

TESIS DEFENDIDA POR

Daniel Hernández Arango

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité

Dr. Iouri Orlov Kuchina

Miembro del Comité

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Miembro del Comité

Dr. David Isaías Rosas Almeida

Miembro del Comité

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Miembro del Comité

Dr. Arturo Velázquez Ventura

*Coordinador del Programa de Posgrado
en Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. Edgar Gerardo Pavía López

Director de Estudios de Posgrado

17 de Agosto de 2007

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

Sincronización Robusta de Redes de Sistemas Dinámicos

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

DANIEL HERNÁNDEZ ARANGO

Ensenada, Baja California, México, Agosto del 2007.

RESUMEN de la tesis de **Daniel Hernández Arango**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2007.

SINCRONIZACIÓN ROBUSTA DE REDES DE SISTEMAS DINÁMICOS

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de Tesis

La sincronización controlada se ha vuelto un tópico importante en los últimos años debido a su aplicación en teleoperación, procesos de manufactura, sistemas trabajando en esquemas coordinados, tareas de ensamble, etc. Sin embargo, existen problemas no resueltos como el acceso limitado al estado, la presencia de incertidumbres en los parámetros, desconocimiento del modelo exacto del sistema y el efecto de perturbaciones externas. En consecuencia han surgido leyes de control que buscan resolver algunos de estos problemas pero que difícilmente cubren a todos ellos.

En este trabajo se analiza el desempeño de una estructura de control con identificación de perturbaciones aplicada a la sincronización de redes de sistemas de naturaleza diferente. Este algoritmo de control requiere únicamente acceso al vector de posiciones generalizadas, además soporta la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

Lo anterior es posible gracias a un observador robusto que introduce un elemento discontinuo en el sistema del error de sincronización. Esta discontinuidad permite identificar, mediante un filtro pasabajas, un término que agrupa tanto las incertidumbres como las perturbaciones, el cual es utilizado para construir la señal de acoplamiento.

Ya que la discontinuidad se presenta en el observador y no en el control, se evita la aparición del “*chattering*”, que es común en sistemas de control discontinuo que generan modos deslizantes.

También se presenta un esquema de interconexión entre nodos a través de la cual es posible lograr la sincronización de los sistemas de la red, incluso ante la pérdida de conexiones entre dichos nodos.

El análisis es respaldado por simulaciones numéricas y resultados experimentales obtenidos en el laboratorio. Para los experimentos se tomaron sistemas de naturaleza virtual, electrónica y mecánica bajo diferentes configuraciones de conexión.

Palabras clave: Sincronización. Redes. Control discontinuo. Observadores discontinuos.

ABSTRACT of the thesis presented by **Daniel Hernandez Arango**, as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS with specialization in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California, Mexico. August 2007.

ROBUST SYNCHRONIZATION IN NETWORKS OF DYNAMICAL SYSTEMS

In the last years the controlled synchronization has become an important topic thanks to its application to teleoperation, manufacturing processes, assembly tasks, and others. Nevertheless, there are some problems not solved yet, like the restricted access to the state, the presence of parametric uncertainties, unknowledge of the exact dynamical model, and the effect of external perturbations. In consequence, some control laws have been designed to solve some of these issues.

In this document we analyze a control structure that identifies some kind of disturbances applied to the synchronized systems in networks composed by different systems. This control algorithm requires only access to the generalized position vector; moreover, it is robust against external disturbances and parametric uncertainties.

The last characteristic is possible thanks to a robust observer that introduces a discontinuous element in the equations of the synchronization error. The discontinuity allows to identify, through a lowpass filter, a term that groups the disturbances and uncertainties. This term is used to generate the coupling signal.

The discontinuity is present in the observer, not in the controller, so it's possible to avoid the chattering phenomenon, common in discontinuous systems that generates the sliding modes.

Also a node interconnection scheme, which allows to achieve synchronization even when some connections between nodes are lost, is presented.

The analysis is supported by numerical simulations and experimental results obtained in the laboratory. For the experiments, virtual, electronic and mechanical systems were considered, connected in different array configurations.

Keywords: Synchronization. Networks. Discontinuous control. Discontinuous observers.

Para mis papas Humberto y Herlinda a quienes amo profundamente y que me lo han dado todo. Son el pilar que me sostiene y permite seguir adelante.

Para mis hermanos Dulce e Iván por el cariño y el ánimo que siempre me brindan.

Agradecimientos

Al Dr. Joaquín Álvarez Gallegos, a quien respeto enormemente por su gran capacidad y conocimiento además de ser una persona admirable, por darme la oportunidad de trabajar con él, por su guía, apoyo y enseñanzas durante la elaboración de este trabajo y en toda mi estancia en CICESE.

A todos los miembros del comité, Dr. Iouri Orlov, Dr. Alejandro Márquez, Dr. David Rosas y al Dr. Carlos Brizuela por sus valiosos comentarios, confianza y disposición.

Al Dr. David I. Rosas Almeida por su apoyo y las facilidades ofrecidas para realizar parte de los experimentos presentados en este trabajo en el laboratorio de electrónica y computación de la UABC unidad Mexicali.

A todos mis profesores de la maestría a quienes les debo el crecimiento profesional que he experimentado estos dos años y que han ampliado mi visión, criterio y capacidad de análisis.

A mis compañeros de generación a quienes estimo por permitirme compartir esta experiencia y llevarme parte de ellos, en especial al tuzo, Jonatán Peña gran compañero durante las materias, colaborador cercano en el desarrollo de la tesis pero sobre todo un buen amigo.

A mis amigos en Torreón que de una u otra manera siempre me dieron ánimos para seguir adelante.

A Danny y Víctor, mis mejores amigos, quienes me hacen sentir seguridad y valor en momentos difíciles.

Al CONACYT por el apoyo para realizar mis estudios de posgrado.

Contenido

Introducción	1
I Preliminares matemáticos	5
I.1 Definiciones generales	5
I.2 Sistemas dinámicos	7
I.2.1 Sistemas lagrangianos	8
I.2.2 Sistemas de estructura variable	9
I.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov	10
I.4 Estabilidad de sistemas perturbados	12
I.4.1 Perturbaciones desvanecentes	12
I.4.2 Perturbaciones no desvanecentes	13
I.5 Estabilidad de sistemas de estructura variable	14
I.6 Modos deslizantes	15
I.6.1 Método del control equivalente	17
I.6.2 “Chattering”	18
I.6.3 Modos deslizantes de orden superior	20
I.7 Análisis del capítulo	21
II Sincronización	22
II.1 Conceptos sobre sincronización	22
II.2 Sincronización de arreglos	28
II.2.1 Autosincronización de arreglos	28
II.2.2 Sincronización controlada de arreglos	33
II.3 Análisis del capítulo	37
III Estructura de control con identificación de perturbaciones	39
III.1 Observador robusto	41
III.1.1 Estabilidad de un SEV en la forma estándar	42
III.2 Identificación de perturbaciones	48
III.3 Diseño de la señal de acoplamiento	50
III.4 Aplicación a nGDL	51
III.5 Resultados numéricos	52
III.6 Análisis del capítulo	55

Contenido (continuación)

ii

IV Sincronización de redes de sistemas	57
IV.1 Configuración del arreglo	59
IV.1.1 Otras configuraciones	63
IV.2 Extensión a nGDL	63
IV.3 Resultados numéricos	64
IV.4 Análisis del capítulo	77
V Resultados experimentales	79
V.1 Arreglo péndulo mecánico / 3 circuitos- péndulo	81
V.2 Arreglo oscilador de Duffing / 3 circuitos- péndulo	89
V.3 Arreglo péndulo virtual / péndulo mecánico, circuito-péndulo, oscilador de Duffing	96
V.4 Arreglo péndulo virtual / 2 circuitos-péndulo	103
V.5 Arreglo oscilador de Duffing / circuito- péndulo	106
V.6 Arreglo circuito-péndulo / 2 mecanismos MRA	107
V.7 Arreglo oscilador de Duffing / 2 mecanismos MRA	110
V.8 Arreglo oscilador de Duffing / MRA, péndulo mecánico	113
V.9 Análisis del capítulo	116
VI Conclusiones generales	118
VI.1 Trabajo futuro	121
Literatura citada	123
A Implementación en DSpace	125
B Circuitos electrónicos	130

Lista de Figuras

1	Soluciones ϕ_t en X	8
2	Superficie de deslizamiento $s = \dot{x} + cx$ en un sistema de segundo orden . . .	16
3	Sistema en lazo cerrado sin considerar la dinámica del actuador	18
4	Comportamiento del sistema mostrado en la Figura 3. El deslizamiento es ideal pues el control conmuta a frecuencia infinita	19
5	Sistema en lazo cerrado considerando un actuador con ancho de banda limitado	19
6	Comportamiento del sistema mostrado en la Figura 5. Se presenta <i>chattering</i> pues el actuador filtra la frecuencia proveniente del control discontinuo	20
7	Conjunto de deslizamiento de segundo orden $s = \dot{s} = 0$	21
8	Estructura de Control con Identificación de Perturbaciones	40
9	Posiciones no sincronizadas de los péndulos.	53
10	Error de posición correspondiente a la Figura 9.	53
11	Sincronización en posición de los péndulos.	54
12	Error de posición correspondiente a la Figura 11.	54
13	Señal de acoplamiento aplicada para sincronizar los péndulos.	55
14	Conexión de la red en estrella	59
15	Conexión de la red en cadena completa	60
16	Posición del primer eslabón en cada sistema (2GDL) con la red conectada como cadena completa.	67
17	Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.	68
18	Errores de sincronización entre nodos correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.	68
19	Señales de acoplamiento aplicadas al primer eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena completa.	69
20	Posiciones del segundo eslabón de cada sistema (2GDL) correspondientes a la red conectada en cadena completa.	69

Lista de Figuras (continuación)

iv

21	Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.	70
22	Errores de sincronización entre nodos correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.	70
23	Señales de acoplamiento aplicadas al segundo eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena completa.	71
24	Conexión de la red en cadena abierta	72
25	Posición del primer eslabón en cada sistema (2GDL) de la red conectada como cadena abierta.	73
26	Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.	73
27	Errores de sincronización entre nodos correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.	74
28	Señales de acoplamiento aplicadas al primer eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena abierta.	74
29	Posición del segundo eslabón en cada sistema (2GDL) de la red conectada como cadena abierta.	75
30	Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.	75
31	Errores de sincronización entre nodos correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.	76
32	Señales de acoplamiento aplicadas al segundo eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena abierta.	76
33	Conexión en cadena abierta	77
34	Pendubot.	80
35	Mecanismo masa-resorte-amortiguador.	81
36	Posiciones no sincronizadas del péndulo mecánico y los circuitos-péndulo.	81
37	Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico sin la presencia de una señal de acoplamiento.	82
38	Errores de sincronización entre circuitos-péndulo sin la presencia de una señal de acoplamiento.	82
39	Sincronización en posición del péndulo mecánico y los circuitos-péndulo para un arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 42.	84
40	Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico conectando el arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 42.	84

Lista de Figuras (continuación)

v

41	Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 42 . . .	85
42	Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla I.	85
43	Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 45.	86
44	Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 45	87
45	Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla II.	87
46	Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico conectando el arreglo en cadena abierta. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 48.	88
47	Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en cadena abierta. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 48.	88
48	Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla II.	89
49	Posiciones no sincronizadas del oscilador de Duffing y los circuitos-péndulo.	90
50	Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al oscilador de Duffing sin la presencia de una señal de acoplamiento.	90
51	Errores de sincronización entre circuitos-péndulo sin la presencia de una señal de acoplamiento.	91
52	Sincronización en posición del oscilador de Duffing y los circuitos-péndulo para un arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 55.	92
53	Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al oscilador de Duffing conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 55.	92
54	Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 55.	93
55	Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla III.	93
56	Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla IV (comparar con Fig. 55). . . .	94
57	Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla V (comparar con figs. 55 y 56). .	95

Lista de Figuras (continuación)

vi

58	Posiciones no sincronizadas del péndulo virtual, el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing.	96
59	Sincronización en posición del péndulo virtual, el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing para un arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 61.	97
60	Errores de sincronización entre los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (e_1), el circuito-péndulo (e_2) y el oscilador de Duffing (e_3) con respecto al péndulo virtual. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 61.	98
61	Señales de acoplamiento aplicadas a los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (v_1), el circuito-péndulo (v_2) y el oscilador de Duffing (v_3). Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla VI.	98
62	Errores de sincronización entre los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (e_1), el circuito-péndulo (e_2) y el oscilador de Duffing (e_3) con respecto al péndulo virtual. Se cambian los parámetros del observador como se muestra en la Tabla VII.	99
63	Señales de acoplamiento aplicadas a los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (v_1), el circuito-péndulo (v_2) y el oscilador de Duffing (v_3). Se obtienen a partir de los observadores presentados en la Tabla VII junto con los filtros y controladores de la Tabla VI.	100
64	Sincronización en posición del péndulo virtual, mecánico y en circuito así como del oscilador de Duffing para un arreglo en cadena completa aplicando las señales obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla VIII.	101
65	Comparación del desempeño de la ECIP ante perturbaciones externas. Se muestran los errores de sincronización del péndulo mecánico con respecto al péndulo virtual para la conexión en estrella y en cadena completa respectivamente.	102
66	Señales de acoplamiento aplicadas sobre el péndulo mecánico para la red conectada en estrella y en cadena completa.	102
67	Velocidades no sincronizadas del péndulo virtual y los circuitos-péndulo.	103
68	Errores de sincronización en velocidad de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo virtual sin la presencia de una señal de acoplamiento.	104
69	Sincronización en velocidad del péndulo virtual y los circuitos-péndulo conectados en cadena completa.	105
70	Errores de sincronización en velocidad de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo virtual correspondientes a la Figura 69.	105
71	Perturbación real vs. perturbación identificada. Las señales corresponden a las diferencias entre la dinámica de un oscilador de Duffing y un circuito-péndulo.	106
72	Posiciones no sincronizadas del circuito-péndulo y los MRA.	107

Lista de Figuras (continuación)

vii

73	Sincronización en posición del circuito-péndulo y los mecanismos MRA para un arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 75.	108
74	Errores de sincronización de cada mecanismo MRA con respecto al circuito-péndulo y entre nodos respectivamente, conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 75.	109
75	Señales de acoplamiento aplicadas en cada mecanismo MRA. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla X.	109
76	Posiciones no sincronizadas del circuito Duffing y los MRA.	110
77	Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones de cada mecanismo MRA contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. No existe señal de acoplamiento.	111
78	Sincronización en posición del circuito Duffing y los mecanismos MRA para un arreglo en cadena completa. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XI.	112
79	Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones de cada mecanismo MRA contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XI.	112
80	Posiciones no sincronizadas del circuito Duffing, el MRA y el péndulo mecánico.	113
81	Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones del MRA y el péndulo mecánico contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. No existe señal de acoplamiento.	114
82	Sincronización en posición del oscilador de Duffing, el MRA y el péndulo mecánico. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XII.	115
83	Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones del MRA y el péndulo mecánico contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XII.	115
84	Tarjeta de adquisición DSpace.	125
85	Bloque del canal de entrada análogo a digital.	126
86	Bloque del canal de entrada para <i>encoder</i>	126
87	Bloque del canal de salida análoga a digital.	127
88	Modelo implementado en Simulink.	128
89	Monitoreo de variables en <i>Control Desk</i>	129
90	Diagrama del circuito-péndulo.	131
91	Diagrama del oscilador de Duffing.	132

Lista de Tablas

I	Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de circuitos-péndulo conectados en estrella tomando como referencia un péndulo mecánico.	83
II	Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de circuitos-péndulo conectados en cadena completa tomando como referencia un péndulo mecánico.	86
III	Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de circuitos-péndulo conectados en cadena completa tomando como referencia un oscilador de Duffing.	91
IV	Nuevos parámetros en el control para la red oscilador de Duffing / circuitos-péndulo conectada en cadena completa.	94
V	Nuevos parámetros del observador correspondientes a la red Duffing / circuitos-péndulo conectada en cadena completa.	95
VI	Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red integrada por el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing conectados en estrella tomando como referencia un péndulo virtual.	97
VII	Nuevos parámetros de cada observador (incremento de c_1 y c_2 en $ECIP_{S_1}$) para el arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing.	99
VIII	Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red integrada por el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing conectados en cadena completa tomando como referencia un péndulo virtual.	101
IX	Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada para sincronizar en velocidad la red de circuitos-péndulo conectada en cadena completa tomando como referencia un péndulo virtual.	104
X	Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de sistemas MRA conectados en cadena completa tomando como referencia un circuito-péndulo.	108

Lista de Tablas (continuación)

ix

- XI Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de mecanismos MRA conectados en cadena completa tomando como referencia un oscilador de Duffing. 111
- XII Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red integrada por el MRA y el péndulo mecánico conectados en cadena completa tomando como referencia un oscilador de Duffing. 114

Introducción

Al considerar el universo, la infinita cantidad de sistemas complejos que lo componen, una primera consideración acerca de las relaciones entre todos estos sistemas sería una noción de caos. Sin embargo, es posible apreciar a nuestro alrededor la formación de estructuras ordenadas que han maravillado al hombre durante mucho tiempo, dando lugar a ideas místicas y sobrenaturales.

Primero podría hablarse de orden en el espacio, como el que experimentan millones de moléculas de agua que al ser sometidas a temperaturas por debajo del punto de solidificación forman estructuras simétricas que constituyen cristales de hielo. También se tiene la aparición de orden en el tiempo, noción relacionada con el concepto de sincronía.

La sincronización es un fenómeno que se manifiesta en diversos campos del conocimiento. Ejemplos bien conocidos son la sincronización observada entre la rotación y el movimiento orbital de la luna, de tal manera que siempre le da la misma cara a la tierra; o bien la sincronización del oscilador interno de un receptor de radio con el período de la señal transmitida, permitiendo que ésta pueda ser detectada y convertida en sonido.

Es posible también encontrar sincronía al interior de los seres vivos. Particularmente, el riñón humano se integra de unidades funcionales denominadas nefronas, las cuales controlan el flujo de sangre que entra en el órgano. El paso de sangre a través de cada nefrona provoca un retardo, haciendo que la regulación se vuelva inestable lo cual podría originar oscilaciones caóticas. Sin embargo, las nefronas vecinas interactúan unas con otras a través de señales que

se propagan por vasos sanguíneos lo cual sincroniza las oscilaciones en nefronas adyacentes (Strogatz, 2003).

El estudio formal de la sincronización inició hace 300 años con las observaciones de Christiaan Huygens, quien descubrió que las oscilaciones de un par de péndulos colgando de un soporte común se sincronizan. A partir de entonces se vinieron dando una serie de descubrimientos relacionados con el fenómeno, dentro de los que se cuentan, entre otros, el de la sincronización en sistemas acústicos y electroacústicos a finales del siglo XIX por parte de Lord Rayleigh; la sincronización de oscilaciones eléctricas y electromagnéticas hecha por Van der Pol, Appleton, Andronov y Vitt en las primeras décadas del siglo XX. Todos estos hallazgos dieron lugar a la aparición de una ciencia de la sincronización, que abarca diferentes campos del conocimiento.

Después vino el interés de los científicos e ingenieros en la sincronización experimentada en redes de sistemas dinámicos. De particular importancia resultaron los estudios en arreglos de sistemas caóticos estudiados, por ejemplo, en Wah Wu (2002).

La motivación principal de este trabajo se refiere al estudio de la sincronización de redes en el campo del control. El propósito de conectar sistemas dinámicos es resolver problemas cooperativamente. Lo anterior queda de manifiesto en múltiples aplicaciones modernas como es el caso de los procesos de manufactura que involucran sistemas complejos.

En la conformación de sistemas cooperativos de robots manipuladores, la investigación ha dado como resultado la síntesis de múltiples leyes de control. Sin embargo, al hablar de aplicaciones reales, surgen diferentes problemas relacionados con restricciones físicas o bien de costo. Por lo tanto, resulta de gran importancia el análisis de técnicas de sincronización que provean del máximo de beneficios y que resuelvan inconvenientes experimentados por otros esquemas de control.

Dentro de las principales limitaciones que no son completamente resueltas por algunos algoritmos de control existentes se encuentra el de disponer, en aplicaciones prácticas, única-

mente con la medición del vector de posiciones generalizadas (desplazamiento lineal o angular) y no de la velocidad, obligando frecuentemente a estimar esta variable de manera indirecta, lo que resulta en una complicación adicional del sistema de control. Otro problema lo constituye el tener la capacidad de rechazar perturbaciones externas a la vez que se cuenta con robustez ante incertidumbres paramétricas importantes.

Al respecto, uno de los trabajos más recientes es el de Rodríguez-Angeles y Nijmeijer (2002) en el cual se presentan estrategias de control, probadas analíticamente y validadas experimentalmente, para la sincronización externa de manipuladores robóticos con articulaciones rígidas o flexibles y para la sincronización mutua de robots con articulaciones fijas, a partir del conocimiento parcial del vector de estado, lo cual es posible con la aplicación de observadores basados en el modelo dinámico.

De actualidad resulta también el control propuesto en Sun y Mills (2002), para la sincronización de sistemas coordinados de robots manipuladores. Dicho algoritmo presenta un comportamiento adaptable, con lo cual se admiten incertidumbres tanto en el modelo como en los parámetros de los sistemas involucrados; además permite el rechazo a perturbaciones externas.

El objetivo de este documento es analizar y evaluar el desempeño de una estructura de control, que soluciona simultáneamente parte de los problemas ya mencionados, cuando es utilizada en la sincronización de cierta clase de redes de sistemas lagrangianos. Una vez probada la factibilidad de su aplicación a través de un análisis formal y mediante simulaciones numéricas, se apoyará el estudio a través de resultados experimentales aplicando la ley de control considerada a mecanismos y circuitos electrónicos.

Con esta finalidad, en el Capítulo I se presentan conceptos y teoremas básicos que constituyen el fundamento sobre el cual se desarrollaran las herramientas aplicadas posteriormente.

Para el Capítulo II, se introducen definiciones, clasificaciones y resultados previos que buscan establecer un marco de referencia en torno al estudio del fenómeno de sincronización.

En la segunda parte del documento se analizan de manera formal las herramientas utilizadas, específicamente el Capítulo III trata de la estructura de control (ECIP) presentando algunos resultados en términos de estabilidad además que se extiende su aplicación a dispositivos constituidos de n grados de libertad (nGDL); por su parte, el Capítulo IV corresponde a las configuraciones de conexión utilizadas, dando especial atención a la flexibilidad y robustez ante la pérdida de comunicación entre nodos.

En el Capítulo V se muestran los resultados experimentales, así como una descripción de los casos planteados y las razones por las que se consideran interesantes o relevantes.

Finalmente, en el Capítulo VI están las conclusiones más importantes relacionadas al desarrollo de la tesis, así como algunas propuestas dirigidas a establecer un posible trabajo futuro.

Capítulo I

Preliminares matemáticos

I.1 Definiciones generales

A continuación se presentan una serie de conceptos tomados de Khalil (1992).

Definición 1 *Una funcional es una función de variable real en un espacio vectorial V de funciones o espacio funcional. El significado original del término se refiere a una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.*

Definición 2 *Sea un sistema dinámico no autónomo representado por la ecuación diferencial*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t). \quad (1)$$

Se dice que el punto $x = x^$ en el espacio de estado es un punto de equilibrio de (1) si $f(x^*, t) \equiv 0$ para todo $t \geq 0$. Si el estado del sistema inicia en x^* , permanecerá en x^* para todo tiempo futuro.*

Definición 3 *Una esfera de radio r alrededor del origen es denotada como B_r , esto es*

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}. \quad (2)$$

Definición 4 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice continua en el punto x si dado un $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon. \quad (3)$$

Si δ depende únicamente de ε se dice que la función es uniformemente continua.

Definición 5 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice continua por partes en el conjunto S si es continua en S excepto por un número finito de puntos.

Definición 6 Una función vectorial $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Lipschitz en S , con una constante de Lipschitz L si

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\| \quad (4)$$

se cumple para todo $x, y \in S$ y uniformemente en t . Cuando la condición se mantiene para $x, y \in \mathbb{R}^n$ se dice que la función es globalmente Lipschitz, si por el contrario sólo es válida en una región de \mathbb{R}^n se denomina localmente Lipschitz.

Definición 7 Una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es de clase \mathcal{K} ($\alpha \in \mathcal{K}$) si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ si $a = \infty$ y $\alpha(r) \rightarrow \infty$ conforme $r \rightarrow \infty$.

Definición 8 Una función continua $\beta : [0, a) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ se dice que pertenece a la clase \mathcal{KL} ($\beta \in \mathcal{KL}$) si para cada s fija, el mapeo $\beta(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r y además para r constante, el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ conforme $s \rightarrow \infty$.

Definición 9 (Filippov, 1988) Considérese la clase de sistemas dinámicos discontinuos go-

bernados por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (5)$$

donde el campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es medible, localmente acotado y experimenta discontinuidades en un conjunto \mathcal{N} de medida cero (Lebesgue). Se dice que una función vectorial x absolutamente continua en un intervalo $[t_0, t_1]$ es solución de (5), en el sentido de Filippov, si para casi todo $t \in [t_0, t_1]$ se cumple que

$$\dot{x} \in F(x), \quad (6)$$

siendo $F(x)$ el mínimo conjunto convexo cerrado conteniendo los valores límite de $f(y)$ con $y \rightarrow x$ para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}$.

I.2 Sistemas dinámicos

En términos generales, un sistema dinámico es un objeto matemático que modela la evolución en el tiempo de algún fenómeno físico. De manera más formal se dice que un sistema dinámico está constituido por una variedad X , denominada *espacio de estado*, y una función evolutiva $\phi_t = \phi(t, x_0)$ tal que, para cualquier elemento $t \in T$, o instante de tiempo, mapea un punto del espacio de estado de vuelta al espacio de estado.

La función ϕ_t presenta las siguientes propiedades:

1. $\phi(0, x_0) = x_0$ (identidad).
2. $\phi(t + s, x_0) = \phi(s, \phi(t, x_0))$ (transitividad).
3. $\phi(t, x_0) \in \mathbb{C}^r$ con $r \geq 1$.
4. $\phi_{-t} = \phi(-t, x_0)$ (invertibilidad).

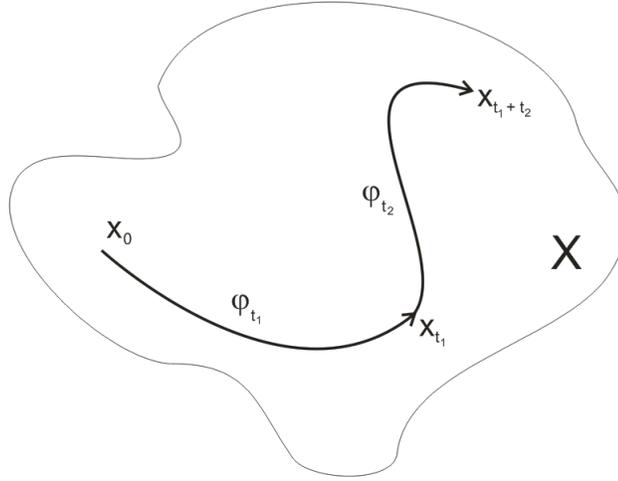


Figura 1: Soluciones ϕ_t en X

Desde la perspectiva del control clásico, es posible ver a los sistemas dinámicos como objetos descritos por sistemas de ecuaciones de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + u, \\ y &= h(x, t),\end{aligned}\tag{7}$$

donde la variable independiente $t \in \mathbb{R}$ denota el tiempo, $x \in \mathbb{R}^n$ describe el estado, $u \in \mathbb{R}^m$ representa el vector de entradas, $y \in \mathbb{R}^p$ el de salidas del sistema. Además se tienen los campos vectoriales $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

I.2.1 Sistemas lagrangianos

En Kelly y Santibañez (2003), así se llama al conjunto de sistemas cuyo modelo dinámico se obtiene a partir de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau,\tag{8}$$

donde $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ son vectores de posiciones y velocidades generalizadas (lineal o angular), $\tau \in \mathbb{R}^m$ es el vector de pares de entrada y

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \quad (9)$$

se denomina Lagrangiano, donde el término \mathcal{K} representa la energía cinética y \mathcal{U} la energía potencial del sistema considerado.

A través de este procedimiento se llega al modelo general de los robots manipuladores de nGDL,

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau, \quad (10)$$

con la matriz de inercia $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva e invertible, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis y los vectores $g(q), f(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ denotan los pares gravitacionales y las fuerzas de fricción, respectivamente.

I.2.2 Sistemas de estructura variable

El modelo prototipo de los llamados sistemas conmutados, usado en Branicky (1998), es representado por la ecuación

$$\dot{x} = f_i(x(t)), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (11)$$

donde los campos vectoriales f_i determinan la dinámica de la i -ésima estructura. En general para estos sistemas se tienen las consideraciones siguientes:

- Cada f_i es globalmente Lipschitz.
- Los índices i se toman de tal manera que hay un número finito de conmutaciones en un tiempo finito.

Este tipo de sistemas representan la parte continua de un sistema híbrido, en el cual la conmutación está determinada por algún proceso superior, por ejemplo un controlador, o bien ser función del tiempo o del estado.

Es posible definir una secuencia de conmutación indexada por un estado inicial, x_0 , es decir

$$S = x_0; (i_0, t_0), (i_1, t_1), \dots, (i_N, t_N), \dots; \quad (12)$$

entonces las trayectorias del sistema, denotadas por $x_S(\cdot)$ están determinadas completamente por (11) y (12).

I.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

En Khalil (1992), se considera el sistema no autónomo descrito por

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (13)$$

donde $f : D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua por partes en t y localmente Lipschitz en x , y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$, que se supone es un punto de equilibrio para (13).

Definición 10 *El punto de equilibrio $x = 0$ en (13) se dice estable localmente si existe una constante positiva $r > 0$ tal que para todo $(x(t_0), t_0) \in B_r \times \mathbb{R}^+$ se tiene una función α de clase \mathcal{K} con la cual se cumple*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|). \quad (14)$$

Si lo anterior se mantiene para todo $(x(t_0), t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ entonces el origen es globalmente estable. Más aún, si además r y α son independientes de t_0 entonces se dice que el punto de equilibrio es uniformemente estable, local o globalmente.

Definición 11 *El punto de equilibrio $x = 0$ en (13) es asintóticamente estable de manera local si existe una constante positiva $r > 0$ tal que para todo $(x(t_0), t_0) \in B_r \times \mathbb{R}^+$ es posible encontrar una función β de clase \mathcal{KL} con la cual se tiene*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0). \quad (15)$$

Si β es tal que lo anterior se mantiene para todo $(x(t_0), t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ entonces el origen es asintóticamente estable de manera global. Adicionalmente, si r y β son independientes de t_0 , entonces se dice que el punto de equilibrio es uniforme y asintóticamente estable, ya sea local o globalmente.

Definición 12 *El punto de equilibrio $x = 0$ en (13) es exponencialmente estable, de manera local, si se cumple (15) con*

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0, \quad (16)$$

bajo las mismas condiciones de globalidad y uniformidad.

Teorema 13 (Lyapunov) *Se toma $x = 0$ como punto de equilibrio para (13) y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen. Si $V : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable, tal que*

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0, \quad \forall x \in D, \quad (17)$$

y se cumple que

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in D, \quad (18)$$

se tiene estabilidad en $x = 0$. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in D, \quad (19)$$

entonces se habla de estabilidad asintótica en el origen.

A pesar que se requiere el cumplimiento de (19) para concluir estabilidad asintótica, es posible demostrarla a partir de (18) considerando el teorema de LaSalle.

Teorema 14 (LaSalle) *Se tiene el sistema (13) y una función candidata de Lyapunov V tal que (18) se satisface. Se dice que el origen es asintóticamente estable si \dot{V} no se desvanece a lo largo de ninguna trayectoria del sistema excepto en $x = 0$; esto es, la única trayectoria del sistema que satisface*

$$\dot{V} \equiv 0, \quad (20)$$

es la solución nula.

I.4 Estabilidad de sistemas perturbados

Se considera como sistema perturbado aquel cuyas ecuaciones tienen la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t), \quad (21)$$

siendo $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen, $f : D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota la dinámica nominal del sistema y $g : D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el término de perturbación; ambas funciones son continuas en t y localmente Lipschitz en x .

I.4.1 Perturbaciones desvanecientes

Es el caso en que $g(0, t) = 0$. Suponiendo que el origen del sistema nominal (13) es un punto de equilibrio exponencialmente estable y considerando la existencia de una función de

Lyapunov que satisface

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|_2^2 &\leq V(x, t) \leq c_2 \|x\|_2^2, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) &\leq -c_3 \|x\|_2^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial t} \right\|_2 &\leq c_4 \|x\|_2, \end{aligned} \quad (22)$$

para $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in D$ y algunas constantes positivas c_1, c_2, c_3, c_4 ; si además se cumple que el término $g(x, t)$ está acotado linealmente, esto es,

$$\|g(x, t)\|_2 \leq \bar{\gamma} \|x\|_2, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D, \quad (23)$$

con

$$\bar{\gamma} < \frac{c_3}{c_4}, \quad (24)$$

entonces el origen es exponencialmente estable.

I.4.2 Perturbaciones no desvanecentes

Es un caso más general que el anterior, cuando no se tiene certeza que $g(t, 0) = 0$.

Lema 15 (Khalil, 1992) *Considerar a $x = 0$ como un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (13). Suponer la existencia de una función de Lyapunov $V(x, t)$ que cumple las condiciones dadas por (22) en $B_r \times \mathbb{R}^+$. Además, el término de perturbación está acotado de la forma*

$$\|g(x, t)\|_2 \leq \delta \leq \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r, \quad (25)$$

para alguna constante positiva $\theta < 1$. Entonces, para toda

$$\|x(t_0)\|_2 \leq \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} r, \quad (26)$$

la solución del sistema perturbado (21) satisface

$$\|x(t)\| \leq k e^{-\gamma(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (27)$$

y

$$\|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_1, \quad (28)$$

para algún tiempo finito t_1 , donde

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad (29)$$

$$\gamma = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2},$$

$$b = \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\delta}{\theta}. \quad (30)$$

I.5 Estabilidad de sistemas de estructura variable

Definición 16 Si existen V_i funciones candidatas de Lyapunov correspondientes a cada f_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ en (11), se dice que satisfacen la condición de secuencia no incremental para una trayectoria $x(\cdot)$ si

$$V_{i_{j+1}}(x(t_{j+1})) < V_{i_j}(x(t_j)) \quad (31)$$

Considerar que los índices forman un conjunto compacto arbitrario K , es decir, que está

cerrado y acotado, con lo cual

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad \lambda \in K, \quad (32)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, además f es globalmente Lipschitz en x y continua en λ . Se define una secuencia de conmutación

$$S = x_0; \quad (\lambda_0, t_0), (\lambda_1, t_1), \dots, (\lambda_N, t_N), \dots \quad (33)$$

Teorema 17 (Branicky, 1998) *Supóngase que se tienen funciones candidatas de Lyapunov $V_\lambda \equiv V(\cdot, \lambda)$ y campos vectoriales como en (32) con $f(0, \lambda) = 0$, para cada $\lambda \in K$. Además, $V : \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}^+$ es continua y S es el conjunto de todas las secuencias de conmutación asociadas con el sistema.*

Si en cada $S \in \mathcal{S}$ se tiene que, para todo λ , V_λ es una función de Lyapunov sobre f_λ y $x_S(\cdot)$ que satisface la condición de secuencia no incremental, entonces el sistema se dice estable en el sentido de Lyapunov.

I.6 Modos deslizantes

Según lo presentado en Utkin (1992), algunos sistemas dinámicos contienen términos discontinuos, sea por naturaleza propia o por diseño, que al conmutar a frecuencias teóricamente infinitas confinan las trayectorias del estado a una superficie de deslizamiento. A la dinámica del sistema dentro de esta superficie se le denomina modo deslizante.

Considérense los sistemas descritos por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (34)$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$ representa el tiempo, $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota el campo vectorial que describe las trayectorias del sistema y $u \in \mathbb{R}^m$ son las entradas. Se definen k superficies de deslizamiento como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen

$$s_i(x) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (35)$$

donde $s_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es suficientemente suave.

Para la existencia de modos deslizantes debe cumplirse que, dada cualquier condición inicial, el estado de (34) converja a la intersección de las superficies (35) en tiempo finito.

En los procesos de diseño, la condición de alcanzabilidad se satisface asegurando que se cumple la siguiente desigualdad,

$$s\dot{s} < 0, \quad (36)$$

lo cual deriva de las nociones de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Una vez alcanzada la superficie de deslizamiento en un tiempo finito t_r , el sistema no la abandona, al menos durante un intervalo de tiempo, lo cual implica el cumplimiento de la

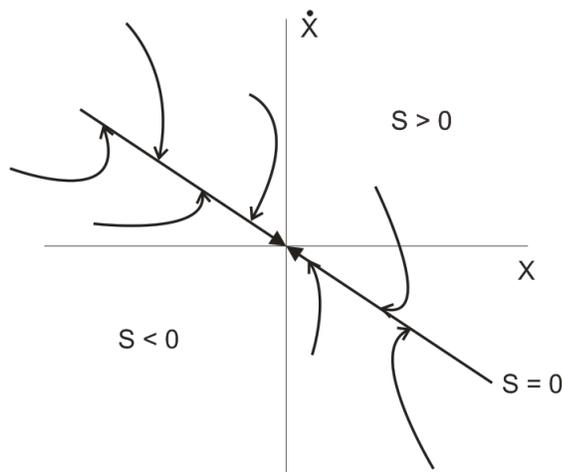


Figura 2: Superficie de deslizamiento $s = \dot{x} + cx$ en un sistema de segundo orden

igualdad

$$\dot{s} = 0, \quad \forall t > t_r \quad (37)$$

y durante el intervalo de existencia. Además, el sistema experimenta una reducción de orden dada por $n - k$, lo cual se denomina desacoplamiento.

De mayor relevancia en términos de control es la propiedad de invariancia, según la cual las trayectorias del sistema, una vez en (35), no dependen de la planta, incertidumbres paramétricas o perturbaciones externas. Con esto, el problema de control por modos deslizantes implica el diseño de una superficie en la cual el sistema tenga un comportamiento deseado.

I.6.1 Método del control equivalente

Este procedimiento se emplea para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema una vez que ha llegado a la superficie de deslizamiento. Se aplica a los llamados sistemas afines, es decir, aquellos sistemas lineales con respecto a la entrada,

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (38)$$

con $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y x, f, u como ya se definieron en (34).

Dado que al llegar a la superficie el sistema no la abandona, al considerar (37) y (38) se tiene que

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0, \quad (39)$$

donde

$$G = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (40)$$

y el control equivalente u_{eq} corresponde a la sustitución de la entrada discontinua por un

control continuo que mantiene al sistema en la superficie $s = 0$, es decir,

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}Gf, \quad (41)$$

cuidando que la matriz GB sea no singular.

I.6.2 “Chattering”

Este fenómeno se refiere a la aparición de oscilaciones, de amplitud y frecuencia finita, en el estado de la planta debidas a la excitación por parte del control discontinuo de dinámicas no modeladas en sensores y actuadores. Como dinámicas no modeladas se tienen, por ejemplo, zonas muertas, saturaciones, histéresis y el ancho de banda limitado de los actuadores.

Es importante recalcar que el término *chattering* no se refiere a la conmutación del controlador, que idealmente debe ser de frecuencia infinita, sino a las oscilaciones en el estado del sistema.

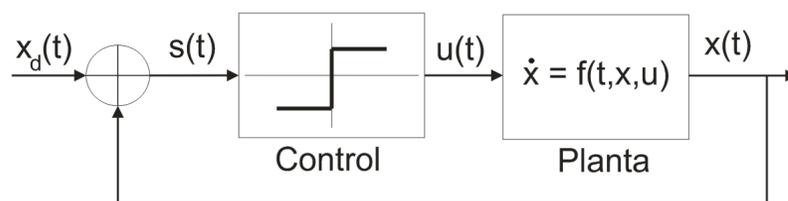


Figura 3: Sistema en lazo cerrado sin considerar la dinámica del actuador

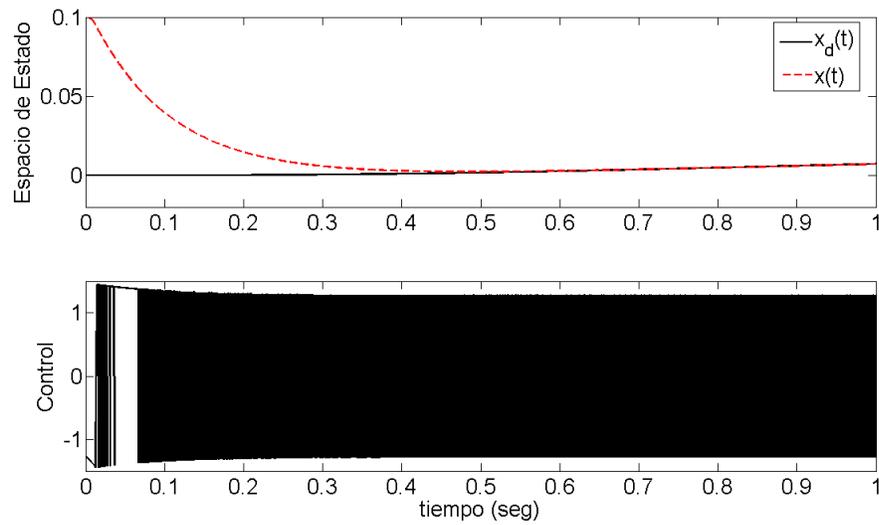


Figura 4: Comportamiento del sistema mostrado en la Figura 3. El deslizamiento es ideal pues el control conmuta a frecuencia infinita

Estas oscilaciones traen como consecuencia, por ejemplo, reducción de la precisión en el control, pérdidas por calentamiento en circuitos eléctricos de potencia y desgaste de partes mecánicas móviles.

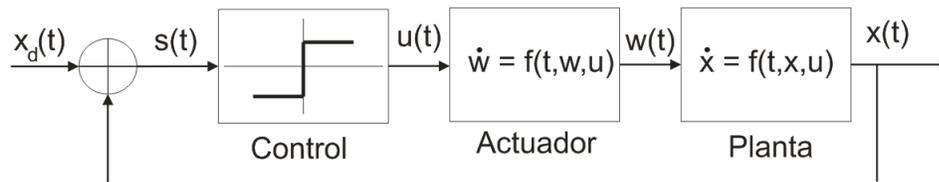


Figura 5: Sistema en lazo cerrado considerando un actuador con ancho de banda limitado

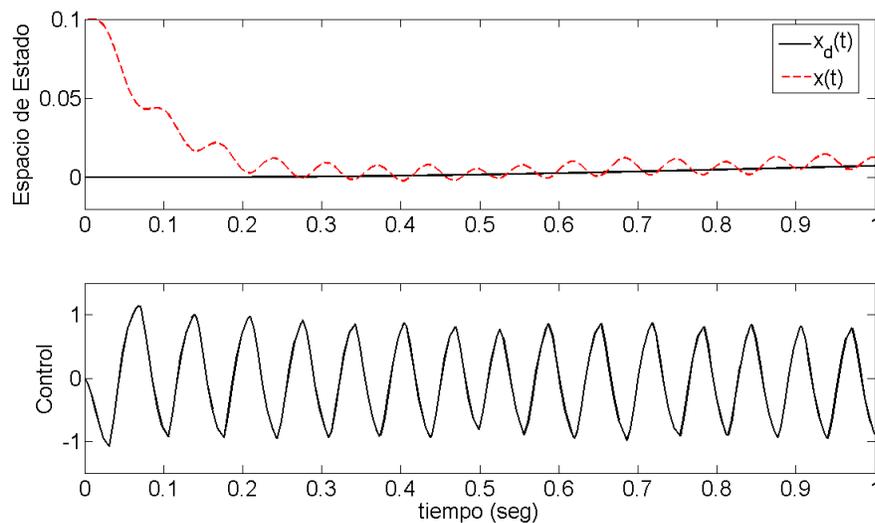


Figura 6: Comportamiento del sistema mostrado en la Figura 5. Se presenta *chattering* pues el actuador filtra la frecuencia proveniente del control discontinuo

I.6.3 Modos deslizantes de orden superior

Considérese una restricción $s(x) = 0$, donde $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suficientemente suave. Supóngase que las derivadas sobre las trayectorias del sistema $s, \dot{s}, \ddot{s}, \dots, s^{r-1}$ existen y son funciones del estado x . En otras palabras, la discontinuidad no aparece en las primeras $r - 1$ derivadas de la función de restricción s . Entonces el conjunto de deslizamiento de orden r está determinado por las igualdades

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{r-1} = 0. \quad (42)$$

Definición 18 (Fridman y Levant, 2002) Si el conjunto de los estados que satisfacen (42) no es un conjunto vacío y suponiendo que localmente es un conjunto integral, es decir, está constituido por trayectorias en el sentido de Filippov, entonces la dinámica correspondiente que satisface (42) se denomina un modo deslizante de orden r con respecto a la función de restricción s .

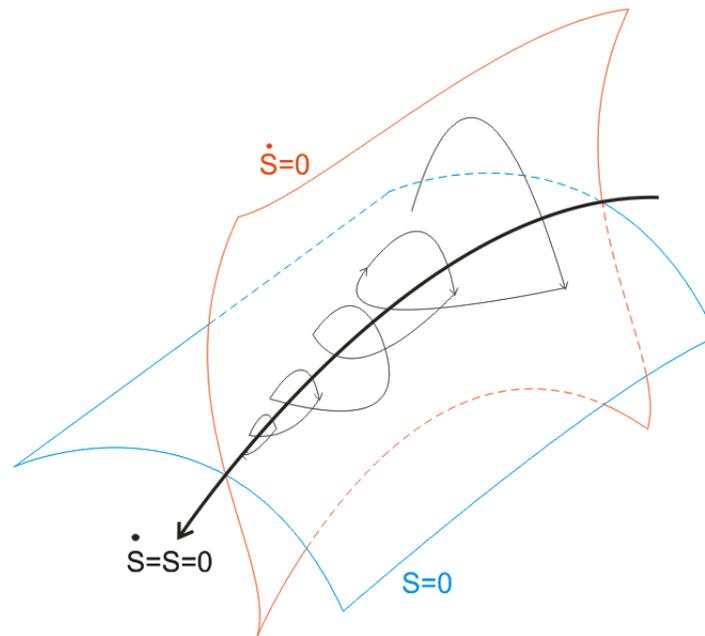


Figura 7: Conjunto de deslizamiento de segundo orden $s = \dot{s} = 0$

El método de control equivalente es aplicable a modos deslizantes de orden r y corresponde a la entrada u_{eq} que mantiene al sistema dentro del conjunto de deslizamiento (42).

I.7 Análisis del capítulo

La intención de incluir un capítulo de conceptos es tener presentes los teoremas y definiciones que más adelante se usarán en la descripción de las herramientas que comprende la metodología de sincronización descrita en este trabajo de tesis. Por lo tanto, no resulta indispensable la lectura de esta parte del documento siempre y cuando se recuerden algunas nociones básicas sobre control.

El siguiente capítulo tiene la misma intención, aunque el objetivo es introducir en el campo de la sincronización, en este caso vale la pena hacer una revisión de la información presentada ya que abarca conocimientos más particulares que los que podrían comprender temas relacionados con estabilidad, sistemas dinámicos, etc.

Capítulo II

Sincronización

El objetivo principal de este capítulo es presentar un panorama general sobre el estudio de la sincronización, ya que la definición de este fenómeno no es un problema sencillo.

En la parte inicial se introducen una serie de conceptos tomados de la literatura, los cuales no son absolutos, pero sí de gran ayuda en la búsqueda de establecer un criterio adecuado a través del cual se pueda decir que un sistema o arreglo de sistemas está sincronizado.

En la sección referente a redes se presenta un compendio, a nivel muy general, de los trabajos que se han hecho sobre el tema. Primero se describen estudios en arreglos basados en conceptos topológicos y posteriormente algoritmos de control para la sincronización de sistemas robóticos.

II.1 Conceptos sobre sincronización

El fenómeno de sincronización ha sido estudiado desde diferentes perspectivas a lo largo de la historia, dando lugar a definiciones que van de lo general a lo particular; es decir, abarca muchos aspectos de la ciencia y la tecnología y dependiendo del campo específico en el cual sea tratado se le puede dar determinado carácter.

De una manera heurística, puede definirse como una mutua conformidad temporal entre

dos o más procesos, caracterizada por la aparición de ciertas relaciones entre funcionales de dichos procesos (Blekhman et al. 1985).

En algunos trabajos se considera una conformidad de ritmos que determinan el movimiento de objetos dinámicos, un ejemplo es Pikovsky et al. (1956), donde se caracteriza a dichos ritmos como frecuencia y fase. Esta definición se restringe a sistemas oscilantes que cuentan con una fuente de energía interna (osciladores sostenidos), con lo cual, aquellos sistemas que carecen de ritmo propio no pueden ser considerados dentro de un régimen síncrono. Bajo este enfoque la sincronización depende únicamente de la diferencia entre las frecuencias de los sistemas involucrados (desintonización de frecuencia) así como de la fuerza en los acoplamientos.

Sin embargo, estas nociones permanecen en un entorno demasiado amplio, y a partir de ellas sólo se puede afirmar que el fenómeno comprende un proceso dinámico complejo y no un estado estacionario.

También se habla de tendencia hacia la sincronización cuando un sistema de objetos acoplados tiene al menos una solución estable que corresponde a un comportamiento síncrono. Dicha dinámica está caracterizada por la relación que existe entre un conjunto de funcionales seleccionadas apropiadamente para comparar características similares de los objetos en el sistema.

Esta última definición resulta más conveniente para los objetivos buscados en este trabajo; por tal motivo, es necesario formalizarla tomando los conceptos presentados en Blekhman et al. (1997), donde se parte de la definición de k sistemas dinámicos representados como

$$\begin{aligned} \Sigma_i : \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_i, t), & i \in \{1, \dots, k\}, & t \in T, \\ y_i &= h(x_i, t), \end{aligned} \quad (43)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de estado, $T \in \mathbb{R}^+$ es el conjunto de tiempos donde se definen

las trayectorias, $F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ son campos vectoriales que representan la dinámica de cada sistema y por último $y_i \in \mathbb{R}^p$ representan las salidas correspondientes como función del estado a través de un mapeo $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Se consideran l funcionales $g_j : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Se define además el operador desfaseamiento $\sigma_\tau : y_i \rightarrow y_i$ tal que

$$\sigma_\tau y_i(t) = y_i(t + \tau), \quad \tau \in T. \quad (44)$$

Definición 19 Se dice que las soluciones x_1, \dots, x_k de los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, bajo condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están sincronizadas con respecto a las funcionales g_1, \dots, g_l si

$$g_j(\sigma_{\tau_1} y_1, \dots, \sigma_{\tau_k} y_k, t) \equiv 0, \quad (45)$$

se dice que están aproximadamente sincronizadas si existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$|g_j(\sigma_{\tau_1} y_1, \dots, \sigma_{\tau_k} y_k, t)| \leq \epsilon, \quad (46)$$

finalmente se dice que están asintóticamente sincronizadas si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(\sigma_{\tau_1} y_1, \dots, \sigma_{\tau_k} y_k, t) = 0, \quad (47)$$

lo cual se cumple con $j \in \{1, \dots, l\}$ y $\forall t \in T$.

Cuando alguno de los casos anteriormente definidos tiene lugar para sistemas como (43) se tiene *sincronización natural*, ya que no existen conexiones o fuerzas externas aplicadas.

Por otro lado tomando sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\Sigma_i : \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, t), & i \in \{1, \dots, k\}, \\ y_i &= h(x_i, t), \\ \frac{dx_0}{dt} &= F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, t),\end{aligned}\quad (48)$$

donde \tilde{F}_i son los campos vectoriales que describen los acoplamientos y F_0 es la dinámica del sistema de interconexión; si alguno de los objetivos de la Definición 19 es satisfecho se llega a la *autosincronización*.

Finalmente, al cumplir alguna de las condiciones con la presencia de señales externas, es decir, para sistemas cuya dinámica es descrita por

$$\begin{aligned}\Sigma_i : \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), & i \in \{1, \dots, k\}, \\ y_i &= h(x_i, t), \\ \frac{dx_0}{dt} &= F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t),\end{aligned}\quad (49)$$

donde $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, entonces se habla de *sincronización controlada*.

Para este último caso el problema de sincronización corresponde a encontrar las entradas de control u_i tales que alguna de las metas planteadas en la Definición 19 sea alcanzada.

Dadas diferentes características de las señales de acoplamiento surgen los conceptos de *sincronización controlada en lazo abierto*, cuando el control utilizado no depende del estado; *sincronización controlada por retroalimentación estática*, es decir,

$$u(t) = U(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \quad (50)$$

donde $U : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$; o bien *sincronización controlada por*

retroalimentación dinámica en la cual se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= W(x_0, x_1, \dots, x_k, w, t), \\ u(t) &= U(x_0, x_1, \dots, x_k, w, t),\end{aligned}\tag{51}$$

con $w \in \mathbb{R}^v$, $W : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^v$ y $U : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$.

De acuerdo a la Definición 19, el comportamiento síncrono de un conjunto de sistemas queda completamente caracterizado por la funcional propuesta, que representa el criterio de comparación entre las variables seleccionadas de los sistemas involucrados. Por lo tanto, se pueden definir distintos criterios dando lugar a otras clasificaciones como las que a continuación se mencionan (Boccaletti et al. 2002).

Se distingue entonces el concepto de *sincronización completa* que corresponde a una igualdad de las variables de estado, esto es

$$x_i \equiv x_j, \quad i \neq j \in \{1, \dots, k\}.\tag{52}$$

Para la *sincronización en fase*, se toma la diferencia de fase entre los sistemas

$$\theta = \eta_1 \phi_1 - \eta_2 \phi_2, \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{Z},\tag{53}$$

cuya dinámica corresponde a las ecuaciones

$$\dot{\theta} = \Delta w - C \text{sen}(\theta),\tag{54}$$

donde $\Delta w = \eta_1 w_1 - \eta_2 w_2$ es la diferencia entre las frecuencias naturales y C es la fuerza de

acoplamiento. El objetivo de sincronización de fase es entonces

$$\left| \frac{\Delta w}{C} \right| \leq 1. \quad (55)$$

En ocasiones no es posible lograr una sincronización de fase perfecta, en lugar de esto se presentan deslizamientos de fase intermitentes que dan lugar al fenómeno de *sincronización de fase imperfecta* que es característico de los sistemas caóticos.

La *sincronización retardada* se refiere al caso en que los estados de los sistemas involucrados son casi idénticos, sin embargo, presentan un retraso en el tiempo, esto es

$$x_i(t) \approx x_j(t + \tau_0), \quad i \neq j \in \{1, \dots, k\}, \quad (56)$$

en este caso se presenta un fenómeno similar que en la sincronización de fase en el cual existen momentos en que el error de sincronización se vuelve muy grande, dando lugar a la *sincronización retardada intermitente*.

Finalmente, se plantea el caso de *sincronización generalizada* en la cual se tiene una transformación $\Phi : x_i \rightarrow x_j$, es decir, la relación entre estados es

$$x_j = \Phi(x_i), \quad (57)$$

que es de especial importancia para sistemas no idénticos. Cuando se tiene que la función Φ es suave, en el sentido de ser diferenciable, entonces se dice que la sincronización generalizada es fuerte, llamándose débil al caso contrario.

La definición de Φ no es trivial y requiere del plantamiento de una serie de conceptos que deben ser tratados con formalidad.

Basándose en la interacción de los sistemas, es decir, en las características de los acoplamientos, pueden distinguirse dos grandes clases de esquemas de sincronización.

En el esquema unidireccional o *sincronización externa*, uno de los objetos del sistema multicompuesto es más poderoso que los demás y su dinámica puede considerarse libre e independiente de la dinámica de los otros objetos y por lo tanto determina el movimiento en sincronía del sistema completo. También es llamado maestro/esclavo, característico de los sistemas coordinados.

El segundo acoplamiento se denomina bidireccional o *sincronización mutua*, en el cual la dinámica de sincronización se debe a la interacción de todos los objetos en el sistema multicompuesto. Es característico de los sistemas cooperativos.

II.2 Sincronización de arreglos

Cuando se plantea el problema de la sincronización siempre se parte de la consideración de un par de objetos dinámicos. Sin embargo, resulta mucho más interesante considerar redes de sistemas en las que aspectos como el tipo de conexión empleada, la dinámica de los acoplamientos o el efecto global de las perturbaciones inducidas sobre un miembro de la red, toman aún mayor relevancia.

En esta sección se consideran dos perspectivas para abordar el problema, la autosincronización y la sincronización controlada. En cada enfoque se presentan de manera general algunos trabajos existentes con la finalidad de establecer un punto de partida sobre el tema.

II.2.1 Autosincronización de arreglos

Como ya se ha definido, esta estrategia de sincronización se basa únicamente en la adición de conexiones entre los objetos dinámicos. De especial relevancia son los conceptos de topología de gráficas.

En general, los estudios realizados en este campo plantean el problema de la estabilidad del arreglo basándose especialmente en dos características: la configuración de la red y la

fuerza de acoplamiento. A partir de ambos aspectos se encuentra lo que es llamado *umbral de sincronización*, es decir, la fuerza de acoplamiento mínima para lograr que el sistema se mantenga en un régimen síncrono estable.

Se tiene entonces un arreglo con k sistemas de la forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f(x_1, t) \\ \vdots \\ f(x_m, t) \end{bmatrix} + \kappa(G \otimes D)x, \quad (58)$$

donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la matriz laplaciana $G \in \mathbb{R}^{k \times k}$ caracteriza la topología del arreglo, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ define las conexiones, el parámetro $\kappa \in \mathbb{R}$ determina la fuerza de acoplamiento y \otimes es el producto de Kronecker.

De especial importancia es la construcción de la matriz Laplaciana G . En general tiene la forma

$$G = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^k d_{1j} & d_{12} & \cdots & d_{1k} \\ d_{21} & -\sum_{j=1}^k d_{2j} & \cdots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & -\sum_{j=1}^k d_{kj} \end{bmatrix}, \quad (59)$$

donde cada término $d_{ij} = 1$ si existe conexión entre los nodos i, j y es cero en caso contrario.

Función maestra de estabilidad

En Pecora y Carroll (1998) se introduce un procedimiento de análisis de estabilidad del arreglo basado en una función maestra de estabilidad. La técnica consiste en calcular los exponentes de Lyapunov máximos ϖ_{max} para la ecuación genérica

$$\dot{\zeta} = [dF + (\alpha + i\beta)D]\zeta, \quad (60)$$

donde

$$dF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x_k, t)}{\partial x_k} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

como función de α y β . Con esto se tiene que la función maestra de estabilidad se constituye como una superficie sobre el plano complejo. Luego se calculan los valores propios de la matriz G representados por γ_j para $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Finalmente se toman los puntos $\kappa\gamma_j$ y se sitúan en el plano construido. Si para cada $\kappa\gamma_j$ se tiene un valor negativo de la función maestra de estabilidad entonces se alcanza un régimen de sincronización estable.

La importancia de este análisis es que permite ajustar las fuerzas de acoplamiento κ tal que todos los γ_j se encuentren dentro de la zona de estabilidad, además que pueden aplicarse criterios de estabilidad diferentes.

Conjetura Wu - Chua

En Chua y Wu (1996) se presenta una conjetura que implica una relación proporcional entre la sincronización de un par de nodos de la red y la del arreglo en su totalidad, es decir

$$\kappa_n^* = \frac{2\kappa_2^*}{|\lambda_2|}, \quad (62)$$

donde κ_n^* , κ_2^* son el umbral de sincronización del arreglo y el umbral de sincronización de un par de nodos respectivamente, mientras que λ_2 es el valor propio diferente de cero más pequeño de la matriz G .

La conjetura resulta cierta para cierto tipo de arreglos ya que toma en cuenta el menos estable de los valores propios, sin embargo, a través del método de función maestra de estabilidad se ha visto que para ciertas redes, un incremento en la fuerza de acoplamiento lleva a un régimen inestable y por lo tanto a la desincronización, de esta manera la aplicación de la

conjetura falla.

Método de la gráfica de conexión

En Belykh y Hassler (2005) se menciona que los métodos basados en el cálculo de valores propios son difíciles de aplicar en arreglos con topologías irregulares y más aún, cuando la matriz G es dependiente del tiempo, el cálculo de valores propios y exponentes de Lyapunov es prácticamente imposible. Por tal motivo en dicho documento se propone el método de estabilidad basado en la gráfica de conexión.

Primero se introducen los conceptos de *vértice*, es decir, cada nodo en el sistema; *borde*, que es el acoplamiento entre un par de nodos; y *camino*, constituido por los bordes que existen entre un par de nodos. Debe mencionarse que es posible encontrar varios caminos distintos para el mismo par de vértices. Además, la longitud de un camino es el número de bordes que comprende.

Según el teorema principal del documento el régimen de sincronización de un arreglo, dado por (58) con k vértices y l bordes, es estable si

$$\kappa_j^* > \frac{2\kappa_2^*}{k} b_j(k, l), \quad (63)$$

con $j \in \{1, \dots, l\}$. El término $b_j(k, l)$ representa la suma de las longitudes de los caminos que pasan por el j -ésimo borde. En el artículo se presenta una exposición más detallada así como ejemplos demostrativos.

Este criterio es aplicable tanto en arreglos regulares como irregulares y bajo ciertas consideraciones también a las llamadas redes de escala libre, es decir, redes complejas compuestas por gran cantidad de vértices.

Este enfoque tiene como uno de sus problemas principales el no contar con una metodología para definir los caminos que resulten óptimos para el cálculo del umbral de sincronización.

El hecho de centrar el análisis de estabilidad de la red sobre el balance entre la longitud de los caminos establecidos así como en la distribución del tráfico de información en los bordes del arreglo, representa una de sus principales aportaciones.

Acoplamientos dinámicos

Hasta ahora se han considerado trabajos en los cuales las conexiones son estáticas, sin embargo, en Wah Wu (2000) se presenta la sincronización de arreglos con acoplamientos dinámicos dando lugar a hipergráficas. Para tales arreglos, los bordes constituyen sistemas con dinámica propia, por lo tanto el problema no se limita a calcular un coeficiente caracterizando la fuerza en el acoplamiento, sino que deben encontrarse las condiciones sobre las cuales la interacción entre la dinámica de los vértices y los bordes dan lugar a un régimen de sincronización estable.

Se introduce la definición de matriz de incidencia $E \in \mathbb{R}^{k \times l}$ cuyas filas corresponden a los vértices y las columnas a los bordes, por lo tanto, el elemento $E_{ij} = 1$ si existe conexión entre el borde y el vértice correspondiente. Además se dice que el grado del i -ésimo vértice es el número de bordes a los cuales se acopla, esto es, $\sum_{j=1}^l E_{ij}$. Por el contrario, el grado del j -ésimo borde es el número de vértices que abarca, es decir, $\sum_{i=1}^k E_{ij}$.

La matriz laplaciana se define entonces como

$$G = E_v - EE_b^{-1}E^T, \quad (64)$$

donde $E_v \in \mathbb{R}^{k \times k}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los grados de cada vértice y $E_b \in \mathbb{R}^{l \times l}$ se define de la misma manera pero con los grados de cada borde en la diagonal principal. El mínimo valor propio diferente de cero de la matriz G caracteriza la *conectividad algebraica* y bajo ciertas condiciones, mientras mayor sea este término el arreglo es más fácil de sincronizar en el sentido que se requieren coeficientes de menor magnitud en los

acoplamientos.

En el artículo se establecen teoremas que condicionan la sincronización del arreglo y su estabilidad. La principal característica de este aporte consiste en aplicar toda la metodología a teoría de circuitos, específicamente con el circuito de Chua.

II.2.2 Sincronización controlada de arreglos

Para este caso es necesario encontrar una señal de acoplamiento tal que alguno de los objetivos de control ya definidos sea alcanzado. Este enfoque parte de conceptos de control clásico, sin embargo no es del todo similar al problema de seguimiento, principalmente porque debe tomarse en cuenta la influencia de las conexiones, es decir, de la configuración específica del arreglo.

Control adaptable para la sincronización de manipuladores robóticos

Dentro de este campo se cuenta el trabajo de Sun y Mills (2002) en el cual se presenta la aplicación de una estrategia de control adaptable a la sincronización de múltiples manipuladores robóticos, con la dinámica del i -ésimo sistema dada por la forma general (10). La expresión

$$f(q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t)) = 0, \quad (65)$$

corresponde a la funcional que caracteriza el objetivo de sincronización. Se definen los errores de seguimiento

$$e_i(t) = q_i^d(t) - q_i(t), \quad (66)$$

donde $q_i^d \in \mathbb{R}^n$ son la posiciones deseadas en el i -ésimo sistema del arreglo. Los errores de sincronización se establecen como

$$\varepsilon_i(t) = c_i(t)e_i(t) + c_{i+1}(t)q_{i+1}(t), \quad (67)$$

donde

$$c_i(t) = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial q_i} \right|_{q_i^d}.$$

Finalmente se definen los errores de posición acoplados

$$e_i^*(t) = c_i(t)e_i(t) + \beta \int_0^t [\varepsilon_i(w) + \varepsilon_{i-1}(w)] dw, \quad (68)$$

donde β es un parámetro de acoplamiento diagonal positivo. Además se tiene el vector de comando

$$u_i(t) = c_i(t)\dot{q}_i^d(t) + \dot{c}_i(t)e_i(t) + \beta(\varepsilon_i(t) + \varepsilon_{i-1}(t)) + \Lambda e_i^*(t), \quad (69)$$

con Λ una ganancia de control positiva, y el vector auxiliar

$$r_i(t) = u_i(t) - c_i(t)\dot{q}_i(t) = \dot{e}_i^* + \Lambda e_i^*. \quad (70)$$

Es posible entonces definir los pares de entrada

$$\begin{aligned} \tau_i &= \hat{M}_i(q_i)c_i^{-1}(t)(\dot{u}_i(t) - \dot{c}_i(t)\dot{q}_i(t)) \\ &\quad + \hat{C}_i(q_i, \dot{q}_i)c_i^{-1}(t)u_i(t) + \hat{F}_i(q_i, \dot{q}_i) \\ &\quad + K_r c_i^{-1}(t)r_i(t) + c_i^T K_\varepsilon(\varepsilon_i(t) + \varepsilon_{i-1}(t)) \\ &= Y_i(q_i, \dot{q}_i, u_i, \dot{u}_i)\hat{\theta}_i(t) + K_r c_i^{-1}(t)r_i(t) + c_i^T K_\varepsilon(\varepsilon_i(t) + \varepsilon_{i-1}(t)), \end{aligned} \quad (71)$$

donde K_r, K_ε son ganancias de control diagonales positivas, $Y_i(q_i, \dot{q}_i, u_i, \dot{u}_i)$ es una matriz de regresión y el parámetro estimado $\hat{\theta}_i$ está sujeto a la ley de adaptación

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = \Gamma_i Y_i^T(q_i, \dot{q}_i, u_i, \dot{u}_i)c_i^{-1}(t)r_i(t), \quad (72)$$

donde Γ es una matriz ganancia de control definida positiva. El error de estimación del

modelo es

$$\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i - \hat{\theta}_i(t), \quad (73)$$

con el término $\theta_i(t)$ agrupando incertidumbres paramétricas en cada modelo. Se dice que si K_r es lo suficientemente grande para satisfacer

$$\lambda_{max}(K_r) \geq \lambda_{max} \left(M_i(q_i) \frac{d(c_i^{-1}(t))}{dt} c_i(t) \right), \quad (74)$$

entonces los controladores (71) aseguran convergencia asintótica al origen de los errores de seguimiento y sincronización.

Gracias a la ley de adaptación, el control es capaz de rechazar incertidumbres paramétricas así como perturbaciones externas; sin embargo, aún se requiere gran cantidad de información en el diseño. Por un lado, es necesario cierto conocimiento del modelo matemático de cada sistema para poder diseñar la matriz de regresión, pero la mayor restricción proviene de la necesidad de conocer \dot{q}_i^d, \dot{q}_i , lo cual no siempre es posible.

Cabe señalar que de acuerdo a la definición de los errores (67) y (68), se considera únicamente una configuración en anillo, es decir, cada sistema está conectado únicamente al anterior y al siguiente, lo cual resta flexibilidad en los acoplamientos.

Sincronización mutua de manipuladores por medio de variables estimadas

En Rodríguez Ángeles (2002) se presenta un algoritmo de control para lograr la sincronización mutua en posición y velocidad de manipuladores robóticos cuando se cuenta únicamente con la medición de posición. Se consideran k sistemas cuyas ecuaciones están dadas por la forma general de los robots manipuladores de nGDL (10). El objetivo de sin-

cronización es definido por una serie de errores de sincronización dados por

$$\begin{aligned} e_{ij} &= q_i - q_j, & \forall i \neq j, \\ e_{ii} &= q_i - q_d, \end{aligned} \quad (75)$$

con $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Se definen igualmente los errores de sincronización,

$$s_i = e_{i,i} + \sum_{j=1, j \neq i}^k K_{i,j} e_{i,j}, \quad (76)$$

donde $K_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales semidefinidas positivas. Además se generan una serie de señales de referencia caracterizadas por las ecuaciones

$$q_{ri} = q_d - \sum_{j=1, j \neq i}^k K_{i,j} e_{i,j}. \quad (77)$$

Sin embargo, al considerarse que sólo se tiene acceso a la posición de los manipuladores, es necesario proponer un observador no lineal de estado completo de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{q}_i &= \dot{\hat{q}}_i + \mu_{i,1} \tilde{q}_i, \\ \frac{d}{dt} \dot{\hat{q}}_i &= -M_i(q_i)^{-1} [C_i(q_i, \hat{q}_i) \dot{\hat{q}}_i - \tau_i] + \mu_{i,2} \tilde{q}_i, \end{aligned} \quad (78)$$

donde

$$\tilde{q}_i = q_i - \hat{q}_i.$$

Finalmente, se construye una entrada de control linealizante dada por

$$\tau_i = M_i(q_i) \hat{\hat{q}}_{ri} + C_i(q_i, \hat{q}_i) \hat{\hat{q}}_{ri} + g_i(q_i) - K_{d,i} \hat{s}_i - K_{p,i} s_i, \quad (79)$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{q}_{ri} &= \dot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^k K_{i,j}(\hat{q}_i - \hat{q}_j), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ \hat{\dot{q}}_{ri} &= \ddot{q}_d - \sum_{j=1, j \neq i}^k K_{i,j}(\hat{\dot{q}}_i - \hat{\dot{q}}_j), \\ \hat{s}_i &= (\hat{q}_i - \dot{q}_d) + \sum_{j=1, j \neq i}^k K_{i,j}(\hat{q}_i - \hat{q}_j)\end{aligned}$$

y $K_{d,i}, K_{p,i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices de ganancia definidas positivas.

En el documento se presentan las pruebas de estabilidad y los procedimientos de sintonización de ganancias tal que en lazo cerrado se tiene estabilidad en el régimen de sincronización.

Ya que la estrategia de control emplea un observador, es posible lograr las metas planteadas a través de la medición de la posición únicamente; por otro lado, presenta robustez ante la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas; ambos hechos son probados experimentalmente por el autor.

Dentro de las limitaciones del la ley de control, se requiere conocer el modelo exacto de los manipuladores tanto para construir el observador como la señal de acoplamiento, lo cual limita en cierta medida su aplicación. Por otro lado, se supone el conocimiento de la velocidad y aceleración deseadas, estos es, \dot{q}_d, \ddot{q}_d , lo cual no es difícil en el caso de seguimiento de una señal de referencia, pero se complica al tratarse de las trayectorias de un sistema dinámico del cual no se tiene acceso al estado completo.

II.3 Análisis del capítulo

Con lo presentado en este capítulo es posible establecer el objetivo de sincronización perseguido, al respecto resulta de vital importancia la definición de una funcional para com-

parar las variables de interés en los sistemas de la red.

El enfoque de autosincronización que se revisó presenta un alcance limitado en términos de control, ya que en los documentos a los que se hace referencia sólo se trabaja con redes de sistemas en las que todos los objetos dinámicos parten del mismo modelo matemático y se da un margen muy pequeño en la consideración de incertidumbres paramétricas. Sin embargo, es importante considerar esta perspectiva pues al centrar su estudio en aspectos topológicos del arreglo y en las características dinámicas del sistema de interconexión, permite establecer un panorama más amplio en la búsqueda de soluciones al problema de sincronización controlada.

En cuanto a los algoritmos de control analizados, ambos proveen de grandes ventajas al ser aplicados a los casos específicos para los cuales fueron diseñados, pero conllevan limitaciones importantes al ser trasladados a un entorno diferente. En los capítulos por venir se busca solventar algunas de las restricciones mencionadas tratando de conservar de alguna manera los beneficios.

Capítulo III

Estructura de control con identificación de perturbaciones

La sincronización de sistemas dinámicos se ha planteado desde diferentes perspectivas, dando lugar a distintos algoritmos de control. Sin embargo, en la mayoría de los casos dichos algoritmos presentan dificultades serias en su implementación. Dentro de los problemas más comunes se encuentran la necesidad de conocer el modelo exacto de los sistemas, tener acceso al estado completo, presentan sensibilidad ante perturbaciones y el diseño de los mismos puede ser complicado. Estos obstáculos se magnifican al trasladarse al entorno de arreglos de sistemas.

El algoritmo de control propuesto por Rosas Almeida (2005) y denominado ECIP (Estructura de Control con Identificación de Perturbaciones) resuelve los problemas antes mencionados para una clase de sistemas dinámicos. Esta técnica requiere únicamente del vector de posición, ofrece robustez ante la presencia de perturbaciones acotadas y su diseño e implementación es bastante sencillo.

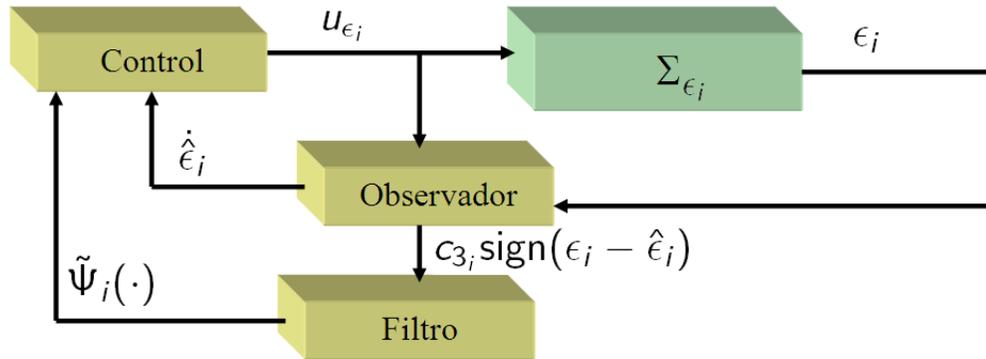


Figura 8: Estructura de Control con Identificación de Perturbaciones

La Figura 8 muestra un esquema de la ECIP. El núcleo sobre el cual basa su funcionamiento la estructura de control es la convergencia del observador robusto, basado en una estructura discontinua, que aplicado al sistema del error permite obtener la estimación del error de velocidad. Por otra parte, a través de un filtro pasa bajas es posible identificar aproximadamente el término de perturbación. La información obtenida es empleada posteriormente para construir la señal de acoplamiento.

Algunas de las ventajas enumeradas anteriormente pueden ser alcanzadas aplicando la técnica de control por modos deslizantes. Sin embargo, es conocido que esta técnica introduce oscilaciones de alta frecuencia en el estado, fenómeno conocido como *chattering*. Estas oscilaciones pueden ser especialmente dañinas en el caso de sistemas mecánicos. Afortunadamente, el control obtenido por medio de la ECIP no presenta este problema, o lo presenta de manera atenuada, lo que constituye una de las mejores características de esta estructura.

En su trabajo, Rosas Almeida (2005) emplea la ECIP en la sincronización de sistemas lagrangianos. En el presente documento se busca extender la aplicación de dicha estructura a la sincronización en posición de arreglos de sistemas dinámicos de segundo orden.

Puesto que el problema de la sincronización de dos sistemas da lugar a un error cuya

dinámica es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \Psi(\cdot) - m_s v,\end{aligned}\tag{80}$$

donde

$$\begin{aligned}\Psi(\cdot) &= f(x_r) - f(x_s) + m_r \tau - m_s \tau, \\ f(x_r), m_r &\Leftarrow \text{dinámica del sistema maestro,} \\ f(x_s), m_s &\Leftarrow \text{dinámica del sistema esclavo,} \\ \tau &\Leftarrow \text{entrada,} \\ v &\Leftarrow \text{señal de acoplamiento,}\end{aligned}$$

que es básicamente un sistema de segundo orden, es posible entonces aplicar el procedimiento de control propuesto para esta estructura. El término $\Psi(\cdot)$ representa en este caso las diferencias entre ambos sistemas, lo cual es visto como una perturbación.

Para el análisis de la estructura, primero se tomará el caso escalar, es decir, se supone que $e_1, e_2, \Psi(\cdot), v \in \mathbb{R}$.

III.1 Observador robusto

El observador del error de sincronización, contenido en la ECIP, está descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 + c_1 z_1, \\ \dot{\hat{e}}_2 &= -u + c_2 z_1 + c_3 \text{sign}(z_1),\end{aligned}\tag{81}$$

donde

$$\begin{aligned} z_1 &= e_1 - \hat{e}_1, \\ z_2 &= e_2 - \hat{e}_2, \\ u &= m_s v, \\ c_1, c_2, c_3 &\Leftarrow \text{constantes positivas,} \end{aligned}$$

que aplicado a (80) da lugar al sistema del error de observación

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - c_1 z_1, \\ \dot{z}_2 &= \Psi(\cdot) - c_2 z_1 - c_3 \text{sign}(z_1). \end{aligned} \tag{82}$$

Se propone el cambio de variable

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= z_2 - c_1 z_1, \end{aligned} \tag{83}$$

lo cual permite escribir a (82) como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \Psi(\cdot) - c_2 y_1 - c_1 y_2 - c_3 \text{sign}(y_1), \end{aligned} \tag{84}$$

que se llamará forma estándar de un SEV (Sistema de Estructura Variable).

III.1.1 Estabilidad de un SEV en la forma estándar

Primero se analiza (84) con $\Psi(\cdot) = 0$. El SEV puede verse como un par de estructuras,

para $y_1 > 0$,

$$S_1 : \dot{y}_1 = y_2, \quad (85)$$

$$\dot{y}_2 = -c_2 y_1 - c_1 y_2 - c_3$$

y para $y_1 < 0$

$$S_2 : \dot{y}_1 = y_2, \quad (86)$$

$$\dot{y}_2 = -c_2 y_1 - c_1 y_2 + c_3.$$

Se tiene entonces que el punto de equilibrio de cada estructura es único y se encuentra en la región de validez de la estructura opuesta,

$$y_{S_1}^* = \left[-\frac{c_3}{c_2} \quad 0 \right]^T, \quad (87)$$

$$y_{S_2}^* = \left[\frac{c_3}{c_2} \quad 0 \right]^T.$$

Aplicando un cambio de coordenadas en cada estructura,

$$S_1 : w_1 = y_1 + \frac{c_3}{c_2}, \quad (88)$$

$$w_2 = y_2;$$

$$S_2 : w_1 = y_1 - \frac{c_3}{c_2}, \quad (89)$$

$$w_2 = y_2;$$

ambas adquieren la forma

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= -c_2 w_1 - c_1 w_2.\end{aligned}\tag{90}$$

Se propone la función de Lyapunov

$$V(w) = w^T P w,\tag{91}$$

cuya derivada en las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(w) = -w^T w,\tag{92}$$

lo cual muestra que el origen del sistema (90) es global y exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov (Khalil, 1992), ya que

$$V\dot{V} < 0, \quad \forall w \neq 0,\tag{93}$$

y por lo tanto los puntos de equilibrio (87) lo son también.

Volviendo a las coordenadas originales, se obtiene la función de Lyapunov correspondiente a cada estructura

$$\begin{aligned}S_1 : \quad V_{S_1}(y) &= y^T P y + 2y^T P \gamma + \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 p_{11}, \\ \dot{V}_{S_1}(y) &= -y^T y - 2y^T \gamma - \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2;\end{aligned}\tag{94}$$

$$\begin{aligned}
S_2 : \quad V_{S_2}(y) &= y^T P y - 2y^T P \gamma + \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 p_{11}, \\
\dot{V}_{S_2}(y) &= -y^T y + 2y^T \gamma - \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{95}$$

Sin embargo, es necesario probar que el SEV (84) formado por las estructuras (85) y (86) es estable en su conjunto y no solo individualmente. En particular, interesa mostrar que las trayectorias del SEV (84) convergen al origen.

Se define un conjunto de tiempos

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots\}, \tag{96}$$

en los cuales se da la conmutación de una estructura a otra. Se supone que

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots, \tag{97}$$

donde t_0 es el tiempo inicial. Se tiene además que los subíndices

$$i, j \in \{1, 2\}, \quad i \neq j, \tag{98}$$

enumeran las estructuras que forman el SEV (84). Sin importar en qué estructura se inicie, la primera conmutación se presenta en t_1 y el estado pasa a la estructura S_i , donde evoluciona hasta presentarse la siguiente conmutación en t_2 . Como (93) se cumple en ambas estructuras, se tiene que

$$\|y(t_1)\| > \|y(t_2)\|. \tag{99}$$

Además, en el momento de un cambio de estructura se tiene $y_1 = 0$; en consecuencia,

$$\|y_2(t_1)\| > \|y_2(t_2)\|. \tag{100}$$

Al presentarse una conmutación el valor inicial de la función de Lyapunov en la estructura correspondiente es

$$\begin{aligned} S_1 : \quad V_{S_1}(y) &= p_{22}y_2^2 + 2\frac{c_3}{c_2}p_{12}y_2 + \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2p_{11}; \\ S_2 : \quad V_{S_2}(y) &= p_{22}y_2^2 - 2\frac{c_3}{c_2}p_{12}y_2 + \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2p_{11}. \end{aligned} \quad (101)$$

Si se considera la dinámica de cada estructura, puede notarse que cuando el sistema conmuta de S_1 a S_2 se tiene que $y_2 < 0$; por su parte, cuando el sistema cambia de S_2 a S_1 ocurre $y_2 > 0$, por lo tanto, en el momento en que inicia alguna de las dos estructuras, el valor inicial de la función de Lyapunov correspondiente es en ambos casos

$$V(y) = p_{22}y_2^2 + 2\frac{c_3}{c_2}p_{12} | y_2 | + \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2p_{11}, \quad (102)$$

y se tiene que

$$V_j(y(t_{n+1})) < V_i(y(t_n)); \quad (103)$$

es decir, el valor inicial de la función de Lyapunov de la estructura en la que se encuentra el sistema es menor que el valor inicial de la función de Lyapunov correspondiente a la estructura anterior, con lo cual se cumplen las condiciones del Teorema 17, probando estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Si ahora se toma el sistema perturbado y se aplican las mismas transformaciones (88) y (89), ambas estructuras quedan de la forma

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= -c_2w_1 - c_1w_2 + \Psi(t). \end{aligned} \quad (104)$$

En general, el término $\Psi(\cdot)$ es una perturbación no desvanescente acotada, que satisface

$$\|\Psi(\cdot)\| \leq \rho. \quad (105)$$

Por lo tanto es posible aplicar el Lema 15 cuyos resultados muestran que, para cada estructura, el punto de equilibrio se vuelve un atractor de radio b . Por tal motivo, para que el SEV conserve sus propiedades de estabilidad es necesario asegurar que el atractor correspondiente a cada estructura del sistema no cruce a la estructura contraria, lo cual se satisface si

$$c_3 > \frac{2c_2\rho}{\theta} \sqrt{\frac{\lambda_{max}^3(P)}{\lambda_{min}(P)}}, \quad (106)$$

donde $\lambda_{max}(P)$ y $\lambda_{min}(P)$ son los valores propios máximo y mínimo respectivamente de la matriz P .

Eligiendo el parámetro c_3 del observador conforme a (106), se asegura que el origen del sistema perturbado (104) es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov.

El valor de c_1 y c_2 debe asignarse buscando otorgar al sistema no perturbado (90) características deseadas de robustez y tiempo de convergencia, además que c_2 afecta directamente la elección de c_3 .

Cumpliendo lo anterior, se consigue entonces que

$$\begin{aligned} z_1 &\rightarrow 0, \\ z_2 &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (107)$$

y en consecuencia

$$\hat{e}_1 \rightarrow e_1, \quad (108)$$

$$\hat{e}_2 \rightarrow e_2.$$

III.2 Identificación de perturbaciones

El observador (81) contiene un término discontinuo que genera modos deslizantes de segundo orden en (84) cuya función de restricción es

$$s = y_1 = 0. \quad (109)$$

Existe una analogía entre el orden de los modos deslizantes y el grado relativo de la función s . En otras palabras, el orden de los modos deslizantes inducidos es igual al número de derivadas de la función s necesarias para que aparezca el término discontinuo.

Se tiene que el conjunto de deslizamiento de segundo orden está formado por las igualdades

$$s = \dot{s} = 0, \quad (110)$$

es decir,

$$y_1 = y_2 = 0. \quad (111)$$

Aplicando el método del control equivalente (Utkin, 1999) para determinar las ecuaciones que definen el movimiento del sistema en (110) se tiene que

$$\ddot{s} = \Psi(\cdot) - c_2 y_1 - c_1 y_2 - u_{eq} = 0 \quad (112)$$

y tomando en cuenta (111) se encuentra

$$u_{eq} = \Psi(\cdot). \quad (113)$$

Los modos deslizantes son en cierta forma una idealización donde la conmutación es de frecuencia infinita. Esto no es posible dadas las limitaciones físicas en los dispositivos reales. En consecuencia, el estado oscila en una vecindad de (110), oscilaciones que están compuestas por señales de alta frecuencia, así como por componentes lentas que determinan la dinámica del sistema en el conjunto de deslizamiento. Se considera que las ecuaciones de movimiento encontradas a partir del control equivalente son cercanas a las componentes lentas y pueden obtenerse mediante la aplicación de un filtro pasa bajas

$$\mu \dot{u}_{avg} + u_{avg} = c_3 \text{sign}(y_1), \quad (114)$$

lográndose

$$\lim_{\mu \rightarrow 0, \Delta/\mu \rightarrow 0} u_{avg} \rightarrow u_{eq}, \quad (115)$$

donde Δ es el ancho de la vecindad en la cual oscila el estado y se relaciona con la frecuencia de conmutación del control por

$$\Delta \approx \frac{1}{f}. \quad (116)$$

Las condiciones $\mu \rightarrow 0$ y $\Delta/\mu \rightarrow 0$ implican que la constante de tiempo del filtro debe tender a cero para no distorsionar las componentes de baja frecuencia del control a la vez que su ancho de banda debe estar muy por debajo de la frecuencia de conmutación del control. De esta forma es posible identificar la perturbación presente en el sistema

$$u_{avg} = \Psi(\cdot). \quad (117)$$

III.3 Diseño de la señal de acoplamiento

Una vez que se ha identificado la perturbación presente en el sistema es posible conformar una señal de control para llevar la dinámica del error de sincronización a cero. Se considera el control compuesto

$$u = u_0 + u_{avg}, \quad (118)$$

donde u_0 corresponde a la parte del control destinada a estabilizar el sistema (80) sin perturbaciones. Se propone un control linealizante

$$u_0 = k_p e_1 + k_v \hat{e}_2 \quad (119)$$

y la señal de acoplamiento es

$$v = \frac{1}{m_s} u, \quad (120)$$

con lo que en lazo cerrado se tiene

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (121)$$

$$\dot{e}_2 = \Psi(\cdot) - u_{avg} - k_p e_1 - k_v \hat{e}_2.$$

Una vez que converge el observador y se cumplen (108) y (117), el término u_{avg} rechaza la perturbación en el sistema, el cual toma entonces la forma

$$\dot{e} = Ae. \quad (122)$$

Eligiendo las constantes k_p y k_v tal que la matriz A sea Hurwitz, la dinámica del error converge al origen y se logra la sincronización.

III.4 Aplicación a nGDL

La ECIP puede ser aplicada a sistemas de nGDL. Cuando la dinámica del error de sincronización toma la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \Psi(\cdot) - M_s v \end{bmatrix}, \quad (123)$$

con $e, v \in \mathbb{R}^n$, $M_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de acoplamientos y perturbaciones.

Entonces las ecuaciones correspondientes a (84) toman la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \Psi(\cdot) - C_2 y - C_1 \dot{y} - C_3 \Phi(y) \end{bmatrix} \quad (124)$$

donde

$$\Phi(y) = \begin{bmatrix} \text{sign}(y_1) \\ \text{sign}(y_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(y_n) \end{bmatrix},$$

$y \in \mathbb{R}^n$ y $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales cuyos elementos son constantes positivas. El SEV (124) puede verse como n sistemas escalares en la forma estándar

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_i \\ \Psi_i(\cdot) - c_{2_i} y_i - c_{1_i} \dot{y}_i - c_{3_i} \text{Sign}(y_i) \end{bmatrix}, \quad (125)$$

con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

En consecuencia, el análisis del caso escalar se extiende a nGDL siempre que para cada SEV se cumplan las condiciones sobre los términos de perturbación y los parámetros de la ECIP se elijan conforme a los criterios establecidos. La aplicación a nGDL requiere utilizar

un observador, un filtro y una señal de acoplamiento por cada grado de libertad.

III.5 Resultados numéricos

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación en el que se busca sincronizar dos péndulos simples en configuración maestro/esclavo. El término de perturbación estará conformado por variaciones paramétricas introducidas en el modelo del esclavo.

El modelo del sistema maestro es

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1_m} &= x_{2_m}, \\ \dot{x}_{2_m} &= -\alpha \text{Sen}(x_{1_m}) - \beta x_{2_m} - \gamma \text{Sign}(x_{1_m}) + c\tau;\end{aligned}\tag{126}$$

mientras que para el sistema esclavo se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1_s} &= x_{2_s}, \\ \dot{x}_{2_s} &= -\alpha\Delta_1 \text{Sen}(x_{1_s}) - \beta\Delta_2 x_{2_s} - \gamma\Delta_3 \text{Sign}(x_{1_s}) + c\Delta_4 (\tau + v).\end{aligned}\tag{127}$$

En ambos casos los parámetros empleados fueron $\alpha = 67.91$, $\beta = 0.03$, $\gamma = 3.05$ y $c = 55.54$. Por su parte, las variaciones paramétricas introducidas en el modelo del esclavo fueron $\Delta_1 = 1.15$, $\Delta_2 = 0.93$, $\Delta_3 = 1.11$ y $\Delta_4 = 1.08$.

Aplicando una entrada $\tau = \text{sen}(t)$ y considerando que ambos sistemas parten del origen, se tiene en lazo abierto las respuestas mostradas en las figuras 9 y 10.

Se establece la dinámica del error de sincronización (80) y los parámetros empleados en el observador robusto (81) son $c_1 = 5$, $c_2 = 5$ y $c_3 = 10$. Para la identificación de perturbaciones, si bien hasta el momento se presentó la aplicación de un filtro pasabajas de primer orden, a lo largo de este trabajo se optó por emplear un filtro Butterworth pues permitió obtener mejores resultados. En este caso en particular se designó uno de orden 3,

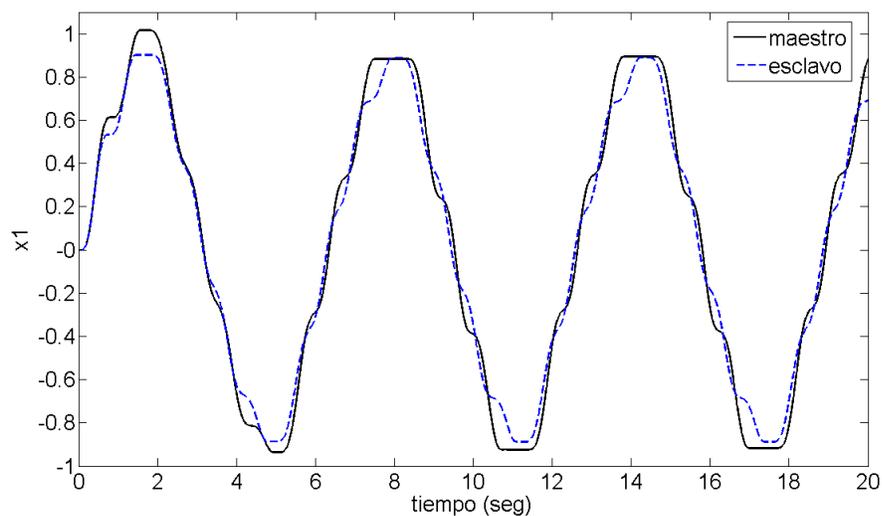


Figura 9: Posiciones no sincronizadas de los péndulos.

con frecuencia de corte en 15 Hz. Los parámetros del control linealizante son $k_p = 5$ y $k_v = 10$, los resultados obtenidos de los sistemas sincronizados se muestran en las figuras 11 y 12. La Figura 13 muestra la señal de acoplamiento.

Los resultados muestran algunas de las ventajas de la ECIP. Sólo fue necesario conocer

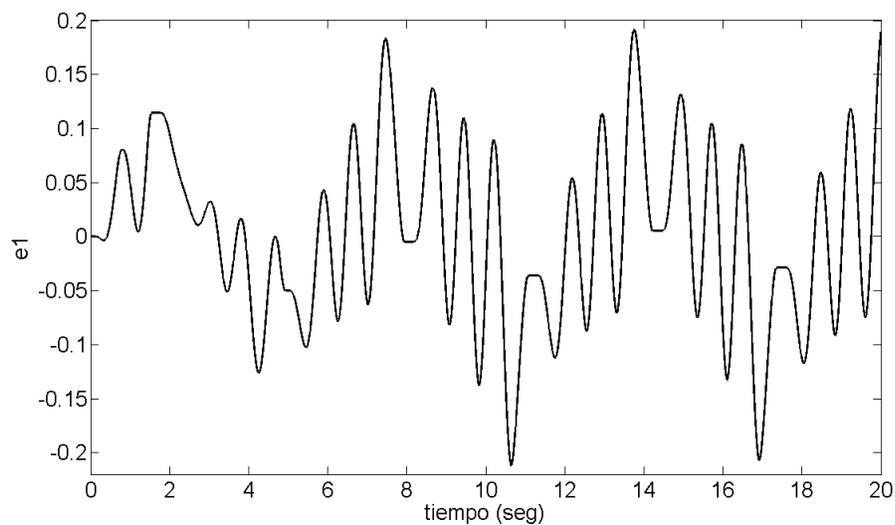


Figura 10: Error de posición correspondiente a la Figura 9.

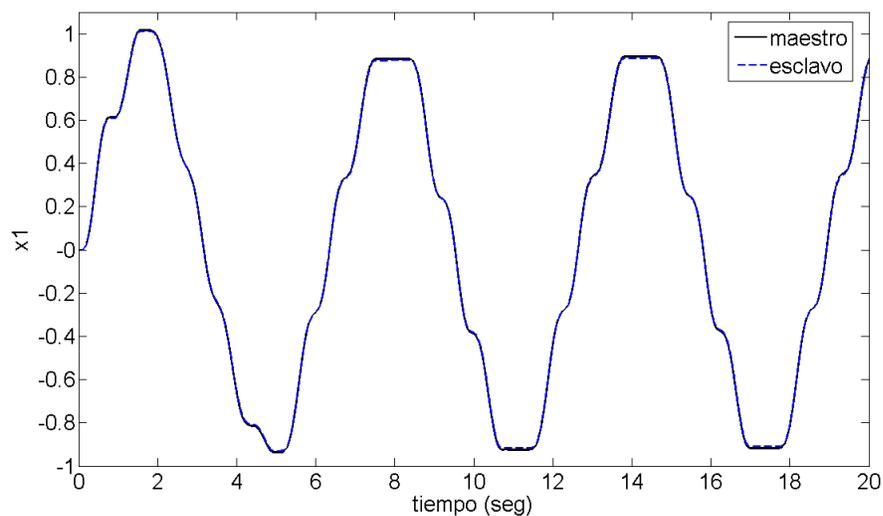


Figura 11: Sincronización en posición de los péndulos.

las posiciones x_{1_m} y x_{1_s} para establecer el error de sincronización y aplicar el observador. Como se muestra en la Figura 13, el control no presenta componentes de alta frecuencia que pudieran dar origen a vibraciones perjudiciales para el mecanismo.

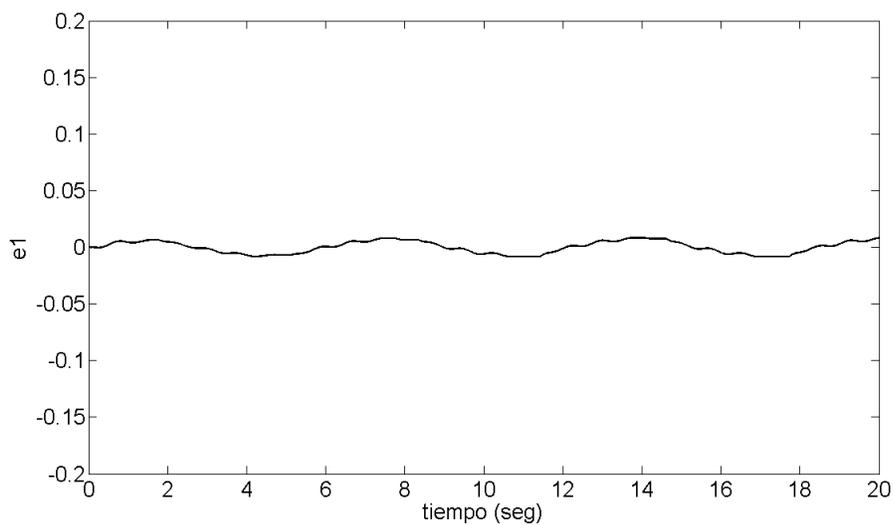


Figura 12: Error de posición correspondiente a la Figura 11.

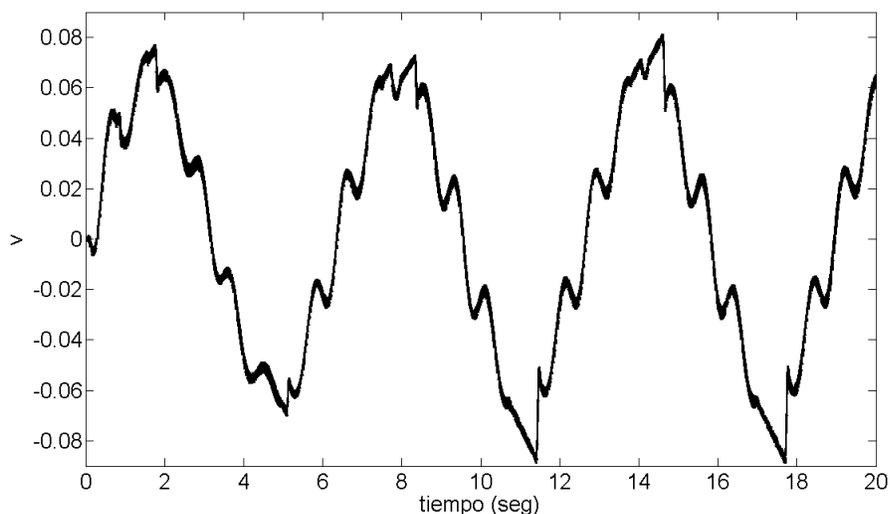


Figura 13: Señal de acoplamiento aplicada para sincronizar los péndulos.

III.6 Análisis del capítulo

En cualquier problema de control, siempre se desea que los algoritmos empleados posean características de robustez importantes ya que en cualquier tipo de aplicación siempre existen condiciones no modeladas que dan lugar a incertidumbres paramétricas e incluso al desconocimiento de la dinámica de la planta a controlar. Además deben considerarse toda clase de perturbaciones externas inherentes a cualquier sistema real.

Por otro lado, en el ámbito de la instrumentación siempre resulta costoso tener una medición fiable sobre las variables que interactúan en determinado proceso, y en el caso particular de sistemas mecánicos, es muy común contar únicamente con un vector de posiciones.

La ECIP proporciona solución para ambos problemas. Gracias al observador robusto, los requerimientos de información se reducen, requiriéndose acceso al vector de posición y eventualmente al término M_s acoplado a la entrada de control. Por otro lado, al ser capaz de identificar las perturbaciones externas, y en especial al trabajar sobre el sistema del error

de sincronización, todos los aspectos no modelados en el sistema pueden ser agrupados en el término $\Psi(\cdot)$ al igual que las perturbaciones externas.

Por lo anterior, y ya que en los capítulos por venir se trata el problema en el entorno de arreglos de sistemas, estas dos restricciones, la necesidad de información y la presencia de perturbaciones e incertidumbres, adquieren una dimensión mayor.

Capítulo IV

Sincronización de redes de sistemas

La sincronización de arreglos de sistemas implica un problema mayor que en el caso maestro/esclavo, pues el aumento en el número de sistemas involucrados acarrea invariablemente un incremento en las restricciones sobre el control, aparecen perturbaciones de mayor magnitud, se requiere información adicional sobre la manera en que interactúan los nodos del arreglo, etc.

Por tales motivos uno de los objetivos fundamentales en este capítulo es presentar la aplicación de la ECIP en la sincronización de arreglos con la finalidad de proporcionar robustez en el control y simplificar el proceso de diseño. Al igual que en el capítulo anterior se parte del análisis del caso escalar (1GDL) para luego extender los resultados a nGDL.

Se propone partir de un sistema de referencia de la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ f_r(q_r, \dot{q}_r) + m_r \tau \end{bmatrix}, \quad (128)$$

$$y_r = q_r,$$

donde $q_r, \dot{q}_r, \tau, m_r \in \mathbb{R}$, y $f_r : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Y se consideran h sistemas dinámicos, que han

de seguir la referencia, representados por

$$\begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ f_i(q_i, \dot{q}_i) + m_i(\tau + v_i) \end{bmatrix}, \quad (129)$$

$$y_i = q_i,$$

con $i \in \{1, 2, \dots, h\}$. Además se tiene que $q_i, \dot{q}_i, m_i, v_i \in \mathbb{R}$ y $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

El término q constituye, tanto en la referencia como en los nodos de la red, la posición y a su vez la salida de cada sistema. Por su parte v_i representa la señal de acoplamiento presente en el i -ésimo sistema.

Al tratar la sincronización de dos sistemas y en particular bajo el esquema maestro/esclavo, se busca hacer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_r - q_i\| = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, h\}, \quad (130)$$

dando lugar al error

$$e_i = q_r - q_i. \quad (131)$$

Sin embargo, adicionalmente se busca alcanzar la sincronización entre los sistemas del arreglo, lo cual implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_i - q_j\| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, h\}, \quad (132)$$

con lo cual se define

$$e_{ij} = q_i - q_j, \quad i \neq j. \quad (133)$$

El problema a enfrentar es, entonces, encontrar las señales de acoplamiento v_i que permitan satisfacer los objetivos dados por (130) y (132).

IV.1 Configuración del arreglo

Antes de abordar alguna estrategia de control para lograr los objetivos de sincronización planteados en la sección anterior, es necesario establecer la configuración o esquema de conexión del arreglo, además de algunas convenciones que definan la interacción entre los sistemas involucrados. En otras palabras, se debe construir la gráfica de conexión que defina los acoplamientos entre nodos.

Una aproximación natural para resolver el problema sería establecer conexiones maestro/esclavo (Fig. 14) para cada nodo, pues podría pensarse que logrando la sincronización de cada sistema con la referencia, se logra sincronizar a los sistemas entre sí. De esta manera la estrategia de control sería la misma que en el caso de un par de sistemas. Sin embargo, esta aproximación no toma en cuenta la dinámica presente en las conexiones, y en particular las perturbaciones que pueden hacer que la referencia recibida por cada nodo sea diferente. Por lo tanto podría darse el caso en que, visto desde cada nodo, se cumple (130) pero no (132).

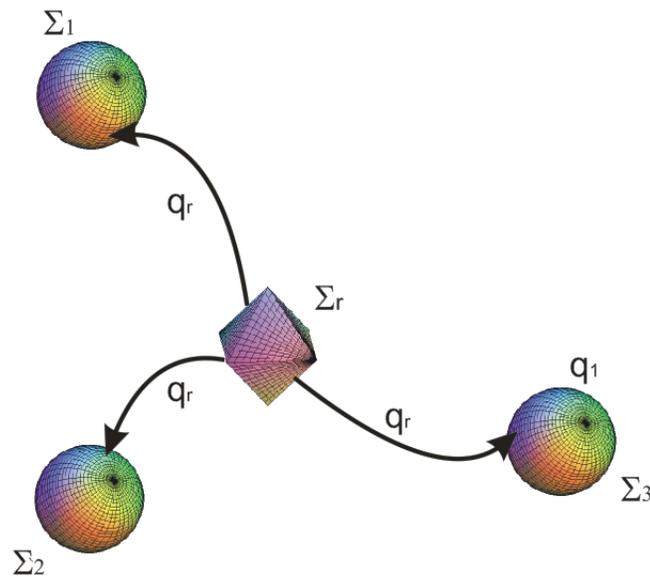


Figura 14: Conexión de la red en estrella

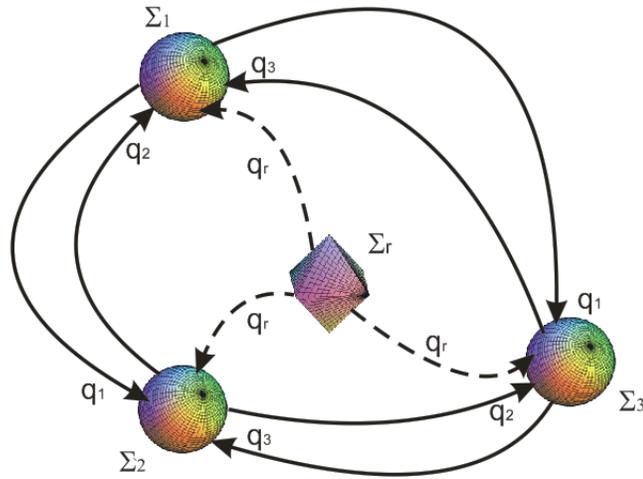


Figura 15: Conexión de la red en cadena completa

Es necesario establecer un esquema de conexión en el que haya una verdadera interacción entre nodos. Se considera entonces una configuración en la cual existe interconexión entre todos los sistemas de la red y de cada uno con la referencia, como se muestra en la Figura 15. En la gráfica de conexión, el sentido de las flechas define el camino de la información. Así, el nodo en el cual entra una flecha recibe la posición del nodo del cual proviene la misma. Las conexiones con la referencia se resaltan con una línea punteada.

Esta configuración, a la que se llamará en cadena completa, supone una gran cantidad de información disponible en cada nodo, lo cual eventualmente podría complicar el diseño de la señal de acoplamiento. Sin embargo, junto con este esquema de conexión se introduce la definición de un error auxiliar de la forma

$$\epsilon_i = k_1 e_i - \sum_{l=2, j=1, j \neq i}^h k_l e_{ij}, \quad (134)$$

con $\epsilon_i, e_i, e_{ij} \in \mathbb{R}$. Las constantes $k_i \geq 0$ se denominan de acoplamiento. La definición de

(134) nos lleva a una dinámica del error auxiliar de la forma

$$\Sigma_{\epsilon_i} : \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \dot{\epsilon}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_i \\ \Psi_i(\cdot) - u_{\epsilon_i} \end{bmatrix}, \quad (135)$$

$$y_{\epsilon_i} = \epsilon_i,$$

donde

$$\Psi_i(\cdot) = k_1[f_r(\cdot) - f_i(\cdot) + (m_r - m_i)\tau] - \sum_{l=2, j=1, j \neq i}^h k_l[f_i(\cdot) - f_j(\cdot) + (m_i - m_j)\tau] \quad (136)$$

y también

$$u_{\epsilon_i} = \sum_{l_a=1}^h k_{l_a} u_i - \sum_{l_b=2, j=1, j \neq i}^h k_{l_b} u_j. \quad (137)$$

Se aclara que los términos u_i y u_j se han definido conforme a (120).

Si ahora se hace

$$\epsilon_i = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, h\}, \quad (138)$$

entonces a partir de (134) se puede construir un sistema de h ecuaciones lineales,

$$K \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_h \end{bmatrix} = I k_1 q_r \quad (139)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{h \times h}$ es la matriz identidad y

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^h k_l & -k_2 & \cdots & -k_{h-1} & -k_h \\ -k_2 & \sum_{l=1}^h k_l & \cdots & -k_{h-1} & -k_h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -k_2 & -k_3 & \cdots & \sum_{l=1}^h k_l & -k_h \\ -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_h & \sum_{l=1}^h k_l \end{bmatrix}. \quad (140)$$

Si K^{-1} existe, la solución de (139) es única y corresponde a

$$q_1 = q_2 = \dots = q_h = q_r. \quad (141)$$

Entonces el objetivo es encontrar una señal de acoplamiento tal que la condición (138) sea satisfecha. La dinámica del error auxiliar definida por (135) tiene la forma de (80), por lo tanto, es posible aplicar la ECIP tal y como se describió en el capítulo anterior y encontrar las señales u_{ϵ_i} requeridas para llevar el sistema del error auxiliar al origen.

Sin embargo, una vez que se encuentran las señales u_{ϵ_i} , debe recordarse que corresponden al sistema del error auxiliar, por tal motivo no pueden aplicarse directamente en cada nodo. Desarrollando (137), se llega a

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_h \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} u_{\epsilon_1} \\ u_{\epsilon_2} \\ \vdots \\ u_{\epsilon_h} \end{bmatrix} \quad (142)$$

y como K^{-1} existe, es posible encontrar el valor de las señales de acoplamiento reales u_i a partir de las señales de acoplamiento auxiliares u_{ϵ_i} .

IV.1.1 Otras configuraciones

En este capítulo se ha introducido un esquema de configuración denominado de cadena completa, el cual implica la interconexión entre todos los nodos del sistema y con la referencia. Posteriormente se definió un error auxiliar que permite simplificar el objetivo de control al darle a la dinámica de dicho error la forma requerida para aplicar la estructura de control introducida en el Capítulo III. Esta definición dio origen a una matriz K , con elementos constantes k_i . Como única restricción se pide que K^{-1} exista. Sin embargo, no se ha comentado sobre el significado de las constantes.

Al analizar el i -ésimo nodo, la constante k_1 representa conexión con el sistema de referencia mientras que el resto de las constantes k_l representan la conexión con el resto de los nodos. Esta interpretación nos permite gran flexibilidad en el arreglo, ya que ante la ausencia de alguna conexión, simplemente se hace que la constante k_i correspondiente sea cero, cuidando siempre que K sea no singular.

De esta manera se construyen variaciones de la conexión en cadena completa simplemente modificando la estructura de la matriz K con todo lo que ello implica, es decir, la definición de cada uno de los errores auxiliares y por lo tanto la asignación de las señales de acoplamiento reales.

IV.2 Extensión a nGDL

Hasta ahora el análisis se ha hecho tomando sistemas de 1GDL en el arreglo; sin embargo, en el caso en que $q_r, q_i \in \mathbb{R}^n$ se llega al error auxiliar

$$\epsilon_i = K_1 e_i - \sum_{l=2, j=1, j \neq i}^h K_l e_{ij}, \quad (143)$$

donde $e_i, e_{ij}, \epsilon_i \in \mathbb{R}^n$ y $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales cuyos elementos son las cons-

tantes de acoplamiento. La dinámica de (143) es descrita por las ecuaciones

$$\Sigma_{\epsilon_i} : \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \dot{\epsilon}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_i \\ \Psi_i(\cdot) - u_{\epsilon_i} \end{bmatrix}, \quad (144)$$

$$y_{\epsilon_i} = \epsilon_i,$$

con $y_{\epsilon_i}, u_{\epsilon_i}, \Psi_i(\cdot) \in \mathbb{R}^n$.

En este caso, el término $\Psi_i(\cdot)$ agrupa, como perturbaciones externas, tanto las diferencias entre los nodos del arreglo, como los acoplamientos entre los grados de libertad presentes en un mismo sistema. Este aislamiento es posible gracias a las características de la ECIP.

Al desacoplar los grados de libertad en cada sistema, se puede escribir (144) para cada coordenada,

$$\Sigma_{\epsilon_{i_p}} : \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \epsilon_{i_p} \\ \dot{\epsilon}_{i_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{i_p} \\ \Psi_{i_p}(\cdot) - u_{\epsilon_{i_p}} \end{bmatrix}, \quad (145)$$

$$y_{\epsilon_{i_p}} = \epsilon_{i_p},$$

donde el subíndice $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ representa cada uno de los grados de libertad del i -ésimo sistema.

Haciendo este aislamiento, es posible dividir el problema como si se tratara de n arreglos cada uno con h sistemas dinámicos, a los cuales es posible aplicar paralelamente las estrategias de sincronización planteadas para el caso escalar.

IV.3 Resultados numéricos

Se busca sincronizar un arreglo de tres sistemas de 2GDL cuyos modelos matemáticos se obtienen a partir de un sistema mecánico (pendubot). Los nodos se conectan como se muestra

en la Figura 15. El modelo del sistema de referencia está dado por:

$$\begin{bmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ f_r(q_r, \dot{q}_r) \end{bmatrix}, \quad (146)$$

donde

$$f_r(q_r, \dot{q}_r) = M^{-1}(q_r)[-C(q_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r - D\dot{q}_r - G(q_r) + \tau]. \quad (147)$$

Por su parte para los tres sistemas del arreglo, se tienen las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ f(q_i, \dot{q}_i) + u_i \end{bmatrix}, \quad (148)$$

con

$$\begin{aligned} f_i(q_i, \dot{q}_i) &= M^{-1}(q_i)[-C(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i - D\dot{q}_i - G(q_i) - \varepsilon_i(\cdot) + \tau], \\ u_i &= M^{-1}(q_i)v_i. \end{aligned} \quad (149)$$

Se definen las matrices y vectores que constituyen los modelos matemáticos de los sistemas considerados,

$$M(q) = \begin{bmatrix} 0.0414 + 0.019\cos(q_2) & 0.0106 + 0.0095\cos(q_2) \\ 0.0106 + 0.0095\cos(q_2) & 0.0106 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -0.0095\dot{q}_2\text{sen}(q_2) & -0.0095\dot{q}_2\text{sen}(q_2) - 0.0095\dot{q}_1\text{sen}(q_2) \\ 0.0095\dot{q}_2\text{sen}(q_2) & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 2.04722\cos(q_1) + 0.6174\cos(q_1 + q_2) \\ 0.6174\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

Adicionalmente, se tienen los vectores

$$\varepsilon_1(\cdot) = \begin{bmatrix} 0.2\text{sen}(t) \\ 0.1\text{cos}(t) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2(\cdot) = \begin{bmatrix} 0.11\text{sen}(t) \\ 0.15\text{cos}(t) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3(\cdot) = \begin{bmatrix} 0.16\text{sen}(t) \\ 0.17\text{cos}(t) \end{bmatrix},$$

que simulan la presencia de perturbaciones externas en cada uno de los nodos de la red.

En cuanto a la definición de parámetros, primero se proponen las matrices C_1, C_2 a partir de las cuales, junto con el establecimiento de cotas máximas en los términos de perturbación, es posible utilizar (106) para encontrar el valor de C_3 que asegura la convergencia del observador. Sin embargo, el valor calculado no es necesariamente el óptimo y puede sintonizarse en línea buscando un mejor desempeño.

Para el observador, las ganancias utilizadas fueron

$$C_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 150 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix}.$$

Para el filtro, se tiene

$$\mu = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, en el control se hace

$$K_p = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Si se le otorga un valor unitario a todas las constantes de acoplamiento, se llega a

$$K = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (150)$$

y la asignación de las entradas de control es

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}u_{\epsilon_1} + \frac{1}{4}u_{\epsilon_2} + \frac{1}{4}u_{\epsilon_3}, \\ u_2 &= \frac{1}{4}u_{\epsilon_1} + \frac{1}{2}u_{\epsilon_2} + \frac{1}{4}u_{\epsilon_3}, \\ u_3 &= \frac{1}{4}u_{\epsilon_1} + \frac{1}{4}u_{\epsilon_2} + \frac{1}{2}u_{\epsilon_3}. \end{aligned} \quad (151)$$

Al iniciar la simulación se deja evolucionar libremente a los sistemas y al tiempo $t = 5$ segundos se aplican las señales de acoplamiento. El procedimiento se realiza de esta manera buscando contrastar el comportamiento de la red en lazo abierto contra las posiciones obtenidas una vez que se introducen las entradas de control.

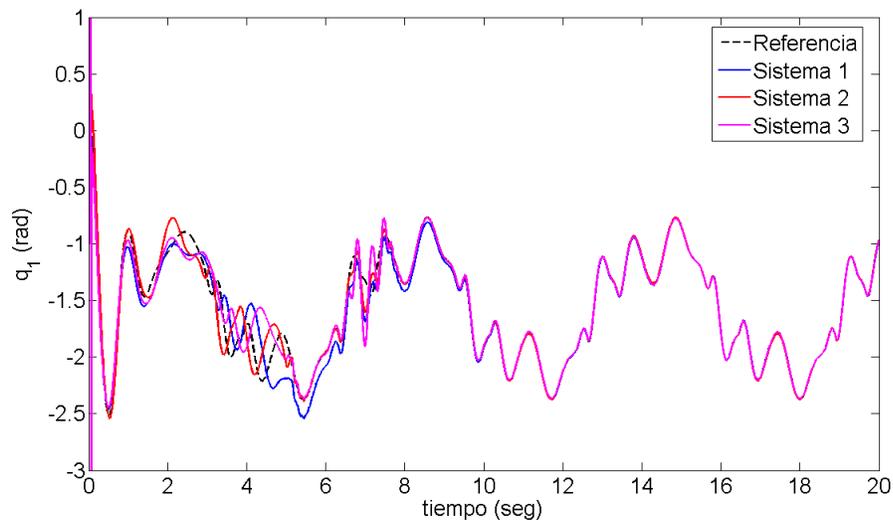


Figura 16: Posición del primer eslabón en cada sistema (2GDL) con la red conectada como cadena completa.

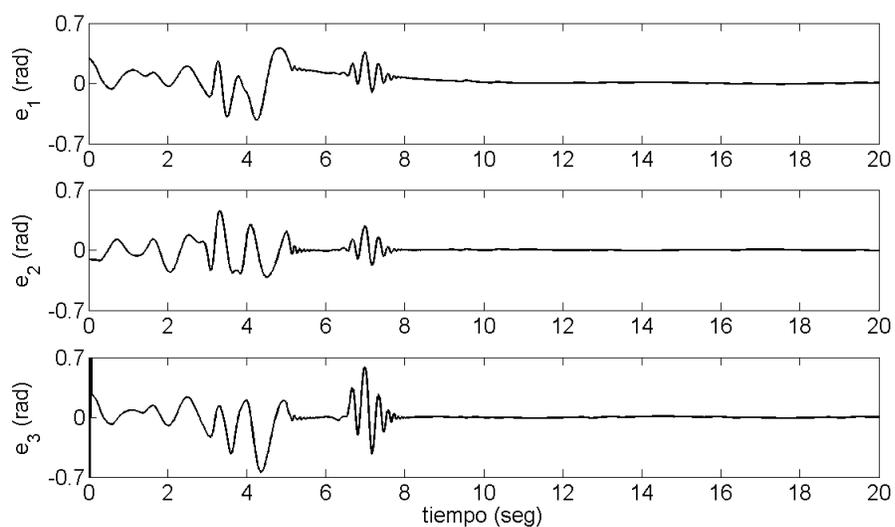


Figura 17: Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.

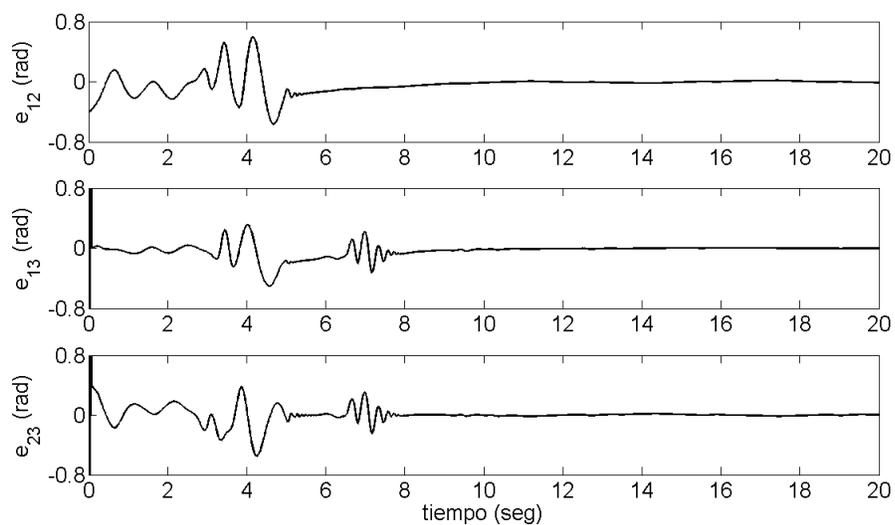


Figura 18: Errores de sincronización entre nodos correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.

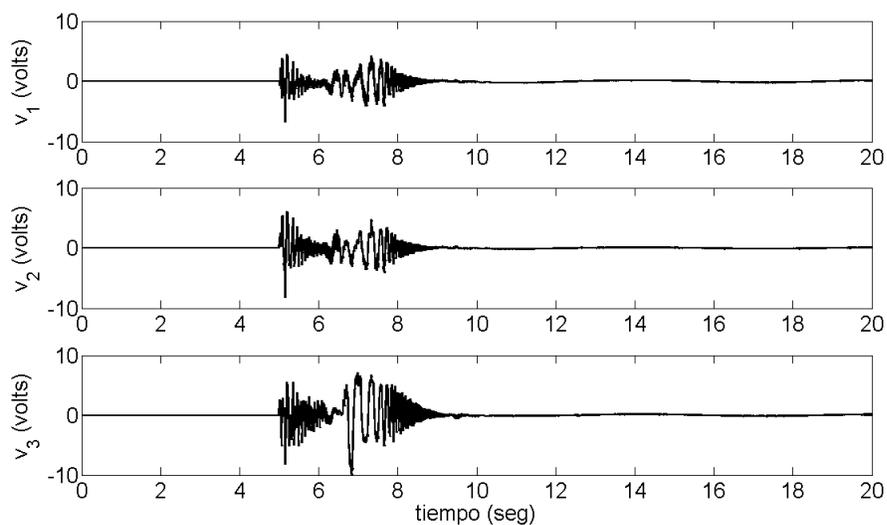


Figura 19: Señales de acoplamiento aplicadas al primer eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena completa.

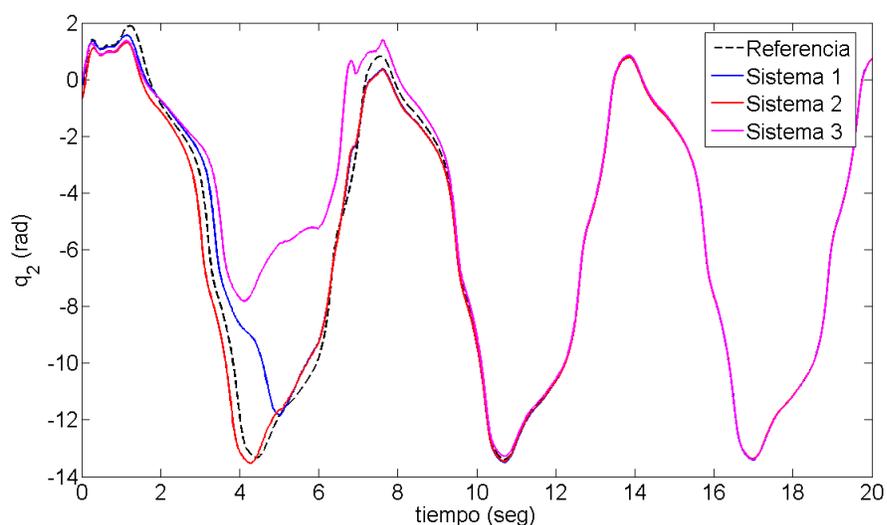


Figura 20: Posiciones del segundo eslabón de cada sistema (2GDL) correspondientes a la red conectada en cadena completa.

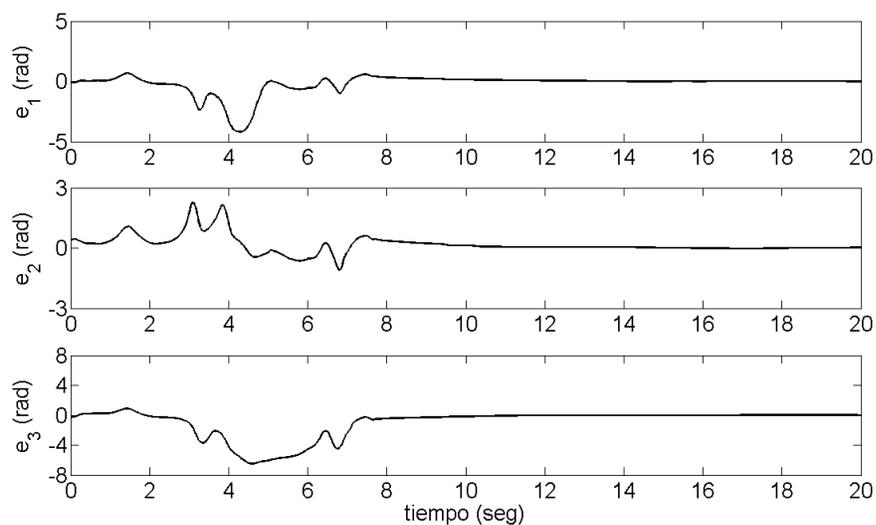


Figura 21: Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.

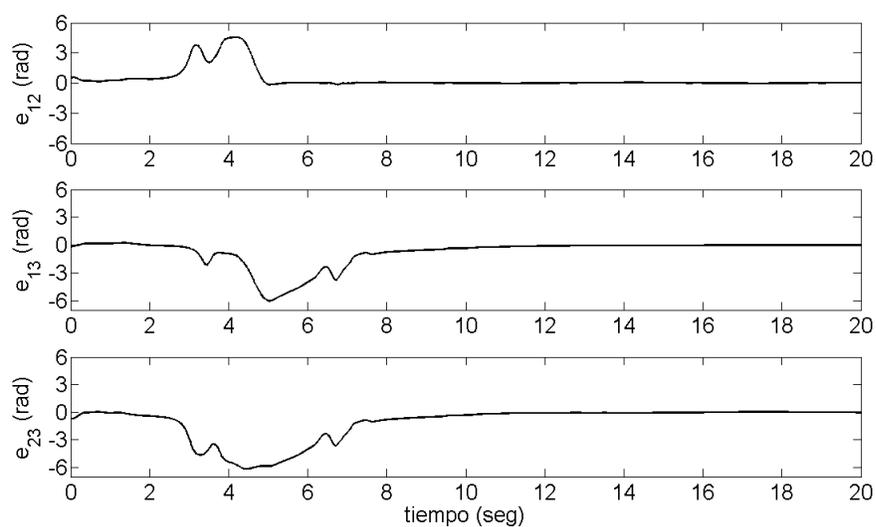


Figura 22: Errores de sincronización entre nodos correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena completa.

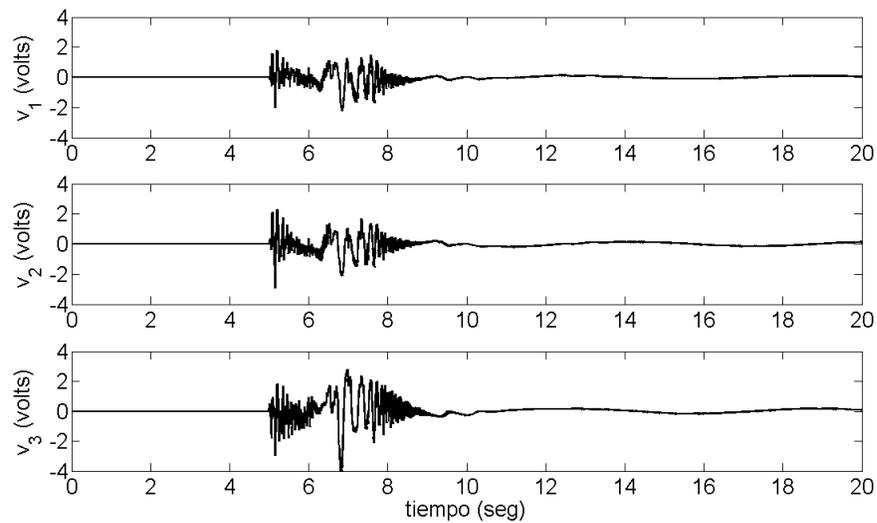


Figura 23: Señales de acoplamiento aplicadas al segundo eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena completa.

En las figuras 16 y 20 se presenta el comportamiento en la posición del primer y segundo eslabón respectivamente, puede verse que los errores de sincronización disminuyen considerablemente, como se muestra en las figuras 17, 18, 21 y 22.

En ambas coordenadas, al aplicar las entradas de control (figs. 19 y 23), se experimenta en cada entrada v_i un transitorio de amplitud relativamente grande, debido a la magnitud del error inicial. A pesar de esto, las señales obtenidas se encuentran dentro de un nivel aceptable y no presentan componentes de alta frecuencia que pudieran originar oscilaciones en la posición de los sistemas.

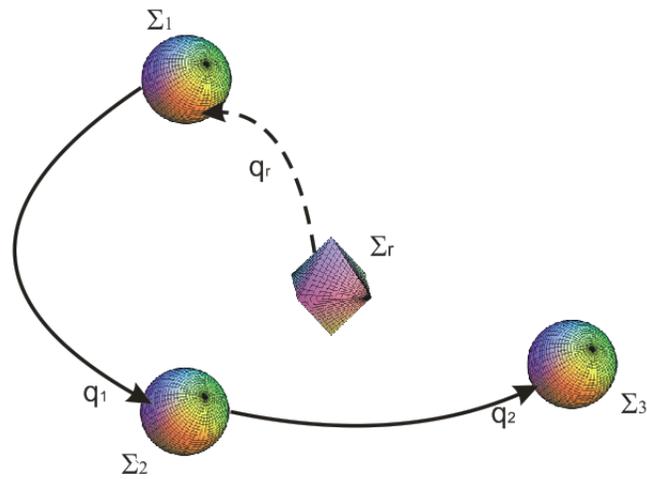


Figura 24: Conexión de la red en cadena abierta

Si ahora se toma el arreglo de la Figura 24, se forma la matriz

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (152)$$

con lo cual se tiene que la asignación de señales de acoplamiento es

$$u_1 = u_{\epsilon_1}, \quad (153)$$

$$u_2 = u_{\epsilon_1} + u_{\epsilon_2},$$

$$u_3 = u_{\epsilon_1} + u_{\epsilon_2} + u_{\epsilon_3}.$$

Los valores en los parámetros de la ECIP son los mismos que se usaron para la conexión en cadena completa, y de igual manera se dejan transcurrir 5 segundos sin la presencia de una señal de acoplamiento.

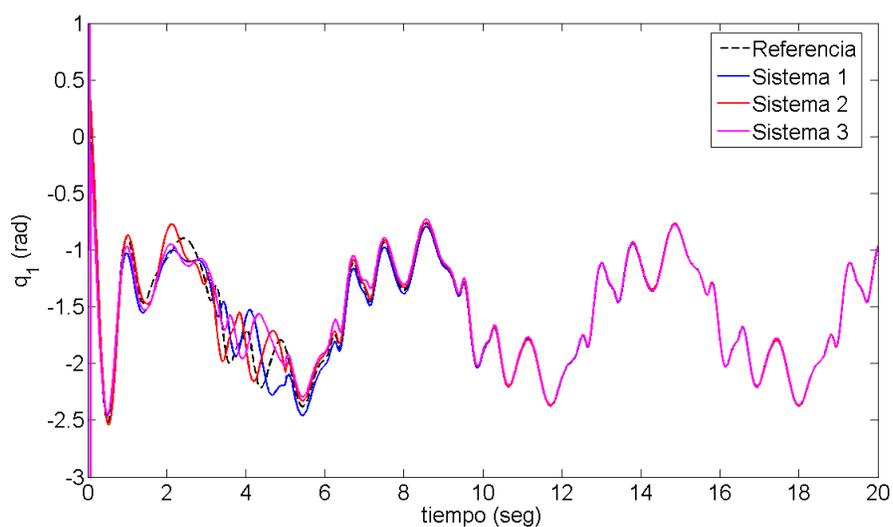


Figura 25: Posición del primer eslabón en cada sistema (2GDL) de la red conectada como cadena abierta.

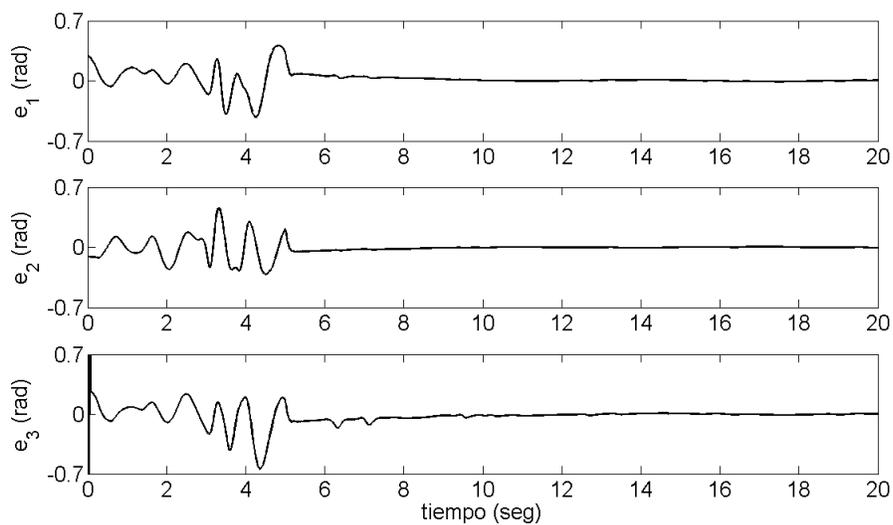


Figura 26: Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.

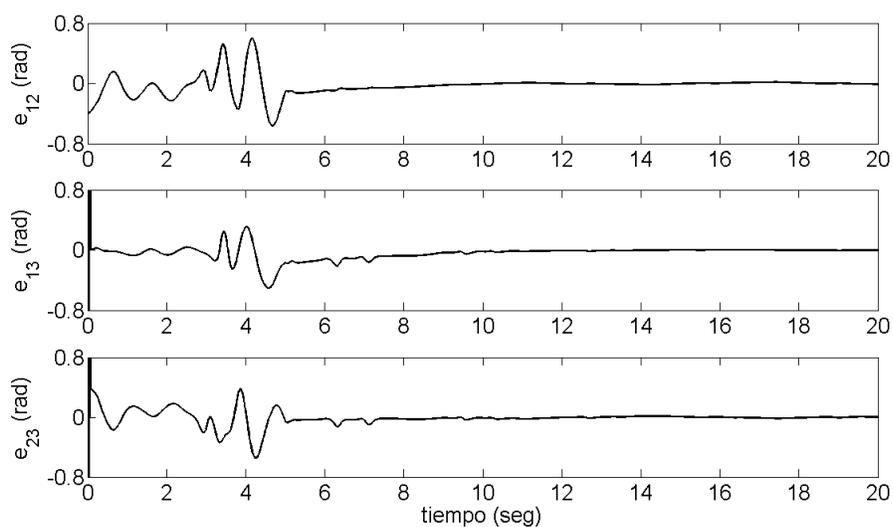


Figura 27: Errores de sincronización entre nodos correspondientes al primer eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.

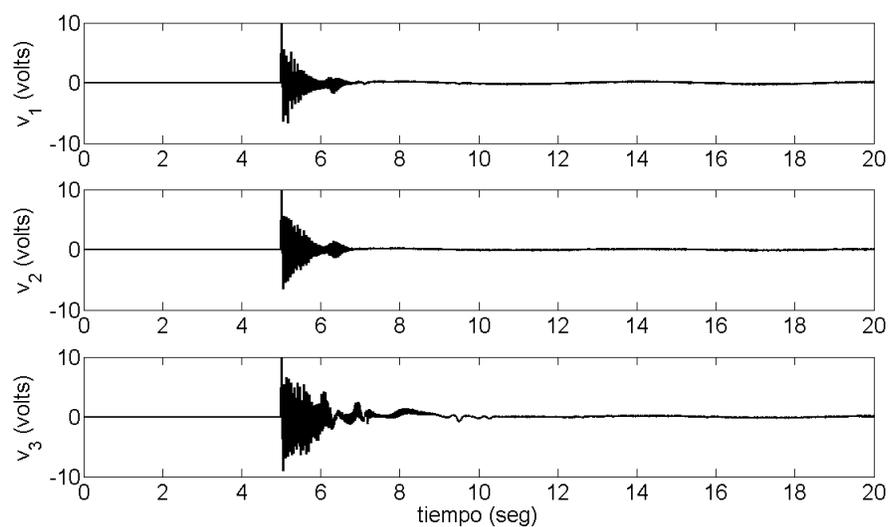


Figura 28: Señales de acoplamiento aplicadas al primer eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena abierta.

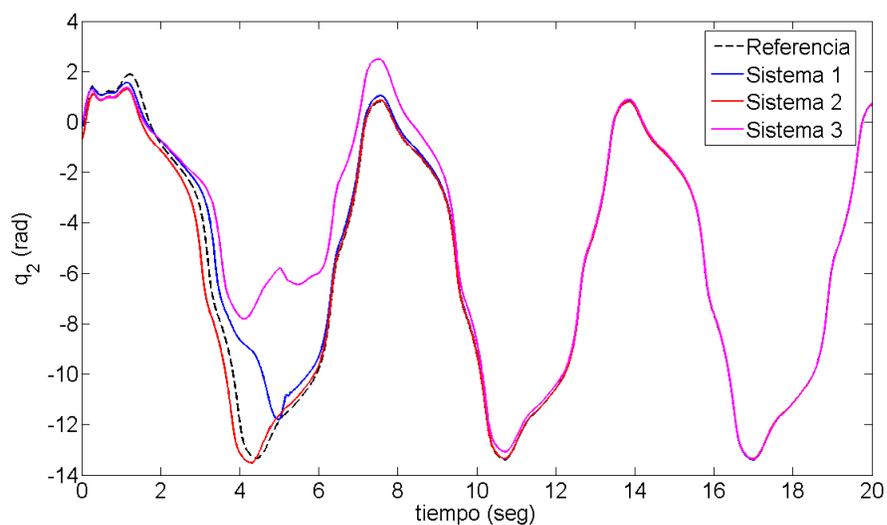


Figura 29: Posición del segundo eslabón en cada sistema (2GDL) de la red conectada como cadena abierta.

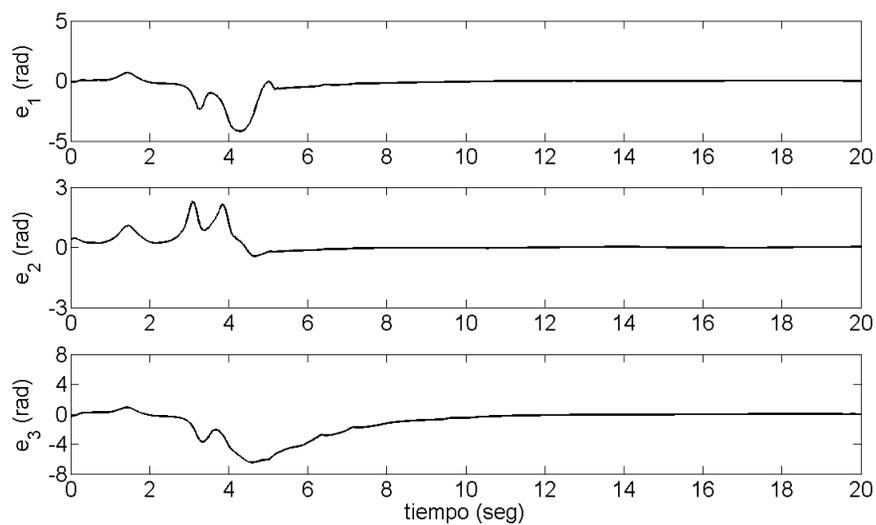


Figura 30: Errores de sincronización de cada nodo con respecto a la referencia correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.

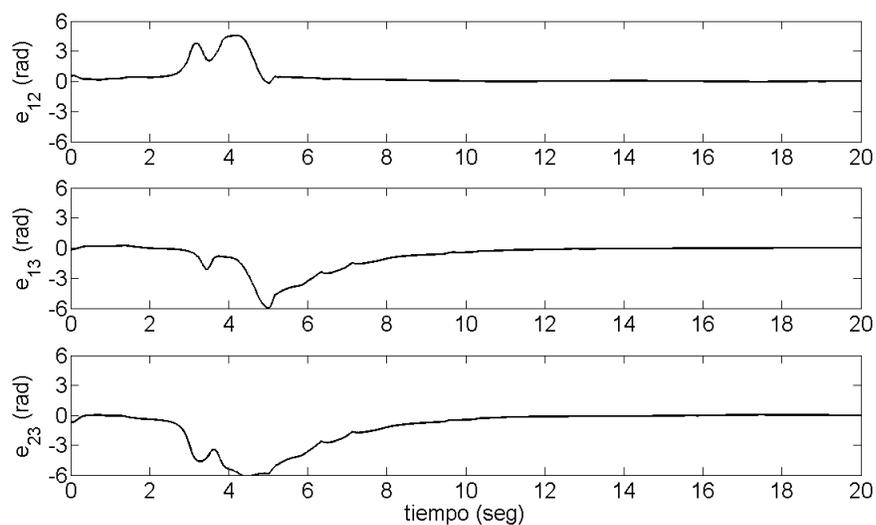


Figura 31: Errores de sincronización entre nodos correspondientes al segundo eslabón de cada sistema (2GDL) del arreglo en cadena abierta.

Como se observa en las figuras 25 a la 32 es posible, incluso en el caso de pérdida de conexiones, sincronizar todos los nodos de la red.

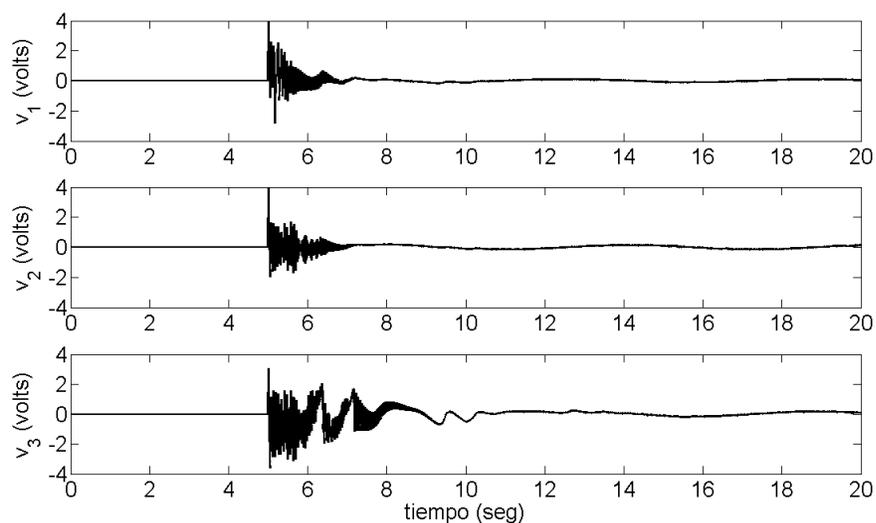


Figura 32: Señales de acoplamiento aplicadas al segundo eslabón de cada nodo (2GDL) en la red conectada como cadena abierta.

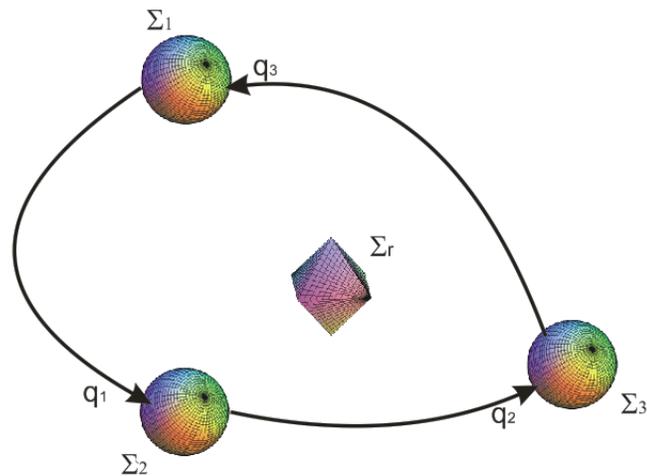


Figura 33: Conexión en cadena abierta

Si ahora se considera la configuración mostrada en la Figura 33 se tiene el caso especial en que la matriz de acoplamiento

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (154)$$

es singular, lo que corresponde a que el sistema de referencia está desconectado del resto de los nodos y por lo tanto no es posible resolver el problema de sincronización aplicando las estrategias presentadas.

IV.4 Análisis del capítulo

En este capítulo se describieron dos ideas fundamentales. La primera de ellas fue plantear un esquema de conexión en el cual todos los nodos de un arreglo están interconectados, lo cual ofrece grandes beneficios en términos de robustez frente a pérdida de conexiones, ya que es posible encontrar caminos alternos para que la información proveniente de la referencia llegue a cada uno de los sistemas.

El otro objetivo fundamental fue mostrar cómo es posible aplicar la estructura de control analizada en el Capítulo III a la sincronización de arreglos.

La definición de un error auxiliar permite simplificar bastante el problema y obtener un sistema dinámico al cual es posible aplicar la ECIP, obteniéndose con ello todos los beneficios que esta estrategia de control puede brindar, particularmente el rechazo a perturbaciones y la disminución de altas frecuencias en las señales de acoplamiento obtenidas.

Por lo tanto, este capítulo presentó las bases necesarias para entender los resultados que serán presentados en el próximo y que corresponden a una serie de pruebas experimentales desarrolladas con diferentes dispositivos de naturaleza mecánica, electrónica y digital.

Capítulo V

Resultados experimentales

Una vez que se han sentado las bases conceptuales que permiten entender de mejor manera los aspectos concernientes a la sincronización de arreglos, en particular empleando las estrategias de control presentadas a lo largo de este documento, es necesario trasladar el análisis al laboratorio.

En los experimentos se prueban configuraciones usando básicamente cuatro dispositivos. Estos sistemas fueron los siguientes:

1. Un péndulo mecánico que corresponde a un sistema tipo Pendubot, de la marca *Mechatronic Systems Incorporated*, al cual se le removió el segundo eslabón, por lo que presenta una dinámica descrita por las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{155}$$

$$\dot{x}_2 = -67.91 \text{ Sen}(x_1) - 0.03 x_2 - 3.05 \text{ Sign}(x_2) + 55.54 \tau.$$

2. Tres circuitos electrónicos que fueron implementados basándose en las ecuaciones matemáticas del sistema mecánico descrito en el punto anterior, a los que llamamos “circuitos-péndulo”.



Figura 34: Pendubot.

3. Un circuito oscilador tipo Duffing, con una dinámica dada por el modelo

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (156)$$

$$\dot{x}_2 = -41.345 x_1 - 41.345 x_1^3 - 1.6075 x_2 + 41.345 \tau.$$

4. Dos dispositivos masa-resorte-amortiguador (MRA) cuyo comportamiento se caracteriza por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (157)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha}{\gamma} x_1 - \frac{\beta}{\gamma} x_2 + \frac{1}{\gamma} \tau.$$

Antes de iniciar con la presentación de los experimentos, conviene establecer una serie de convenciones. En cada caso, a menos que se especifique lo contrario, el arreglo se conecta en cadena completa (Fig. 15) y, tanto los nodos como la referencia, se someten a una entrada senoidal de 1 v de amplitud y frecuencia de 1 rad/seg. En cuanto a las posiciones, si bien para los circuitos electrónicos se obtuvieron en forma de potencial (volts) y para los mecanismos a través de cuentas entregadas por los encoders, se hicieron los escalamientos necesarios para presentarlas en radianes.



Figura 35: Mecanismo masa-resorte-amortiguador.

V.1 Arreglo péndulo mecánico / 3 circuitos-péndulo

En esta sección el arreglo está conformado por tres circuitos-péndulo y, como referencia, se toma un péndulo mecánico (pendubot). Se busca presentar la efectividad de la ECIP ante diferentes configuraciones, por lo cual se muestran los resultados obtenidos con tres conexiones, en estrella (M/S), en cadena completa (CC) y en cadena abierta (CA), que corresponden a las figuras 14, 15 y 24, respectivamente.

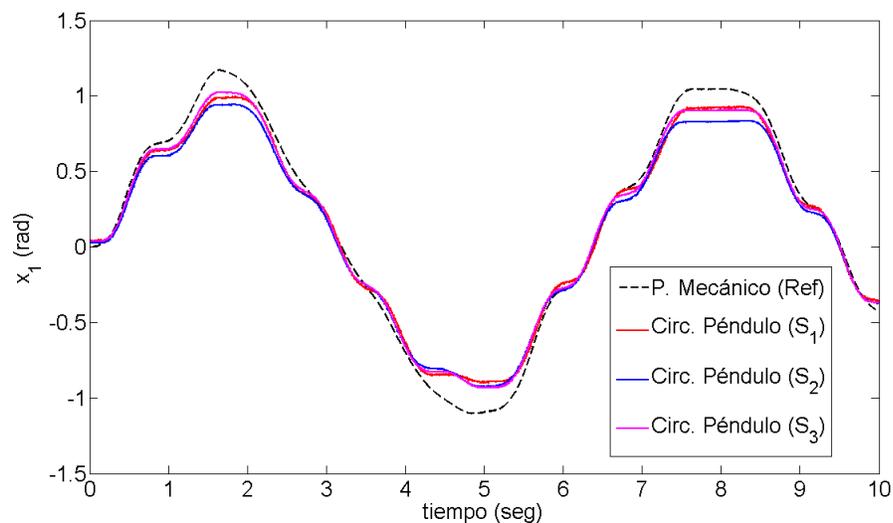


Figura 36: Posiciones no sincronizadas del péndulo mecánico y los circuitos-péndulo.

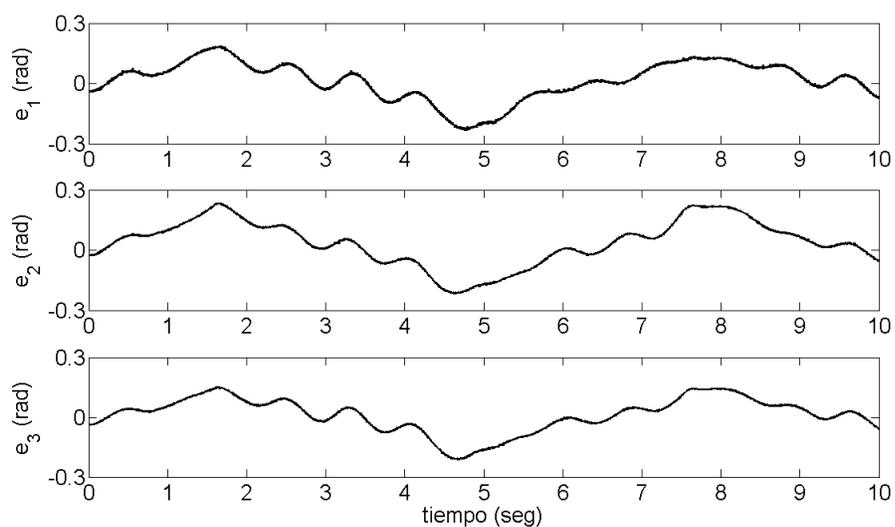


Figura 37: Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico sin la presencia de una señal de acoplamiento.

El comportamiento de los sistemas en el arreglo sin la presencia de la señal de acoplamiento es mostrado en las figuras 36, 37 y 38.

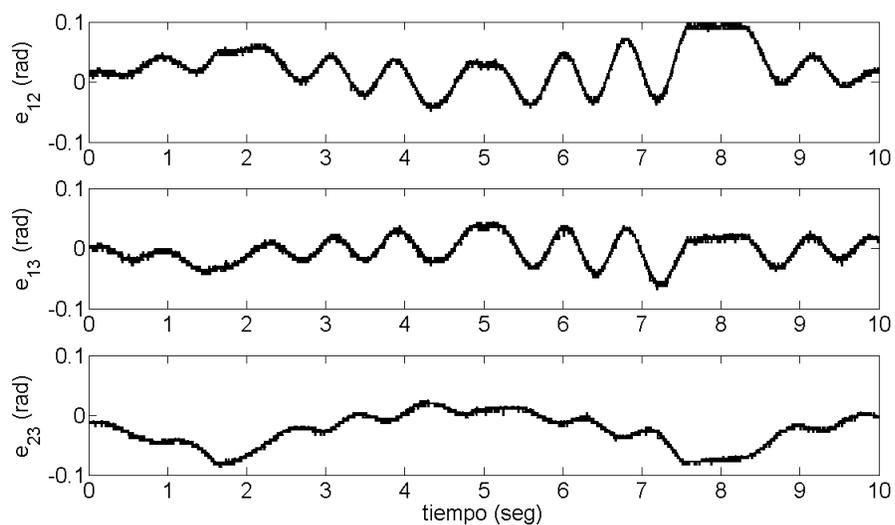


Figura 38: Errores de sincronización entre circuitos-péndulo sin la presencia de una señal de acoplamiento.

Tabla I: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de circuitos-péndulo conectados en estrella tomando como referencia un péndulo mecánico.

ECIP _{S₁}	ECIP _{S₂}	ECIP _{S₃}
$c_1 = 4$	$c_1 = 4$	$c_1 = 4$
$c_2 = 4$	$c_2 = 4$	$c_2 = 4$
$c_3 = 10$	$c_3 = 10$	$c_3 = 10$
$n = 3$	$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$
$k_p = 50$	$k_p = 50$	$k_p = 50$
$k_v = 10$	$k_v = 10$	$k_v = 10$

La posición de cada sistema diverge con respecto a la referencia; sin embargo, el error no es de gran amplitud, lo cual anticipa que el esfuerzo de control requerido no será muy grande. Las mayores diferencias ocurren en los valores extremos de la posición, lo cual queda de manifiesto analizando los momentos en que el error es mayor (Fig. 37). Por otro lado, los sistemas en el arreglo están más cercanos entre sí que con respecto a la referencia, hecho que puede esperarse dada la naturaleza de cada elemento: mientras que los péndulos son todos electrónicos, el pendubot es un dispositivo mecánico.

Primero se prueba la conexión en estrella. Debido a que cada uno de los sistemas involucrados en el arreglo parten del mismo modelo matemático, los valores de los coeficientes c_1 , c_2 y c_3 empleados no son elevados (Tabla I); aún así, en diversos experimentos se confirmó una buena convergencia del observador en cada estructura de control.

Con la conexión en estrella se logra que el error contra la referencia disminuya considerablemente. Indirectamente el error de sincronización entre sistemas también experimenta una reducción. Debe notarse además que las señales de acoplamiento aplicadas son de amplitud pequeña y que en gran medida están libres de frecuencias excesivamente altas (Fig. 42).

Para la configuración en cadena completa es necesario emplear parámetros de mayor magnitud en el observador (Tabla II) ya que se trabaja sobre el sistema del error auxiliar, lo cual genera que las perturbaciones en cada nodo se combinen y en cierta medida se magnifiquen.

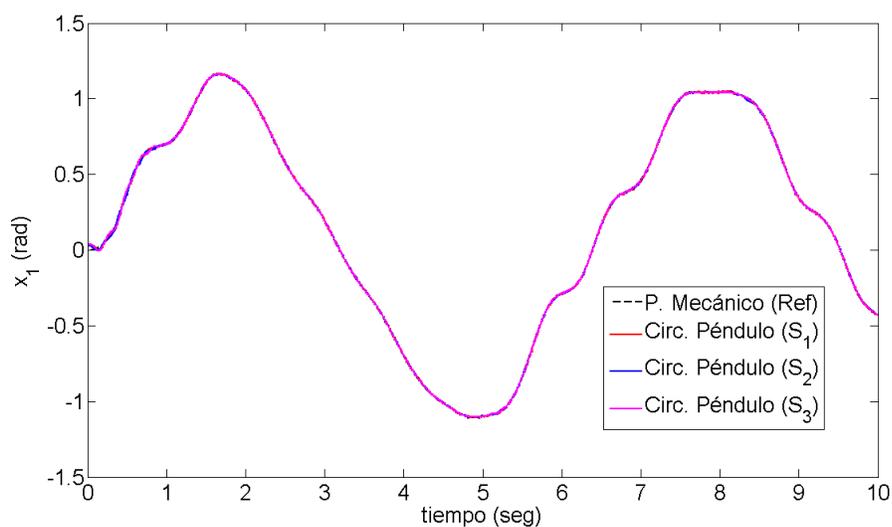


Figura 39: Sincronización en posición del péndulo mecánico y los circuitos-péndulo para un arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 42.

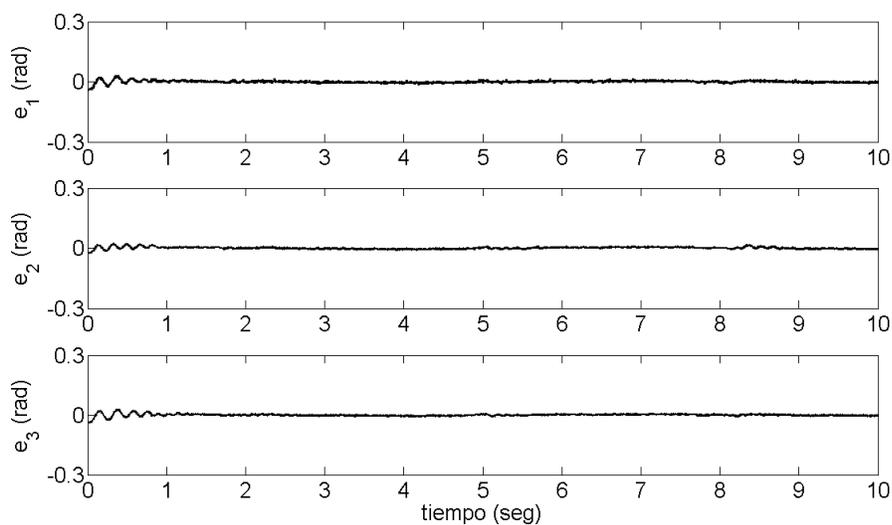


Figura 40: Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico conectando el arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 42.

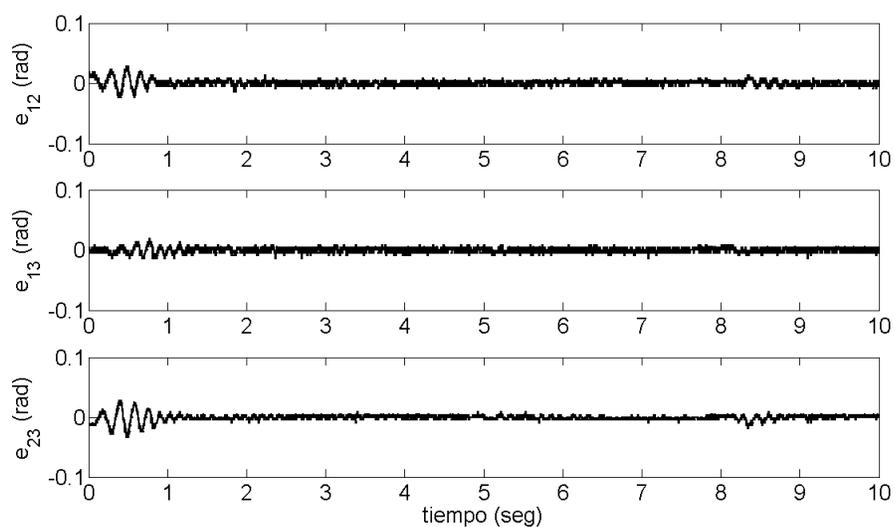


Figura 41: Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 42

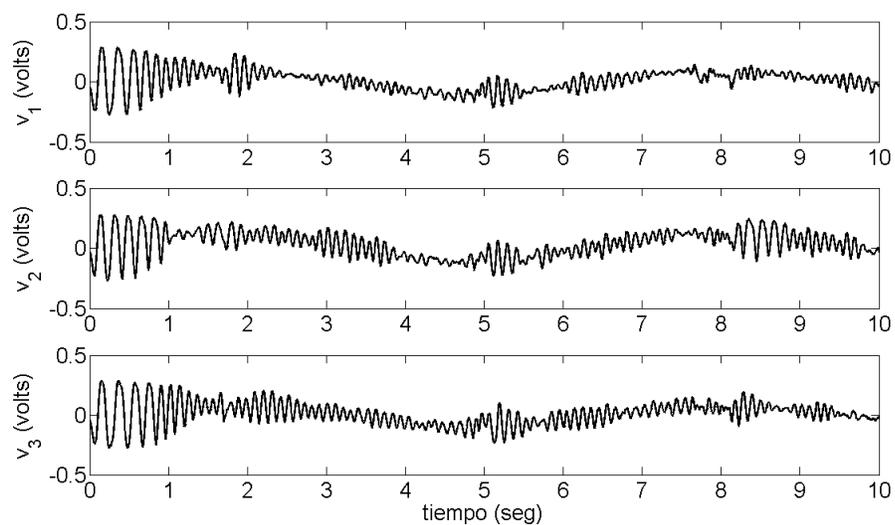


Figura 42: Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla I.

Tabla II: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de circuitos-péndulo conectados en cadena completa tomando como referencia un péndulo mecánico.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2	ECIP ϵ_3
$c_1 = 10$	$c_1 = 40$	$c_1 = 10$
$c_2 = 10$	$c_2 = 10$	$c_2 = 10$
$c_3 = 120$	$c_3 = 200$	$c_3 = 120$
$n = 3$	$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 10$ Hz	$f_c = 10$ Hz	$f_c = 10$ Hz
$k_p = 20$	$k_p = 40$	$k_p = 5$
$k_v = 40$	$k_v = 60$	$k_v = 10$

Con este arreglo en cadena completa se logra una disminución en los niveles del error de sincronización con respecto a la referencia y entre sistemas, similar al obtenido con los sistemas conectados en estrella.

Sin embargo, al asignar valores más grandes a cada coeficiente c_3 , la señal de control obtenida es mayor tanto en magnitud como en contenido de altas frecuencias (Fig. 45).

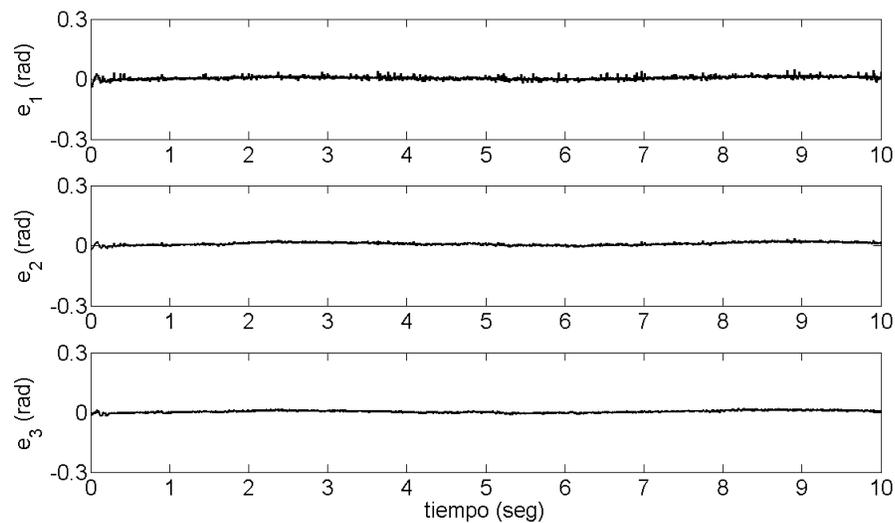


Figura 43: Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 45.

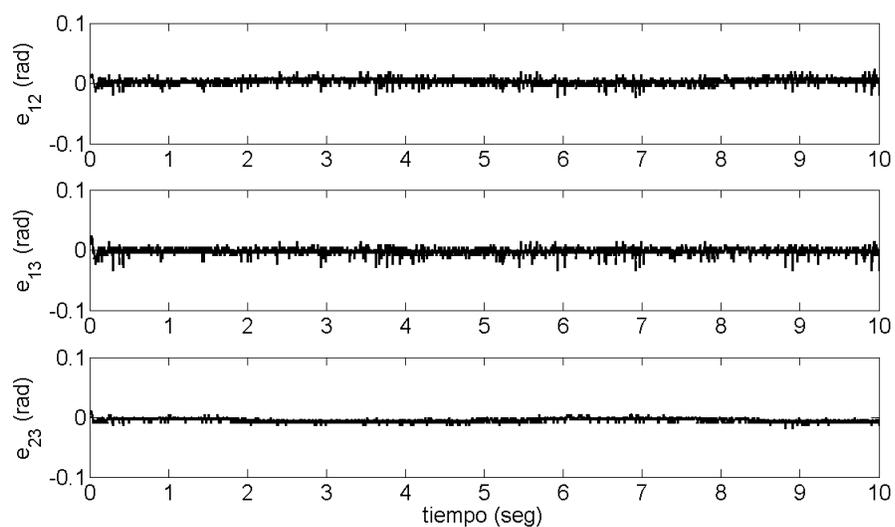


Figura 44: Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 45

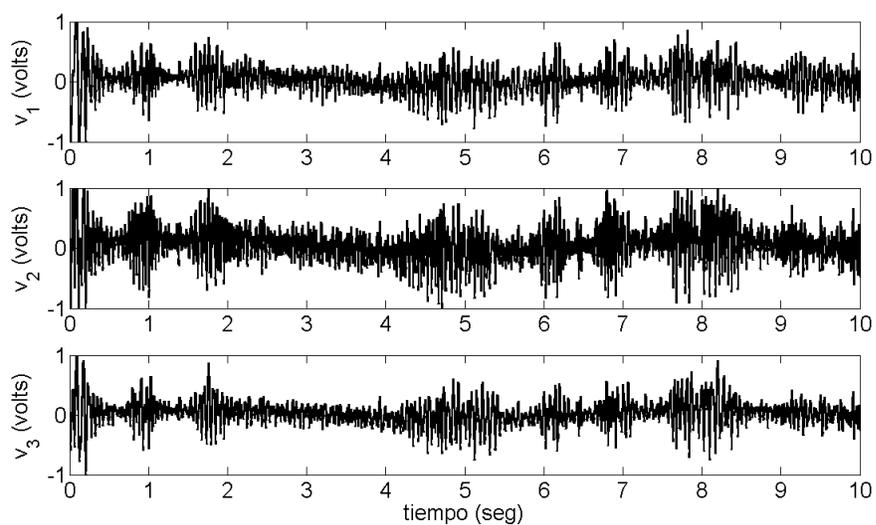


Figura 45: Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla II.

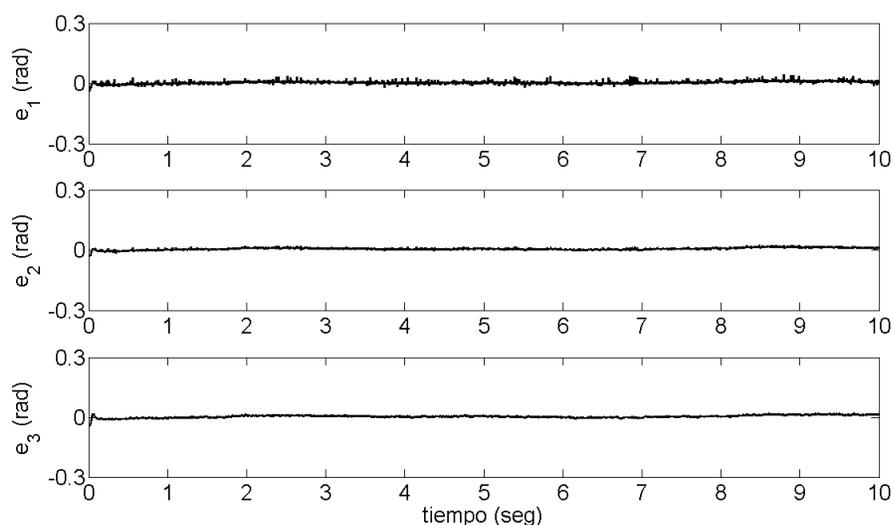


Figura 46: Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo mecánico conectando el arreglo en cadena abierta. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 48.

El arreglo en cadena abierta puede verse como originado a partir de uno en cadena completa, en el cual se han perdido varias conexiones.

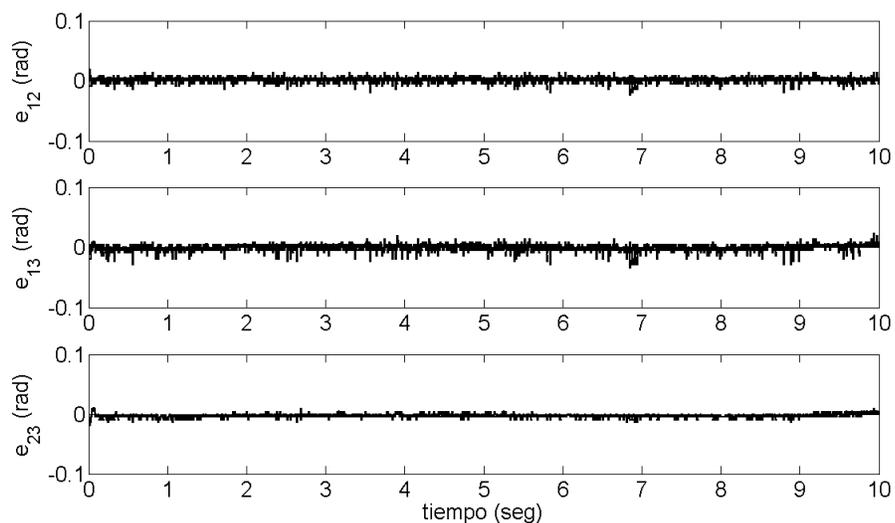


Figura 47: Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en cadena abierta. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 48.

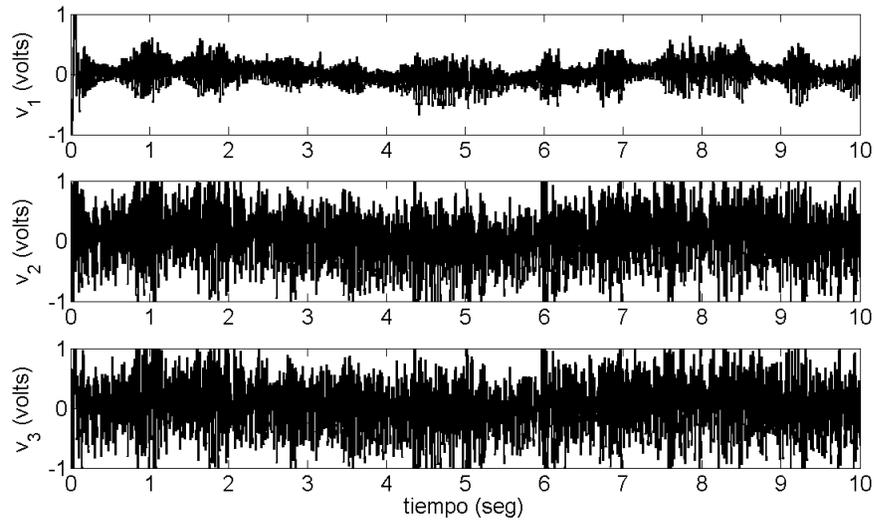


Figura 48: Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla II.

La pérdida de comunicación entre sistemas da lugar a muchas combinaciones diferentes, se toma esta configuración en particular por considerarse un caso límite.

Los resultados presentados se obtuvieron empleando parámetros en el observador, el filtro y el control iguales que en la configuración en cadena completa (Tabla II). Prácticamente los errores de sincronización son de igual magnitud a los vistos con las otras conexiones a costa de un esfuerzo de control superior en frecuencia y amplitud.

V.2 Arreglo oscilador de Duffing / 3 circuitos-péndulo

Se trata de un arreglo en cadena completa en el cual se prueban diferentes parámetros en el observador y el control con la finalidad de analizar el desempeño de la estructura ante tales variaciones.

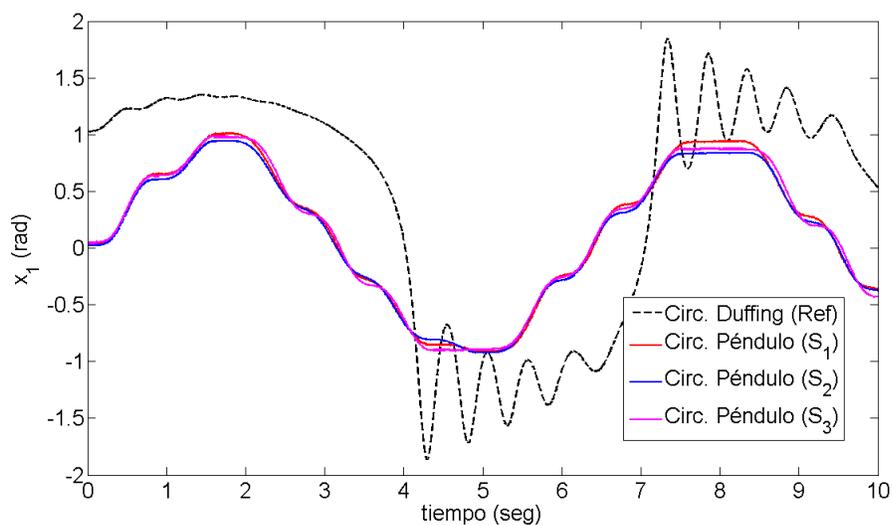


Figura 49: Posiciones no sincronizadas del oscilador de Duffing y los circuitos-péndulo.

Es notable la diferencia que existe entre la evolución del estado del sistema Duffing en relación a los circuitos-péndulo (Fig. 50).

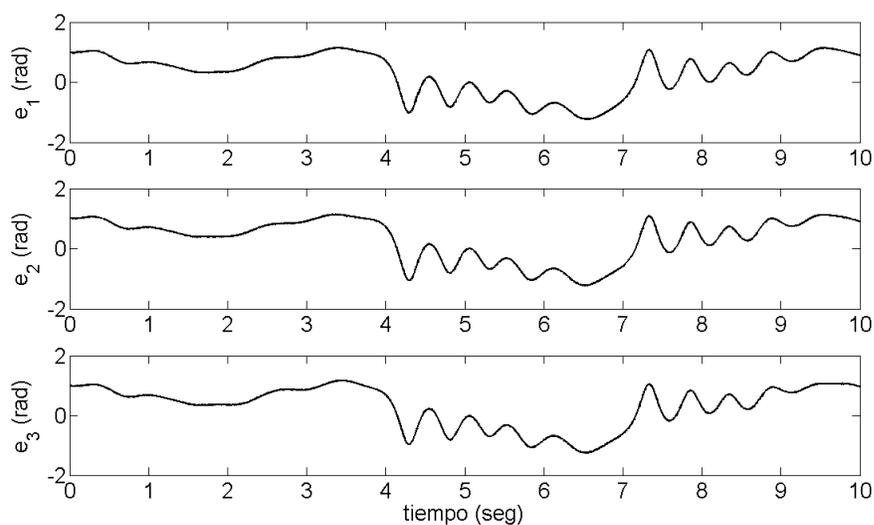


Figura 50: Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al oscilador de Duffing sin la presencia de una señal de acoplamiento.

Tabla III: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de circuitos-péndulo conectados en cadena completa tomando como referencia un oscilador de Duffing.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2	ECIP ϵ_3
$c_1 = 20$	$c_1 = 20$	$c_1 = 20$
$c_2 = 10$	$c_2 = 10$	$c_2 = 10$
$c_3 = 370$	$c_3 = 370$	$c_3 = 370$
$n = 3$	$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$
$k_p = 60$	$k_p = 60$	$k_p = 60$
$k_v = 80$	$k_v = 80$	$k_v = 80$

Como se muestra en la Figura 52, con el primer control implementado (Tabla III) se consigue sincronizar los sistemas con la referencia, reduciendo considerablemente los errores de sincronización (figs. 53 y 54).

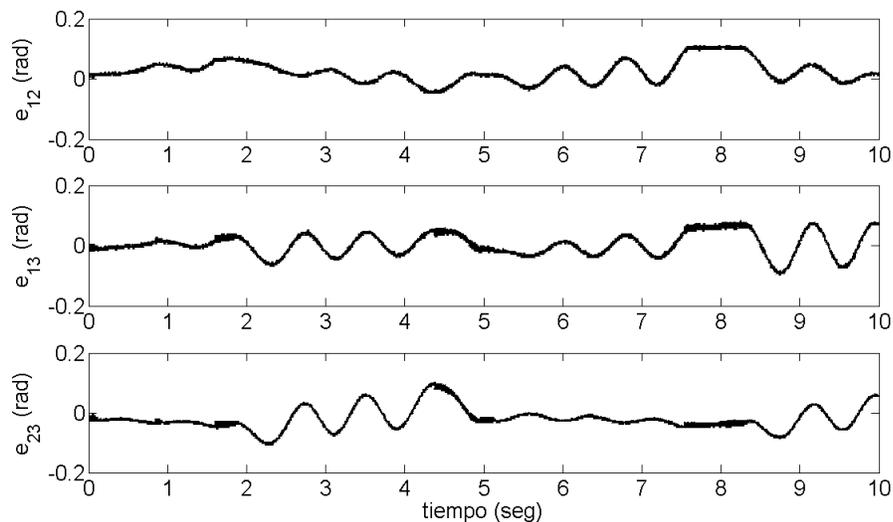


Figura 51: Errores de sincronización entre circuitos-péndulo sin la presencia de una señal de acoplamiento.

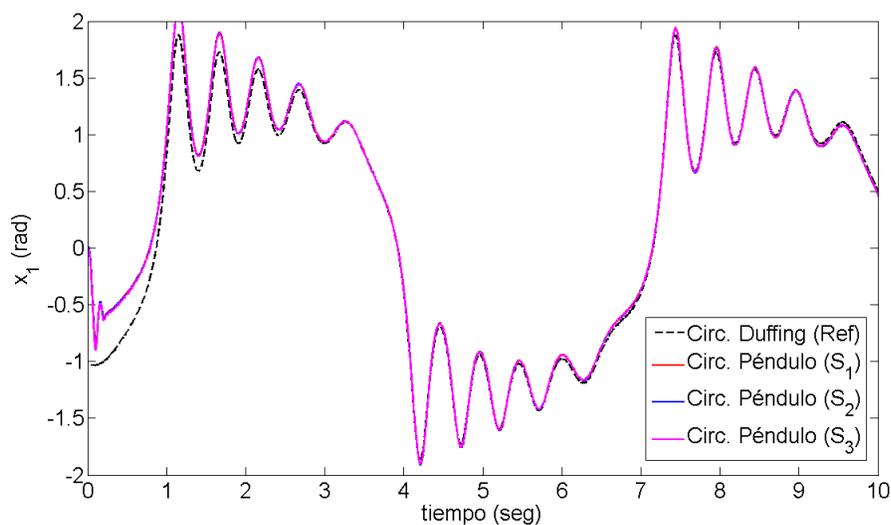


Figura 52: Sincronización en posición del oscilador de Duffing y los circuitos-péndulo para un arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 55.

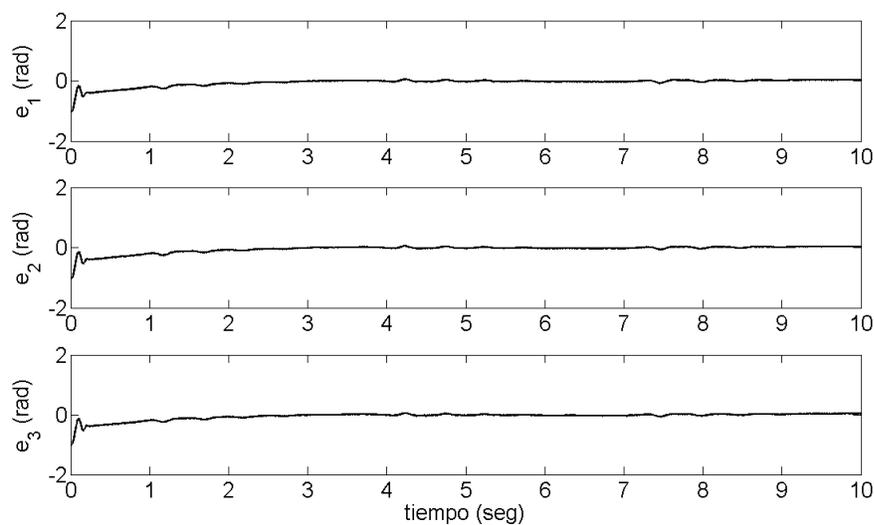


Figura 53: Errores de sincronización de cada circuito-péndulo con respecto al oscilador de Duffing conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 55.

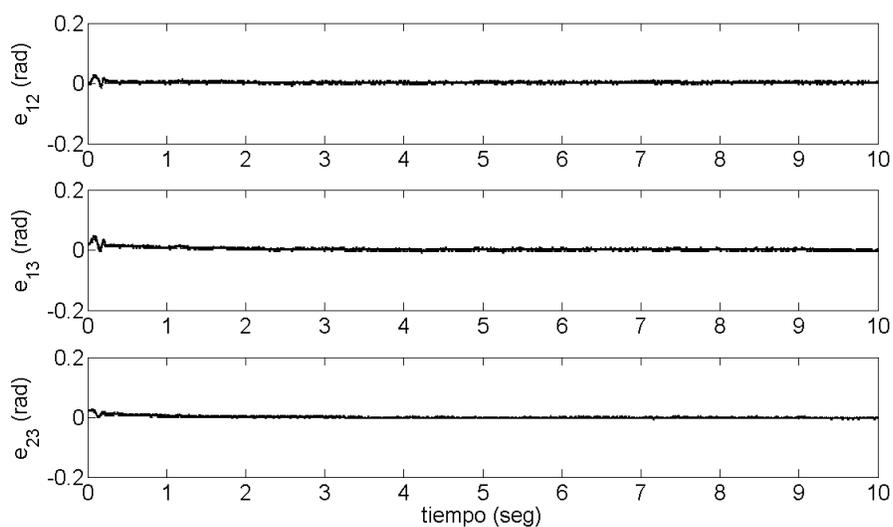


Figura 54: Errores de sincronización entre circuitos-péndulo conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 55.

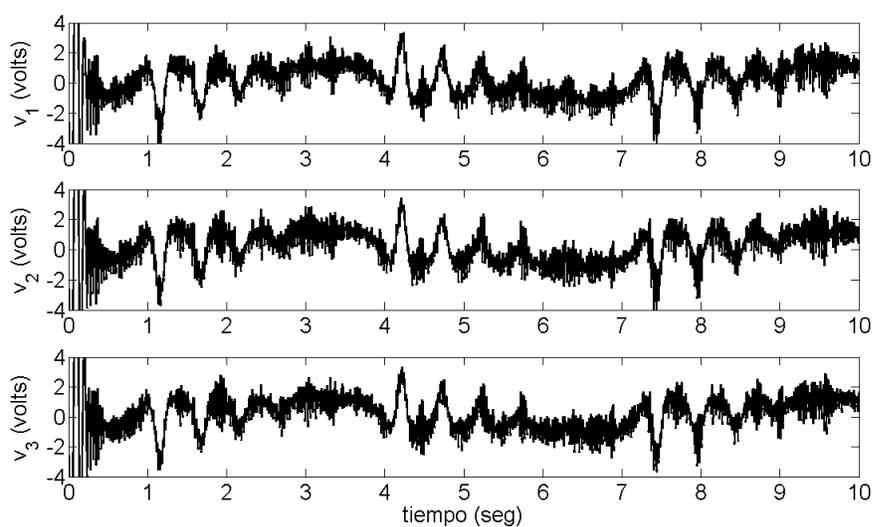


Figura 55: Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla III.

Tabla IV: Nuevos parámetros en el control para la red oscilador de Duffing / circuitos-péndulo conectada en cadena completa.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2	ECIP ϵ_3
$k_p = 180$	$k_p = 180$	$k_p = 180$
$k_v = 200$	$k_v = 200$	$k_v = 200$

Aplicando un nuevo control (Tabla IV), el desempeño en términos de error de sincronización es similar a su antecesor; sin embargo, las señales de acoplamiento generadas presentan mayor amplitud y, sobre todo, la inclusión de frecuencias más elevadas (Fig. 56), las cuales se deben principalmente al incremento en la ganancia k_v que proporciona un mayor peso al error de velocidad estimado \hat{e}_2 , el cual se encuentra influenciado directamente por el término discontinuo en el observador.

Se realizó otra prueba incrementando el coeficiente c_3 al valor dado en la Tabla V. Las ganancias en el filtro y el control corresponden al primer caso. Esta prueba tiene la finalidad de mostrar los efectos negativos de considerar el peor caso al calcular los coeficientes del observador.

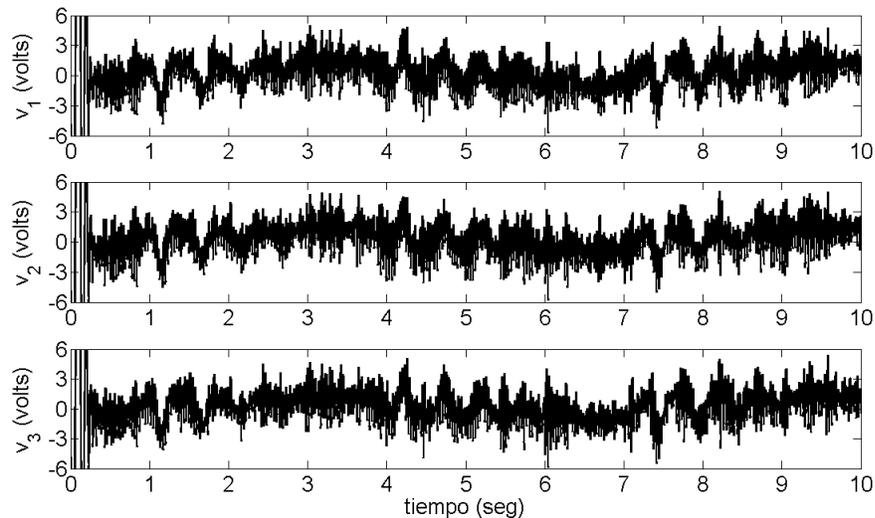


Figura 56: Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla IV (comparar con Fig. 55).

Tabla V: Nuevos parámetros del observador correspondientes a la red Duffing / circuitos-péndulo conectada en cadena completa.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2	ECIP ϵ_3
$c_1 = 20$	$c_1 = 20$	$c_1 = 20$
$c_2 = 10$	$c_2 = 10$	$c_2 = 10$
$c_3 = 12000$	$c_3 = 12000$	$c_3 = 12000$

Aunque aparentemente un incremento en los parámetros del observador simplemente asegura la convergencia, en este caso tuvo repercusiones no deseadas. Si bien en términos de error de sincronización se obtuvieron resultados similares a los alcanzados con el primer observador, las entradas de control generadas presentan componentes de frecuencias mucho mayores a las obtenidas anteriormente (Fig. 57). Por lo tanto, debe establecerse un compromiso entre el valor asignado a las ganancias del observador y la calidad, en cuanto a magnitud y frecuencia, de las señales de acoplamiento generadas.

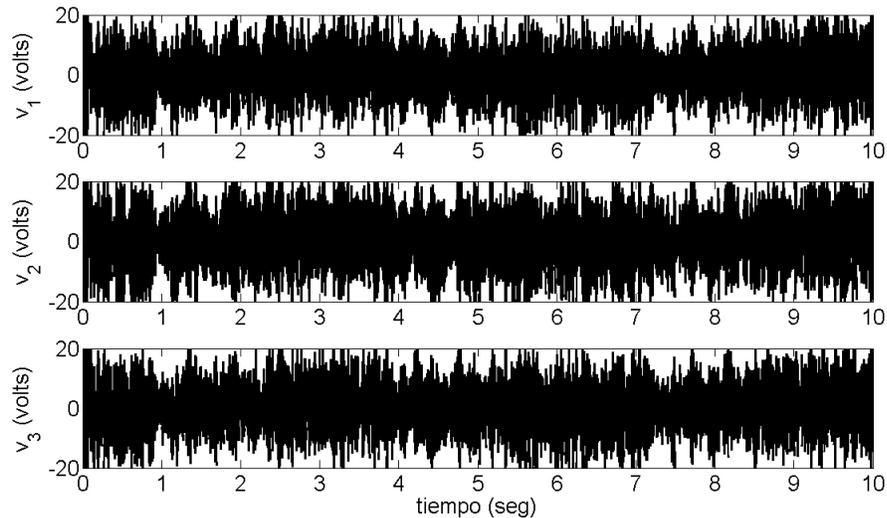


Figura 57: Señales de acoplamiento aplicadas en cada circuito-péndulo. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla V (comparar con figs. 55 y 56).

V.3 Arreglo péndulo virtual / péndulo mecánico, circuito-péndulo, oscilador de Duffing

El aspecto más interesante de este ejemplo es que reúne sistemas muy distintos. Aún cuando tres de ellos parten del mismo modelo matemático, corresponden a un sistema de naturaleza digital, un circuito electrónico y un mecanismo. Por otro lado, con el objeto de observar el desempeño frente a perturbaciones, se aplica una fuerza externa sobre uno de los nodos. Dicha perturbación consistió en obstaculizar manualmente el movimiento del péndulo mecánico.

Como era de esperarse, tanto el pendubot como el circuito-péndulo se comportan de manera bastante similar al modelo digital empleado como referencia; sin embargo, las trayectorias del circuito Duffing distan mucho de los sistemas pendulares.

Primero se realizaron pruebas conectando los sistemas en estrella, los parámetros correspondientes a dicha configuración se encuentran en la Tabla VI.

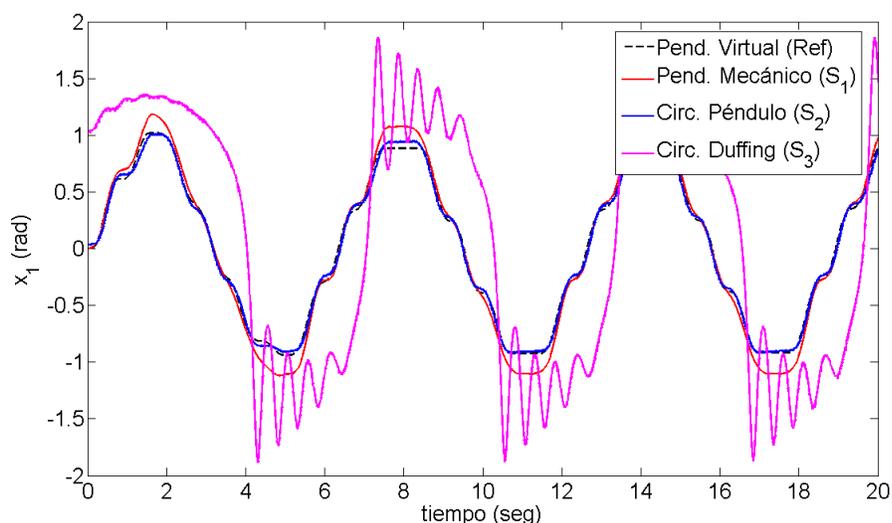


Figura 58: Posiciones no sincronizadas del péndulo virtual, el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing.

Tabla VI: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red integrada por el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing conectados en estrella tomando como referencia un péndulo virtual.

ECIP _{S₁}	ECIP _{S₂}	ECIP _{S₃}
$c_1 = 4$	$c_1 = 4$	$c_1 = 10$
$c_2 = 4$	$c_2 = 4$	$c_2 = 10$
$c_3 = 20$	$c_3 = 10$	$c_3 = 150$
$n = 3$	$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$
$k_p = 20$	$k_p = 5$	$k_p = 40$
$k_v = 40$	$k_v = 10$	$k_v = 60$

Cada observador maneja parámetros diferentes, esto es debido a que los sistemas en el arreglo son todos distintos y porque al conectar los nodos en estrella cada uno se sincroniza con la referencia de manera independiente. En consecuencia, las ganancias utilizadas en el caso del circuito Duffing son mayores.

La perturbación externa se aplica sobre el péndulo mecánico en aproximadamente $t = 4$ segundos.

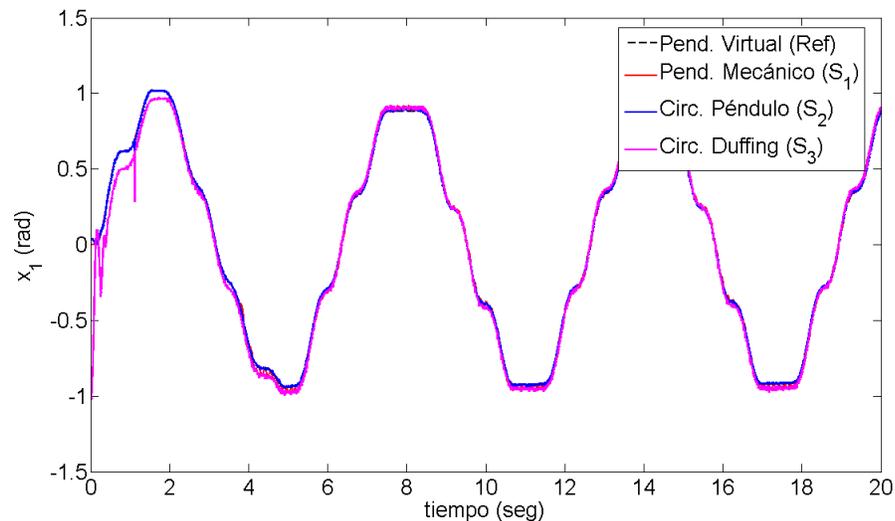


Figura 59: Sincronización en posición del péndulo virtual, el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing para un arreglo en estrella. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 61.

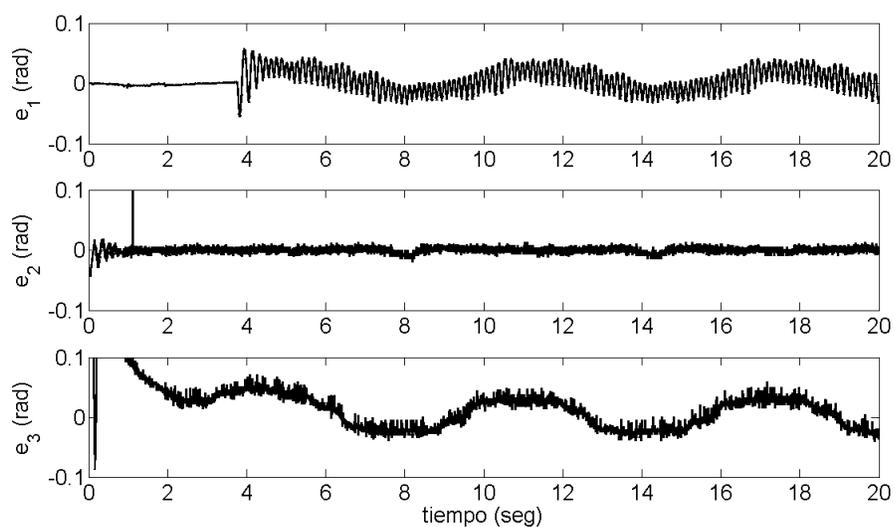


Figura 60: Errores de sincronización entre los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (e_1), el circuito-péndulo (e_2) y el oscilador de Duffing (e_3) con respecto al péndulo virtual. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 61.

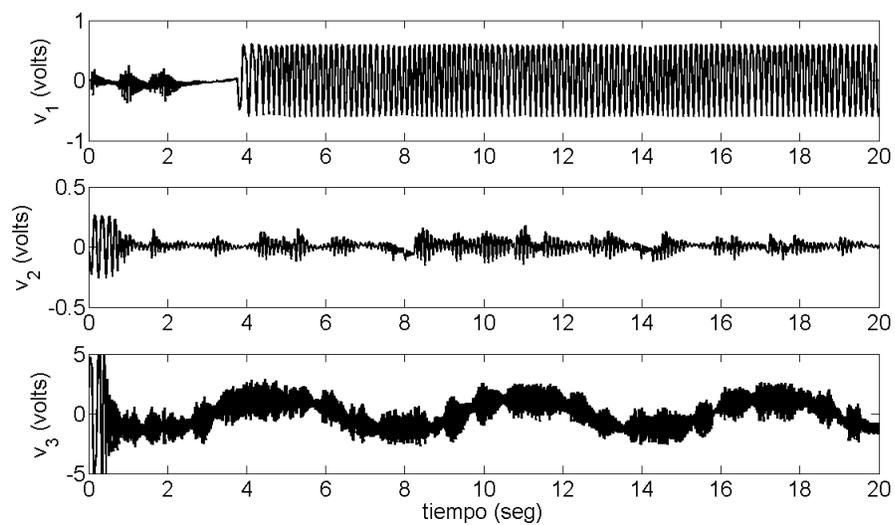


Figura 61: Señales de acoplamiento aplicadas a los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (v_1), el circuito-péndulo (v_2) y el oscilador de Duffing (v_3). Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla VI.

Tabla VII: Nuevos parámetros de cada observador (incremento de c_1 y c_2 en $ECIP_{S_1}$) para el arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing.

$ECIP_{S_1}$	$ECIP_{S_2}$	$ECIP_{S_3}$
$c_1 = 10$	$c_1 = 4$	$c_1 = 10$
$c_2 = 10$	$c_2 = 4$	$c_2 = 10$
$c_3 = 20$	$c_3 = 10$	$c_3 = 150$

En la Figura 59 el efecto de la perturbación es casi imperceptible y pareciera que se logra la sincronización de los nodos. Sin embargo, la Figura 60 muestra oscilaciones importantes en la posición del péndulo mecánico.

Las oscilaciones aparecen también en el control del pendubot, al parecer no con gran amplitud, pero al tratarse de un sistema mecánico resultan muy perjudiciales (Fig. 61).

Para disminuir las oscilaciones experimentadas en la posición del péndulo mecánico, podrían aumentarse las ganancias del control. Sin embargo, verificando las variables de la

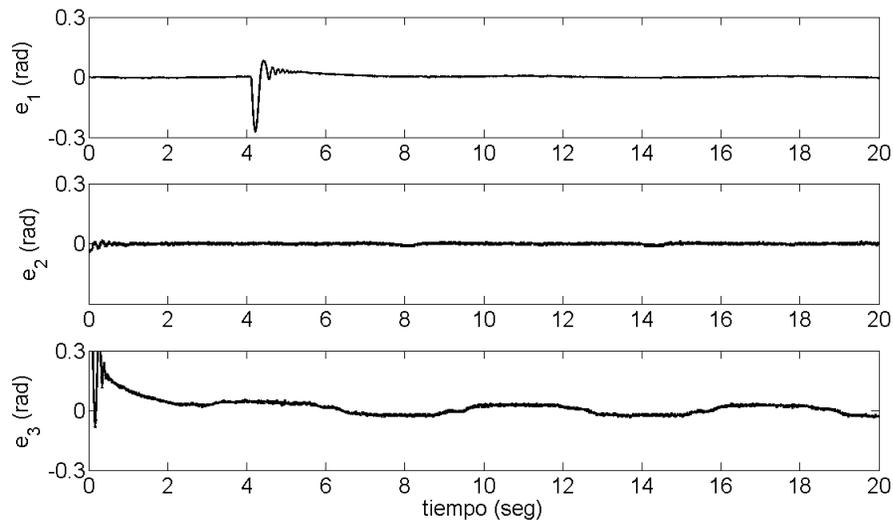


Figura 62: Errores de sincronización entre los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (e_1), el circuito-péndulo (e_2) y el oscilador de Duffing (e_3) con respecto al péndulo virtual. Se cambian los parámetros del observador como se muestra en la Tabla VII.

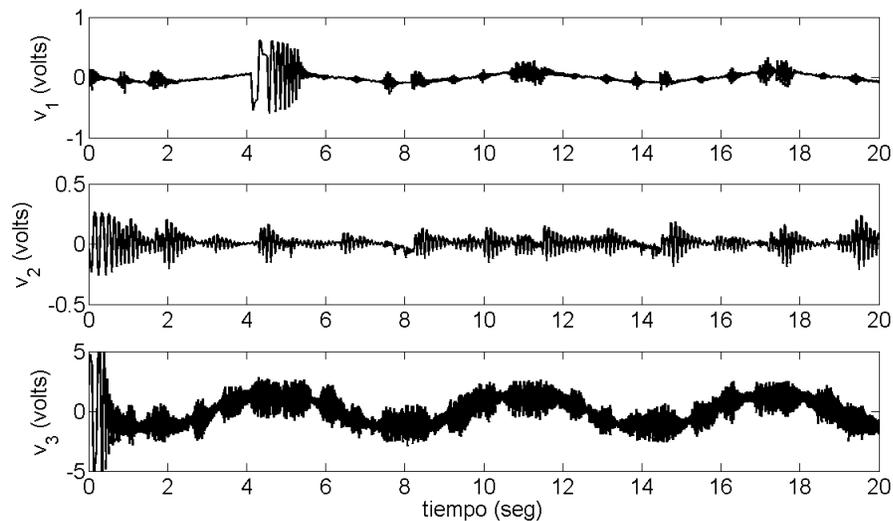


Figura 63: Señales de acoplamiento aplicadas a los nodos del arreglo en estrella integrado por el péndulo mecánico (v_1), el circuito-péndulo (v_2) y el oscilador de Duffing (v_3). Se obtienen a partir de los observadores presentados en la Tabla VII junto con los filtros y controladores de la Tabla VI.

ECIP, se aprecian oscilaciones similares en el error de observación z_1 . Por lo tanto, las medidas necesarias deben tomarse sobre los parámetros del observador. Dichas modificaciones se muestran en la Tabla VII.

En las figuras 62 y 63 se observa que la estructura de control, con los nuevos parámetros en el observador, es capaz de soportar de mucho mejor manera la presencia de una perturbación externa, dando lugar a oscilaciones de corta duración.

En la siguiente prueba los sistemas son conectados en cadena completa y, de igual manera, el pendubot es sometido a perturbaciones externas. Para tal efecto se emplean los valores en cada ECIP mostrados en la Tabla VIII.

Una vez que los parámetros del observador y el control se sintonizan adecuadamente, el arreglo en cadena completa parece mostrar una mayor resistencia ante la presencia de perturbaciones externas respecto a la conexión en estrella.

En las figuras 65 y 66 se presenta una comparación entre los esquemas de conexión en

Tabla VIII: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red integrada por el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing conectados en cadena completa tomando como referencia un péndulo virtual.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2	ECIP ϵ_3
$c_1 = 10$	$c_1 = 20$	$c_1 = 10$
$c_2 = 10$	$c_2 = 10$	$c_2 = 10$
$c_3 = 370$	$c_3 = 370$	$c_3 = 370$
$n = 3$	$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$
$k_p = 200$	$k_p = 200$	$k_p = 200$
$k_v = 10$	$k_v = 10$	$k_v = 10$

estrella y en cadena completa ante una perturbación que se introduce por programación en $t = 10$ segundos y corresponde a un escalón de amplitud 1 Volt.

La perturbación provoca un error más grande y de mayor duración en el arreglo en estrella (Fig. 65). Por otro lado, con la configuración en cadena completa, el esfuerzo de control directamente aplicado al pendubot es menor (Fig. 66).

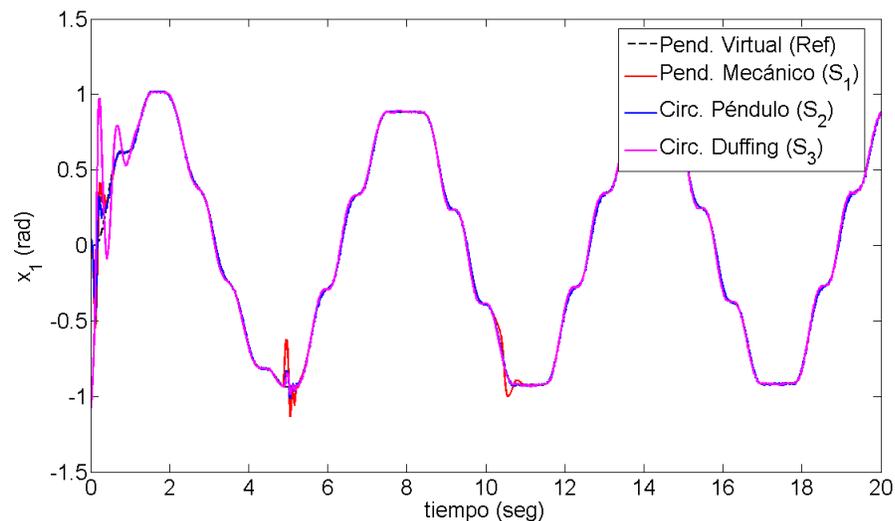


Figura 64: Sincronización en posición del péndulo virtual, mecánico y en circuito así como del oscilador de Duffing para un arreglo en cadena completa aplicando las señales obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla VIII.

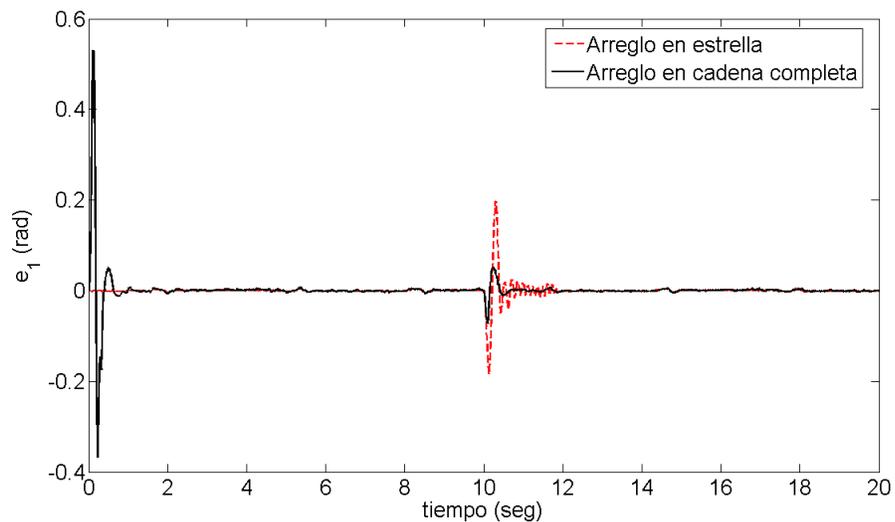


Figura 65: Comparación del desempeño de la ECIP ante perturbaciones externas. Se muestran los errores de sincronización del péndulo mecánico con respecto al péndulo virtual para la conexión en estrella y en cadena completa respectivamente.

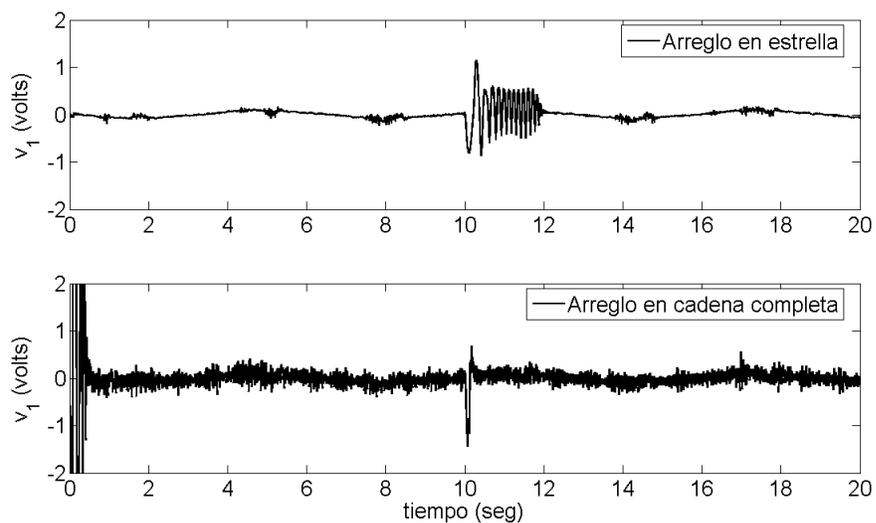


Figura 66: Señales de acoplamiento aplicadas sobre el péndulo mecánico para la red conectada en estrella y en cadena completa.

V.4 Arreglo péndulo virtual / 2 circuitos-péndulo

La ECIP fue diseñada para sincronizar en posición, sin embargo, resulta interesante evaluar su desempeño al sincronizar en velocidad. Con esta finalidad se integra un arreglo con un par de circuitos péndulo conectados en cadena completa y una referencia virtual. Se toman estos sistemas pues ofrecen acceso a la medición de velocidad. Se limita el número de nodos, debido a las entradas disponibles en la tarjeta de adquisición de datos.

Como se muestra en las figuras 67 y 68 el comportamiento de los sistemas en el arreglo respecto a la referencia es muy parecido aún en velocidad debido a que parten, como se ha mencionado con anterioridad, del mismo modelo matemático. Básicamente las discrepancias son en amplitud y fase, ligeras en realidad; sin embargo, el comportamiento de la dinámica en general es el mismo.

La disminución en el error de sincronización es notable (Fig. 70), pero no alcanza los niveles mostrados para la sincronización en posición. Por lo tanto, no puede afirmarse que se tiene un algoritmo de sincronización en velocidad muy eficiente, aunque la observación (\dot{e}_i) es suficientemente buena para usarse en el control de posición.

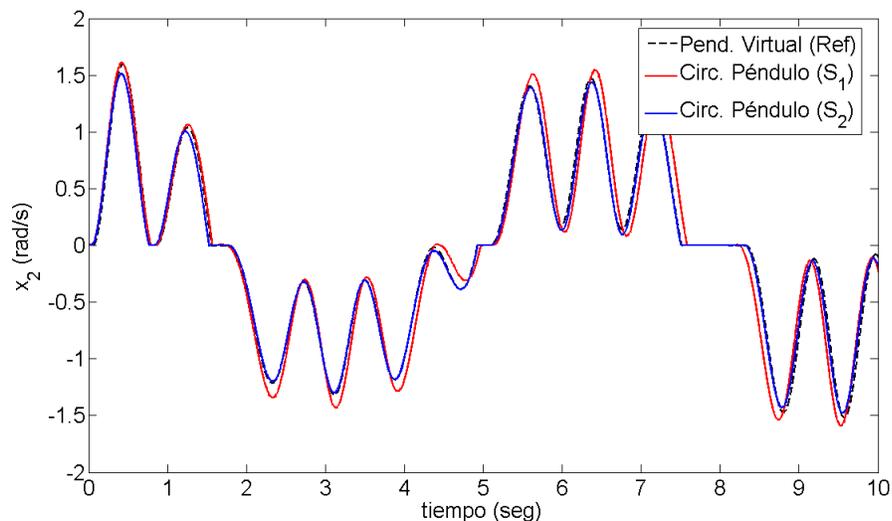


Figura 67: Velocidades no sincronizadas del péndulo virtual y los circuitos-péndulo.

Tabla IX: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada para sincronizar en velocidad la red de circuitos-péndulo conectada en cadena completa tomando como referencia un péndulo virtual.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2
$c_1 = 10$	$c_1 = 10$
$c_2 = 10$	$c_2 = 10$
$c_3 = 150$	$c_3 = 150$
$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 10 \text{ Hz}$	$f_c = 10 \text{ Hz}$
$k_p = 5$	$k_p = 5$
$k_v = 10$	$k_v = 10$

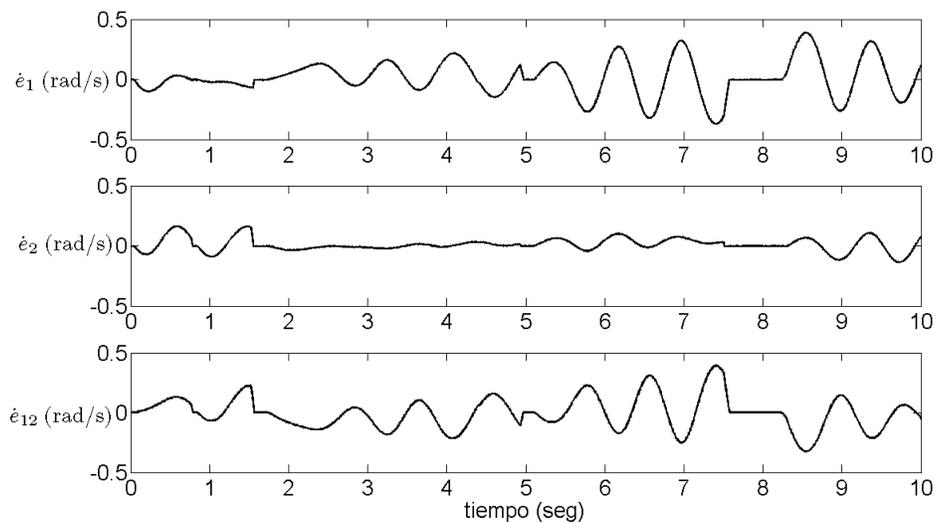


Figura 68: Errores de sincronización en velocidad de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo virtual sin la presencia de una señal de acoplamiento.

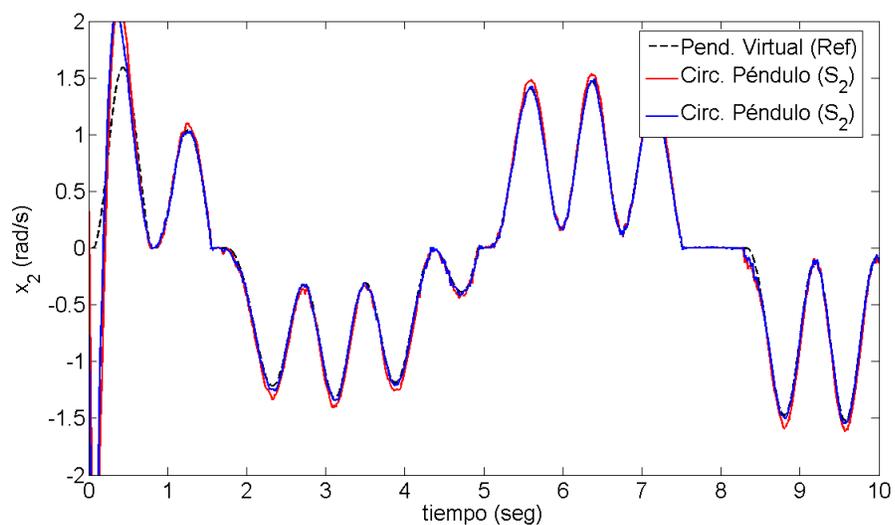


Figura 69: Sincronización en velocidad del péndulo virtual y los circuitos-péndulo conectados en cadena completa.

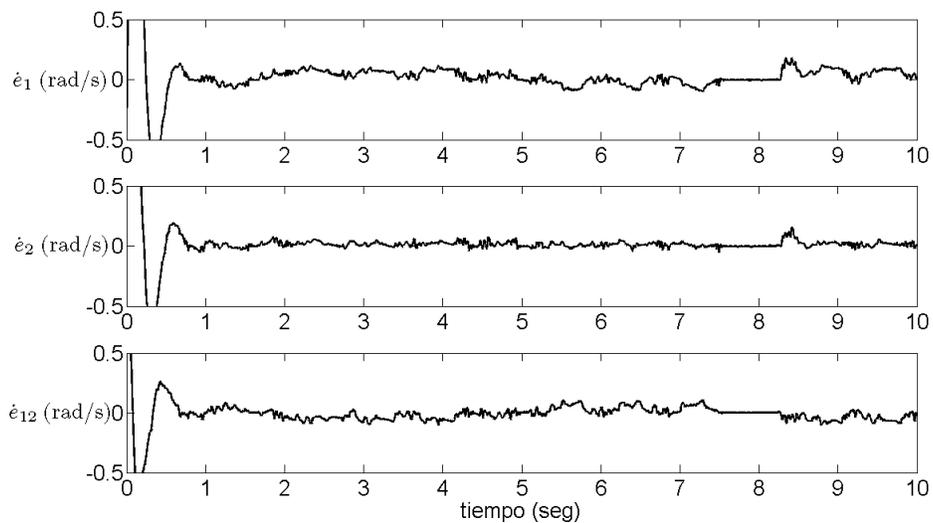


Figura 70: Errores de sincronización en velocidad de cada circuito-péndulo con respecto al péndulo virtual correspondientes a la Figura 69.

V.5 Arreglo oscilador de Duffing / circuito-péndulo

Como ya se ha visto, con la ECIP se construye una señal de acoplamiento que consta de dos partes (118). La primera de ellas se constituye de un control para el sistema nominal, sin perturbaciones, que en este trabajo ha correspondido a un algoritmo de control linealizante por retroalimentación del estado (119). La segunda parte, inherente a la estructura, está constituida por el término u_{avg} que permite el rechazo a perturbaciones.

Es importante evaluar la calidad de la identificación de perturbaciones a partir del término discontinuo del observador. Para esto, se conectan en configuración M/S un oscilador de Duffing (referencia) y un circuito-péndulo, ya que se tiene acceso al estado y a la dinámica de ambos. Se usan nuevamente los parámetros de la Tabla IX.

Según se muestra en la Figura 71, la identificación es muy buena, sin embargo, se debe mencionar que siempre existe un error en fase debido a la acción del filtro.

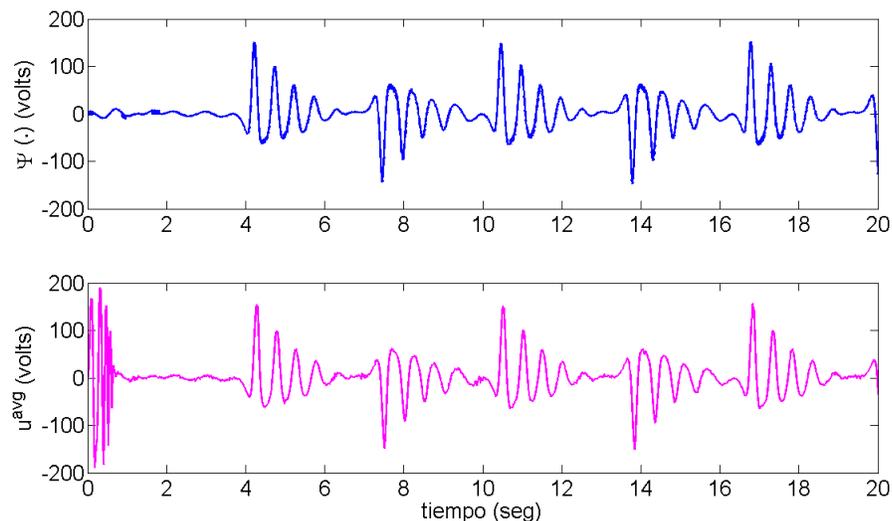


Figura 71: Perturbación real vs. perturbación identificada. Las señales corresponden a las diferencias entre la dinámica de un oscilador de Duffing y un circuito-péndulo.

V.6 Arreglo circuito-péndulo / 2 mecanismos

MRA

Este experimento busca analizar el efecto de perturbaciones externas sobre el arreglo como unidad, cuando se tiene una conexión en cadena completa. Ya que ambos nodos son sistemas mecánicos, el experimento se vuelve más interesante.

Las diferencias entre la referencia y los sistemas en el arreglo son muy grandes, especialmente en amplitud (Fig. 72). Para sincronizar los dispositivos se toman los valores en la Tabla X.

El arreglo es sometido a una perturbación externa inducida directamente sobre el primer sistema. En la Figura 73 se aprecia que la fuerza aplicada es grande y de larga duración.

Lo importante en esta prueba es notar que al introducir una perturbación en el primer MRA, el segundo sistema se ve afectado en cierta manera, como consecuencia del tipo de conexión empleada.

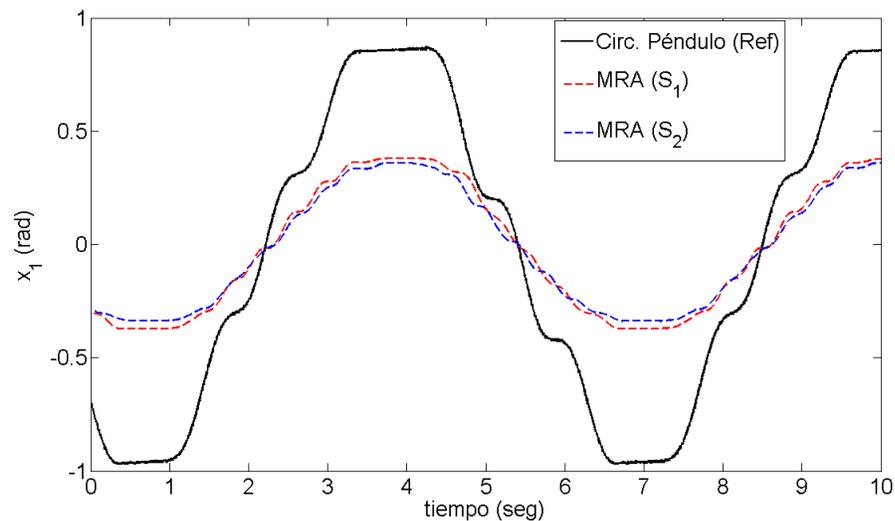


Figura 72: Posiciones no sincronizadas del circuito-péndulo y los MRA.

Tabla X: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de sistemas MRA conectados en cadena completa tomando como referencia un circuito-péndulo.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2
$c_1 = 40$	$c_1 = 40$
$c_2 = 40$	$c_2 = 40$
$c_3 = 160$	$c_3 = 160$
$n = 2$	$n = 2$
$f_c = 5 \text{ Hz}$	$f_c = 5 \text{ Hz}$
$k_p = 1000$	$k_p = 1000$
$k_v = 10$	$k_v = 10$

En la Figura 75 se observa que en ambas estructuras se genera un esfuerzo de control para rechazar la perturbación.

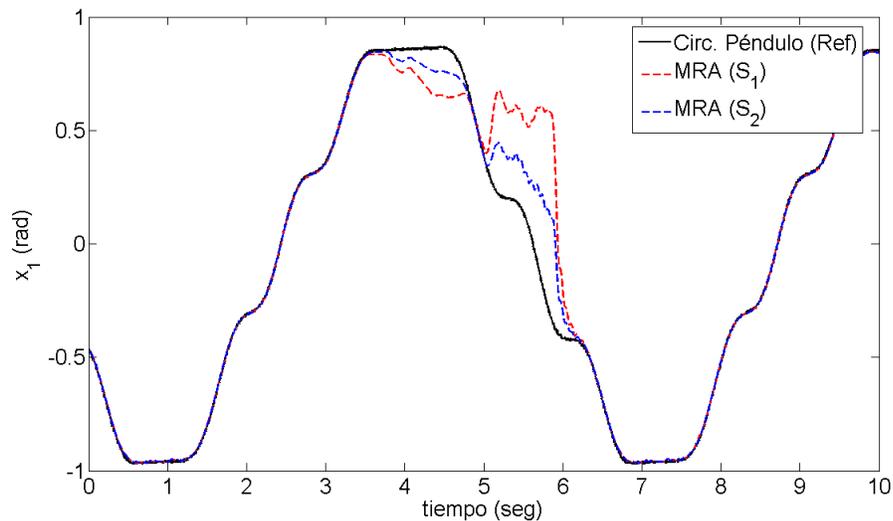


Figura 73: Sincronización en posición del circuito-péndulo y los mecanismos MRA para un arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 75.

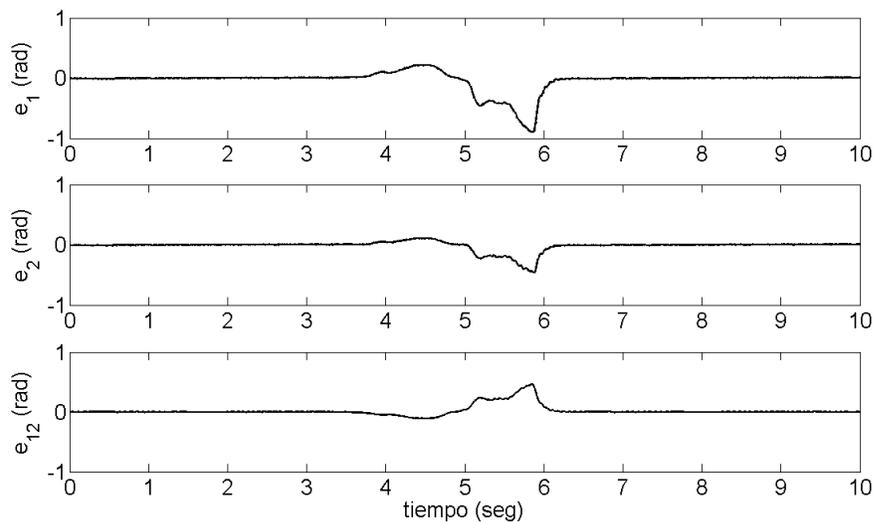


Figura 74: Errores de sincronización de cada mecanismo MRA con respecto al circuito-péndulo y entre nodos respectivamente, conectando el arreglo en cadena completa. Se aplican las señales de acoplamiento mostradas en la Figura 75.

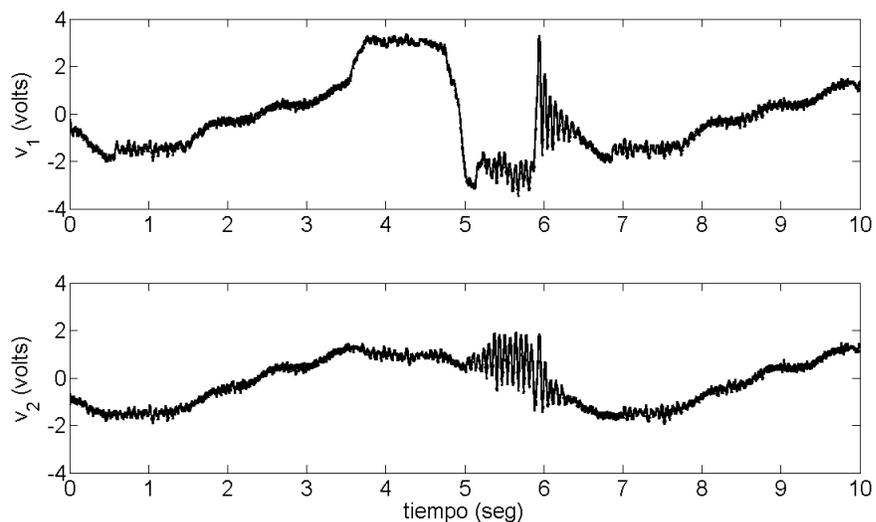


Figura 75: Señales de acoplamiento aplicadas en cada mecanismo MRA. Se obtienen a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla X.

V.7 Arreglo oscilador de Duffing / 2 mecanismos MRA

Con el objeto de probar el desempeño de la estructura ante un comportamiento caótico se conecta el arreglo en cadena completa y se propone como referencia al sistema Duffing con una entrada senoidal de 0.35 V de amplitud y frecuencia de 1 Hz.

En la Figura 76 es evidente la diferencia de amplitud en la posición del circuito Duffing respecto a los MRA. Además, la dinámica es radicalmente distinta ya que por un lado se tiene el desarrollo caótico de la referencia contra el comportamiento casi lineal de los sistemas en el arreglo.

El desempeño mostrado por la ECIP permite que los MRA emulen el comportamiento caótico del sistema Duffing.

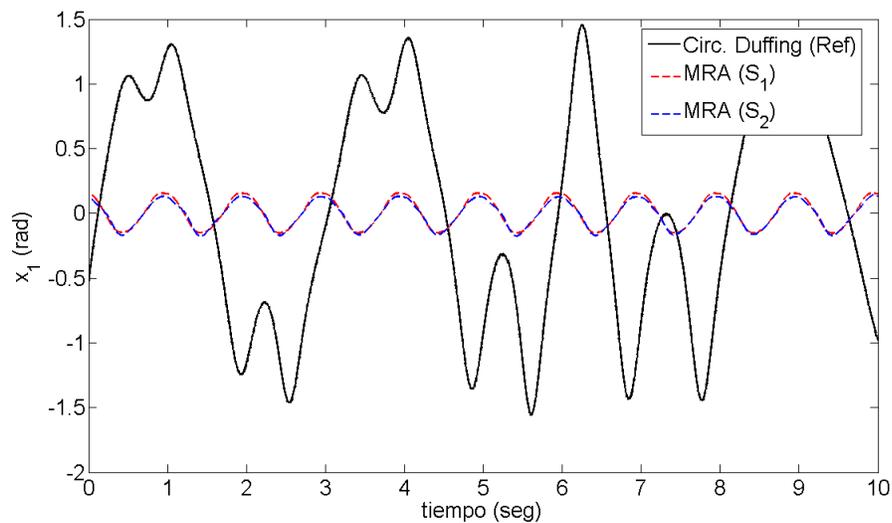


Figura 76: Posiciones no sincronizadas del circuito Duffing y los MRA.

Tabla XI: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red de mecanismos MRA conectados en cadena completa tomando como referencia un oscilador de Duffing.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2
$c_1 = 120$	$c_1 = 120$
$c_2 = 120$	$c_2 = 120$
$c_3 = 350$	$c_3 = 350$
$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 30$ rad/seg	$f_c = 30$ rad/seg
$k_p = 1000$	$k_p = 1000$
$k_v = 201.449$	$k_v = 201.449$

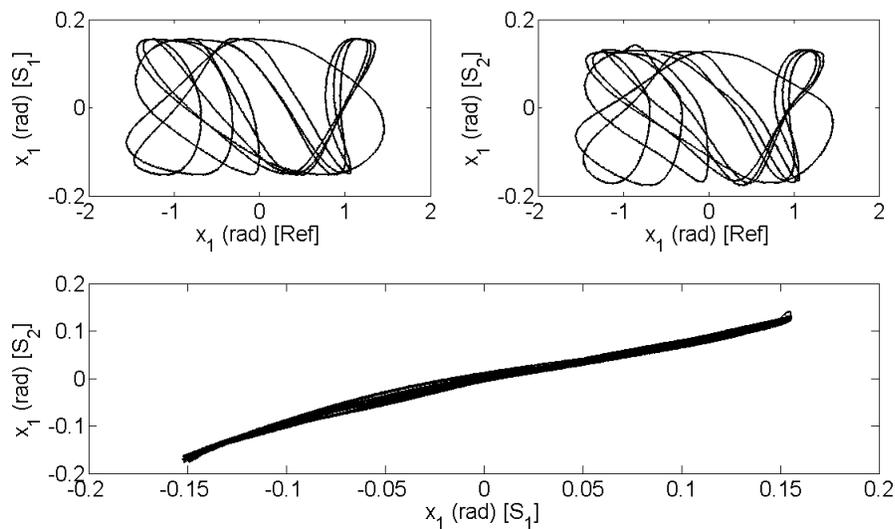


Figura 77: Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones de cada mecanismo MRA contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. No existe señal de acoplamiento.

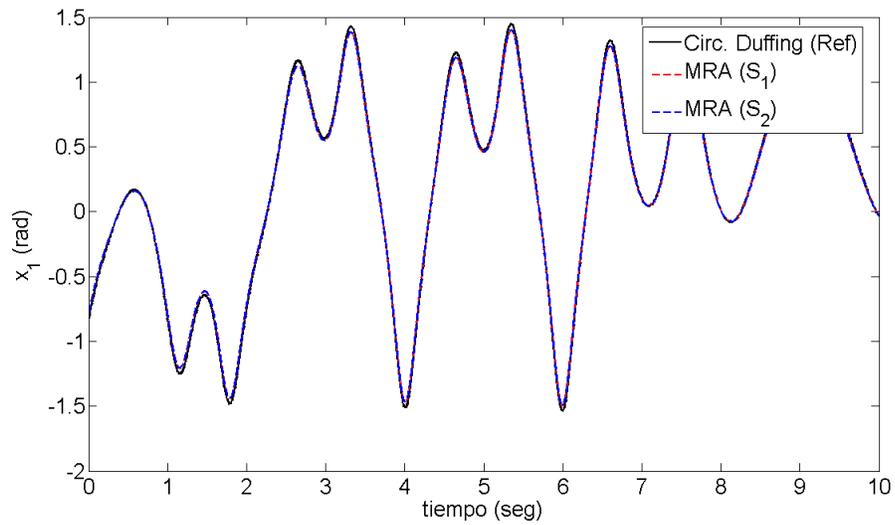


Figura 78: Sincronización en posición del circuito Duffing y los mecanismos MRA para un arreglo en cadena completa. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XI.

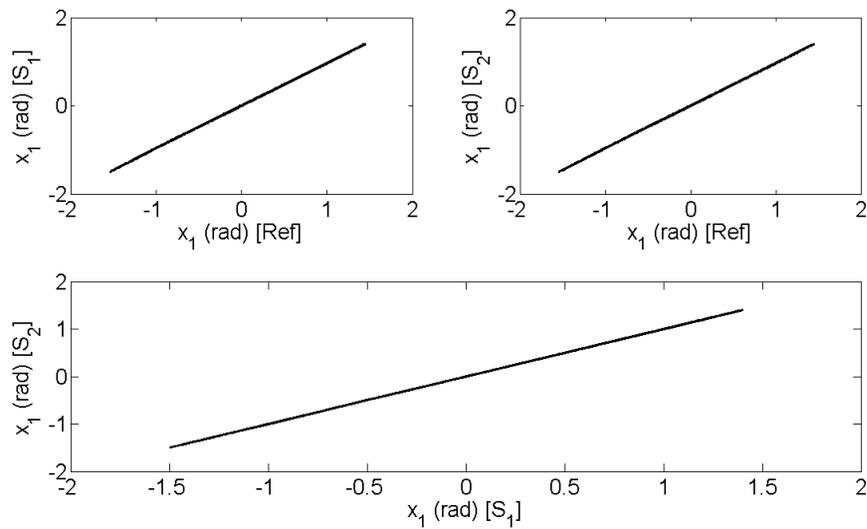


Figura 79: Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones de cada mecanismo MRA contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XI.

V.8 Arreglo oscilador de Duffing / MRA, péndulo mecánico

El arreglo configurado en cadena completa cuenta con un par de sistemas mecánicos diferentes tomando como referencia un circuito Duffing en estado caótico.

Las trayectorias seguidas por cada sistema divergen considerablemente (Fig. 80). En el péndulo se presentan amplitudes mucho mayores que en el resto de los sistemas. El circuito Duffing sigue un comportamiento caótico. Finalmente, en el MRA se desarrolla una dinámica prácticamente lineal.

Comparando las figuras 81 y 83, se observa que es posible sincronizar los nodos de la red a pesar de las diferencias naturales en la dinámica de los sistemas.

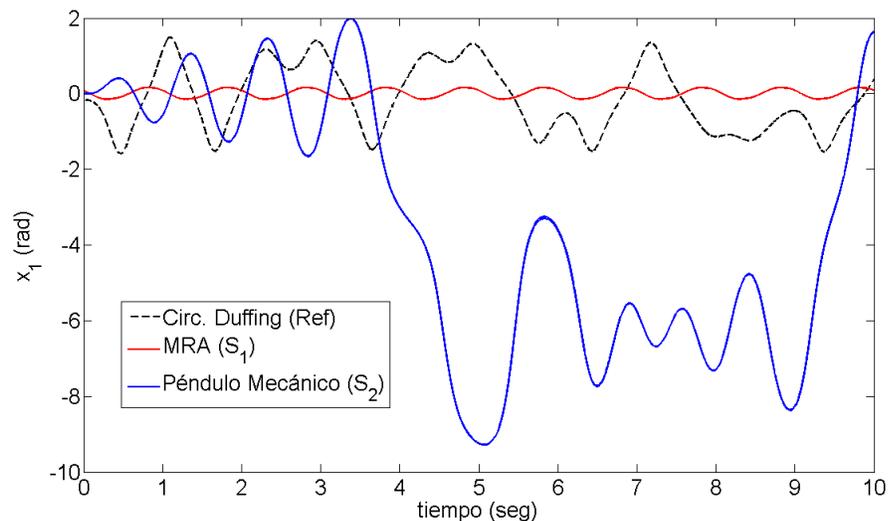


Figura 80: Posiciones no sincronizadas del circuito Duffing, el MRA y el péndulo mecánico.

Tabla XII: Parámetros del observador, el filtro y el control correspondientes a cada estructura empleada sobre la red integrada por el MRA y el péndulo mecánico conectados en cadena completa tomando como referencia un oscilador de Duffing.

ECIP ϵ_1	ECIP ϵ_2
$c_1 = 150$	$c_1 = 50$
$c_2 = 150$	$c_2 = 50$
$c_3 = 600$	$c_3 = 400$
$n = 3$	$n = 3$
$f_c = 30$ rad/seg	$f_c = 30$ rad/seg
$k_p = 810$	$k_p = 498.889$
$k_v = 101.667$	$k_v = 68.696$

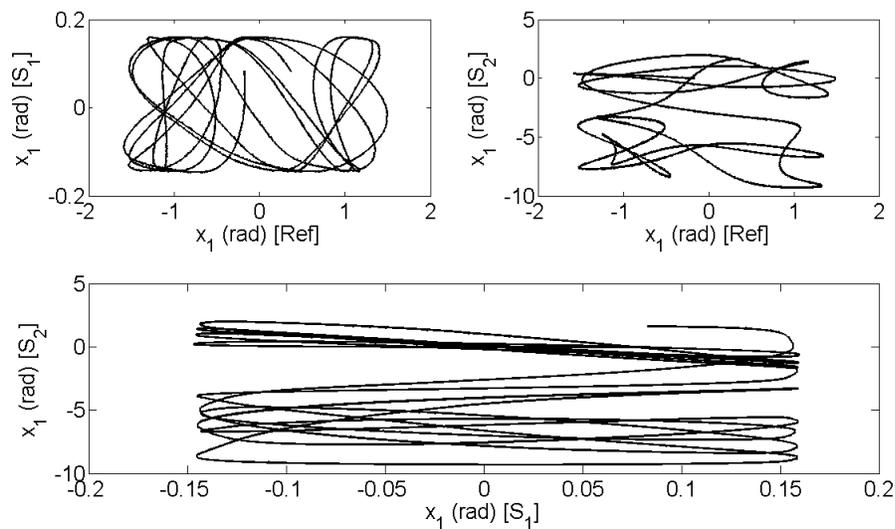


Figura 81: Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones del MRA y el péndulo mecánico contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. No existe señal de acoplamiento.

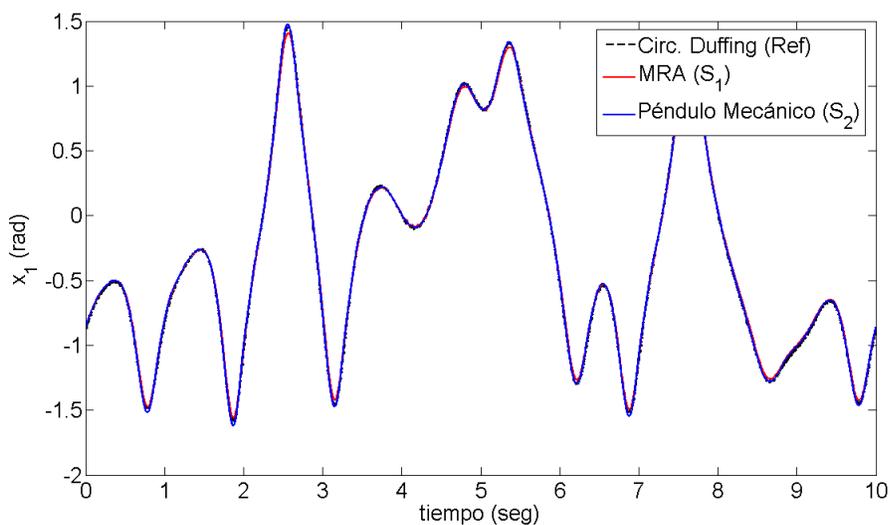


Figura 82: Sincronización en posición del oscilador de Duffing, el MRA y el péndulo mecánico. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XII.

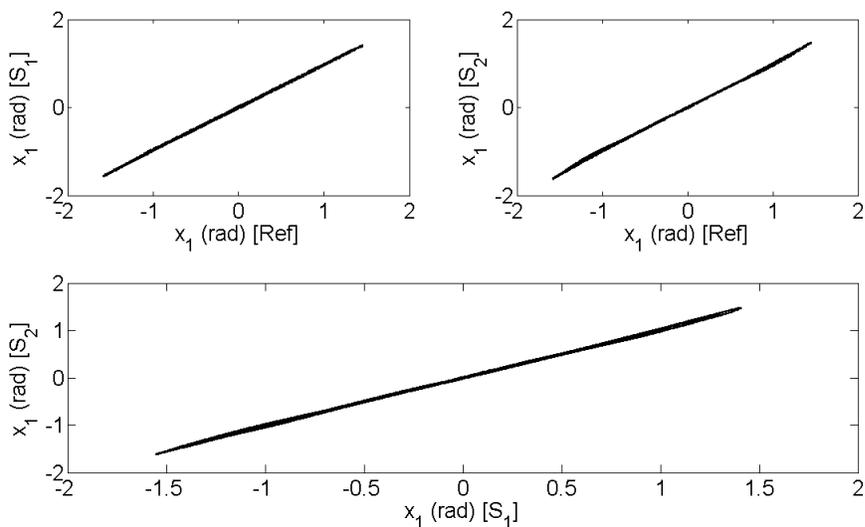


Figura 83: Diagramas de fase comparativos. Se grafican las posiciones del MRA y el péndulo mecánico contra el oscilador de Duffing y posteriormente entre ambos nodos. Se aplican señales de acoplamiento obtenidas a partir de las ECIP caracterizadas en la Tabla XII.

V.9 Análisis del capítulo

El objetivo principal de este trabajo de tesis es evaluar experimentalmente la aplicación de la estructura de control estudiada en el Capítulo III para sincronizar redes de sistemas, particularmente conectando los nodos según el esquema visto en el Capítulo IV. Por tales motivos, esta parte del documento representa la culminación de los conceptos hasta ahora presentados.

A partir de los experimentos, la cantidad de información generada fue muy grande y uno de los retos principales fue sintetizar los aspectos de mayor relevancia.

Dentro de las conclusiones más importantes, se cuenta el desempeño satisfactorio de la ECIP sincronizando arreglos en tres esquemas de conexión distintos. Se presentó que bajo la configuración en estrella las señales de acoplamiento generadas fueron más pequeñas y de menor frecuencia que en cadena completa. Sin embargo, al mostrarse que aún bajo la conexión en cadena abierta se consigue sincronizar a los sistemas, se prueba la robustez de la estrategia de interconexión entre sistemas ante la pérdida de conexiones.

También se mostró que la elección de los parámetros de la ECIP no debe tomarse a la ligera y aunque se busca que las ganancias sean capaces de soportar perturbaciones de gran amplitud, el considerar el peor caso también tiene consecuencias negativas. Un incremento indiscriminado en los valores del control o el observador no mejoraron el desempeño de la estructura y, por el contrario, indujeron frecuencias indeseables en las señales de control.

En algunos arreglos propuestos se analizó el efecto de perturbaciones ejercidas físicamente sobre los dispositivos mecánicos y se encontró que la conexión en cadena completa presenta una resistencia mayor ante fuerzas externas, ya que todos los sistemas en el arreglo la perciben y en consecuencia generan una respuesta de control para rechazarla. Además, cuando se tiene una conexión en estrella, el desequilibrio en un nodo no afecta a los demás, con lo cual no se puede hablar realmente de sincronización en la red.

Se aprovecharon algunos casos para evaluar individualmente ciertas etapas de la ECIP

que llevan a la construcción de la señal de acoplamiento, específicamente la observación del error en velocidad y la identificación de perturbaciones. Como en ambos casos los resultados obtenidos fueron satisfactorios, se tiene que es posible construir una entrada de sincronización efectiva y robusta.

Para los últimos experimentos se introduce el elemento caótico en el arreglo, con lo cual se puso a prueba la robustez del esquema de sincronización, el cual mostró buen desempeño.

Capítulo VI

Conclusiones generales

En este trabajo de tesis se abordó el fenómeno de la sincronización con un enfoque dirigido al control, es decir, se plantearon estrategias para sincronizar redes de sistemas mediante el diseño de señales de acoplamiento.

El primer reto fue construir un marco de referencia cuidando establecer de manera clara la perspectiva de sincronización controlada, para lo cual se presentó un compendio de resultados y estudios que se han realizado en el área (Capítulo II). De especial importancia resultó conocer algunos algoritmos de control en el campo de la sincronización de sistemas robóticos, para evaluar sus fortalezas y considerar sus limitaciones y tratar de resolverlas.

Una vez que se estableció un punto de partida, definiendo como objetivo la sincronización en posición, se abordó el problema con el algoritmo de control denominado ECIP, cuyas propiedades de estabilidad y robustez se presentan en el Capítulo III. Formalmente y a través de simulaciones se estudiaron sus ventajas. Dentro de las cuales se cuenta:

- Solo requiere el vector de posición de cada nodo y la referencia; esta característica resulta de vital importancia en la práctica pues en general resulta muy costoso el contar con dispositivos que permitan acceder al estado completo.
- Para el caso específico de la sincronización, no requiere conocer el modelo de los

sistemas involucrados, únicamente el término a través del cual se acopla la entrada de control, que en el caso de los sistemas lagrangianos corresponde a la matriz de inercia. Las diferencias entre las dinámicas de los sistemas se agrupan en el término de perturbación $\Psi(\cdot)$, del cual solo se necesita una cota superior.

- En los dispositivos de nGDL, permite desacoplar cada articulación, dividiendo el problema en n problemas de menor dimensión. Esto es posible siempre que se trabaje con dispositivos totalmente actuados.
- El procedimiento de sintonización del observador, que constituye el núcleo de la estructura, es muy sencillo, pues los coeficientes C_1 y C_2 pueden ser propuestos buscando determinado comportamiento en el sistema nominal y partir de dichos términos, junto con la condición (106), se encuentra la ganancia C_3 .
- El rechazo a perturbaciones permite proponer un control del sistema nominal que mejor convenga, proporcionando cierta flexibilidad.

Como se vió en el Capítulo IV, el esquema de conexión establecido lleva a la definición de un error auxiliar ϵ_i , el cual depende de una combinación lineal del error de cada nodo con respecto a la referencia y con respecto a los otros sistemas de la red. Por lo tanto, usando la ECIP es posible considerar, teóricamente al menos, redes de cualquier tamaño. En realidad solo se experimentó con redes de tres sistemas, pues el incremento en el número de nodos inherentemente involucra un aumento en la magnitud de las perturbaciones y eventualmente la aplicación de una discontinuidad más fuerte en el observador, lo cual degenera el desempeño de la estructura en su totalidad ya que la calidad del proceso de identificación depende de las limitaciones del filtro.

Una vez que se establecieron las bases analíticas de las herramientas requeridas, fue posible trasladar el estudio al plano experimental. Al respecto, aunque no está reportado en este documento, es importante señalar que fue necesaria la síntesis de los sistemas electrónicos

utilizados en las pruebas físicas, que junto a los dispositivos mecánicos presentes en el laboratorio de control del CICESE, así como en el laboratorio de electrónica de la UABC campus Mexicali, constituyeron la infraestructura empleada en los experimentos.

Dado que la principal aportación en este trabajo de tesis fue validar experimentalmente una metodología propuesta con anterioridad, los resultados de mayor relevancia son presentados en el Capítulo V. Dentro de las conclusiones más importantes obtenidas a partir de las prácticas de laboratorio se cuentan las siguientes:

1. La ECIP muestra un buen desempeño, en cuanto a disminución del error de sincronización, aún bajo distintas configuraciones.
2. Incluso con la pérdida de conexiones, bajo el esquema de interconexión, es posible mantener la sincronización del arreglo.
3. Se mostró la importancia en la sintonización de los parámetros del observador y el control. Si bien se establecieron condiciones bajo las cuales analíticamente se asegura convergencia, en especial sobre C_3 , al considerar las limitaciones físicas de los sensores, actuadores y dispositivos de procesamiento utilizados en los experimentos, resulta de vital importancia la búsqueda de ganancias óptimas. A este respecto, siempre fue posible un proceso de sintonización en línea del parámetro C_3 y de las ganancias de control K_p y K_v .
4. La ECIP permite sincronizar redes cuyos nodos poseen una naturaleza distinta. Lo anterior se probó integrando arreglos con sistemas mecánicos, electrónicos y digitales.
5. Eligiendo correctamente los parámetros de la estructura, es posible soportar el efecto de fuerzas externas aplicadas sobre algún nodo del arreglo. Se vió además que la conexión en cadena completa presenta un comportamiento especialmente adecuado

pues la perturbación es vista por el arreglo en su totalidad, en consecuencia todos los nodos generan un esfuerzo de control destinado a rechazarla.

6. Se evaluaron individualmente las etapas de observación e identificación de perturbaciones y se comprobó que en ambos casos los resultados permiten la construcción de una señal de acoplamiento eficiente.
7. Experimentalmente se presentó que la ECIP es capaz de alcanzar el objetivo de sincronización ante la presencia de comportamientos caóticos en la red.

VI.1 Trabajo futuro

Dentro de las consideraciones finales, resulta de especial importancia proponer algunas líneas a seguir tomando como punto de partida los resultados y conclusiones presentadas en este documento.

En las primeras etapas del período de tesis se probó introducir retardos en la red. Para la configuración en estrella, el nodo correspondiente a la conexión con retardo simplemente se sincronizó a esa versión retrasada del maestro. Como en realidad el esquema de control no percibe el retardo, no existe compensación alguna.

Al conectar en cadena completa, se observó cierta tendencia a compensar el error inducido por el retardo, cuando es pequeño, pues en este caso sí existe un efecto sobre la red que la estructura de control es capaz de identificar. Sin embargo, a medida que se introducen mayor número de conexiones con retardo, la sincronización se ve fuertemente comprometida.

La consideración de sistemas con retardos resulta interesante y en base a los resultados preliminares obtenidos, el establecimiento de un sistema de interconexión con dinámica propia puede ayudar a resolver el problema. Una posible solución a este problema sería descartar las conexiones con retardo bajo algún criterio, pues como se mostró, es posible mantener la sincronización aún perdiendo parte de la comunicación entre nodos.

De especial importancia en el desempeño de la ECIP resulta el comportamiento del filtro. Si bien teóricamente es posible utilizar uno de primer orden (119), en los experimentos se empleó uno de tipo Butterworth por presentar mejores características tanto en amplitud como en fase. Sin embargo, no se cuenta con un criterio de selección de parámetros (orden, frecuencia de corte, etc.) pues cada caso particular resulta en diferentes valores. Lo anterior resulta evidente al considerar la identificación de una perturbación senoidal que, al tratarse de una sola componente, solo experimentaría un retardo de fase debido al filtro. Sin embargo, al considerar perturbaciones constituidas por la diferencia entre las dinámicas de sistemas, el espectro de frecuencias considerado es mucho más amplio y por tanto los efectos del filtro pueden ir más allá de la fase, llegando incluso a deformar completamente la forma de la perturbación o introducir ruido. Entonces, establecer un procedimiento más formal resultaría muy beneficioso.

Existen consideraciones bajo las cuales es posible definir el valor de los parámetros del observador. Sin embargo, como se vió experimentalmente, las ganancias así obtenidas no son las más adecuadas y, dadas las limitaciones físicas en los dispositivos utilizados, en ocasiones ni siquiera son convenientes. Por lo tanto, el establecer un mecanismo de adaptación en línea fortalecería a la ECIP considerablemente, sobre todo en su aplicación a sistemas reales.

Literatura Citada

- Alvarez, J., I. Orlov y L. Acho. 2000. *An Invariance Principle for Discontinuous Dynamic Systems With Application to a Coulomb Friction Oscillator*. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 122:687-690 p.
- Belykh, I. y M. Hasler. 2005. *Synchronization and Graph Topology*. International Journal of Bifurcation and Chaos. 15(11):3423-3433 p.
- Blekhman, I. I. 1988. *Synchronization in Science and Technology*. ASME PRESS. New York. 255 p.
- Blekhman, I. I., A. L. Fradkov, H. Nijmeijer y A. Y. Pogromsky. 1997. *On Self-Synchronization and Controlled Synchronization*. Systems and Control Letters. 31:299-305 p.
- Blekhman, I. I., P. S. Landa y M. G. Rosenblum. 1995. *Synchronization and Chaotization in Interacting Dynamical Systems*. Appl. Mech. Rev. 48(11):733-749 p.
- Boccaletti, S., J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares y C. S. Zhou. 2002. *The Synchronization of Chaotic Systems*. Physics Reports. 366:1-101 p.
- Branicky, M. S. 1998. *Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. 43(4):475-482 p.
- Filippov, A. F. 1988. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 304 p.
- Fridman, L. y A. Levant. 2002. *Higher Order Sliding Modes*. En: W. Perruquetti y J. M. Pierre (eds.). Sliding Mode Control in Engineering. Dekker, Inc., 1-52 p.
- Kelly, R. y V. Santibañez. 2003. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson. Madrid. 344 p.
- Khalil, H. K. 1992. *Nonlinear Systems*. Macmillan. New York. 564 p.
- Liberzon, D. 2003. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser. Boston. 227 p.
- Mosekilde, E., Y. Maistrenko y D. Postnov. 2002. *Chaotic Synchronization Applications to Living Systems*. World Scientific. New Jersey. 428 p.

- Pecora, L. M. y T. L. Carroll. 1998. *Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems*. Physical Review Letters. 80:2109-2112 p.
- Pikovsky, A., M. Rosenblum y J. Kurths. 2001. *Synchronization A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press. Primera Edición. Cambridge. 411 p.
- Rodríguez-Angeles, A. 2002. *Synchronization of Mechanical Systems*. Tesis doctoral. Technische Universiteit Eindhoven. Eindhoven. 158 p.
- Rodríguez-Angeles, A. y H. Nijmeijer. 2004. *Mutual Synchronization of Robots via Estimated State Feedback: A Cooperative Approach*. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 12(4):542-554 p.
- Rosas Almeida, D. I. 2005. *Sincronización Robusta de Sistemas Lagrangianos Utilizando Controladores Discontinuos*. Tesis doctoral. CICESE. Ensenada. 159 p.
- Shevitz, D. y B. Paden. 1994. *Lyapunov Stability Theory of Nonsmooth Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. 39(9):1910-1914 p.
- Strogatz, S. 2003. *Sync The Emerging Science of Spontaneous Order*. THEIA. Primera Edición. Primera edición. New York. 338 p.
- Sun, D. y J. K. Mills. 2002. *Adaptive Synchronized Control for Coordination of Multirobot Assembly Tasks*. IEEE Transactions on Robotics and Automation. 18(4):498-510 p.
- Utkin, V., J. Guldner y J. Shi. 1999. *Sliding Mode in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis. London. 325 p.
- Wah Wu, C. 2002. *Synchronization in Coupled Chaotic Circuits and Systems*. World Scientific. New Jersey. 174 p.
- Wah Wu, C. 2000. *Synchronization in Arrays of Chaotic Circuits Coupled via Dynamic Coupling Elements*. International Journal of Bifurcation and Chaos. 10(4):819-827 p.
- Wah Wu, C. y L. O. Chua. 1996. *On a Conjecture Regarding Synchronization in an Array of Linearly Coupled Dynamical Systems*. IEEE Transactions on Circuits and Systems. 43(2):161-165 p.

Apéndice A

Implementación en DSpace

Para llevar a cabo los experimentos se utilizó la tarjeta de adquisición DSpace que cuenta con los siguientes canales:

- 4 canales de entrada A/D de 12 bits.
- 4 canales de entrada A/D multiplexadas de 16 bits.
- 8 canales de salida D/A de 12 bits.
- 2 canales de entrada para *encoder*.

Dentro de las principales ventajas que ofrece la tarjeta se encuentra la posibilidad de utilizar Simulink de Matlab para construir los modelos y luego cargarlos en la memoria de la tarjeta para la experimentación en tiempo real. En la conformación de los modelos se utilizó

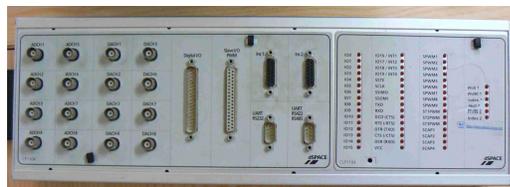


Figura 84: Tarjeta de adquisición DSpace.

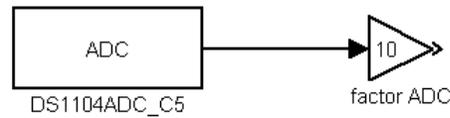


Figura 85: Bloque del canal de entrada análogo a digital.

la librería especial dSPACE RTI1104 en la cual se encuentran los bloques para la entrada y salida de señales, utilizadas en la implementación del arreglo.

En la Figura 85 se muestra uno de estos bloques exclusivos, se trata de una entrada analógica (ADC) con capacidad de medir ± 12 volts. La medición está atenuada en un factor de $\frac{1}{10}$, por lo tanto es necesario hacer un ajuste por medio de un bloque de ganancia en el modelo. A través de este canal se capturaron las mediciones provenientes del circuito-péndulo y el oscilador de Duffing.

En los sistemas mecánicos se utilizaron los canales para *encoder*, cuyo bloque en Simulink se muestra en la Figura 86. El *encoder* entrega un número de pasos o cuentas correspondientes a la posición angular (péndulo mecánico) o lineal (MRA) del mecanismo. Siempre que se trabaja con este tipo de entradas se debe usar también el bloque *Encoder Master Setup* y configurarlo en modo diferencial.

En el caso del péndulo mecánico, su desplazamiento abarca un rango de $\pm \pi$ radianes, sin embargo el *encoder* entrega ± 626.375 cuentas, por lo tanto es necesario aplicar un factor de $\frac{\pi}{626.375}$ para hacer el ajuste y tomar la posición angular para el procesamiento.

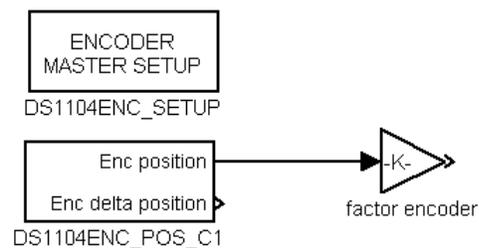


Figura 86: Bloque del canal de entrada para *encoder*.

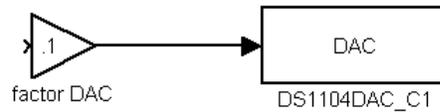


Figura 87: Bloque del canal de salida analógica a digital.

El sistema masa-resorte-amortiguador tiene un desplazamiento lineal de ± 3.5 cm correspondiente a una medición de ± 1960 pasos, con lo cual el factor utilizado fue $\frac{3.5}{1960}$.

Para el envío de las señales de acoplamiento se utilizaron bloques como el mostrado en la Figura 87 que representa un canal de salida analógico con capacidad de entregar ± 10 volts. En este caso, contrario a lo que ocurre con los canales ADC, la señal de salida se amplifica por un factor de 10, por lo tanto es necesario atenuarla en la misma proporción justo antes de entregarla a cada dispositivo.

Es importante mencionar que cada dispositivo maneja unidades distintas, es decir, el péndulo mecánico tiene un desplazamiento angular, el masa-resorte-amortiguador uno lineal y los circuitos manejan potenciales, por lo tanto, fue necesario hacer la siguiente convención:

$$1 \text{ rad} = 1 \text{ cm} = 1 \text{ volt}$$

con la finalidad de comparar las trayectorias de cada sistema. En el caso de las señales de acoplamiento enviadas a los canales de salida (DAC), en cada dispositivo el actuador se maneja por medio de voltaje.

En la Figura 88 se muestra el ejemplo de un experimento implementado en Simulink que representa una red conformada por el péndulo mecánico, el circuito-péndulo y el oscilador de Duffing, tomando como referencia un modelo de péndulo programado en Simulink.

En el modelo, el procesamiento correspondiente a la conformación de los errores auxiliares y la construcción de las señales de acoplamiento se realiza utilizando los bloques normales, simplemente para la entrada de mediciones y la salida de señales de control se emplean

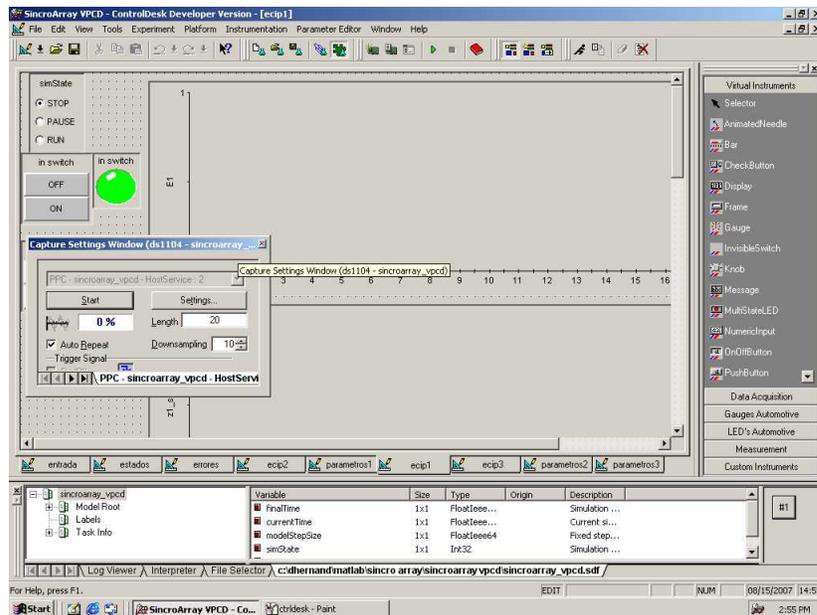


Figura 89: Monitoreo de variables en *Control Desk*.

los bloques de dSPACE RTI1104 ya descritos.

Una vez compilado el modelo y que ha sido cargado en la memoria de la tarjeta, el monitoreo de variables en tiempo real se realiza a través del programa Control Desk, parte de las herramientas de DSpace, que permite la captura de dichas variables en formato de estructuras que pueden ser procesadas en Matlab para su presentación en gráficas.

Apéndice B

Circuitos electrónicos

Para los experimentos se construyeron un par de circuitos electrónicos, al primero se le llamó circuito-péndulo y reproduce el comportamiento del péndulo mecánico. Su esquema se muestra en la Figura 90 y cuenta con tres salidas:

- La posición x_1 .
- La velocidad x_2 (invertida).
- La dinámica $f'(x) = \frac{-67.91\text{sen}(x_1)-0.03x_2-3.05\text{sign}(x_2)+55.54u}{55.54}$.

Por su parte, en la Figura 91 se presenta el esquema del oscilador de Duffing cuyas salidas son:

- La posición x_1 .
- El término z_2 (invertido) que corresponde a la velocidad escalada $\frac{x_2}{6.43}$.
- La dinámica $f'(x) = \frac{41.345x_1-41.345x_1^3-1.6075x_2+41.345u}{41.345}$.

En el caso del circuito-péndulo la entrada del sistema u está invertida.

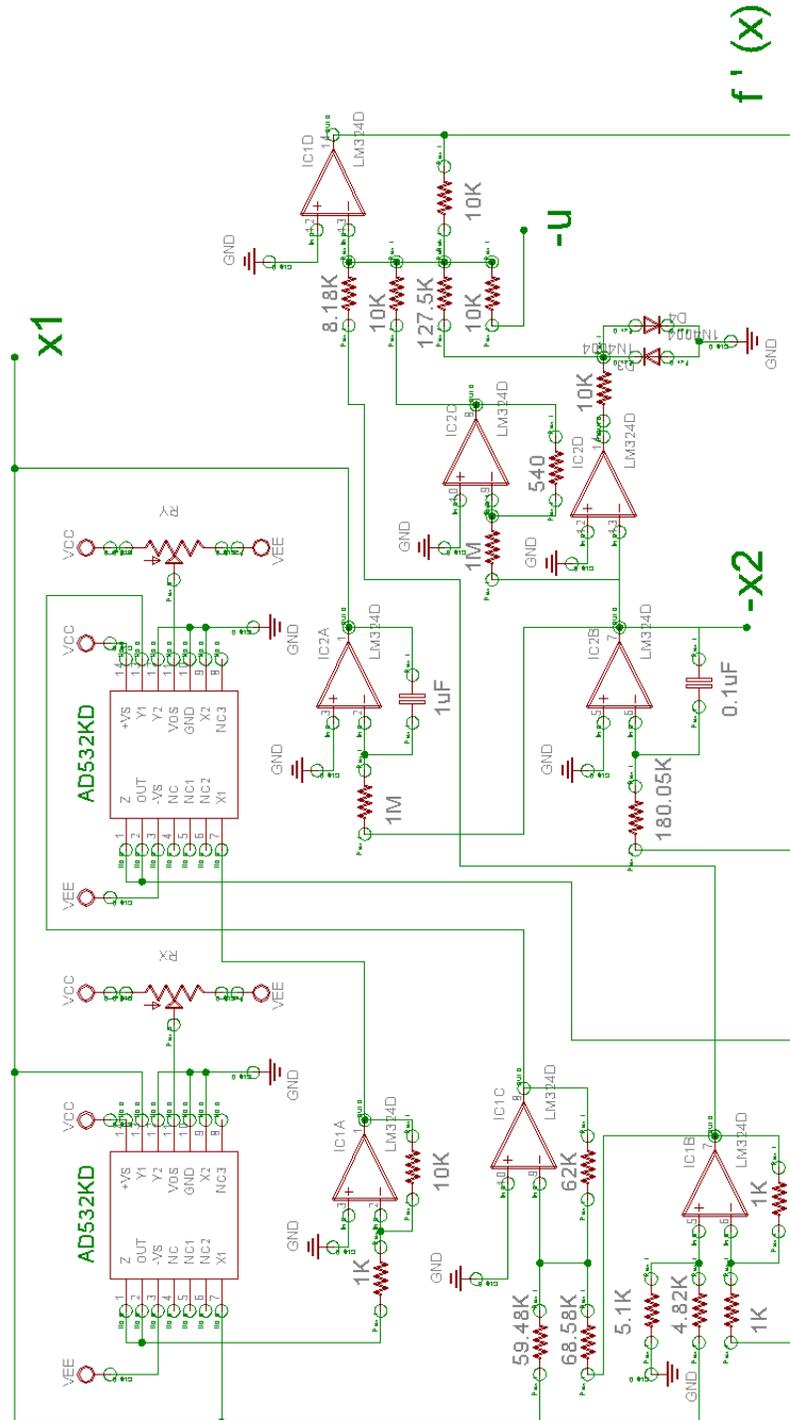


Figura 90: Diagrama del circuito-péndulo.

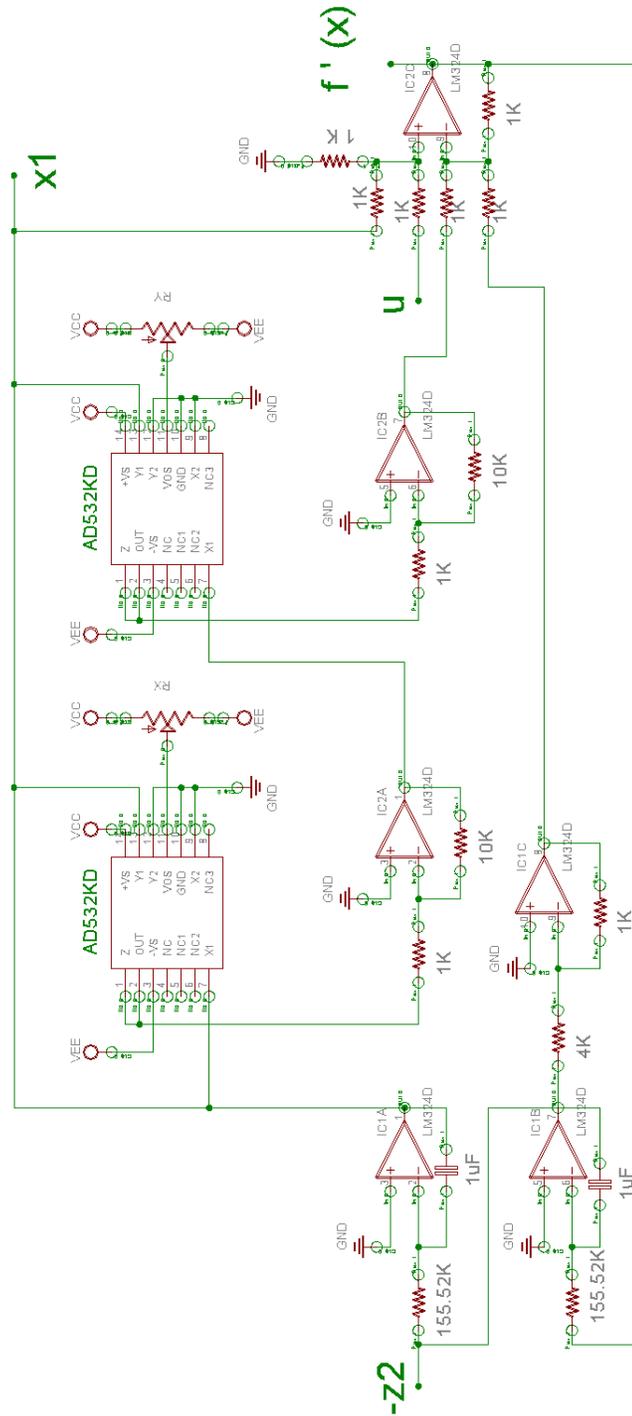


Figura 91: Diagrama del oscilador de Duffing.