

TESIS DEFENDIDA POR
Jonatán Peña Ramírez

Y aprobada por el siguiente comité:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité

Dr. Iouri Orlov Kuchina

Miembro del Comité

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Miembro del Comité

Dr. David Isaías Rosas Almeida

Miembro del Comité

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Miembro del Comité

Dr. Arturo Velázquez Ventura

*Coordinador del Programa de Posgrado
en Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. Edgar Gerardo Pavía López

*Director de Estudios
de Posgrado*

17 de agosto de 2007

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA



POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

**ESTRUCTURA DE CONTROL CON IDENTIFICACIÓN
DE PERTURBACIONES: ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL
DESEMPEÑO**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

Jonatán Peña Ramírez

Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2007.

RESUMEN de la tesis de **Jonatán Peña Ramírez**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California. Agosto de 2007.

ESTRUCTURA DE CONTROL CON IDENTIFICACIÓN DE PERTURBACIONES: ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO

Resumen aprobado por:

Joaquín Álvarez Gallegos

Director de Tesis

Se presenta el análisis y modificación de una estructura de control para sistemas lagrangianos de n grados de libertad, la cual está orientada a tareas de regulación y seguimiento. Es llamada estructura de control con identificación de perturbaciones (ECIP) y tiene como propósito insensibilizar al sistema en lazo cerrado ante cierta clase de perturbaciones, además de disminuir el fenómeno del “chattering”.

Se considera que existen incertidumbres en el sistema, producidas por variaciones paramétricas y perturbaciones externas. También se supone que se tiene acceso únicamente al vector generalizado de posición, por lo que se realiza una estimación del vector de estado con un observador discontinuo, el cual converge al estado de la planta de manera exponencial aún en presencia de perturbaciones. Una característica de este observador es que presenta un modo deslizante de segundo orden. Además, basándose en el concepto del control equivalente, es posible identificar el vector de perturbación presente en el sistema, filtrando el término discontinuo del observador. El término de perturbación identificado se incluye en el controlador para darle robustez al sistema en lazo cerrado.

Con la modificación realizada en la ECIP, solamente es necesario conocer el valor de la matriz de inercia M del modelo matemático, los demás términos son considerados como una perturbación.

Se implementa la ECIP con tecnología digital y con tecnología analógica y se compara el desempeño. Para implementar el algoritmo de la ECIP con tecnología analógica se diseña y construye un circuito electrónico.

Mediante simulaciones numéricas y resultados experimentales se muestra el desempeño de la ECIP al ser aplicada en algunos mecanismos, circuitos electrónicos y en un robot industrial.

Palabras clave: Control robusto, sistemas discontinuos, observador discontinuo.

ABSTRACT of the thesis presented by **Jonatán Peña Ramírez**, as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS with specialization in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California. August 2007.

CONTROL STRUCTURE WITH IDENTIFICATION OF DISTURBANCES: ANALISYS AND PERFORMANCE EVALUATION

We present the analysis and redesing of a control structure for n degree of freedom lagrangian systems, which is oriented for regulation and tracking control objectives. This structure is called “control structure with disturbances identification ” (CSDI). Its purpose is to render insensitive the closed-loop system with respect to unknown perturbations, also avoiding the “chattering” phenomena, very common in discontinuous systems.

We consider that there are uncertainties in the system, which are produced by parametric variation and external disturbances. Also it is supposed that the generalized vector position is the only available measurement. For this reason, a discontinuous observer is used to estimate the state vector. The convergence of this observer to the state of the plant is exponential and it displays a second order sliding mode. The characteristics of the observer allow to use the equivalent output injection for perturbations identification. The identified perturbation term is included in the controller to give robustness to the closed-loop system.

With the modification performed in the CSDI it is only necessary to know the value of inertia matrix M in the model; all other terms are considered as perturbations.

The CSDI is implemented with digital and analogical technology. In order to implement the CSDI with analogical technology, an electronic circuit is developed.

Numerical simulations and experimental results are presented to show the CSDI performance. The CSDI is applied in mechanisms, electronic circuits and in an industrial robot.

Keywords: Robust control, discontinuous systems, discontinuous observers.

DEDICATORIA

A mis padres. Su amor, cariño y apoyo me han permitido lograr una meta mas en mi vida. Gracias mamá por siempre estar a mi lado, por darme tu cariño y amor incondicional y por siempre procurar que no me falte nada. Sé que mi decisión de estudiar lejos de casa te causó alegría, pero a la vez nostalgia, sin embargo, siempre me apoyaste y me impulsaste a seguir adelante. Este trabajo te lo dedico como un pequeño agradecimiento por todo lo que siempre me has dado. Gracias papá por tu amor, confianza y cuidados tanto económicos, morales y espirituales. Tus atinados consejos y sugerencias han contribuido a mi crecimiento personal y gracias por animarme y ayudarme a siempre alcanzar mis metas y por consentirme tanto.

A mis hermanos: Aldo, Daniel y Oscar y a mi pequeña y consentida hermana Zayin.

A mis queridas abuelas, que siempre me han animado a estudiar y seguir adelante.

A mis tíos: Paco, Richard, Pedro, Oswal,... y todos los demás y también a mis tías y en general a toda mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al doctor Joaquín Álvarez Gallegos por aceptar ser mi director de tesis. Gracias por sus consejos, comentarios, observaciones y sugerencias y por encaminarme siempre de manera adecuada para que este trabajo pudiera realizarse. También le agradezco el hecho de brindarme todas las facilidades e incluso comodidades para siempre estar en un ambiente de trabajo agradable.

También agradezco a los doctores: Alejandro Márquez, Iouri Orlov y Carlos Brizuela, por aceptar formar parte del comité de tesis, y también por sus comentarios y sugerencias, los cuales fueron muy valiosos.

Agradezco al doctor David Rosas Almeida, por sus valiosas observaciones y sugerencias y por todas las facilidades brindadas para realizar los experimentos con el robot industrial en la ciudad de Mexicali. Y a quién también agradezco haber aceptado participar en el comité de tesis.

Agradezco también a mis profesores: Moisés Castro, Enrique Mitrani, Alejandro Márquez, Joaquín Álvarez, Ricardo Nunéz, Carmen Maya, David Covarrubias, Ricardo Cuesta, Iouri Orlov, Jose Rosario Gallardo, Luis Villaseñor y Pedro Negrete por compartir sus vastos conocimientos en el aula y fuera de ella.

Agradezco también a mi amigo y camarada Daniel Hernández por su valiosa amistad y por todos los buenos momentos que pasamos charlando y vacacionando e incluso estudiando. También por sus acertadas sugerencias sobre este trabajo de tesis y por su hospitalidad durante algunos días.

Agradezco también a mi amigo Sergio Espinoza con quien compartí el cubículo 246 donde pasamos muchos momentos agradables. También le agradezco su amistad sincera.

Agradezco también la amistad sincera a mi amigo y compañero de casa Carlos Alberto Flores con quien compartí casa por 2 años.

Agradezco también a mi amigo Hector Estrada por compartir sus conocimientos y amistad y por hacer amena la estancia en el cubo 246 durante el año de tesis.

Agradezco también a mis camaradas Varun, Marco y Javier por su hospitalidad durante algunos días y por su amistad.

Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, por el apoyo económico. Sin este apoyo no hubiera sido posible realizar estos estudios.

*Mi mayor agradecimiento es al Creador, el Magnífico
Instructor y Soberano del Universo quién es llamado Dios.*

Contenido

Capítulo	Página
Introducción	1
I Fundamentos	7
I.1 El concepto de modos deslizantes	7
I.2 El concepto del control equivalente	12
I.3 El problema del “chattering”	14
I.4 Sistemas perturbados	16
I.5 Sistemas lagrangianos	20
I.6 Conclusiones	25
II Diseño de un observador para sistemas lagrangianos	26
II.1 Preliminares	27
II.2 Modelo del observador	29
II.3 Identificación de perturbaciones	33
II.4 Identificación de parámetros	34
II.5 Resultados	37
II.5.1 Resultados numéricos	37
II.5.2 Resultados experimentales	43
II.6 Conclusiones	49
III Estructura de control con identificación de perturbaciones (ECIP)	51
III.1 Del CMI al ECIP	52
III.2 Antecedentes de la ECIP	57
III.2.1 Análisis de estabilidad de la ECIP	59
III.3 Modificación de la ECIP	61
III.3.1 Observador	62
III.3.2 Filtro	64
III.3.3 Estabilidad en lazo cerrado	67
III.4 Comparación con otra estructura	68
III.5 Resultados	78
III.5.1 Resultados numéricos	79
III.5.2 Resultados experimentales	84
III.6 Conclusiones	88

Contenido (continuación)

Capítulo	Página
IV Implementación de la ECIP con circuitos electrónicos	90
IV.1 Consideraciones de diseño	91
IV.2 Diseño del observador	94
IV.3 Diseño del filtro	96
IV.4 Diseño del controlador	98
IV.5 Filtro de la velocidad estimada \hat{x}_2	99
IV.6 Análisis general del circuito de la ECIP	100
IV.7 Aplicación a un robot industrial	102
IV.8 Conclusiones	109
Conclusiones generales	111
Trabajo futuro	114
Literatura citada	115

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Modos deslizantes en la superficie $s(x)$	9
2	Trayectoria de un modo deslizante de segundo orden	11
3	Control equivalente de sistemas no lineales con control escalar	13
4	Diagrama de bloques de la obtención de u_{eq}	34
5	Respuesta de la planta y del observador	39
6	Error entre los estados reales y los observados	39
7	Identificación de una perturbación senoidal	40
8	Identificación de una perturbación discontinua	41
9	Variación paramétrica identificada	43
10	Estados del circuito de Duffing y estados observados	45
11	Errores de observación del circuito de Duffing	45
12	Perturbación en el circuito de Duffing	46
13	Posición del péndulo y posición observada	47
14	Error de observación de posición	48
15	Perturbación identificada	48
16	Estructura del CMI	52
17	Estructura de control con identificación de perturbaciones	56
18	Estados de la planta y estados observados	64
19	Perturbación total y perturbación identificada con el nuevo filtro	66
20	SMC con filtrado en lazo cerrado	69
21	Referencia y posición. Circuito Van der Pol. Caso SMC	72
22	Error de seguimiento. Circuito Van der Pol. Caso SMC	73
23	Señal de control. Circuito Van der Pol. Caso SMC	74
24	Posición y posición deseada. Circuito Van der Pol. Caso ECIP	75
25	Error de seguimiento. Circuito Van der Pol. Caso ECIP	75
26	Señal de control. Circuito Van der Pol. Caso ECIP	76
27	Posición y referencia	79
28	Error de seguimiento	80
29	Error de observación	81
30	Velocidad estimada (arriba) y su versión filtrada (abajo).	81
31	Término de perturbación identificado	82
32	Control	83
33	Perturbación identificada en estado estacionario	83
34	Posición del péndulo y referencia	85
35	Error de seguimiento	85

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
36	Error de observación	86
37	\hat{x}_2 filtrada	87
38	Perturbación identificada	87
39	Señal de control para el péndulo	88
40	Diagrama de bloques para generar la función signo	95
41	Diagrama electrónico del observador	96
42	Filtro de Butterworth. Arquitectura Sallen-Key	97
43	Diagrama electrónico del controlador	98
44	Filtro para la velocidad observada \hat{x}_2	100
45	Diagrama completo de la ECIP	101
46	Robot industrial	102
47	Diagrama a bloques de la arquitectura necesaria para controlar el robot	104
48	Posición y posición observada: articulación 1 (arriba); articulación 2 (abajo)	105
49	Velocidad observada y su versión filtrada: articulación 1 (arriba); arti- culación 2 (abajo)	105
50	Seguimiento de $q_{r1,2} = \sin(t)$	106
51	Errores de seguimiento	107
52	Perturbaciones identificadas en el robot.	108
53	Señales de control para el robot	108

Introducción

Los sistemas de control pueden ser de dos tipos, naturales o hechos por el hombre.

Los sistemas naturales de control se presentan en los organismos vivos y en muchos fenómenos del Universo. Un ejemplo de un sistema de control natural es el control de la homeóstasis¹ (estado estable de equilibrio) del cuerpo humano. En general los sistemas naturales de control son muy complejos.

Los sistemas de control hechos por el hombre son usados para el control de aeronaves, automóviles, satélites, robots, procesos industriales, entre otros. Los primeros sistemas de control automático surgieron hace más de 2000 años. El primer sistema de control del que se tiene registro data del año 270 A.C.; se trata del reloj de agua de Ktesibios, quien inventó un regulador flotador para su reloj de agua. La función de este regulador era mantener el nivel de agua en un tanque a profundidad constante, lo que producía un flujo constante de agua a través de un tubo localizado en el fondo del tanque el cual llenaba un segundo tanque a una tasa constante. El nivel de agua en el segundo tanque dependía entonces del tiempo transcurrido. Este regulador realizaba la misma función que el flotador en un inodoro moderno (Lewis, 1992).

Sin embargo, algo que marcó un hito en los dispositivos de control en lazo cerrado fue el regulador de temperatura para un horno, atribuido a C. Drebel alrededor de 1620

¹Incluye la regulación de factores tales como la presión sanguínea, la temperatura corporal, balance de fluidos y peso corporal. El propósito es mantener estos factores a un valor preciso llamado punto de operación.

y el regulador centrífugo de velocidad para máquinas de vapor de J. Watt en 1788. Pero la teoría de control inició con J.C. Maxwell, quien hizo el primer análisis matemático de los sistemas de control en 1868 y mostró la importancia y utilidad de los modelos y métodos matemáticos (Holmes et al. 1992). A partir de entonces y hasta ahora el desarrollo de las diferentes tecnologías (eléctrica, mecánica, química, etc.) ha dado lugar a que se eleve la complejidad de los sistemas; debido a esto, también se incrementa el número de variables físicas que tienen que ser vigiladas y controladas.

Cuando se trabaja con los sistemas físicos generalmente se presentan discrepancias entre el sistema físico y el modelo matemático que lo representa, que se deben principalmente a dinámicas no modeladas y alteraciones inherentes a los sistemas físicos como variación en los parámetros de la planta o perturbaciones externas. Para hacer frente a estos problemas se han desarrollado y utilizado técnicas de control robusto. Un enfoque particular del control robusto es el control por modos deslizantes.

Con el control por modos deslizantes el sistema en lazo cerrado se hace insensible a cierta clase de incertidumbres y perturbaciones. Sin embargo, cuando las trayectorias del sistema alcanzan la superficie de discontinuidad, la señal de control presenta componentes de alta frecuencia que activan las dinámicas no modeladas, produciendo el fenómeno llamado castaño (“chattering”), lo cual provoca principalmente un aumento en la temperatura de los motores y vibraciones en el sistema físico, factores totalmente indeseados ya que se produce un desgaste prematuro en los componentes de la planta. Para evitar este problema se han propuesto algunos enfoques que se basan principalmente en cambiar las dinámicas en una pequeña vecindad ϵ de la superficie

de discontinuidad para evitar la discontinuidad real (Slotine-Li, 1990); sin embargo, se pierde robustez en el sistema en lazo cerrado. Otros enfoques que se han propuesto recientemente para el control robusto de sistemas con una disminución del fenómeno del “chattering” son los modos deslizantes de orden superior (Fridman et al. 2002) y los modos deslizantes con filtrado en lazo cerrado (Jian-Xin et al. 2004).

Una cuestión importante en el uso de algoritmos de control por modos deslizantes (y en general en la mayoría de los algoritmos de control) es la cantidad de información que éstos requieren para su implementación, es decir, el número de variables del vector de estado que requieren tener disponibles. Generalmente los algoritmos de control requieren que todo el vector de estado sea medible. Sin embargo, en los sistemas físicos no siempre se tiene acceso a todas las variables, por lo que es necesario tener al menos un estimado del vector de estado para aplicar algún algoritmo de control que así lo requiera. Dicho estimado puede ser generado por un sistema dinámico llamado observador.

El problema de observación de sistemas con incertidumbres ha sido desarrollado dentro de la teoría de estructura variable usando el enfoque de modos deslizantes debido a que se obtiene una observación robusta del estado; como ejemplo están los observadores propuestos en (Edwards-Spurgeon, 1998; Utkin, 1999; Juloski et al. 2002). Estos observadores abren la posibilidad de utilizar el valor del control equivalente para identificar las perturbaciones presentes en el sistema bajo observación (Dávila et al. 2006).

Puede notarse que el control robusto surgió para hacer frente a las incertidumbres presentes en los sistemas y un ejemplo son los modos deslizantes, que efectivamente insensibilizan al sistema bajo control ante cierta clase de perturbaciones, sin embargo,

se tiene el problema del fenómeno del “chattering”. Además esta técnica de control requiere que el vector de estado sea medible.

En este trabajo de tesis se presenta el análisis y modificación de una estructura de control con identificación de perturbaciones (ECIP), diseñada para propósitos de regulación y seguimiento presentada en Rosas (2005). Se considera que existen incertidumbres paramétricas y perturbaciones acotadas en la planta y que solamente se tiene acceso al vector generalizado de posición². La parte medular de dicha estructura es un observador discontinuo que presenta modos deslizantes de segundo orden. No solamente se realiza una estimación del vector de estado sino que, empleando el concepto del control equivalente, es posible estimar el término de perturbación presente en la planta mediante un filtro pasabajas. Dicho término de perturbación identificado se agrega al controlador. Como el término discontinuo aparece en el observador y no en el controlador, el efecto del fenómeno del “chattering” es disminuido a niveles imperceptibles para el sistema físico.

El objetivo general de este trabajo de tesis es completar el diseño de la ECIP antes mencionada y analizar la estabilidad de la misma. Igualmente se desea comparar su desempeño con otros algoritmos de control y analizar la factibilidad de implementar esta estructura con circuitos electrónicos analógicos. Los objetivos particulares son:

- modificar la ECIP para implementarla en un circuito electrónico y analizar la estabilidad después de la modificación,

²Llamado así porque el movimiento puede ser rotacional, traslacional o una combinación de ambos

- diseñar y construir el circuito electrónico de la ECIP y aplicarlo a algunos mecanismos y circuitos.

La estructura de esta memoria de tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 se analizan algunas propiedades y características de los modos deslizantes y se aborda el concepto del control equivalente; también se presentan algunos fundamentos de los sistemas perturbados. En particular, se analizan las condiciones que debe satisfacer el término de perturbación para garantizar que se mantienen las propiedades de estabilidad del sistema nominal en el sistema perturbado. También se presentan las propiedades de los sistemas lagrangianos, que son los sistemas sobre los que se aplica la ECIP.

En el Capítulo 2 se presenta el diseño de un observador discontinuo para sistemas lagrangianos de n grados de libertad que presenta modos deslizantes de segundo orden. Este observador converge de manera exponencial al estado de la planta aun en presencia de perturbaciones. En este capítulo también se hace un análisis del concepto del control equivalente con la finalidad de determinar las condiciones bajo las cuales es posible identificar la variación paramétrica o el término de perturbación. Se muestra también el filtro pasabajas empleado para obtener el control equivalente y finalmente, mediante simulaciones numéricas y resultados experimentales se muestra el desempeño del observador en lazo abierto.

En el Capítulo 3 se analiza la estructura de control con identificación de perturbaciones. Se inicia con fundamentos del control por modelo interno (CMI) porque, como se verá en este capítulo, la ECIP puede verse como una modificación del CMI.

Posteriormente se describen las características de la ECIP y se estudia su estabilidad. Se proponen algunas modificaciones a los bloques que componen esta estructura; en particular se propone simplificar el observador y sustituir el filtro pasabajos y se presenta el análisis de estabilidad de la estructura modificada. Con el propósito de mostrar el rendimiento de la ECIP se presenta una comparación con otra estructura de control que tiene objetivos comunes a la ECIP. En ambas estructuras se busca disminuir el fenómeno del “chattering” y dar robustez ante perturbaciones al sistema en lazo cerrado. Por último, se presentan simulaciones numéricas y resultados experimentales de la aplicación de la ECIP a un péndulo simple.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las consideraciones técnicas para la implementación de la ECIP con circuitos electrónicos. Se muestra el diagrama de cada uno de los bloques que componen la ECIP y se presenta el diagrama completo del circuito. El objetivo de este capítulo es mostrar que la estructura de control con identificación de perturbaciones puede implementarse con circuitos y que los resultados obtenidos son satisfactorios. Al final se presenta la aplicación de este circuito a un robot industrial.

Capítulo I

Fundamentos

En este capítulo se discute el concepto de modos deslizantes y otros conceptos relacionados como el fenómeno del “chattering” y el control equivalente, los cuales son útiles en el diseño de un observador. Dado que se considera que existen perturbaciones en el modelo de la planta es pertinente presentar un análisis de la estabilidad de los sistemas perturbados. Por otra parte, en este trabajo de tesis se considera que la planta a controlar es un sistema lagrangiano, por lo que se presentan algunas propiedades de estos sistemas.

I.1 El concepto de modos deslizantes

Muchos de los sistemas físicos existentes, sean estos eléctricos, mecánicos o de otro tipo, se caracterizan por el hecho de que las ecuaciones diferenciales que los describen tienen el lado derecho discontinuo. Formalmente, estos sistemas dinámicos discontinuos pueden ser descritos por la ecuación

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, t es el tiempo y $f(x, t)$ es un campo vectorial que tiene discontinuidades en un cierto conjunto dentro del espacio dimensional $(n + 1)$,

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Una característica que es distintiva de las ecuaciones diferenciales que describen cualquier sistema de control es la presencia de un escalar o vector paramétrico u llamado control, de manera que el sistema (1) puede representarse como sigue:

$$\dot{x} = f(x, t, u), u \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Cuando el control u es discontinuo puede proporcionar una herramienta efectiva para controlar plantas con dinámica compleja, mejorar el desempeño del sistema, hacer frente a las posibles variaciones paramétricas, minimizar el consumo de potencia para propósitos de control, entre otros. Debido a lo anterior, es de interés analizar el comportamiento dinámico de (2) cuando u es una función discontinua del estado, especialmente cuando tiene la forma:

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0, \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0, i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3)$$

donde $u^T = (u_1, \dots, u_m)$ y todas las funciones $u_i^+(x, t)$ y $u_i^-(x, t)$ son continuas y $s_i(x)$ es una función del estado llamada *función de conmutación*. Este término se debe a que esta función determina la estructura de control que está siendo utilizada.

El estado de los sistemas representados por (2) y (3) puede estar en alguna de las superficies de discontinuidad, caracterizadas por $s_i(x) = 0$ o en la intersección de éstas. Las trayectorias del sistema estarán sobre la superficie $s_i(x) = 0$ si en la vecindad de esta superficie los vectores de velocidad $f(x, t, u)$ están dirigidos uno hacia el otro, como

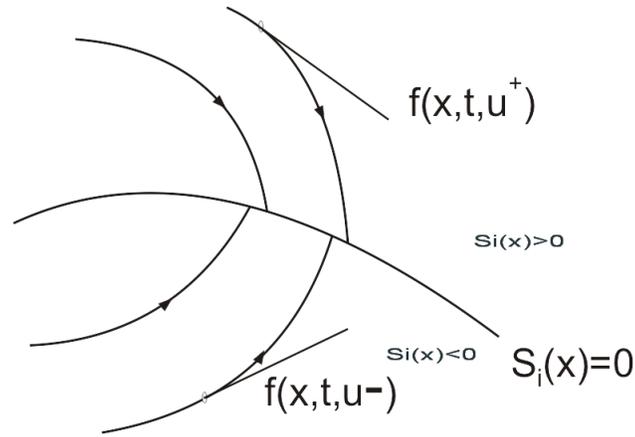


Figura 1: Modos deslizantes en la superficie $s(x)$

lo muestra la Figura 1. Una vez que el estado se encuentra en la superficie de discontinuidad permanece en la misma mientras esta situación se mantenga, desplazándose (“deslizándose”) eventualmente a lo largo de la misma. A tal comportamiento dinámico se le llama *modos deslizantes ideales*. Son ideales en el sentido que, teóricamente, la frecuencia con que las trayectorias cruzan la línea de discontinuidad es infinita, por lo que son confinadas a permanecer en esta superficie. Sin embargo, en la práctica, la conmutación es de frecuencia finita, por lo que las trayectorias cruzan de un lado a otro la superficie de discontinuidad, fenómeno conocido como “*chattering*”.

Para que exista un modo deslizante sobre una superficie de discontinuidad $s = 0$ se debe cumplir que s y \dot{s} sean de signo contrario (ver, por ejemplo, (Utkin, 1999) y (Edwards-Spurgeon, 1998)), i.e.,

$$\lim_{s \rightarrow (0^+)} \dot{s} < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow (0^-)} \dot{s} > 0. \quad (4)$$

La condición (4) puede reescribirse como:

$$s\dot{s} < 0. \quad (5)$$

Debido a que la ley de control (3) no está definida para la superficie de discontinuidad $s = 0$, el sistema es, aparentemente, independiente del control. La ley de control asegura que la condición (5) se cumpla, mientras que la función de conmutación determina la respuesta del sistema cuando está en la superficie de discontinuidad, por lo que el diseño de la función $s_i(x)$ requiere de un estudio detallado, ya que de esto depende el rendimiento del sistema.

Por la forma en que se diseña $s(x)$ en el caso tradicional, el término discontinuo aparecerá en la derivada \dot{s} .

Un caso de interés particular son los modos deslizantes de orden superior, en el que la discontinuidad no se presenta en la primera derivada de la función s . En este enfoque se supone que la función de conmutación s es una función suficientemente suave y que existen sus derivadas respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias $s, \dot{s}, \ddot{s}, \dots, s^{(r-1)}$ y además son funciones univaluadas de x . Esto significa que la discontinuidad aparece en la r -ésima derivada de la función s .

En este caso, el conjunto deslizante se determina por las igualdades:

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0. \quad (6)$$

Para que exista el deslizamiento se deben cumplir las siguientes condiciones:

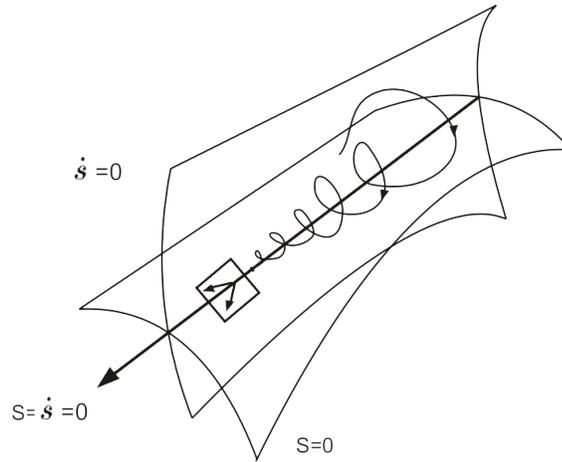


Figura 2: Trayectoria de un modo deslizante de segundo orden

- $rango \left\{ \nabla s, \nabla \dot{s}, \dots, \nabla \begin{matrix} (r-2) \\ s \end{matrix} \right\} = r - 1.$
- $rango \left\{ \nabla s, \nabla \dot{s}, \dots, \nabla \begin{matrix} (r-1) \\ s \end{matrix} \right\} = r.$

donde ∇ representa el gradiente.

Definición 1 (Fridman et al., 2002). *Sea el conjunto deslizante de orden r (ec. 6) un conjunto no vacío y supóngase que es localmente un conjunto integral en el sentido de Filippov (i.e., consiste de las trayectorias de Filippov del sistema dinámico discontinuo). Entonces el movimiento que satisface (6) es llamado modo deslizante de orden r con respecto a la función s (Figura 2).*

De la definición anterior y de la ecuación (6) se puede ver que conforme aumenta el orden del modo deslizante aumenta la cantidad de información que se requiere tener disponible. Como ejemplo, un controlador basado en modos deslizantes de tercer orden requiere disponer de las funciones s , \dot{s} y \ddot{s} , las cuales deben ser funciones continuas.

Es posible hacer una analogía entre el orden del modo deslizante y el grado relativo,

ya que el control u no aparece de forma explícita sino hasta la r -ésima derivada de la función s (Fridman et al. 2002).

La ventaja de utilizar controladores basados en modos deslizantes de orden superior es que no presentan el efecto del “chattering”. En (Fridman et al., 2002) se presentan algunos ejemplos que muestran el desempeño de estos controladores.

I.2 El concepto del control equivalente

Como se mencionó antes, al comportamiento de un sistema sobre una superficie deslizante definida por $s(x, t) = 0$ se le llama modo deslizante. Las dinámicas del sistema mientras está en modo deslizante pueden ser escritas como (Slotine-Li, 1990):

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x} f(x, t, u) = 0. \quad (7)$$

Resolviendo la ecuación (7) formalmente para la entrada de control u se obtiene una expresión para u llamada *control equivalente*, u_{eq} , que puede interpretarse como una ley de control continua que mantendría $\dot{s} = 0$ si las dinámicas fueran exactamente conocidas.

Geoméricamente, el control equivalente puede ser construído como:

$$u_{eq} = \alpha u_+ + (1 - \alpha) u_- \quad (8)$$

i.e., como una combinación convexa de los valores de u sobre ambos lados de la superficie definida por $s(x, t) = 0$. El valor de α puede obtenerse formalmente de la ecuación (7),

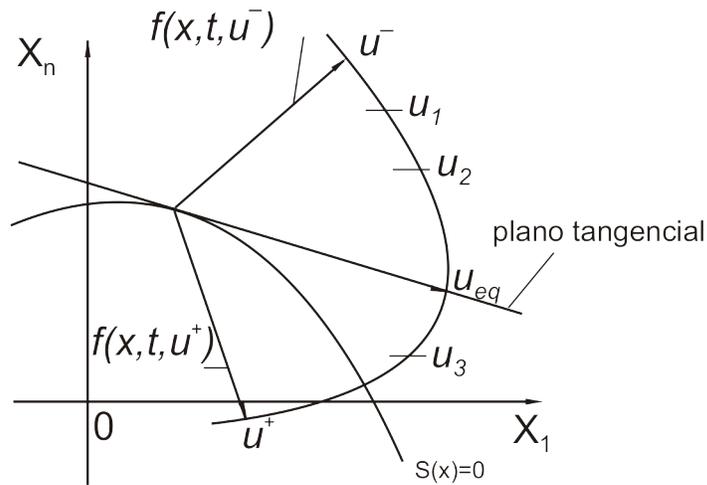


Figura 3: Control equivalente de sistemas no lineales con control escalar

lo cual corresponde a requerir que las trayectorias del sistema permanezcan tangentes a la superficie.

Si el sistema (2) tiene una sola superficie de discontinuidad y está en modo deslizante, el vector de velocidad definido por $f(x, t, u_{eq})$ es el que se forma entre la intersección con el plano tangencial y el lugar geométrico de $f(x, t, u)$ con el control variando de u^- a u^+ . El punto de intersección define el control equivalente (Figura 3).

Cuando se presentan modos deslizantes ideales, se supone que el control conmuta con frecuencia infinita de tal manera que el vector de estados es dirigido exactamente a la superficie de discontinuidad. Sin embargo, en la realidad la conmutación es de frecuencia finita, alternando valores entre u^- y u^+ , debido a que las trayectorias del sistema cruzan la superficie de discontinuidad y oscilan alrededor de ésta. Estas oscilaciones tienen componentes de alta y baja frecuencia.

El comportamiento de la planta está mayormente determinado por los componentes

de baja frecuencia del control, mientras que su comportamiento ante los componentes de alta frecuencia puede ser irrelevante.

Con base en el análisis antes presentado se puede suponer que los componentes de baja frecuencia del control discontinuo corresponden al control equivalente. Esta suposición es válida, y en (Utkin,1992) se muestra que, filtrando el control discontinuo con un filtro pasabajos de la forma

$$\tau \dot{z} + z = u, \quad (9)$$

donde el control u es discontinuo, la salida $z(t)$ tiende al control equivalente,

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \frac{\Delta}{\tau} \rightarrow 0}} z = u_{eq} \quad \Delta \approx \frac{1}{f}, \quad f = \text{frecuencia de conmutación} \quad (10)$$

Un aspecto importante es que el control equivalente depende de los parámetros de la planta, pero también del término de perturbaciones. Entonces, si se considera que el control equivalente u_{eq} es la salida del filtro pasabajos, se puede utilizar la salida del filtro en el sistema de control en lazo cerrado para mejorar su rendimiento y darle robustez. En trabajos recientes (Fridman et al. 2002) y (Rosas, 2005) se ha utilizado esta propiedad del control equivalente u_{eq} para identificar parámetros y perturbaciones.

I.3 El problema del “chattering”

En un ambiente de control, al escuchar la palabra ‘modos deslizantes’ lo primero que viene a la mente es que el sistema controlado será robusto ante perturbaciones, pero

inmediatamente es inherente pensar en la principal desventaja que estos presentan, a saber, el efecto del fenómeno llamado “chattering”.

Una de las causas del “chattering” es que las dinámicas rápidas en el lazo de control que fueron omitidas en el modelo del sistema son excitadas por la conmutación rápida de los controladores basados en modos deslizantes.

En términos generales, el “chattering” describe el fenómeno de oscilaciones de frecuencia y amplitud finita no deseadas, las cuales son causadas por las imperfecciones del sistema. En la práctica, estas oscilaciones resultan en pérdidas por calor en el caso de circuitos eléctricos de potencia y en el caso de los sistemas mecánicos, en el desgaste de piezas (engranes, transmisiones, rodamientos).

Debido a la robustez que se obtiene en el sistema controlado por modos deslizantes, lo lógico es pensar en buscar alternativas para eliminar o al menos disminuir el “chattering”.

Se han propuesto varias soluciones, las cuales se enfocan ya sea en evitar las discontinuidades en el control o bien en mover la acción conmutante a un lazo donde no haya dinámicas sin modelar. Una de estas soluciones se conoce como solución de capa límite, la cual consiste en sustituir el término discontinuo por una función saturación, con lo que las trayectorias del sistema no llegarán a la variedad deslizante, sino que más bien estarán en una vecindad de ésta (Izosimov, 1981; Slotine-Li, 1983). Otra opción es hacer una aproximación continua de la función signo. Aunque el “chattering” disminuye, se pierde exactitud y disminuye la robustez ante incertidumbres.

Otras técnicas para atacar este problema son los modos deslizantes de orden superior

(Fridman et al. 2002), o hacer un tratamiento del control discontinuo antes de aplicarlo a la planta (Jian-Xin et al. 2004).

I.4 Sistemas perturbados

Un problema fundamental en la teoría de sistemas de control es la presencia de términos desconocidos en el modelo matemático que representa dicho sistema. Estos términos son producidos principalmente por variación en los parámetros nominales, señales no deseadas (ruido), factores intrínsecos del sistema, retardos de magnitud pequeña, entre otros.

El efecto de las perturbaciones se ve reflejado principalmente en la estabilidad del sistema nominal, ya que pueden causar inestabilidad o restringir su rango de estabilidad.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \quad (11)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas por partes en t y localmente Lipchitz en x sobre $[0, \infty) \times D$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. Este sistema puede verse como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (12)$$

El término de perturbación, como se mencionó antes, puede ser el resultado de errores de modelado, incertidumbres respecto a los parámetros nominales o perturbaciones externas al sistema; factores que son comunes en los sistemas reales. Generalmente no

se conoce el valor exacto de $g(t, x)$, pero sí se tiene cierta información de ésta, como puede ser una cota superior sobre $\|g(t, x)\|$.

Si el término de perturbación aparece en la ecuación de estado donde aparece el control se considera que está acoplada. Si no es así, se considera desacoplada.

Existe otra clasificación del término de perturbación, la cual se basa en el comportamiento de $g(t, x)$ cuando $x = 0$. Si $g(t, 0) = 0$ a la perturbación se le llama desvanescente. Si $g(t, 0) \neq 0$ la perturbación es no desvanescente.

Cuando $x = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (12) y se desea investigar la estabilidad del sistema cuando se ve afectado por la perturbación $g(t, x)$, se utiliza una función de Lyapunov $V(t, x)$ la cual, dada la estabilidad exponencial del origen del sistema nominal, satisface las siguientes desigualdades (Khalil, 2002):

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -c_3 \|x\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq c_4 \|x\|, \end{aligned} \tag{13}$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ para algunas constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 .

Para el caso cuando la perturbación es desvanescente se tiene el siguiente análisis.

Supóngase que $g(t, x)$ tiene la cota:

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in D, \tag{14}$$

donde γ es una constante no negativa. La derivada de la función de Lyapunov $V(t, x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema nominal muestra que, debido a que no se conoce completamente a $g(t, x)$ no es posible definir a priori el signo de \dot{V} . Para garantizar que \dot{V} sea al menos semidefinida negativa, γ debe satisfacer (Khalil, 2002)

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4}. \quad (15)$$

Entonces, para el caso de perturbaciones desvanescentes en el origen, si la función de Lyapunov del sistema nominal satisface las desigualdades (13) y el término de perturbación cumple con (14) y (15), es posible mostrar que, el origen del sistema perturbado es un punto de equilibrio exponencialmente estable (Khalil, 2002).

Para el caso cuando el término de perturbación es no desvanescente, el origen del sistema perturbado ya no es un punto de equilibrio, por lo que ya no se puede analizar la estabilidad del origen como un punto de equilibrio. Lo mejor que se puede esperar es que la solución $x(t)$ estará acotada por una cota pequeña si el término de perturbación $g(t, x)$ es pequeño en algún sentido. Esto puede verse como si el punto de equilibrio se expandiera, y no sea más un punto sino una región. Las características de esta región se determinan en base al siguiente lema.

Lema 1 (Khalil, 2002). *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema (11). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (13) en $[0, \infty) \times D$, donde $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$. Suponga que el término de*

perturbación $g(t, x)$ satisface

$$\|g(t, x)\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r \quad (16)$$

para todo $t \geq 0$, para toda $x \in D$, y una constante positiva $\theta < 1$. Entonces, para toda $\|x(t_0)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} r$, la solución $x(t)$ del sistema perturbado (11) satisface

$$\|x(t)\| \leq k \exp[-\gamma(t - t_0)] \|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

y

$$\|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T$$

para algún tiempo finito T , donde

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad \gamma = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}, \quad b = \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\delta}{\theta}.$$

Sea que el término de perturbación sea desvanescente o no desvanescente, el lema anterior y las condiciones antes mencionadas muestran que el origen del sistema nominal es robusto frente a cierta clase de perturbaciones. La clave está en encontrar el valor de la cota máxima de la perturbación que el sistema nominal soporta y con la cual sigue conservando sus propiedades de estabilidad.

El caso de mayor interés es cuando la perturbación es no desvanescente, ya que es en estos casos cuando el sistema es más susceptible a inestabilizarse.

I.5 Sistemas lagrangianos

Una clase importante de los sistemas dinámicos, los cuales pueden ser eléctricos, mecánicos, biológicos, químicos, económicos, etc., se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones vinculan las variables de entrada con las variables de salida del sistema.

Una forma de obtener estas ecuaciones diferenciales, es partiendo de las leyes físicas que gobiernan un sistema determinado.

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las leyes de Newton, pero el análisis se complica al aumentar los grados de libertad; es por eso que se utilizan las ecuaciones de movimiento de Lagrange, las cuales reciben este nombre porque Joseph Louis Lagrange fue el primero que las dió a conocer en 1788. Así que las ecuaciones de Lagrange también pueden ser utilizadas para modelar sistemas. Los sistemas que son modelados bajo estas leyes se conocen, por obvias razones, como sistemas lagrangianos.

Las ecuaciones de Lagrange son válidas en cualquier plano de coordenadas; más aún, se pueden utilizar las llamadas coordenadas generalizadas. Este procedimiento está basado en cantidades escalares como son energía cinética, energía potencial y trabajo virtual.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange simplifican mucho el análisis de sistemas que pueden ser muy complejos. El desarrollo de las ecuaciones de Lagrange se muestra a continuación.

El *lagrangiano*, $\mathbf{L}(q, \dot{q})$ de un robot manipulador de n g.d.l. es la diferencia entre su energía cinética K y su energía potencial U :

$$\mathbf{L}(q, \dot{q}) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)). \quad (17)$$

Se considera que la energía potencial se debe a fuerzas conservativas como la de la gravedad.

A partir del lagrangiano se obtienen las ecuaciones de movimiento de un manipulador de n g.d.l., las cuales están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathbf{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

donde τ_i son las fuerzas y pares ejercidos en cada articulación así como fuerzas no conservativas. Como fuerzas no conservativas se puede incluir la fricción.

De la ecuación (18) es claro ver que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como g.d.l. tenga el robot manipulador.

El modelado de sistemas lagrangianos de este tipo se reduce a cuatro etapas, que son:

1. Cálculo de la energía cinética: $K(q(t), \dot{q}(t))$.
2. Cálculo de la energía potencial: $U(q(t))$.
3. Cálculo del lagrangiano: $\mathbf{L}(q, \dot{q})$.
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.

Para el caso de robots manipuladores con eslabones rígidos y uniones libres de fricción y elasticidad, la energía cinética puede expresarse como:

$$K(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (19)$$

donde $M(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ llamada matriz de inercia, cuyos elementos son funciones solamente de la posición q (Kelly-Santibáñez, 2003).

Sustituyendo la expresión anterior en el lagrangiano y desarrollando las ecuaciones, la ecuación de movimiento (18) queda como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} C(q, \dot{q})\dot{q} &= \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}], \\ g(q) &= \frac{\partial U(q(t))}{\partial q}. \end{aligned}$$

La ecuación (20) es la ecuación dinámica para robots de n g.d.l., donde $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es un vector $n \times 1$ llamado vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q)$ es un vector $n \times 1$ de pares gravitacionales y τ es un vector $n \times 1$ llamado vector de entradas. Cada elemento de $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ es, en general, función de las posiciones y velocidades q y \dot{q} .

Los elementos que componen el modelo dinámico dado en la ecuación (20) tienen ciertas propiedades, algunas de las cuales se muestran a continuación. Estas propiedades y algunas más se encuentran en (Kelly-Santibáñez, 2003).

El primer elemento, $M(q)$, que es la matriz de inercia, la cual es muy importante, ya que tiene una relación directa con la energía cinética K , aparte de ser simétrica y definida positiva cumple las siguientes dos propiedades:

- existe una constante real positiva α tal que:

$$M(q) \geq \alpha I \quad \forall q \in \mathbb{R}^n,$$

donde I denota la matriz identidad, de dimensión $n \times n$. En consecuencia, la matriz $M^{-1}(q)$ existe y es definida positiva.

- En el caso de robots con articulaciones rotacionales, existe una constante $k_M > 0$ tal que

$$\|M(x)z - M(y)z\| \leq k_M \|x - y\| \|z\|$$

para todo vector $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Una manera de determinar k_M es

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{i,j}(q)}{\partial q_k} \right| \right].$$

El segundo elemento, $C(q, \dot{q})$, que es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, es de relevante importancia cuando se hace el análisis de estabilidad del sistema de control. Tiene las siguientes propiedades:

- La matriz $C(q, \dot{q})$ puede no ser única, pero el vector $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es único.
- $C(q, 0) = 0$ para todo vector $q \in \mathbb{R}^n$.

- Para robots con articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ tal que

$$\|C(q, x)y\| \leq k_{C_1} \|x\| \|y\|$$

para todo $q, x, y \in \mathbb{R}^n$.

- La matriz $C(q, \dot{q})$ cumple:

$$\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0 \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n.$$

El tercer elemento de la ecuación (20), $g(q)$, es el vector de pares gravitacionales. Es un vector que depende sólo de las posiciones articulares q y si q está acotado, lo estará también $g(q)$. Dos propiedades importantes de este vector son:

- El vector $g(q)$ y el vector de velocidad \dot{q} pueden relacionarse mediante

$$\int_0^T g(q)^T \dot{q} dt = U(q(T)) - U(q(0)) \quad \forall T \in \mathbb{R}_+.$$

- Para el caso de robots con articulaciones rotacionales, el vector $g(q)$ es Lipschitz:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k_g \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Una manera de calcular k_g es

$$k_g \geq n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right| \right].$$

I.6 Conclusiones

En este capítulo se presentaron algunos conceptos que serán utilizados en el resto de los capítulos. La noción de modos deslizantes es útil en el estudio y simplificación de un observador discontinuo, el cual se presenta en el Capítulo 2. Se verá que usando las propiedades del control equivalente es posible identificar perturbaciones. Los conceptos mostrados respecto a sistemas perturbados sirven para probar la estabilidad del observador. Se presentará también el análisis y rediseño de una estructura de control que disminuye el problema del “chattering”, razón por la cual se presentó un análisis de los factores que producen este fenómeno. Se consideraron algunas propiedades importantes de los sistemas lagrangianos debido a que la estructura de control se aplica a este tipo de sistemas.

Capítulo II

Diseño de un observador para sistemas lagrangianos

Cuando se simula numéricamente el modelo matemático de un sistema físico las variables de estado siempre están disponibles, por lo que se puede aplicar alguna técnica de control sin importar cuantas variables de estado requiera. Sin embargo, en aplicaciones prácticas no siempre es posible tener acceso a todas las variables, quizás porque la instrumentación para leer cierta variable puede volverse compleja, por cuestiones económicas o por alguna otra causa. Esto pudiera ser una limitante en el caso de que se quiera aplicar alguna técnica de control que requiera el vector de estado completo, por lo que lo mínimo necesario es tener disponible un estimado de las variables del sistema.

Una manera de generar dicha estimación del vector de estado es por medio de un sistema dinámico llamado *observador*.

El objetivo al diseñar un observador es que el error de observación (la diferencia entre la salida de la planta y la del observador) sea cero.

Recientemente se han diseñado observadores dentro de la teoría de estructura variable aplicando modos deslizantes, por la robustez (es decir, la insensibilidad a perturbaciones externas y/o variaciones en el modelo) que se obtiene en la observación del estado (Juloski et. al, 2002 ; Davila et. al, 2006).

En este capítulo se analiza un observador para sistemas lagrangianos que está basado en el observador de Luenberger clásico pero que se le ha agregado un término discontinuo, propuesto por Rosas (2005).

Una característica sobresaliente de este observador es que utiliza el valor del control equivalente u_{eq} , obtenido por medio de un filtro pasabajas, para estimar el término de perturbación presente en la planta.

Se presentan algunas simulaciones numéricas y experimentales para ilustrar el desempeño del observador.

II.1 Preliminares

Sea el sistema

$$\dot{v}_1 = v_2, \quad (21)$$

$$\dot{v}_2 = -av_1 - bv_2 + \epsilon(t) - c\text{sign}(v_1),$$

donde a y b son constantes positivas, c es un parámetro de control, $\text{sign}(\cdot)$ es la función signo y $\epsilon(t)$ es una perturbación externa con la cota

$$|\epsilon(t)| \leq \rho_0, \quad (22)$$

donde ρ_0 es una constante. Se define la matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \quad (23)$$

y la matriz P como

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + PA = -I$ e I es la matriz identidad. Las propiedades de estabilidad del sistema (21) se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Para el sistema (21), si*

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P) a \rho_0}{\lambda_{\min}(P) \theta}}$$

para algún θ , $0 < \theta < 1$ y $\lambda_{\max}(P)$ y $\lambda_{\min}(P)$ son los valores propios máximo y mínimo de la matriz P , entonces el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global.

La demostración se encuentra en (Rosas et al. 2005), que básicamente está dividida en dos partes. La primera parte consiste en probar que el origen del sistema nominal (con $\epsilon(t) = 0$) es asintóticamente estable y además de manera global. La segunda parte consiste en mostrar que el sistema perturbado (con $\epsilon(t) \neq 0$), bajo ciertas condiciones, sigue conservando las propiedades de estabilidad del sistema nominal.

II.2 Modelo del observador

El observador bajo consideración es para sistemas que pueden ser representados en la forma

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot) + M^{-1}(x_1)\tau,$$

$$y = x_1, \quad (26)$$

donde:

$$f(x) = -M^{-1}(x_1)C(x_2, x_1)x_2,$$

$$g(x_1) = -M^{-1}(x_1)G(x_1),$$

$$\xi(\cdot) = -M^{-1}(x_1)(\varphi(\dot{x}_2, x_2, x_1)\theta + \gamma(t)),$$

donde M es la matriz de inercia, C es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, G es el vector de pares gravitacionales y $\gamma(t)$ es un término de perturbación. En el Capítulo 3 se analiza con más detalle las propiedades de este tipo de sistemas.

Se supone que el comportamiento del sistema (25) y (26) es acotado para cualquier entrada acotada τ y cualquier perturbación acotada $\gamma(t)$. También debe suponerse que el término ξ es acotado,

$$\xi(\cdot) \leq \rho_0.$$

El modelo del observador se propone de la forma

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 + h_1 \quad (27)$$

$$\hat{x}_2 = f(\hat{x}) + g(x_1) + M^{-1}(x_1)\tau + h_2$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (28)$$

donde:

$$h_1 = C_1 e_1,$$

$$h_2 = C_2 e_2 + C_3 \text{sign}(e_1),$$

y C_1, C_2, C_3 son matrices diagonales positivas. Si $C_3 = 0$, se tiene el observador clásico de Luenberger.

Se definen las variables de error como $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, por lo que el sistema de error queda

$$\dot{e}_1 = e_2 - C_1 e_1 \quad (29)$$

$$\dot{e}_2 = f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot) - C_2 e_2 - C_3 \text{sign}(e_1).$$

Debido a que la función $f(\cdot)$ es Lipschitz se tiene

$$\|f(x) - f(x - e)\| \leq \rho_1 \|e\|,$$

donde $\rho_1 > 0$. Si se define $\Psi(\cdot)$ como un nuevo término de perturbación dado por

$$\|\Psi(\cdot)\| = \|f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot)\|, \quad (30)$$

entonces

$$\|\Psi(\cdot)\| \leq \rho_0 + \rho_1 \|e\|. \quad (31)$$

Proposición 1. (Rosas, 2005) Para el sistema (29) es posible encontrar un conjunto de matrices C_1, C_2, C_3 tales que el origen del sistema del error sea un punto de equilibrio exponencialmente estable. Entonces el sistema definido por (27) y (28) es un observador para el sistema definido por (25) y (26).

Prueba. Se hace un cambio de variable $v_1 = e_1$ y $v_2 = e_2 - C_1 e_1$. Las dinámicas del sistema en el nuevo espacio de estado están dadas por

$$\dot{v}_1 = v_2, \quad (32)$$

$$\dot{v}_2 = -C_2 v_1 - C_1 v_2 + \Psi(\cdot) - C_3 \text{sign}(v_1).$$

Este sistema está en la forma dada por (21), donde se vió que bajo ciertas condiciones el origen del sistema es asintótica y globalmente estable. En consecuencia, si

$$\rho_1 < \frac{1}{2\lambda_{\max}}(P) \quad (33)$$

y aplicando el lema 9.2 (Khalil, 2002) es posible encontrar la condiciones sobre las matrices C_1, C_2 y C_3 □

Estas condiciones son

$$C_{1i} > 0, \quad (34)$$

$$C_{2i} > 0, \quad (35)$$

$$C_{3i} > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{C_{2i}\rho_o}{\theta} \right), \quad (36)$$

donde P y θ están definidas como se mencionó antes. La condición sobre C_{3i} es una condición suficiente, pero no necesaria, por lo que pueden existir valores menores de esta cota que satisfagan la proposición.

Cumplir con las condiciones sobre C_1, C_2 y C_3 garantiza que el sistema será insensible a las perturbaciones no desvanescentes que estén dentro de la cota mencionada en (22). La condición sobre ρ_1 (33) es para garantizar la robustez del sistema frente a perturbaciones desvanescentes.

El sistema (32) tiene una superficie de discontinuidad en $v_1 = 0$. Por lo que es posible que se presenten modos deslizantes. Efectivamente, se presenta un modo deslizante de segundo orden y el conjunto deslizante está determinado por las igualdades

$$v_1 = \dot{v}_1 = 0, \quad (37)$$

el término discontinuo aparece recién en la segunda derivada de la función que define la superficie de discontinuidad

$$\ddot{v}_1 = f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot) - C_2v_1 - C_1v_2 - C_3\text{sign}(v_1) = 0. \quad (38)$$

Para estudiar el comportamiento del sistema en la superficie de discontinuidad se utiliza el método del control equivalente, por lo que la ecuación (38) queda

$$\ddot{v}_1 = f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot) - C_2v_1 - C_1v_2 - u_{eq} = 0. \quad (39)$$

La ecuación (37) implica que $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, es decir, $x = \hat{x}$. Considerando esto en la ecuación (39) es fácil ver que el control equivalente u_{eq} está dado por

$$\begin{aligned} u_{eq} &= \xi(\cdot) \\ &= -M^{-1}(x_1)(\varphi(\dot{x}_2, x_2, x_1)\theta + \gamma(t)), \end{aligned} \quad (40)$$

por lo que el término de perturbaciones y de variación paramétrica puede ser obtenido a partir de u_{eq} .

En el capítulo anterior se mostró que el control equivalente puede verse como el promedio del término discontinuo cuando las trayectorias están en el origen y que este promedio puede obtenerse a partir de un filtro pasabajas (Utkin, 1992), por lo que se utiliza el filtro

$$\alpha \dot{x}_f = -x_f + C_3 \text{sign}(e_1(t)), \quad (41)$$

con un valor pequeño de α , de tal manera que la salida del filtro tiende al control equivalente u_{eq} (Figura 4).

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} x_f = u_{eq}$$

II.3 Identificación de perturbaciones

La obtención del vector de perturbaciones es posible cuando no existen variaciones paramétricas (ver ecuación 40) por lo que

$$\xi(\cdot) = -M^{-1}(x_1)\gamma(t).$$

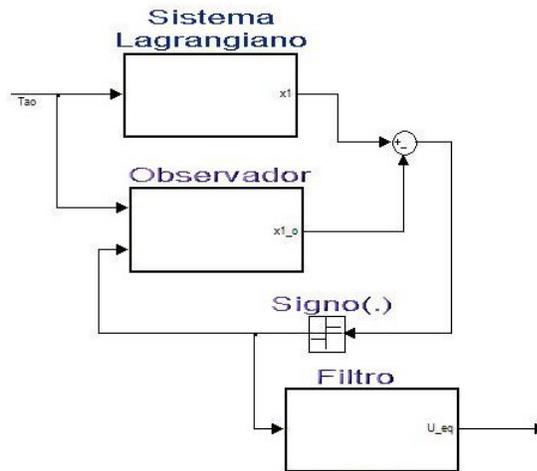


Figura 4: Diagrama de bloques de la obtención de u_{eq}

Entonces tomando la salida del filtro pasabajas como una aproximación del control equivalente u_{eq} , el estimado de las perturbaciones está dado por

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= -M(x_1)u_{eq} \\ &= -M(x_1) \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} x_f.\end{aligned}\tag{42}$$

II.4 Identificación de parámetros

Cuando el nivel de perturbaciones $\gamma(t)$ presente en el sistema es muy pequeño, es posible realizar una estimación de los parámetros del mismo. En este caso se tiene

$$\xi(\cdot) = -M^{-1}(x_1)\varphi(\dot{x}_2, x_2, x_1)\theta.$$

Nótese que la perturbación $\xi(\cdot)$ es lineal con respecto a los parámetros, por lo que para la identificación paramétrica se puede usar una versión continua del algoritmo de mínimos cuadrados. El desarrollo completo se encuentra en (Dávila et al. 2006).

La aceleración \dot{x}_2 del sistema dado por las ecuaciones (25) y (26) puede representarse como la suma de una parte bien conocida y una parte incierta.

$$\dot{x}_2 = F(x_1, x_2, \tau) + \Delta F(x_1, x_2, \tau),$$

donde $F(x_1, x_2, \tau) \in \mathbb{R}^n$ es la parte completamente conocida del sistema y $\Delta F(x_1, x_2, \tau)$ es la parte incierta, la cual puede escribirse en la forma

$$\Delta F(x_1, x_2, \tau) = \theta(t)\phi(x_1, x_2, \tau),$$

donde $\theta(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ es una matriz compuesta por los valores de los parámetros inciertos de las funciones y $\phi(x_1, x_2, \tau) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de las funciones no lineales conocidas.

El sistema (25) y (26) se expresa ahora

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{43}$$

$$\dot{x}_2 = F(x_1, x_2, \tau) + \theta(t)\phi(x_1, x_2, \tau),$$

$$y = x_1, \tag{44}$$

y el observador (27) y (28) queda de la forma

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + C_1 e_1, \tag{45}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = F(x_1, \hat{x}_2, \tau) + \bar{\theta}(t)\phi(x_1, \hat{x}_2, \tau) + C_2 e_2 + C_3 \text{sign}(e_1),$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1. \tag{46}$$

Obteniendo el sistema de error entre (43) y (45) y aplicando el método del control

equivalente es fácil llegar a la expresión correspondiente para u_{eq}

$$u_{eq} = (\theta - \bar{\theta})\phi(\dot{x}_2, x_2, x_1). \quad (47)$$

La ecuación (47) representa un modelo de regresión lineal donde el vector de parámetros a ser estimado es $(\theta - \bar{\theta})$.

Se define $\Delta_\theta = \theta - \bar{\theta}$. Una manera de calcular una estimación de este vector es por medio de la expresión dinámica

$$\dot{\hat{\Delta}}_\theta = [-\hat{\Delta}_\theta\varphi(t) + u_{eq}]\varphi^T(t)\Gamma(t) \quad (48)$$

donde $\hat{\Delta}_\theta$ es la estimación de Δ_θ y $\Gamma(t) = [\int_0^t \varphi(\sigma)\varphi^T(\sigma)d\sigma]^{-1}$. Sin embargo, $\Gamma(t)$ puede generarse en forma dinámica mediante la ecuación diferencial

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\Gamma(t). \quad (49)$$

Las ecuaciones (48) y (49) se utilizan para realizar la identificación de parámetros. Aseguran la convergencia de $\hat{\Delta}_\theta$ a Δ_θ bajo las siguientes condiciones

$$\sup \|t\Gamma(t)\| < \infty, \quad (50)$$

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \epsilon(\sigma)\phi^T(\sigma)d\sigma \right\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad (51)$$

donde $\epsilon(\sigma)$ es la diferencia causada por la filtración realizada para obtener el control equivalente u_{eq} .

La condición (50) se conoce como condición de excitación persistente. Cumplir esta

condición asegura que los parámetros estimados convergen a los reales. Esta condición requiere que $\Gamma(t)$ sea no singular, esto puede verse como una inicialización de la matriz $\Gamma(t)$ en

$$\Gamma(0) = \rho^{-1}I,$$

con $0 < \rho \ll 1$. La condición (51) tiene que ver con el filtrado de u_{eq} y determina la calidad de convergencia de la identificación.

II.5 Resultados

En esta sección se muestran algunos ejemplos de aplicación del observador y el filtro que permiten evaluar su capacidad para identificar parámetros y perturbaciones. Se incluyen ejemplos tanto numéricos como experimentales.

II.5.1 Resultados numéricos

Los resultados aquí presentados se obtuvieron con el simulador Simnon3.0, con un tamaño de paso de 10^{-6} seg y, para todos los casos, condiciones iniciales igual a cero.

Identificación de perturbaciones.

Como primer ejemplo se tiene el péndulo simple, cuyo modelo tiene la forma

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{52}$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 - b\text{sen}(x_1) + c\tau + \gamma(t),$$

$$y = x_1, \tag{53}$$

donde $a = (I + ml_c^2)^{-1}\delta$, $b = (I + ml_c^2)^{-1}(-mgl_c)$, $c = (I + ml_c^2)^{-1}$, con $m = 1.6365$ kg, $l_c = .0762$ m, $g = 9.804$ m/seg², $I = 0.0085$ kg m² y $\delta = 0.00053$ kg m²/s. Se considera que $\gamma(t)$ representa una perturbación externa que satisface

$$|\gamma(t)| \leq \rho.$$

En esta sección se considera que $\rho = 10$. El observador para este modelo es el siguiente

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + C_1 e_1, \quad (54)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -a\hat{x}_2 - b\text{sen}(x_1) + c\tau + C_2 e_1 + C_3 \text{sign}(e_1),$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (55)$$

donde e_1 y e_2 son los errores de observación, definidos como $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$.

De acuerdo con las condiciones ((34) a (36)) se selecciona $C_1 = 2$, $C_2 = 10$ y $C_3 = 15$. La señal de entrada es $\tau = 0.2 \text{ sen}(t)$ y el término de perturbación es $\gamma(t) = 5.5 \text{ sen}(0.5t)$.

En la Figura 5 se muestran los estados de la planta y los estados observados. Después del transitorio el observador converge a los estados reales, aún cuando hay una perturbación en la planta. La Figura 6 muestra los errores de observación.

Para identificar la perturbación (Figura 7), se utiliza el filtro dado en (41), con $\alpha = 0.033$,

$$\dot{x}_f = -30x_f + 30C_3 \text{sign}(e_1).$$

En este caso se consideró como señal de perturbación una función continua. Sin

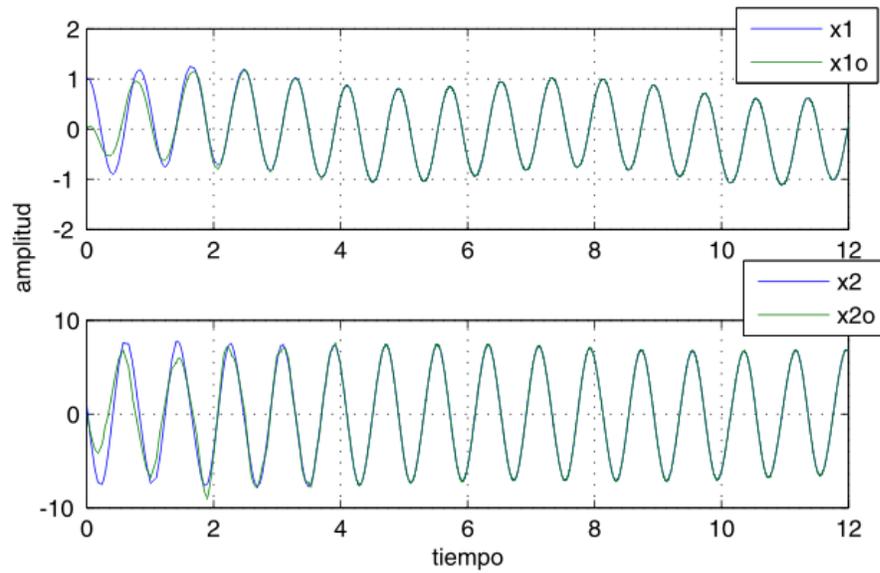


Figura 5: Respuesta de la planta y del observador

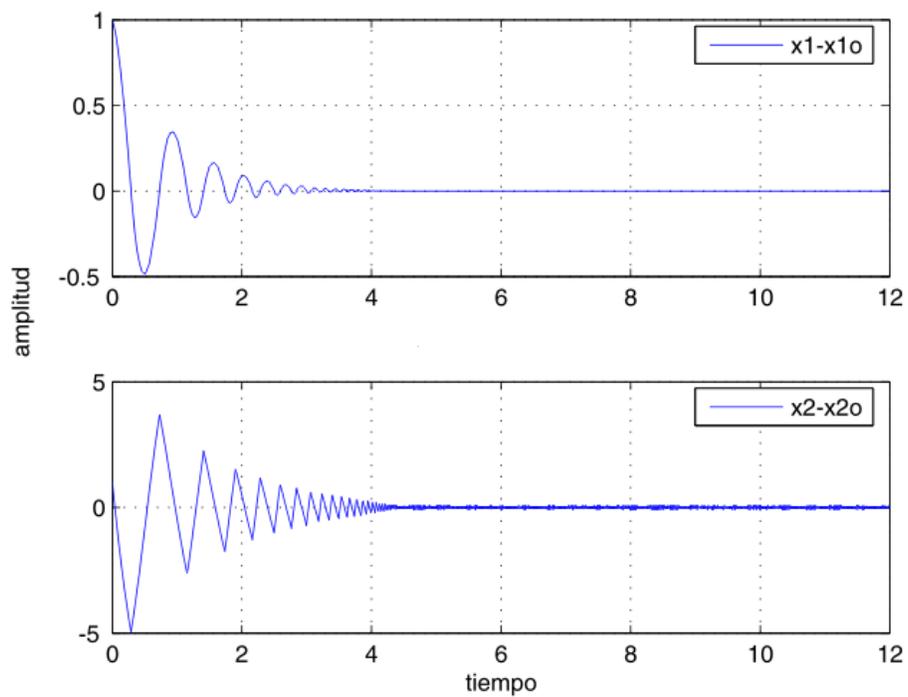


Figura 6: Error entre los estados reales y los observados

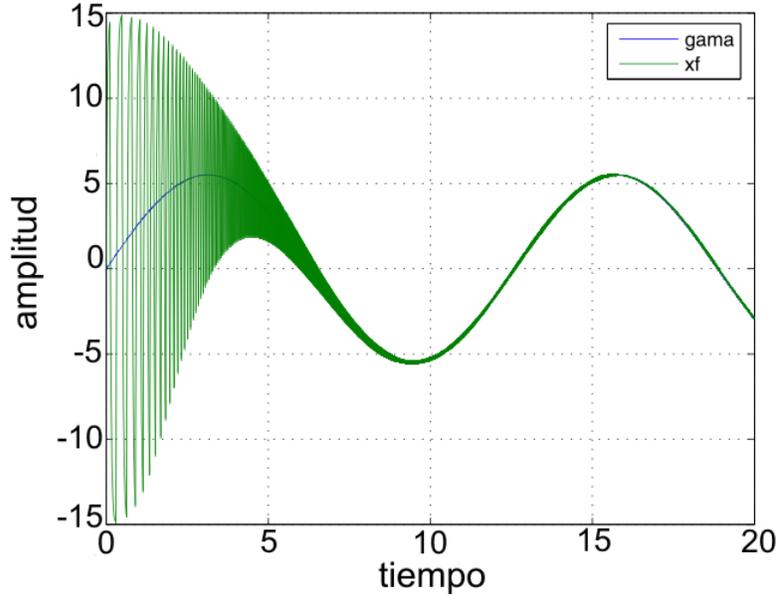


Figura 7: Identificación de una perturbación senoidal

embargo, también es posible identificar perturbaciones en forma de funciones discontinuas, como lo puede ser una señal cuadrada. Como ejemplo considérese que ahora la perturbación del sistema (52) es $\gamma = 2 \text{ sqw}(0.5t)$, donde la función $\text{sqw}(\cdot)$ produce una forma de onda cuadrada de frecuencia 0.5 rad/seg y amplitud dos.. La Figura 8 muestra la perturbación identificada.

Identificación paramétrica

Ahora, como ejemplo de aplicación del observador a la identificación paramétrica, se utiliza el modelo de un péndulo simple con fricción de Coulomb, descrito por el modelo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J}\sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 - \frac{P_s}{J}\text{sign}(x_2), \end{aligned} \tag{56}$$

donde $M = 1.1 \text{ kg}$ es la masa del péndulo, $g = 9.815 \text{ m/s}^2$ es la fuerza gravitacional, $L =$

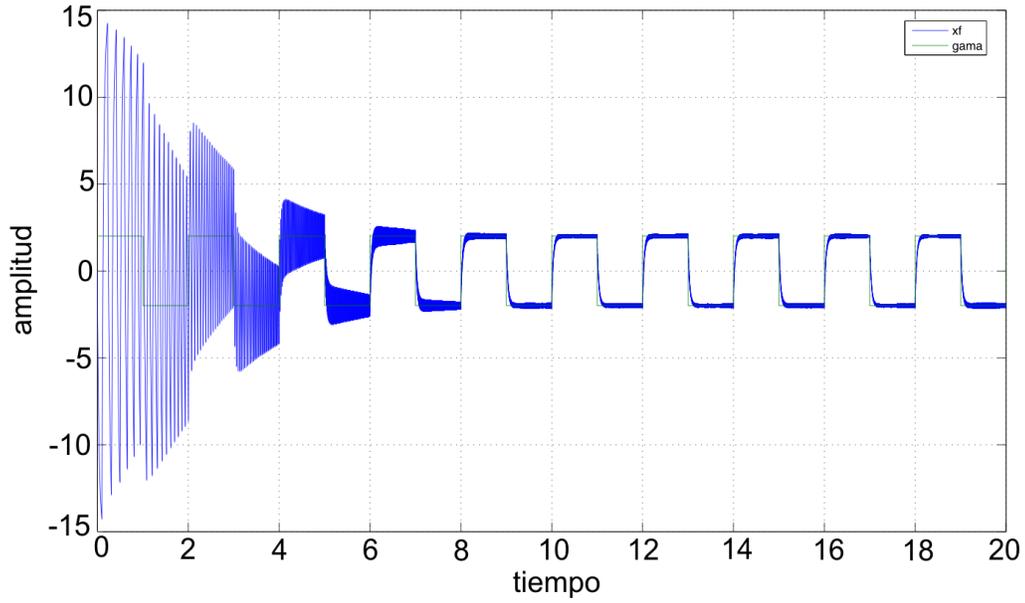


Figura 8: Identificación de una perturbación discontinua

0.9 m es la longitud del péndulo, $J = ML^2$ es la inercia del brazo, $V_s = 0.18 \text{ kg m}^2/\text{s}$ es el coeficiente de fricción viscosa y $P_s = 0.45 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ es el coeficiente de fricción de Coulomb.

Se define $a_1 = MGL/2J = 5.4528$, $a_2 = V_s/J = 0.2020$, $a_3 = P_s/J = 0.5051$ y se considera que éstos son los parámetros desconocidos, cuyos valores nominales son: $\bar{a}_1 = 2.4528$, $\bar{a}_2 = \bar{a}_3 = 0.1$.

El observador se diseña con base en estos parámetros nominales.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + h_1, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{J}u - \bar{a}_1 \sin(x_1) - \bar{a}_2 \hat{x}_2 - a_3 \text{sign}(\hat{x}_2) + h_2.\end{aligned}\tag{57}$$

Ahora el filtro se diseña con $\alpha = 0.002$,

$$\dot{x}_f = -500x_f + 500C_3\text{sign}(e_1).$$

En el observador se selecciona $C_3 = 30$, $C_2 = 12$, $C_1 = 7$.

Para realizar la identificación de parámetros se utiliza el algoritmo de la ecuación

(48) con,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix},$$

donde

$$g_3 = \begin{cases} 25 & \text{si } t < t_1, \\ 2 & \text{si } t \geq t_1, \end{cases}$$

con $t_1 = 1$.

Finalmente, el algoritmo de identificación queda como

$$\dot{\Delta}_{\theta_1} = -\Delta_{\theta}\sin(x_1)g_1,$$

$$\dot{\Delta}_{\theta_2} = -\Delta_{\theta}x_2g_2,$$

$$\dot{\Delta}_{\theta_3} = -\Delta_{\theta}\text{sign}(x_2)g_3,$$

donde $\Delta_{\theta} = \Delta_{\theta_1} + \Delta_{\theta_2} + \Delta_{\theta_3} - x_f$.

En la Figura 9 se muestra el resultado de la simulación. Es claro ver que lo que se identifica es la diferencia:

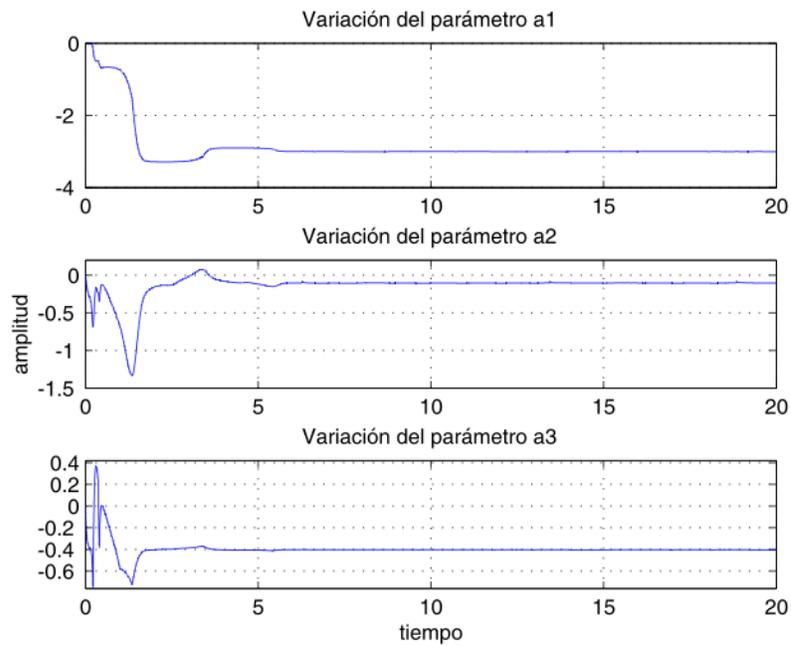


Figura 9: Variación paramétrica identificada

$$\Delta_{\theta_1} = -a_1 + \bar{a}_1 = -3$$

$$\Delta_{\theta_2} = -a_2 + \bar{a}_2 = -0.1020$$

$$\Delta_{\theta_3} = -a_3 + \bar{a}_3 = -0.4051.$$

Para obtener el valor real de cada uno de los parámetros basta un simple despeje de la expresión anterior.

II.5.2 Resultados experimentales

Los resultados aquí presentados se obtuvieron con una tarjeta de adquisición de datos DSPACE y el software MATLAB®), utilizando para la simulación el solucionador de

ecuaciones ode3 (Bogacki-Shampine) de paso fijo, con un tamaño de paso de 10^{-4} .

El observador propuesto en la Sección 2.2 se aplicó a un sistema implementado electrónicamente y a un mecanismo.

Aplicación al sistema de Duffing

Como primer ejemplo se presenta la aplicación del observador a un circuito de Duffing (Rosas, 2005), en el cual todo el vector de estado está disponible. El circuito simula el modelo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 41.345x_1 - 41.345x_1^3 - 1.6075x_2 + 41.345u.\end{aligned}\tag{58}$$

El observador utilizado en este sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + C_1e_1, \\ \dot{x}_2 &= 41.345x_1 - 41.345x_1^3 - 1.6075\hat{x}_2 + 41.345u + C_2e_1 + C_3\text{Sign}(e_1).\end{aligned}\tag{59}$$

Los valores propuestos para los coeficientes del observador atendiendo las condiciones dadas en (34 a 36) son $C_1 = 8$, $C_2 = 10$, $C_3 = 30$. La señal de entrada es $u = \text{sen}(6.43t)$ y se adiciona un término de perturbación dado por $10 \text{sen}(2t)$.

Aunque el circuito tiene una perturbación externa, la observación del estado es bastante buena. Como en este caso se tiene acceso al vector de estado completo del circuito, es posible comparar el estado x_2 con el estado observado \hat{x}_2 (Figura 10). Los errores de observación son del orden de milivolts (Figura 11). Para identificar la

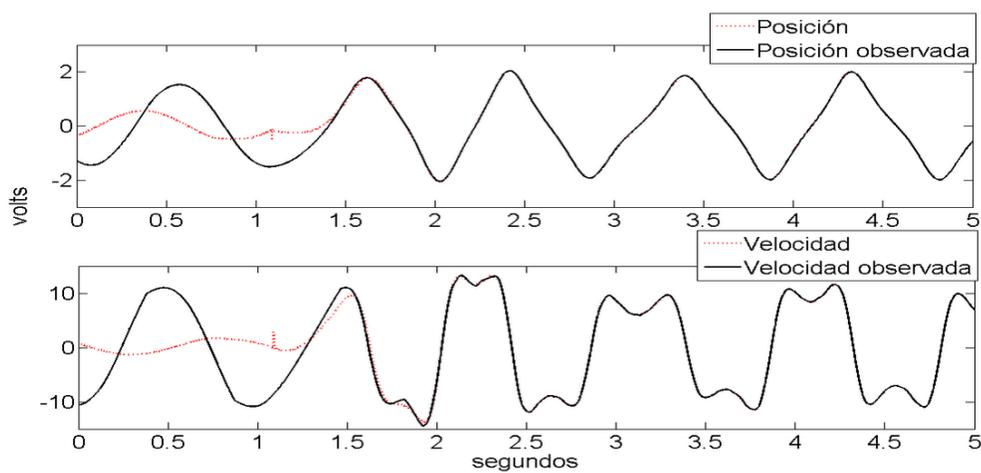


Figura 10: Estados del circuito de Duffing y estados observados

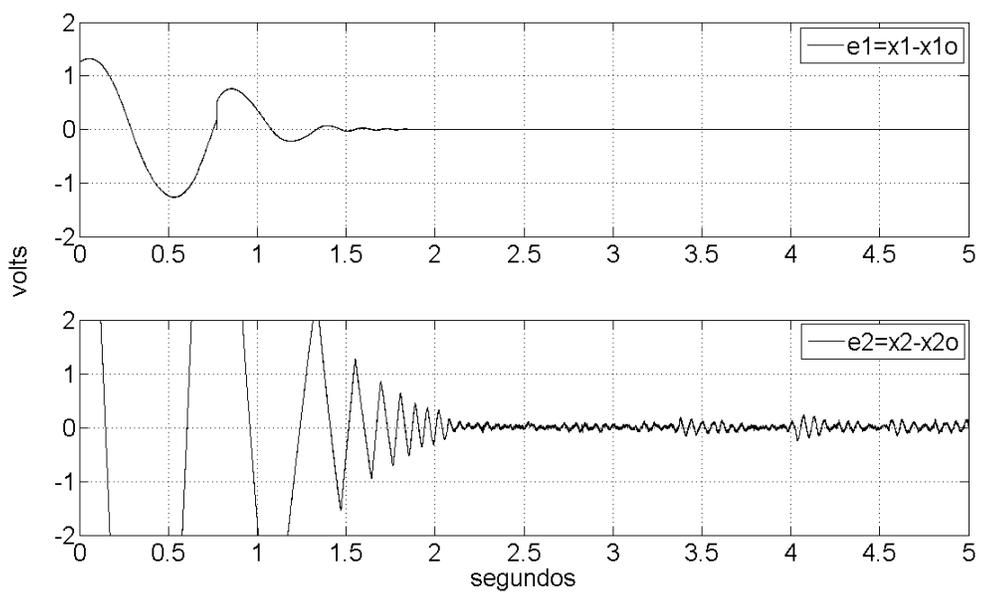


Figura 11: Errores de observación del circuito de Duffing

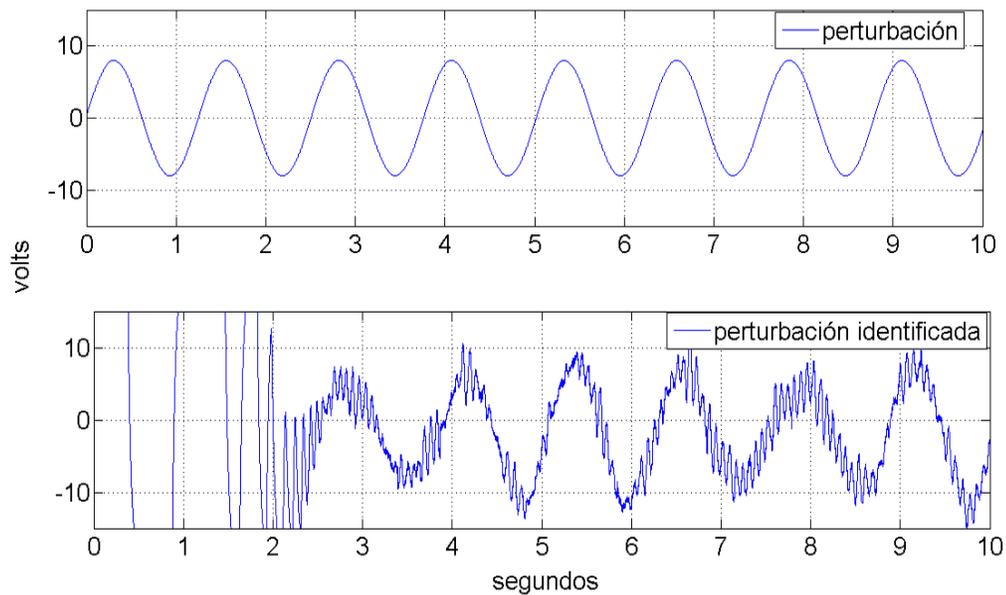


Figura 12: Perturbación en el circuito de Duffing

perturbación (Figura 12) el filtro se diseñó con $\alpha = 0.03$. El término identificado x_f incluye la variación de los parámetros de los circuitos utilizados.

El hecho de tener disponible el estado x_2 permite evaluar de mejor manera el rendimiento del observador debido a que es posible comparar el vector de estado completo con el vector de estado observado.

Aplicación a un mecanismo

Se presentan los resultados obtenidos con el *pendubot* de Mechatronic Systems Inc. caracterizado como péndulo simple, cuyo modelo está dado por (52) y únicamente se cuenta con la medición de la posición.

La señal de entrada es la función $\text{sen}(t)$ y los valores de los coeficientes del observador son $C_1 = 5$, $C_2 = 10$, $C_3 = 18$, los cuales se seleccionaron con el criterio dado en la

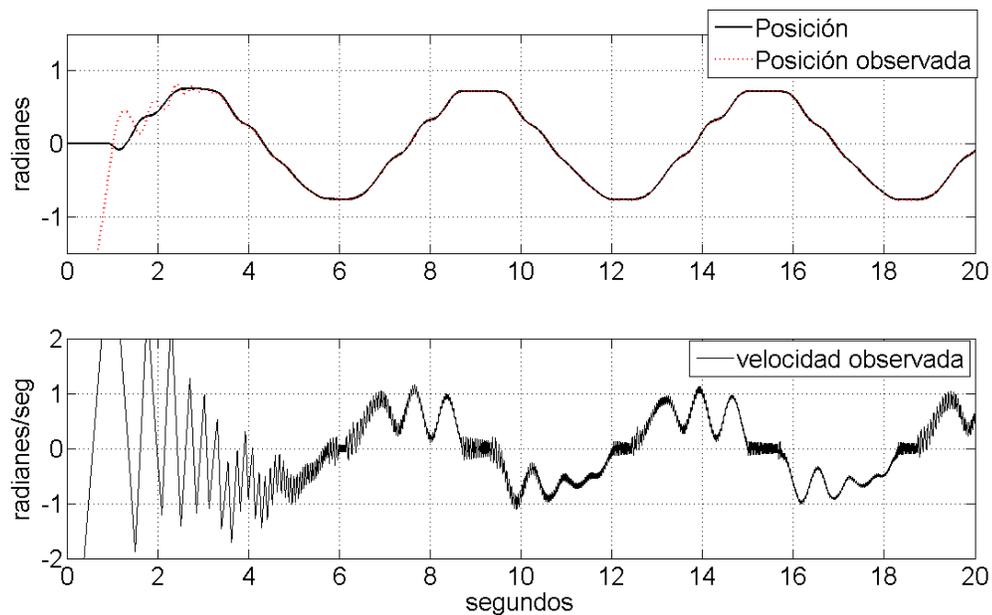


Figura 13: Posición del péndulo y posición observada

Sección 2.2. Además se sumó una perturbación a la señal de entrada, de la forma $5.5 \sin(0.5t)$, con el fin de observar el desempeño frente a este tipo de perturbaciones.

Se tiene una convergencia en tiempo finito del observador al estado medible de la planta, con un error de observación de aproximadamente 0.5% (Figura 14). Además la Figura 13 muestra la velocidad observada \hat{x}_2 del péndulo.

Para identificar el término de perturbación (Figura 15), el filtro se diseña con $\alpha = 0.055$.

A pesar de que el sistema está perturbado, los estados observados convergen a los estados del sistema. El término de perturbación identificado se compone de la perturbación externa y de variaciones propias del sistema, así como de dinámicas no modeladas como la fricción de Coulomb, la cual se omitió en el modelo. Debido a esto la señal de perturbación identificada tiene componentes de alta frecuencia.

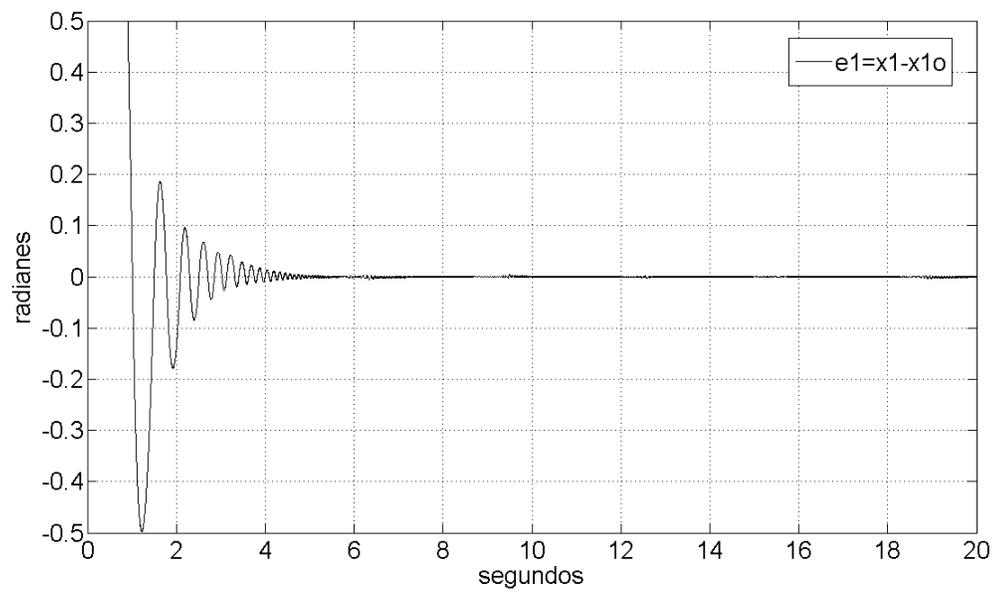


Figura 14: Error de observación de posición

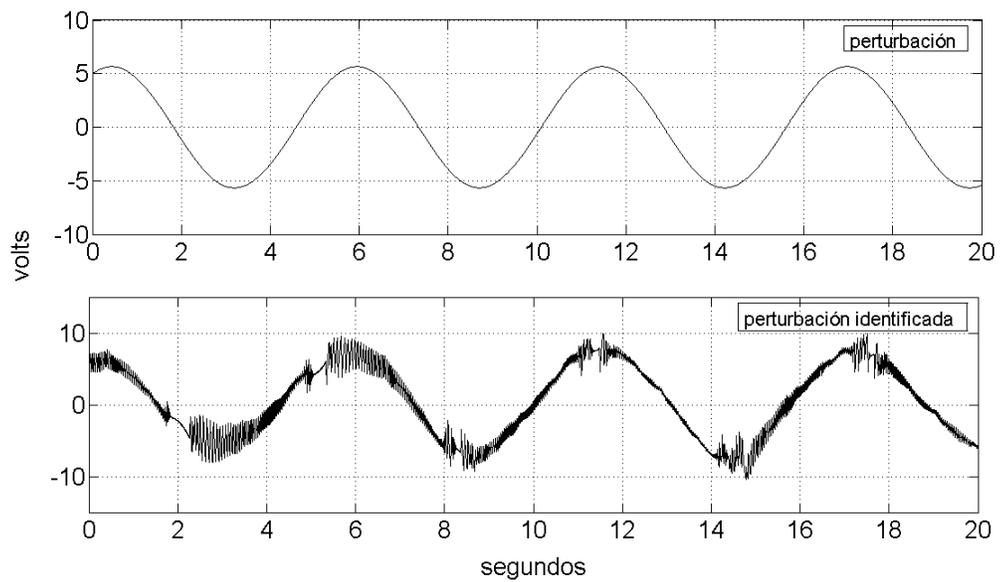


Figura 15: Perturbación identificada

II.6 Conclusiones

El observador analizado en este capítulo, aparte de proporcionar una observación robusta del estado, presenta dos características atractivas: proporciona una observación robusta del estado y da la posibilidad de identificar perturbaciones e incertidumbres paramétricas.

La selección adecuada de las constantes en el diseño del observador garantiza la convergencia al estado de la planta. Sin embargo, conforme el valor del coeficiente C_3 aumenta, también aumenta la cantidad de componentes de alta frecuencia presentes en el estado observado \hat{x}_2 . Para evitar esto, la cota de la perturbación no desvaneciente presente en el sistema debe ser pequeña, con lo cual C_3 se mantendrá en valores pequeños. Es pertinente mencionar que en todos los ejemplos presentados el valor del coeficiente C_3 utilizado es menor al que se obtiene con la condición (36), esto debido a que, como se mencionó en la Sección 2.2 esta condición es suficiente pero no necesaria, sin embargo, aunque es posible disminuir el valor del coeficiente C_3 , se pierde en cuanto a robustez. Uno de los motivos de escoger un valor menor en este coeficiente es disminuir los componentes de alta frecuencia presentes en el estado observado \hat{x}_2 .

El diseño adecuado del filtro permite la identificación del control equivalente u_{eq} . Cabe mencionar que no existe un método para seleccionar el valor de la constante de tiempo α del filtro, lo que se sabe es que esta constante debe ser pequeña.

Los resultados numéricos y experimentales son muy similares y son una muestra del rendimiento del observador.

Por último, hay que tener en mente que el propósito del observador es utilizarse en un sistema de control en lazo cerrado donde se requiera el acceso al estado no medido. En ese sentido, este observador tiene un valor agregado, que es la posibilidad de compensar las perturbaciones. En el siguiente capítulo se muestra el uso de una versión simplificada de este observador en una estructura de control.

Capítulo III

Estructura de control con identificación de perturbaciones (ECIP)

En el control de sistemas generalmente se busca que se pueda garantizar estabilidad del sistema en lazo cerrado y que además esta estabilidad no se pierda con incertidumbres acotadas que son inherentes a los sistemas, como pueden ser perturbaciones externas o incertidumbres paramétricas; es decir, se busca dar robustez (insensibilizar) al sistema para garantizar un desempeño satisfactorio.

En este capítulo se analiza y simplifica una estructura de control para sistemas lagrangianos de n grados de libertad propuesta en Rosas (2005). La parte medular de esta estructura es el observador antes presentado (Capítulo 2) cuya propiedad de identificación de perturbaciones es usada para generar la señal de control. La idea de simplificar esta estructura es porque uno de los objetivos de este trabajo es implementar la estructura con circuitos electrónicos. También se presenta una comparación con otra estructura de control y se concluye presentando algunos resultados numéricos y experimentales.

Por otra parte, la ECIP, puede ser vista como una modificación de la llamada

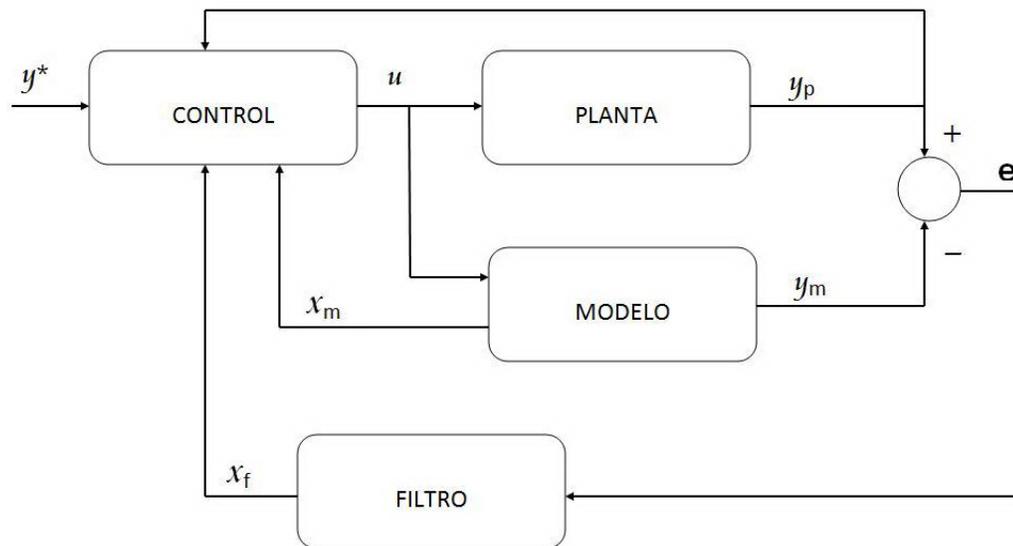


Figura 16: Estructura del CMI

estructura de Control con Modelo Interno (CMI), estructura ampliamente estudiada para el caso lineal (Morari, 1989) y que ha sido extendido para cierto tipo de sistemas no lineales (Alvarez, et al. 1998). Dada la importancia del CMI, este capítulo inicia con una discusión sobre la relación entre ambas estructuras y una descripción de la obtención de la ECIP a partir del CMI.

III.1 Del CMI al ECIP

El CMI apareció primeramente en el contexto lineal. Posteriormente se extendió al caso no lineal, el cual se describe en esta sección.

En la Figura 16 se muestra la estructura del CMI. La planta es el sistema a controlar, cuenta con una entrada de control y una salida. Se considera que la planta puede

describirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^p &= x_{i+1}^p, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n^p &= f^p(x^p) + g^p(x^p)u, \\ y^p &= x_1^p,\end{aligned}\tag{60}$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y^p \in \mathbb{R}$ es la salida y $x^p(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado. Se considera que $f^p(0) = 0$, $g^p(0) \neq 0$. Además, como se ve de la expresión anterior, la planta es de grado relativo completo y de orden n .

El bloque del modelo corresponde al modelo matemático conocido de la planta, el cual está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^m &= x_{i+1}^m, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n^m &= f^m(x^m) + g^m(x^m)u, \\ y^m &= x^m,\end{aligned}\tag{61}$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y^m(t) \in \mathbb{R}$ es la salida, $x^m(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del modelo. Se considera que $f^m(0) = 0$, $g^m(0) \neq 0$.

En cuanto al filtro (o regulador) se utiliza uno pasabajas de orden igual al de la planta, con modelo

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^r &= x_{i+1}^r, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n^r &= -a_1^r - \dots - a_n^r x_n^r + a_1^r (y^p - y^m) = f^r(x^r, y^p, y^m),\end{aligned}\tag{62}$$

donde $x^r \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del regulador o filtro. Este filtro puede obtenerse, por ejemplo, a partir de un pasabajas de orden n con función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(as + 1)^n}, \quad (63)$$

donde el parámetro a se utiliza como un de parámetro de sintonización para compensar el error de modelado entre la planta y modelo. Si el parámetro a es muy pequeño, el filtro responde rápido. Un requisito del filtro es que tenga ganancia unitaria en estado estacionario (Zazueta, 2000).

En cuanto al controlador, su diseño se basa en el método de linealización entrada-salida por retroalimentación del estado de un sistema aumentado. Para definir este sistema aumentado se definen variables auxiliares

$$\begin{aligned} e_i &= x_i^p - x_i^m, \\ y_i &= x_i^m + x_i^r - z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (64)$$

donde z es un vector de referencia.

De las variables auxiliares anteriores se puede obtener

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{y}_n &= f^m(x^m) + g^m(x^m)u + f^r(x^r, e_1). \end{aligned} \quad (65)$$

Considérese el control

$$u = -\frac{f^m(x^m) + f^r(x^r, e_1) - f_y(y)}{g^m(x^m)}, \quad (66)$$

donde $f_y(y) = -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n$, de manera que $\lambda^n + \alpha_n \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1$ sea un polinomio estrictamente Hurwitz. La aplicación del control (66) conduce a la obtención de un modelo lineal de la dinámica de la salida auxiliar (65). Si se utilizan las variables auxiliares y nuevas coordenadas definidas por $\varsigma = (x^r, e, y)$, el CMI queda definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^r &= x_{i+1}^r, \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ \dot{x}_n^r &= -a_1^r x_1^r - \dots - a_n^r x_n^r + a_1^r e_1, \\ \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ \dot{e}_n &= f^p(x^p) - f^m(x^m) + (g^p(x^p) - g^m(x^m))u, \\ \dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ \dot{y}_n &= -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n. \end{aligned} \quad (67)$$

Si la planta y el modelo son iguales, el conjunto de ecuaciones (67) se conoce como CMI nominal. Aún cuando existan diferencias entre planta y modelo, la definición de la acción de control (ec. 66) permanece inalterada.

Una de las características más interesantes del CMI es que cuando se usa para propósitos de regulación alrededor de una referencia constante, se puede lograr un error cero aún cuando la planta y el modelo no sean idénticos. Para que esto se cumpla es necesario que exista un equilibrio asintóticamente estable del sistema (67) (Zazueta,

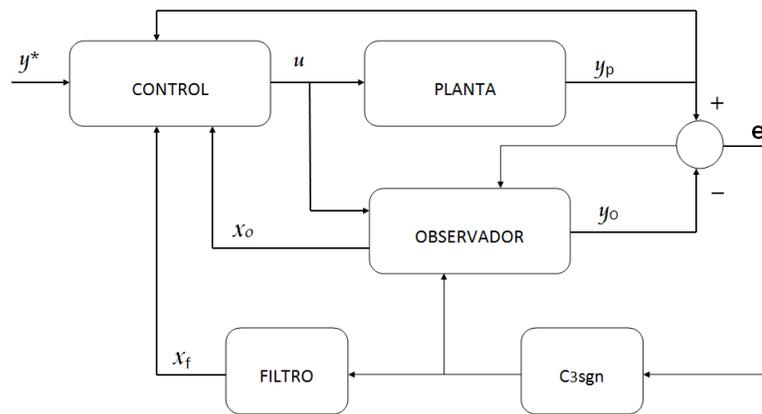


Figura 17: Estructura de control con identificación de perturbaciones

2000).

Dado que el bloque del modelo debe ser asintóticamente estable para garantizar la convergencia del estado del modelo al estado de la planta en el caso que las condiciones iniciales de planta y modelo sean diferentes, se puede ver este bloque como un observador de la planta en lazo abierto (Zazueta, 2000).

Por otra parte, el bloque del filtro (o regulador) puede verse como un componente del controlador que proporciona un buen comportamiento en altas frecuencias, para disminuir la sensibilidad de la planta a incertidumbres en el modelo y para evitar acciones de control demasiado rápidas o grandes (Levine, 1996). Si en el filtro dado en (63) se aumenta la ganancia, entonces el sistema será menos sensible a incertidumbres paramétricas. Entre mayor sea el valor de la ganancia menor será la sensibilidad; sin embargo, valores muy grandes de esta ganancia pueden desestabilizar el sistema.

Una manera de obtener una alta ganancia y a la vez acotar las órbitas del sistema es la inclusión de una función signo en el bloque del filtro.

Considerando lo anterior, es evidente ver que la Figura 17 es una derivación robusta del CMI, con una alta ganancia saturada en el bloque del filtro y un observador que reemplaza al bloque del modelo. Esta estructura (ECIP), es aplicable a sistemas lagrangianos (que pueden verse como una clase particular de sistemas de segundo orden en forma de cadena de integradores). El núcleo de esta estructura es el observador discontinuo presentado en el Capítulo 2. En la siguiente sección se describe y analiza esta estructura.

III.2 Antecedentes de la ECIP

En Rosas (2005), se presentó la estructura de control mostrada en la Figura 17 la cual, como ya se mencionó, está diseñada para propósitos de regulación y seguimiento. Está basada en un observador discontinuo, que no solo estima el vector de estado sino también, junto con un filtro, estima el término de perturbación (o incertidumbre paramétrica) presente en la planta bajo control. Aunque esta estructura tiene un término discontinuo, éste no afecta de manera drástica el control, en el sentido de que no se presenta el fenómeno de “chattering” de amplitud considerable porque el término discontinuo aparece en el observador y no en el controlador. A continuación se analiza cada uno de los bloques.

La planta es un sistema lagrangiano de n grados de libertad con modelo dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta + \gamma(t) = \tau, \quad (68)$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector generalizado de posición, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de gravedad, $\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ es el término producido por variaciones paramétricas. Además si existen fuerzas de fricción en el sistema, pueden ser incluidas en este término. Finalmente, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de perturbaciones externas y $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector generalizado de entradas. Se considera que se tiene acceso únicamente al vector generalizado de posición, $q(t)$.

Definiendo las variables de estado $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, la representación en el espacio de estado de (68) es

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (69)$$

$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot) + M^{-1}(x_1)\tau,$$

$$y = x_1, \quad (70)$$

donde

$$f(x) = -M^{-1}(x_1)C(x_2, x_1)x_2, \quad (71)$$

$$g(x_1) = -M^{-1}(x_1)G(x_1),$$

$$\xi(\cdot) = -M^{-1}(x_1)(\varphi(\dot{x}_2, x_2, x_1)\theta + \gamma(t)).$$

Se supone que el comportamiento del sistema (69)-(70) es acotado para cualquier entrada acotada τ y cualquier perturbación acotada $\gamma(t)$.

El bloque del observador está definido por las ecuaciones (27) y (28). Las propiedades de este observador fueron descritas en el capítulo anterior.

Para el bloque del filtro se utiliza un filtro pasabajas de primer orden descrito por la ecuación (41). En el capítulo anterior se presentaron algunas aplicaciones de este filtro y la teoría correspondiente.

En cuanto al bloque del controlador, se considera un controlador linealizante por retroalimentación, al cual se le suma el término x_f que corresponde a la salida del filtro. El objetivo es seguir una señal de referencia $q_r(t)$ con derivadas $\dot{q}_r(t)$ y $\ddot{q}_r(t)$. El controlador está descrito entonces por la siguiente expresión

$$\tau = M(x_1)(-x_f - f(x_1, \hat{x}_2) - g(x_1) - K_p(x_1 - q_r) - K_v(\hat{x}_2 - \dot{q}_r) + \ddot{q}_r), \quad (72)$$

donde K_p y K_v son matrices diagonales definidas positivas. Una manera de calcular estas matrices se encuentra en (Kelly-Santibáñez, 2003). Nótese que si la velocidad no es medida, se propone el uso de la velocidad observada \hat{x}_2 .

En realidad en este bloque se puede utilizar cualquier controlador para sistemas no perturbados, solo se propone añadir el término x_f , que corresponde a la estimación de la perturbación.

III.2.1 Análisis de estabilidad de la ECIP

Para probar la estabilidad de la estructura en lazo cerrado se sustituye la entrada de control (72) en (69) y en (27), con lo que la planta queda definida por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x) - f(\hat{x}) + \xi(\cdot) + \vartheta, \end{aligned} \quad (73)$$

y el observador queda como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + C_1 e_1, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \vartheta + C_2 e_1 + C_3 \text{sign}(e_1),\end{aligned}\tag{74}$$

donde

$$\vartheta = -x_f - K_p(x_1 - q_r) - K_v(\hat{x}_2 - \dot{q}_r) + \ddot{q}_r.$$

Definiendo los errores de observación entre la planta (73) y el observador (74) como $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, el sistema del error queda en la misma forma que en (29), donde ya se mostró que la selección adecuada de los coeficientes C_1 , C_2 y C_3 garantiza la convergencia del observador al estado de la planta.

Si se definen ahora las variables de error de seguimiento como $z_1 = x_1 - q_r$ y $z_2 = x_2 - \dot{q}_r$, la dinámica del error queda definida por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -K_p z_1 - K_v z_2 + \sigma(\cdot)\end{aligned}\tag{75}$$

donde $\sigma(\cdot) = f(z_1 + q_r, z_2 + \dot{q}_r) - f(z_1 + q_r, z_2 + \dot{q}_r - e_2) + \xi(\cdot) - x_f + K_v e_2$.

Mediante la selección adecuada de las constantes C_1 , C_2 y C_3 se puede asegurar la convergencia del observador a la planta y tomando en cuenta la ecuación (37), entonces se concluye que los errores de observación convergen a cero, $e_1 = 0$ y $e_2 = 0$. Por otro lado, si se garantiza que el filtro identifica totalmente el término de perturbación,

entonces

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} x_f(t) = \xi(\cdot).$$

Debido a lo anterior, $\sigma(\cdot)$ puede ser considerada una perturbación desvaneciente con tasa de decaimiento exponencial, ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(z_1 + q_r, z_2 + \dot{q}_r) - f(z_1 + q_r, z_2 + \dot{q}_r - e_2) + \xi(\cdot) - x_f + K_v e_2\| = 0.$$

Entonces se pueden encontrar valores de K_p y K_v tales que el origen del sistema (75) sea un punto de equilibrio asintóticamente estable (Khalil, 2002).

III.3 Modificación de la ECIP

Dado que uno de los objetivos de este trabajo es implementar la ECIP con circuitos electrónicos, se requiere entonces que los bloques que componen esta estructura sean descritos por expresiones lo más simple posible, de tal manera que la implementación mediante circuitos electrónicos sea factible y lo menos compleja posible. Dos términos que pueden incrementar la complejidad del circuito son el término $f(\hat{x})$, que generalmente contiene términos no lineales, y el término $g(x_1)$ correspondiente al par gravitacional. Por ello se propone una modificación del observador. Por otra parte, para mejorar la calidad del filtrado se propone también una modificación del filtro.

III.3.1 Observador

Se propone realizar una simplificación del observador, de tal manera que se omiten los términos $f(\hat{x})$ y $g(x_1)$, en forma tal que la ecuación (27) se reduce a

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + h_1, \quad (76)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = M^{-1}(x_1)\tau + h_2,$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (77)$$

donde $h_1 = C_1 e_1$ y $h_2 = C_2 e_1 + C_3 \text{sign}(e_1)$.

Ahora la dinámica del error obtenida de (25) y (76) es

$$\dot{e}_1 = e_2 - C_1 e_1, \quad (78)$$

$$\dot{e}_2 = f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot) - C_2 e_1 - C_3 \text{sign}(e_1).$$

Se define ahora como término de perturbación

$$\Theta(\cdot) = f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot). \quad (79)$$

De acuerdo con (22) se requiere que $\Theta(\cdot)$ sea acotada, i.e.,

$$\|\Theta(\cdot)\| = \|f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot)\| \leq \varsigma, \quad (80)$$

donde ς es una constante.

Reescribiendo el sistema (78), de acuerdo con (79),

$$\dot{e}_1 = e_2 - C_1 e_1, \quad (81)$$

$$\dot{e}_2 = \Theta(\cdot) - C_2 e_1 - C_3 \text{sign}(e_1).$$

Bajo la suposición que el sistema (25)-(26) está acotado para cualquier entrada acotada y cualquier perturbación acotada y aplicando la Proposición 1 se puede concluir que el origen del sistema (81) es un punto de equilibrio exponencialmente estable. Así que la selección adecuada de las constantes del observador garantiza que hay convergencia al estado de la planta.

Nótese que las propiedades de estabilidad del observador del Capítulo 2 se mantienen también para este observador. Por otra parte, la ecuación (39) está definida ahora por

$$\ddot{v}_1 = f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot) - C_2 v_1 - C_1 v_2 - u_{eq} = 0. \quad (82)$$

Como $v_1 = v_2 = 0$ en régimen deslizante, el control equivalente estará dado por

$$u_{eq} = f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot) = \Theta(\cdot) \quad (83)$$

En consecuencia, con este nuevo observador ya no es posible identificar las perturbaciones e incertidumbres paramétricas por separado; sin embargo, se mantiene la propiedad de identificación de la perturbación total del sistema, es decir, la perturbación externa, la variación paramétrica y los términos $f(x)$ y $g(x_1)$.

Como ejemplo del desempeño de este nuevo observador considérese el ejemplo del

péndulo simple (52)-(53). Para el diseño del observador se seleccionan los siguientes valores: $C_1 = 15$, $C_2 = 25$ y $C_3 = 60$, con una entrada $\tau = 0.2\text{sen}(0.5t)$ y una perturbación $\gamma(t) = 5\text{sen}(t)$. Nótese que se requiere un valor más grande en el coeficiente C_3 debido a que la cota de la perturbación es mayor a la cota de la perturbación del ejemplo de la Sección 2.4.1.

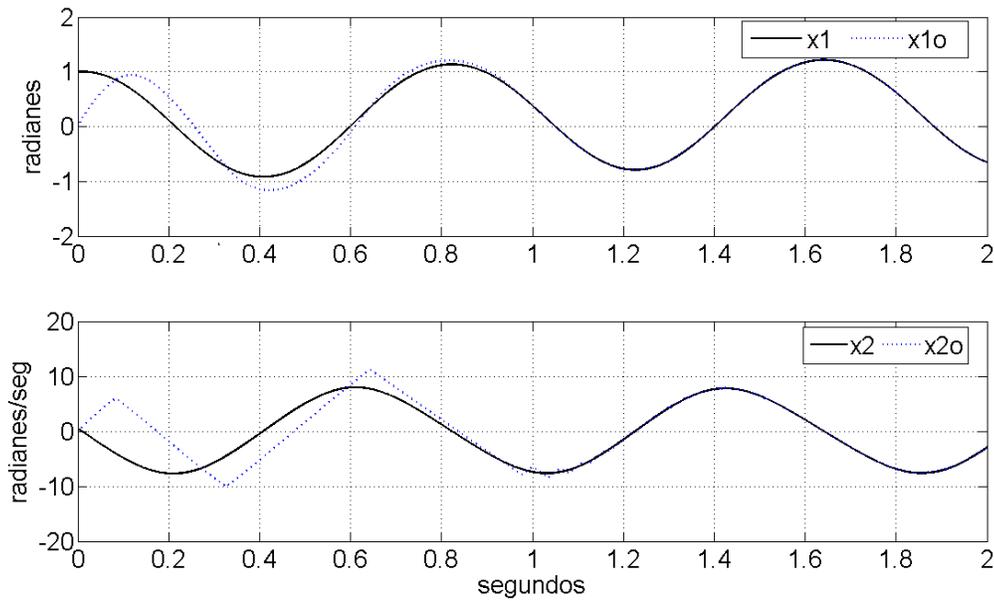


Figura 18: Estados de la planta y estados observados

La Figura 18 muestra el estado de la planta y el estado observado. Note que la convergencia de éste al primero sigue siendo satisfactoria

III.3.2 Filtro

De acuerdo con (Utkin, 1992) puede decirse que el control equivalente u_{eq} es el promedio del término discontinuo $C_3\text{sign}(e_1)$ cuando las trayectorias están sobre el conjunto deslizante $v_1 = \dot{v}_1 = 0$.

El término discontinuo $C_3 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)$ puede verse como la suma de una señal de baja frecuencia más otra de alta frecuencia (Edwards-Spurgeon, 1998),

$$\begin{aligned} C_3 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) &= u(t) \\ &= \underbrace{u_a(t)}_{\text{baja frecuencia}} + \underbrace{(u(t) - u_a(t))}_{\text{alta frecuencia}}. \end{aligned} \tag{84}$$

También en (Utkin, 1992) se menciona que el control equivalente u_{eq} coincide con los componentes lentos de $C_3 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)$; es decir, los componentes de baja frecuencia, los cuales pueden ser obtenidos con un filtro de la forma dada en (41).

La propuesta aquí es reemplazar este filtro, basándose en la posibilidad de obtener mejores resultados con un filtro de mayor orden, que ofrece una mejor calidad de filtrado, puesto que finalmente el propósito es obtener los componentes de baja frecuencia.

El filtro que aquí se propone es uno tipo Butterworth. La razón de usar este filtro se debe a que ofrece una buena respuesta en amplitud con un defasamiento razonable. Otros filtros activos citados en la literatura son los de Chebyshev, que tienen una buena respuesta en amplitud pero una respuesta pobre en la fase. Por otro lado, los filtros del tipo MFTD tienen buena respuesta en fase, pero respuesta pobre en magnitud (Stanley, 1975).

El filtro propuesto es un filtro pasabajas de segundo orden, con una función de amplitud cuadrada definida por

$$A^2(f) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2k}},$$

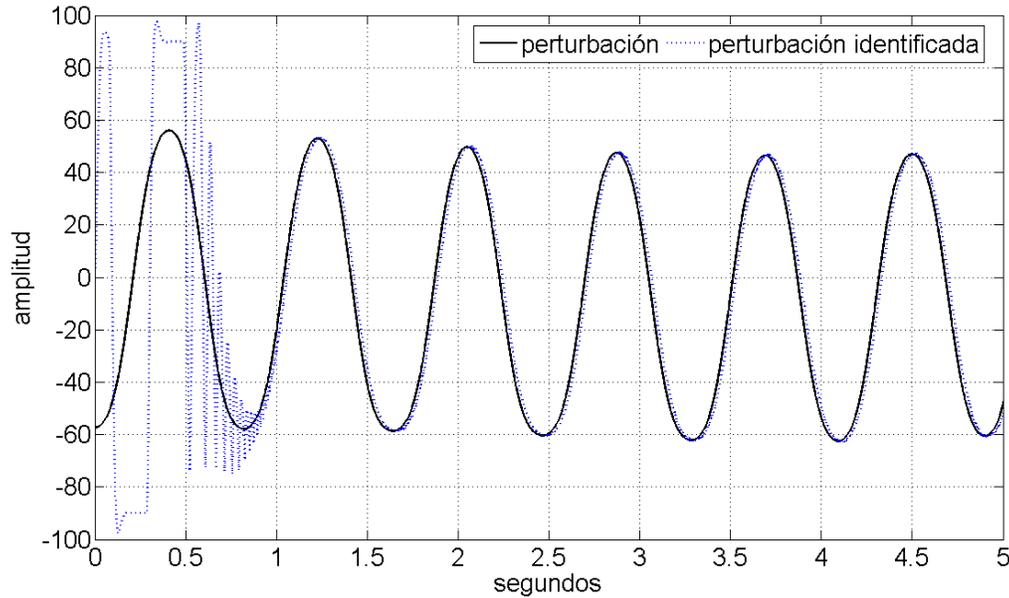


Figura 19: Perturbación total y perturbación identificada con el nuevo filtro

donde k representa el orden de la correspondiente función de transferencia y ω_c es la frecuencia de corte, cuyo valor normalizado es de 1 rad/seg . En (Stanley, 1975) se muestra la manera de obtener la función de transferencia y toda la teoría del diseño de estos filtros. Para el caso de frecuencia normalizada, la función de transferencia es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 1}$$

Esta función de transferencia se desnormaliza a la frecuencia de corte deseada. Un rango razonable de selección sobre el cual se hicieron algunas pruebas es de 15 rad/seg a 600 rad/seg . La salida del filtro Butterworth se define como x_f .

Como ejemplo de aplicación de la identificación de perturbaciones con el nuevo observador y el nuevo filtro considérese el ejemplo anterior (Sección 3.3.1). Se selecciona

la frecuencia de corte del filtro de Butterworth $w_c = 50$. De acuerdo con la ecuación (79) se considera que el término de perturbación está dado por $\Theta = -ax_2 - b\text{sen}x_1 + 5.5\text{sen}(0.5t)$. En este caso, como se trata de una simulación numérica es posible conocer el valor de Θ , con lo que se puede ilustrar el desempeño del observador y el filtro propuestos. La perturbación identificada x_f y la perturbación real Θ se muestran en la Figura 19. Nótese que los resultados obtenidos son satisfactorios.

III.3.3 Estabilidad en lazo cerrado

En esta sección se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado una vez que se sustituyen los bloques del observador y el filtro por los presentados en las secciones anteriores.

Cabe mencionar que el controlador (72) también se simplifica, de tal manera que no se incluyen los términos $f(\hat{x})$ y $g(x_1)$, por lo que el controlador está ahora definido por

$$\tau = M(x_1)(-x_f - K_p(x_1 - q_r) - K_v(\hat{x}_2 - \dot{q}_r) + \ddot{q}_r). \quad (85)$$

Si se definen las variables de error $z_1 = x_1 - q_r$ y $z_2 = x_2 - \dot{q}_r$, la dinámica del error es

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (86)$$

$$\dot{z}_2 = \Theta(\cdot) - x_f - K_p z_1 - K_v z_2 + K_v e_2,$$

donde Θ está definida en la ecuación (79) y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$. Si se considera

$\varpi(\cdot) = \Theta(\cdot) - x_f + K_v e_2$ como un nuevo término de perturbación, se puede reescribir

(86) como:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \varpi(\cdot) - K_p z_1 - K_v z_2.\end{aligned}\tag{87}$$

Tomando en cuenta la ecuación (83) y el hecho de que la convergencia del observador es exponencial (la convergencia de las trayectorias del sistema al conjunto deslizante $v_1 = \dot{v}_1 = 0$ lo es también), se puede considerar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = \Theta(\cdot),$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varpi(\cdot)\| = 0.\tag{88}$$

El término $\varpi(\cdot)$ puede verse como una perturbación que se desvanece cuando el sistema está en estado estacionario ($t \rightarrow \infty$).

En conclusión, es posible encontrar valores para las matrices K_p y K_v tales que el origen del sistema (87) sea un punto de equilibrio asintóticamente estable, igual que en el caso del sistema (75).

III.4 Comparación con otra estructura

En esta sección se presenta una estructura de control propuesta para resolver problemas de seguimiento en sistemas perturbados y además disminuye el problema del “chattering”. Como puede verse, el campo de aplicación es muy similar al de la ECIP, motivo

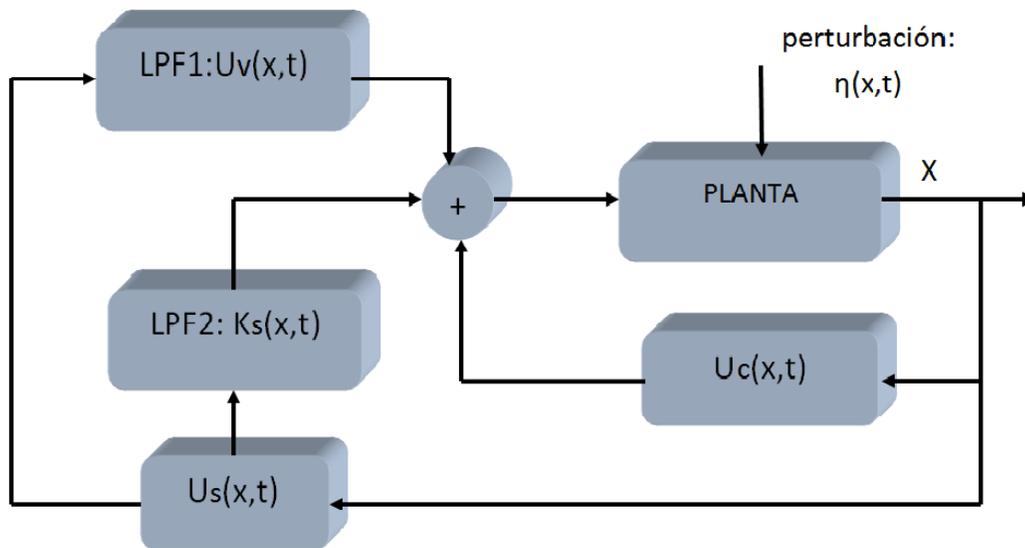


Figura 20: SMC con filtrado en lazo cerrado

por el cual se presenta una comparación entre ambas estrategias de control.

La estructura se llama Control por Modos Deslizantes con Filtrado en Lazo Cerrado (SMC por sus siglas en inglés, Sliding Mode Control), presentada en (Jian-Xin et al. 2004). La Figura 20 muestra el diagrama de bloques de dicha estructura. El algoritmo de control utiliza la técnica de modos deslizantes, y está diseñado para propósitos de seguimiento. Es aplicable a sistemas no lineales que están en la forma de cadena de integradores, por lo que la planta tiene el modelo

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= f(x, t) + b(x, t)[u(x, t) + \eta(x, t)], \end{aligned} \quad (89)$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el estado, que se supone es medible, $f(x, t)$, $b(x, t) \neq 0$ son funciones conocidas con respecto a los argumentos, $u(x, t)$ es la entrada de control del sistema, $\eta(x, t)$ es un término de perturbación.

El sistema está diseñado para seguir la trayectoria x_d definida por

$$\dot{x}_{id} = x_{(i+1)d}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (90)$$

$$\dot{x}_{nd} = \psi(x_d(t), r(t), t),$$

donde $x_d = [x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd}]^T$ y $r(t)$ es una señal de referencia. Los errores de seguimiento se definen por $e_1 = x_1 - x_{1d}$, $e_i = \dot{e}_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$.

El bloque $U_c(x, t)$ (ver Figura 20) contiene un término de compensación prealimentada (“feedforward”). El bloque $U_s(x, t)$ es un término discontinuo $u_s = -\text{sign}(\sigma\rho)$, donde σ es la superficie de discontinuidad formada en función del error y $\rho > 0$.

La función del filtro pasabajos denominado LPF1 es obtener el término continuo u_v . El modelo de este filtro es $\tau_1 \dot{u}_v + u_v = \gamma_1 u_s$, donde τ_1 y γ_1 son constantes positivas. Este filtro identifica el inverso del término de perturbación, es decir, $-\eta(x, t)$.

El siguiente bloque, el filtro pasabajos LPF2 se utiliza para determinar el valor de la ganancia del término discontinuo, la cual se selecciona de la siguiente manera,

$$k_s(t) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_k, & 0 \leq t \leq t_r, \\ k(t), & t > t_r; \end{cases} \quad (91)$$

donde $\beta_k > 0$, $\beta_0 \geq |\eta(x, t)| t_r$ es el tiempo que tarda el sistema en llegar a la superficie de discontinuidad y se determina por $t_r = \sigma(0)/\beta_k |\rho|_{\min}$ y $k(t)$ es la salida de LPF2 que tiene el modelo $\tau_2 \dot{k} + k = \gamma_2 g(\sigma)$, $g(\sigma) = k_g |\sigma|^q$, donde $\tau_2 \geq \tau_1$, $\gamma_2 > 0$, $q > 0$ y $k_g > 0$ son constantes positivas.

Finalmente, el control u aplicado a la planta está definido por $u = u_c + k_s(t)u_s + u_v$.

Se ha demostrado que si los parámetros de los filtros LPF1 y LPF2 se seleccionan de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2 \geq \tau_1, \\ \gamma_1 \geq 2(2\beta_0 + \beta_d\tau_1), \quad \beta_d \geq |\dot{\eta}(x, t)|, \\ \beta_k \geq \alpha\beta_0, \quad \alpha > 1, \end{array} \right.$$

entonces el movimiento deslizante se mantiene para todo $t \in [t_r, \infty]$ (Jian-Xin et al. 2004).

Resumiendo, el funcionamiento de esta estructura es el siguiente. Inicialmente se tiene un controlador por modos deslizantes u_s con compensación prealimentada (“feed-forward”) u_c . Cuando el sistema llega a la superficie de discontinuidad se disminuye el valor de la amplitud del control discontinuo dada por k_s y se añade una nueva señal al control (u_v), la cual puede verse como el control equivalente que compensa la perturbación $\eta(x, t)$. Es obvio que la amplitud del “chattering” disminuye, ya que la influencia del término discontinuo es mínima una vez que se ha disminuido el valor de k_s .

Es importante notar también que con esta estructura el control equivalente se obtiene en lazo cerrado.

Como ejemplo de aplicación se considera el circuito de Van der Pol (Jian-Xin et al. 2004); primeramente se aplica esta estructura, después la ECIP.

Sea el circuito de Van der Pol cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 + u + \eta, \end{aligned} \tag{92}$$

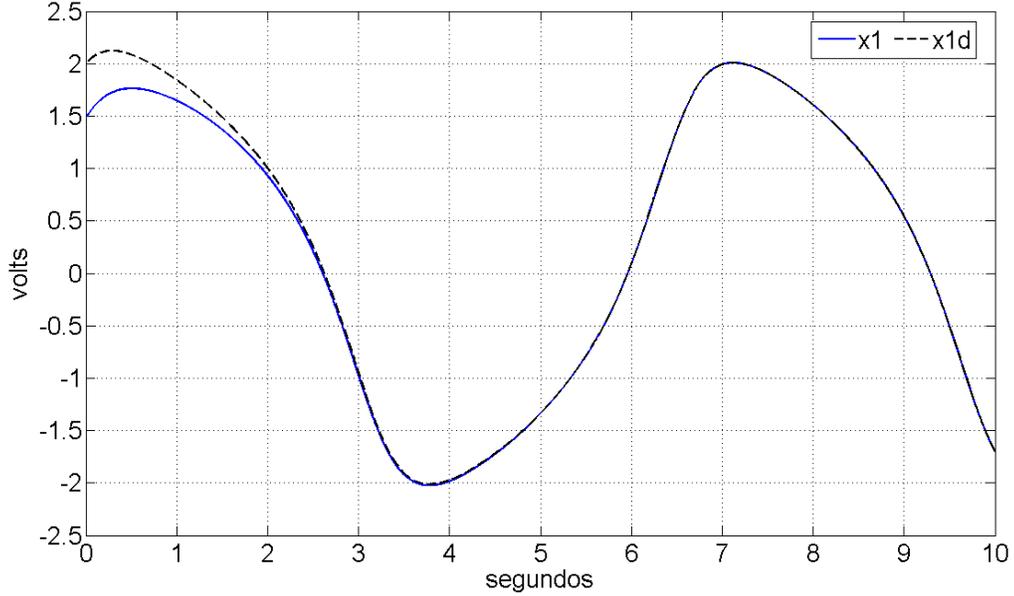


Figura 21: Referencia y posición. Circuito Van der Pol. Caso SMC

donde $\eta = 10\sin(5\pi t) + 5\sin(2\sqrt{t+1})$ es una perturbación externa, $\mu = 3$, $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 0$. Los parámetros en base a los cuales se diseñan los filtros son $\beta_0 = 15$, $\beta_d = 50\pi + 5$. El objetivo es seguir a otro oscilador de Van der Pol dado por

$$\dot{x}_{1d} = x_{2d}, \quad (93)$$

$$\dot{x}_{2d} = -x_{1d} + \mu_d(1 - x_{1d}^2)x_{2d},$$

donde $\mu_d = 1$, $x_{1d}(0) = 2$, $x_{2d}(0) = 1$. La superficie de discontinuidad es $\sigma = e_1 + e_2 = (x_1 - x_{1d}) + (x_2 - x_{2d})$. El tiempo en que el sistema llega a la superficie de discontinuidad es $t_r = 0.075 \text{ seg}$

Los filtros usados son, para $LPF1$, $0.1\dot{u}_v + u_v = \gamma_1 u_s$ y para $LPF2$, $0.1\dot{k} + k = 25\sqrt{|\sigma|}$. Los resultados se muestra en las siguientes figuras. La Figura 21 muestra

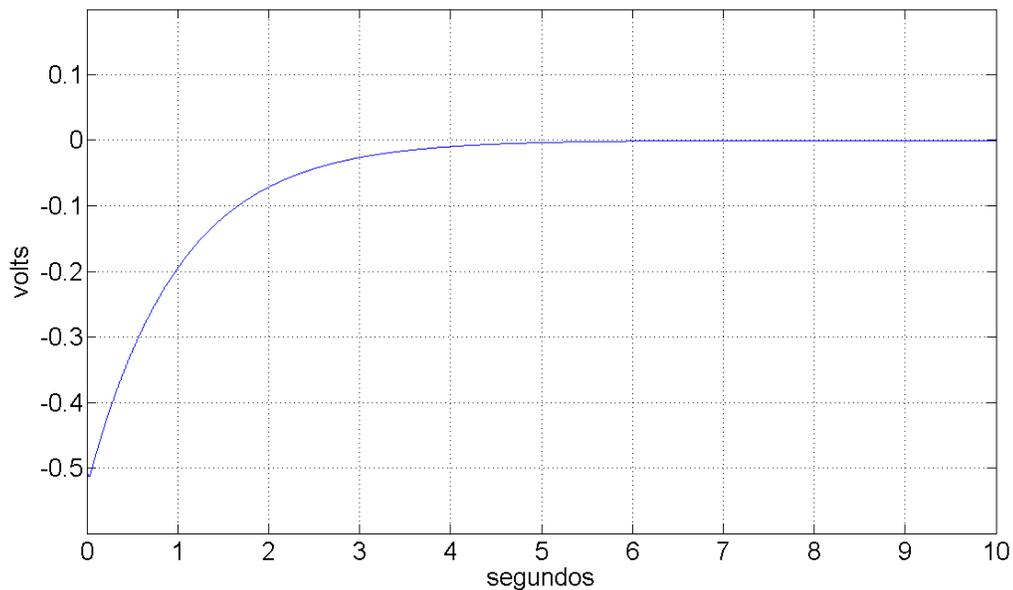


Figura 22: Error de seguimiento. Circuito Van der Pol. Caso SMC

cómo se logra el objetivo de control (seguimiento de x_{1d}) después de 3 seg, y el error tiende asintóticamente a cero, como se aprecia en la Figura 22.

El sistema llega a la superficie de discontinuidad ($\sigma = 0$) en aproximadamente 0.04 segundos, aunque el tiempo calculado t_r es de 0.075 segundos. Debido a que en este intervalo k_s es de valor constante, el control presenta “chattering” de amplitud considerable. Después de 0.075 segundos el valor de k_s es determinado por la salida del filtro $LPF2$, lo cual se refleja en el control, ya que la presencia de “chattering” se minimiza conforme el valor de k_s disminuye. En el caso de este ejemplo el valor de esta ganancia en estado estacionario es de 0.51, cuando su valor inicial era de 35. La señal de control u se ilustra en la Figura 23.

Ahora se presenta la aplicación de la ECIP a este mismo sistema, ecuación (92). Como en esta estructura se supone que sólo se tiene acceso al vector generalizado de

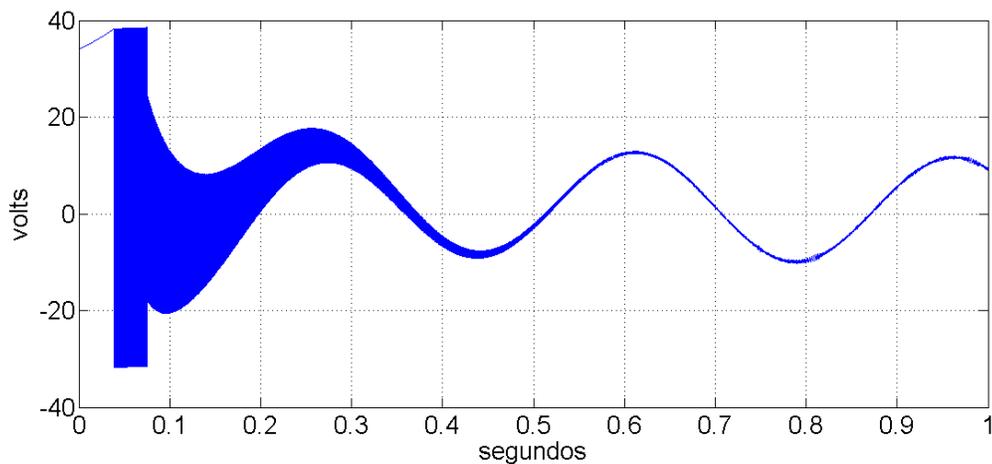


Figura 23: Señal de control. Circuito Van der Pol. Caso SMC

posición, se utiliza entonces un observador para estimar la velocidad \hat{x}_2 . Utilizando el modelo dado en (76), el observador usado en este ejemplo es

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 15e_1, \quad (94)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \tau + 20e_1 + 50\text{sign}(e_1).$$

Para obtener el término de perturbación x_f se utiliza un filtro Butterworth con frecuencia de corte de 100 rad/seg , por lo que la función de transferencia queda como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10000}{s^2 + 141.42s + 10000}.$$

Finalmente, el controlador se diseña de acuerdo a la ecuación (85), con $K_p = 500$ y $K_v = 100$.

En las siguientes figuras se muestran los resultados obtenidos. El seguimiento de la posición deseada (Figura 24) es casi inmediato (después de 1 segundo) y el error de

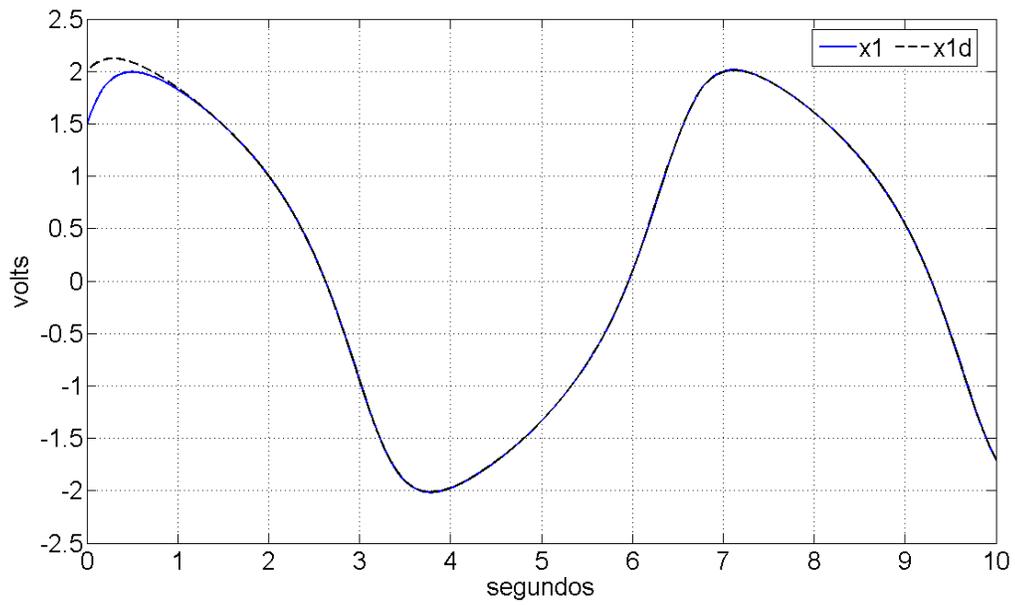


Figura 24: Posición y posición deseada. Circuito Van der Pol. Caso ECIP

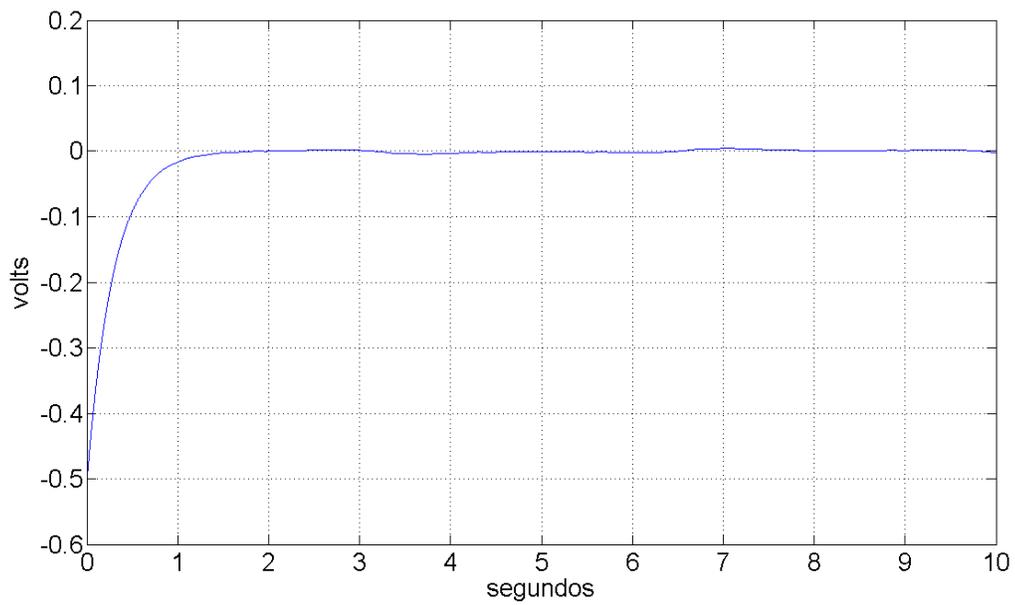


Figura 25: Error de seguimiento. Circuito Van der Pol. Caso ECIP

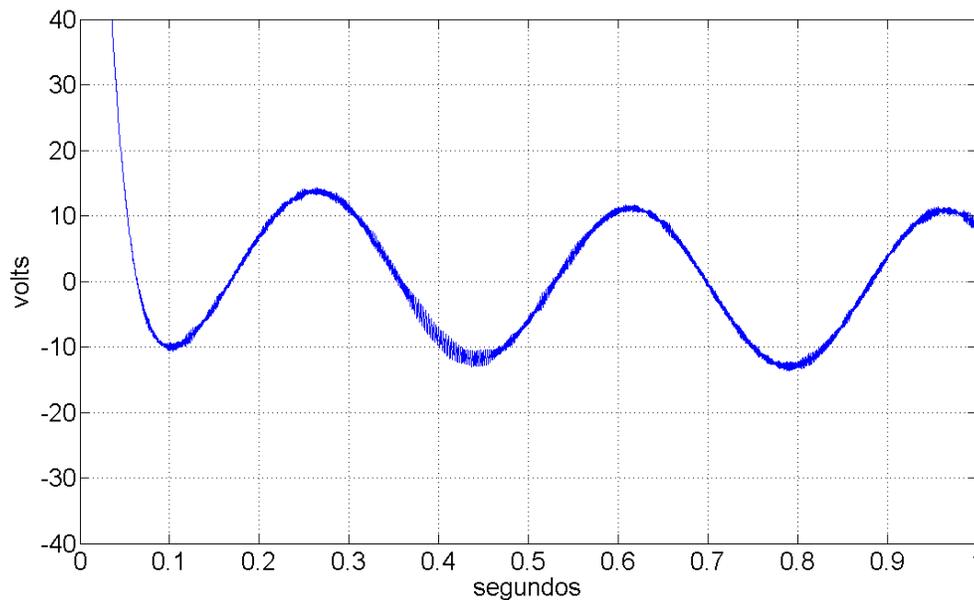


Figura 26: Señal de control. Circuito Van der Pol. Caso ECIP

observación (Figura 25) no es mayor al 0.2% tendiendo asintóticamente a cero.

La señal de control (Figura 26) contiene un mínimo de componentes de alta frecuencia, los cuales se deben al uso de la velocidad estimada \hat{x}_2 .

Finalmente, con base en la teoría y el ejemplo presentado, se obtienen las siguientes conclusiones de las principales características de la estructura SMC y la ECIP.

- La SMC da robustez al sistema en lazo cerrado. Para hacer frente al problema del “chattering” utiliza una ganancia conmutada, cuyo objetivo es disminuir al máximo la influencia del término discontinuo en el control. Por otra parte, la ECIP utiliza el control equivalente para insensibilizar al sistema ante perturbaciones, por lo que en el controlador no hay términos discontinuos, los componentes de alta frecuencia se deben a que se retroalimenta la velocidad estimada \hat{x}_2 , que es

la señal sobre la que se ve el efecto directo del término discontinuo del observador.

- La SMC requiere tener disponible todo el vector de estado y al menos el valor de los parámetros nominales del modelo del sistema a controlar; la ECIP requiere tener acceso solamente al vector generalizado de posición y conocer el valor de la matriz de inercia M . No es necesario conocer entonces los valores de los parámetros del modelo, ya que se pueden compensar con el término x_f , aunque en este caso el esfuerzo de control será mayor.
- El error en ambas estructuras es asintótico.
- La estructura SMC está diseñada para propósitos de seguimiento de un modelo, la ECIP está orientada a la regulación y el seguimiento.
- El sobreimpulso, que es importante en los casos en que se desea que la referencia se alcance sin sobrepasar su valor, no se presenta en la SMC. En el caso de la ECIP, una selección adecuada de las constantes K_p y K_v evita el sobreimpulso.
- La identificación de perturbaciones en el caso de la SMC se realiza en lazo cerrado, ya que la salida del filtro LPF1 es igual a cero mientras $t \leq t_r$, es decir, $u_v(t_r) = 0$. La identificación en el caso de la ECIP es en lazo abierto, lo cuál es una ventaja al momento de determinar una estimación de la cota máxima de las perturbaciones antes de cerrar el lazo.
- La ECIP que aquí se presenta puede ser implementada con circuitos electrónicos, como se verá en el capítulo siguiente. La implementación de la SMC a priori no

parece ser trivial.

- Ambas estructuras presentan una opción para el control robusto de sistemas y, aunque utilizan términos discontinuos, el efecto del fenómeno llamado “chattering” es mínimo, de tal manera que la señal de control no afecta a los sistemas físicos, tal como lo haría una señal de control producida con un controlador por modos deslizantes.
- El tiempo de convergencia es menor utilizando el algoritmo de la ECIP que el tiempo de convergencia que se tiene utilizando el algoritmo de la SMC. En el ejemplo presentado la ECIP converge a la referencia en 1 seg, con la SMC la convergencia a la referencia es en 3 seg. Estos tiempos son comparables bajo la suposición de que los resultados tanto con SMC como con la ECIP son los mejores que se pueden obtener.

III.5 Resultados

Aplicación a un péndulo simple

En esta sección se presentan los resultados tanto numéricos (con modelo matemático) como los experimentales (con el sistema físico) obtenidos al aplicar el algoritmo de la ECIP a un péndulo. Se utiliza el software Matlab®[®], con el solucionador de ecuaciones ode2 (Heun) con tamaño de paso fijo de 10^{-4} . Para el caso de los resultados experimentales se utilizó una tarjeta de adquisición de datos en tiempo real.

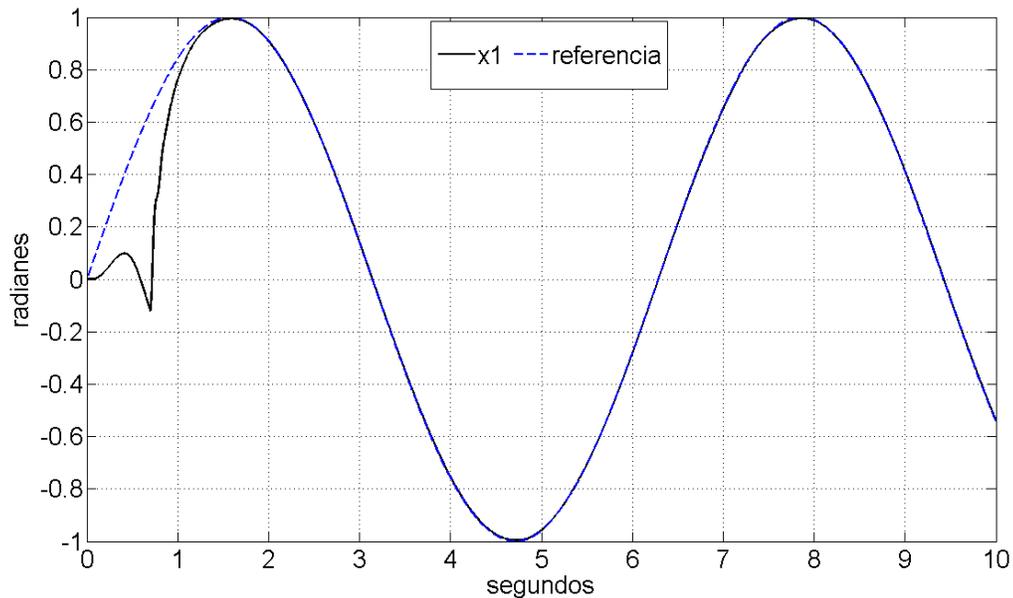


Figura 27: Posición y referencia

III.5.1 Resultados numéricos

Como ejemplo se considera el modelo de un péndulo simple dado en las ecuaciones (52)-(53) con los mismos parámetros y con la perturbación $\gamma(t) = 4\text{sen}(t)$. El objetivo es seguir la referencia $q_r = \text{sen}(t)$. Las ganancias del observador se seleccionan de la siguiente manera:

$C_1 = 25$, $C_2 = 25$ y $C_3 = 90$, de tal manera que el observador para este ejemplo es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + 25e_1, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= c\tau + 25e_1 + 90\text{sign}(e_1).\end{aligned}\tag{95}$$

La frecuencia de corte del filtro Butterworth es 35 rad/seg.

En el controlador se selecciona $K_p = 600$ y $K_v = 55$.

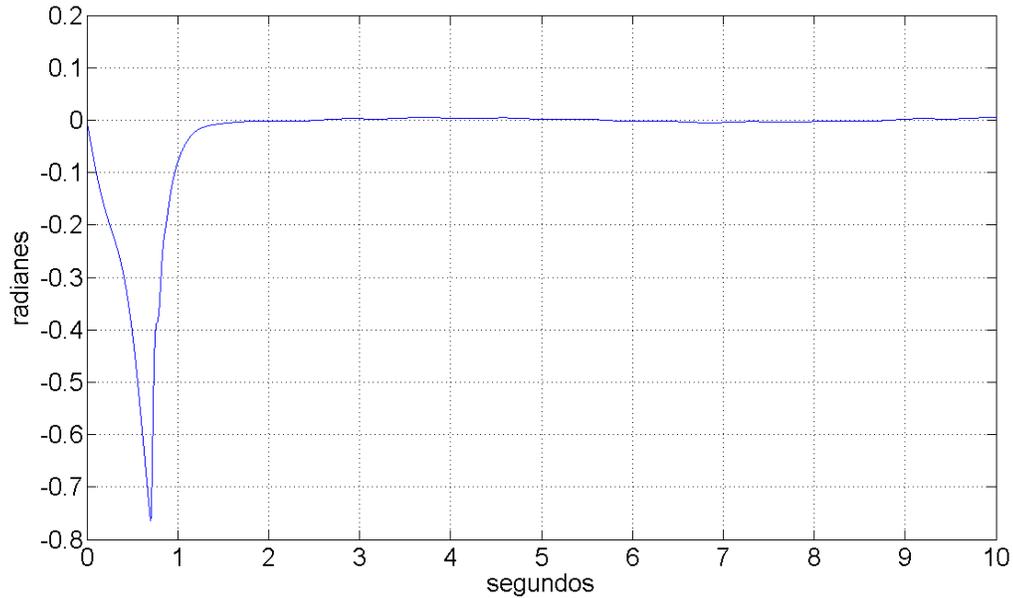


Figura 28: Error de seguimiento

La señal de control se aplica en 0.7 segundos. El seguimiento de la referencia se muestra en la Figura 27. Se logra un error de seguimiento de aproximadamente el 0.5% (Figura 28), que es muy aceptable.

El observador converge a la planta y el error de observación es muy pequeño, como se ve en la Figura 29.

Debido a que el término discontinuo está en el observador, es aquí donde se ve el efecto de utilizar un término discontinuo, específicamente en el estado observado \hat{x}_2 . Como esta variable se retroalimenta en el controlador, los componentes de alta frecuencia aparecerán en el control, por lo que se pensó en filtrar el estado observado \hat{x}_2 con un filtro pasabajas antes de retroalimentarla. En la Figura 30 se muestra la velocidad estimada \hat{x}_2 y en la misma la velocidad \hat{x}_2 filtrada.

La perturbación estimada corresponde al término $-ax_2 - b\text{sen}(x_1) + \gamma(t)$, esto se

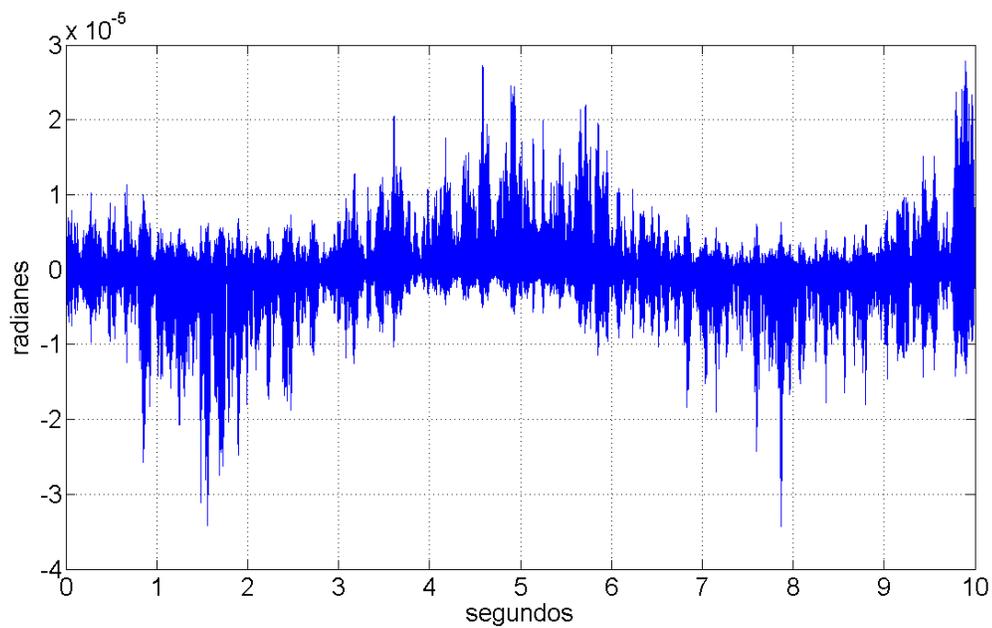


Figura 29: Error de observación

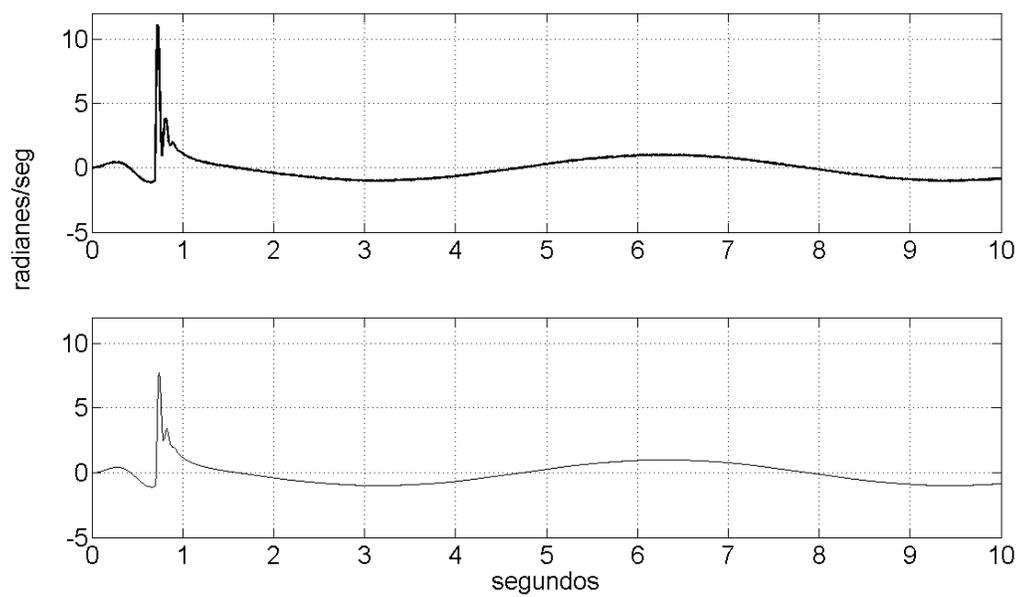


Figura 30: Velocidad estimada (arriba) y su versión filtrada (abajo).

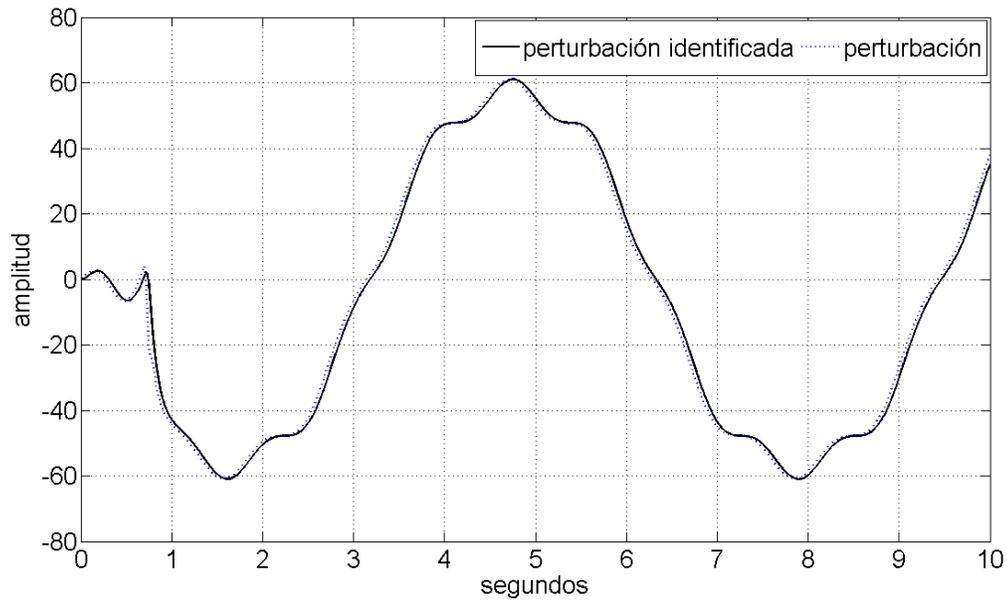


Figura 31: Término de perturbación identificado

muestra en la Figura 31.

Por último, se muestra la señal de control (Figura 34), la cual no contiene términos de alta frecuencia y se encuentra en niveles de amplitud aceptables para una aplicación práctica.

Existen casos especiales donde, para el sistema en lazo cerrado y en estado estacionario se puede obtener el término de perturbación. Como ejemplo, considérese el mismo sistema anterior del péndulo con una perturbación $\gamma(t) = 12\text{sen}(0.5t)$ y $q_r = \pi$. En la Figura 33 se muestra cómo se identifica la perturbación externa, debido a que en el término

$$\Theta(\cdot) = f(x) + g(x_1) + \xi(\cdot) = ax_2 + b\text{sen}(x_1) + 12\text{sen}(0.5t),$$

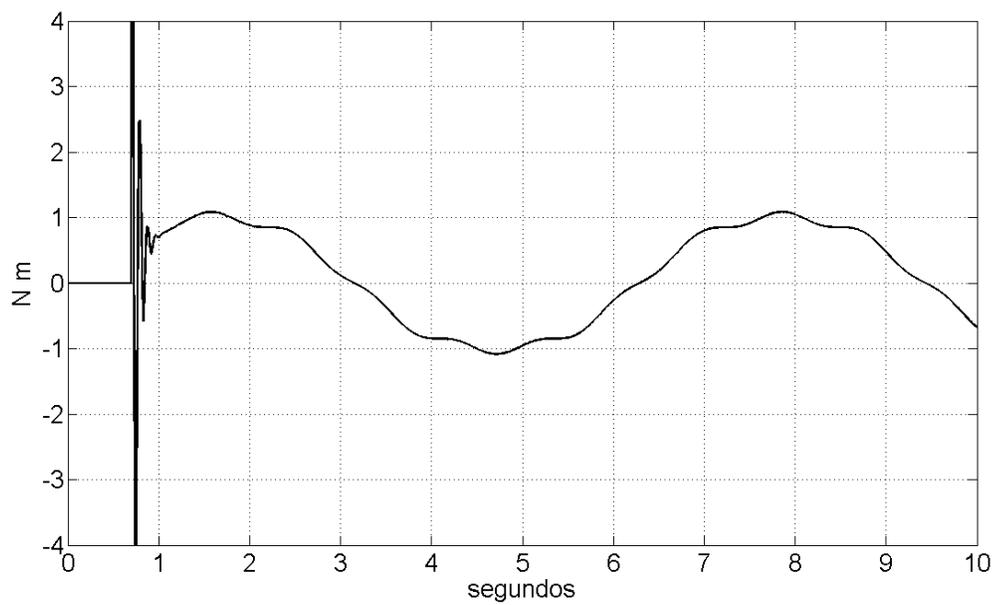


Figura 32: Control

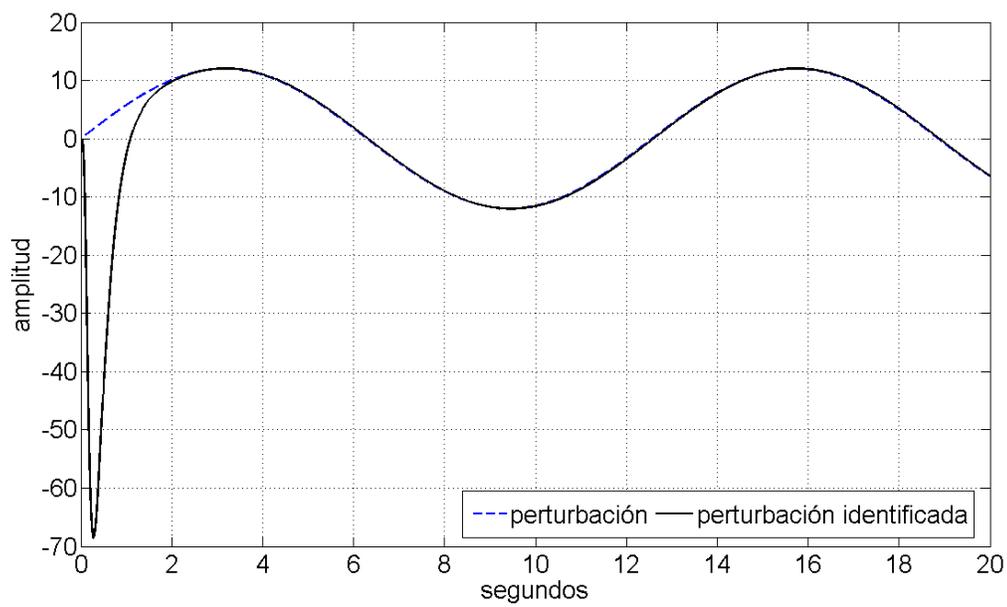


Figura 33: Perturbación identificada en estado estacionario

la variable converge a π y x_2 a 0, que implica que $\Theta(\cdot) \rightarrow 12\text{sen}(0.5t)$, por lo que en este caso es posible identificar la perturbación externa.

III.5.2 Resultados experimentales

En esta sección se muestran los resultados de aplicar la ECIP a un mecanismo, un *pendubot* fabricado por Mechatronics Inc., configurado como péndulo simple el cual se considera que tiene el mismo modelo que el del ejemplo numérico antes presentado. En este caso no se aplica directamente ninguna perturbación externa. Para diseñar el observador (ec 76), se seleccionan las constantes $C_1 = 25$, $C_2 = 25$ y $C_3 = 90$. Como puede verse, es el mismo observador que el utilizado en el ejemplo numérico.

Para el filtro se utiliza un bloque del paquete Simulink que viene programado como filtro de Butterworth, al cual se le dan los valores de frecuencia de corte (w_c) y el orden del filtro. Para este caso se usó un valor de $w_c = 20$ y el orden del filtro es 2.

Para el controlador se usaron los valores $K_p = 700$ y $K_v = 35$; se considera como señal de referencia $q_r = 1.5\text{sen}(t)$.

Con la tarjeta Dspace se lee la posición del péndulo en forma digital y se le envía la señal de control en forma analógica. Las siguientes gráficas muestran los resultados obtenidos. Cabe hacer mención que en este experimento 1 volt equivale a un radian y viceversa. En la Figura 34 se muestra la referencia y la posición del péndulo x_1 , el objetivo de control se cumple y no hay sobreimpulso en la señal de posición. El error de seguimiento no es mayor al 1%, lo cual corresponde a una desviación angular máxima de 0.01 rad o 0.57 grados (Figura 35). El error de observación es muy pequeño, por lo

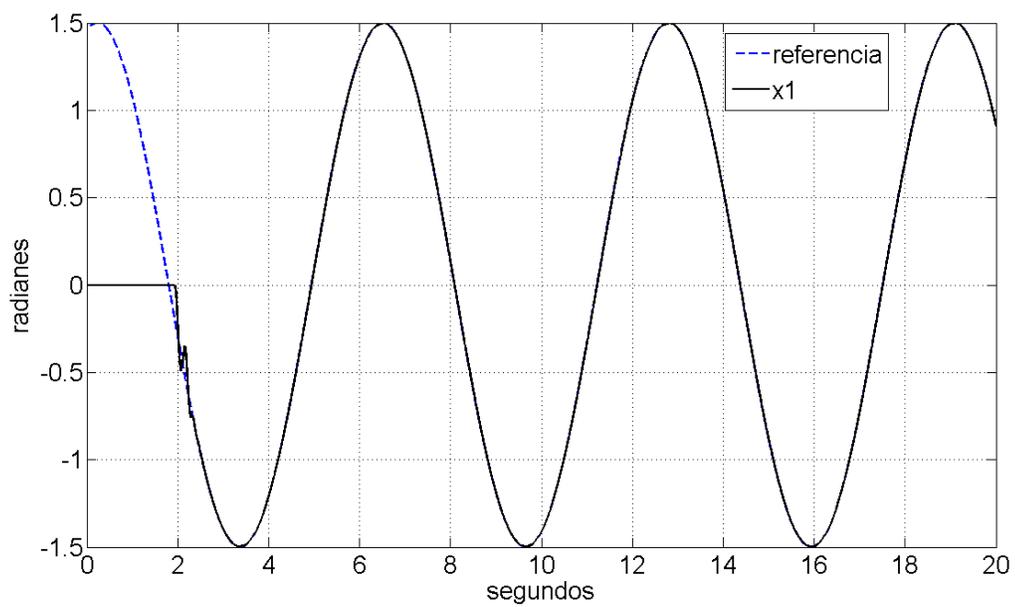


Figura 34: Posición del péndulo y referencia

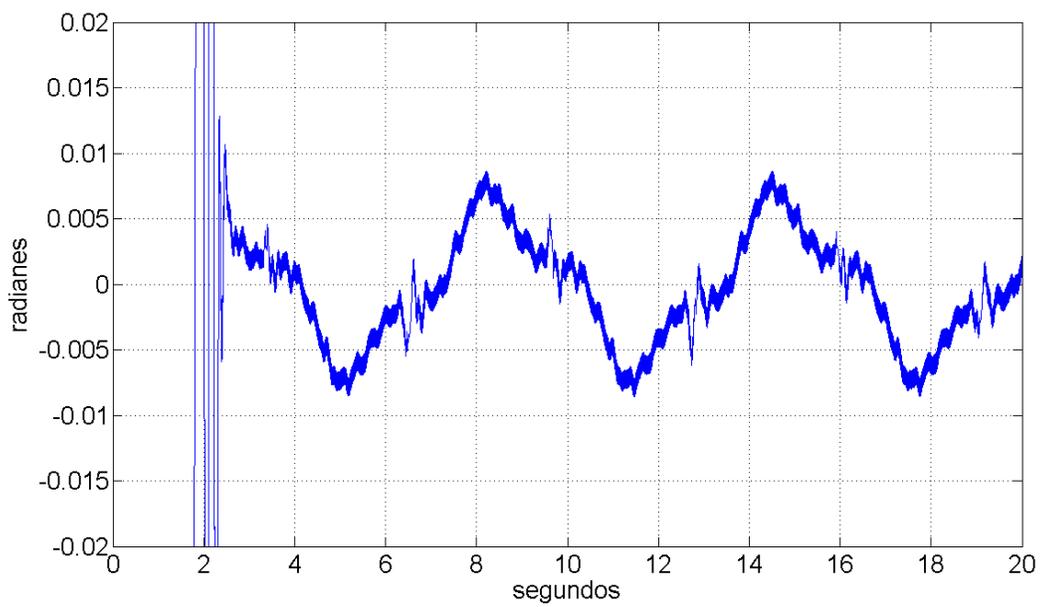


Figura 35: Error de seguimiento

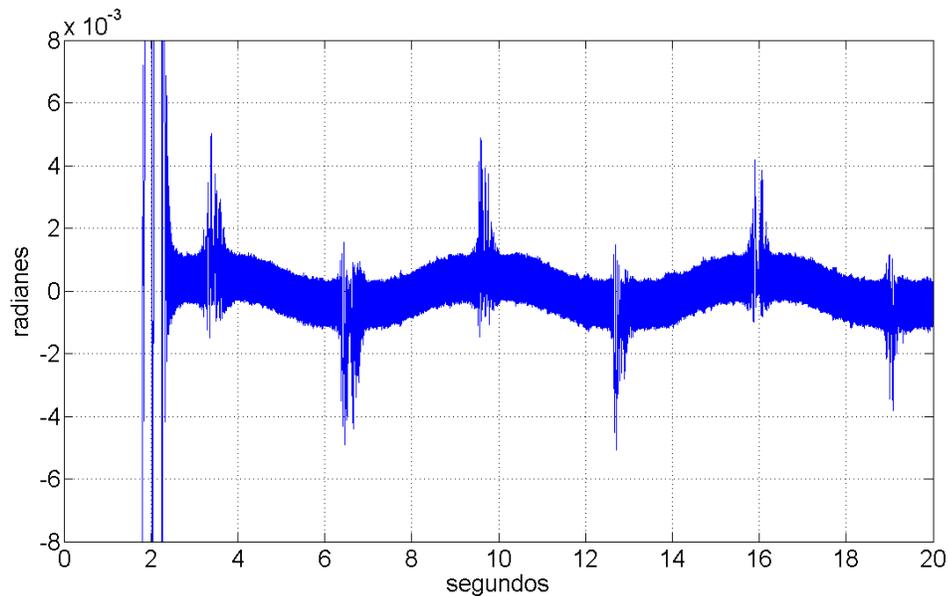


Figura 36: Error de observación

que está garantizado que el observador converge a un valor muy cercano al estado la planta.

Así como en el caso numérico, la velocidad estimada \hat{x}_2 tiene componentes de alta frecuencia, por lo que antes de utilizarse en el controlador se filtra con un filtro de primer orden pasabajas (Figura 37).

El término de perturbación contiene las dinámicas no modeladas como la fricción de Coulomb y parte del estado, i.e., $-ax_2 - b\text{sen}(x_1)$. La Figura 38 muestra la perturbación identificada.

En cuanto al control, no presenta el fenómeno del “chattering”, como se ve en la Figura 39 y físicamente el mecanismo no vibra ni se calienta. La amplitud de la señal de control es de un nivel bastante aceptable, equivalente a un 10% del rango permitido por el mecanismo (± 10 V), por lo que no existe riesgo de posibles daños producidos

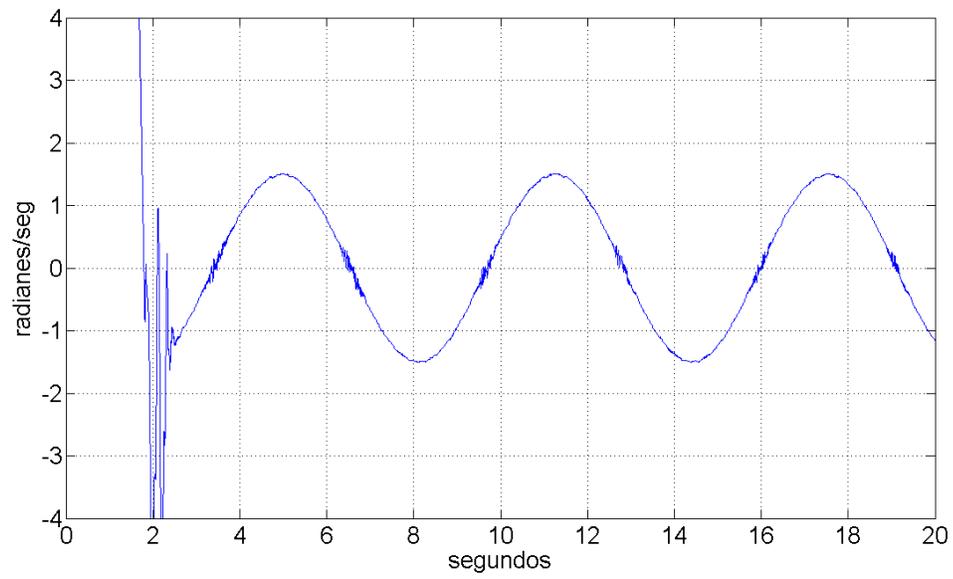
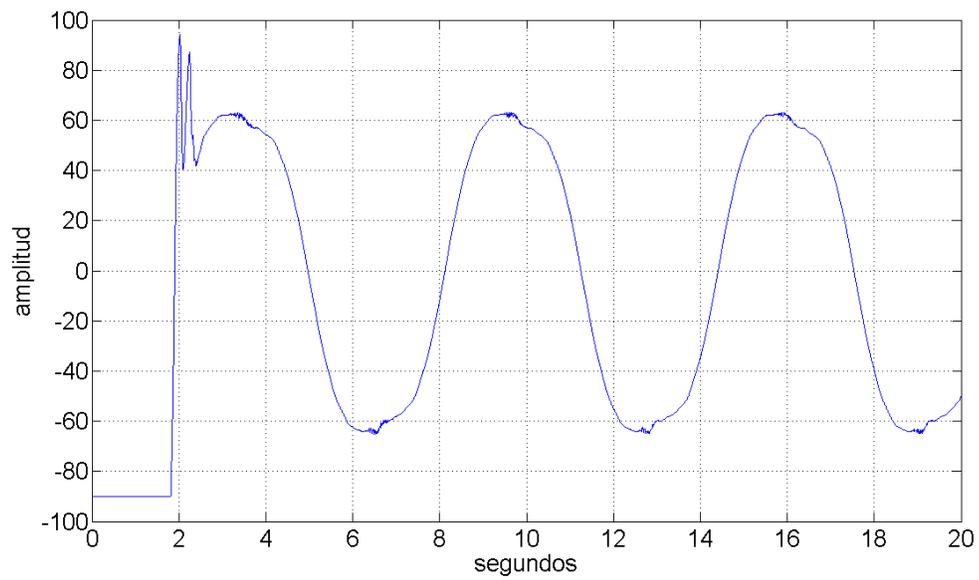
Figura 37: \hat{x}_2 filtrada

Figura 38: Perturbación identificada

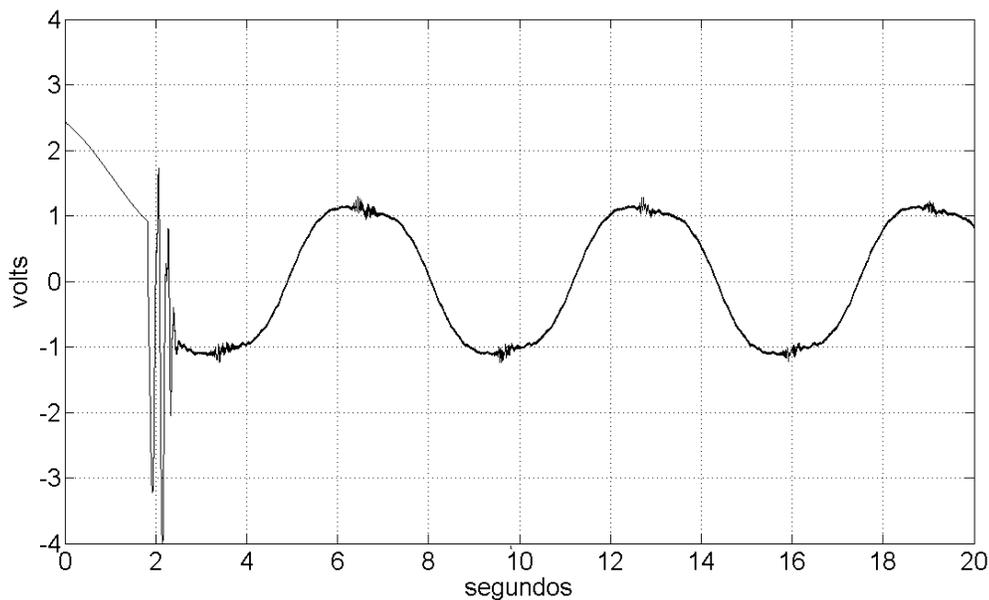


Figura 39: Señal de control para el péndulo

por el control.

III.6 Conclusiones

La ECIP puede verse como un CMI robusto; en ambos casos se retroalimenta el error, ya sea de observación (ECIP), o la diferencia entre planta y modelo (CMI). En el caso del CMI puede regular una referencia constante con error cero, pero para el seguimiento de una trayectoria tienen que incluirse otros elementos (en Zazueta, 2000 puede verse la modificación del CMI para seguir una rampa). En el caso de la ECIP, ésta puede emplearse para propósitos de regulación o seguimiento.

El análisis presentado de la ECIP muestra que es una estructura de control que proporciona robustez al sistema en lazo cerrado y que, a pesar de utilizar términos discontinuos, no se presenta el fenómeno del “chattering” en magnitudes que puedan

dañar al sistema. Además, se mostró que es posible simplificar los bloques que componen a esta estructura sin que se afecte la estabilidad del sistema en lazo cerrado, aunque el esfuerzo de control resulta mayor. Con esta simplificación, basta conocer el valor nominal de la matriz de inercia M del sistema a controlar, no se requiere información adicional. Debido a que se considera parte del estado como una perturbación, el valor que se requiere en la amplitud del término discontinuo es mayor, por lo que la velocidad estimada \hat{x}_2 se ve afectada por componentes de alta frecuencia, haciendo necesario filtrar esta señal antes de utilizarse en el controlador.

Con el observador simplificado que aquí se presentó ya no es posible identificar las perturbaciones o incertidumbres paramétricas por separado, ya que se considera ‘perturbación’ a ambos términos de la dinámica de la planta, $f(x)$ y $g(x_1)$. Sin embargo, para fines prácticos no es necesario saber con exactitud cada uno de los términos inciertos, sean estas perturbaciones o variaciones paramétricas, simplemente si se agrupan todos estos términos en uno solo (en este caso x_f), es suficiente con compensarlo en el controlador, ya que finalmente lo que se busca es lograr el objetivo de control. El cálculo de las ganancias del observador es un paso que requiere una atención especial, pues de estos parámetros depende que el observador converja al estado de la planta. Es importante mencionar que entre mayor sea la magnitud de la perturbación, mayor será el valor de la ganancia C_3 del término discontinuo.

La modificación en la ECIP aquí presentada sirve para implementarla con circuitos electrónicos, como se muestra en el siguiente capítulo.

Capítulo IV

Implementación de la ECIP con circuitos electrónicos

Generalmente los algoritmos de control son implementados con tecnología digital y aplicados a los sistemas mediante una interfaz. Además en aplicaciones industriales la idea es disminuir el costo computacional, ya que resolver ecuaciones diferenciales discontinuas puede complicar la ejecución del algoritmo en tiempo real. Para la ECIP, debido a la simplicidad de los modelos matemáticos de los componentes de esta estructura, la implementación física de la misma con tecnología analógica parece factible. Para esto se debe verificar que los resultados obtenidos con esta última tecnología sean muy similares a los esperados de acuerdo al diseño, de manera que el objetivo de control se mantenga y las tolerancias y niveles de las señales de error y de control estén dentro de los límites permitidos.

Se sabe que es posible simular la ecuación diferencial que describe a cierto sistema mediante circuitos analógicos, específicamente con amplificadores operacionales (Roberge, 1975). A esta manera de obtener las soluciones se le conoce como cálculo analógico. El objetivo en el cálculo analógico es construir una red eléctrica usando amplificadores operacionales y algunos componentes asociados (capacitores, resistencias), que resuelva la ecuación diferencial que describe a un sistema físico. Una de las ventajas

de implementar un sistema físico con amplificadores operacionales es que se puede tener acceso a todas las variables de estado, lo que ayuda a visualizar de mejor manera el comportamiento del sistema.

Sin embargo, la implementación con circuitos electrónicos de una ecuación diferencial puede volverse compleja si dicha ecuación tiene términos no lineales u otros términos con funciones trascendentales. La simplificación realizada en el modelo del observador obedece precisamente a esto.

Para realizar la implementación de la ECIP con circuitos electrónicos se requiere primeramente simplificar el observador. En segundo lugar, se requiere implementar el filtro de Butterworth, para lo cual se realiza un diseño clásico (Roberge, 1975; Hughes, 1986). Finalmente, se procede a la implementación del controlador, lo cual es bastante sencillo, ya que éste consiste de operaciones aritméticas simples (sumas, restas y multiplicaciones).

Dado que la simplificación del modelo del observador se presentó en el capítulo anterior se está ahora en posición de pasar al análisis y diseño de cada bloque de la ECIP con circuitos analógicos.

En este capítulo, aparte del diseño de cada bloque, se presenta como producto final el circuito de la ECIP, así como una aplicación a un robot industrial.

IV.1 Consideraciones de diseño

Cuando se implementa una ecuación diferencial con amplificadores operacionales (cálculo analógico) la precisión y exactitud de las soluciones obtenidas está limitada

por las características y tolerancias de los componentes. Debido a esto se deben elegir amplificadores operacionales que tengan las características que permitan obtener las soluciones deseadas. Para la implementación de la ECIP las características que se toman en cuenta para la selección de los amplificadores operacionales son las siguientes (Hughes, 1986):

- “Offset” en el voltaje de salida.

En el caso ideal el voltaje de salida del amplificador operacional debe ser cero cuando el voltaje en las terminales de entrada es cero. Sin embargo, esto no es así en el caso real, ya que debido a la alta ganancia del amplificador operacional, un ligero desequilibrio en el circuito puede causar un voltaje de salida. Se espera que este voltaje sea mínimo, incluso imperceptible. En la hoja de datos el fabricante especifica este voltaje de “offset”.

- Compensación en frecuencia.

Debido a la alta ganancia del amplificador operacional y al corrimiento de fase que se presenta dentro del circuito se llega a cierta frecuencia donde la señal de salida retroalimentada a la entrada es tal que se producen oscilaciones en la salida. Esto se puede prevenir de manera externa con capacitores de compensación; sin embargo, existen amplificadores operacionales que están compensados internamente, de tal manera que evitan las oscilaciones, disminuyendo la ganancia del amplificador operacional conforme aumenta la frecuencia. Por simplicidad, se sugiere utilizar los amplificadores operacionales que están compensados internamente.

- Velocidad de respuesta (“slew rate”).

Es la tasa máxima de cambio del voltaje de salida del amplificador operacional, se expresa como

$$\text{S.R.} = \frac{\text{cambio máximo en el voltaje de salida}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{\Delta V_{\text{out(max)}}}{\Delta t}.$$

Esta es una característica importante del amplificador operacional, ya que indica qué tan rápido responde. Además, la velocidad de respuesta está relacionada con el ancho de banda del amplificador, ya que los amplificadores operacionales que tienen una velocidad de respuesta grande tienen un ancho de banda muy amplio.

- Producto ganancia-ancho de banda (GBP).

Este producto es igual a la frecuencia que se tiene cuando la ganancia es unitaria.

Indica la máxima frecuencia útil del circuito y también permite determinar el ancho de banda para una ganancia determinada. El GBP tiene la fórmula

$$\text{GBP} = \text{ganancia} \times \text{ancho de banda} = \text{frecuencia a ganancia unitaria}.$$

Estas son algunas de las características que aquí se considera que fueron de utilidad en el diseño del circuito de la ECIP. El hecho de familiarizarse con las características y parámetros de los amplificadores operacionales ayuda a determinar qué amplificador operacional utilizar en cierta aplicación.

Por otra parte, es importante tener en cuenta que los niveles de voltaje de las señales que se manejan en el circuito deben estar dentro del rango de operación de

los amplificadores operacionales; esto con la finalidad de evitar errores por ruido (si las señales son de amplitud muy pequeña) o se provoque daño o saturación de los amplificadores operacionales (si las señales son de amplitud muy grande). Para tener las señales en niveles de amplitud convenientes se realiza un escalamiento en amplitud, lo cual se logra mediante un cambio de variable (Roberge, 1975).

En las siguientes secciones se muestran los diagramas y consideraciones realizadas para obtener el circuito de la ECIP.

IV.2 Diseño del observador

El modelo matemático del observador es el que se mostró en (76) y (77). Por los niveles de amplitud en las variables del observador es necesario escalar el modelo para evitar daños en los amplificadores operacionales. Para determinar el factor de escalamiento se realizaron simulaciones numéricas para estimar una cota sobre los estados observados \hat{x}_1 y \hat{x}_2 , tomando en cuenta que la posición en el caso de los mecanismos sobre los que se aplica esta estructura generalmente no pasa de 2π radianes y que se han acondicionado las señales de tal manera que $1 \text{ radián} = 1 \text{ volt}$. Así, se determinó que no es necesario escalar el estado observado \hat{x}_1 , solamente se escala el estado \hat{x}_2 en un factor de 15.

Haciendo el cambio de variable $\hat{x}_1 = \bar{x}_1$ y $\hat{x}_2 = 15\bar{x}_2$, el sistema dinámico del observador es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= 15\bar{x}_2 + C_1(x_1 - \bar{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{M^{-1}}{15}\tau + \frac{C_2}{15}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{C_3}{15}\text{sign}(x_1 - \bar{x}_1).\end{aligned}\tag{97}$$

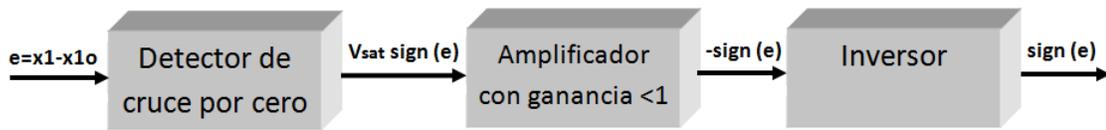


Figura 40: Diagrama de bloques para generar la función signo

Este modelo es el que se usa para construir el observador con circuitos. Como primera etapa se genera la función signo, para lo cual se utiliza un detector de cruce por cero. La salida de este detector depende de la entrada; si la entrada es positiva la salida es V_{sat+} y si es negativa entonces la salida es V_{sat-} . V_{sat} es el voltaje de saturación del amplificador operacional y cada vez que el voltaje de entrada cruza por cero la salida del detector cambia, así que se tiene una función signo de amplitud V_{sat} que tiene un valor típico de 13.5 volts. Mediante una configuración de inversor con ganancia menor a la unidad se logra una amplitud unitaria en la función signo y con otro inversor se pone en fase la entrada con la salida (Figura 40).

El amplificador operacional utilizado para generar la función signo debe de tener una velocidad de respuesta grande; es decir, debe ser rápido, ya que de esto depende el valor de la pendiente de la función signo. Si el amplificador operacional es lento se tendrá una pendiente pobre. Tomando esto en cuenta se seleccionó el operacional TL084¹, con lo que se logra una pendiente de 1800 V/seg.

Como segunda etapa se forma la señal de error $e = x_1 - \hat{x}_1$ mediante un circuito restador con ganancia unitaria.

Finalmente, se construye el observador con dos integradores y dos sumadores. El

¹Amplificador operacional de entrada JFET, fabricado por Texas Instruments

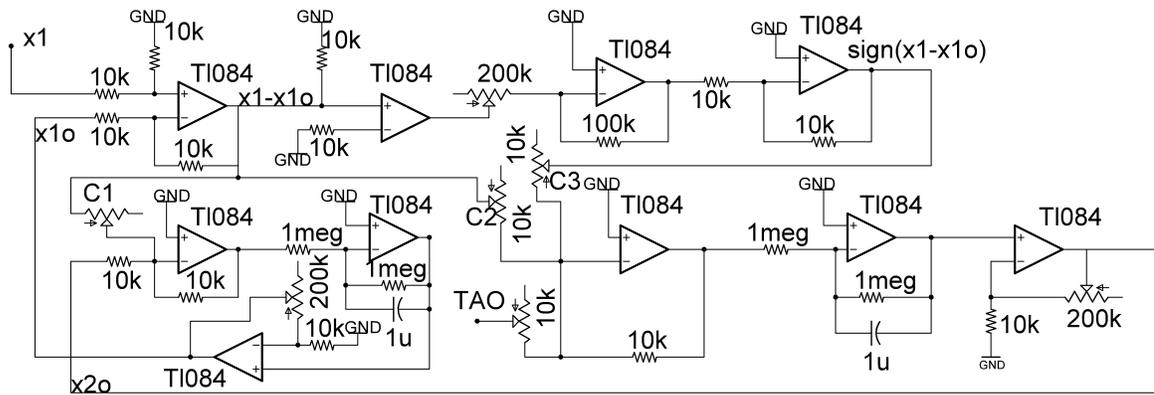


Figura 41: Diagrama electrónico del observador

observador en circuito se muestra en la Figura 41. Se han hecho los ajustes pertinentes para revertir el efecto del escalamiento, de tal manera que las salidas de este circuito son los estados observados \hat{x}_1 y \hat{x}_2 .

IV.3 Diseño del filtro

En el capítulo anterior se mostró lo referente a la teoría de los filtros de Butterworth. Para implementar este filtro con circuitos existen dos arquitecturas importantes que son la Sallen-Key y la Rauch; ambas tienen un rendimiento aceptable. Por simplicidad, se seleccionó la arquitectura que menos componentes (capacitores y resistencias) requiere, que es la Sallen-Key (Roberge, 1975). La función de transferencia expresada en términos de los componentes es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{w_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + w_c C_1 (R_1 + R_2) s + 1},$$

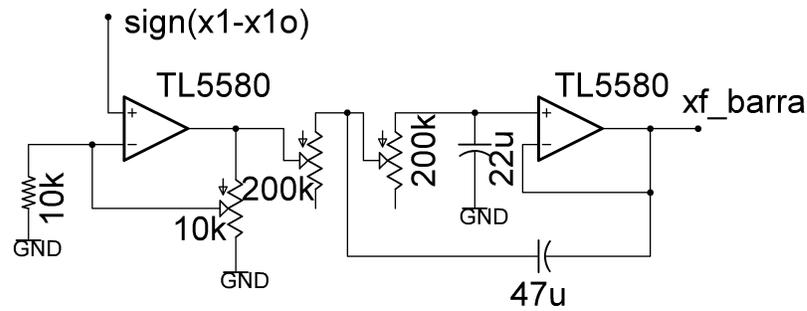


Figura 42: Filtro de Butterworth. Arquitectura Sallen-Key

y el diseño es como sigue:

$$a_1 = \omega_c C_1 (R_1 + R_2)$$

$$b_1 = \omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2$$

$$C_2 \geq C_1 \frac{4b_1}{a_1^2}$$

$$R_1 = \frac{a_1 C_2 - \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4b_1 C_1 C_2}}{4\pi f_c C_1 C_2}$$

$$R_2 = \frac{a_1 C_2 + \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4b_1 C_1 C_2}}{4\pi f_c C_1 C_2}$$

En la Figura 42 se muestra el diagrama del filtro de Butterworth. La primera etapa del circuito es un amplificador inversor para darle la amplitud a la función signo, que es $C_3/15$, de acuerdo con (97). La segunda etapa es el filtro, donde los capacitores son fijos; sólo las resistencias se ajustan en función de la frecuencia de corte. Idealmente el filtro tiene ganancia unitaria y la salida está en fase con la entrada; sin embargo, en el caso real la señal de salida está fuera de fase 21° .

La salida del filtro es una versión escalada del término de perturbación, por lo que

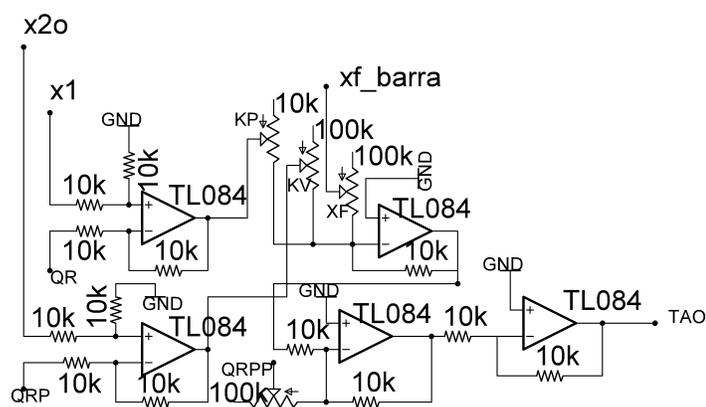


Figura 43: Diagrama electrónico del controlador

antes de utilizarse en el controlador se deben hacer los ajustes pertinentes.

Para el diseño del filtro se requiere un amplificador operacional que tenga una buena respuesta en frecuencia. Dado que la respuesta en frecuencia está directamente relacionada con el producto ganancia-ancho de banda (GBW), se espera que el amplificador operacional tenga un GBW grande. Por esto se seleccionó el TL5580², que es un amplificador operacional de precisión y bajo ruido, el cual tiene un GBW de 12 Mhz, además de que una de sus principales aplicaciones para la que fue diseñado es en filtros activos.

IV.4 Diseño del controlador

El controlador linealizante (85) que aquí se diseña no requiere ser escalado, basta con multiplicar cada término por la matriz M antes de realizar la suma de los términos que componen este controlador. Es importante mencionar que al circuito del controlador (Figura 43) llega la perturbación identificada (x_f) escalada, por lo que se requiere hacer el ajuste pertinente con el potenciómetro XF mostrado en la figura. Se necesitan

²Amplificador de precisión, fabricado por Texas Instruments

cinco amplificadores operacionales para realizar este controlador, dos en configuración restador, dos sumadores y un inversor. Se requiere un amplificador operacional que sea rápido, que tenga un voltaje de “offset” pequeño y de bajo consumo de potencia, requisitos que cumple el TL084, por lo que éste fue el amplificador operacional utilizado para el controlador.

IV.5 Filtro de la velocidad estimada \hat{x}_2

Para garantizar que el observador converja, el coeficiente C_3 (ver ecuación (76)) debe tener un valor grande. Esto causa que el estado observado \hat{x}_2 tenga un nivel de ruido considerable. Lo anterior se ve reflejado notoriamente en la señal de control.

Una manera de disminuir el efecto de la velocidad estimada \hat{x}_2 en el control es disminuir el valor de la ganancia K_v a un valor mínimo sin que se pierda el objetivo de control; más aún, sin perder la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Otra manera es utilizar un filtro para la velocidad estimada \hat{x}_2 de la forma:

$$\frac{1}{\Gamma} \dot{x}_{fil} = -x_{fil} + \hat{x}_2,$$

con $\Gamma = 0.05$. Con esto se disminuyen los componentes de alta frecuencia presentes en el estado observado \hat{x}_2 . Para la implementación del filtro en circuito se escala la ecuación en un factor de 10. Se usa el amplificador operacional OPA602³. La Figura 44 muestra el diagrama.

³Amplificador operacional de precisión de alta velocidad, fabricado por Texas Instruments

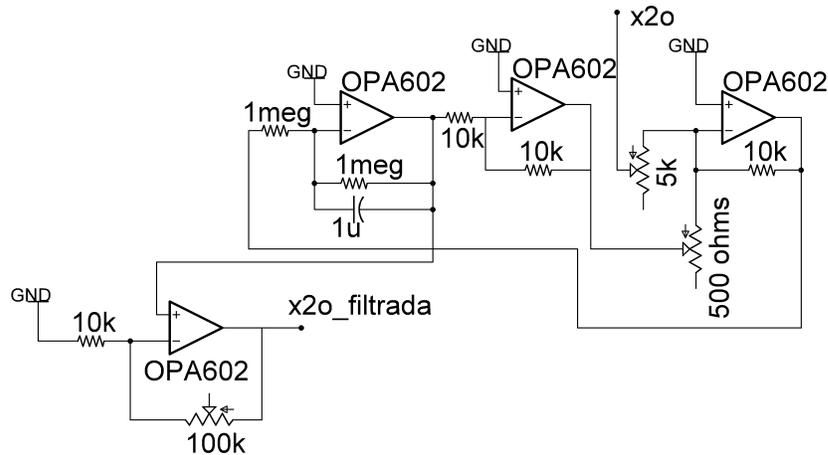


Figura 44: Filtro para la velocidad observada \hat{x}_2

IV.6 Análisis general del circuito de la ECIP

En esta sección se presenta el diagrama completo de la ECIP (Figura 45).

Se mencionó que el modelo del observador está escalado solamente en el estado observado \hat{x}_2 ; sin embargo, esto podría ser una limitante en el caso de aplicaciones que requieran que el estado \hat{x}_1 esté escalado o que el factor de escalamiento del modelo sea mayor. Por lo tanto, se han hecho los ajustes pertinentes para que sea posible escalar el modelo del observador en cualquier factor.

El primer paso en el uso del circuito es sintonizar el observador; es decir, asegurar la convergencia al estado de la planta, mediante la selección adecuada de C_1 , C_2 y C_3 . Esta sintonización se realiza en lazo abierto. Debido a esto se ha incluido un “jumper” selector, el cual tiene una entrada TAO_AUX que es una entrada externa para la prueba en lazo abierto y una entrada TAO para la entrada de control en lazo cerrado.

Para disminuir la presencia de componentes de alta frecuencia en el control existen dos opciones, que son disminuir el valor de la ganancia K_v o filtrar la velocidad estimada

\hat{x}_2 . Así que se incluye otro “jumper” para seleccionar entre la velocidad estimada \hat{x}_2 y su versión filtrada.

En el controlador se requiere tener disponible la velocidad de referencia \dot{q}_r y la aceleración \ddot{q}_r . Sin embargo, los amplificadores operacionales en configuración derivador no tienen un rendimiento óptimo; de hecho, es físicamente imposible tener un derivador puro. Por ello en vez de introducir q_r al circuito se introduce \ddot{q}_r y se integra dos veces, una para obtener \dot{q}_r y la otra para obtener q_r .

Se utilizan potenciómetros de precisión y capacitores cerámicos. El voltaje de alimentación es ± 15 volts.

IV.7 Aplicación a un robot industrial



Figura 46: Robot industrial

Se utilizó el circuito de la ECIP para controlar un robot industrial de 4 grados de libertad de la marca Sony, el cual se encuentra en el laboratorio de control de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), unidad Mexicali (Figura 46). Este robot fue donado a la Universidad y no se cuenta con un manual del mismo, ni con un modelo matemático. Se tiene acceso a la medición de la posición por medio de sensores de posición. Como etapa de control se utilizó la ECIP cuyo diagrama se ilustra en la Figura 45.

El diagrama de bloques de la conexión es el de la Figura 46. El circuito de la ECIP, por cada grado de libertad, requiere como señales de entrada la posición x_1 y la referencia, las cuales deben ser analógicas. Debido a que las salidas de los sensores de posición del robot son señales de pulsos en cuadratura se requiere hacer la conversión a un formato analógico. Esto se puede lograr mediante un contador y un convertidor D/A. Sin embargo, se debe verificar que el proceso de conversión no introduzca un nivel alto de ruido en las señales; de lo contrario, el circuito de la ECIP no es funcional o presenta un desempeño pobre.

El circuito electrónico de la ECIP requiere que la medición de la posición esté en forma analógica, sin embargo, en el robot únicamente dos eslabones cumplían con este requerimiento, por lo que se limitó el experimento a controlar sólo dos grados de libertad.

Se utilizó una ECIP por cada grado de libertad. Como primer paso se ‘sintonizó’ el observador; es decir, se encontraron valores para los coeficientes C_1 , C_2 y C_3 de tal manera que hubiera convergencia del observador. Anteriormente se hizo mención que

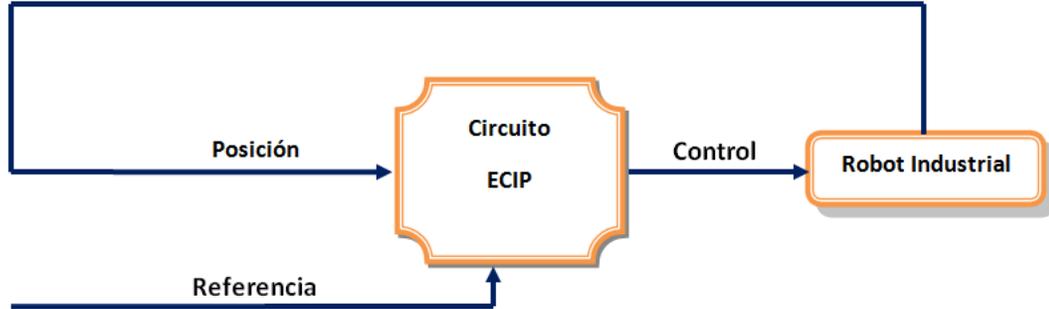


Figura 47: Diagrama a bloques de la arquitectura necesaria para controlar el robot se requiere conocer la matriz M para el diseño del observador, pero como en este caso se desconocía este valor, se consideró un valor “nominal” (el mismo valor que el usado en el experimento del péndulo simple presentado al final del Capítulo 3). Se diseñó entonces el observador con los valores siguientes:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 300 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 55.549 & 0 \\ 0 & 55.549 \end{bmatrix}.$$

Para el eslabón 1 se ajustan los potenciómetros de la etapa del observador de la siguiente manera: $C_1 = 400 \Omega$, $C_2 = 6 \text{ k}\Omega$, $C_3 = 500 \Omega$ y $M^{-1} = 2.7 \text{ k}\Omega$. Los mismos valores se utilizan en el observador del eslabón 2.

Se aplicó una entrada de $0.5\text{sen}(t)$ al sistema en lazo abierto, a cada unión. La Figura 48 muestra la posición del robot y la posición observada por el circuito; en la Figura 49 se muestra la estimación de la velocidad y su versión filtrada. Por la respuesta que se obtiene en lazo abierto puede verse que los términos de fricción son de magnitud considerable.

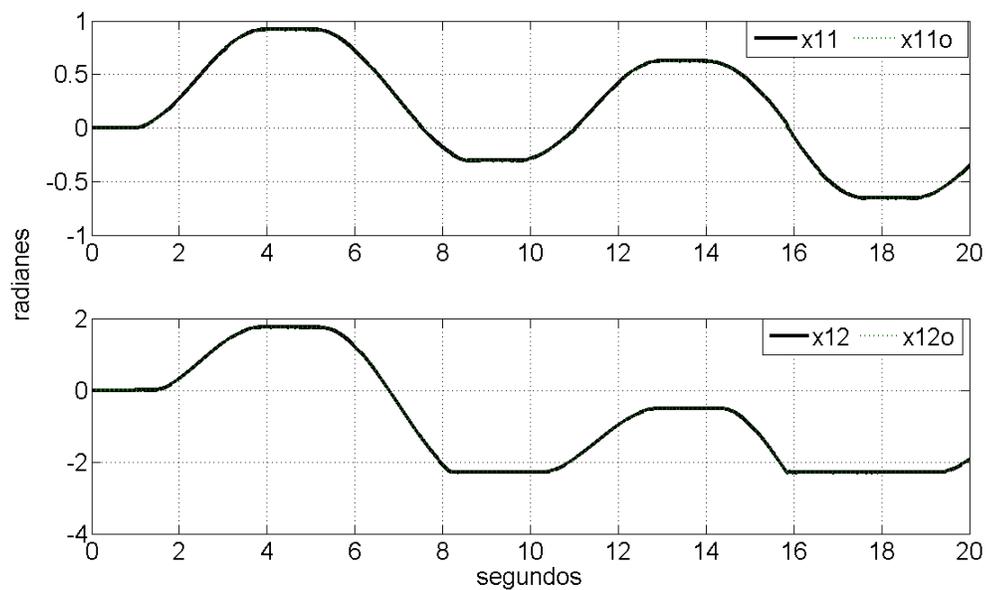


Figura 48: Posición y posición observada: articulación 1 (arriba); articulación 2 (abajo)

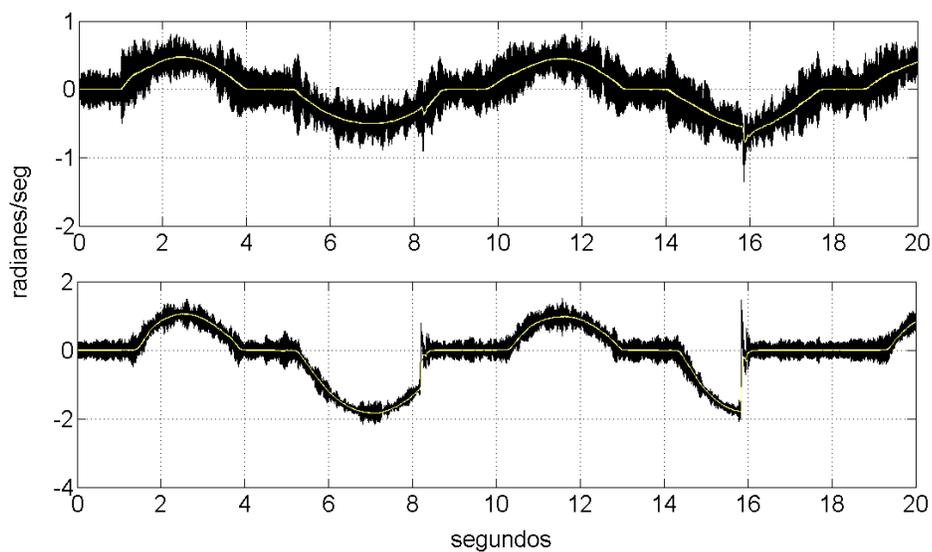


Figura 49: Velocidad observada y su versión filtrada: articulación 1 (arriba); articulación 2 (abajo)

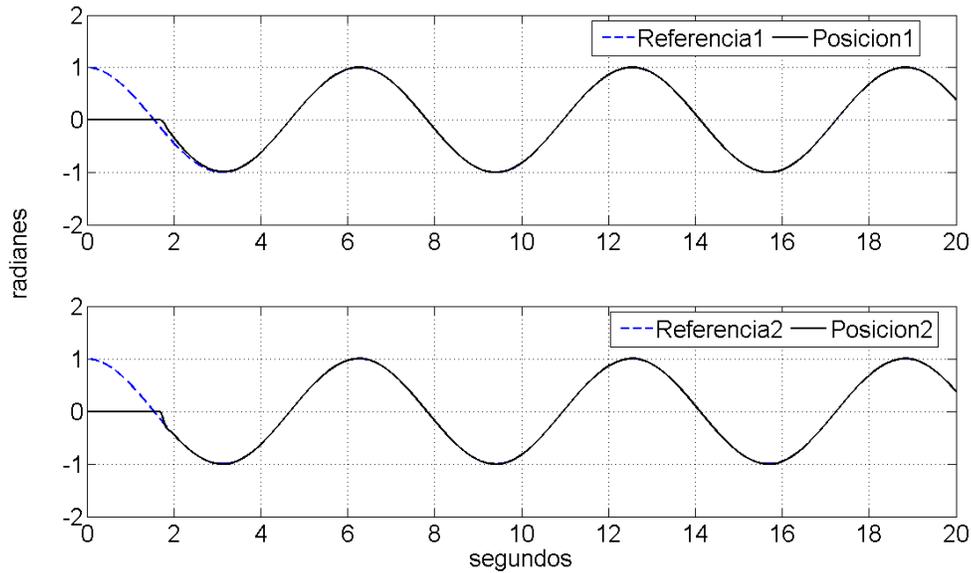


Figura 50: Seguimiento de $q_{r1,2} = \sin(t)$

Para el sistema en lazo cerrado se tomaron las siguientes consideraciones. Se seleccionó una frecuencia de corte de 75 rad/seg en el filtro de Butterworth. En el controlador se consideraron las matrices

$$K_p = \begin{bmatrix} 668.226 & 0 \\ 0 & 391.742 \end{bmatrix}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 379.758 & 0 \\ 0 & 49.511 \end{bmatrix},$$

y se consideró que el objetivo de control es el seguimiento de una referencia senoidal $q_{r1} = q_{r2} = \sin(t)$. El ajuste del controlador en el circuito se logra con $K_p = 831.24 \Omega$, $K_v = 1462 \Omega$ para la articulación 1 y $K_p = 1418 \Omega$, $K_v = 11.219 \text{ k}\Omega$ para la articulación 2.

En la Figura 50 se aprecia que el seguimiento es casi inmediato. De hecho, el error de seguimiento no es mayor a 0.5% en el caso de la articulación 1 y a 1% en el caso de la articulación 2. Debido a que se consideró un factor de ajuste tal que 1 volt = 1 radián,

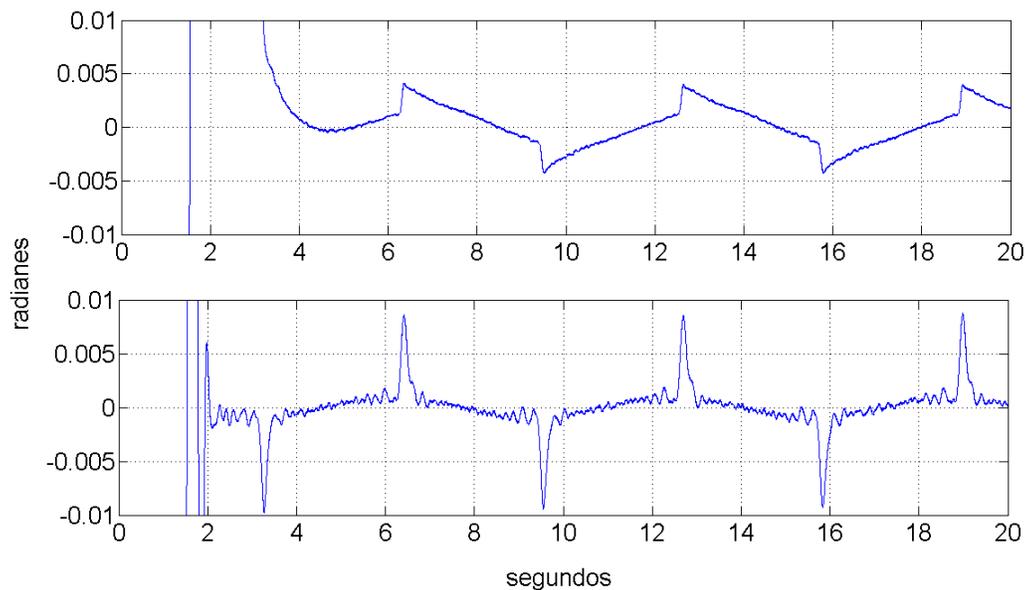


Figura 51: Errores de seguimiento

entonces el error de seguimiento equivale a una desviación angular de 0.005 radianes (0.28°) en el caso de la articulación 1 y de 0.01 radianes (0.57°) en la articulación 2 (Figura 51). El término de perturbación identificado corresponde a $f(x), g(x_1)$ y la diferencia entre M real y M propuesta, así como términos de fricción de Coulomb y viscosa.

Las dos perturbaciones identificadas (fig 52) prácticamente compensan el modelo completo.

Por último, se muestran las señales de control (Figura 53) las cuales, aunque tienen componentes de alta frecuencia, no son de magnitud tal que afecten al mecanismo. Este control no produce vibración ni calentamiento en el robot y se mantiene en niveles que están dentro del rango de operación de los amplificadores operacionales por lo que el circuito de la ECIP no trabaja ‘forzado’, es decir no opera al límite de sus capacidades,

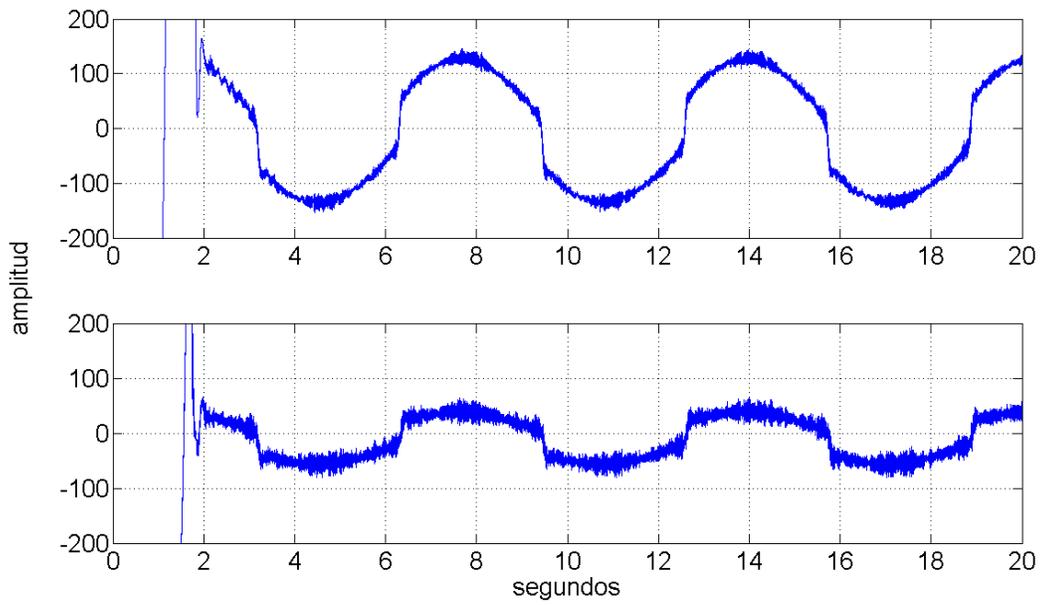


Figura 52: Perturbaciones identificadas en el robot.

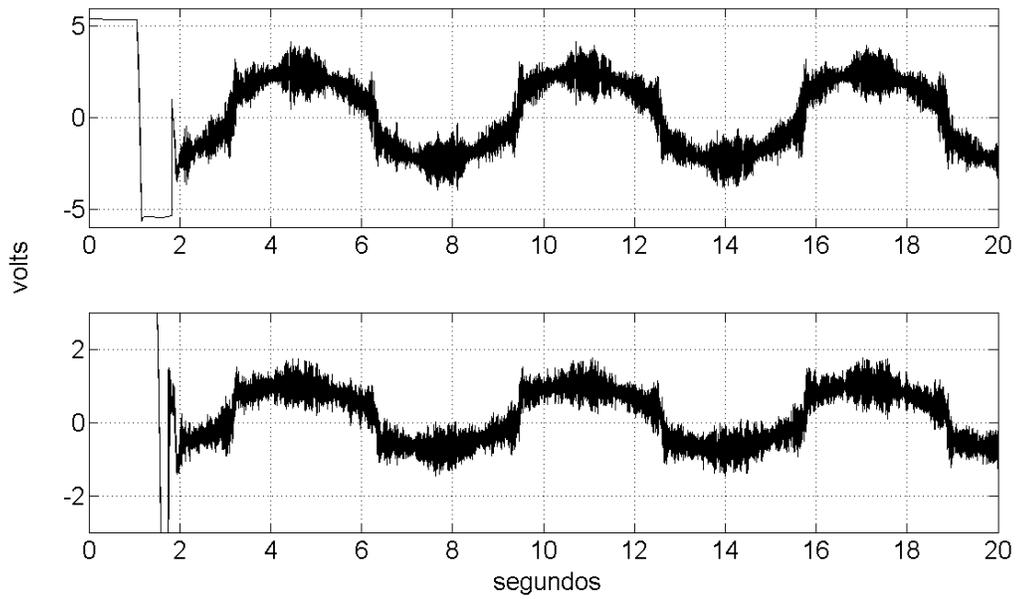


Figura 53: Señales de control para el robot

así que los amplificadores operacionales no se calientan al grado que puedan dañarse. El consumo de corriente del circuito completo es de 125 mA.

IV.8 Conclusiones

Debido a las características de los bloques que componen la ECIP es posible implementarla con amplificadores operacionales (23 en total) conectados en configuraciones básicas (inversor, no inversor, integrador, sumador, restador, comparador). Sin embargo, se debe poner especial atención en la selección de los amplificadores operacionales, ya que de esto depende el rendimiento del circuito. Se seleccionaron amplificadores operacionales con una tasa de cambio alta, debido a que se requiere que el circuito tenga una respuesta rápida

Se debe verificar que las señales no estén en el límite de operación del circuito (típicamente 13 volts), o que sean muy pequeñas de modo que se tengan problemas de ruido. Esto se previene utilizando el factor de escalamiento adecuado. Es posible entonces sustituir la ECIP programada en una computadora personal por el circuito presentado y obtener resultados satisfactorios. Se requiere además que la posición x_1 esté en forma analógica.

El ejemplo de aplicación al robot industrial es interesante, ya que el modelo matemático de dicho robot es desconocido, y el requerimiento de la ECIP es conocer al menos el valor de la matriz M . Sin embargo, como lo muestran los resultados obtenidos, se logró que siguiera una trayectoria con un error máximo del 1% con un valor “nominal” de la matriz de inercia M que se seleccionó de manera heurística, con una señal de control

tal que no se presentan vibraciones ni calentamiento en el robot. Además, se puede concluir de manera convincente que el circuito, una fuente de alimentación bipolar y un generador de ondas (que puede también implementarse con un circuito sencillo) son suficientes para controlar un robot industrial, al menos con características similares al aquí presentado. Este circuito se aplicó también en otros mecanismos, como el péndulo simple y en circuitos electrónicos como el péndulo y el circuito de Duffing, logrando resultados satisfactorios.

Conclusiones generales

En esta memoria de tesis se ha mostrado el análisis de la estructura de control con identificación de perturbaciones (ECIP) para sistemas lagrangianos de n grados de libertad que está diseñada para propósitos de regulación y seguimiento. En general, se considera que existen perturbaciones en el sistema y que no se tiene acceso a todo el vector de estado. En cuanto a las perturbaciones es importante recordar que el término de perturbación presente en el sistema debe ser acotado, y aunque no es necesario saber su valor exacto sí se debe tener un estimado del valor de la cota máxima de la perturbación debido a que este valor es un parámetro de diseño al momento de seleccionar el valor de los coeficientes del observador.

Es posible considerar que esta estructura es una modificación del control CMI, donde se ha sustituido el bloque del modelo por un observador discontinuo y en lugar de filtrar el error se filtra el signo de éste. Con estas modificaciones la robustez ante perturbaciones del sistema bajo control aumenta y, además, se pueden realizar tareas de regulación y seguimiento.

Con los controladores basados en modos deslizantes se le da robustez al sistema ante perturbaciones y variaciones paramétricas; sin embargo, se presenta el fenómeno del “chattering” descrito en la Sección 1.3. Utilizando la ECIP considerada en este documento el término discontinuo no aparece en el controlador sino que aparece en el observador. Este término discontinuo no se retroalimenta directamente a la planta

bajo control, sino que se filtra (para obtener el control equivalente u_{eq}) y después se retroalimenta, disminuyendo así la presencia de componentes de alta frecuencia. Por esta razón, el efecto del “chattering” en la señal de control es mínimo y, sin embargo, el sistema en lazo cerrado es robusto frente a los términos inciertos. No se puede decir que el efecto del “chattering” se elimina de manera total porque el término de velocidad observada \hat{x}_2 que se utiliza en el controlador contiene términos de alta frecuencia, que son la herencia del término discontinuo presente en $\dot{\hat{x}}_2$.

El elemento principal de la ECIP es el observador discontinuo. Las razones de utilizar un observador de este tipo son las descritas en el Capítulo 2, donde se mencionó que se tiene una observación robusta del estado y además, haciendo uso del concepto del control equivalente, se utiliza el término discontinuo para filtrarlo y obtener las perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Se mostró que este observador converge de manera exponencial al estado de la planta aún en presencia de perturbaciones, de tal manera que es posible considerar que los términos de perturbación son absorbidos en alguna forma por el término discontinuo del observador.

En el diseño del observador generalmente basta con que los coeficientes C_1 y C_2 sean definidos positivos. Utilizando el criterio de selección dado por la condición (36) se obtiene el valor del coeficiente C_3 . Sin embargo, debido a que la condición mencionada es suficiente más no necesaria, pueden existir valores menores del coeficiente C_3 que garanticen que el origen del sistema de error sea un punto de equilibrio exponencialmente estable.

Se simplificó el modelo del observador, con la finalidad de alcanzar uno de los objetivos de este trabajo, que es la implementación con circuitos electrónicos. Se mostró que no se pierden las propiedades de estabilidad en lazo cerrado utilizando la versión simplificada del observador. Otra modificación que se realizó fue cambiar el filtro de primer orden por un filtro de Butterworth de segundo orden con la finalidad de obtener un filtrado más fino y con esto lograr que el término de perturbación identificado esté más aproximado al término de perturbación real. Con las simplificaciones propuestas ya no se requiere conocer el modelo exacto, sólo se requiere el valor de la matriz M , incluso este valor puede ser un valor nominal. Esto tiene un costo que es el hecho de que el esfuerzo de control es mayor y el valor del coeficiente C_3 se incrementa notoriamente, lo que se debe a que la magnitud de la perturbación es mayor. Sin embargo, los resultados obtenidos son satisfactorios.

Se presentaron ejemplos numéricos y experimentales para mostrar el desempeño de la ECIP, implementada con tecnología digital y con tecnología analógica. Los resultados obtenidos con ambas tecnologías son muy similares, de hecho los valores de los parámetros utilizados en simulaciones numéricas fueron los mismos que se consideraron en el circuito, por lo que se puede garantizar que el circuito presentado tiene un desempeño aceptable.

La aportación principal de este trabajo de tesis es la validación experimental de la ECIP presentada en Rosas (2005). Otra aportación es la implementación de la ECIP con circuitos electrónicos, lo cual requirió la simplificación de algunos bloques.

Trabajo Futuro

Debido a que la ECIP requiere de conocer al menos el valor de la matriz de inercia M , sería interesante encontrar formalmente el valor de esta matriz, o al menos determinar un criterio de selección en el caso en que no se cuente con ella, como en el ejemplo del robot presentado.

Por otra parte en (Rosas, 2005) se muestra la aplicación de la ECIP en la sincronización de sistemas, por lo que otra posible actividad sería ver que tan factible es utilizar el circuito en aplicaciones de sincronización.

Resulta interesante también analizar la posibilidad de utilizar el observador en sistemas mecánicos subactuados de dos grados de libertad y comparar su desempeño con otros observadores citados en la literatura, o con los llamados derivadores robustos (Levant et al. 2000).

La ECIP es aplicable a una clase de sistemas de segundo orden; sin embargo, se analizó que está muy relacionada con la estructura del CMI, la cual puede aplicarse a sistemas de orden n , por lo que sería de interés determinar si es posible extender la aplicación de la ECIP a sistemas de orden mayor, con una estructura más general que la de los sistemas lagrangianos.

Por otra parte, en la mayoría de los mecanismos la medición de la posición está disponible en forma de pulsos en cuadratura y el circuito de la ECIP requiere que esta medición esté en forma analógica. Así que sería factible diseñar un circuito que permita realizar la conversión de un formato de pulsos en cuadratura a un formato analógico.

Literatura citada

Álvarez, J. y Zazueta S. 1998. An internal-model controller for a class of single input-single output nonlinear systems; stability and robustness. *Dynamics and Control*. 8:123-144 p.

Dávila, J., Fridman, L. y Poznyak, A. 2006. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*. 79(10):1251-1262 p.

Edwards, Christopher y Spurgeon Sarah. 1998. *Sliding mode control: theory and applications*. Taylor & Francis. Primera edición. London. 237 p.

Fridman, L. y Levant, A. 2002. Higher-order sliding modes. En: *Sliding Mode Control in Engineering*. Barbot, J.P. y Perruquetti, W. Marcel Decker, Inc. New York. 53-101 p.

Holmes, P. y Ball, R. 1992. Dynamical systems, stability and chaos. Chaotic evolution of the solar system. *Science*, 257:56-62 p.

Hughes, F. 1986. *Op-Amp handbook*. Prentice-Hall. New Jersey. 308 p.

Isozimov, B. y Utkin, V. 1981. On equivalence of systems with large coefficients and systems with discontinuous control. *Automatic and Remot Control*. 11:189-191 p.

Jian-Xin, X., Ya-Jun P. y Tong-Heng L. 2004. Sliding mode control with closed-loop filtering architecture for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 51(4):168-173 p.

Juloski, A., Heemels, M y Weiland, S. 2002. Observer Design for a class of piece-wise affine systems. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas. 2606-2611 p.

Kelly, R. y Santibáñez V. 2003. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Education. Madrid. 323 p.

Khalil, H. 2002. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. Tercera edición. New Jersey. 750 p.

Levine, W. 1996. *The Control handbook*. CRC Press. Florida. 1548 p.

Lewis, Frank. 1992. *Applied optimal control and estimation*. Prentice Hall PTR.

Primera edición. New Jersey. 656 p.

Roberge, J. 1975. Operational amplifiers: theory and practice. John Wiley. New York. 659 p.

Rosas Almeida, D. 2005. Sincronización robusta de sistemas lagrangianos utilizando controladores discontinuos. Tesis de doctorado. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México:[s.n.]. 154 p.

Rosas, D., Álvarez, J. y Fridman, L. 2006. Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 17:842-861 p.

Slotine, J. Jean y Weiping, Li. 1990. Applied nonlinear control. Prentice Hall. Primera edición. New Jersey. 459 p.

Stanley, D. 1975. Digital Signal Processing. Reston Pub. Co. 323 p.

Utkin, V. 1992. Sliding modes in control and optimization. Springer-Verlag. Berlin. 286 p.

Utkin, V., Jürgen, G. y Jingxin, S. 1999. Sliding mode control in electromechanical systems. Taylor & Francis. London. 326 p.

Zazueta Rubio, Salvador. 2000. Estabilidad, robustez y rediseño de una estructura de control con modelo interno para sistemas no lineales. Tesis de doctorado. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México:[s.n.]. 188 p.