2478 | 0.1094 | 0.2478 | $130 \pm 83.33$ |

# Capítulo 5. Discusiones y conclusiones

En este trabajo se describió y analizó la estadística Lagrangiana de un flujo turbulento 2D en un dominio cerrado, usando simulaciones numéricas. En el Capítulo 3 caracterizamos la dispersión Lagrangiana mediante varias medidas estadísticas, mientras que en el Capítulo 4 se describió la influencia del confinamiento sobre la estadística Lagrangiana. Este Capítulo está dedicado a discutir los resultados obtenidos y a presentar las conclusiones más importantes del trabajo de tesis.

## 5.1. Sobre la estadística Lagrangiana

Previo a los cálculos estadísticos, se generó un flujo turbulento 2D por medio de un forzamiento de tipo sinusoidal a un fluido en reposo. Dicho flujo, en estado estadísticamente estacionario, fue la base para realizar distintos experimentos de dispersión. El análisis subsecuente se realizó haciendo uso de la estadística Lagrangiana de una sola partícula y de pares de partículas. En la mayoría de las medidas estadísticas se encontraron los comportamientos teóricos predichos para la dispersión acontecida en turbulencia 2D forzada, homogénea e isotrópica, lo que se resume a continuación.

La estadística de las partículas individuales mostró que las componentes de la dispersión absoluta obedecen los comportamientos balístico y de difusión estándar, de acuerdo con la teoría de Taylor (1921). Por otro lado, las escalas Lagrangianas espaciales y temporales resultaron ser muy similares en ambas direcciones, lo que indica que el número de experimentos y partículas fue suficiente para tener medidas estadísticas consistentes.

Las estadísticas de pares fueron calculadas para varias separaciones iniciales, de manera análoga al estudio hecho por Babiano *et al.* (1990). La dispersión relativa reveló la presencia del régimen exponencial (o de Kraichnan-Lin) para tiempos cortos, con distintas tasas de crecimiento dependiendo de la separación inicial. El régimen de Richardson-Obukhov se observó en separaciones iniciales pequeñas. Sin embargo, si la separación inicial aumenta, la dispersión se aleja de dicho régimen. Esta dependencia de la separación inicial por parte del régimen de Richardson-Obukhov en las curvas de dispersión fue originalmente notada por Babiano *et al.* (1990). Finalmente, el régimen de Rayleigh estuvo presente en separaciones por encima de la escala más energética y a tiempos largos. Por otra parte, en las curvas de curtosis se observó el régimen de Kraichnan-Lin y de Rayleigh, mientras que ninguna de las curvas se acercó al régimen de Richardson-Obukhov. Esta clase de comportamiento descrito por la curtosis también fue observado con partículas simuladas en el Golfo de México (Beron-Vera y LaCasce, 2016). En los resultados de este estudio, la curtosis excede el límite asintótico de Richardson-Obukhov para separaciones pequeñas, mientras que no alcanza dicho límite para separaciones grandes.

Las PDFs de separación entre pares se comportaron como la distribución de Kraichnan-Lin para tiempos cortos, y de Rayleigh para tiempos largos, en todas las separaciones iniciales consideradas. Sin embargo, en tiempos intermedios el comportamiento de las PDFs fue ambiguo para separaciones iniciales pequeñas ($q = 0.04$ y $0.09$), en las cuales se observó similitud con la distribución de Richardson-Obukhov para separaciones grandes con respecto a la escala de forzamiento, pero no para separaciones pequeñas (ver Figura 17c). En estos casos, una PDF que se ajusta mejor a la distribución de los datos es:

$$p(r,t) = \frac{a}{2\pi r\sigma} \exp\left[-b\left(\frac{r}{\sigma}\right)^{c}\right] \tag{63}$$

donde $\sigma = \langle r^2 \rangle^{1/2}$ es la desviación estándar de las separaciones relativas y $a$, $b$ y $c$ son constantes que se determinan a través de un ajuste por mínimos cuadrados a los datos. La PDF (63) fue originalmente propuesta por Jullien *et al.* (1999) para pares de partículas advectadas por turbulencia 2D generada en experimentos de laboratorio, y discutida recientemente por Ollitrault *et al.* (2005) y Beron-Vera y LaCasce (2016) . Para el presente caso, $b = 2.014 \pm 0.039$ y $c = 0.5694 \pm 0.0159$, que son valores muy cercanos a los obtenidos por el estudio experimental de Jullien *et al.* (1999). Las desviaciones del escenario de dispersión de Richardson para separaciones pequeñas se deben a que algunas partículas continúan juntas su trayectoria durante un tiempo considerable (en forma de subgrupos), lo cual genera una PDF de tipo exponencial. Por el contrario, si las separaciones iniciales son grandes (como en el caso de $q = 0.3$), las partículas se apartan entre sí más fácilmente, haciendo que la distribución de pares sea similar a la PDF de Richardson en tiempos intermedios (ver Figura 18c). Esta observación suele no ser tomada en cuenta en estudios oceanográficos, por lo que puede ser punto de partida para estudios adicionales.

Vale la pena señalar un punto relacionado con el flujo turbulento. El espectro de energía de las simulaciones tuvo una pendiente de $-1.65$ y $-6$, en escalas espaciales mayores y menores a la escala de forzamiento $r_f$, respectivamente. La pendiente del subrango de energía está de acuerdo con lo predicho por la teoría $\left(-\frac{5}{3}\right)$, pero en el subrango de enstrofía la pendiente es el doble de la predicción teórica ($-3$). Sin embargo, un espectro similar al presente (con pendientes de $-1.2$ y $-5.7$) fue reportado en experimentos de laboratorio de turbulencia 2D forzada electromagnéticamente (Rivera y Ecke, 2016). Por lo tanto, existe un estudio experimental que confirma que es posible tener espectros con pendientes muy pronunciadas, como es el caso de nuestro trabajo.

## 5.2. Influencia del confinamiento en la estadística Lagrangiana

Uno de los objetivos de este trabajo fue determinar los efectos del confinamiento sobre la estadística Lagrangiana. Por este motivo se planteó realizar una serie de experimentos de dispersión en dominios cuadrados de distintos tamaños, en los cuales las características del flujo dispersor eran similares. Una consecuencia simple es que algunas estadísticas toman un valor constante a tiempos largos, cuando las partículas saturan el dominio. Cada valor de saturación fue calculado analíticamente a través de integrales sencillas, considerando que las partículas tienen una distribución uniforme en las cajas. Las dispersiones absoluta y relativa de saturación equivalen a $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{3}$ del área para el caso de un dominio cuadrado [ecs. (49) y (57) respectivamente], y en general $\langle r_s^2 \rangle = 2 \langle a_s^2 \rangle$ independientemente de la forma del dominio. Por otro lado, se encontró que para la estadística de pares la curtosis de saturación es $K = 1.7$ [ec. (60)]. Este es un cálculo exacto para cualquier tamaño de la caja y es ligeramente menor al valor asintótico de la curtosis para el régimen de Rayleigh ($K = 2$). Para hacer más robustos los resultados, también se calcularon los valores de saturación para otras geometrías simples (rectángulos, triángulos, círculos y elipses), los cuales se muestran en las ecs. (51), (58) y (61).

Otro resultado fundamental es el tiempo de saturación del dominio. El hecho de que la dispersión absoluta alcance un límite nos permitió establecer un criterio con el cual decidimos si un dominio está lleno de partículas. Dicho criterio no cambia debido a la forma del dominio, lo único que es diferente es la dispersión absoluta de saturación. Encontramos que la relación más adecuada para el tiempo de saturación en el dominio cuadrado es una función parabólica dependiente de la longitud de la caja ($t_s^A = 686.67L^2$). Este tiempo es considerablemente mayor en comparación a los tiempos de saturación debidos a los regímenes teóricos de dispersión absoluta en dominios sin fronteras, ya sea balístico o de difusión estándar [ecs. (52) y (53)]. Lo anterior ocurre debido a la transición de un régimen difusivo dado a otro comportamiento donde la dispersión es constante. Dicho cambio involucra un periodo en el cual la dispersión se vuelve lenta, lo cual resulta ser una situación inevitable en dominios cerrados.

La magnitud del tiempo de saturación puede modificarse debido a ciertos factores. Uno de ellos es el flujo turbulento dispersor. A números de Reynolds más altos que en nuestras simulaciones, podemos esperar que los tiempos de saturación sean más pequeños porque las partículas serán advectadas rápidamente. Otro elemento que altera los tiempos de saturación es la ubicación de la fuente de las partículas en el dominio. La dispersión absoluta de saturación resulta ser una función del lugar donde las partículas son liberadas, teniendo un valor mínimo cuando estas parten del origen de la caja y un valor máximo si comienzan en una esquina. En otras palabras, la caja se llena más rápidamente cuando las partículas empiezan en el centro de la caja, pero si parten desde una esquina el tiempo de llenado es el mayor posible.

Son interesantes algunos aspectos relacionados con los FSLE y su relación con las dimensiones del dominio. Los exponentes para las diferentes cajas mostraron un comportamiento similar en separaciones pequeñas. No obstante los FSLE de las cajas mediana y grande no mostaron el régimen de saturación, a diferencia de la caja chica. Los exponentes calculados para flujos 2D simples (Artale *et al.*, 1997) muestran que, si el dominio es suficientemente grande, podemos observar tres regímenes: uno exponencial, el de difusión estándar y el de saturación. Por el contrario, si el dominio se reduce, el régimen de difusión estándar no aparece, quedando únicamente los otros dos regímenes. Esto sugiere que las diferencias entre los exponentes de las cajas se deben simplemente a su tamaño. La caja chica tiene el tamaño adecuado como para que el régimen de saturación se presente.

Tenemos que mencionar que al considerar muchos experimentos de dispersión, se esperan distintos escenarios en cada uno de ellos, ya que en algunos casos el movimiento de las partículas puede tener una dirección preferencial. Lo anterior constituye una situación física bastante probable. Por ejemplo, si existe una fuente de algún contaminante en un lago o un mar cerrado, podemos esperar que la mancha se difunda en cierta dirección debido al viento o a la circulación local dominante del momento. En nuestras simulaciones, el estado de la turbulencia donde se encuentran inicialmente los trazadores determina un escenario de este tipo. Varias partículas serán advectadas rápidamente en un solo sentido si son ubicadas en regiones del flujo como chorros o filamentos. Para abordar este problema consideramos el movimiento del centro de masa de las partículas cuando comienzan en el centro de la caja, y evaluamos en cada uno de los experimentos de manera separada. El análisis realizado revela que el desplazamiento del centro de masa es limitado: una nube de partículas solo alcanza a viajar en promedio cerca del 10 % del tamaño de la caja. Cabe señalar que el tiempo que le toma al centro de masa definir dicha trayectoria es muy variable, simplemente porque existen muchas formas por las cuales las partículas son dispersadas.

# Literatura citada


Artale, V., Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., y Vulpiani, A. (1997). Dispersion of passive tracers in closed basins: Beyond the diffusion coefficient. *Physics of Fluids*, **9**(11): 3162–3171.

Aurell, E., Boffetta, G., Crisanti, A., Paladin, G., y Vulpiani, A. (1997). Predictability in the large: an extension of the concept of Lyapunov exponent. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **30**(1): 1–26.

Babiano, A., Basdevant, C., Le Roy, P., y Sadourny, R. (1987). Single-particle dispersion, lagrangian structure function and lagrangian energy spectrum in two-dimensional incompressible turbulence. *Journal of Marine Research*, **45**(1): 107–131.

Babiano, A., Basdevant, C., Le Roy, P., y Sadourny, R. (1990). Relative dispersion in two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **214**: 535–557.

Bennett, A. F. (1984). Relative dispersion: Local and nonlocal dynamics. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **41**(11): 1881–1886.

Beron-Vera, F. J. y LaCasce, J. H. (2016). Statistics of simulated and observed pair separations in the gulf of mexico. *Journal of Physical Oceanography*, **46**(7): 2183–2199.

Boffetta, G. y Ecke, R. E. (2012). Two-dimensional turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **44**(1): 427–451.

Boffetta, G. y Musacchio, S. (2010). Evidence for the double cascade scenario in two-dimensional turbulence. *Physical Review E*, **82**: 016307.

Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., Lacorata, G., y Vulpiani, A. (2000). Nonasymptotic properties of transport and mixing. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **10**(1): 50–60.

Bracco, A., LaCasce, J., Pasquero, C., y Provenzale, A. (2000a). The velocity distribution of barotropic turbulence. *Physics of Fluids*, **12**(10): 2478–2488.

Bracco, A., LaCasce, J. H., y Provenzale, A. (2000b). Velocity probability density functions for oceanic floats. *Journal of Physical Oceanography*, **30**(3): 461–474.

Bruneau, C. H. y Kellay, H. (2005). Experiments and direct numerical simulations of two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, **71**: 046305.

Elhmaïdi, D., Provenzale, A., y Babiano, A. (1993). Elementary topology of two-dimensional turbulence from a lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. *Journal of Fluid Mechanics*, **257**: 533–558.

González Vera, A. S. y Zavala Sansón, L. (2015). The evolution of a continuously forced shear flow in a closed rectangular domain. *Physics of Fluids*, **27**(3): 034106.

Graff, L. S., Guttu, S., y LaCasce, J. H. (2015). Relative dispersion in the atmosphere from reanalysis winds. *Journal of the Atmospheric Sciences*. en prensa.

Jullien, M.-C. (2003). Dispersion of passive tracers in the direct enstrophy cascade: Experimental observations. *Physics of Fluids*, **15**(8): 2228–2237.

Jullien, M.-C., Paret, J., y Tabeling, P. (1999). Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **82**: 2872–2875.

Kadoch, B., Bos, W. J. T., y Schneider, K. (2011). The influence of walls on lagrangian statistics in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, **23**(8): 085111.

Koszalka, I., LaCasce, J. H., y Orvik, K. A. (2009). Relative dispersion in the nordic seas. *Journal of Marine Research*, **67**(4): 411–433.

Kraichnan, R. H. (1967). Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, **10**(7): 1417–1423.

Kraichnan, R. H. y Montgomery, D. (1980). Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, **43**(5): 547–619.

Kundu, P. K. y Cohen, I. M. (2002). *Fluid Mechanics*. Academic Press Inc., segunda edición. p. 730.

LaCasce, J. H. (2005). Eulerian and lagrangian velocity distributions in the North Atlantic. *Journal of Physical Oceanography*, **35**(12): 2327–2336.

LaCasce, J. H. (2008a). Lagrangian statistics from oceanic and atmospheric observations. En: J. B. Weiss y A. Provenzale (eds.), *Transport and Mixing in Geophysical Flows: Creators of Modern Physics*, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg, pp. 165–218.

LaCasce, J. H. (2008b). Statistics from lagrangian observations. *Progress in Oceanography*, **77**(1): 1–29.

LaCasce, J. H. (2010). Relative displacement probability distribution functions from balloons and drifters. *Journal of Marine Research*, **68**(3-1): 433–457.

LaCasce, J. H. y Olhmann, C. (2003). Relative dispersion at the surface of the Gulf of Mexico. *Journal of Marine Research*, **61**(3): 285–312.

Lacorata, G., Aurell, E., y Vulpiani, A. (2001). Drifter dispersion in the Adriatic Sea: Lagrangian data and chaotic model. *Annales Geophysicae*, **19**(1): 121–129.

Lehahn, Y., d'Ovidio, F., Lévy, M., y Heifetz, E. (2007). Stirring of the northeast Atlantic spring bloom: A Lagrangian analysis based on multisatellite data. *Journal of Geophysical Research*, **112**(C08).

Mathieu, J. y Scott, J. (2000). *An Introduction to Turbulent Flow*. Cambridge University Press.

Morel, P. y Larcheveque, M. (1974). Relative dispersion of constant–level balloons in the 200–mb general circulation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **31**(8): 2189–2196.

Ollitrault, M., Gabillet, C., y De Verdiere, A. C. (2005). Open ocean regimes of relative dispersion. *Journal of Fluid Mechanics*, **533**: 381–407.

Orlandi, P. (1990a). Vortex dipole rebound from a wall. *Physics of Fluids A*, **2**(8): 1429–1436.

Orlandi, P. (1990b). Numerical simulation of vortices motion in presence of solid boundaries. En: P. Wesseling (ed.), *Proceedings of the Eighth GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, Wiesbaden. Vieweg+Teubner Verlag, pp. 436–445.

Poulain, P.-M. y Niiler, P. P. (1989). Statistical analysis of the surface circulation in the California current system using satellite-tracked drifters. *Journal of Physical Oceanography*, **19**(10): 1588–1603.

Provenzale, A. (1999). Transport by coherent barotropic vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **31**(1): 55–93.

Richardson, L. F. (1926). Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **110**(756): 709–737.

Rivera, M. K. y Ecke, R. E. (2016). Lagrangian statistics in weakly forced two-dimensional turbulence. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **26**(1): 013103.

Rutgers, M. A. (1998). Forced 2d turbulence: Experimental evidence of simultaneous inverse energy and forward enstrophy cascades. *Phys. Rev. Lett.*, **81**: 2244–2247.

Salazar, J. P. y Collins, L. R. (2009). Two-particle dispersion in isotropic turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **41**(1): 405–432.

Scatamacchia, R., Biferale, L., y Toschi, F. (2012). Extreme events in the dispersions of two neighboring particles under the influence of fluid turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **109**: 144501.

Tabeling, P. (2002). Two-dimensional turbulence: a physicist approach. *Physics Reports*, **362**: 1–62.

Taylor, G. I. (1921). Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **20**: 196–212.

Vallis, G. K. (2006). *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, segunda edición.

van Geffen, J. H. G. M. (1998). NS-evol. Reporte técnico, Faculty of Technical Physics Internal Rep. R-1466-D, Fluid Dynamcis Laboratory, Eindhoven University of Technology, Holanda. 152 pp.

van Heijst, G. J. F., Clercx, H. J. H., y Molenaar, D. (2006). The effects of solid boundaries on confined two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **554**: 411–431.

Wells, M. G., Clercx, H. J. H., y van Heijst, G. J. F. (2008). Dispersion and mixing in quasi-two-dimensional rotating flows. En: J. B. Weiss y A. Provenzale (eds.), *Transport and Mixing in Geophysical Flows: Creators of Modern Physics*, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg, pp. 119–136.

Yeung, P. K. (2001). Lagrangian characteristics of turbulence and scalar transport in direct numerical simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, **427**: 241–274.

Yeung, P. K. (2002). Lagrangian investigations of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **34**(1): 115–142.

Zavala Sansón, L., Pérez-Brunius, P., y Sheinbaum, J. (2017). Surface relative dispersion in the Southwestern Gulf of Mexico. *Journal of Physical Oceanography*, **47**(2): 387–403.

Zavala Sansón, L. (2015). Surface dispersion in the Gulf of California. *Progress in Oceanography*, **137**: 24–37.

Zavala Sansón, L. y Provenzale, A. (2009). The effects of abrupt topography on plankton dynamics. *Theoretical Population Biology*, **76**(4): 258–267.

Zavala Sansón, L. y van Heijst, G. J. F. (2000). Nonlinear Ekman effects in rotating barotropic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **412**: 75–91.