


TESIS DEFENDIDA POR
Jorge Sánchez Gómez
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



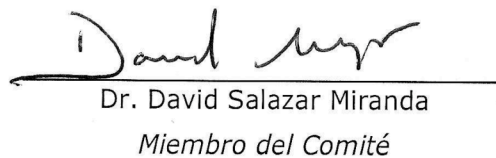
Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director del Comité



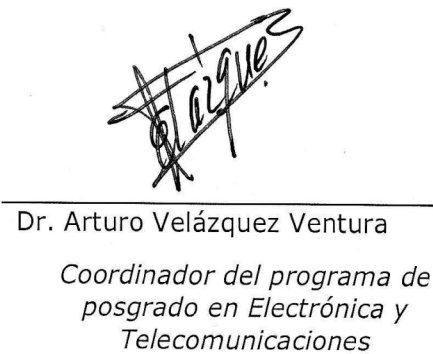
Dr. Roberto Conte Galván
Miembro del Comité



Dr. Arturo Velázquez Ventura
Miembro del Comité



Dr. David Salazar Miranda
Miembro del Comité



Dr. Arturo Velázquez Ventura

*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y
Telecomunicaciones*



Dr. Edgar Gerardo Pavía López

Director de Estudios de Posgrado

6 de Julio de 2007

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**SÍNTESIS, VÍA TÉCNICAS ANALÍTICAS DE AGRUPAMIENTO DE ANTENAS,
CON ESPACIAMIENTO NO UNIFORME EN GEOMETRÍAS LINEAL Y PLANAR**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:
JORGE SÁNCHEZ GÓMEZ

Ensenada, Baja California, México, Julio de 2007.

RESUMEN de la tesis de **Jorge Sánchez Gómez**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California. Julio de 2007.

SÍNTESIS, VÍA TÉCNICAS ANALÍTICAS DE AGRUPAMIENTO DE ANTENAS,
CON ESPACIAMIENTO NO UNIFORME EN GEOMETRIAS LINEAL Y PLANAR

Resumen aprobado por:

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Tesis

En comunicaciones móviles celulares, empleando sistemas de antenas inteligentes, un problema abierto y actual es la síntesis del diagrama de radiación con características de alta directividad, mínimos lóbulos laterales, dirigibilidad al usuario de interés, y de adaptabilidad al entorno cambiante del canal radio. La determinación de las amplitudes de la excitación de los elementos que forman un agrupamiento de antenas, así como la estructura propia del agrupamiento, que mejoren las propiedades de radiación del agrupamiento de antenas, son uno de los temas de mayor interés dentro de la tecnología de antenas inteligentes.

Debido a que el problema de la síntesis de diagramas de radiación, involucran dependencias no lineales con las características de los elementos y la estructura del agrupamiento de antenas, las técnicas analíticas basadas en emplear funciones de Legendre, se vuelven más adecuadas para este tipo de problemas de optimización.

En este trabajo se presenta el estudio realizado a las Técnicas Analíticas Generalizadas, para representar el factor de agrupamiento en términos de polinomios de Legendre. Derivando en un modelo genérico, aplicable a diferentes geometrías de agrupamientos (lineal y planar), para determinar las excitaciones y posiciones de los elementos de antena, donde este modelo es aplicable para agrupamientos con espaciamientos uniformes y no uniformes entre cada elemento de antena del agrupamiento.

Los resultados presentados en este trabajo, muestran los beneficios de las funciones de Legendre sobre algunas técnicas de cómputo evolutivo de optimización, en particular las ventajas obtenidas en el tiempo de cómputo del algoritmo. Además de comparaciones entre los resultados obtenidos por los distintos métodos, así como la evaluación de la dirigibilidad y la directividad, son analizadas y discutidas.

Palabras clave: Optimización, agrupamiento de antenas, síntesis del diagrama de radiación, polinomios de Legendre, comunicaciones móviles.

ABSTRACT of the thesis presented by **Jorge Sanchez Gomez** as a partial requirement to obtain the **MASTER OF SCIENCE** degree in **ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS**. Ensenada, Baja California, Mexico. July 2007.

SYNTHESIS, VIA ANALYTICAL TECHNIQUES OF ANTENNA ARRAYS, WITH NO UNIFORM SPACING FOR LINEAR AND PLANAR GEOMETRIES

In mobile cellular communications, using smart antennas technology has an open and present problem that is, the radiation pattern synthesis with characteristics as high directivity, minimum lateral lobes, steering to the user, and adaptability to the changing environment of the radio channel. The determination of the current amplitude and structure of the antenna arrays, to improve its radiation properties, are one of the issues of greater interest within the technology of smart antennas.

Radiation pattern synthesis problem involves nonlinear dependency on characteristics of the elements and the structure of the array. The analytical techniques are based on using Legendre functions, which is highly suitable for optimization of above mentioned problems.

In this work Generalized Analytical Techniques are presented, to derive the array factor in terms of Legendre polynomials. Archiving a generic model, applicable for different array geometries (linear and planar), to determine the current and position of respective antenna elements, where this model is applicable to arrays with uniform and no uniform spacings between each element of antenna array.

The numerical results presented in this work, show the benefits of the Legendre functions over some evolutionary algorithms of optimization, in particular the computation time of the algorithm. In addition, comparison between the results obtained by different methods, as well as the evaluation of steering and directivity are analyzed and discussed.

Keywords: Optimization, antenna arrays, radiation pattern synthesis, Legendre polynomials, mobile communications.

DEDICATORIA

A mi familia, en especial a mis padres...

AGRADECIMIENTOS

Gracias Dios por darme serenidad, tolerancia, confianza y conocimiento en esta etapa de la vida.

Agradecer el apoyo incondicional de mi familia, por su constante apoyo y motivación a lo largo de este proyecto académico y de vida.

Al Dr. David H. Covarrubias Rosales por su excelente dirección en este trabajo de tesis, gracias a sus consejos, paciencia y apoyo se logró culminar con éxito este trabajo. Doctor para mi es y será un honor trabajar con usted.

A los miembros del comité de tesis Dr. Roberto Conte Galván, Dr. David Salazar Miranda, Dr. Arturo Velázquez, gracias por sus consejos y aportaciones realizadas en el desarrollo de esta tesis.

Agradecimiento especial al Dr. Preetham B. Kumar por sus explicaciones, paciencia y aportaciones en este trabajo de tesis.

A mi amigo Richard Torrealba por toda la ayuda recibida y por los momentos de estudio y ocio, muchas gracias.

Al Grupo de Comunicaciones Inalámbricas (GCI) y a mis amigos del grupo: Richard, Edna, Lennin y Rubén, gracias a su ayuda, apoyo y compañía pude mantener el animo hasta el final.

También agradecer a mis amigos y compañeros de generación, Ivan, Andalon, Varun, Beto, Jonatan, Carlitos, Kobe, Aldo, Andrés, Mario, Daniel, Dania, Sergio, Marco, Javier, Paul, Sarai, Luis, Raymundo, por todas las experiencias que vivimos a lo largo de estos años.

A todo el personal del CICESE y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por permitirme continuar con mis estudios y por el apoyo económico suministrado.

Se agradece al CONACYT por el apoyo otorgado en los proyectos: “Optimización convexa aplicada a la síntesis del diagrama de radiación de Agrupamientos de Antenas en comunicaciones móviles celulares e investigación” y “Desarrollo de nuevos Sistemas de Antena Utilizando Técnicas de Optimización Evolutiva,” con claves J50839’Y-52374, sobre los cuales se enmarcó este trabajo de tesis.

CONTENIDO

Lista de Figuras.....	iv
Lista de Tablas.....	vii
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.....	1
<i>I.1. Tecnología de antenas inteligentes para sistemas de comunicaciones móviles.....</i>	1
<i>I.2. Planteamiento del Problema.....</i>	4
<i>I.3. Objetivos de la tesis.....</i>	5
<i>I.4. Metodología de investigación</i>	6
<i>I.5. Organización de la tesis y contribuciones.....</i>	6
CAPÍTULO II. GENERALIDADES DE ANTENA Y SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN DE AGRUPAMIENTOS DE ANTENA.....	9
<i>II.1. Introducción.....</i>	9
<i>II.2. Parámetros básicos de una antena.....</i>	10
II.2.1. Diagrama de radiación.....	11
II.2.2. Lóbulos del diagrama de radiación	13
II.2.3. Ancho de haz.....	13
II.2.4. Directividad.....	15
<i>II.3. Agrupamientos de antena.....</i>	16
II.3.1. Agrupamiento lineal de antenas.....	17
II.3.2. Agrupamientos no uniformes.....	20
II.3.3. Agrupamiento planar de antenas.....	22
<i>II.4. Síntesis del diagrama de radiación.....</i>	25
II.4.1. Síntesis del diagrama de radiación en un agrupamiento lineal	25
II.4.2. Síntesis del diagrama de radiación en un agrupamiento planar	27
<i>II.5. Conclusiones.....</i>	29
CAPÍTULO III. MÉTODO DE LA TÉCNICA ANALÍTICA GENERALIZADA APLICADA A LA SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN.....	31
<i>III.1. Introducción.....</i>	31
<i>III.2. Transformada de Legendre.....</i>	32
III.2.1. Polinomios de Legendre.....	33
III.2.2. Funciones de Legendre de medio orden.....	34
<i>III.3. Problema de la síntesis del agrupamiento de antena.....</i>	35
<i>III.4. Técnica analítica generalizada para optimización.....</i>	37

CONTENIDO (continuación)

<i>III.5. Síntesis de agrupamiento lineal y planar aplicando la técnica analítica generalizada.....</i>	38
III.5.1. Síntesis de agrupamiento lineal aplicando funciones de Legendre.....	39
III.5.2. Síntesis de agrupamiento planar aplicando funciones de Legendre.....	45
<i>III.6. Conclusiones.....</i>	50
CAPÍTULO IV. SIMULACION Y ANÁLISIS DE RESULTADOS APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE A UN AGRUPAMIENTO LINEAL.....	51
<i>IV.1. Introducción.....</i>	51
<i>IV.2. Escenarios de simulación.....</i>	52
IV.2.1. Respuesta natural, Taylor y Legendre en un agrupamiento lineal uniforme	52
IV.2.2. Funciones de Legendre en un agrupamiento lineal uniforme y no uniforme	55
IV.2.3. Nivel de lóbulos laterales y ancho de haz respecto a la dirigibilidad del lóbulo principal.	62
IV.2.4. Funciones de Legendre en un agrupamiento lineal no uniforme de 37 elementos.....	64
IV.2.5. Comparación de SLL y HPBW respecto a la dirigibilidad en un agrupamiento de 17 y 37 elementos.....	67
<i>IV.3. Tiempo de cómputo en un agrupamiento lineal aplicando funciones de Legendre.....</i>	69
<i>IV.4. Análisis numérico y conclusiones.....</i>	70
CAPÍTULO V. SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE A UN AGRUPAMIENTO PLANAR.....	74
<i>V.1. Introducción.....</i>	74
<i>V.2. Escenarios de simulación.....</i>	75
V.2.1. Respuesta natural de un agrupamiento planar 31x31 con espaciamiento uniforme entre elementos.....	75
V.2.2. Funciones de Legendre en un agrupamiento planar uniforme y no uniforme.....	77
V.2.3. Funciones de Legendre para la síntesis del diagrama en un agrupamiento planar no uniforme.....	80
<i>V.3. Tiempo de cómputo en un agrupamiento planar aplicando funciones de Legendre.....</i>	83
<i>V.4. Análisis numérico y conclusiones.....</i>	85

CONTENIDO (continuación)

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES, CONTRIBUCIONES Y TRABAJO FUTURO.....	88
<i>VI.1. Sobre la síntesis del diagrama de radiación empleando funciones de Legendre.....</i>	88
VI.1.1. Sobre la síntesis del diagrama de radiación del agrupamiento lineal de antenas.....	89
VI.1.2. Sobre la síntesis del diagrama de radiación del agrupamiento planar de antenas.....	91
<i>VI.2. Contribuciones.....</i>	92
<i>VI.3. Publicaciones generadas del presente trabajo.....</i>	93
<i>VI.4. Trabajo futuro.....</i>	94
REFERENCIAS.....	95
APENDICE A. SIMETRÍA EN EL DIAGRAMA DE RADIACIÓN.....	98
APENDICE B. POLINOMIOS DE LEGENDRE DE MEDIO ORDEN.....	100

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama de radiación adaptativo.....	2
Figura 2. Estructura de la metodología empleada en este trabajo de tesis.....	7
Figura 3. a) Diagrama del campo normalizado en dos dimensiones (escala lineal), b) diagrama de potencia (escala lineal), y c) diagrama de potencia (en dB).....	12
Figura 4. Diagrama de radiación y clasificación de los lóbulos laterales del diagrama....	13
Figura 5. Diagramas de potencia (en escala lineal) de la intensidad de radiación normalizada $U(\theta) = \cos^2(\theta) \cos^2(3\theta)$. Representación a) en el espacio, b) polar.....	14
Figura 6. Geometrías de agrupamientos de antenas.....	17
Figura 7. Geometría en campo lejano de un agrupamiento lineal uniforme de N elementos.....	18
Figura 8. Agrupamientos lineales no uniformes, a) número par de elementos, b) número impar de elementos	21
Figura 9. Geometrías de agrupamientos, a) Lineal, b) En el plano.....	23
Figura 10. Diagrama de radiación con lóbulos tipo rejilla.....	25
Figura 11. Diagrama de radiación generado por un agrupamiento lineal de antenas....	28
Figura 12. Diagrama de radiación generado por un agrupamiento planar de antenas...	28
Figura 13. a) Solución lineal de la síntesis del agrupamiento. b) Solución no lineal de la síntesis del agrupamiento.....	36
Figura 14. Geometría de un agrupamiento lineal con espaciamiento no uniforme.....	39
Figura 15. Geometría de un agrupamiento planar de elementos $N_1 \times N_2$	45
Figura 16. Respuesta natural y de Taylor de un agrupamiento lineal uniforme.....	53
Figura 17. Síntesis de Taylor y funciones Legendre en un agrupamiento lineal uniforme de 17 elementos.....	54

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura 18. Diagrama de radiación aplicando funciones de Legendre.....	56
Figura 19. Diagrama de radiación para un agrupamiento lineal de 17 elementos, aplicando funciones de Legendre.....	57
Figura 20. Agrupamiento lineal simétrico impar de $2N+1$ elementos.....	58
Figura 21. Respuesta natural y de Taylor de un agrupamiento lineal no uniforme.....	60
Figura 22. Síntesis de Taylor y Legendre en un agrupamiento lineal no uniforme.....	60
Figura 23. SLL resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 17 elementos, aplicando Legendre, con espaciamento no uniforme.....	63
Figura 24. HPBW resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 17 elementos, aplicando Legendre con espaciamento no uniforme.....	63
Figura 25. Diagrama de radiación para un agrupamiento lineal de 37 elementos, aplicando funciones de Legendre con separación uniforme y no uniforme entre elementos de antena.....	65
Figura 26. SLL resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 37 elementos, aplicando Legendre con espaciamento no uniforme.....	68
Figura 27. HPBW resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 17 elementos, aplicando Legendre con espaciamento no uniforme.....	68
Figura 28. Tiempo de cómputo en un agrupamiento lineal aplicando funciones de Legendre.....	70
Figura 29. Comparación del mínimo SLL obtenido por diferentes métodos.....	71
Figura 30. Comparación del mínimo HPBW obtenido por diferentes métodos.....	72
Figura 31. Estructura del primer cuadrante de un agrupamiento planar de 31×31 elementos de antena con espaciamento uniforme.....	76
Figura 32. Diagrama de radiación de la respuesta natural de un agrupamiento planar de 31×31 elementos de antena con espaciamento uniforme ($\lambda/2$).....	76

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura 33. Diagrama de radiación de un agrupamiento planar de 7x7 elementos de antena. a) Respuesta en el espacio obtenida mediante simulación para su validación. b) Diagrama representado en curvas de nivel.....	78
Figura 34. Diagrama de radiación aplicando funciones de Legendre con espaciamiento uniforme en un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena.....	79
Figura 35. Estructura del primer cuadrante de un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena con espaciamiento no uniforme.....	80
Figura 36. Agrupamiento lineal simétrico impar de $2N+1$ elementos.....	81
Figura 37. Diagrama de radiación aplicando funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme en un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena.	82
Figura 38. Tiempo de cómputo en un agrupamiento planar aplicando funciones de Legendre.....	84
Figura 39. Comparación del mínimo SLL obtenido por diferentes métodos.....	85
Figura 40. Comparación de la directividad obtenida por diferentes métodos.....	86

LISTA DE TABLAS

Tabla I. Resultados de SLL y HPBW de la respuesta natural, síntesis de Taylor y funciones de Legendre con espaciado uniforme ($\lambda/2$) entre elementos de antena.....	55
Tabla II. Respuestas del diagrama de radiación implementando funciones de Legendre.....	57
Tabla III. Excitaciones y espaciados de un agrupamiento lineal de 17 elementos aplicando funciones de Legendre, con un factor de ensanchamiento de $\Delta=0.345$	58
Tabla IV. Resultados de SLL y HPBW de la respuesta natural, síntesis de Taylor y funciones de Legendre con espaciado no uniforme entre elementos de antena...	61
Tabla V. HPBW y SLL obtenidos en cada respuesta en un agrupamiento de 37 elementos de antena, con un factor de ensanchamiento $\Delta=0.263$	66
Tabla VI. Excitaciones y espaciados de un agrupamiento lineal de 37 elementos, aplicando funciones de Legendre, factor de ensanchamiento $\Delta=0.263$	66
Tabla VII. Excitaciones y espaciados de un agrupamiento planar no uniforme de 31x31 elementos, aplicando funciones de Legendre con factor de ensanchamiento $\Delta=0.345$	81
Tabla VIII. Resultados de SLL, HPBW y directividad de la respuesta natural y funciones de Legendre para un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena..	83

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

I.1 TECNOLOGÍA DE ANTENAS INTELIGENTES PARA SISTEMAS DE COMUNICACIONES MÓVILES CELULARES

El incremento del tráfico y los nuevos servicios en los sistemas de comunicaciones móviles celulares de Tercera y Cuarta Generación, ha generado el reto de proveer una mayor capacidad en el número de usuarios de las redes de comunicaciones, y una mayor calidad en el servicio para proporcionar una amplia variedad de servicios multimedia, a través de un canal inalámbrico fiable de alta velocidad. Actualmente, una de las técnicas más prometedoras para lograr los requerimientos en capacidad y calidad de servicio, necesarias en los sistemas de comunicaciones móviles celulares son las antenas inteligentes. El concepto de antenas inteligentes se propone como una solución al problema de incrementar de forma significativa la capacidad, la velocidad de los datos y mejorar la calidad de la transmisión inalámbrica que presentan actualmente estos sistemas. El principio de las antenas inteligentes, es generar diagramas de radiación adaptables a las condiciones

cambiantes del medio de transmisión [Godara, 2004]. La adaptabilidad se logra mediante la formación de diagramas de radiación directivos, para cumplir dos funciones:

- a. Optimizar la potencia radiada hacia la dirección del usuario de interés.
- b. Eliminar las señales de los usuarios distintos al usuario de interés, reduciendo con ello las señales interferentes.

Para lograr la cancelación de usuarios interferentes, es necesaria la generación de una alta ganancia en la dirección deseada, y simultáneamente, dirigir un diagrama de radiación con ganancia cero en las direcciones de los interferentes.

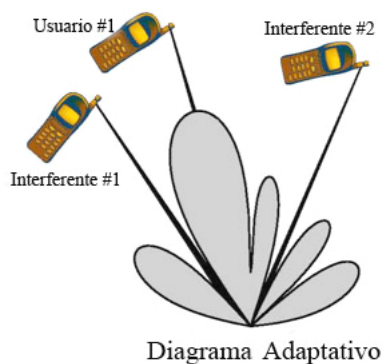


Figura 1. Diagrama de radiación adaptativo [Balanis, 2005].

Una antena inteligente consiste de un conjunto de elementos radiadores, y un procesamiento digital de las señales enviadas o recibidas por dichos elementos. La tecnología de antenas inteligentes en los sistemas de comunicaciones móviles celulares genera los siguientes beneficios en las prestaciones de dichos sistemas [Lehne y Pettersen, 1999]:

- a. *Incremento en la capacidad.* Los sistemas de comunicaciones móviles celulares en áreas densamente pobladas, normalmente están limitados por las señales de interferencia. El incremento en la capacidad se logra incrementando la relación de la señal de usuario a la señal de interferencia (SIR).
- b. *Incremento en la cobertura.* Debido a que las antenas inteligentes utilizan antenas de mayor directividad comparadas con las antenas tradicionalmente utilizadas, como las sectoriales o las omnidireccionales, el área de cobertura de la señal se incrementa.
- c. *Nuevos servicios.* Mediante el uso de antenas inteligentes, los sistemas de comunicaciones móviles celulares tendrán acceso a la localización de los diferentes usuarios.
- d. *Reducción de la propagación por multitrayectoria.* Al emplear diagramas de radiación más directivos en la estación base, la propagación por multitrayectoria puede reducirse.

Finalmente, ciertos factores actúan como desventajas en la aplicación de la tecnología de antenas inteligentes en los sistemas de comunicaciones móviles, entre otros se pueden mencionar [Lehne y Pettersen, 1999]:

- a. *Complejidad del sistema.* Comparado con una antena omnidireccional o sectorial, una antena inteligente requiere un procesamiento de las señales recibidas, como algoritmos de localización de usuario de interés.

- b. *Manejo de recursos*. Las antenas inteligentes involucran en su funcionamiento configuraciones de conexiones y manejo de movilidad, como las funciones de trasposos, no sólo en forma intercelular, sino intracelular.

El diseño de los sistemas de antenas inteligentes presenta un número importante de retos, los cuales han generado las principales líneas de investigación en este tema. En la actualidad estas líneas están enfocadas a:

- a. Optimización de los agrupamientos de antenas¹.
- b. Algoritmos de conformación digital de haz.
- c. Algoritmos de estimación de direcciones de arribo de las señales.

Este trabajo de tesis se enfocará en la optimización de los agrupamientos de antena.

I.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En comunicaciones móviles celulares empleando antenas inteligentes un problema abierto y actual es, la síntesis del diagrama de radiación con características de alta directividad, mínimos lóbulos laterales, dirigibilidad al usuario de interés, y de adaptabilidad al entorno cambiante del canal radio. Dentro de la síntesis de los diagramas de radiación, la determinación de las amplitudes y fases de la excitación de los elementos que forman un agrupamiento de antenas, así como la estructura propia del agrupamiento, que mejoren las propiedades de radiación del agrupamiento de antenas, es uno de los temas

¹ A lo largo de este trabajo, se utilizará el término agrupamiento de antenas para hacer referencia al término *array antennas*.

de mayor interés dentro de la tecnología de antenas inteligentes en comunicaciones móviles celulares. El problema de la síntesis de diagramas de radiación, involucra dependencias no lineales y no convexas con las características de los elementos y la estructura del agrupamiento de antenas.

En este trabajo se plantea el uso de las llamadas Técnicas Analíticas Generalizadas o Aproximaciones Matemáticas Unificadas, basadas en emplear funciones de Legendre, buscando con ello, mejorar las prestaciones en la síntesis del diagrama de radiación en términos de la reducción del nivel de lóbulos laterales, además de una máxima ganancia en el lóbulo principal. Un aspecto importante, derivado de las premisas de diseño, será una reducción en tamaño, peso y número de elementos del agrupamiento de antenas. Se buscará que el modelado matemático de la síntesis de agrupamiento de antenas, derive en un modelo genérico tal que pueda aplicarse a diferentes tipos de geometrías de agrupamientos como lineal y planar.

Por primera vez en el Grupo de Comunicaciones Inalámbricas (GCI) donde se desarrolló este trabajo, se abordó el diseño de algoritmos de optimización mediante técnicas analíticas. Por otro lado, vale la pena mencionar que en los principales grupos de investigación de comunicaciones inalámbricas en el mundo, el problema de la síntesis del diagrama de radiación constituye un reto por enfrentar.

I.3 OBJETIVO DE LA TESIS

Modelado, simulación de la síntesis y optimización del diagrama de radiación considerando agrupamientos lineal y planar con espaciamiento no uniforme, con reducción

simultánea en el nivel de lóbulos laterales y evaluación del comportamiento de parámetros de antena, como dirigibilidad del haz, el ancho del haz principal y la directividad, para que se permita tener una mayor reducción de interferentes y con ello mejorar la capacidad y calidad del sistema. Se recurrirá a algoritmos de optimización mediante técnicas analíticas, los cuales representan el estado del arte de la investigación en el tema.

I.4 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología empleada para el desarrollo de este trabajo, se muestra en la Figura 2 y es refleja a través de los capítulos que forman esta tesis. Para la obtención de resultados en la representación del factor de agrupamiento en términos de polinomios de Legendre se implementó la plataforma MATLAB

I.5 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

En base a la metodología que se presenta, el trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo II, se establecen los conceptos básicos de los parámetros de la antena, para posteriormente utilizarlos en la evaluación de las prestaciones de una antena; además, se introduce el concepto y generalidades de los agrupamientos de antenas. El capítulo III, presenta el estudio realizado a las Técnicas Analíticas Generalizadas o Aproximaciones Matemáticas Unificadas, empleando funciones de Legendre, donde se presentará a detalle el modelado matemático de la síntesis del agrupamiento de antenas, para representar el factor de agrupamiento en términos de polinomios de Legendre. Derivando en un modelo genérico, aplicable a diferentes geometrías de agrupamientos, la

importancia, originalidad y trascendencia de este trabajo es, que se aborda el estado del arte en el problema de la síntesis del diagrama de radiación.

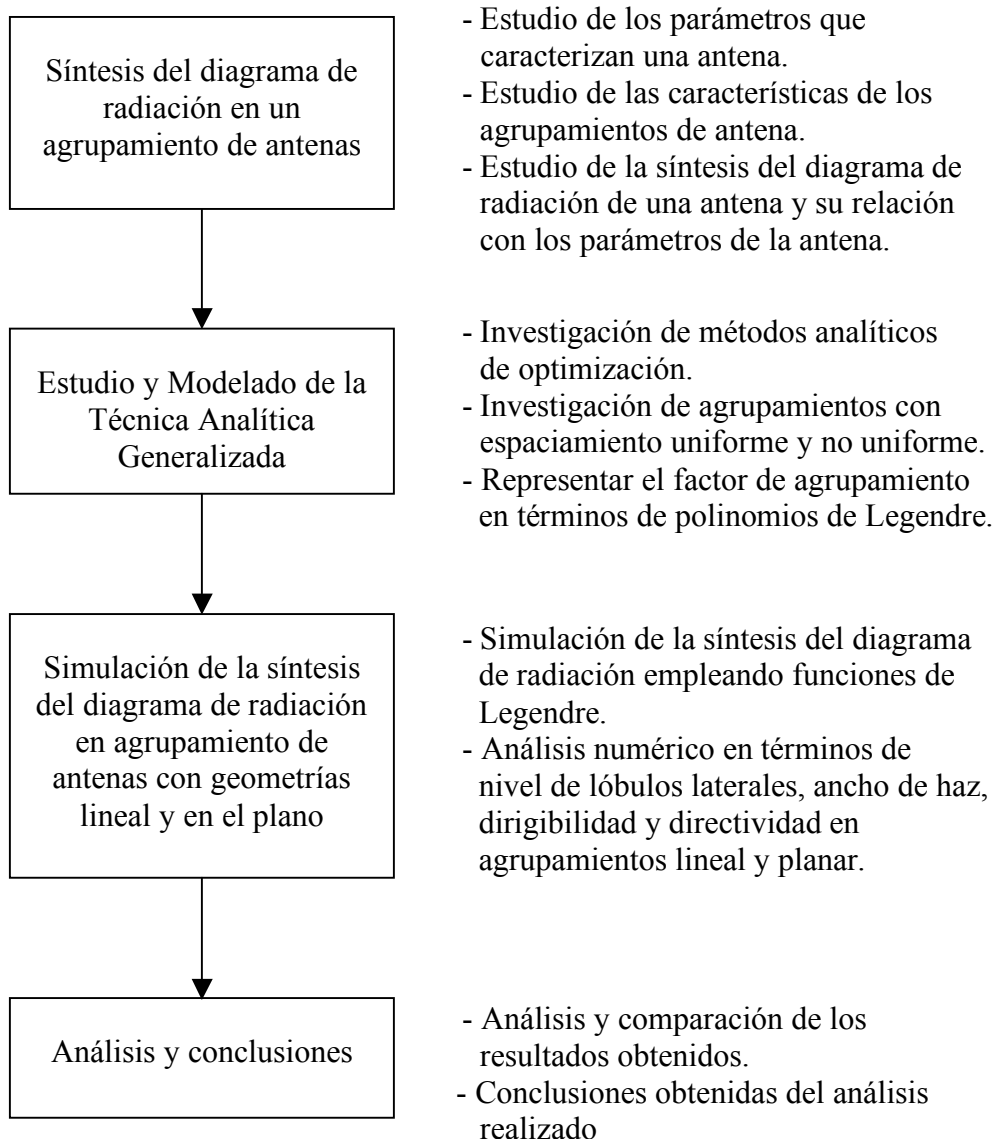


Figura 2. Estructura de la metodología empleada en este trabajo de tesis.

El capítulo IV presenta la simulación de la síntesis del diagrama de radiación, aplicando funciones de Legendre a un agrupamiento lineal de antenas. Este capítulo hace

énfasis en la determinación de las excitaciones y posiciones de los elementos de antena, obteniendo un agrupamiento lineal con espaciamentos uniformes o no uniformes entre cada elemento de antena del agrupamiento. También, en este capítulo se efectúa el análisis de la dirigibilidad del haz principal del diagrama de radiación mediante técnicas analíticas, el cual es una de las contribuciones al estado del arte de este trabajo, ya que en la actualidad no existen trabajos que reporten el comportamiento de este parámetro. En el capítulo V, se presentan las simulaciones de la síntesis del diagrama de radiación, utilizando funciones de Legendre aplicadas a agrupamientos planares, empleando espaciamentos uniformes y no uniformes entre elementos de antena adyacentes. En este capítulo se utilizarán las funciones de Legendre para la reducción del nivel de lóbulo lateral y el aumento de la directividad en el diagrama de radiación. La evaluación de la directividad es una segunda contribución de este trabajo, porque actualmente no hay muchos trabajos enfocados a agrupamientos de antenas impares simétricos y además no evalúan este parámetro. Los resultados obtenidos son analizados y comparados con otros trabajos, realizados dentro de GCI como son, Algoritmos Genéticos (GA) [Panduro, 2005] y Evolución Diferencial (DE) [Rocha, 2006], para concluir sobre los resultados obtenidos. Los análisis de dirigibilidad y directividad aquí realizados constituyen una de las aportaciones más importantes de esta tesis, ya que después de realizar una intensa búsqueda bibliográfica, el único trabajo reportado de optimización empleando funciones de Legendre es el de [Kumar y Branner, 2005], donde no se reporta resultado alguno del comportamiento de estos parámetros. Finalmente, en el capítulo VI se presentan las conclusiones generales tanto para agrupamientos lineales como para planares, además de contribuciones de este trabajo y trabajos futuros, en función de los objetivos planteados anteriormente en esta tesis.

CAPÍTULO II

GENERALIDADES DE ANTENA Y SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN DE AGRUPAMIENTOS DE ANTENA

II.1 INTRODUCCIÓN

Una antena es definida de acuerdo al estándar de definiciones de términos para antenas de la IEEE¹ como “un medio para radiar o recibir ondas de radio”. En otras palabras, la antena es la estructura de transición entre el espacio libre y el dispositivo de guía de onda [Balanis, 2005]. Si bien sus formas son muy variadas, todas las antenas tienen en común el ser una región de transición entre una zona donde existe una onda electromagnética guiada y una onda en el espacio libre, a la que puede además asignar un carácter direccional. La representación de la onda guiada se realiza por voltajes y corrientes (hilos conductores y líneas de transmisión) o por campos (guías de ondas); en el espacio libre, mediante campos.

¹ IEEE corresponde a las siglas de Institute of Electrical and Electronics Engineers.

La misión de la antena es radiar la potencia que se le suministra con las características de direccionalidad adecuadas a la aplicación. Existen, pues, dos misiones básicas de una antena: transmitir y recibir, imponiendo cada aplicación condiciones particulares sobre la direccionalidad de la antena [Cardama, 2002].

De acuerdo al objetivo general de esta tesis, en este capítulo se establecerá el funcionamiento de la antena y los parámetros que se utilizan para medir sus prestaciones, además de determinar las síntesis del diagrama de radiación. La información que se presentará es importante porque de cara al siguiente capítulo donde se manejarán estos parámetros dentro del modelado del sistema. En la primera sección de este capítulo se presentan las definiciones que corresponden a los principales parámetros utilizados para evaluar las prestaciones de antena, como es el diagrama de radiación, nivel de lóbulos laterales, ancho de haz y la directividad. La segunda y tercera sección presentan una introducción a los agrupamientos de antena, tanto para un agrupamiento lineal como en un plano, agrupamientos no uniformes, y la síntesis del diagrama de radiación, siendo la síntesis del diagrama el objetivo de este trabajo de tesis. Por último, en la cuarta sección se exponen las conclusiones correspondientes a este capítulo.

II.2 PARÁMETROS BÁSICOS DE UNA ANTENA.

En esta sección se presentan los parámetros básicos de una antena, relacionados con el modelado y simulación de este trabajo, estos son: diagrama de radiación, nivel de lóbulos laterales, ancho de haz, y directividad. Mediante estos parámetros serán cuantificadas las prestaciones que nos ofrece la respuesta del sistema medida en términos del diagrama de

radiación. A continuación se presentan las principales definiciones que corresponden a los parámetros de la antena.

II.2.1 DIAGRAMA DE RADIACIÓN

El diagrama de radiación de una antena es definido como una función matemática o una representación matemática de las propiedades de radiación de la antena en función de las coordenadas espaciales. En la mayoría de los casos, el diagrama de radiación es determinado en la región de campo lejano y es representado como una función de las coordenadas direccionales. Las propiedades de radiación incluyen densidad de flujo de potencia, intensidad de radiación, fuerza del campo, directividad, fase o polarización. A menudo los diagramas del campo y potencia son normalizados con respecto a sus máximos valores, permitiendo campos normalizados y diagramas de potencia [Balanis, 2005]. El diagrama de intensidad de potencia es usualmente graficado en una escala logarítmica o más comúnmente en decibeles (dB). Esta escala es comúnmente utilizada porque es logarítmica y puede acentuar en más detalles las partes del diagrama que tienen valores muy pequeños. Para una antena, se define:

- a. *diagrama del campo (en escala lineal)* típicamente representa una gráfica de la magnitud del campo eléctrico o magnético como una función del espacio angular.
- b. *diagrama de potencia (en escala lineal)* típicamente representa una gráfica del cuadrado de la magnitud del campo eléctrico o magnético en función del espacio angular.

c. *diagrama de potencia (en dB)* representa la magnitud del campo eléctrico o magnético en decibeles, en función del espacio angular.

Para comprender mejor lo antes mencionado, en la Figura 3 se presentan algunos ejemplos de estos diagramas.

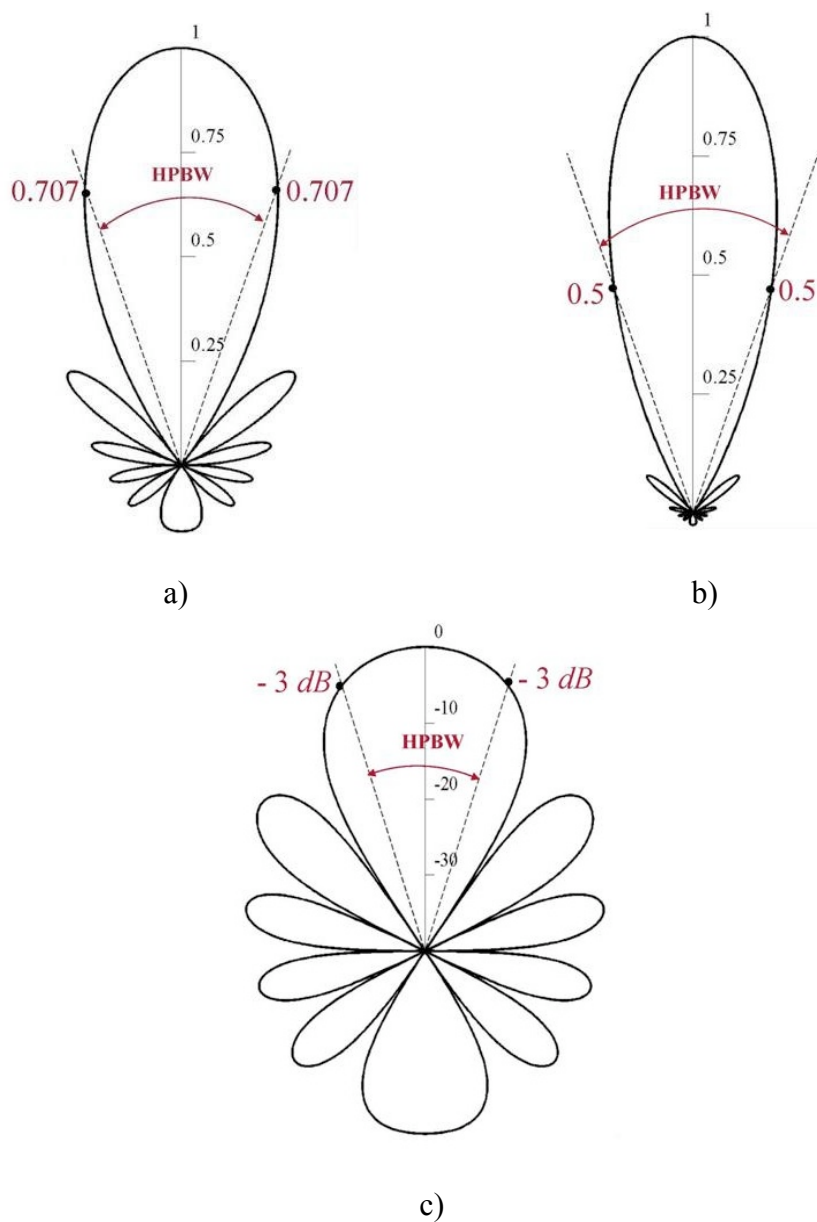


Figura 3. a) Diagrama del campo normalizado en dos dimensiones (escala lineal), b) diagrama de potencia (escala lineal), y c) diagrama de potencia (en dB) [Balanis, 2005].

II.2.2 LÓBULOS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN

Algunas secciones del diagrama de radiación se denominan lóbulos, los cuales son limitados por regiones con una intensidad de radiación relativamente débil. Los lóbulos de radiación se clasifican en principal y menores o laterales; las distintas categorías de los lóbulos laterales se muestran en la Figura 4.

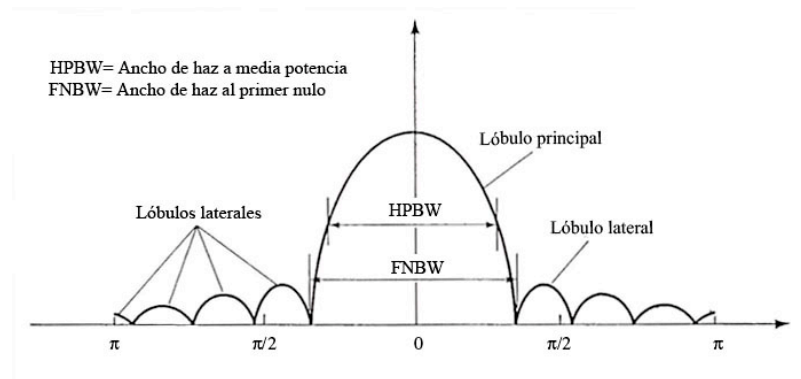


Figura 4. Diagrama de radiación y clasificación de los lóbulos laterales del diagrama [Balanis, 2005].

El nivel de lóbulo lateral (*Sidelobe Level - SLL*) de una antena se define como la razón entre la intensidad de radiación del mayor lóbulo lateral y la intensidad de radiación máxima, es decir [Godara, 2002]:

$$SLL = \frac{U_{\text{Mayor lóbulo lateral}}}{U_{\text{Máxima}}} = \frac{U_{SLL}}{U_{\text{Máxima}}} \quad (1)$$

donde:

U_{SLL} = intensidad de radiación del mayor lóbulo lateral
 U_{max} = intensidad de radiación máxima

II.2.3 ANCHO DEL HAZ

El ancho de haz de un diagrama es definido como la separación angular entre dos puntos idénticos en lados opuestos de el máximo del diagrama. En un diagrama de antena,

existen diferentes anchos de haz, uno que es ampliamente utilizado, es el ancho de haz a media potencia (*Half Power Beamwidth - HPBW*), el cual es definido como la separación angular de las direcciones en las que el diagrama de radiación de potencia toma el valor mitad del máximo, esto se muestra en la Figura 5. Otro importante ancho de haz, es la separación angular entre el primer nulo del diagrama, este es referido como el ancho de haz al primer nulo (*First Null Beamwidth - FNBW*). HPBW y FNBW son mostrados en el diagrama de la Figura 5. Sin embargo, en la práctica, el término *ancho de haz*, sin otra identificación, usualmente se refiere a HPBW [Balanis, 2005; Cardama, 2002].

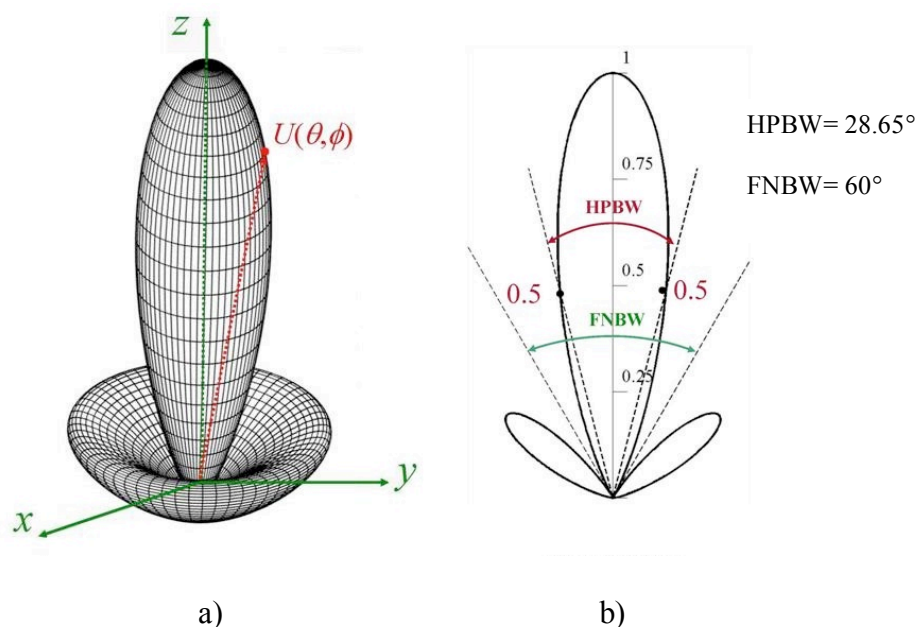


Figura 5. Diagramas de potencia (escala lineal) de la intensidad de radiación normalizada $U(\theta) = \cos^2(\theta) \cos^2(3\theta)$. Representación a) en el espacio, b) polar [Balanis, 2005].

El ancho de haz de una antena es una importante figura de merito y a menudo es usado como una compensación entre éste y el nivel de lóbulos laterales; esto es, cuando el ancho de haz disminuye, el lóbulo lateral se incrementa y viceversa. Además, el ancho de

haz de la antena es también utilizado para describir las capacidades de resolución de la antena para distinguir entre dos fuentes adyacentes de radiación.

II.2.4 DIRECTIVIDAD

La directividad de una antena se define como la relación entre la densidad de potencia radiada en una dirección, a una distancia dada, y la densidad de potencia que radiaría a esa misma distancia una antena isótropa que radiase la misma potencia que la antena. Si no se especifica la dirección angular, se sobreentiende que la directividad se refiere a la dirección de máxima radiación [Balanis, 2005]. En su forma matemática, la directividad se expresa como

$$D = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi U}{P_{rad}} \quad (2)$$

Si la dirección no es especificada, la directividad se va a referir a la dirección de máxima radiación (directividad máxima) expresada como

$$D_{max} = D_0 = \frac{U|_{max}}{U_0} = \frac{U_{max}}{U_0} = \frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}} \quad (3)$$

donde:

D =directividad

D_0 =directividad máxima

U =intensidad de radiación

U_{max} =intensidad de radiación máxima

U_0 =intensidad de radiación de una fuente isométrica

P_{rad} =potencia total radiada

La directividad se puede obtener, en general, a partir del conocimiento del diagrama de radiación de la antena [Cardama, 2002].

II.3 AGRUPAMIENTOS DE ANTENAS

En varias aplicaciones, las características de radiación de un solo elemento de antena no cumplen con los requerimientos necesarios de directividad, o nivel de lóbulo lateral. Por ejemplo, en comunicaciones a grandes distancias es necesario niveles altos de directividad (ganancia), esto únicamente puede ser logrado mediante el incremento del tamaño eléctrico de la antena [Balanis, 2005].

Aumentando las dimensiones de los elementos a menudo conduce a características más directivas. Otra manera para aumentar las dimensiones de la antena, sin necesidad de incrementar el tamaño de cada elemento, es formando un conjunto de elementos de radiación en una configuración eléctrica y geométrica. Esta nueva antena, formada por múltiples elementos, es referida como agrupamiento (*array*). En la mayoría de los casos, los elementos de un agrupamiento son idénticos. Esto no es necesario, pero es normalmente conveniente, por simplicidad, y por ser más práctico. El campo total de un agrupamiento es determinado por la adición del vector de los campos radiados de los elementos individuales. Para proporcionar diagramas muy directivos, es necesario que los campos de los elementos de interferencia constructiva se agreguen a las direcciones deseadas y la interferencia destructiva se cancelen. Idealmente esto puede ser logrado, pero en la práctica es aproximado. En un agrupamiento con elementos idénticos, hay al menos cinco parámetros que pueden ser utilizados para formar el diagrama total de la antena, estos son:

- a. La configuración geométrica de el agrupamiento que puede ser: lineal, circular, rectangular, esférico, etc.

- b. El espaciamiento relativo entre elementos de la antena.
- c. La amplitud de la excitación de cada elemento de antena.
- d. La fase de la excitación de cada uno de los elementos de la antena.
- d. El diagrama de radiación relativo generado por un elemento individual de antena.

Por lo tanto, para la generación de un diagrama de radiación deseado, se tiene una gran cantidad de variables de diseño. A continuación en la Figura 6 se presentan los geometrías de los agrupamientos de antenas lineal, en el plano y circular [Balanis, 2005].

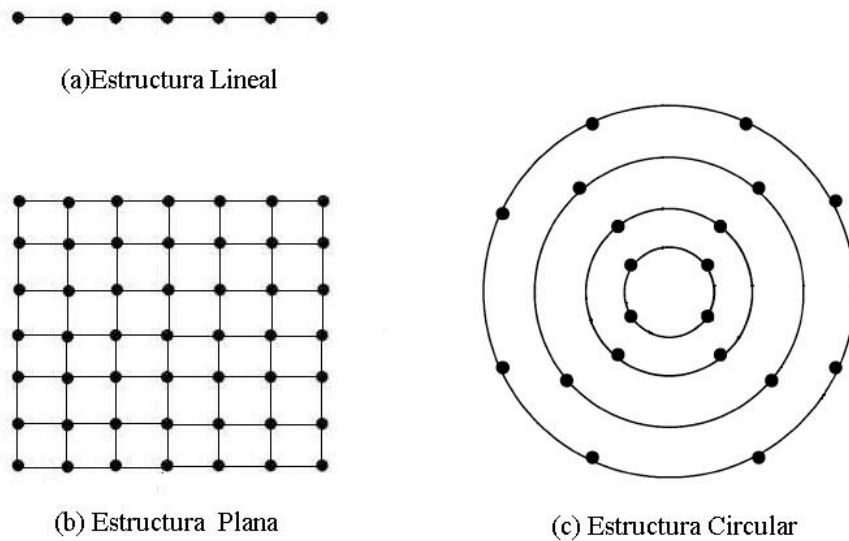


Figura 6. Geometrías de agrupamientos de antenas [Kumar y Branner, 2005].

II.3.1 AGRUPAMIENTO LINEAL DE ANTENAS

Para este tipo de geometrías y refiriéndose a la Figura 7, vamos a suponer que todos los elementos tienen amplitudes iguales pero cada elemento adyacente tiene una fase

progresiva relativa β del anterior. En un agrupamiento con todos los elementos idénticos, de magnitud idéntica y cada uno con una fase progresiva es referido como un agrupamiento uniforme. El factor de agrupamiento es dado por

$$AF = 1 + e^{+j(kd \cos\theta + \beta)} + e^{+j2(kd \cos\theta + \beta)} + \dots + e^{+j(N-1)(kd \cos\theta + \beta)} = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)(kd \cos\theta + \beta)} \quad (4)$$

el cual puede escribirse como

$$AF = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)\psi} ; \quad \psi = kd \cos\theta \quad (5)$$

donde k , d y θ son respectivamente, número de onda ($2\pi/\lambda$), posición del elemento y el margen de visibilidad². Entonces el factor de agrupamiento total de un agrupamiento uniforme es una sumatoria de exponenciales, donde estos pueden ser representados por la suma vector de cada N fasores de amplitud unitaria y fase progresiva relativa ψ de la anterior. En agrupamientos no uniformes, la amplitud así como la fase pueden ser utilizadas para controlar la formación y distribución del factor de agrupamiento total [Balanis, 2005].

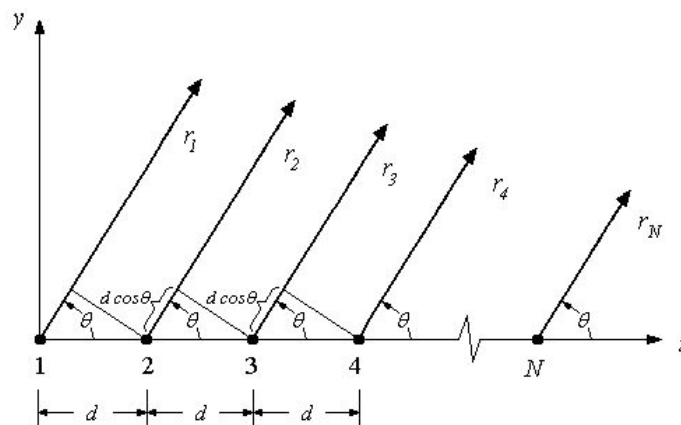


Figura 7. Geometría en campo lejano de un agrupamiento lineal uniforme de N elementos.

² El margen de visibilidad es la ventana de desplazamiento del diagrama de radiación.

El factor de agrupamiento de (5) puede también ser expresado en una forma compacta y cerrada, cuyas funciones y sus distribuciones son más conocidas. Esto se logra multiplicando ambos lados de (5) por $e^{j\psi}$, quedando

$$(AF)e^{j\psi} = e^{j\psi} + e^{2j\psi} + e^{3j\psi} + \dots + e^{j(N-1)\psi} + e^{j\psi} \quad (6)$$

substrayendo (5) de (6) se reduce a

$$AF(e^{j\psi} - 1) = (-1 + e^{jN\psi}) \quad (7)$$

el cual puede también ser escrito como

$$AF = \left[\frac{e^{jN\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} \right] = e^{j[(N-1)/2]\psi} \left[\frac{e^{j(N/2)\psi} - e^{-j(N/2)\psi}}{e^{j(1/2)\psi} - e^{-j(1/2)\psi}} \right] = e^{j[(N-1)/2]\psi} \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \right] \quad (8)$$

Si el punto de referencia es el centro físico del agrupamiento, el factor de agrupamiento de (8) se reduce a

$$AF = \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \right] \quad (9)$$

A partir de estas ecuaciones en la siguiente sección se podrán obtener mediante la manipulación matemática las expresiones de los factores de agrupamientos no uniformes que son de vital importancia en el modelado del sistema que se presenta en el capítulo III.

II.3.2 AGRUPAMIENTOS NO UNIFORMES

Un agrupamiento de un número par de elementos isotrópicos $2M$ (donde M es un entero) es posicionado simétricamente a lo largo del eje z , como el que se muestra en la Figura 8(a) [Balanis, 2005]. La separación entre elementos es d , y M elementos son colocados en cada lado del origen. Asumiendo que la amplitud de la excitación es simétrica sobre el origen, el factor de agrupamiento en modo transversal con amplitudes no uniformes, puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
 (\text{AF})_{2M} &= a_1 e^{+j(1/2)kd \cos \theta} + a_2 e^{+j(3/2)kd \cos \theta} + \dots \\
 &\quad + a_M e^{+j[(2M-1)/2]kd \cos \theta} \\
 &\quad + a_1 e^{-j(1/2)kd \cos \theta} + a_2 e^{-j(3/2)kd \cos \theta} + \dots \\
 &\quad + a_M e^{-j[(2M-1)/2]kd \cos \theta} \\
 (\text{AF})_{2M} &= 2 \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[\frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

el cual en forma normalizada se reduce a

$$(\text{AF})_{2M} = \sum_{n=1}^M a_n \cos \left[\frac{(2n-1)}{2} kd \cos \theta \right] \tag{11}$$

donde a_n son los coeficientes de excitación de los elementos del agrupamiento. Si el número total de los elementos isotrópicos del agrupamiento son impar $2M+1$ (donde M es un entero), como se muestra en la Figura 8(b), el factor puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
 (\text{AF})_{2M+1} &= 2a_1 + a_2 e^{+jkd \cos \theta} + a_3 e^{+j2kd \cos \theta} + \dots + a_{M+1} e^{+jMkd \cos \theta} \\
 &\quad + a_2 e^{-jkd \cos \theta} + a_3 e^{-j2kd \cos \theta} + \dots + a_{M+1} e^{-jMkd \cos \theta} \\
 (\text{AF})_{2M+1} &= 2 \sum_{n=1}^{M+1} a_n \cos [(n-1)kd \cos \theta]
 \end{aligned} \tag{12}$$

el cual en forma normalizada se reduce a

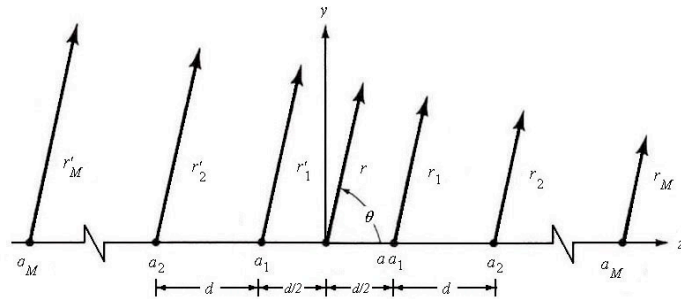
$$(AF)_{2M+1} = \sum_{n=1}^{M+1} a_n \cos[(n-1)kd \cos\theta] \quad (13)$$

La amplitud de la excitación del elemento del centro es $2a_1$. Las ecuaciones (10) y (11) pueden escribirse en forma normalizada como

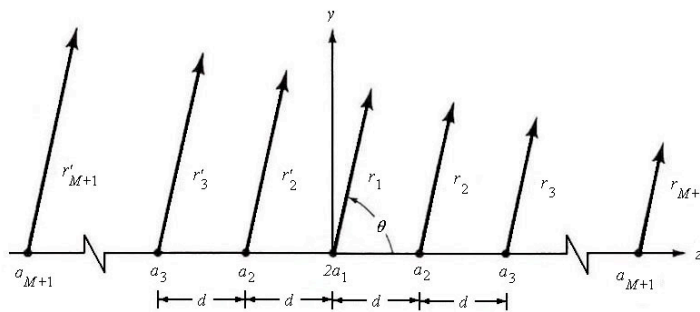
$$(AF)_{2M}(\text{par}) = \sum_{n=1}^M a_n \cos[(2n-1)u] \quad (14)$$

$$(AF)_{2M+1}(\text{impar}) = \sum_{n=1}^{M+1} a_n \cos[2(n-1)u] \quad (15)$$

donde $u = (\pi d/\lambda) \cos \theta$, d y θ son respectivamente, posición del elemento en valores de λ y el margen de visibilidad.



a)



b)

Figura 8. Agrupamientos lineales no uniformes, a) número par de elementos, b) número impar de elementos [Balanis, 2005].

II.3.3 AGRUPAMIENTO PLANAR DE ANTENAS

El agrupamiento lineal de antenas tiene varias limitaciones, un ejemplo de esto es que el lóbulo principal del diagrama de radiación se dirige en un sólo plano. Los agrupamientos en el plano se utilizan en aplicaciones donde se requieren anchos de haz estrechos, alta directividad, y la posibilidad de dirigir el haz principal hacia cualquier dirección.

Un agrupamiento en el plano proporciona variables adicionales las cuales pueden ser utilizadas para control y forma del diagrama del agrupamiento. Los agrupamientos planares son más versátiles y pueden proporcionar diagramas más simétricos con bajos niveles de lóbulos laterales. Para obtener el factor de agrupamiento de un agrupamiento planar vamos a referirnos a la Figura 9. Si N elementos son inicialmente colocados a lo largo del eje x , como se muestra en la Figura 9(a), el factor de agrupamiento de esto puede escribirse como

$$AF = \sum_{n=1}^N I_{n1} e^{j(n-1)(kd_x \sin\theta \cos\phi + \beta_x)} \quad (16)$$

donde I_{n1} es el coeficiente de excitación de cada elemento. El espaciamiento y el cambio de fase progresiva entre elementos a lo largo del eje x son representados, respectivamente, por d_x y β_x . Si N_2 elementos son colocados en la dirección del eje y , una distancia d_y y una fase progresiva β_y existirán en este eje, y un agrupamiento rectangular será formado como se muestra en la Figura 9(b) [Balanis, 2005].

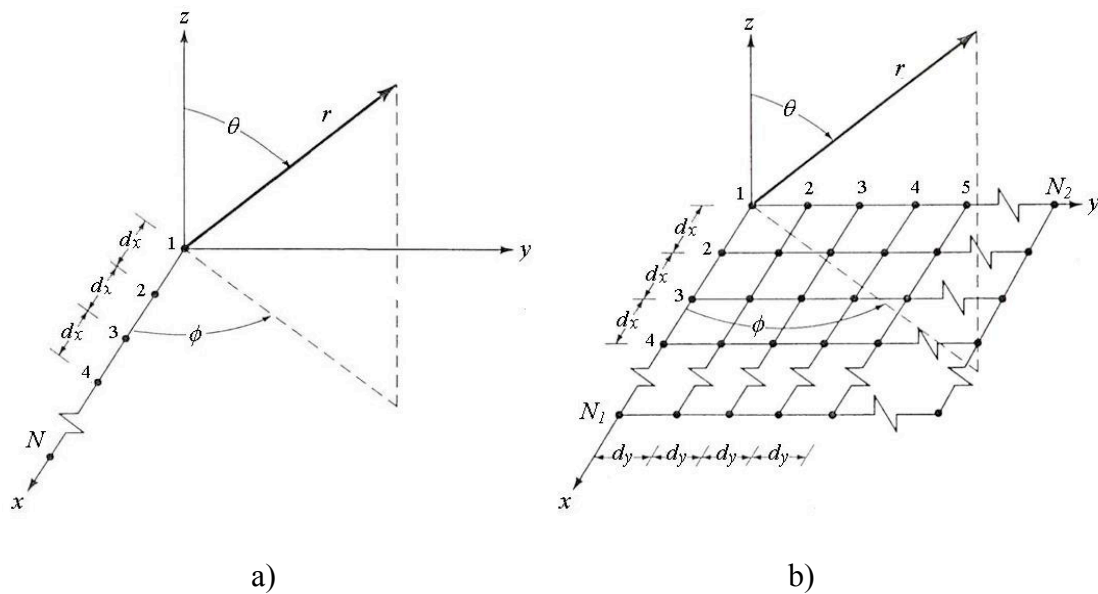


Figura 9. Geometrías de agrupamientos, a) Lineal, b) En el plano [Balanis, 2005].

El factor de agrupamiento total del agrupamiento planar puede escribirse como

$$AF = \sum_{n_2=1}^{N_2} I_{1n_2} \left[\sum_{n_1=1}^{N_1} I_{1n_1} e^{j(n_1-1)(kd_x \sin \theta \cos \phi + \beta_x)} \right] e^{j(n_2-1)(kd_y \sin \theta \sin \phi + \beta_y)} \quad (17)$$

o

$$AF = S_{xn_1} S_{yn_2} \quad (18)$$

donde

$$S_{xn_1} = \sum_{n_1=1}^{N_1} I_{1n_1} e^{j(n_1-1)(kd_x \sin \theta \cos \phi + \beta_x)} \quad S_{yn_2} = \sum_{n_2=1}^{N_2} I_{1n_2} e^{j(n_2-1)(kd_y \sin \theta \sin \phi + \beta_y)}$$

La ecuación (18) indica que el diagrama de un agrupamiento planar es el producto de los factores de agrupamiento de las agrupaciones en las direcciones x e y . Si las

excitaciones de los elementos del agrupamiento en la dirección y son proporcionales a los del eje x , la excitación de los elementos n_1 y n_2 pueden escribirse como

$$I_{n_1 n_2} = I_{n_1} I_{n_2}$$

Si además la excitación del agrupamiento es uniforme ($I_{n_1 n_2} = I_0$), puede expresarse como

$$AF = I_0 \sum_{n_1=1}^{N_1} e^{j(n_1-1)(kd_x \sin \theta \cos \phi + \beta_x)} \sum_{n_2=1}^{N_2} e^{j(n_2-1)(kd_y \sin \theta \sin \phi + \beta_y)} \quad (19)$$

De acuerdo a (4) y (8), la forma normalizada de (19) puede ser escrita como

$$AF_n(\theta, \phi) = \left[\frac{1}{N_1} \frac{\sin\left(\frac{N_1}{2}\psi_x\right)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} \right] \left[\frac{1}{N_2} \frac{\sin\left(\frac{N_2}{2}\psi_y\right)}{\sin\left(\frac{\psi_y}{2}\right)} \right] \quad (20)$$

donde

$$\psi_x = kd_x \sin \theta \cos \phi + \beta_x; \quad \psi_y = kd_y \sin \theta \sin \phi + \beta_y$$

Cuando el espaciado entre elementos es mayor que $\lambda/2$, se generan múltiples lóbulos laterales, es importante que estos lóbulos sean uniformes, porque si no lo son, existe el riesgo de que en los extremos del margen de visibilidad se genere algo que es indeseable para el diagrama de radiación, que son los lóbulos tipo rejilla (*grating lobes*) como se observa en la Figura 10; el efecto de estos, es confundirse con el lóbulo principal al tener la misma amplitud, con lo cual se pierde directividad (ganancia) en el diagrama de radiación. Para evitar los lóbulos rejilla en los planos x - z e y - z , el espaciado entre elementos en las direcciones x e y , respectivamente, deben ser menores a $\lambda/2$ ($d_x < \lambda/2$ y $d_y < \lambda/2$).

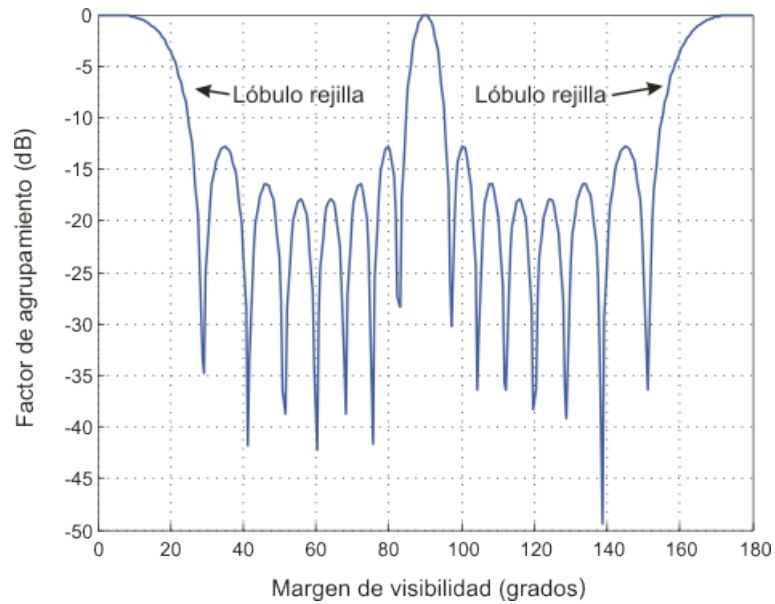


Figura 10. Diagrama de radiación con lóbulos tipo rejilla.

II.4 SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN

Lo que se busca en la síntesis del diagrama de radiación es modificar el diagrama para que cumpla con ciertas características, tales como el nivel de lóbulos laterales, ancho de haz, directividad, etc.; como lo establece la normativa de las comunicaciones inalámbricas y con esto poder brindar un mejor servicio y además hacer más eficiente el sistema.

II.4.1 SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN EN UN AGRUPAMIENTO LINEAL

Las primeras técnicas para mejorar los diagramas de radiación en un agrupamiento lineal utilizan como variables de diseño las excitaciones de los elementos del agrupamiento

de antenas, por ejemplo los métodos de Dolph-Chevyshev y Taylor [Milligan, 2005; Balanis, 2005], considerados como técnicas analíticas convencionales para la síntesis del diagrama, las cuales efectúan una modificación a las excitaciones de los elementos del agrupamiento de antenas conservando constante el espaciamiento entre elementos. Pero el cálculo de excitaciones no uniformes tiene como consecuencia el incremento en los efectos de acoplamiento mutuo³, y por lo tanto, el aumento de distorsiones del diagrama de radiación. En la mayoría de las aplicaciones operar a la máxima potencia posible es tan importante como reducir el nivel del lóbulo lateral o el ancho de haz del lóbulo principal [Kurup et al., 2003].

En base a las desventajas que origina el cálculo de excitaciones no uniformes en los elementos de la antena, se considera el cálculo de espaciamientos no uniformes entre elementos. Los primeros estudios de agrupamientos de antenas con espaciamiento no uniforme son los trabajos de [Unz, 1960] y [Harrington, 1961] entre otros. El enfoque de estos trabajos en la síntesis del diagrama de radiación, es a través de la reducción del nivel de los lóbulos laterales, o del ancho de haz del lóbulo principal. Esta línea de trabajo ha sido continuada en estudios posteriores como [Bae et al., 2005], los cuales proponen diferentes algoritmos para poder optimizar el diagrama de radiación.

Dentro de estado del arte, respecto a la síntesis del diagrama de radiación en

³ El acoplamiento mutuo es la cantidad de energía que es absorbida y que es nuevamente radiada por cada elemento de la antena debido al resto de los elementos de antena.

agrupamientos lineales, se tiene a las técnicas de cómputo evolutivo como los algoritmos genéticos (GA) [Panduro et al., 2005; Rocha et al., 2006], estas técnicas hacen una búsqueda estocástica basada en los conceptos darwinianos para optimizar el diagrama, y dentro de las técnicas heurísticas se tiene a evolución diferencial (DE) [Rocha et al., 2006] que realizan una manipulación geométrica de soluciones, ambas técnicas mejoran el nivel de lóbulos laterales del diagrama de radiación, obteniendo nuevos espaciamientos y excitaciones entre elemento; la desventaja de estas técnicas es que el tiempo de cómputo del algoritmo no cumple con la respuesta en tiempo real, por lo tanto en esta tesis se propone un nuevo método realizado por [Kumar y Banner, 2005] llamado Técnica Analítica Generalizada que emplea funciones de Legendre, lo que se busca aquí es obtener al menos los mismos resultado obtenidos en GA y DE, pero con un tiempo de cómputo menor. Este método es analítico y se basa en desplazar la dependencia de una función de una variable independiente a otra, tomando la diferencia entre la función original y su producto.

II.4.2 SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN EN UN AGRUPAMIENTO PLANAR

Como se mencionó el objetivo de los agrupamientos en el plano es lograr diagramas altamente directivos y con la capacidad de reposicionar el haz principal del diagrama [Balanis, 2005]. Para comprender mejor lo antes mencionado las figuras 11 y 12 se muestran los diagramas de radiación en el espacio de los agrupamientos lineal y en el plano, respectivamente. Como se observa en la Figura 11, los agrupamientos lineales son capaces de

generar diagramas directivos en un solo plano, sin embargo, en otros planos, generan diagramas omnidireccionales. Por su parte, la Figura 12 se muestra el diagrama de un agrupamiento planar, el cual es directivo para cualquier plano normal al plano de la ubicación de los elementos de antenas del agrupamiento.

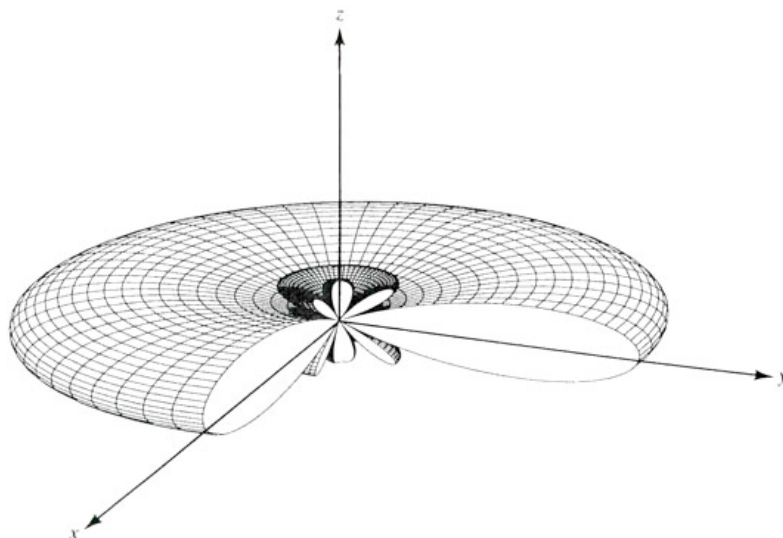


Figura 11. Diagrama generado por un agrupamiento lineal de antenas [Balanis, 2005].

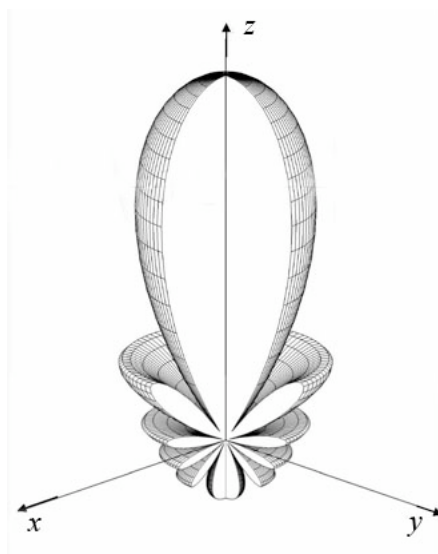


Figura 12. Diagrama generado por un agrupamiento planar de antenas [Balanis, 2005].

Los primeros trabajos se proponían modificar la estructura o la excitación de los elementos de antena, para reducir el nivel de los lóbulos laterales o incrementar la directividad; por mencionar algunos trabajos, se tiene a [Skolnik et al., 1964] y [Hodjat y Hovanessian, 1978]. Sin embargo, las principales técnicas para la síntesis del diagrama de radiación de los agrupamientos en el plano, se han enfocado en la modificación de la estructura, es decir, la posición de los elementos radiantes en el agrupamiento planar. En esta área, se han desarrollado técnicas en base al concepto de agrupamientos simplificados [Haupt, 1994], los espaciamientos no uniformes entre elementos y las técnicas híbridas entre estas dos [Bae et al., 2005].

En el estado del arte, respecto a la síntesis del diagrama de radiación en agrupamientos en el plano, se tiene la Técnica Analítica Generalizada para generar los mismos resultado de DE, pero ahora en otra geometría para lograr un tiempo de cómputo menor.

II.5 CONCLUSIONES

En este capítulo, se definieron los parámetros más importantes del diagrama de radiación de una antena, que permitirán posteriormente en el capítulo IV evaluar las prestaciones que ofrece dicha antena, tanto en el nivel de lóbulos laterales, ancho de haz y directividad, por mencionar algunos.

Además, se estableció la necesidad para plantear el uso de los agrupamientos de antenas y se especificaron las ecuaciones que establecen el diagrama de radiación, esto es tanto para un agrupamiento lineal como para en el plano; el cual es un objetivo de este trabajo de tesis. Dentro de este capítulo se presentaron algunos métodos de síntesis y se

pudo concluir que los métodos de cómputo evolutivo brindan únicamente una solución parcial al problema, puesto que solamente se mejora en un aspecto del diagrama de radiación. El siguiente capítulo tratará el problema de la síntesis de agrupamientos lineal y en el plano; esto es, proponiendo y mostrando el modelado de una nueva técnica denominada Técnica Analítica Generalizada. El objetivo de esta síntesis es mejorar los parámetros del diagrama de radiación, mediante el cálculo de las variables antes mencionadas.

CAPÍTULO III

MÉTODO DE LA TÉCNICA ANALÍTICA GENERALIZADA APLICADA A LA SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN

III.1 INTRODUCCIÓN

El análisis de agrupamientos de antena con espaciamiento no uniforme fue reportado originalmente en el trabajo de [Unz, 1960]. Uno de los primeros métodos para la reducción del nivel de los lóbulos laterales fue desarrollado por [Harrington, 1961], el cual, emplea funciones delta de Dirac para calcular los espaciamientos de los elementos de antena. Posteriormente [Skolnik et al., 1964] propone la implementación de programación dinámica para ajustar el diagrama de radiación. Recientemente, entre los métodos analíticos que se encuentran dentro del estado del arte están el empleo de la polinomios de Legendre para aproximarse a un diagrama de radiación deseado. Dichos métodos han sido estudiados en [Kumar y Branner, 1999; Phongcharoenpanich et al., 2001], en los cuales la síntesis del

diagrama de radiación se realiza por medio de las Técnicas Analíticas Generalizadas, las cuales serán estudiadas de forma extensa en este capítulo.

El objetivo de este capítulo es presentar los fundamentos teóricos de las Técnicas Analíticas Generalizadas o Aproximaciones Matemáticas Unificadas, que se basan en emplear funciones y polinomios de Legendre. En la primera sección de este capítulo se iniciará con las definiciones de la transformada, polinomios y funciones de Legendre que son la esencia de las Técnicas Analíticas Generalizadas, después en la segunda sección se hace un planteamiento del problema de la síntesis del agrupamiento en forma general, posteriormente en la siguiente sección será aplicada la técnica analítica de la síntesis del diagrama de radiación. De acuerdo al objetivo general de este trabajo, lo que se busca en este capítulo es definir un modelado matemático que mejore las prestaciones en la síntesis del diagrama de radiación en términos de amplitudes pequeñas de lóbulos laterales y máxima ganancia en el lóbulo principal, además que se derive un modelo genérico tal que pueda aplicarse a diferentes geometrías de agrupamientos de antena.

III.2 TRANSFORMADA DE LEGENDRE

La estrategia en el uso de las transformadas de Legendre es desplazar la dependencia de una función de una variable independiente a otra (la derivada de la función original con respecto a su variable independiente) tomando la diferencia entre la función original y su producto. Esta transformada es una potente herramienta para la resolución de ecuaciones diferenciales. En una dimensión, se puede encontrar la transformada de Legendre de una función $f: R \rightarrow R$ la cual puede ser expresada como:

$$Y(P) = xP - y(x); \quad P = \frac{dy}{dx} \quad (21)$$

Particularmente en este trabajo y de manera adicional, se va a recurrir a otra herramienta muy importante que son los polinomios de Legendre, que servirán posteriormente para encontrar una solución de la respuesta del diagrama de radiación en tiempo real.

III.2.1 POLINOMIOS DE LEGENDRE

La ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables se conoce con el nombre de ecuación de Legendre [Farrell y Ross, 1965]. Su representación matemática se da como:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Las soluciones de la expresión (22) se conocen como funciones de Legendre. Si n es nulo o entero positivo, estas funciones se denominan polinomios de Legendre. La solución de la ecuación de Legendre se describe como:

$$y = a_0 P_n(x) + a_1 Q_n(x) \quad (23)$$

donde $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son respectivamente los polinomios de Legendre de primero y segundo orden de n . También puede ser expresada en forma compacta como:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (24)$$

donde $N = n/2$ o $(n - 1)/2$, de acuerdo si n es par o impar. Una expresión más compacta comparada con la presentada en la ecuación (24) es la expresión de *Rodrigues* [Farrell y Ross, 1965].

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n \left[(x^2 - 1)^n \right] \quad (25)$$

donde el símbolo operador D^n denota la derivada del enésimo orden. Los polinomios de Legendre cuentan con la propiedad de poder utilizar una relación de recurrencia, donde esta es una ecuación que define una secuencia recurrente, cada término de la secuencia se define en función de términos precedentes, es decir

$$(n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n + 1)xP_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

III.2.2 FUNCIONES DE LEGENDRE DE MEDIO ORDEN

En este trabajo se va a utilizar una función de Legendre de medio orden ($P_{m-1/2}$), la justificación por lo que se implementa esta función es porque posteriormente nos va a ayudar a simplificar el modelado del sistema de un agrupamiento lineal y así poder obtener un conjunto triangular de ecuaciones, el cual podrá ser resuelto de forma recursiva. Para obtener esta función se requiere de una relación de recurrencia que contiene polinomios de Legendre de medio orden. Esta función se utiliza para conseguir una solución al problema de la síntesis del diagrama de radiación, la siguiente relación de recurrencia es dada para $m \geq 2$ y $n \geq 3$ [Abramowitz y Stegu, 1972].

$$(n_1 + 0.5)P_n(x) = 2n_1 x P_{n-1}(x) - (n_1 - 0.5)P_{n-2}(x) \quad (27)$$

$$\text{si } m = 0, P_{-1/2}(x) = \frac{2}{\pi} K \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right] \text{ y } m = 1, P_{1/2}(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ 2E \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right] - K \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right] \right\},$$

donde E y K son integrales elípticas de primer y segundo orden. En el apéndice B de esta tesis se presenta de forma más extensa la obtención de estos polinomios.

III.3 PROBLEMA DE LA SÍNTESIS DEL AGRUPAMIENTO DE ANTENA

El problema general de la síntesis del agrupamiento de antena puede ser descrito por la ecuación de la matriz.

$$\begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \dots \\ \dots \\ E(u_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(r_1, u_1)A(r_2, u_1)\dots A(r_N, u_1) \\ A(r_1, u_2)A(r_2, u_2)\dots A(r_N, u_2) \\ \dots \\ \dots \\ A(r_1, u_M)A(r_2, u_M)\dots A(r_N, u_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ \dots \\ I_M \end{bmatrix} \quad (28)$$

donde $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_M]$ es el vector punto del campo y $r = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ \dots \ r_N]$ es el vector posición del elemento del agrupamiento. $[E(u_1) \ E(u_2) \ E(u_3) \ \dots \ E(u_M)]^T$ es el vector del factor de agrupamiento $M \times 1$ en campo lejano en M puntos del campo, por su parte $[I_1, I_2, I_3, \dots, I_N]^T$ es el vector de excitación $N \times 1$, y $[A(r_i, u_j)]$ es la matriz rectangular $M \times N$, la cual es una función tanto de la posición de elemento (r_i) como del punto del campo (u_j). La técnica generalizada utiliza tanto procesos lineal y no lineales en el desarrollo, los cuales permiten soluciones de forma cerrada para posiciones óptimas del elemento del agrupamiento. Los pasos del procedimiento para la obtención de las excitaciones y los

espaciamientos de los elementos de antena son mostrados en la Figura 13 y discutidos en los siguientes párrafos.

1) Síntesis Lineal, para la obtención de excitaciones de los elementos de antena:

- a) Con referencia a la Figura 13(a), el procedimiento requiere la especificación de un diagrama deseado y de una geometría de agrupamiento finito determinado, el cual tiene fijadas todas las posiciones del elemento.
- b) Dado el diagrama del campo y el espaciamiento de elemento, los reajustes del vector $[I_1, I_2, I_3, \dots, I_N]$ son obtenidos por la ecuación (28) empleando síntesis lineal. Estas excitaciones sintetizadas pueden ser reales o complejas.

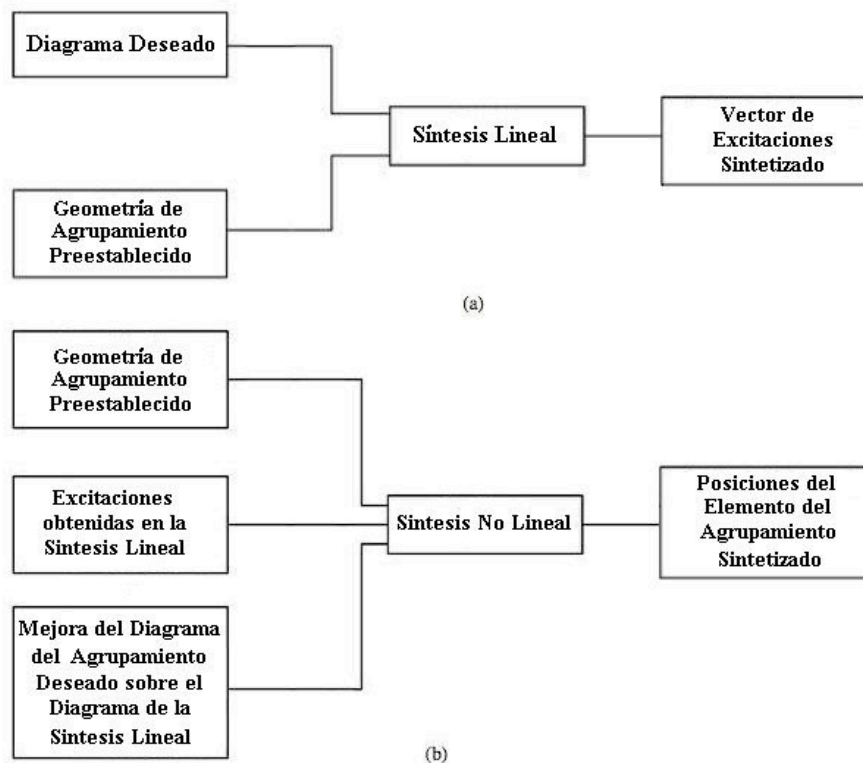


Figura 13. a) Solución lineal de la síntesis del agrupamiento. b) Solución no lineal de la síntesis del agrupamiento [Kumar y Branner, 2005].

2) Síntesis No Lineal, para obtención de espaciamentos de los elementos de antena:

- a) Figura 13(b) muestra el procedimiento de la síntesis no lineal donde se determina la geometría del agrupamiento, las excitaciones de los elementos y el mejoramiento del diagrama del agrupamiento deseado.
- b) El proceso de agrupamiento no lineal es entonces desarrollado para acceder a las posiciones óptimas de los elementos del agrupamiento. Estas posiciones son óptimas en el sentido de que la respuesta del agrupamiento se aproxima a la prestación especificada. Las posiciones centrales de los elementos de antena pueden ser reales y positivas mientras estén siendo limitadas por las restricciones mínima y máxima del espaciamento adyacente del elemento (acoplamiento mutuo y lóbulos rejilla respectivamente).

III.4 TÉCNICA ANALÍTICA GENERALIZADA PARA OPTIMIZACIÓN

La técnica generalizada puede ser derivada de la expresión (28), escrita en forma de matriz como [Kumar y Branner, 1999]:

$$[E] = [A][I] \quad (29)$$

Desarrollando una transformación lineal T en el factor del agrupamiento $[E]$, la ecuación (29) es transformada como

$$T[E] = T[A][I] \quad (30)$$

La transformación lineal depende de la geometría del agrupamiento, el cual define la función que gobierna en la expresión del factor del agrupamiento, y la transformación es

III.5.1 SÍNTESIS DE AGRUPAMIENTO LINEAL APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE

Considerando un agrupamiento lineal simétrico impar de $2N + 1$ elementos como el mostrado en la Figura 14. El factor de agrupamiento (AF) es [Balanis, 2005]:

$$AF = E(u) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_n I_n \cos(kd_n u) \quad (33a)$$

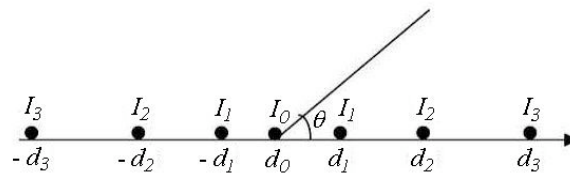


Figura 14. Geometría de un agrupamiento lineal con espaciamiento no uniforme [Kumar y Branner, 2005].

donde $u = \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$ radianes, I_n y d_n son la corriente de excitación y la posición del elemento, del n -ésimo elemento del agrupamiento. Las excitaciones I_n son obtenidas usando los métodos de síntesis lineales tal y, como se describieron en la sección 1 y en la Figura 13(a). Por su parte el factor $\varepsilon_n = 1$, $n = 0$, y $\varepsilon_n = 2$, $n \neq 0$, se describió en la sección 1 y Figura 13(b). El algoritmo de síntesis no lineal consiste de un proceso de cuatro pasos, iniciando con el diagrama de radiación del agrupamiento deseado, y culminando en la generación de las posiciones de los elementos del agrupamiento. Para delinear e ilustrar el algoritmo de la síntesis para un caso unidimensional, un diagrama de agrupamiento deseado es definido como sigue:

$$E_d(u), \text{ en el intervalo } -1 \leq u \leq 1 \quad (33b)$$

Por lo tanto el factor de agrupamiento será simétrico, es decir, $E(-u) = E(u)$ [Skolnik 1964] (en el apéndice A de este trabajo se presenta de forma más detallada esta igualdad), considerando el problema de la síntesis en el intervalo $0 \leq u \leq 1$ ó $0 \leq \theta \leq \pi/2$ radianes. El diagrama deseado $E_d(u)$ de (33b), es primero aproximado con el diagrama reconstruido de un agrupamiento de elementos impar $2N + 1$, y esta respuesta es dirigida a ser muestreada uniformemente a M puntos ($M \gg 1$) en el intervalo $0 \leq u \leq 1$ para obtener

$$E(u_m) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_n I_n \cos(m\beta_n); \quad m = 0, 1, 2 \dots M-1 \quad (34)$$

donde el intervalo de muestro $\Delta u = 1/(M - 1)$, $u_m = m\Delta u$, $\beta_n = kd_n\Delta u$, $k = 2\pi/\lambda$ y las posiciones del elemento d_n son mostradas en la Figura 14. El algoritmo de la síntesis es ahora presentado en cuatro pasos los cuales se dan a continuación.

1) *Definición del Problema de la Síntesis para un Diagrama de Agrupamiento Determinado $E_d(u)$* : El objetivo de este paso es la obtención de posibles soluciones para las posiciones del agrupamiento d_n acoplando los diagramas del agrupamiento deseado y actual, $E_d(u)$ y $E(u)$ en M puntos en el intervalo $0 \leq u \leq 1$ tal que

$$E(u_m) = E_d(u_m) \quad (35)$$

donde $u_m = m\Delta u$, $m = 0, 1 \dots M - 1$, y $E_d(u)$ es el diagrama del agrupamiento deseado.

2) *Transformación Legendre del Diagrama del Agrupamiento Deseado $E_d(u)$* : Los siguientes pasos definen el procedimiento para la transformación del factor del agrupamiento $E_d(u_m)$ en su transformada de Legendre $F(\alpha_p)$. Se implementa la

transformación de Legendre por que ésta nos ayuda a obtener un conjunto triangular de ecuaciones, el cuál es más sencillo de solucionar. Utilizando $E(u_m)$ de la expresión (35), se obtiene la siguiente ecuación

$$F(\alpha_p) = \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon_m E_d(u_m) P_{m-1/2}(\cos \alpha_p); \quad p = 0, 1, 2, 3 \dots N \quad (36)$$

donde $\varepsilon_m = 1, m = 0$; $\varepsilon_m = 2, m > 0$; y $P_{m-1/2}$ es la función de Legendre de medio orden. El intervalo y valores de α_p ; $p = 0, 1, 2, 3 \dots N$ será seleccionado en concordancia con las posiciones del elemento, como será descrito más adelante. La transformación de Legendre del diagrama del agrupamiento deseado $E_d(u)$ es motivado por la consideración de la siguiente relación limitadora del polinomio de Legendre de orden fraccional [Mangulis, 1965]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_{n-1/2}^{\mu}(\cos \theta) \cos n\nu = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{1/2} \sin^{\mu} \theta}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu) (\cos \nu - \cos \theta)^{\mu+1/2}}, & 0 \leq \nu < \theta \\ 0, & \theta < \nu < \pi \end{cases}$$

sustituyendo $\mu = 0$ $\theta = \alpha_p$ $n = m$ $\nu = \beta_n$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m P_{m-1/2}(\cos \alpha_p) \cos m\beta_n = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{1/2} \sin^0 \alpha_p}{\Gamma(\frac{1}{2}) (\cos \beta_n - \cos \alpha_p)^{1/2}}, & 0 \leq \beta_n < \alpha_p \\ 0, & \alpha_p < \beta_n < \pi \end{cases}$$

recordando que la función gamma es $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = (\pi)^{1/2}$, se obtiene finalmente

$$f(\alpha_p, \beta_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m P_{m-1/2}(\cos \alpha_p) \cos m\beta_n$$

$$f(\alpha_p, \beta_n) = \begin{cases} \left[\frac{2}{\cos \beta_n - \cos \alpha_p} \right]^{1/2}, & 0 \leq \beta_n < \alpha_p \\ 0, & \alpha_p < \beta_n < \pi \end{cases} \quad (37)$$

Aplicando la propiedad de términos contenidos en otras funciones de Legendre y sustituyendo la expresión (34) y (35) en (36), obtendremos la ecuación final de la transformada,

$$F(\alpha_p) = \sum_{n=0}^N I_n \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon_m P_{m-1/2}(\cos \alpha_p) \cos(m\beta_n) = \sum_{n=0}^N I_n f(\alpha_p, \beta_n) \quad (38)$$

3) *Generación de Ecuaciones Recursivas*: De la ecuación (37) se obtiene

$$\beta_{n_{MAX}} = \beta_N < \pi \quad (39)$$

donde $\beta_N = kd_N \Delta u$, $\Delta u \approx 1/M$, si el valor de M es grande, de la ecuación (39) se obtiene la condición limitadora M .

$$\beta_N < \pi \quad kd_N \Delta u < \pi \quad \frac{kd_N}{M} < \pi \quad M \geq \frac{kd_N}{\pi} \quad (40)$$

Si los espaciamentos del elemento adyacente del agrupamiento son limitados a $\leq \lambda$, entonces $d_N \leq N\lambda$ y (40) se reduce a

$$M \geq \frac{kd_N}{\pi} \quad M \geq \frac{kN\lambda}{\pi} \quad M \geq \frac{2\pi}{\lambda} \frac{N\lambda}{\pi} \quad M \geq 2N \quad (41)$$

La elección de α es una importante componente en la reconstrucción de las excitaciones del agrupamiento y de las posiciones en forma *recursiva*, la siguiente relación la define

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= k(d_0 + \lambda/2)\Delta u \\ \alpha_p &= k(d_{p-1} + \lambda/2 + \Delta)\Delta u\end{aligned}\quad (42)$$

donde la constante k es el número de onda ($2\pi/\lambda$), d es espaciado entre elemento en términos de λ , Δ es el factor de ensanchamiento y $\Delta u \approx 1/M$, los valores de α y β son adimensionales y se diversifican uno a otro como se muestra a continuación

$$\begin{array}{l} \text{espacio } \beta: \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \dots \beta_N \\ \text{espacio } \alpha: \quad \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \dots \alpha_N \end{array}$$

Ahora, utilizando (37) y (38) obtenemos el siguiente sistema triangular de ecuaciones

$$F(\alpha_p) = \sum_{n=0}^p I_n f(\alpha_p, \beta_n) \quad (43)$$

y por lo tanto este sistema es invertible

$$\begin{aligned} I_0 f(\alpha_0, \beta_0) &= F(\alpha_0) \\ I_p f(\alpha_p, \beta_p) &= F(\alpha_p) - \sum_{n=0}^{p-1} I_n f(\alpha_p, \beta_n); \quad p = 1, 2, 3 \dots N \end{aligned}\quad (44)$$

4) Aplicación del Algoritmo para Sintetizar las Excitaciones y Posiciones del Elemento:

Ahora podemos obtener las excitaciones del elemento del agrupamiento para el primer elemento

$$I_0 = \frac{F(\alpha_0)}{f(\alpha_0, \beta_0)} \quad (45)$$

de la ecuación (44) se obtiene la excitación para el p -ésimo elemento

$$I_p = \frac{F(\alpha_p) - \sum_{n=0}^{p-1} I_n f(\alpha_p, \beta_n)}{f(\alpha_p, \beta_p)}; \quad p = 1, 2, 3 \dots N \quad (46)$$

también de la expresión (44) se puede obtener las posiciones del elemento, es decir

$$f(\alpha_p, \beta_p) = \frac{F(\alpha_p) - \sum_{n=0}^{p-1} I_n f(\alpha_p, \beta_n)}{I_p}; \quad p = 1, 2, 3 \dots N \quad (47)$$

ahora sustituyendo la ecuación (37) en (47) se obtiene lo siguiente

$$\left[\frac{2}{\cos \beta_p - \cos \alpha_p} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{F(\alpha_p) - \sum_{n=0}^{p-1} I_n f(\alpha_p, \beta_n)}{I_p} \quad \rightarrow \quad \cos \beta_p = \frac{2I_p^2}{\left[F(\alpha_p) - \sum_{n=0}^{p-1} I_n f(\alpha_p, \beta_n) \right]^2} + \cos(\alpha_p)$$

↓

$$\beta_p = \cos^{-1} \left(\frac{2I_p^2}{\left[F(\alpha_p) - \sum_{n=0}^{p-1} I_n f(\alpha_p, \beta_n) \right]^2} + \cos(\alpha_p) \right) \quad \rightarrow \quad \beta_p = kd_p \Delta u \quad \therefore \quad d_p = \frac{\beta_p}{k \Delta u} \quad (48)$$

d_p es la ecuación de diseño para la posición del p -ésimo elemento del agrupamiento. A través de estas ecuaciones se ha desarrollado el modelado matemático para la síntesis del diagrama de radiación de un agrupamiento lineal utilizando funciones de Legendre, posteriormente en el siguiente capítulo se utilizará este modelado para la obtención de estadísticas y así conocer las prestaciones del diagrama del agrupamiento lineal. Dentro de

este modelado las ecuaciones que son más importantes son las expresiones (45), (46) que sirven para obtener las excitaciones de los elementos y la ecuación (48) que nos ayuda a conseguir el espaciamiento entre elementos de antena del agrupamiento lineal.

III.5.2 SÍNTESIS DE AGRUPAMIENTO PLANAR APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE

El principal objetivo de los agrupamientos en el plano es lograr diagramas de radiación altamente directivos y la capacidad de reposicionar el haz principal del diagrama [Balanis, 2005], mientras que el agrupamiento lineal puede únicamente dirigir el haz principal en un solo plano, el agrupamiento planar lo puede dirigir a cualquier ángulo del hemisferio superior al plano del agrupamiento [Milligan, 2005]. En la sección II.4.2 de este trabajo se abordó de forma ilustrativa la diferencia de los diagramas de radiación para las geometrías lineal y planar. Para esta geometría se va a considerar un agrupamiento planar $N_1 \times N_2$ como el que se muestra en la Figura 15, donde su factor de agrupamiento (AF) es

$$AF = \sum_{n_2=1}^{N_2} I_{n_2} \left[\sum_{n_1=1}^{N_1} I_{n_1} e^{j(n_1-1)(kd_x \sin\theta \cos\phi + \beta_x)} \right] e^{j(n_2-1)(kd_y \sin\theta \sin\phi + \beta_y)} \quad (49)$$

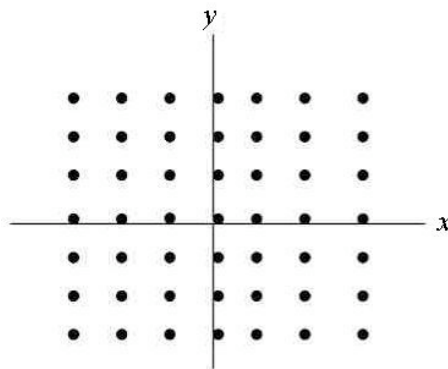


Figura 15. Geometría de un agrupamiento planar de elementos $N_1 \times N_2$ [Kumar y Branner, 2005].

El algoritmo de la síntesis propuesto consiste de cuatro pasos, iniciando por el diagrama deseado y culminado con la generación de las posiciones del elemento del agrupamiento.

$$Ed(u,v), \text{ en el intervalo } -1 \leq u \leq 1; \quad -1 \leq v \leq 1 \quad (50)$$

donde $u = \sin(\theta)\cos(\phi)$, $v = \sin(\theta)\sin(\phi)$ en los límites $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \phi \leq 2\pi$ radianes.

1) *Definición del problema de la síntesis para un diagrama de agrupamiento determinado*

$E_d(u)$: El diagrama deseado $E(u,v)$ es primero aproximado con el diagrama reconstruido de un agrupamiento simétrico impar $N_1 \times N_2$, y esta respuesta es entonces uniformemente muestreada en $M_1 \times M_2$ puntos ($M_1, M_2 \gg 1$) en el intervalo $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ para obtener

$$E(u_{m_1}, v_{m_2}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \varepsilon_{n_1 n_2} I_{n_1 n_2} \cos(m_1 \beta_{n_1}) \cos(m_2 \beta_{n_2}),$$

$$m_1 = 0, M_1 - 1; \quad m_2 = 0, M_2 - 1 \quad (51)$$

donde $\beta_{n_1} = kd_{n_1} \Delta u$; $\beta_{n_2} = kd_{n_2} \Delta v$, el intervalo de muestreo $\Delta u = 1/(M_1 - 1)$; $\Delta v = 1/(M_2 - 1)$, analizando la respuesta del factor de agrupamiento, tenemos que éste es simétrico en cada cuadrante del espacio $u-v$, $E(u,v) = E(u, -v) = E(-u, v) = E(-u, -v)$, se considerará por simplicidad el problema de la síntesis en un cuadrante, es decir, $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$.

2) *Transformación Legendre del diagrama del agrupamiento deseado*: La transformación de la función del agrupamiento $E(u_{m_1}, v_{m_2})$ en la función transformada $F(\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2})$ es definida de la siguiente manera

$$F(\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) = \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \varepsilon_{m_1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} \varepsilon_{m_2} E(u_{m_1}, v_{m_2}) P_{m_1-1/2}(\cos \alpha_{p_1}) P_{m_2-1/2}(\cos \alpha_{p_2});$$

$$p_1 = 0, 1, 2, 3 \dots N_1 - 1; \quad p_2 = 0, 1, 2, 3 \dots N_2 - 1 \quad (52)$$

donde $\varepsilon_m = 1, m = 0; \varepsilon_m = 2, m > 0$; α_{p1}, α_{p2} son las variables transformadas, y $P_{m-1/2}$ es la función de Legendre de medio orden. Este polinomio se utiliza puesto que el factor de agrupamiento tiene un término $\cos(m\beta_n)$ y la relación dada en la ecuación (37) se aplica únicamente a funciones de Legendre de medio orden. Sustituyendo la expresión (51) en (52) obtendremos la ecuación final de la transformada.

$$F(\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} I_{n_1 n_2} \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \varepsilon_{m_1} P_{m_1-1/2}(\cos \alpha_{p_1}) \cos(m_1 \beta_{n_1}) \sum_{m_2=0}^{M_2-1} \varepsilon_{m_2} P_{m_2-1/2}(\cos \alpha_{p_2}) \cos(m_2 \beta_{n_2}) \quad (53)$$

3) *Generación de ecuaciones recursivas:* Al sustituir la ecuación (51) en (52) la transformación de Legendre de un diagrama de un agrupamiento deseado $Ed(u,v)$ es determinado por la siguiente relación limitadora del polinomio de Legendre de orden fraccional

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m P_{m-1/2}(\cos \alpha_p) \cos(m \beta_n) = \begin{cases} \left[\frac{2}{\cos \beta_n - \cos \alpha_p} \right]^{1/2}, & 0 \leq \beta_n < \alpha_p \\ 0, & \alpha_p < \beta_n < \pi \end{cases} \quad (54)$$

Aplicando esta propiedad de la expresión (54) en (53) nos permite tener el siguiente sistema triangular de ecuaciones [Mangulis, 1965].

$$F(\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} I_{n_1 n_2} f(\alpha_{p_1}, \beta_{n_1}) f(\alpha_{p_2}, \beta_{n_2});$$

donde

$$f(\alpha_p, \beta_n) = \begin{cases} \left[\frac{2}{\cos \beta_n - \cos \alpha_p} \right]^{1/2}, & 0 \leq \beta_n < \alpha_p \\ 0, & \alpha_p < \beta_n < \pi \end{cases} \quad (55)$$

4) *Aplicación del Algoritmo para Sintetizar las Excitaciones y Posiciones del Elemento:*

Primero se determinan los valores de excitación, a continuación se muestra el valor normalizado del primer elemento de excitación

$$I_{00}f(\alpha_0, \beta_0)f(\alpha_0, \beta_0) = F(\alpha_0, \alpha_0) \quad I_{00} = \frac{F(\alpha_0, \alpha_0)}{f(\alpha_0, \beta_0)f(\alpha_0, \beta_0)} \quad (56)$$

Segundo, se obtiene la ecuación de excitación para p -ésimo y q -ésimo elemento.

$$I_{pq}f(\alpha_q, \beta_q)f(\alpha_p, \beta_p) = F(\alpha_p, \alpha_q) - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} I_{ij}f(\alpha_p, \beta_i)f(\alpha_q, \beta_j) \quad (57)$$

Y tercero, obtener las ecuaciones del espaciamiento entre elementos para las eje x e y . Despejando $f(\alpha_p, \beta_p)$ de (57) y substituyendo el valor de (54), se obtendrá la ecuación del espaciamiento entre elementos de la eje x .

$$f(\alpha_p, \beta_p) = \frac{F(\alpha_p, \alpha_q) - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} I_{ij}f(\alpha_p, \beta_i)f(\alpha_q, \beta_j)}{I_{pq}f(\alpha_q, \beta_q)} = \left[\frac{2}{\cos \beta_p - \cos \alpha_p} \right]^{1/2}$$

despejando β_p , se obtiene

$$\beta_p = \cos^{-1} \left(\frac{2I_{pq}^2 f(\alpha_q, \beta_q)^2}{\left[F(\alpha_p, \alpha_q) - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} I_{ij}f(\alpha_p, \beta_i)f(\alpha_q, \beta_j) \right]^2} + \cos(\alpha_p) \right)$$

$$d_p = \beta_p / (k\Delta u) \quad (58)$$

de la misma manera despejando $f(\alpha_q, \beta_q)$ de la ecuación (57) y substituyendo el valor de (54), se puede obtener la expresión del espaciamiento entre elementos del eje y.

$$f(\alpha_q, \beta_q) = \frac{F(\alpha_p, \alpha_q) - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} I_{ij} f(\alpha_p, \beta_i) f(\alpha_q, \beta_j)}{I_{pq} f(\alpha_p, \beta_p)} = \left[\frac{2}{\cos \beta_q - \cos \alpha_q} \right]^{1/2}$$

despejando β_p , se obtiene

$$\beta_q = \cos^{-1} \left(\frac{2I_{pq}^2 f(\alpha_p, \beta_p)^2}{\left[F(\alpha_p, \alpha_q) - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} I_{ij} f(\alpha_p, \beta_i) f(\alpha_q, \beta_j) \right]^2 + \cos(\alpha_q)} \right)$$

$$d_q = \beta_q / (k\Delta u) \quad (59)$$

A partir de estas ecuaciones se establece el modelado matemático para la síntesis del diagrama de un agrupamiento planar utilizando funciones de Legendre, posteriormente en el siguiente capítulo se utilizará este modelado para obtener estadísticas y con esto conocer las prestaciones del diagrama del agrupamiento planar. En este modelado se encontró que las ecuaciones más importantes son las expresiones (56) y (57), estas nos ayudan a obtener las excitaciones de los elementos para ambos ejes, también las ecuaciones (58) y (59) que nos ayuda a conseguir los espaciamiento entre elementos de antena para ambos ejes, esto es para un agrupamiento planar.

III.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha generado un modelado del sistema tanto para un agrupamiento lineal como en el plano, los cuales permitirán que en el siguiente capítulo se inicie con simulaciones y se generen estadísticas, para poder comparar estos resultados con métodos que están dentro del estado del arte como algoritmos genéticos (GA) [Panduro, 2005] y evolución diferencial (DE) [Rocha, 2006]. Un aspecto importante de este trabajo es la filosofía del algoritmo propuesto que se basa en dos aspectos correlados entre sí, el primero tiene que ver con las excitaciones y el segundo con las posiciones del elemento. En el primer caso se incurre a una síntesis lineal y en el segundo se trabaja con una síntesis no lineal. Este modelo está formado por un algoritmo que consta de cuatro pasos, el cual utiliza transformada y polinomios de Legendre. Con la ayuda de los polinomios se facilita la determinación de espaciamientos y excitaciones entre elementos para el caso uniforme y no uniforme en las geometrías lineal y planar. Con lo aquí tratado en el siguiente capítulo se tratará el problema de la síntesis del diagrama de agrupamientos.

CAPÍTULO IV

SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE A UN AGRUPAMIENTO LINEAL

IV.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo tiene como principal objetivo, presentar los resultados de simulaciones efectuadas a los agrupamientos de antenas, con espaciamentos uniforme y no uniforme entre elementos de antena para la geometría lineal, cada una de las simulaciones efectuadas se desarrollan a partir de los modelos matemáticos establecidos para cada uno de ellos en el capítulo III. A través de las estadísticas que se generarán se podrá establecer una comparación con las técnicas de cómputo evolutivo para la optimización del diagrama de radiación, esto es con el fin de conocer que ventajas o desventajas ofrecen las Técnicas Analíticas Generalizadas. Además, se evaluará el tiempo de cómputo del algoritmo, donde los resultados reportados constan de un tiempo promedio de 1000 repeticiones, variando el número de elementos de antena utilizados para un agrupamiento lineal.

IV.2 ESCENARIOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se realizarán las simulaciones de la síntesis del diagrama de radiación a un agrupamiento lineal aplicando Técnicas Analíticas, esto es utilizando funciones de Legendre. Para poder efectuar estas simulaciones primero se requiere hacer ciertas consideraciones de simulación para cumplir con el objetivo general de esta tesis, los resultados que se obtengan se validarán con [Kumar y Branner, 2005] y se compararán con [Rocha, 2006; Panduro, 2005]. Finalmente se concluirá con un análisis de resultados para posteriormente determinar que ventajas o desventajas ofrece esta nueva técnica analítica.

IV.2.1 RESPUESTA NATURAL, TAYLOR Y LEGENDRE EN UN AGRUPAMIENTO LINEAL UNIFORME

El escenario tomado como referencia en esta primera simulación es el propuesto por [Balanis, 2005], en el cual se desarrolla y se obtiene la respuesta natural y la síntesis de Taylor, que es considerada una técnica analítica convencional, el fin de estos resultados es conocer el nivel de los lóbulos laterales y el ancho de haz a media potencia para poder ser analizados. Las consideraciones de simulación son las siguientes, agrupamiento lineal de 17 elementos con un espaciamiento uniforme ($d=\lambda/2$) entre elementos de antena, la radiación del diagrama es en modo transversal (dirigido a 90°), se supone que el agrupamiento está localizado en campo lejano con respecto a las fuentes. También se establece que las ondas planas se propagan en un medio homogéneo y que el agrupamiento está compuesto por elementos omnidireccionales idénticos libres de distorsión. La simulación se muestra en la Figura 16, en el eje horizontal se tiene al margen de visibilidad que va desde 0 a 180 grados

y en el eje vertical se encuentra al factor de agrupamiento que está dado en decibeles.

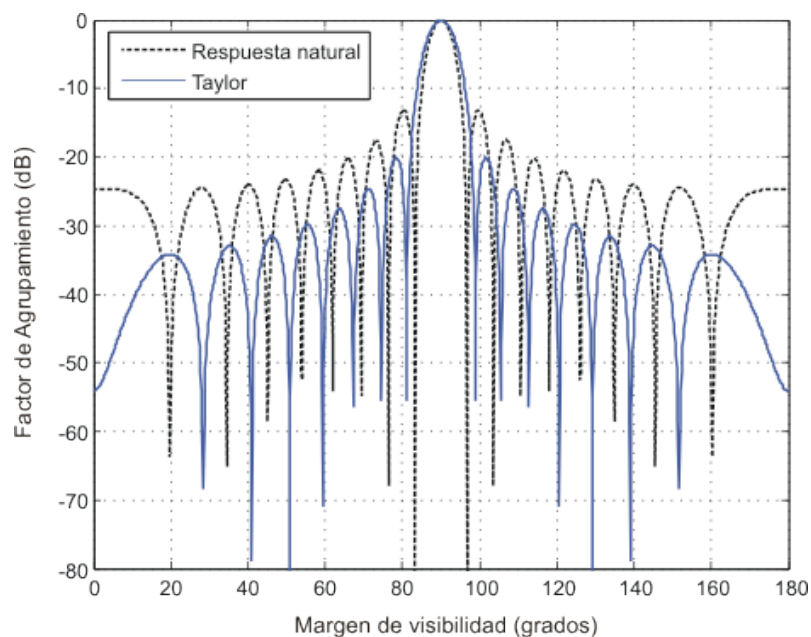


Figura 16. Respuesta natural y de Taylor de un agrupamiento lineal uniforme.

En la Figura 16 se aprecia que el nivel de aislamiento¹ en la respuesta natural es menor comparada con lo que se obtiene en la síntesis de Taylor, hay una diferencia de aproximadamente 6.8 dB. Este resultado no logra el nivel de aislamiento requerido por la norma que es de -19 dB. Respecto al ancho de haz de media potencia la respuesta natural ofrece una respuesta menor comparada con la síntesis de Taylor. Esto se debe al principio de la conservación de la energía, si se reducen los lóbulos, el ancho de haz aumenta y viceversa. A continuación, en la Figura 17 se presenta la respuesta obtenida al utilizar funciones de Legendre para la síntesis del diagrama de radiación y la respuesta con síntesis

¹ Nivel de aislamiento es la diferencia en amplitud entre el lóbulo principal y el nivel de lóbulos laterales, representado en decibeles (dB).

de Taylor. Para realizar esta simulación se utilizó el modelado matemático presentado en el capítulo III y particularmente las ecuaciones (45), (47) y (48).

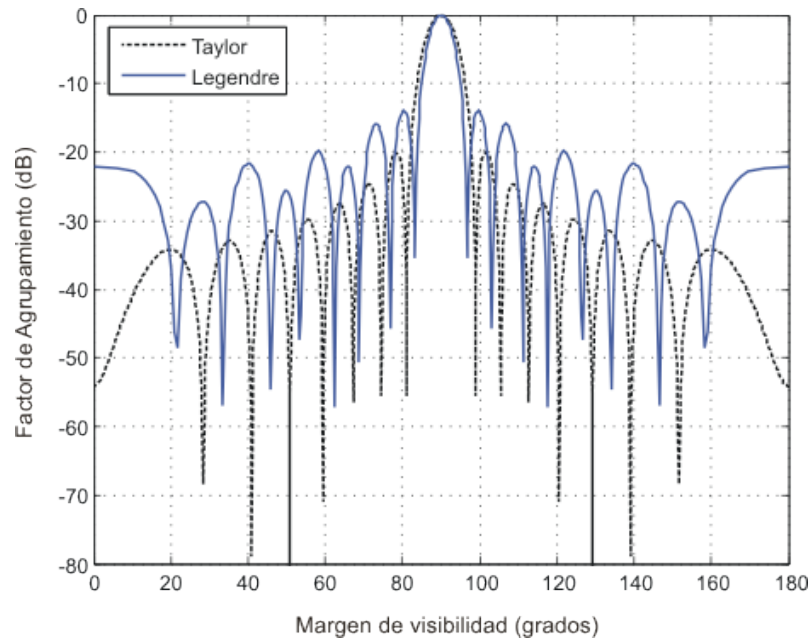


Figura 17. Síntesis de Taylor y funciones Legendre en un agrupamiento lineal uniforme de 17 elementos.

Al usar funciones de Legendre se observa que el nivel de aislamiento es -13.89 dB y al igual que en la respuesta natural, no se alcanza el nivel establecido por la normativa, pero si se analiza el resultado del ancho de haz a media potencia, se observa que se reduce alrededor de 1.35° respecto a la respuesta de la síntesis de Taylor, es decir el ancho de haz disminuye 18.4%. En la Tabla I se presenta de forma resumida los resultados obtenidos para cada respuesta.

Tabla I. Resultados de SLL y HPBW de la respuesta natural, síntesis de Taylor y funciones de Legendre con espaciamiento uniforme ($\lambda/2$) entre elementos de antena.

Respuesta	SLL (dB)	HPBW (grados)
Natural	-13.16	6.00
Taylor	-20.00	7.33
Legendre	-13.89	5.98

En base a los resultados de la simulación, se encontró que la síntesis de Taylor presenta una mejor respuesta respecto al nivel de aislamiento, pero para el caso del ancho de haz Legendre es quien proporciona la mejor respuesta. De acuerdo a que estos resultados no satisfacen los requerimientos de la normativa, en la siguiente sección se presentará una alternativa para mejorar las prestaciones en el nivel de aislamiento y ancho de haz del agrupamiento lineal.

IV.2.2 FUNCIONES DE LEGENDRE EN UN AGRUPAMIENTO LINEAL UNIFORME Y NO UNIFORME

De acuerdo al trabajo realizado por [Panduro, 2005] se determinó que si se modifica el espaciamiento entre elementos y se utiliza un espaciamiento entre elementos de antena no uniforme, se obtendrá como resultado mejores prestaciones, tanto en el nivel de lóbulos laterales, como en el ancho de haz a media potencia. En base a esto, en esta sección se analizarán los resultados que ofrece un agrupamiento lineal no uniforme utilizando funciones de Legendre. Las consideraciones de simulación para este escenario serán: agrupamiento lineal de 17 elementos con espaciamiento uniforme ($d=\lambda/2$) y no uniforme

entre elementos de antena, la información de los espaciamentos no uniformes fueron adquiridos de [Kumar y Banner, 2005] con la idea de validar los resultados, la radiación del diagrama es en modo transversal (dirigido a 90°). En la Figura 18 se observa que al implementar espaciamiento no uniforme entre elementos de antena se obtienen mejores prestaciones en el nivel de aislamiento y en el ancho de haz. Aquí se comprueba lo mencionado por [Panduro, 2005] y además esta información representa la validación del trabajo propuesto por [Kumar y Branner, 2005], donde se obtienen los mismos resultados.

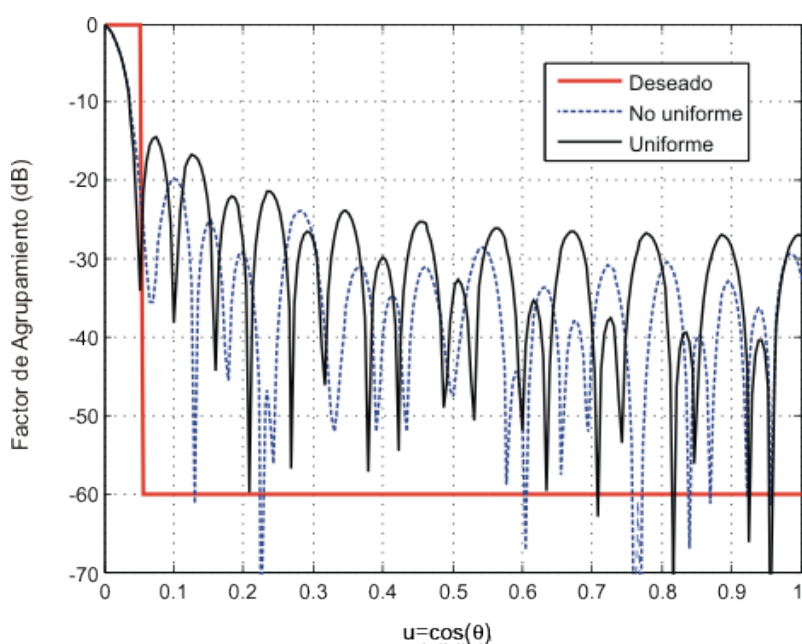


Figura 18. Diagrama de radiación aplicando funciones de Legendre.

La Figura 19 presenta la respuesta obtenida utilizando funciones de Legendre tanto para espaciamiento uniforme como para no uniforme, utilizando en el eje horizontal un margen de visibilidad que va desde 0 a 180 grados, considerado como el margen ideal para la evaluación del diagrama de radiación y en el eje vertical se tiene al factor de

agrupamiento dado en decibeles. En la Figura 19 se aprecia que al utilizar espaciamiento no uniforme se obtienen mejores resultados, el nivel de los lóbulos laterales se reduce 31% (6.24 dB) y el ancho de haz disminuye 3% (0.18°), para ambos parámetros se presentan mejores resultados. En la Tabla II se presentan de manera resumida los resultados obtenidos para cada respuesta en esta simulación.

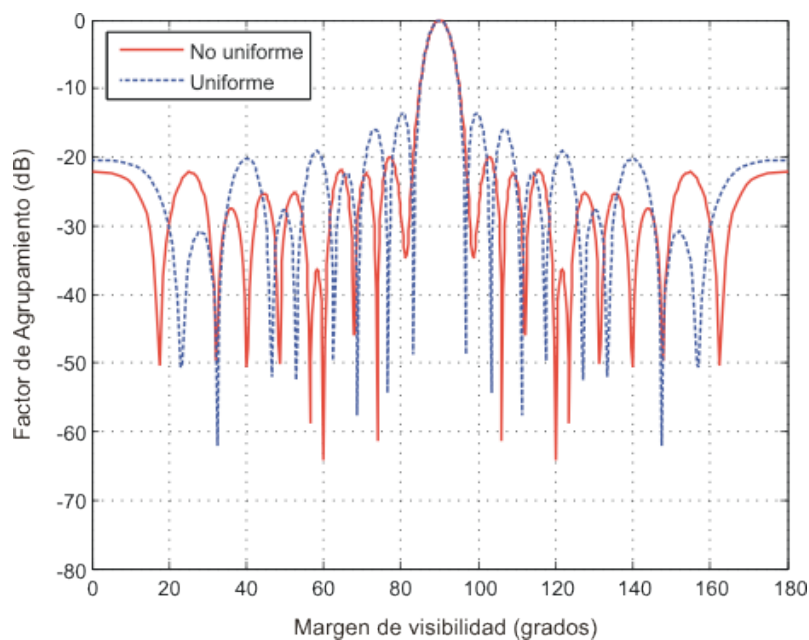


Figura 19. Diagrama de radiación para un agrupamiento lineal de 17 elementos, aplicando funciones de Legendre.

Tabla II. Respuestas del diagrama de radiación implementando funciones de Legendre.

Respuesta	SLL (dB)	HPBW (grados)
Legendre uniforme	-13.89	5.98
Legendre no uniforme	-20.13	5.80

A continuación en la Tabla III, se presentan los espaciamentos tomados de [Kumar y Banner, 2005] y las excitaciones de los elementos de antena, obtenidas en la simulación del agrupamiento lineal de 17 elementos no uniforme. En esta tabla se muestra únicamente 9 elementos esto se debe a que, el agrupamiento que se está utilizando es simétrico impar, esto quiere decir que los valores de los elementos restantes van a ser iguales a los que se presentan en la Tabla III. Para explicar mejor lo anterior, en la Figura 20 se muestra la distribución que guarda un agrupamiento impar en términos de sus espaciamentos y excitaciones.

Tabla III. Excitaciones y espaciamentos de un agrupamiento lineal de 17 elementos aplicando funciones de Legendre, con un factor de ensanchamiento de $\Delta=0.345$.

n	Excitaciones (I_n)	Espaciamentos (d_n)
0	0.0078	0λ
1	0.0151	0.5000λ
2	0.0124	1.0000λ
3	0.0120	1.5000λ
4	0.0120	2.0000λ
5	0.0104	2.5900λ
6	0.0089	3.3070λ
7	0.0092	4.0760λ
8	0.0091	4.8720λ

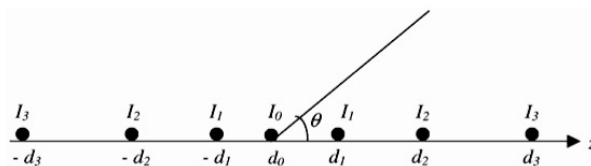


Figura 20. Agrupamiento lineal simétrico impar de $2N+1$ elementos [Kumar y Branner, 2005].

Otro parámetro importante en esta simulación es el factor de ensanchamiento (Δ), este factor se agrega a la variable α de los polinomios de Legendre. Este parámetro definido en la sección III.5.1, es importante porque sirve para reducir el nivel de lóbulos laterales, sin la necesidad de utilizar más elementos de antena. Para este agrupamiento lineal se encontró que el factor $\Delta=0.345$ es el adecuado para alcanzar un SLL de -20.13 dB y un HPBW de 5.80 grados.

En base a los resultados presentados de la Tabla III, los espaciamentos no uniformes obtenidos con las funciones de Legendre, van a ser implementados para obtener ahora la respuesta natural y la síntesis de Taylor pero con espaciamiento no uniforme, esto es con el fin de realizar una comparación entre las diferentes respuestas. En la Figura 21 se tiene la respuesta natural y la síntesis de Taylor con espaciamiento no uniforme, se observa que el nivel de aislamiento en la respuesta natural disminuye 32.3% (6.3 dB), también existe una reducción en el ancho de haz de 11.6% (0.7°) en comparación con los resultados presentados con espaciamiento uniforme. Para el caso de la síntesis de Taylor se refleja únicamente en una modificación en el ancho de haz, éste disminuye alrededor de 1.3°. Pero, si ahora estos resultados se comparan con los obtenidos en la Figura 22, se tiene que las funciones de Legendre son las que presentan el mejor nivel de aislamiento de -20.13 dB; es decir, una reducción de 34.6% respecto a la respuesta natural.

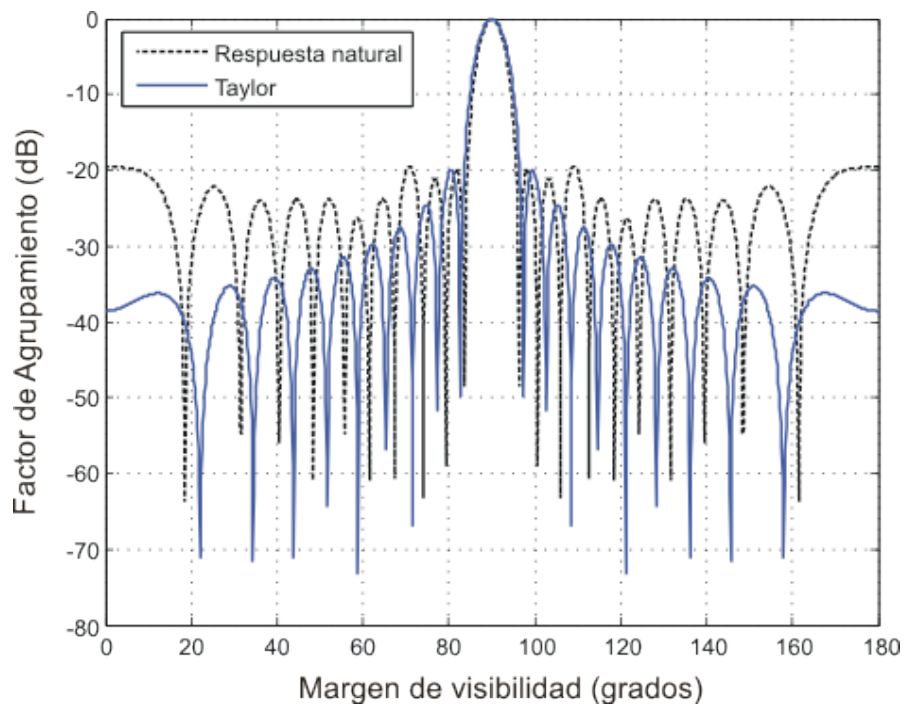


Figura 21. Respuesta natural y de Taylor de un agrupamiento lineal no uniforme.

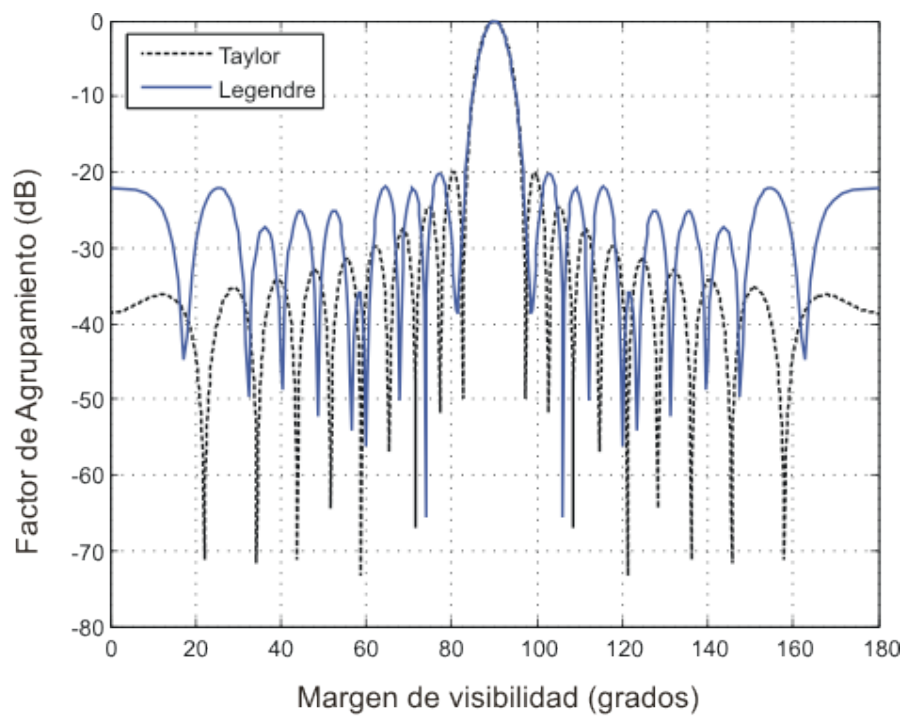


Figura 22. Síntesis de Taylor y Legendre en un agrupamiento lineal no uniforme.

La respuesta que presenta el mejor resultado en el ancho de haz, es la respuesta natural (5.3°), pero su nivel de aislamiento es el menos favorable de las tres respuestas, por lo tanto, las funciones de Legendre son las que presentan la mejor respuesta a la síntesis del diagrama de radiación, esto es porque reducen alrededor de 34.6% el nivel de aislamiento y 20.8% el ancho del haz. En la Tabla IV se presenta de forma resumida los resultados obtenidos por las diferentes respuestas del diagrama de radiación.

Tabla IV. Resultados de SLL y HPBW de la respuesta natural, síntesis de Taylor y funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme entre elementos de antena.

Respuesta	SLL (dB)	HPBW (grados)
Natural no uniforme	-19.50	5.30
Taylor no uniforme	-20.00	6.00
Legendre no uniforme	-20.13	5.80

En esta sección se ha determinado que las funciones de Legendre presentan mejores prestaciones en los lóbulos laterales y en el ancho del haz, pero este comportamiento es únicamente en espaciamiento de elementos no uniforme. Un dato importante a recalcar es que esta respuesta es en modo transversal (dirigida a 90°), por lo tanto, en la siguiente sección se evaluará otro parámetro del diagrama de radiación que es la dirigibilidad². Este parámetro nos ayudará a conocer el comportamiento del agrupamiento lineal al dirigir el haz principal dentro del margen de visibilidad, para conocer el comportamiento del nivel de los lóbulos laterales y el ancho de haz a media potencia en el diagrama de radiación.

² La dirigibilidad es el desplazamiento del haz principal hacia un usuario de interés dentro del margen de visibilidad del agrupamiento de antenas.

IV.2.3 NIVEL DE LÓBULOS LATERALES Y ANCHO DEL HAZ RESPECTO A LA DIRIGIBILIDAD DEL LÓBULO PRINCIPAL

En la sección anterior se determinó el comportamiento del nivel de aislamiento y ancho de haz para diferentes respuestas del diagrama de radiación, en esta sección se agrega un grado de libertad más que es la dirigibilidad, esto es para conocer que comportamiento tiene el diagrama de radiación al utilizar funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme, a diferentes direcciones del haz principal del diagrama. Las consideraciones de simulación para este escenario serán: agrupamiento lineal de 17 elementos con espaciamiento no uniforme entre elementos (ver Tabla III) y la radiación del diagrama se dirigirá de 30 a 150 grados, es decir, 120° que es el margen de visibilidad del agrupamiento de antena.

En las Figuras 23 y 24 se muestran el nivel de lóbulos laterales y el ancho de haz a media potencia, respectivamente, esto es cuando el haz principal es dirigido dentro del intervalo $-60^\circ \leq \theta_0 \leq 60^\circ$. Ambas figuras muestran los resultados obtenidos para dos valores del factor de ensanchamiento (Δ). Como se observa en las Figuras 23 y 24, en la región angular $|\theta_0| \leq 12.29^\circ$, hay una reducción en el nivel de aislamiento de 5.61% (1.13 dB), y existe un ligero incremento en el ancho de haz principal de 2.76% (0.16°), esto es para un factor de ensanchamiento $\Delta=0.345$, pero si ahora se evalúa la región angular $|\theta_0| \leq 15.8^\circ$, existe una reducción de 23.08% (5.7 dB) en el nivel de aislamiento y un incremento en el ancho de haz principal de alrededor de 4.26% (0.29°), esto es para un factor de ensanchamiento $\Delta=0.298$, donde estos resultados se encuentran dentro de lo que establece la normativa.

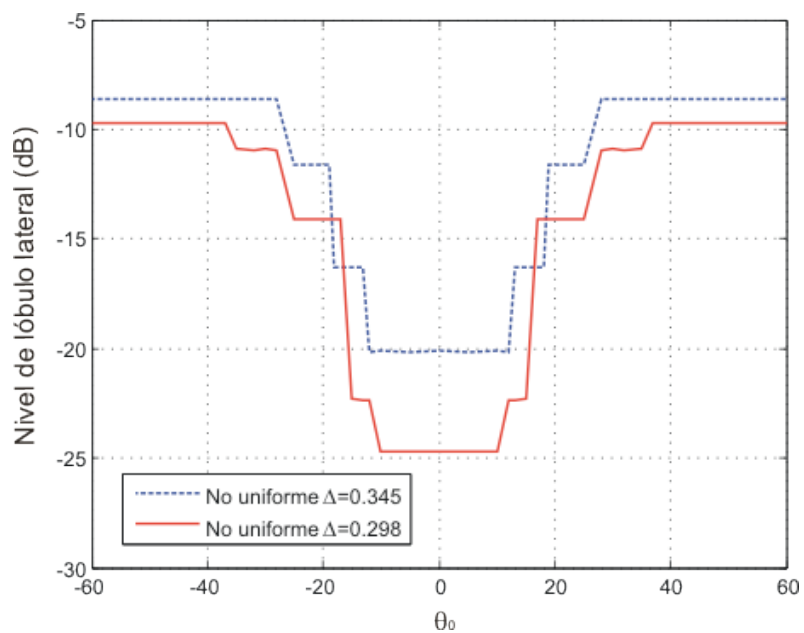


Figura 23. SLL resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 17 elementos, aplicando Legendre, con espaciamento no uniforme.

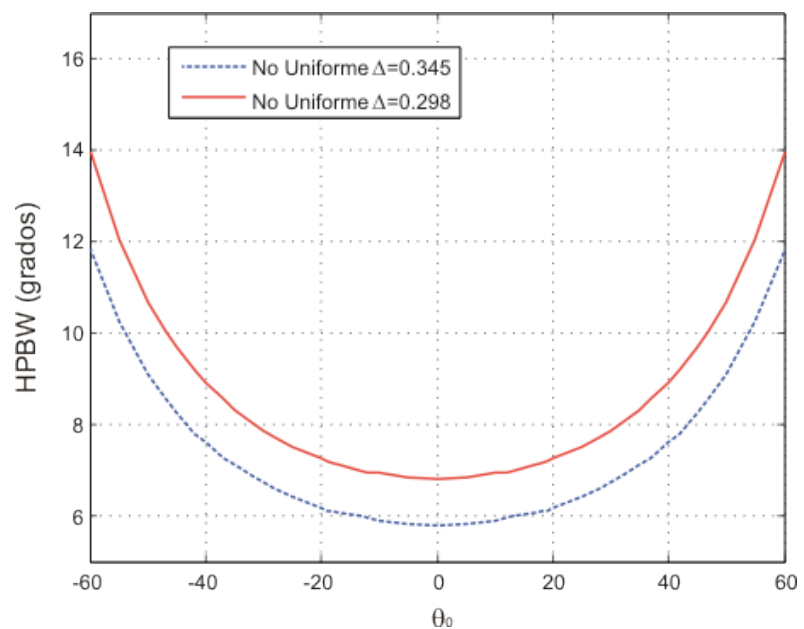


Figura 24. HPBW resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 17 elementos, aplicando Legendre con espaciamento no uniforme.

Al comparar los resultados se observa que para un factor de ensanchamiento menor ($\Delta=0.298$) obtiene un aumento de 19.03% (4.7 dB) en el nivel de SLL, y existe una pérdida de 14.71% (1°) en el HPBW respecto al factor $\Delta=0.345$, pero de acuerdo al objetivo de la tesis, lo que se busca es reducir el nivel del lóbulo lateral y posteriormente evaluar el ancho de haz. Por lo tanto, en base a los resultados obtenidos se observa un comportamiento del algoritmo muy interesante, al modificar el valor del factor de ensanchamiento (Δ) se obtiene una mejor respuesta en el diagrama de radiación, esto sin la necesidad de implementar un agrupamiento lineal con un número mayor de elementos.

Si este comportamiento se compara con otra técnica, por ejemplo, evolución diferencial (DE), las funciones de Legendre van a presentar una desventaja en términos de dirigibilidad. De acuerdo a los resultados presentados por [Rocha, 2006], la técnica de cómputo evolutivo heurística consigue una dirigibilidad de 60° , en comparación con la que se obtiene con las funciones de Legendre donde se logra una dirigibilidad de 31.6° .

En la siguiente sección se realizará una evaluación para un agrupamiento mayor de antenas (37 elementos), esto es con el fin de conocer las prestaciones que ofrecerán para estos tres parámetros antes mencionados.

IV.2.4 FUNCIONES DE LEGENDRE EN UN AGRUPAMIENTO LINEAL NO UNIFORME DE 37 ELEMENTOS

Las consideraciones de simulación son las siguientes: se utilizará un agrupamiento de 37 elementos con un espaciamiento uniforme ($d=\lambda/2$) y no uniforme entre elementos, la información de los espaciamientos fue adquirida de [Kumar y Banner, 2005] con el

objetivo de validar estos resultados, la radiación del diagrama es en modo transversal (dirigido a 90°) se considera un factor de ensanchamiento de $\Delta=0.263$. En la Figura 25 se presenta la respuesta obtenida al emplear funciones de Legendre en un agrupamiento lineal de 37 elementos con separación uniforme y no uniforme. Al igual que el agrupamiento de 17 elementos para este caso se obtuvo una reducción de 45.04% (10.45 dB) en el nivel de aislamiento y 1.48% (0.04°) en el ancho de haz, esto es respecto a un agrupamiento con espaciamiento uniforme.

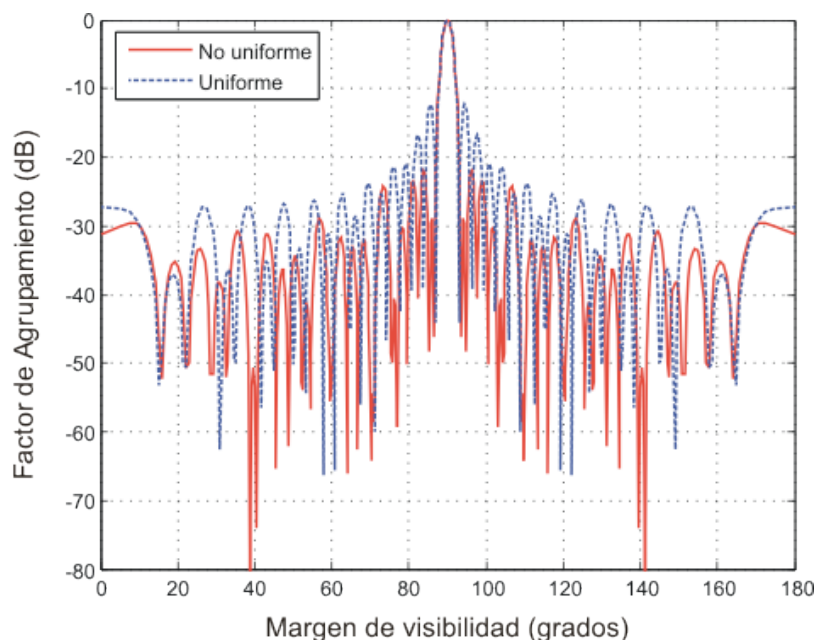


Figura 25. Diagrama de radiación para un agrupamiento lineal de 37 elementos, aplicando funciones de Legendre con separación uniforme y no uniforme entre elementos de antena.

La diferencia principal al emplear un agrupamiento con un mayor número de elementos espaciados no uniformemente, es una mejora en la directividad del diagrama de radiación; es decir, el ancho de haz se reduce 54.14% (3.14°) al emplear 37 elementos de antena en el agrupamiento lineal. En la Tabla V se presentan de forma resumida los valores

obtenidos tanto para el ancho de haz a media potencia, como para el nivel del lóbulo lateral de cada respuesta.

Tabla V. HPBW y SLL obtenidos en cada respuesta en un agrupamiento de 37 elementos de antena, con un factor de ensanchamiento $\Delta=0.263$.

Respuesta	SLL (dB)	HPBW (grados)
Legendre uniforme (37)	-12.75	2.70
Legendre no uniforme (37)	-23.20	2.66

También en la Tabla VI se presentan los espaciamentos tomados de [Kumar y Banner, 2005] y las excitaciones de los elementos de antena, obtenidas en la simulación del agrupamiento lineal de 37 elementos no uniforme. Se presentan únicamente 19 elementos esto es debido a que el agrupamiento que se utiliza es simétrico impar, los valores de los elementos restantes van a ser iguales a los que se presentan en la Tabla VI. En esta simulación se utilizó un factor de ensanchamiento $\Delta=0.263$, esto es porque se encontró que este factor logra un nivel de aislamiento de -23.2 dB mayor al establecido por la normativa.

Tabla VI. Excitaciones y espaciamentos de un agrupamiento lineal de 37 elementos, aplicando funciones de Legendre, factor de ensanchamiento $\Delta=0.263$.

n	Excitaciones (I_n)	Espaciamentos (d_n)	n	Excitaciones (I_n)	Espaciamentos (d_n)
1	0.0078	0λ	11	0.0101	5.2090λ
2	0.0122	0.5000λ	12	0.0102	5.8770λ
3	0.0115	1.0000λ	13	0.0101	6.5710λ
4	0.0114	1.5000λ	14	0.0098	7.2840λ
5	0.0114	2.0000λ	15	0.0095	8.0100λ
6	0.0115	2.5000λ	16	0.0088	8.7470λ
7	0.0116	3.0000λ	17	0.0083	9.4910λ
8	0.0117	3.5000λ	18	0.0075	10.2410λ
9	0.0119	4.0000λ	19	0.0068	10.9950λ
10	0.0102	4.5760λ			

En la siguiente sección se evaluará y comparará un parámetro importante del diagrama de radiación que es la dirigibilidad, la evaluación de este parámetro es para conocer el comportamiento del agrupamiento lineal de 37 elementos, al dirigir el haz principal dentro del margen de visibilidad, y así conocer el comportamiento los lóbulos laterales y el ancho de haz a media potencia.

IV.2.5 COMPARACIÓN DE SLL Y HPBW RESPECTO A LA DIRIGIBILIDAD EN UN AGRUPAMIENTO DE 17 Y 37 ELEMENTOS

Las consideraciones de simulación para este escenario serán: agrupamiento lineal de 17 y 37 elementos con espaciado no uniforme entre elementos de antena (ver Tabla III y Tabla VI), la radiación del diagrama se dirigirá de 30 a 150 grados, el factor de ensanchamiento utilizado es $\Delta=0.298$ para 17 elementos y $\Delta=0.2585$ para 37 elementos. En las Figuras 26 y 27 se muestran el nivel de lóbulos laterales y el ancho de haz a media potencia, respectivamente, esto es cuando el haz principal es dirigido dentro de la ventana de $-60^\circ \leq \theta_0 \leq 60^\circ$. Se observa en las Figuras 26 y 27, que para un agrupamiento lineal de 37 elementos dentro la región angular $|\theta_0| \leq 16.7^\circ$, existe una reducción de 23.08% (5.7 dB) en el nivel del lóbulo lateral y un ligero incremento en el ancho de haz principal de alrededor de 4.76% (0.13°).

El agrupamiento de 17 elementos de antena permite dirigir el haz principal dentro de un intervalo de 31.6° a diferencia del agrupamiento de 37 elementos que tiene un margen de dirigibilidad de 33.4° , es decir, al utilizar 17 elementos la dirigibilidad disminuye 5.39% (1.8°), en base a estos resultados, el agrupamiento de 37 elementos es el que presenta mejores resultados al utilizar dirigibilidad del haz principal.

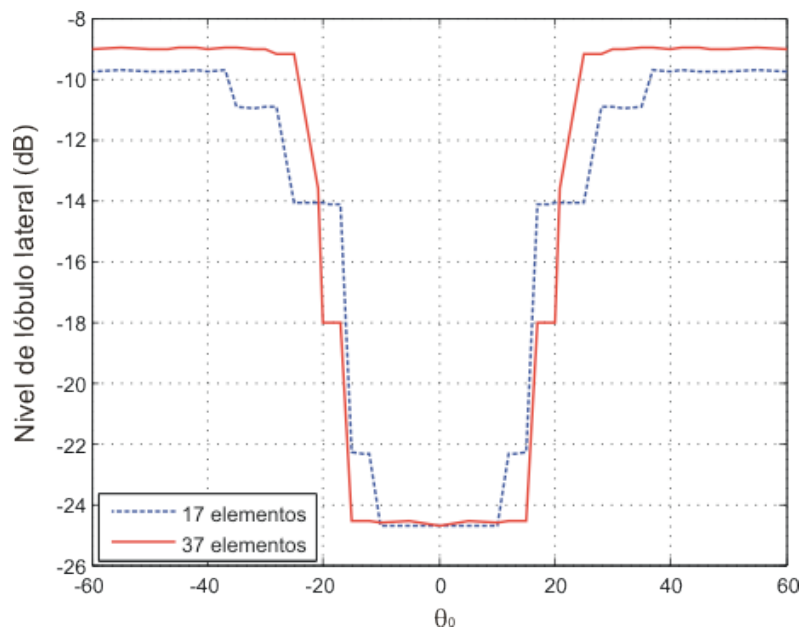


Figura 26. SLL resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 17 y 37 elementos de antena, aplicando Legendre con espaciamento no uniforme.

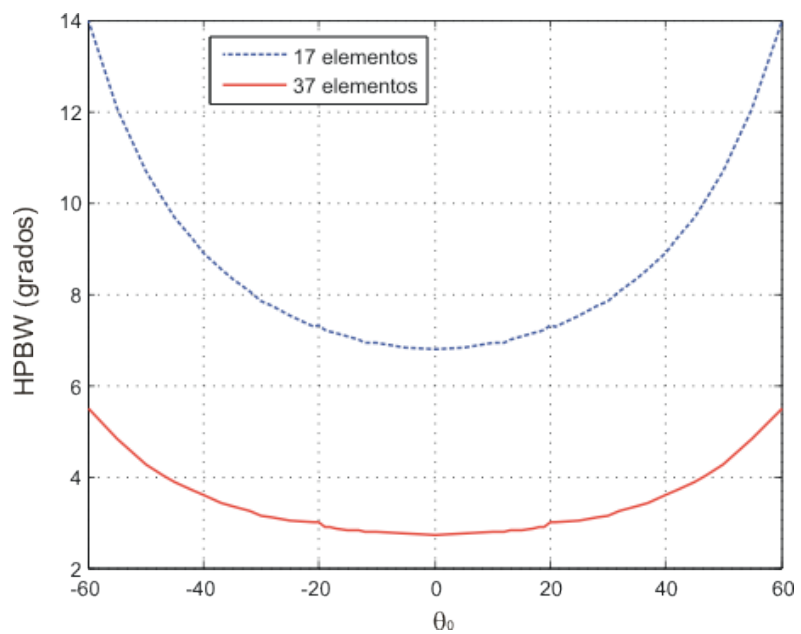


Figura 27. HPBW resultante al dirigir el lóbulo principal, en un agrupamiento lineal de 17 y 37 elementos de antena, aplicando Legendre con espaciamento no uniforme.

Los resultados que se han presentado hasta este momento nos han permitido evaluar al diagrama de radiación en tres parámetros, en la siguiente sección se evaluará otra métrica importante del algoritmo, que es el tiempo de cómputo.

IV.3 TIEMPO DE CÓMPUTO EN UN AGRUPAMIENTO LINEAL APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE

Para conocer el tiempo de cómputo se utilizó un tiempo promedio de 1000 repeticiones, variando el número de elementos de antena de 5 a 37 elementos. Las características del equipo de cómputo que se utilizó para esta evaluación son:

- CPU: 867 Mhz Power PC G4, 256MB RAM
- Sistema Operativo: Mac OS X 10.4.9
- Lenguaje: Matlab versión 7.0.0.19901

En el eje horizontal de la Figura 28 se tiene el número de elementos de antena y en el eje vertical al tiempo de cómputo que está dado en segundos, los resultados nos indican que el tiempo de cómputo de esta técnica analítica es bastante rápido en comparación con las técnicas de cómputo evolutivo heurísticas, porque de acuerdo a [Rocha, 2006] los tiempos obtenidos con evolución diferencial fueron de 8 a 9 horas. Al aplicar funciones de Legendre se obtiene como valor máximo 9.5 mseg utilizando un agrupamiento de 37 elementos. Además se observa en la figura que al utilizar entre 5 y 7 elementos de antena existe una pendiente muy pronunciada del tiempo, mayor a 7 elementos de antena esta

pendiente se modifica y se vuelve menos pronunciada, después de 11 elementos en adelante esta pendiente nuevamente se modifica y se vuelve lineal, es decir, conforme el número de elementos aumenta, el tiempo de cómputo también aumenta, esto es importante porque esto es lo que se busca en el algoritmo.

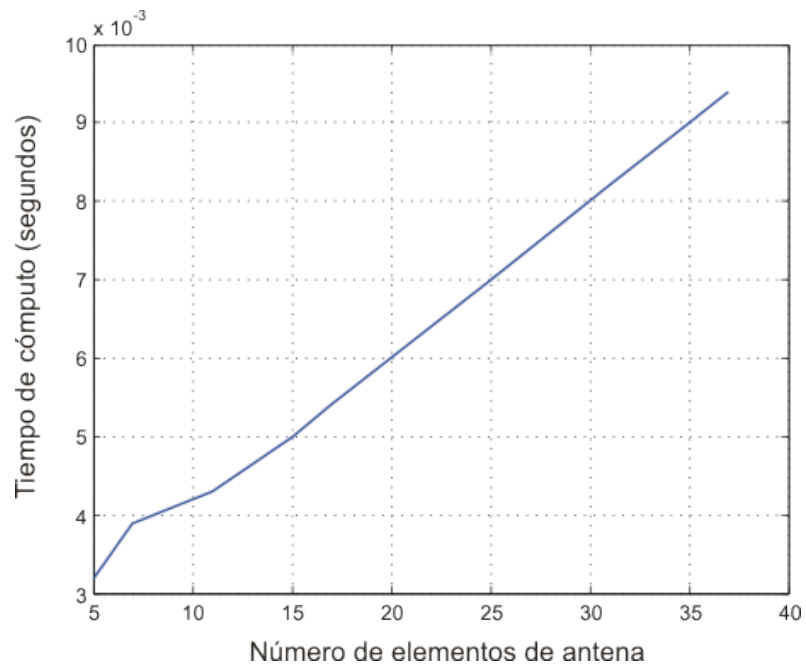


Figura 28. Tiempo de cómputo en un agrupamiento lineal aplicando funciones de Legendre.

IV.4 ANÁLISIS NUMÉRICO Y CONCLUSIONES

Las siguientes figuras muestran en resumen los valores obtenidos en las diferentes técnicas tanto para lóbulos laterales como para el ancho de haz a media potencia. En este capítulo se comprobó que al utilizar las Técnicas Analíticas Generalizadas en un agrupamiento lineal no uniforme, se obtienen mejores resultados en prestaciones tanto en el nivel de lóbulos laterales como en el ancho de haz a media potencia, porque se obtiene un

SLL de -24.7 dB y un HPBW de 6.8° , con un tiempo de cómputo de 5.5 mseg para el caso de un agrupamiento de 17 elementos con espaciamiento no uniforme. Se hace énfasis en el tiempo de cómputo porque de acuerdo a [Rocha, 2006] los tiempos obtenidos con evolución diferencial para un agrupamiento de 17 elementos de antena con espaciamiento no uniforme fueron de 8 a 9 horas. En la Figura 29 se aprecia que las funciones de Legendre son las que proporcionan la mejor respuesta en la reducción del nivel de lóbulos laterales, en comparación con la respuesta natural, síntesis de Taylor y dos técnicas de cómputo evolutivo, algoritmos genéticos (GA) [Panduro, 2005] y evolución diferencial (DE) [Rocha, 2006].

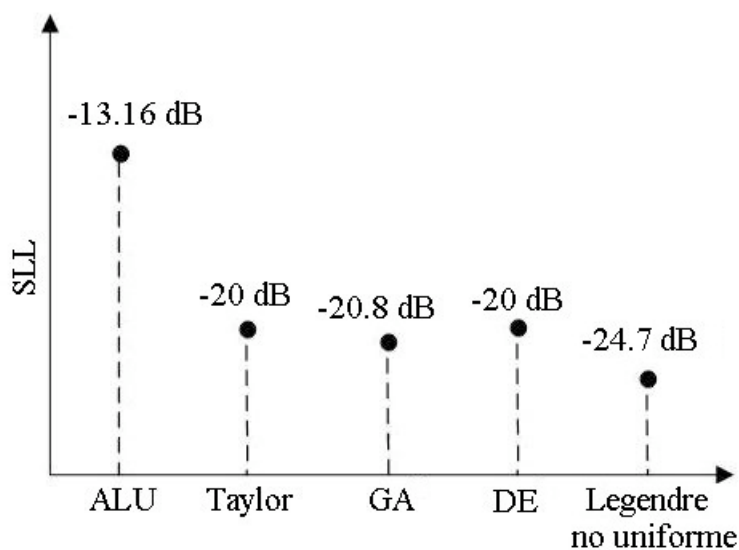


Figura 29. Comparación del mínimo SLL obtenido por diferentes métodos.

En la Figura 30 se observa que la respuesta natural y algoritmos genéticos son quienes ofrecen un mejor ancho de haz, pero si primero se considera el nivel de SLL (ver Figura 29), tenemos que las funciones de Legendre son quienes proporcionan los mejores

resultados en este parámetro, en base a esto, se determina que la técnica que proporciona el mejor ancho de haz después de la respuesta natural y GA son las funciones de Legendre. La respuesta del diagrama de radiación con las funciones de Legendre aumenta alrededor de 11.76% (0.8°) en el ancho de haz a media potencia, en relación al nivel de los lóbulos laterales éste disminuye un 46.72% (11.54 dB) respecto a la respuesta natural, 15.79% (3.9 dB) con GA y 19.02% (4.7 dB) en relación con DE. Con lo cual se puede concluir que las funciones de Legendre ofrecen las mejores prestaciones en el diagrama de radiación para un agrupamiento lineal no uniforme.

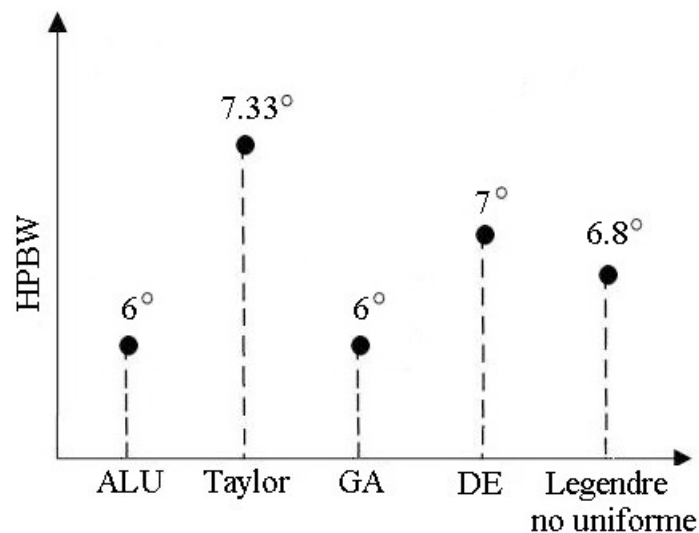


Figura 30. Comparación del mínimo HPBW obtenido por diferentes métodos.

Para el caso de 37 elementos se obtuvo un nivel de lóbulos laterales de -24.7 dB al igual que en 17 elementos de antena, un ancho de haz a media potencia de 2.77° y un tiempo de cómputo de 9.5 mseg. Al evaluar los agrupamientos de 17 y 37 elementos de antena se comprobó que el agrupamiento que tiene la mejor dirigibilidad es el de 37

elementos, al utilizar 17 elementos de antena la dirigibilidad sufre una disminución de 5.39% (1.8°). Al realizar esta evaluación se concluyó que si se requieren anchos de haz muy estrechos, el agrupamiento que presenta las mejores prestaciones es el que utiliza 37 elementos de antena, pero si se busca dirigibilidad en el diagrama de radiación sin importar demasiado el ancho de haz, se recomienda utilizar un agrupamiento de 17 elementos de antena. Se observó que tanto para 17 como para 37 elementos de antena se obtuvieron mejores resultados en el nivel de lóbulos laterales en comparación con las técnicas de cómputo evolutivo. Además en estas simulaciones se encontró una métrica importante en las funciones de Legendre que es el factor de ensanchamiento (Δ), se apreció que este factor está directamente relacionado con el nivel de lóbulos laterales y se encontró que su comportamiento es no lineal respecto al nivel de los lóbulos laterales. También se comprobó que la principal desventaja de esta técnica analítica es su intervalo de dirigibilidad, para el caso más favorable, es decir 37 elementos de antena se tiene una disminución de 44.33% (26.6°) de la dirigibilidad en comparación con evolución diferencial.

Con estas conclusiones, se cumple el objetivo correspondiente a la síntesis del diagrama de radiación de agrupamientos lineales de antenas. En el siguiente capítulo se complementaran los objetivos marcados al inicio de este trabajo de tesis, y se tratará la síntesis del diagrama de radiación de agrupamientos planares de antena.

CAPÍTULO V

SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE A UN AGRUPAMIENTO PLANAR

V.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este capítulo, es presentar resultados de simulaciones efectuadas a agrupamientos de antenas con espaciamiento uniforme y no uniforme, entre elementos de antena para la geometría planar. Cada simulación efectuada se desarrolla a partir del modelo matemático establecido en la sección III.5.2. De acuerdo a las estadísticas que se presentarán, se podrá establecer una comparación con evolución diferencial (técnica de cómputo evolutivo heurística), esto es con el fin de evaluar las prestaciones que ofrecen las funciones de Legendre en esta geometría. También, se evaluará el tiempo de cómputo del algoritmo para este caso.

V.2 ESCENARIOS DE SIMULACIÓN

Para efectuar estas simulaciones se requerirán de diferentes escenarios de simulación, los resultados que se obtengan se validarán con el trabajo de investigación reportado por [Kumar y Branner, 2005] y se compararán con los reportados por [Rocha, 2006].

V.2.1 RESPUESTA NATURAL DE UN AGRUPAMIENTO PLANAR 31X31 ELEMENTOS CON ESPACIAMIENTO UNIFORME

En la sección III.5.2, se mencionó que el principal objetivo de los agrupamientos en el plano, es lograr diagramas de radiación altamente directivos y con capacidad de reposicionar el haz principal del diagrama [Balanis, 2005]. A diferencia de un agrupamiento lineal donde únicamente se puede dirigir el haz principal en un solo plano, el agrupamiento planar lo puede dirigir a cualquier ángulo del hemisferio superior al plano del agrupamiento [Milligan, 2005]. En base a esto, el escenario considerado para esta simulación es el propuesto por [Balanis, 2005], orientado fundamentalmente a obtener la respuesta natural de un agrupamiento planar. El propósito de esta simulación es conocer el nivel de lóbulos laterales, anchos de haz y directividad del agrupamiento. La consideración de simulación para este escenario es la siguiente: agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena, con espaciado uniforme entre elementos de antena ($\lambda/2$). La radiación del diagrama es en modo transversal (dirigido a 90°). En la Figura 31 se presenta el primer cuadrante del agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena con espaciado uniforme, en ésta se muestra la distribución reticular de los elementos de antena en el agrupamiento.

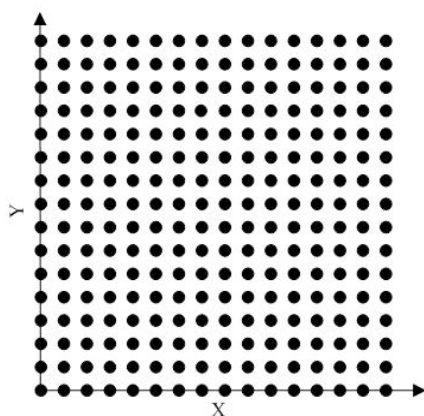


Figura 31. Estructura del primer cuadrante de un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena con espaciado uniforme [Rocha, 2006].

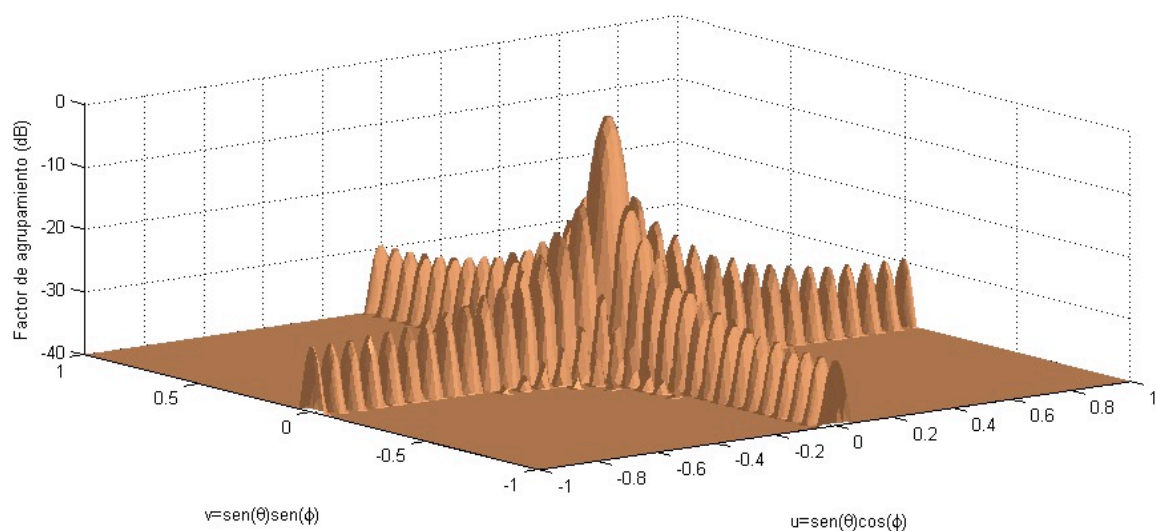


Figura 32. Diagrama de radiación de la respuesta natural de un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena con espaciado uniforme ($\lambda/2$).

La Figura 32 muestra el diagrama de radiación obtenido con la respuesta natural, donde el eje u y v representan los márgenes de visibilidad de -1 a 1 radián, en el eje z se tiene al factor de agrupamiento dado en decibeles. En la Figura 32 se tienen como principales resultados, un nivel de lóbulos laterales de -13.20 dB, ancho de haz del

agrupamiento planar¹ de $3.27^\circ \times 3.27^\circ$ y una directividad de 34.81 dB. Puesto que el resultado del nivel de lóbulos laterales de este agrupamiento planar no cumple con lo solicitado por la normativa (-19 dB), por lo tanto, se requerirá de la aplicación de una técnica para la síntesis del diagrama de radiación, con mejores prestaciones en nivel de lóbulos laterales, anchos de haz y directividad.

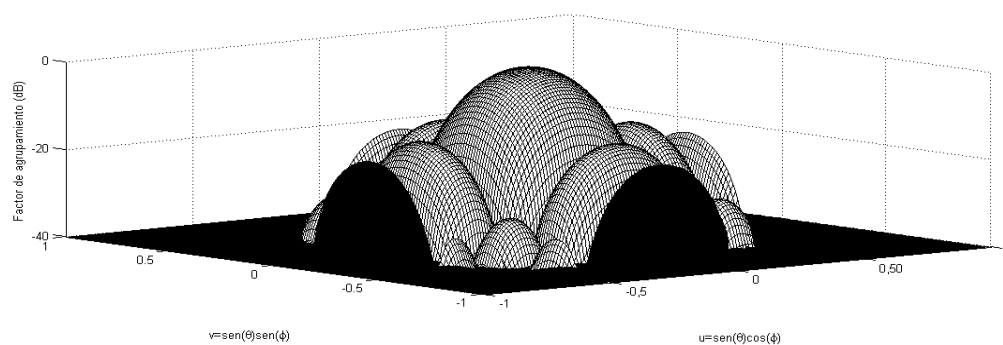
En la siguiente sección se realiza una comparación entre la respuesta natural y las funciones de Legendre, aplicadas a un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena. Esto con el fin de conocer las prestaciones que ofrecen las Técnicas Analíticas Generalizadas.

V.2.2 FUNCIONES DE LEGENDRE EN UN AGRUPAMIENTO PLANAR UNIFORME Y NO UNIFORME

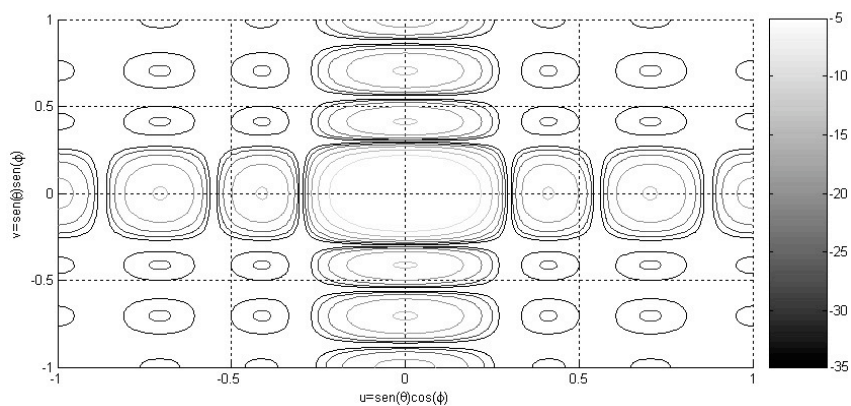
En la sección anterior se determinó el comportamiento del nivel de lóbulos laterales, anchos de haz a media potencia y directividad en la respuesta natural del agrupamiento planar. En esta sección se buscará mejorar estas prestaciones con la aplicación de funciones de Legendre con espaciamiento uniforme entre elementos de antena. La primera simulación es para un agrupamiento planar utilizando funciones de Legendre, esto es con fines de validación y sus consideraciones serán: agrupamiento planar de 7x7 elementos de antena con espaciamiento no uniforme, la información de los espaciamientos no uniformes fueron adquiridos de [Kumar y Banner, 2005], la radiación del diagrama es en modo transversal (dirigido a 90°). En la Figura 33 se observa la validación del diagrama de radiación del

¹ El ancho de haz del agrupamiento planar es representado por el producto de dos anchos de haz de agrupamientos lineales.

agrupamiento planar de 7×7 elementos de antena, donde los resultados obtenidos fueron los mismos que los reportados por [Kumar y Branner, 2005]. Estos resultados demostraron el funcionamiento del algoritmo, a continuación se considera un agrupamiento planar de 31×31 elementos de antena con espaciamiento uniforme, esto con fines de comparación con la respuesta natural del agrupamiento planar y otras técnicas de síntesis del diagrama de radiación.



a)



b)

Figura 33. Diagrama de radiación de un agrupamiento planar de 7×7 elementos de antena. a) Respuesta en el espacio obtenida mediante simulación para su validación. b) Diagrama representado en curvas de nivel.

Los resultados obtenidos servirán para efectuar una comparación entre la respuesta natural y las funciones de Legendre en un agrupamiento planar. Las consideraciones de simulación para este escenario serán las siguientes: un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena, con espaciamiento uniforme entre elementos ($\lambda/2$) y radiación del diagrama en modo transversal (dirigido a 90°).

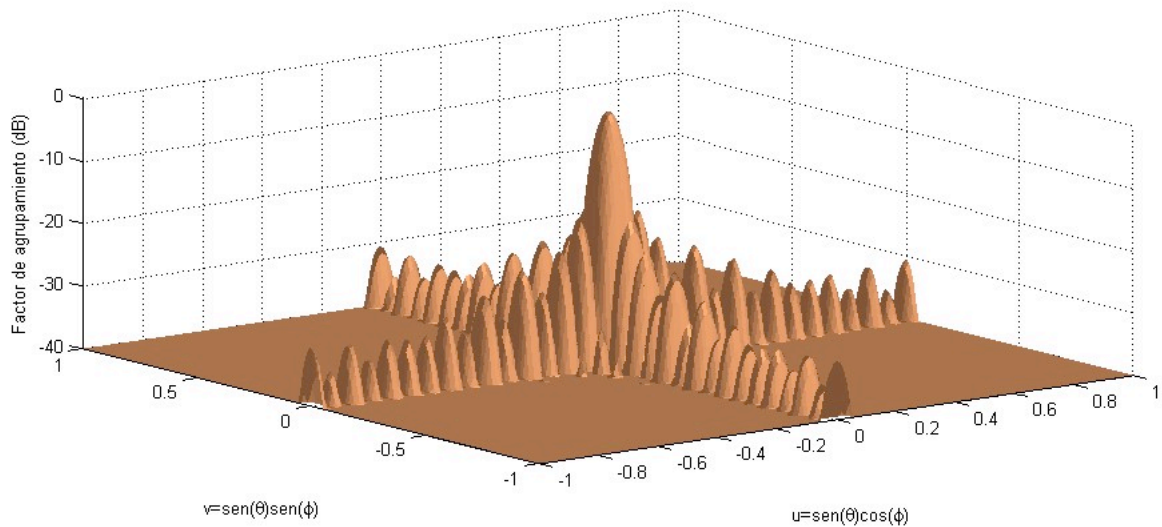


Figura 34. Diagrama de radiación, aplicando funciones de Legendre con espaciamiento uniforme en un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena.

La Figura 34 muestra el diagrama de radiación obtenido al utilizar funciones de Legendre con espaciamiento uniforme y al comparar los resultados con los presentados en la Figura 32, se obtiene como resultado una reducción en el nivel de lóbulos laterales de 17.5% (2.8 dB), un aumento de 5.76% (0.2°) en el ancho de haz del agrupamiento planar y una reducción en la directividad de 1.47% (0.51 dB). Al utilizar funciones de Legendre con espaciamiento uniforme en un agrupamiento planar, el único parámetro que se mejora es el nivel de lóbulos laterales, sin embargo este resultado no satisface el requerimiento de la

normativa. Por lo tanto, en la siguiente sección se aplicará espaciamiento no uniforme entre elementos de antena, con el fin de mejorar las prestaciones del diagrama de radiación, de la misma manera como se llevó a cabo en agrupamientos lineales.

V.2.3 FUNCIONES DE LEGENDRE PARA LA SÍNTESIS DEL DIAGRAMA EN UN AGRUPAMIENTO PLANAR NO UNIFORME

Para esta simulación se considerará una geometría planar de 31x31 elementos de antena como la que se muestra en la Figura 35, donde los espaciamientos son tomados de [Kumar y Banner, 2005], y las excitaciones de los elementos de antena fueron obtenidas mediante la simulación del algoritmo. También se considera un radiación del diagrama en modo transversal (dirigido a 90°). En la Tabla VII se presentan los espaciamientos y excitaciones aplicados en esta simulación a cada uno de los elementos de antena.

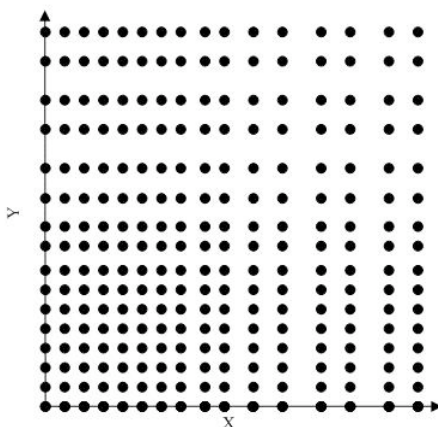


Figura 35. Estructura del primer cuadrante de un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena con espaciamiento no uniforme [Rocha, 2006].

Si bien la Tabla VII proporciona únicamente 16 elementos de antena, esto se debe a que el agrupamiento que se está utilizando es simétrico impar, es decir, los valores de los

elementos restantes van a ser iguales a los que se presentan en la tabla. Para más detalle, en la Figura 36, se muestra la distribución que guarda un agrupamiento impar en términos de sus espaciamentos y excitaciones, debido a que el agrupamiento planar que se utiliza está construido a base de agrupamientos lineales.

Tabla VII. Excitaciones y espaciamentos de un agrupamiento planar no uniforme de 31x31 elementos, aplicando funciones de Legendre con factor de ensanchamiento $\Delta=0.345$.

N	Excitaciones (I_n)	Espaciamentos (d_n)	n	Excitaciones (I_n)	Espaciamentos (d_n)
1	0.0201	0λ	9	0.0333	4.0000λ
2	0.0398	0.5000λ	10	0.0282	4.5760λ
3	0.0336	1.0000λ	11	0.0275	5.2090λ
4	0.0336	1.5000λ	12	0.0268	5.8770λ
5	0.0342	2.0000λ	13	0.0256	6.5710λ
6	0.0346	2.5000λ	14	0.0246	7.2840λ
7	0.0346	3.0000λ	15	0.0244	8.0100λ
8	0.0342	3.5000λ	16	0.0250	8.7470λ

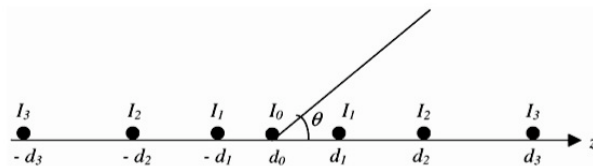


Figura 36. Agrupamiento lineal simétrico impar de $2N+1$ elementos [Kumar y Branner, 2005].

El diagrama de radiación obtenido del agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena con espaciamento no uniforme, se muestra en la Figura 37. El nivel del lóbulo lateral que se obtiene con el agrupamiento planar no uniforme de 31x31 elementos de antena, aplicando funciones de Legendre, es de -22 dB. Además se obtiene un ancho de haz

del agrupamiento planar de $3.18^\circ \times 3.18^\circ$ y una directividad de 35.05 dB. En base a estos resultados se obtiene una reducción en el nivel de lóbulos laterales de 27.27% (6 dB), respecto a Legendre uniforme, mientras que en relación a la respuesta natural el nivel se reduce 40% (8.84 dB).

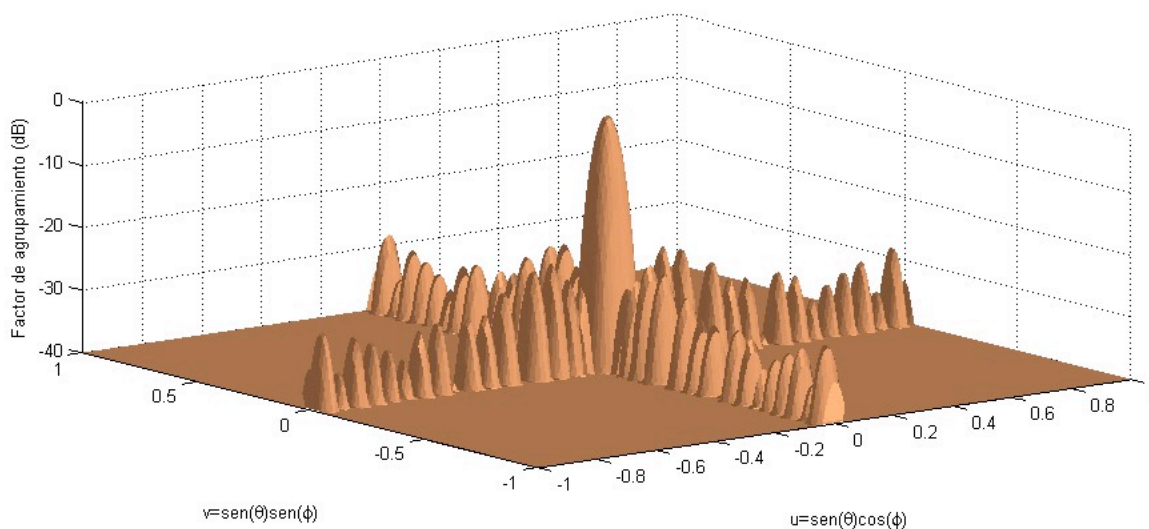


Figura 37. Diagrama de radiación aplicando funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme en un agrupamiento planar de 31×31 elementos de antena.

Para el ancho de haz se obtiene una disminución de 8.36% (0.29°) en relación a Legendre uniforme, y de acuerdo a la respuesta natural se logra una reducción de 2.83% (0.09°). Para el caso de la directividad, ésta aumenta 2.14% (0.75 dB) respecto a Legendre uniforme. En relación a la respuesta natural, se obtiene un aumento de 0.68% (0.24 dB). La Tabla VIII presenta en forma resumida los resultados obtenidos para cada respuesta del diagrama de radiación.

Tabla VIII. Resultados de SLL, HPBW y directividad de la respuesta natural y funciones de Legendre para un agrupamiento planar de 31x31 elementos de antena.

Respuesta	SLL (dB)	HPBW (grados)	Directividad(dB)
Natural	-13.16	3.27 x 3.27	34.81
Legendre uniforme	-16.00	3.47 x 3.47	34.30
Legendre no uniforme	-22.00	3.18 x 3.18	35.05

En esta sección se encontró que, el agrupamiento planar con espaciado no uniforme, proporciona mejores resultados en lóbulos laterales, anchos de haz y directividad en comparación con la respuesta natural del agrupamiento planar y, con las funciones de Legendre con espaciado uniforme. Los resultados que se han presentado hasta este momento, han permitido evaluar al diagrama de radiación en estos tres parámetros. En la siguiente sección se evaluará otra métrica importante del algoritmo, el tiempo de cómputo.

V.3 TIEMPO DE CÁMPUTO EN UN AGRUPAMIENTO PLANAR APLICANDO FUNCIONES DE LEGENDRE

Para obtener el tiempo de cómputo se estableció un tiempo promedio de 1000 repeticiones, variando de 5 a 37 elementos de antena. Las características del equipo de cómputo que se utilizó para esta evaluación son:

- CPU: 867 Mhz Power PC G4, 256MB RAM
- Sistema Operativo: Mac OS X 10.4.9
- Lenguaje: Matlab versión 7.0.0.19901

En la Figura 38, el eje de las abscisas representa el número de elementos de antena y en el eje de las ordenadas, el tiempo de cómputo dado en segundos. De acuerdo a la figura, los resultados nos indican que el tiempo de cómputo de esta técnica analítica es bastante rápido en comparación con evolución diferencial. Esto debido a que en [Rocha, 2006], los tiempos obtenidos empleando una técnica de cómputo evolutivo heurística fueron de 8 a 9 horas. Al utilizar funciones de Legendre, el tiempo de respuesta del algoritmo presenta un valor máximo de 14.5 msec en un agrupamiento planar de 37 elementos de antena. También se observa que el comportamiento de la pendiente es cuasi lineal, es decir, conforme el número de elementos aumenta, el tiempo de cómputo también aumentará, esto es importante porque este comportamiento es el que se busca tener en el algoritmo.

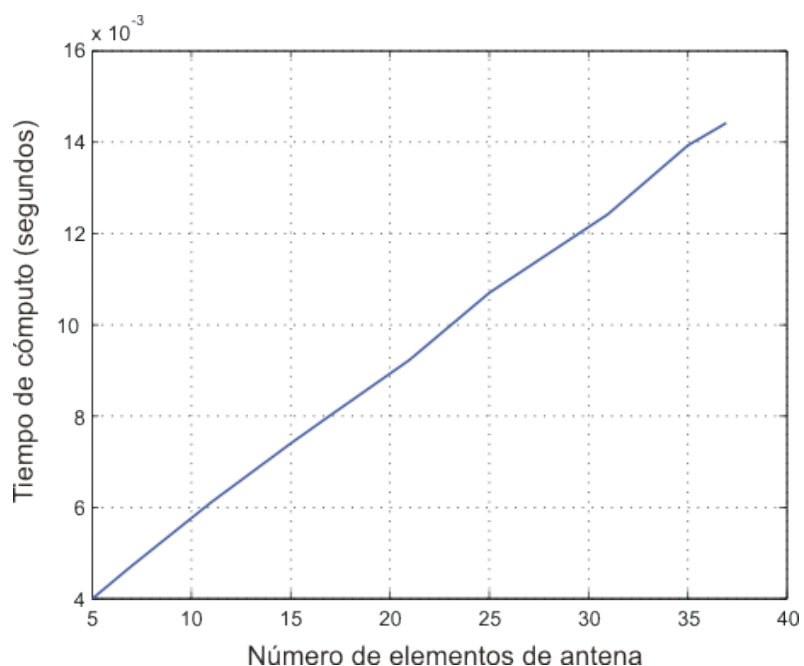


Figura 38. Tiempo de cómputo en un agrupamiento planar aplicando funciones de Legendre.

V.4 ANÁLISIS NUMÉRICO Y CONCLUSIONES

Las siguientes figuras muestran los resultados obtenidos durante este capítulo, mostrando las diferentes técnicas tanto para lóbulos laterales, como para el ancho de haz a media potencia. De acuerdo a los resultados obtenidos en este capítulo se comprobó que, al utilizar las Técnicas Analíticas Generalizadas en un agrupamiento planar no uniforme proporcionan mejores prestaciones en el nivel de lóbulos laterales, ancho de haz a media potencia y directividad.

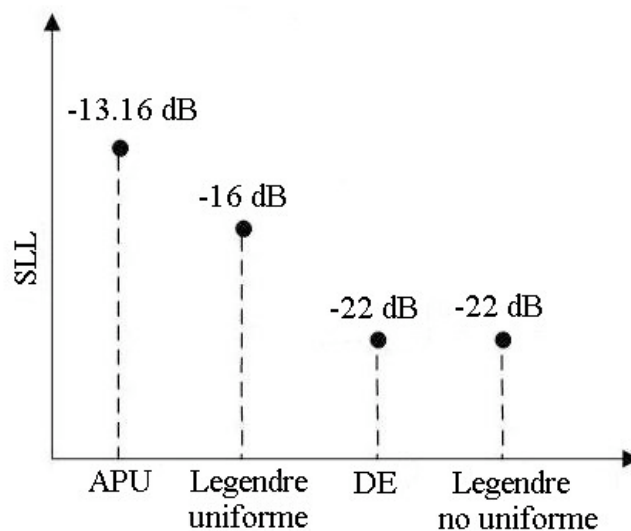


Figura 39. Comparación del mínimo SLL obtenido por diferentes métodos.

La Figura 39 muestra que las funciones de Legendre, con espaciamiento no uniforme, proporcionan una reducción del nivel de lóbulos laterales de 40.18% (8.84 dB) con respecto a la respuesta natural (APU) y de 27.27% (6 dB) con relación a las funciones de Legendre con espaciamiento uniforme. Para el caso de evolución diferencial (DE) [Rocha, 2006], las funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme logran,

aproximadamente, los mismos resultados al obtener niveles de lóbulo lateral, por debajo de los -19 dB solicitados por la normativa.

Como una aportación importante de este trabajo, es el análisis y comparación de la directividad del diagrama de radiación obtenido por diferentes métodos, donde [Kumar y Branner, 2005] no reportan resultados del comportamiento de este parámetro. En la Figura 40 se observa que las respuestas con menor directividad son: la respuesta natural (APU) y las funciones de Legendre con espaciado uniforme. Las funciones de Legendre con espaciado no uniforme obtienen un aumento en la directividad de 2.14% (0.75 dB) respecto a Legendre uniforme y 0.68% (0.24 dB) en relación a la respuesta natural. Aunque de acuerdo a evolución diferencial, existe una desventaja relativa, porque esta técnica de cómputo evolutivo logra una ganancia de 6.38% (2.35 dB) respecto a las funciones de Legendre con espaciado no uniforme.

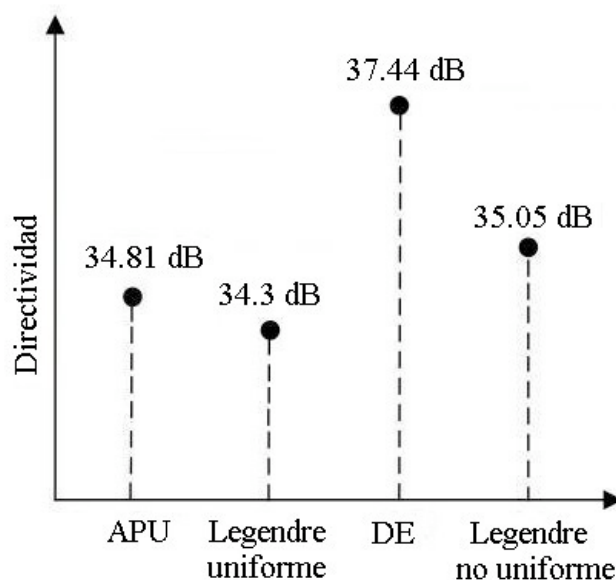


Figura 40. Comparación de la directividad obtenida por diferentes métodos.

Se puede concluir que las funciones de Legendre presentan las mejores prestaciones en términos del nivel de lóbulos laterales, anchos de haz y directividad. Si se evalúa el tiempo de cómputo de los algoritmos, se tiene que las funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme obtienen un tiempo de cómputo de 12.5 mseg para el caso de un agrupamiento de 31 elementos. Este parámetro se enfatiza debido a que en [Rocha, 2006], el tiempo de cómputo obtenido con evolución diferencial para un agrupamiento de 31 elementos de antena con espaciamiento no uniforme fue alrededor de 8 a 9 horas.

De acuerdo a estos resultados, se cumplen los objetivos propuestos al inicio de este trabajo de tesis, por lo cual, en el siguiente capítulo, se realizará un análisis de los logros obtenidos en el desarrollo de este trabajo y se concluirá sobre ellos. Además, se presentarán las contribuciones realizadas en este trabajo al estado del arte.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES, CONTRIBUCIONES Y TRABAJO FUTURO

Este capítulo tiene como finalidad presentar las conclusiones y aportaciones de este trabajo de tesis, considerando para ello el planteamiento del problema y el objetivo de la tesis. Además, se presentan las propuestas de los posibles trabajos futuros como continuación de esta tesis.

Un aspecto importante de este trabajo es su originalidad y trascendencia porque se está abordando el estado del arte en el problema de la síntesis del diagrama de radiación y por el empleo de técnicas analíticas de optimización

VI.1 SOBRE LA SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN EMPLEANDO FUNCIONES DE LEGENDRE

En el capítulo III se mencionó que el método analítico basado en funciones de Legendre se encuentra dentro del estado del arte, en la síntesis del diagrama de radiación es

el empleo de funciones de Legendre para la síntesis del diagrama de radiación deseado. La importancia y particularidad de la utilización de estas funciones es, que el problema de la síntesis del diagrama de radiación resulta más sencillo al emplear polinomios de Legendre en comparación con otras técnicas analíticas, lo cual se refleja además en la reducción del tiempo de cómputo del algoritmo.

Previamente, al desarrollo del modelado y simulación de la síntesis del diagrama de radiación empleando polinomios de Legendre, se estudió en detalle la teoría necesaria para comprender, y aplicar los polinomios en la síntesis del diagrama de radiación. A continuación se presentarán las principales conclusiones alcanzadas tanto para el agrupamiento lineal como para el planar.

VI.1.1 SOBRE LA SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN DEL AGRUPAMIENTO LINEAL DE ANTENAS

En base al objetivo general de esta tesis y considerando el análisis de resultados, a continuación se presentan las principales conclusiones obtenidas en la síntesis del diagrama de radiación, usando agrupamientos lineales.

- Una parte importante del trabajo fue modelar el factor de agrupamiento para el caso de la geometría lineal, empleando funciones de Legendre. Con ello se estableció el problema de la síntesis del diagrama de radiación, en términos de polinomios de Legendre.
- En la simulación de la síntesis de Taylor se comprobó que, las técnicas analíticas convencionales, proporcionan una solución parcial al problema de la síntesis del

diagrama de radiación, en términos del nivel de lóbulos laterales y ancho de haz a media potencia, debido a que no satisface los requerimientos solicitados por la normativa en estos parámetros.

- Se demostró que al utilizar funciones de Legendre con espaciamiento uniforme entre elementos de antena, se mejora un 5.26% el nivel de lóbulos laterales alcanzando un valor máximo de -13.89 dB de aislamiento, mismo que no satisface el valor deseado de -19 dB.
- Por lo tanto, se simuló la síntesis del diagrama de radiación en modo transversal, utilizando funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme entre elementos de antena, donde se comprobó lo reportado por [Panduro, 2005], que al utilizar espaciamiento no uniforme entre elementos de antena se logran mejores prestaciones en el nivel de lóbulos laterales.
- Se comprobó que para diferente número de elementos de antena en el agrupamiento lineal, se obtienen mejores prestaciones en el nivel de lóbulos laterales empleando Legendre no uniforme (-24.7 dB), en relación con evolución diferencial (-20 dB).
- Se encontró, que el factor de ensanchamiento (Δ) es una métrica importante en los polinomios de Legendre porque este factor ayuda a la reducción del nivel de lóbulos laterales.
- En el análisis de resultados, se consideró la dirigibilidad del haz principal dentro del margen de visibilidad del agrupamiento y se comprobó que la principal desventaja de las funciones de Legendre es, su intervalo de dirigibilidad, porque existe una disminución de 47.33% (28.40°) en comparación con evolución diferencial (60°).

- Se comprobó que si se requieren anchos de haz muy estrechos, el agrupamiento de 37 elementos de antena presenta mejores prestaciones, pero si se necesita dirigibilidad en el diagrama de radiación sin importar demasiado el ancho de haz, se recomienda un agrupamiento de 17 elementos de antena. En ambos casos empleando funciones de Legendre en la síntesis del diagrama de radiación.

VI.1.2 SOBRE LA SÍNTESIS DEL DIAGRAMA DE RADIACIÓN DEL AGRUPAMIENTO PLANAR DE ANTENAS

Para complementar el objetivo general de este trabajo de tesis y considerando el análisis de resultados, a continuación se presentan las conclusiones obtenidas en la síntesis del diagrama de radiación, utilizando agrupamientos planares.

- Se modeló y simuló el factor de agrupamiento, utilizando funciones de Legendre, con espaciamiento uniforme entre elementos de antena en un agrupamiento planar. De acuerdo a los resultados obtenidos, se demostró que el espaciamiento uniforme no satisface el nivel de aislamiento (-19 dB), obteniendo únicamente una mejora de 17.75% (2.84 dB) en el nivel de lóbulos laterales.
- Posteriormente se simuló la síntesis del diagrama de radiación, empleando funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme entre elementos de antena, donde se obtuvo una mejora del 40.18% en las prestaciones del nivel de lóbulos laterales.
- Se comprobó que las funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme, logran los mismos resultados de nivel de lóbulos laterales (-22 dB) comparados con

evolución diferencial, por lo cual se satisface a la normativa porque este nivel se encuentra por debajo de los -19 dB.

De acuerdo a las metas establecidas y con los resultados obtenidos en este trabajo durante su proceso, se ha cumplido favorablemente el objetivo planteado. Incluyendo aportaciones no contempladas al inicio de esta investigación.

VI.2 CONTRIBUCIONES

A continuación se presentan las principales contribuciones de este trabajo de tesis obtenidas tanto con agrupamientos lineales y planares.

- El análisis de la dirigibilidad presentado en este trabajo, es una aportación muy importante, ya que [Kumar y Branner, 2005] no presentan un análisis de dirigibilidad, además que a través de una extensa búsqueda, no se encontraron trabajos en los cuales se muestre un análisis de dirigibilidad empleando funciones de Legendre aplicadas a la síntesis del diagrama de radiación.
- La evaluación del tiempo de cómputo del algoritmo, es otra contribución trascendente de esta tesis, porque no se encontraron trabajos en los cuales se presente de forma cuantificada el análisis del tiempo de cómputo. Se hace énfasis en este parámetro porque de acuerdo a [Rocha, 2006], los tiempos obtenidos con evolución diferencial fueron de 8 a 9 horas, y para el caso de las funciones de

Legendre fueron de 9.5 mseg, para un agrupamiento lineal y 14.5 mseg para un agrupamiento planar, empleando agrupamientos de 37 elementos de antena.

- Posteriormente se realizó el análisis y comparación de la directividad del diagrama de radiación en un agrupamiento planar, donde [Kumar y Branner, 2005], no reportan resultado alguno del comportamiento de este parámetro. Se demostró que las funciones de Legendre con espaciamiento no uniforme, tienen una desventaja en la directividad en relación con evolución diferencial, porque esta técnica logra una ganancia de 2.35 dB respecto al resultado de Legendre no uniforme.
- De acuerdo a los resultados obtenidos en términos de nivel de lóbulos laterales, anchos de haz, dirigibilidad y directividad, son muy trascendentes porque en la actualidad no hay muchos trabajos enfocados a agrupamientos de antenas impares simétricos, por lo cual en este trabajo de tesis se contribuye al estado del arte.
- El análisis de la síntesis del diagrama de radiación de un agrupamiento lineal y planar, considerando la reducción del nivel de lóbulos laterales, anchos de haz, dirigibilidad y directividad, fueron presentados en el Encuentro de Investigación en Ingeniería Eléctrica (ENINVIE 2007), organizado por la Universidad Autónoma de Zacatecas, y llevado a cabo en Zacatecas, Zacatecas.

VI.3 PUBLICACIONES GENERADAS DEL PRESENTE TRABAJO

A partir del trabajo de tesis desarrollado, se generaron las siguientes publicaciones:

1. Funciones de Legendre Aplicadas a la Optimización del Diagrama de Radiación con Agrupamientos de Antenas. Presentado en el encuentro de Investigación en Ingeniería Eléctrica (ENINVIE 2007), marzo 2007, Zacatecas.
2. Performance Evaluation of Unequally Spaced Arrays Applying Legendre Functions, a someterse a una revista internacional con sistema de arbitraje.

VI.4 TRABAJOS FUTUROS

Como recomendaciones para líneas futuras de investigación, basadas en el problema que se abordó en este trabajo de tesis, se pueden mencionar:

- Utilizar polinomios de Hermite¹ propuestos por [Phongcharoenpanic et al., 2001] para obtener mejores prestaciones en la síntesis del diagrama de radiación en un agrupamiento lineal.
- Aplicación conjunta de funciones de Legendre y optimización convexa propuesta por [Lebret, 1996], para lograr una mayor ventana de dirigibilidad del haz principal en el diagrama de radiación, para agrupamientos con geometría lineal.
- Emplear agrupamientos simplificados en la geometría planar, para lograr mejores prestaciones en el nivel de lóbulos laterales, anchos de haz y directividad en el diagrama de radiación.

¹ Los polinomios de Hermite son una secuencia de polinomios ortogonales, los cuales fueron nombrados de esta manera en honor al matemático francés Charles Hermite.

REFERENCIAS

- Abramowitz M. y Stegun I.A. 1965. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, 1046 pp.
- Bae J.H., Kim K.T. y Pyo C.S. 2005. *Design of Steerable Linear and Planar Array Geometry with Non-uniform Spacing for Side-Lobe Reduction*, IEICE Trans. Commun. E88-B(1):345-357.
- Balanis C.A. 2005. *Antenna Theory Analysis and Design*, John Wiley & Sons, Tercera Edición, 1136 pp.
- Cardama A., Jofre L. y Ferrando M. 2002. *Antenas*, Edicions UPC, Segunda Edición, 460 pp.
- DicoMaths: Polynômes de Legendre, <http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=/l/legendrepoly.html>. [Consulta: octubre/2006]
- Farrell O. J. y Ross B. 1965. *Solved Problems: Gamma and Beta Functions, Legendre Polynomials, Bessel Functions*, Macmillan Company, 410 pp.
- Harrington R.F. 1961. *Sidelobe Reduction by Nonuniform Element Spacing*, IEEE Trans. Antennas Propag. 9(2): 187-192.

- Haupt R.L. 1994. *Thinned arrays using genetic algorithms*, IEEE Trans. Antennas Propag. 42(7): 993-999.
- Hodjat F. y Hovanessian S.A. 1978. *Nouniformly Spaced Linear and Planar Array Antenas for Sidelobe Reduction*, IEEE Trans. Antennas Propag. AP-26(2):198-204.
- Kraus J.D. y Marhefka R.J. 2003. *Antennas for All Applications*, Tata McGraw Hill, Tercera Edición, 960 pp.
- Kumar B.P. y Branner G.R. 1999. *Design of unequally spaced arrayss for performance improvement*, IEEE Trans. Antennas Propag. 47(3):511-523.
- Kumar B.P. y Branner G.R. 2005. *Generalized Analytical Technique for the Synthesis of Unequally Spaced Arrays with Linear, planar, Cylindrical or Spherical Geometry*, IEEE Trans. Antennas Propag. 53(2):621-634.
- Legendre Polynomial, <http://www.efunda.com/math/legendre/index.cfm>. [Consulta: octubre/2006]
- Legendre Polynomials, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/math/legend.html>. [Consulta: octubre/2006]
- Mangulis V. 1965. *Handbook of Series for Scientists and Engineers*, Parte III, Academic, New York, 129 p.
- Marchaud F.B.T., de Villiers G.D. y Pike E.R. 2003. *Element Positioning for Linear Arrays Using Generalized Gaussian Quadrature*, IEEE Trans. Antennas Propag. 51(6):1357-1363.
- Milligan T.A. 2005. *Modern Antenna Design*, John Wiley & Sons, Segunda Edición, Capítulo 3 y 4, New Jersey.

- Panduro M.A., Covarrubias D.H., Brizuela C.A. y Marante F.R. 2005. *A multi-objective approach in the linear antenna array design*, Int. J. Electrón. Commun (AEÜ), 59:205-212.
- Phongcharoenpanich C., Wouchoum P., Krairiksh M. y Lertwiriyaprapa T. 2001. *Characterizations of the Array Antenna Pattern Synthesis Performing the Tapered Minor Lobes for Radar and Low Noise Applications*, Thammasat Int. J. Sc. Tech., 6(2): 69-81.
- Rocha C., Covarrubias D.H., Brizuela C.A. y Panduro M.A. 2006. *Differential Evolution Algorithm Applied to Sidelobe Level Reduction on a Planar Array*, Int. J. Electrón. Commun (AEÜ), 61:286-290.
- Rocha C. 2006 *Performance Evaluation of Two Array Factor Synthesis Techniques for Steerable Linear Arrays*, Proceedings of the IASTED International Conference Antennas Radar and Wave Propagation, 3-4 Julio, Banff, Canada.
- Skolnik M.I., Nemhauser G., y Sherman J.W. 1964. *Dynamic Programming Applied to Unequally Spaced Arrays*, IEEE Trans. Antennas Propag. AP-12:35-43.
- Stutzman L.W. 1972. *Shaped-Beam Synthesis of Nonuniformly Spaced Linear*, IEEE Trans. Antennas Propag., 20(4):499-501.
- Unz H., 1960. *Linear arrays with arbitrary distributed elements*, IEEE Trans. Antennas Propag. AP-8(2): 222-223.
- Yu C. 1997. *Sidelobe reduction of asymmetric linear array by spacing perturbation*, Electron. Lett. 3(9):730-732.

APÉNDICE A

SIMETRÍA EN EL DIAGRAMA DE RADIACIÓN

De acuerdo a [Balanis, 2005] el diagrama de radiación de un agrupamiento lineal con espaciamiento no uniformemente, el cual es simétrico sobre el elemento del origen como lo expresa la siguiente ecuación

$$E(u) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_n I_n \cos(kd_n u) \quad (1)$$

donde I_n y d_n son la corriente de excitación y la posición del elemento, del n -ésimo elemento del agrupamiento, k es el número de onda ($2\pi/\lambda$) y ε_n es la perturbación de la posición del elemento. Si el diagrama es simétrico sobre un cierto valor de $u=u_o$, entonces

$$E(u_o + \Delta u) = E(u_o - \Delta u) \quad (2)$$

partiendo de (2) se tendrá la siguiente igualdad

$$\cos[kd_n(u_o + \Delta u)] = \cos[kd_n(u_o - \Delta u)] \quad (3)$$

expandiendo el termino coseno en cada parte de las ecuaciones dadas en (3) y utilizando la identidad trigonométrica de (4), se obtiene el desarrollo de las ecuaciones en (5).

$$\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v) \quad (4)$$

$$\cos(kd_n u_o)\cos(kd_n \Delta u) - \sin(kd_n u_o)\sin(kd_n \Delta u) = \cos(kd_n u_o)\cos(kd_n \Delta u) + \sin(kd_n u_o)\sin(kd_n \Delta u) \quad (5)$$

de acuerdo a (5) la igualdad se mantendrá si $\sin(kd_n u_o) = 0$, ó si

$$kd_n u_o = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm k\pi \quad \text{ó} \quad d_n u_o = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots, \pm k/2$$

esto se satisface si $u_o = 1$ y d_n es múltiplo de $\lambda/2$.

APÉNDICE B

POLINOMIOS DE LEGENDRE DE MEDIO ORDEN

Como se mencionó anteriormente en este trabajo se utiliza una función de Legendre de medio orden ($P_{m-1/2}$), en esta sección se explicará con más detalle el desarrollo de esta función. Para obtener esta función se requiere de una relación de recurrencia, donde está contiene polinomios de Legendre de medio orden, esta función se utiliza para obtener una solución al problema que se presenta, esta relación de recurrencia es dada para $m \geq 2$ y $n \geq 3$

$$(n_1 + 0.5)P_n(x) = 2n_1xP_{n-1}(x) - (n_1 - 0.5)P_{n-2}(x) \quad (1)$$

Con la ecuación (1) se puede obtener los valores de la función de medio orden de Legendre para los diferentes valores de m . A continuación se presenta el desarrollo de esta función y también se explicará el cambio de variable x , para que esta función se ajuste a la función utilizada en la transformación de Legendre del factor de agrupamiento. Se tiene que para el valor de $m = 0$ y $n = 1$, la función $P_{m-1/2}$, será igual a $P_{-1/2}$, por lo tanto su valor es

$$P_n(x) = P_{m-1/2}(x) = \frac{2}{\pi} K \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right], \text{ para } m = 0 \text{ y } n = 1 \quad (2)$$

Pero aquí se debe hacer un cambio de variable esto es para que el polinomio se ajuste a la transformada de Legendre, de acuerdo a las expresiones explícitas de Legendre [Abramowitz y Stegun, 1965] se tiene que $x = \cos\theta$, con esto el polinomio cambia a la siguiente forma

$$P_{-1/2}(x) = \frac{2}{\pi} K \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right], \quad x = \cos\theta$$

$$\therefore$$

$$P_{-1/2}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} K \left[\left(\frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{1/2} \right] = \frac{2}{\pi} K \left[\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \right] \quad (3)$$

utilizando la identidad trigonométrica (4) en (3) se obtiene la representación del polinomio de Legendre en integrales elípticas (5)[Abramowitz y Stegun, 1965].

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad (4)$$

$$P_{-1/2}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} K \left[\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad \text{donde} \quad K\left[\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}^2\theta \right]^{1/2} d\theta \quad (5)$$

si el valor de $m = 1$ y $n = 2$, la ecuación (2) utilizando la representación en integrales elípticas será

$$P_n(x) = P_{m-1/2}(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ 2E \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right] - K \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right] \right\}, \text{ para } m = 1 \text{ y } n = 2 \quad (6)$$

efectuando el cambio de variable $x = \cos\theta$, el polinomio cambia a la siguiente forma

$$P_{1/2}(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ 2E \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right] - K \left[\left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad x = \cos\theta \quad \therefore$$

$$P_{1/2}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ 2E \left[\left(\frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{1/2} \right] - K \left[\left(\frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{1/2} \right] \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ 2E \left[\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \right] - K \left[\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \right] \right\} \quad (7)$$

utilizando (4) en (7) la ecuación se a

$$P_{1/2}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ 2E \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] - K \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}$$

donde $E \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta \right]^{1/2} d\theta$

$$K \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta \right]^{1/2} d\theta \quad (8)$$

En base a las ecuaciones (5), (8) y (1) se simplifica el proceso de la obtención de los valores de los polinomios de Legendre, para $m \geq 2$ y $n \geq 3$, es decir

$$(n_1 + 0.5)P_n(x) = 2n_1xP_{n-1}(x) - (n_1 - 0.5)P_{n-2}(x) \quad (9)$$

$$P_n(x) = P_{m-1/2}(x) = \frac{2n_1xP_{n-1}(x) - (n_1 - 0.5)P_{n-2}(x)}{(n_1 + 0.5)}, \quad \text{donde } n_1 = n - 2 \quad (10)$$

donde $x = \cos \theta$

$$P_n(\cos\theta) = P_{m-1/2}(\cos\theta) = \frac{2n_1(\cos\theta)P_{n-1}(\cos\theta) - (n_1 - 0.5)P_{n-2}(\cos\theta)}{(n_1 + 0.5)}, \quad m \geq 2 \quad n \geq 3 \quad (11)$$