

TESIS DEFENDIDA POR  
Oscar Rubén Gómez Aldama

Y aprobada por el siguiente comité:

---

Dr. Iouri Orlov Kuchina  
*Director del Comité*

---

Dr. Bernardino Castillo Toledo  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Leonardo Acho Zuppa  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
*Coordinador del Programa de Posgrado  
en Electrónica y Telecomunicaciones*

---

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales  
*Encargado del Despacho de la Dirección  
de Estudios de Posgrado*

28 de noviembre de 2007

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN  
SUPERIOR DE ENSENADA



---

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

---

**IDENTIFICADOR ADAPTABLE DE PARÁMETROS DE  
SISTEMAS LINEALES DE DIMENSIÓN INFINITA CON  
SALIDA MEDIBLE**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

Oscar Rubén Gómez Aldama

Ensenada, Baja California, México. Noviembre de 2007.

**RESUMEN** de la tesis de **Oscar Rubén Gómez Aldama**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California. Noviembre de 2007.

**IDENTIFICADOR ADAPTABLE DE PARÁMETROS DE SISTEMAS LINEALES DE DIMENSIÓN INFINITA CON SALIDA MEDIBLE**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Iouri Orlov Kuchina

*Director de Tesis*

El presente trabajo de tesis trata sobre la identificación de los parámetros incluyendo los valores de los retardos de una clase de sistemas lineales con retardo en el tiempo (SLRT). Se consideran los sistemas con una sola salida y una sola entrada (SISO) e invariante con el tiempo, con un número finito de retardos en los estados y en la entrada de control y salida sin retardo medible en línea. Se utiliza el algoritmo de un identificador adaptable en línea compuesto por estimadores de estados y estimadores de parámetros. Se muestra además, la efectividad del algoritmo del identificador adaptable al aplicarlo en la identificación de los parámetros de un SLRT SISO de segundo orden que modela la dinámica de la razón aire/combustible (A/C) de un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford, ante retardos constantes conocidos. Se destaca que el algoritmo es capaz de resolver el problema de identificación sujeto a retardos constantes desconocidos. En lo que respecta a sistemas lineales con parámetros distribuidos (SLPD) modelados por ecuaciones con derivadas parciales de tipo parabólico, se identificó el parámetro constante. Éste parámetro se ubica en una condición de frontera (salida medible), para los casos estable en lazo abierto e inestable en lazo cerrado utilizando un identificador adaptable

**Palabras clave:** Sistemas retardo tiempo, identificador adaptable, salida medible.

**ABSTRACT** of the thesis presented by **Oscar Rubén Gómez Aldama**, as a partial requirement to obtain the DOCTOR OF SCIENCE degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS with specialization in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California. November 2007.

**ADAPTIVE IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF LINEAR  
INFINITE DIMENSIONAL SYSTEMS WITH OUTPUT  
MEASUREMENTS**

In the present work the identification problem is treated for linear time-delay systems with unknown parameters and delays. The underlying system is time invariant, single input single output (SISO), and exhibits a finite number of delays in the states and in the input whereas the measured output comes with no delays. An identification algorithm is utilized to estimate both the states and the parameters of the system

In addition, the effectiveness of the algorithm is applied to identification of the parameters of a SISO system of the second order, governing air-to-fuel ratio dynamics of a port fuel injected internal combustion engine. The algorithm is capable of treating both cases where the delay value is known a priori and where it is unknown.

Apart from this, a constant parameter is identified for a distributed parameter system, governed by a parabolic partial differential equation. The identification of the parameter that occurs in a boundary condition is developed in open-loop setting if the system is asymptotically stable and in closed-loop system, otherwise.

**Keywords:** Time-delay systems, adaptive identifier, output measurements.

## DEDICATORIA

*Mi desarrollo personal y profesional logrados a través de los estudios doctorales, están dedicados especialmente a la memoria de mi madre.*

**Trinidad Aldama de Gómez Enero (2005).**

## AGRADECIMIENTOS

*Al Dr. Iouri Orlov Kuchina por su apoyo académico, sugerencias y sobre todo su excelente dirección en éste trabajo de tesis que me permitió alcanzar mi desarrollo profesional, gracias.*

*A los doctores Joaquín Álvarez, Bernardino Castillo, Alejandro Márquez y Leonardo Acho, por su participación en éste comité de tesis. Además, de sus comentarios y sugerencias que enriquecieron bastante mi trabajo de tesis.*

*A la Universidad de Sonora, al Programa de Mejoramiento del Profesorado, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, por apoyarme en la obtención de mis estudios doctorales.*

*A quiénes son infinitamente grande e infinitamente pequeño por permitirme lograr un éxito más en mi vida.*

# Contenido

<i>Capítulo</i>	<i>Página</i>
<b>I Introducción</b>	<b>1</b>
I.1 Antecedentes . . . . .	1
I.1.1 Sistemas lineales con retardo en el tiempo . . . . .	1
I.1.2 Sistemas lineales con parámetros distribuidos . . . . .	4
I.2 Motivación . . . . .	4
I.3 Objetivo general . . . . .	5
I.3.1 Objetivos específicos . . . . .	6
I.4 Organización de la tesis . . . . .	6
<b>II Identificabilidad de sistemas lineales con retardo en el tiempo</b>	<b>8</b>
II.1 Identificabilidad de SLRT . . . . .	8
II.2 Definición de identificabilidad de SLRT . . . . .	10
II.2.1 Definiciones matemáticas . . . . .	10
II.3 Sistema débilmente controlable . . . . .	12
II.3.1 Teorema de identificabilidad de SLRT . . . . .	13
II.4 Análisis de identificabilidad de SLRT SISO en la forma espacio de estados	14
II.4.1 SLRT SISO . . . . .	14
II.4.2 El SLRT SISO en la forma espacio de estados . . . . .	15
II.4.3 Definición de identificabilidad de SLRT SISO en la forma espacio de estados . . . . .	16
II.4.4 Teorema de identificabilidad de un SLRT SISO . . . . .	17
II.5 Comentarios finales . . . . .	17
<b>III Diseño de un identificador adaptable</b>	<b>19</b>
III.1 Identificador adaptable de parámetros con conocimiento a priori de los valores de retardos constantes . . . . .	20
III.2 Teorema del identificador adaptable de parámetros con conocimiento a priori de los valores de retardos constantes . . . . .	23
III.3 Identificador adaptable de parámetros con desconocimiento de los valores de retardos constantes . . . . .	29
III.4 Comentarios finales . . . . .	31
<b>IV Aplicación del identificador adaptable a la dinámica de la razón A/C</b>	<b>33</b>
IV.1 Estructura dinámica de la razón A/C . . . . .	33

# Contenido (continuación)

Capítulo	Página
IV.2 Ecuación de espacio de estados del SLRT SISO con un solo retardo . . .	37
IV.3 Identificación de parámetros con el valor de retardo conocido . . . . .	37
IV.3.1 Solución del SLRT SISO a través de simulaciones numéricas . . .	38
IV.3.2 Resultados de la simulación con el valor de retardo conocido . . .	39
IV.4 Modelo de identificación de parámetros con retardo desconocido . . . . .	41
IV.4.1 Ecuación de espacio de estados del SLRT SISO con retardo desconocido . . . . .	42
IV.5 Identificación de parámetros con el valor de retardo desconocido . . . . .	42
IV.5.1 Solución del SLRT SISO a través de simulaciones numéricas . . .	43
IV.5.2 Resultados de la simulación del SLRT SISO con el valor de retardo desconocido . . . . .	44
IV.6 Robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable .	48
IV.7 Resultado experimental . . . . .	51
IV.8 Comentarios finales . . . . .	53
<b>V Identificador adaptable aplicado a un sistema lineal con parámetros distribuidos</b>	<b>56</b>
V.1 Identificabilidad de SLPD . . . . .	56
V.2 Definición de identificabilidad de un SLPD . . . . .	57
V.3 SLPD en lazo abierto . . . . .	57
V.3.1 Análisis de identificabilidad de un SLPD en lazo abierto . . . . .	58
V.3.2 Teorema de identificabilidad de un SLPD en lazo abierto . . . . .	59
V.4 Diseño del identificador adaptable . . . . .	60
V.4.1 Teorema del identificador adaptable de parámetros para el SLPD asintóticamente estable en lazo abierto . . . . .	62
V.4.2 Identificación del parámetro $g$ del SLPD asintóticamente estable en lazo abierto . . . . .	65
V.5 SLPD inestable en lazo cerrado . . . . .	67
V.5.1 Teorema del identificador adaptable de parámetros para el SLPD inestable en lazo cerrado . . . . .	70
V.5.2 Identificación del parámetro $g$ del SLPD inestable en lazo cerrado	76
V.6 Comentarios finales . . . . .	77
<b>VI Conclusiones</b>	<b>80</b>
VI.1 Aportaciones . . . . .	82
VI.2 Trabajos futuros . . . . .	83

# Lista de Figuras

<i>Figura</i>	<i>Página</i>
1 Motor de combustión interna Ford. . . . .	34
2 Evolución en el tiempo de los estimadores de parámetros $\hat{\beta}(t)$ , $\hat{\beta}^0(t)$ , $\hat{\alpha}(t)$ y $\hat{\alpha}^0(t)$ hacia los valores nominales $\beta$ , $\beta^0$ , $\alpha$ y $\alpha^0$ , para el caso de un solo retardo conocido. . . . .	40
3 Evolución de la entrada de control $v(t)$ a través del tiempo. . . . .	41
4 Evolución en el tiempo de los estimadores de parámetros $\hat{\alpha}(t)$ y $\hat{\alpha}^0(t)$ hacia los valores nominales $\alpha$ y $\alpha^0$ , para el caso de múltiples retardos. . . . .	45
5 Evolución en el tiempo de la estimación de parámetros $\hat{\beta}_i^0(t)$ para el caso de múltiples retardos. . . . .	46
6 Evolución en el tiempo de la estimación de parámetros $\beta_i(t)$ para el caso de múltiples retardos. . . . .	47
7 Evolución de la entrada de control $v(t)$ a través del tiempo. . . . .	48
8 Representación del error cuadrático medio de todos los estimadores de parámetros del identificador adaptable, para los casos: a) retardos acoplados (función $J(t)$ ) y b) retardos desacoplados (función $\bar{J}(t)$ ). . . . .	50
9 Representación del error cuadrático medio del parámetro $\hat{\beta}$ del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado). . . . .	51
10 Representación del error cuadrático medio del parámetro $\hat{\beta}^0$ del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado). . . . .	52
11 Representación del error cuadrático medio del parámetro $\hat{\alpha}$ del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado). . . . .	53
12 Representación del error cuadrático medio del parámetro $\hat{\alpha}^0$ del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado). . . . .	54
13 Dinámica del error (en milésimas) de la razón A/C, por el método actual (guión) y para el identificador adaptable (sólido) en el intervalo de [20, 30] segundos. . . . .	55
14 Cohete de propulsor sólido. . . . .	66
15 Evolución del parámetro $\hat{g}(t)$ en el tiempo. . . . .	67
16 Evolución de la función $u(x, t)$ en el tiempo. . . . .	68
17 Evolución del parámetro $\hat{g}(t)$ en el tiempo. . . . .	78
18 Evolución de la entrada de control $u(1, t)$ en el tiempo. . . . .	79
19 Evolución de la función $u(x, t)$ en el tiempo. . . . .	79

# Capítulo I

## Introducción

*En este trabajo de tesis se estudió la identificación de los valores de los parámetros de sistemas dinámicos lineales de dimensión infinita, en particular sistemas lineales con retardo en el tiempo (SLRT) y sistemas lineales con parámetros distribuidos (SLPD) con salida medible, a través del diseño de un identificador adaptable.*

### I.1 Antecedentes

#### I.1.1 Sistemas lineales con retardo en el tiempo

*Los SLRT son gobernados por ecuaciones diferenciales funcionales. Estos también son llamados sistemas con efectos retardados o de tiempo muerto, hereditarios, ecuaciones con desviación en el argumento o ecuaciones de diferencia-diferencial (vea Richard (2003)).*

*El modelo de un proceso real requiere incluir la influencia del pasado a través del retardo del tiempo. El retardo puede ser constante, conocido o desconocido en el mejor de los casos, o variable en función del tiempo. El retardo del tiempo en un SLRT presenta beneficios y problemas de estabilidad, Kharitonov et al. (2005). Es común modelar un proceso real por un SLRT, en muchas aplicaciones de control industrial Kolmanovskii y Myshkis (1999). Por ejemplo, el control de la razón aire/combustible (A/C) en el*

*cilindro de un motor es muy importante para alcanzar la calidad de marcha deseada de un automóvil, el consumo económico de combustible y un eficiente funcionamiento del catalizador, Mooncheol et al (1998).*

*La propiedad estructural de identificabilidad en línea de la función de transferencia de un SLRT (con un número finito de retardos en el vector de estado, entrada de control y salida medible), definida en Orlov et al. (2002), se basó en que la coincidencia de la salida del sistema con la del modelo implica la coincidencia de las correspondientes funciones de transferencia. La identificación se logra por la aplicación de una entrada de control suficientemente no suave, la cual se diseña independientemente de la forma particular del sistema.*

*En Belkoura et al. (2002) la identificabilidad del SLRT se basó en que la coincidencia del vector de estado del sistema con el vector de estado del modelo implica la coincidencia de sus parámetros, incluyendo los valores de los retardos. En este trabajo de tesis se estudió la identificabilidad por la salida para una clase de SLRT SISO e invariante con el tiempo. Este concepto se basa en que la coincidencia de la salida del sistema con la del modelo implica la coincidencia de sus parámetros, incluyendo los valores de los retardos.*

*El análisis de identificabilidad de SLRT desarrollado en Belkoura et al. (2002) probó que un SLRT es identificable si y sólo si es débilmente controlable, considerando que la estructura del sistema es conocida a priori y todo el vector de estado está disponible para medirse, y solamente los valores de los parámetros y de los retardos son desconocidos. El concepto de controlabilidad débil se define en Sontag (1976), Morse (1976) y*

*Lafay et al. (1996), donde el SLRT es expresado a través de matrices de polinomios del operador retardo y definidas sobre un anillo conmutativo.*

*En Orlov et al. (2003) se probó lo siguiente. Si el SLRT es identificable y asintóticamente estable, y el vector de estado está disponible para medirse, entonces la tarea de identificar en línea los parámetros nominales desconocidos (considerando que los valores de los retardos constantes son conocidos), se logra a través del diseño de un identificador adaptable. El identificador utiliza el conocimiento a priori de la estructura de planta a través de su inclusión en el modelo de referencia cuyos estimadores de parámetros evolucionan en el tiempo y convergen hacia los parámetros nominales desconocidos de la planta.*

*En este trabajo se prueba lo siguiente. Si el SLRT SISO e invariante con el tiempo es identificable y asintóticamente estable, y solamente la salida sin retardo está disponible para medirse, entonces la tarea de identificar en línea los parámetros nominales desconocidos, incluyendo los valores de los retardos, se logra a través del diseño del identificador adaptable compuesto por estimadores de estado y estimadores de parámetros.*

*Para ilustrar la efectividad de este algoritmo, éste se aplica a la identificación de los parámetros, incluyendo los valores de los retardos, de un SLRT SISO de segundo orden que modela la dinámica de la razón A/C de un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford. Esta aplicación se realizó en colaboración con el Dr. Kolmanovsky, investigador del centro de investigaciones Ford, en Dearborn, Michigan.*

### I.1.2 Sistemas lineales con parámetros distribuidos

*Se probó en Boskovic y Krstic (2003) la estabilización de una ecuación con derivadas parciales de tipo parabólico, que modela el desplazamiento del calor en un cohete propulsor sólido inestable usando control en retroceso. La combustión inestable en el cohete puede causar fallas en el motor por exceso de presión, incrementando la transferencia de calor, lo cual resultaría desastroso.*

*En Smyshlyaev y Krstic (2004) se resolvió el problema de estabilidad para una clase de ecuaciones integro-diferenciales parciales de tipo parabólico en lazo cerrado, usando control en retroceso.*

*En Smyshlyaev y Krstic (2005) se desarrolló un controlador para estabilizar asintóticamente una ecuación con derivadas parciales de tipo parabólico en lazo cerrado, con desconocimiento a priori del parámetro constante en una condición de frontera.*

*En este trabajo de tesis se identifica el parámetro constante que se ubica en una frontera de una ecuación con derivadas parciales de tipo parabólico, que modela el desplazamiento del calor en un cohete propulsor sólido, para los casos en que el sistema sea estable en lazo abierto e inestable en lazo cerrado por medio de un identificador adaptable.*

## I.2 Motivación

*Con la finalidad de entender mejor el comportamiento de un proceso (físico, mecánico, químico, entre otros) modelado por un sistema dinámico lineal de dimensión infinita,*

*es necesario conocer los parámetros del sistema.*

- *Por lo anterior, en este trabajo se estudia la identificabilidad y la identificación de los parámetros, incluyendo los valores de los retardos, de una clase de SLRT con una sola entrada y una sola salida (SISO) e invariante con el tiempo, de orden  $n$ . Es decir, se particularizan los trabajos desarrollados sobre identificabilidad e identificación de los parámetros de SLRT.*
- *Además, para estimar en línea los parámetros del SLRT SISO identificable se propone el algoritmo de un identificador adaptable compuesto por estimadores de estado y estimadores de parámetros.*
- *En lo que respecta a SLPD modelados por ecuaciones con derivadas parciales de tipo parabólico, es de nuestro interés en una primera etapa identificar el parámetro constante que se encuentra en una frontera (salida medible) para los casos estable en lazo abierto e inestable en lazo cerrado utilizando un identificador adaptable, posteriormente se estudiará para el caso en que el parámetro sea variable.*

### **I.3 Objetivo general**

*Identificar los valores de los parámetros de sistemas dinámicos lineales de dimensión infinita con salida medible a través del diseño de un identificador adaptable.*

### I.3.1 Objetivos específicos

1. *Desarrollar algoritmos de identificación de los parámetros de un SLRT SISO e invariantes con el tiempo con un número finito de retardos (constantes; conocidos o desconocidos) en los estados y entrada de control y con salida sin retardo, medible en línea.*
2. *Aplicar el algoritmo del identificador adaptable a la identificación de los parámetros de un SLRT SISO de segundo orden que modela la dinámica de la razón A/C de un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford (esta aplicación se realiza en colaboración con el Dr. Kolmanovsky, investigador del centro de investigaciones Ford, en Dearborn, Michigan), incluyendo los valores de los retardos.*
3. *Aplicar el algoritmo del identificador adaptable a la identificación del parámetro constante de los SLPD, estable en lazo abierto e inestable en lazo cerrado, que modelan el desplazamiento del calor en el cohete de propulsor sólido.*

## I.4 Organización de la tesis

*Este trabajo se divide en seis capítulos. En el Capítulo I se presenta una introducción de investigaciones desarrolladas y relacionadas con este trabajo de tesis.*

*En el Capítulo II se particulariza el concepto de identificabilidad de SLRT a identificabilidad de SLRT SISO de orden  $n$ , con un número finito de retardos constantes en el vector de estado y en la entrada de control. La representación en el espacio de estados*

*de un SLRT SISO y se concluye con el teorema de identificabilidad de SLRT SISO con salida sin retardo disponible para medirse en línea.*

*En el Capítulo III se demuestra el teorema de un identificador adaptable de parámetros para un SLRT (identificable) SISO e invariante con el tiempo con conocimiento a priori de los valores de los retardos constantes y se generaliza a través del procedimiento de retardos distribuidos para el caso en que los valores de los retardos constantes son desconocidos.*

*En el Capítulo IV se ilustra la efectividad del identificador adaptable para identificar los parámetros (valores nominales desconocidos) de la dinámica de la razón  $A/C$  en un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford, a través de simulaciones numéricas. La robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable contra incertidumbres en los valores de los retardos del SLRT SISO de segundo orden se estudió utilizando el error cuadrático medio.*

*En el Capítulo V se generaliza el algoritmo del identificador adaptable para un sistema lineal con parámetros distribuidos (SLPD), gobernado por una ecuación con derivadas parciales de tipo parabólico. Finalmente, en el Capítulo VI se presentan las conclusiones.*

# Capítulo II

## Identificabilidad de sistemas lineales con retardo en el tiempo

*En este capítulo se particulariza el concepto de identificabilidad de SLRT a identificabilidad de SLRT SISO de orden  $n$  con un número finito de retardos constantes en el vector de estado y en la entrada de control, así como su representación en el espacio de estados. Además, se incluyen algunas definiciones matemáticas y se concluye con el teorema de identificabilidad de un SLRT SISO.*

### II.1 Identificabilidad de SLRT

*Se supone que el SLRT puede representarse como*

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^r [A_i x(t - \tau_i) + B_i u(t - \tau_i)] \\ y(t) &= \sum_{i=0}^r C_i x(t - \tau_i), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

*El concepto de identificabilidad de un SLRT se basa en la comparación de (1) con el modelo de referencia dado por*

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=0}^r [\hat{A}_i \hat{x}(t - \hat{\tau}_i) + \hat{B}_i u(t - \hat{\tau}_i)] \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=0}^r \hat{C}_i \hat{x}(t - \hat{\tau}_i), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

**Definición 1 (Función continua en tramos)** Orlov (2003). Una señal de entrada de control  $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  es continua en tramos si  $\mathbb{R}$  consiste de un número finito de dominios  $G_j \subset \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  con interior disjunto tal que  $u(t)$  es continua en cada  $G_j$  para todo  $j = 1, 2, \dots, N$  y tiene un límite finito  $\lim u^j(t)$ , posiblemente dependiendo de  $j$ , cuando el argumento  $t^* \in G_j$  se aproxima al punto frontera  $t \in \partial G_j$ . En las ecuaciones (1) y (2)  $x(t), \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de estado;  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  es la señal de entrada de control que se supondrá continua en tramos;  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  es la salida medible del sistema y  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^q$  es la salida del modelo de referencia;  $0 = \tau_0 < \dots < \tau_r$  son los retardos del sistema y  $0 = \hat{\tau}_0 < \dots < \hat{\tau}_r$  son los retardos del modelo de referencia, donde  $\tau_i, \hat{\tau}_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 0, \dots, r$ . Las matrices de los parámetros de los sistemas son  $A_i, \hat{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i, \hat{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $C_i, \hat{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , donde  $i = 0, \dots, r$ . Algunos de los parámetros de las matrices anteriores pueden ser cero, y se supone que los sistemas (1) y (2) presentan la misma estructura.

Las ecuaciones (1) y (2) están sujetas a las funciones de condicion inicial

$$x(-\theta) = \varphi(\theta), 0 \leq \theta \leq \tau_r, \quad (3)$$

$$\hat{x}(-\theta) = \hat{\varphi}(\theta), 0 \leq \theta \leq \hat{\tau}_r, \quad (4)$$

y se supone que pertenecen a la clase de funciones  $C^\infty$ .

## II.2 Definición de identificabilidad de SLRT

**Definición 2** *Belkoura et al. (2002).* El sistema (1) es identificable si existe una entrada de control  $u(t)$  que aplicada a los sistemas (1) y (2) produzca que la salida  $y(t)$  sea idéntica a la del modelo de referencia  $\hat{y}(t)$ , es decir,

$$y(t) \equiv \hat{y}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (5)$$

entonces  $r = \hat{r}$ ,  $\tau_i = \hat{\tau}_i$ ,  $A_i = \hat{A}_i$ ,  $B_i = \hat{B}_i$  y  $C_i = \hat{C}_i$  para  $i = 0, \dots, r$  considerando (3) y (4).

### II.2.1 Definiciones matemáticas

**Definición 3 (Función regular)** *Orlov et al. (2003).* Una señal de entrada de control  $u(t)$  continua en tramos, es regular en el intervalo  $[-\tau_r, \infty)$  si existe una sucesión creciente  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$  de instantes de tiempo  $-\tau_r = t_1 < t_2 < \dots$  con  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \infty$  tal que  $u(t)$  es de clase  $C^\infty(t_j, t_{j+1})$  en cada uno de los intervalos  $(t_j, t_{j+1})$ ,  $j = 1, 2, \dots$  y además se cumple que;  $\lim_{t \rightarrow t_j^+} u^v(t) = u^v(t+) < \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_j^-} u^v(t) = u^v(t-) < \infty$ , para  $v = 0, 1, 2, \dots$

**Definición 4 (Commensurables)** Dos o más valores numéricos  $\tau_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  son commensurables si existen enteros  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tal que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \tau_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \neq 0.$$

Y son no conmensurables si la  $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = 0$ , es decir, la única solución de la  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \tau_i = 0$  es  $\alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

**Definición 5 (Función suficientemente discontinua)** Orlov et al. (2003). Una señal de entrada de control regular  $u(t)$  es suficientemente discontinua si satisface las siguientes condiciones:

1. El conjunto  $\mathbb{I}$  de puntos de discontinuidades  $t_j, j = 1, 2, \dots$  de  $u(t)$  contiene a un subconjunto contable  $\mathbb{I}_0$  de puntos inconmensurables.
2. Los saltos  $\sigma_t = u(t+) - u(t-)$  en  $\rho$  puntos arbitrarios  $t_i \in \mathbb{I}_0, i = 1, \dots, \rho$  forman un matriz de rango completo, es decir,

$$\text{rango} [\sigma_{t_1}, \dots, \sigma_{t_\rho}] = \rho.$$

**Definición 6 (Función suficientemente no suave)** Una señal de entrada de control  $u(t)$  es suficientemente no suave, si es de clase  $C^{\nu-1}$  para algún  $\nu \geq \max\{1, p\}$  y  $u^\nu(t)$  es suficientemente discontinua.

Para construir una señal  $u(t)$  suficientemente no suave, primero se selecciona un conjunto de puntos inconmensurables  $t_j, j = 1, 2, \dots$  donde  $u^\nu(t)$  experimente discontinuidades, luego se impone el carácter de suavidad de la señal entre estos puntos. Por ejemplo las funciones periódicas cuya  $u^\nu(t)$  es una función constante en tramos:

$$u^\nu(t) = \begin{cases} u_0 & \text{si } t \in [jT, t_0 + jT) \\ u_1 & \text{si } t \in [t_0 + jT, (j+1)T), \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots \quad (6)$$

donde  $u_0, u_1$  son constantes, y los puntos de discontinuidades periódicas  $t_j = t_0 + jT$ ,  $j = 0, 1, \dots$  son de periodo  $T > 0$  e inconmensurables con respecto a  $t_0$  (la razón  $\frac{t_0}{T}$  no es un número racional) son funciones suficientemente no suave.

## II.3 Sistema débilmente controlable

El sistema (1) se puede expresar por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t) \\ y(t) &= C(\lambda)x(t), \end{cases}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n[\lambda]$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p[\lambda]$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q[\lambda]$ ,  $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\lambda]$ ,  $B(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times p}[\lambda]$  y  $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{q \times n}[\lambda]$  son matrices de polinomios del operador retardo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$  con coeficientes en el campo real  $\mathbb{R}$  y definidos sobre el anillo de polinomios  $\mathbb{R}[\lambda]$ ;  $k$  es el número máximo de unidades de retardos incomensurables  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  del sistema (1) y el operador retardo se define por  $(\lambda_i x)(t) = x(t - \lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  Sontag (1976).

**Definición 7 (R-módulo)** Sontag (1976). Sea  $R$  un anillo, un  $R$ -módulo  $M$ , es un grupo aditivo junto con una aplicación  $R \times M \rightarrow M$ , que a cada pareja  $(x, v)$  donde  $x \in R$  y  $v \in M$  le asocia un elemento  $xv \in M$  que satisface las siguientes condiciones:

1. Para toda  $x, y \in R$  y  $v, w \in M$  se tiene

$$(x + y)v = xv + xy, \quad x(v + w) = xv + xw$$

2. Se tiene  $(xy)v = x(yv)$
3. Si  $e$  es el elemento uno de  $R$  entonces  $ev = v$ .

**Definición 8 (Débilmente controlable)** Morse (1976). *El sistema (1) es débilmente controlable sobre el campo de funciones racionales  $\mathbb{R}(\lambda)$  del operador retardo  $\lambda$  con coeficientes reales, si existe una ley de control racional (no causal)*

$$u(x(t), x(t - \tau_1), x(t + \tau_1), \dots, x(t - \tau_r), x(t + \tau_r), x(t - 2\tau_1), x(t + 2\tau_1), \dots), \quad (7)$$

que lleve el sistema desde cualquier estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n[\lambda]$  a un elemento  $x_1$  del módulo  $\mathbb{R}^n[\lambda]$ .

El sistema (1) es débilmente controlable si y sólo si

$$\text{rango}_{\mathbb{R}} \left[ B(\lambda) : A(\lambda)B(\lambda) : \dots : A^{n-1}(\lambda)B(\lambda) \right] = n, \quad (8)$$

para algún  $\lambda \in C^k$ .

### II.3.1 Teorema de identificabilidad de SLRT

**Teorema 1.** Orlov (2003). *Considere un SLRT definido por (1), sujeto a las condiciones  $C_0 = I$  y  $C_i = 0$  para  $i = 1, \dots, r$ . Entonces el SLRT es identificable si y sólo si éste es débilmente controlable. Además, la identificación del SLRT débilmente controlable se logra por la aplicación de una señal de entrada de control  $u(t)$  suficientemente discontinua o suficientemente no suave.*

## II.4 Análisis de identificabilidad de SLRT SISO en la forma espacio de estados

En esta sección se particulariza el concepto de identificabilidad para una clase de SLRT SISO e invariante con el tiempo de orden  $n$ .

### II.4.1 SLRT SISO

Considere el siguiente SLRT SISO e invariante con el tiempo de orden  $n$

$$\eta^n(t) = \sum_{i=0}^r \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} \eta^j(t - \tau_i) + \sum_{k=0}^m \beta_{ik} v^k(t - \tau_i) \right], \quad t \geq 0, \quad (9)$$

donde los valores de los retardos son  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_r$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}$  es una entrada,

y

$$z(t) = \eta(t) \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

es una salida medible.

Las suposiciones siguientes son consideradas en este trabajo de tesis:

(s1) El sistema (9) es conocido a priori, y los valores de los parámetros  $\alpha_{ij}, \beta_{ik}$ ,  $i =$

$0, \dots, r$ ,  $j = 0, \dots, n - 1$ ,  $k = 0, \dots, m$  y de los retardos  $\tau_i$  son constantes.

(s2) La salida sin retardo (10) está disponible para medirse en línea.

(s3) Al menos uno de los parámetros  $\beta_{im}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$  es diferente de cero.

(s4) La señal de entrada  $v(t)$  es de clase  $C^m$ , pero no de clase  $C^{m+1}$ .

(s5) Las funciones de condición inicial son

$$\eta(-\theta) = \varphi(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \tau_r, \quad (11)$$

y se supone que pertenecen a la clase  $C^\infty$ .

La suposición (s1) refleja una limitación de la aplicabilidad del identificador adaptable.

La suposición (s2) es necesaria para garantizar la identificabilidad de los parámetros del sistema SLRT SISO.

Algunos de los parámetros  $\alpha_{ij}, \beta_{ik}$ ,  $i = 0, \dots, r$ ,  $j = 0, \dots, n - 1$ ,  $k = 0, \dots, m$ , del SLRT SISO definidos por (9), (10) pueden ser cero, se puede pensar que (9)-(10) presentan una forma similar a (1).

Las suposiciones (s3) y (s4) enlazadas, aseguran que la señal de entrada sea suficientemente no suave, y esto pueda ser fácilmente satisfecho por una selección apropiada de  $v(t)$  durante el proceso de identificación de los parámetros.

La suposición (s5) no es restrictiva en la práctica, debido a la suavidad creciente de las soluciones del SLRT SISO cuando  $t \rightarrow \infty$  Hale (1971).

## II.4.2 El SLRT SISO en la forma espacio de estados

El SLRT SISO definido por las ecuaciones (9), (10) con el vector de estado instantáneo

$$x(t) = [\eta(t), \dots, \eta^{(n-1)}(t), v(t), \dots, v^{m-1}(t)]^T, \quad (12)$$

entrada escalar

$$u(t) = v^m(t), \quad (13)$$

y vector de salida

$$y(t) = [\eta(t), v(t), \dots, v^{m-1}(t)]^T, \quad (14)$$

se representa en la forma espacio de estados por

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = \sum_{i=0}^r [\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} x_{j+1}(t - \tau_i) \\ + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ik} x_{n+k+1}(t - \tau_i) \\ + \beta_{im} u(t - \tau_i)] \\ \dot{x}_{n+1}(t) = x_{n+2}(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m-1}(t) = x_{n+m}(t) \\ \dot{x}_{n+m}(t) = u(t), \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = x_1(t) \\ y_{s+1}(t) = x_{n+s}(t), \quad s = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (16)$$

Como siempre, la noción de identificabilidad está basada en la comparación de la salida del sistema con la salida del modelo de referencia en el cual la variable estado  $\eta$ , los retardos  $\tau_i$ ,  $i = 0, \dots, r$ , y los parámetros  $\alpha_{ij}, \beta_{ik}$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ ,  $k = 0, \dots, m$  son reemplazados por  $\hat{\eta}, \hat{\tau}_i$ ,  $i = 0, \dots, \hat{r}$ ,  $\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ik}$ , respectivamente.

### II.4.3 Definición de identificabilidad de SLRT SISO en la forma espacio de estados

**Definición 9** El SLRT SISO (9), (10) es identificable si existe una entrada de control  $v(t)$ , que aplicada al sistema produzca que su salida  $\eta(t)$  sea idéntica a la del modelo de

referencia  $\hat{\eta}(t)$ , es decir,

$$\sum_{i=0}^r \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) \eta^j(t - \tau_i) + \sum_{k=0}^m (\beta_{ik} - \hat{\beta}_{ik}) v^k(t - \tau_i) \right] \equiv 0, \quad (17)$$

resultando que

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = \hat{\alpha}_{ij}, \beta_{ik} = \hat{\beta}_{ik}, \\ i = 0, \dots, r, j = 0, \dots, n-1, k = 0, \dots, m, \end{cases} \quad (18)$$

considerando las funciones de condición inicial, la identificación se logra por la aplicación de una señal de entrada de control  $v(t)$ .

#### II.4.4 Teorema de identificabilidad de un SLRT SISO

**Teorema 2.** *El SLRT SISO (9)-(10) es identificable y la identificación se logra mediante la aplicación de una señal de entrada de control suficientemente no suave  $v(t)$ .*

*Prueba.* Considerando el SLRT SISO (9)-(10) en su representación en el espacio de estados dada por las ecuaciones (15) y (16), entonces por derivaciones sucesivas del vector de salida (14) se tendría toda la información completa del vector de estado (12) del sistema. Además, el sistema en cuestión es débilmente controlable debido a (s3). Por lo anterior, el **Teorema 1** de identificabilidad de SLRT, es aplicable a la forma espacio de estados (15) y (16) del SLRT SISO. La validación del Teorema 2 es entonces establecida con la aplicación del **Teorema 1**.  $\square$

## II.5 Comentarios finales

*En este capítulo se definió el concepto de identificabilidad de SLRT, donde los retardos*

son constantes conocidos o desconocidos. Se postuló además el **Teorema 1** que establece que una forma (particular) de identificabilidad del sistema (1) aparece cuando éste es débilmente controlable y **todos los estados del sistema están disponibles para medirse**. Se demostró el **Teorema 2**, que establece que un sistema SLRT SISO e invariante con el tiempo de orden  $n$  en su representación en espacio de estados, es identificable cuando éste es débilmente controlable y **la salida sin retardo del sistema está disponible para medirse en línea**. La identificación en línea se logra con la aplicación de una señal de entrada de control suficientemente no suave  $u(t)$ . En el capítulo siguiente se demuestra un teorema de un identificador adaptable que utiliza el resultado del Teorema 2 para identificar en línea los parámetros nominales desconocidos del SLRT SISO, incluyendo los valores de los retardos constantes.

# Capítulo III

## Diseño de un identificador adaptable

*Este estudio se define para un SLRT SISO e invariante con el tiempo (9)-(10), el cual se supone asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov cuando la entrada de control al sistema es  $v(t) \equiv 0$ . La identificación del sistema (9)-(10) se logra por la aplicación de una señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica que se diseña independientemente del SLRT SISO.*

*Si la identificabilidad del sistema (9)-(10) está garantizada, entonces la tarea de identificar en línea los parámetros nominales desconocidos del SLRT SISO, incluyendo los valores de los retardos constantes, se puede lograr a través del diseño de un identificador adaptable. El identificador utiliza el conocimiento a priori de la estructura de la planta a través de su inclusión en el modelo de referencia cuyos estimadores de parámetros evolucionan en el tiempo y convergen hacia los parámetros nominales desconocidos de la planta en un tiempo finito.*

*En este capítulo se demuestra un teorema de un identificador adaptable de parámetros para un SLRT identificable SISO e invariante con el tiempo, con conocimiento a priori de los valores de los retardos y se generaliza a través del procedimiento de retardos distribuidos para el caso cuando los valores de los retardos son desconocidos.*

### III.1 Identificador adaptable de parámetros con conocimiento a priori de los valores de retardos constantes

Para identificar los parámetros de los valores nominales desconocidos  $\alpha_{ij}, \beta_{ik}$ ,  $i = 0, \dots, r$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ ,  $k = 0, \dots, m$ , del SLRT SISO definidos por las ecuaciones (9), (10), con conocimiento a priori de los valores de los retardos constantes, se propone la siguiente ley de identificación adaptable, dada en términos de los estimadores de estado

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) &= \hat{x}_2(t) + w_1(t), \quad \hat{x}_1(-\theta) = \hat{\varphi}_1(\theta) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) &= \hat{x}_n(t) + w_{n-1}(t), \quad \hat{x}_{n-1}(-\theta) = \hat{\varphi}_{n-1}(\theta), \end{cases} \quad (19)$$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_n(t) &= \sum_{i=0}^r \left\{ \sum_{s=0}^{n-2} \hat{\alpha}_{is} \hat{x}_{s+1}(t - \tau_i) \right. \\ &+ \hat{\alpha}_{i(n-1)} [\hat{x}_n(t - \tau_i) + w_{n-1}(t - \tau_i)] \\ &+ \left. \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_{ik} v^{(k)}(t - \tau_i) \right\} + \gamma w_{n-1}(t), \\ \hat{x}_n(-\theta) &= \hat{\varphi}_n(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \tau_r, \end{cases} \quad (20)$$

y de los estimadores de los parámetros

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{\alpha}}_{is}(t) &= \lambda_{is} \hat{x}_{s+1}(t - \tau_i) w_{n-1}(t), \quad \hat{\alpha}_{is}(0) = \hat{\alpha}_{is}^0, \\ &s = 0, 1, \dots, n-2 \\ \dot{\hat{\alpha}}_{i(n-1)}(t) &= \lambda_{i(n-1)} [\hat{x}_n(t - \tau_i) + w_{n-1}(t - \tau_i)] w_{n-1}(t), \\ &\hat{\alpha}_{i(n-1)}(0) = \hat{\alpha}_{i(n-1)}^0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{\beta}}_{ik}(t) &= \mu_{ik} v^{(k)}(t - \tau_i) w_{n-1}(t), \quad \hat{\beta}_{ik}(0) = \hat{\beta}_{ik}^0, \end{cases} \quad (22)$$

donde  $\hat{\alpha}_{ij}^0, \hat{\beta}_{ik}^0$  son las condiciones iniciales de los estimadores de los parámetros, las funciones de condición inicial del modelo de referencia son  $\hat{\varphi}_{j+1} \in C^\infty$ , los parámetros

de adaptación  $\gamma$ ,  $\lambda_{ij}$ ,  $\mu_{ik}$  son positivos. Las entradas al identificador son

$$w_1 = M_1(t) \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), M_1(t) = L + |\hat{x}_2(t)| \quad (23)$$

$$w_s = M_s(t) \text{sign } w_{s-1}, M_s(t) = L + |\hat{x}_{s+1}(t)| \quad (24)$$

$$s = 2, \dots, n-1,$$

donde  $L$  es una cota superior de la norma  $\|\eta(t)\|_{C^{n-1}} = \max_{j=0, \dots, n-1} \max_{t \geq -\tau_r} |\eta^j(t)|$  de la trayectoria del estado. Las soluciones  $\eta(t)$  son siempre acotadas debido a que el SLRT SISO (9), (10) es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov; entonces se tiene que

$$L \geq \|\eta(\cdot)\|_{C^{n-1}} + \delta, \quad (25)$$

donde  $\delta$  es positivo y conocido en la práctica.

La dinámica del identificador adaptable está gobernada por las ecuaciones diferenciales funcionales (19)-(24) con discontinuidades al lado derecho. La superficie de discontinuidades está dada por

$$(x_1 - \hat{x}_1) \cdot w_1(x, \hat{x}) \cdot \dots \cdot w_{n-2}(x, \hat{x}) = 0, \quad (26)$$

en la cual se presenta soluciones con modos deslizantes. El concepto de soluciones con modos deslizantes de las ecuaciones diferenciales con retardos es de los sistemas de dimensión finita (Utkin (1992)) y fue extendido en Orlov et al. (2003).

La idea detrás de la síntesis del identificador (19)-(24) está basada en el uso del

observador por modos deslizantes (19) que genera movimiento deslizante sobre las superficies

$$x_s - \hat{x}_s = 0, \quad s = 1, \dots, n-1. \quad (27)$$

Una vez que ocurre un modo deslizante en la intersección de las superficies (27), las ecuaciones (20)-(24) se transforman en

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_n(t) &= \sum_{i=0}^r \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_{ij} x_{j+1}(t - \tau_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_{ik} v^k(t - \tau_i) \right] + \gamma(x_n(t) - \hat{x}_n(t)), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}_{ij} &= \lambda_{ij} x_{j+1}(t - \tau_i) [x_n(t) - \hat{x}_n(t)], \quad i = 0, \dots, r, \\ &\quad j = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\dot{\hat{\beta}}_{ik} = \mu_{ik} v^k(t - \tau_i) [x_n(t) - \hat{x}_n(t)], \quad k = 0, \dots, m, \quad (30)$$

que representan el algoritmo del identificador adaptable de parámetros, con la información completa del vector de estado, probado en Orlov et al. (2003).

Con la aplicación de una señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica  $v(t)$  al SLRT SISO (9)-(10), las leyes de identificación (19)-(24) garantizan la convergencia de los siguientes límites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_s(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \alpha_{ij}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \beta_{ik}(t) = 0, \quad (31)$$

donde la estimación de los errores de los estados está dada por

$$\Delta x_s(t) = x_s(t) - \hat{x}_s(t), \quad s = 1, \dots, n, \quad (32)$$

y la estimación de los errores de los parámetros está dada por

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_{ij}(t) &= \alpha_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}(t), \\ \Delta\beta_{ik}(t) &= \beta_{ik} - \hat{\beta}_{ik}(t), \quad i = 0, \dots, r, \quad j = 0, \dots, n-1, \\ & \quad k = 0, \dots, m.\end{aligned}\tag{33}$$

### III.2 Teorema del identificador adaptable de parámetros con conocimiento a priori de los valores de retardos constantes

**Teorema 3.** *Se considera el SLRT SISO (9)-(10) exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, con las suposiciones (s1)-(s5). Si se aplica una señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica  $v(t)$  al sistema entonces se cumplen las relaciones de límites definidas por (31), con la ley del identificador adaptable (19)-(24), condiciones iniciales arbitrarias y los parámetros de adaptación positivos.*

*Prueba.* De acuerdo a las ecuaciones (15),(19) y (23) la dinámica del error del estimador de estado  $\Delta x_1$  está gobernada por

$$\Delta\dot{x}_1(t) = \Delta x_2(t) - M_1(t)\text{sign}\Delta x_1(t).\tag{34}$$

Diferenciando la función cuadrática  $V_1(\Delta x_1) = (\Delta x_1)^2$ , a lo largo de las trayectorias

$\Delta x_1(t)$  de (34), sujeto a (23) y (25), resulta que

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= 2\Delta x_1(t)[\Delta x_2(t) - (L + |\hat{x}_2(t)|)\text{sign}\Delta x_1(t)] \\ &\leq -2\delta|\Delta x_1(t)| = -2\delta\sqrt{V_1(t)},\end{aligned}\tag{35}$$

por el principio de comparación, Khalil (1992), la solución de la desigualdad diferencial (35) está acotada por

$$V_1(t) \leq V_0(t) \text{ para toda } t \geq 0.\tag{36}$$

La solución de la siguiente ecuación diferencial sujeta a la condición inicial  $V_0(0) = V_1(0)$ ,

$$\dot{V}_0(t) = -2\delta\sqrt{V_0(t)},\tag{37}$$

está dada por  $V_0(t) = (\sqrt{V_0(0)} - \delta t)^2$ , la cual converge a cero en un tiempo finito  $T = \delta^{-1}\sqrt{V_0(0)}$ , en virtud de la ecuación (36), es una solución válida para la desigualdad diferencial (35) en términos de  $V_1(t)$ .

Así, empezando desde un tiempo finito  $T_1 \in [0, T]$ , el modelo del sistema (19)-(22) evoluciona en el tiempo por modos deslizante a lo largo de la superficie  $\Delta x_1(t) = 0$ . La dinámica de modos deslizante generada sobre la superficie  $\Delta x_1(t) = 0$  está descrita por la aplicación del método de control equivalente, Utkin (1992). La extensión de este método para SLRT fue validada en Orlov et al. (2003).

El método de control equivalente para la ecuación por modos deslizantes

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + M_2(t)\text{sign}\Delta x_2(t), \quad t \geq T_1,\tag{38}$$

sobre la superficie  $\Delta x_1(t) = 0$ , se obtiene substituyendo en  $w_1$  de (19), la solución  $w_1^{eq} = \Delta x_2$  de la ecuación  $\Delta \dot{x}_1(t) = 0$ .

Por analogía a (34), la dinámica del error del estimador de estado  $\Delta x_2(t)$  está gobernada por

$$\Delta \dot{x}_2(t) = \Delta x_3(t) - M_2(t)\text{sign}\Delta x_2(t), \quad t \geq T_1, \quad (39)$$

y empezando desde un momento de tiempo finito  $T_2 > T_1$ , el modelo del sistema (19)-(22) evoluciona en el tiempo por modos deslizantes a lo largo de la superficie  $\Delta x_2(t) = 0$ . Mientras evoluciona sobre la intersección de las superficies  $\Delta x_s(t) = 0$ ,  $s = 1, 2$  la dinámica que aparece en modos deslizantes de

$$\dot{\hat{x}}_3(t) = \hat{x}_4(t) + M_3(t)\text{sign}\Delta x_3(t), \quad t \geq T_2, \quad (40)$$

es similar a (39), y está descrita de acuerdo al método de control equivalente.

Por iteraciones sucesivas sobre  $s$ , se concluye que empezando desde un tiempo finito  $T_{n-1} > 0$ , se generan modos deslizantes sobre la intersección de las  $n - 1$  superficies (27) y la dinámica que aparece en modos deslizantes (28)-(30), se deriva de acuerdo al método de control equivalente, por substitución de  $x_s$ ,  $s = 1, \dots, n - 1$  y de la solución  $w_{n-1}^{eq} = \Delta x_n$  de la ecuación  $\Delta \dot{x}_{n-1} = 0$ , por  $\hat{x}_s$  y  $w_{n-1}$  en (20)-(22).

Debido a que el SLRT SISO (9) es exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, y por la aplicación de la señal de entrada de control suficientemente no suave y

periódica  $v(t)$  al SLRT SISO, entonces éste posee una solución estacionaria periódica  $\eta_p$ .

La desviación del estado  $\eta(t)$  con la solución periódica  $\eta_p$ , está dada por  $e(t) = \eta(t) - \eta_p(t)$ , y de acuerdo a (9), está gobernada por

$$e^n(t) = \sum_{i=0}^r \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} e^j(t - \tau_i) \right]. \quad (41)$$

La dinámica del identificador por modos deslizantes sobre (20)-(22) enlazada con la ecuación autónoma (41), se representa en términos de los errores de los estados por

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_n(t) &= \sum_{i=0}^r \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \alpha_{ij}(t) [e^j(t - \tau_i) + \eta_p^j(t - \tau_i)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^m \Delta \beta_{ik}(t) v^k(t - \tau_i) \right] - \gamma \Delta x_n(t), \end{aligned} \quad (42)$$

y de los errores de los parámetros por

$$\Delta \dot{\alpha}_{ij}(t) = -\lambda_{ij} [e^j(t - \tau_i) + \eta_p^j(t - \tau_i)] \Delta x_n(t), \quad (43)$$

$$i = 0, \dots, r, \quad j = 0, \dots, n - 1,$$

$$\Delta \dot{\beta}_{ik}(t) = -\mu_{ik} v^k(t - \tau_i) \Delta x_n(t), \quad k = 0, \dots, m. \quad (44)$$

Falta probar que (42)-(44) es asintóticamente estable global. Puesto que el SLRT SISO (9), es exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, entonces existe una

funcional de Lyapunov-Krasovskii (Hale (1971))

$$V_0(e) = \langle We, e \rangle,$$

definida por medio del producto punto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en el espacio de Hilbert  $R^n \times L_2(0, \tau_r; R^n)$ , y un operador lineal acotado  $W$ , tal que la derivada de  $V_0(e)$  con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema autónomo (41) es definida negativa

$$\dot{V}_0(t) = - \langle e_t, e_t \rangle .$$

Puesto que (41) es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov, entonces genera un semigrupo- $C_0$  exponencialmente estable  $S(t)$  sobre el espacio de Hilbert  $R^n \times L_2(0, \tau_r; R^n)$ , y un operador lineal acotado  $W$ , dado por;  $W = \int_0^\infty S^*(t)S(t)dt$  con  $S^*(t)$  como el operador adjunto de  $S(t)$  Hale (1971).

Considerando como funcional de Lyapunov a

$$\begin{aligned} V(e, \Delta x_n, \Delta \alpha, \Delta \beta) &= \langle We, e \rangle + (\Delta x_n)^2 \\ &+ \sum_{i=0}^r \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{ij}^{-1} (\Delta \alpha_{ij})^2 + \sum_{k=0}^m \mu_{ik}^{-1} (\Delta \beta_{ik})^2 \right], \end{aligned} \quad (45)$$

donde  $\Delta \alpha = (\Delta \alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{(r+1) \times n}$  y  $\Delta \beta = (\Delta \beta_{ik}) \in \mathbb{R}^{(r+1) \times (m+1)}$  son matrices, entonces la derivada de la funcional de Lyapunov (45) con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema (42)-(44), es semidefinida negativa

$$\dot{V}(t) = - \langle e_t, e_t \rangle - 2\gamma [\Delta x_n(t)]^2.$$

Debido a que el lado derecho del sistema (42)-(44) es periódico, entonces la estabilidad asintótica global del sistema se cumple con la extensión del principio de invariancia de LaSalle-Krasovskii para SLRT. La extensión desarrollada en Haddock y Terjeki (1983) para SLRT invariante con el tiempo, admite una generalización para el caso periódico, similar al obtenido para sistemas sin retardo Rouche et al. (1977).

De acuerdo al principio de invariancia, se busca que las trayectorias del sistema (42)-(44) converjan al subconjunto de invariancia máximo del conjunto de soluciones de (42)-(44), para el cual se satisface que  $\dot{V}(t) = 0$ , o equivalente a

$$e(t) \equiv 0, \Delta x_n(t) \equiv 0. \quad (46)$$

El conjunto (46), no contiene todas las trayectorias triviales de (42)-(44). Si (46) se aplica a (43)-(44) entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}_{ij}(t) = 0, \dot{\hat{\beta}}_{ik}(t) = 0, \quad i = 0, \dots, r, \quad j = 0, \dots, n-1, \\ k = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (47)$$

Substituyendo (46)-(47) en (42) se tiene que

$$\sum_{i=0}^r \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \alpha_{ij} \eta^j(t - \tau_i) + \sum_{k=0}^m \Delta \beta_{ik} v^k(t - \tau_i) \right] \equiv 0. \quad (48)$$

Por el Teorema 2, la identificación del sistema (9) y (10) se logra por la aplicación de una señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica  $v(t)$ . Entonces, usando (17) en (48), se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{ij} = 0, \Delta\beta_{ik} = 0, \quad i = 0, \dots, r, \quad j = 0, \dots, n-1, \\ k = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (49)$$

Así, con la aplicación del principio de invariancia al sistema (42)-(44), se cumple la estabilidad asintótica global, se satisface (31) y se prueba el Teorema 3  $\square$

**Observación 1** *El principio de invariancia de LaSalle-Krasovskii no es aplicable en general para sistemas no autónomos, la condición de periodicidad impuesta por el Teorema 3 a la señal de entrada de control  $v(t)$  no puede ser omitida. Sin embargo, la afirmación del Teorema 3 es válida si la señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica  $v(t)$  es reemplazada por una casi-periódica.*

**Observación 2** *Si algunos parámetros de la planta son conocidos a priori, entonces pueden ser omitidos los correspondientes en la ecuación del identificador adaptable.*

### III.3 Identificador adaptable de parámetros con desconocimiento de los valores de retardos constantes

*El siguiente procedimiento de diseño de identificador adaptable es propuesto cuando los valores de los retardos no están disponibles. Se inicia con suponer que todos los valores de los retardos del sistema*

$$\tau_i = \zeta_i h \leq Nh, \quad i = 1, \dots, r, \quad r \geq 2 \quad (50)$$

son conmensurables a algún número positivo  $h \in \mathbf{R}^1$ , con enteros desconocidos  $0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_r$ . El generador de retardos  $h$  y la cota superior  $Nh$  del conjunto de retardos (50), son conocidos a priori. Dentro de este marco, la dinámica del SLRT SISO (9) y (10) con los valores de los retardos desconocidos, se representa agregando términos de los retardos ficticios en la forma

$$\eta^n(t) = \sum_{i=0}^N \left[ \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} \eta^j(t - ih) + \sum_{k=0}^m b_{ik} v^k(t - ih) \right], \quad (51)$$

$$z(t) = \eta(t), \quad (52)$$

con conocimiento a priori de los valores de los retardos

$$\tau_i = ih, \quad i = 0, \dots, N. \quad (53)$$

Algunos de los parámetros  $a_{ij}, b_{ik}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ ,  $k = 0, \dots, m$  toman el valor de cero, mientras otros, que no son especificados a priori, representan los valores de los parámetros de (9) y (10).

Evidentemente el SLRT SISO (51) y (52) así construido y el original SLRT SISO (9)-(10), generan la misma función de salida  $z(t)$  entonces estos sistemas son identificables de acuerdo al Teorema 2. La identificación de los parámetros

$$a_{ij}, b_{ik}, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad k = 0, \dots, m, \quad (54)$$

del SLRT SISO (51) y (52) con conocimiento a priori de los retardos desconocidos, resulta que (9) y (10) cuyos retardos desconocidos (50), y los parámetros diferentes

de cero  $a_{ij} \neq 0, b_{ik} \neq 0$  tiene una relación uno a uno, por lo tanto, la síntesis del identificador (19)-(24) se aplica al SLRT (51) y (52) con un conocimiento a priori de los retardos (53), pudiendo identificar en línea los parámetros del SLRT (9) y (10) con un conocimiento a priori de los retardos (50).

Sobre el primer paso del procedimiento, el SLRT (9) y (10) es modelado como un sistema incierto, cuyos valores de retardos conocidos a priori  $\tau_i, i = 1, \dots, N$  con  $N$  suficientemente grande, satisfacen la siguiente relación de colocación entre ellos

$$|\tau_i - \tau_{i-1}| < h, \quad (55)$$

donde  $h > 0$  es la precisión de identificación. Entonces la identificación del sistema se logra por la aplicación de una señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica  $v(t)$ , construida independientemente del sistema implícito. Los valores de los retardos del modelo (9), pueden ser distribuidos uniformemente sobre el intervalo de tiempo  $[0, Nh]$ . Con esta representación algunos parámetros desconocidos a priori del sistema, corresponden a retardos ficticios. Después de eso, se utiliza la ley de identificación adaptable (19)-(24) para el modelo antes mencionado, completando el procedimiento de diseño.

### III.4 Comentarios finales

En este capítulo se demostró el **Teorema 3** el cual establece la identificación en línea de los parámetros del sistema (9)-(10), con la ley de identificación adaptable (19)-(24),

*condiciones iniciales arbitrarias y los parámetros de adaptación positivos.*

*Además, si los valores de los retardos constantes del sistema (9)-(10) son desconocidos, entonces con la aplicación del procedimiento de retardos distribuidos al sistema (9) se genera un incremento en el número de parámetros a determinar sus valores. Finalmente se tiene que algunos parámetros agregados al sistema son ficticios, es decir, su valor nominal es cero. En el capítulo siguiente se aplica el algoritmo del identificador adaptable a la identificación de los parámetros de un SLRT SISO de segundo orden. Además, se estudia la robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable.*

# Capítulo IV

## Aplicación del identificador adaptable a la dinámica de la razón A/C

*En este capítulo se muestra la aplicación del algoritmo del identificador adaptable, a la identificación de los parámetros de un SLRT SISO de segundo orden que modela la dinámica de la razón A/C de un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford (esta aplicación se realizó en colaboración con el Dr. Kolmanovsky, investigador del centro de investigaciones Ford, en Dearborn, Michigan), para los casos en que los valores de los retardos constantes sean considerados conocidos o desconocidos. Además, se estudia la robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable contra incertidumbres en los valores de los retardos del SLRT SISO utilizando el error cuadrático medio.*

### IV.1 Estructura dinámica de la razón A/C

*Con base en Aquino (1999) la ecuación diferencial que modela la dinámica de la razón A/C de un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford (véase*

la Figura 1) está dada por

$$\begin{aligned}\frac{dm_p}{dt} &= -\frac{m_p}{\rho} + XW_{f,i}, \\ W_{f,c} &= (1 - X)W_{f,i} + \frac{m_p}{\rho}, \\ \lambda &= \frac{W_{a,c}}{W_{f,c}}.\end{aligned}\tag{56}$$

Donde  $W_{f,i}$  es la razón de flujo de combustible inyectado,  $W_{f,c}$  es la razón de flujo de

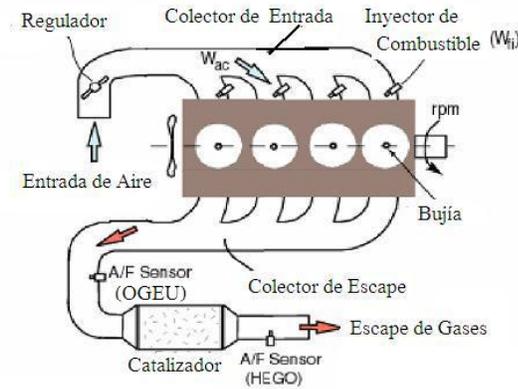


Figura 1: Motor de combustión interna Ford.

combustible dentro del cilindro del motor,  $0 < X < 1$  es la fracción de combustible a inyectar para reponer el combustible líquido gastado por el puerto del motor, y  $\rho > 0$  es una constante de evaporación del combustible líquido. La masa de combustible es  $m_p$ , la razón A/C en el cilindro es  $\lambda$ , y  $W_{a,c}$  denota el flujo de aire en el cilindro.

Para controlar la razón A/C del motor, es necesario conocer exactamente los valores de los parámetros  $X$  y  $\rho$ , durante la operación del motor. Conociendo los valores de los estimadores de los parámetros  $\hat{X}$  y  $\hat{\rho}$  de  $X$  y  $\rho$ , y si  $W_{f,c}^d$  es la operación deseada del

flujo de combustible en el cilindro calculado con respecto a la proporción de aire  $W_{a,c}$ , entonces la entrada de control de combustible a inyectar al sistema es

$$W_{f,i} = \frac{W_{f,c}^d - \frac{m_p}{\hat{\rho}}}{1 - \hat{X}}. \quad (57)$$

El control exacto de la razón A/C en el cilindro del motor es muy importante para alcanzar la calidad de marcha deseada del automóvil, el consumo económico de combustible y un eficiente funcionamiento del catalizador, Mooncheol et al (1998).

Note que:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{f,c} &= (1 - X)\dot{W}_{f,i} + \frac{1}{\rho}(XW_{f,i} - \frac{m_p}{\rho}) \\ &= (1 - X)\dot{W}_{f,i} + \frac{1}{\rho}XW_{f,i} \\ &\quad - \frac{1}{\rho}(W_{f,c} - (1 - X)W_{f,i}) \\ &= (1 - X)\dot{W}_{f,i} + \frac{1}{\rho}(W_{f,i} - W_{f,c}). \end{aligned} \quad (58)$$

La medición de la razón A/C en el cilindro se realiza a través del sensor lineal OGEU (Orígeno del Gas de Escape Universal), y se denota por  $\mu_{ug}$ . La dinámica del sensor y la mezcla de escape son de primer orden, con retardo en el tiempo (debido al tiempo transcurrido entre la inyección de combustible y el golpe de escape del motor), y se expresa por la siguiente ecuación

$$\dot{\mu}_{ug} + a_{ug}\mu_{ug} = a_{ug} \frac{W_{f,c}(t - \tau)}{W_{a,c}(t - \tau)}(1 - l), \quad (59)$$

donde  $1/a_{ug}$  es una constante del tiempo,  $\tau$  es el retardo del tiempo, el parámetro constante  $l \in [0, 1]$ , representa la pérdida de combustible en el cilindro del motor, debido a la temperatura o por la mala calibración en la estimación del flujo del aire.

Derivando (59) con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mu}_{ug} + \dot{\mu}_{ug}\left(a_{ug} + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a_{ug}}{\rho}\mu_{ug} &= a_{ug}(1 - X)\frac{\dot{W}_{f,i}(t - \tau)}{W_{a,c}(t - \tau)}(1 - l) \\ &+ \frac{a_{ug}}{\rho}\frac{W_{f,i}(t - \tau)}{W_{a,c}(t - \tau)}(1 - l) \\ &- a_{ug}\mu_{ug}\frac{\dot{W}_{a,c}(t - \tau)}{W_{a,c}(t - \tau)} - \dot{\mu}_{ug}\frac{W_{a,c}(t - \tau)}{W_{a,c}(t - \tau)}. \end{aligned} \quad (60)$$

Considerando sólo intervalos de tiempo donde el sistema presenta flujo de aire constante en el cilindro, es decir,  $\dot{W}_{a,c} = 0$  y, realizando los siguientes cambios de variables y de parámetros en (60);  $y = \mu_{ug}$ ,  $v = \frac{W_{f,i}}{W_{a,c}}$ ,  $\alpha = a_{ug} + \frac{1}{\rho}$ ,  $\alpha^0 = \frac{a_{ug}}{\rho}$ ,  $\beta^0 = \alpha^0(1 - l)$ ,  $\beta = a_{ug}(1 - X)(1 - l)$ , se tiene que la dinámica de la razón A/C está definida por el SLRT SISO de segundo orden

$$\ddot{y}(t) = \beta\dot{v}(t - \tau) + \beta^0v(t - \tau) - \alpha^0y(t) - \alpha\dot{y}(t). \quad (61)$$

## IV.2 Ecuación de espacio de estados del SLRT SISO con un solo retardo

Realizando el siguiente cambio de variables  $y(t) = x_1(t)$ ,  $\dot{y}(t) = x_2(t)$  en (61), se define la ecuación de estados de la planta por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \beta\dot{v}(t - \tau) + \beta^0 v(t - \tau) - \alpha x_2(t) - \alpha^0 x_1(t),\end{aligned}\quad (62)$$

donde los parámetros positivos a identificar son:  $\beta, \beta^0, \alpha, \alpha^0$  y  $\tau$  con dinámica interna asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov.

## IV.3 Identificación de parámetros con el valor de retardo conocido

Considerando la estructura del sistema (62) y el valor del retardo  $\tau$  conocido, entonces aplicando el Teorema 3 para identificar los parámetros  $\beta, \beta^0, \alpha, \alpha^0$  en línea, además de la Observación 2 de la página 29, se tiene que las leyes de identificación adaptables (19)-(24) se describen por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + w(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \gamma w(t) + \hat{\beta}(t)\dot{v}(t - \tau) \\ \quad + \hat{\beta}^0 v(t - \tau) - \hat{\alpha}(t)[\hat{x}_2(t) + w(t)] - \hat{\alpha}^0(t)\hat{x}_1(t), \end{cases}\quad (63)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\beta}}(t) = \lambda_1 \dot{v}(t - \tau)w(t); \quad \hat{\beta}(0) = 2 \\ \dot{\hat{\beta}}^0(t) = \lambda_2 v(t - \tau)w(t); \quad \hat{\beta}^0(0) = 13.6 \\ \dot{\hat{\alpha}}(t) = -\lambda_3 [\hat{x}_2(t) + w(t)]w(t); \quad \hat{\alpha}(0) = 6 \\ \dot{\hat{\alpha}}^0(t) = -\lambda_4 \hat{x}_1(t)w(t); \quad \hat{\alpha}^0(0) = 10.5 \\ w(t) = (L + |\hat{x}_2(t)|) \text{sign}[x_1(t) - \hat{x}_1(t)] \\ L \geq \delta + \|y(\cdot)\|_{C^1}, \end{array} \right. \quad (64)$$

donde  $\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$  son los parámetros de adaptación,  $L$  es una cota superior de la  $C^1$ -norma de la variable de salida  $y(t)$  y  $\delta > 0$  es una constante. El objetivo de identificación de acuerdo a (31) es:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_1(t) &= y(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_2(t) = \dot{y}(t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}(t) &= \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}^0(t) = \alpha^0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}(t) &= \beta, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}^0(t) = \beta^0. \end{aligned} \quad (65)$$

### IV.3.1 Solución del SLRT SISO a través de simulaciones numéricas

Las simulaciones numéricas de (63)-(64) se realizaron con el paquete SIMNON Versión 3.0, aplicando el algoritmo de integración Runge-Kutta-Fehlberg 45 con ajuste automático del paso de integración y con una tolerancia del error de  $10^{-6}$ , considerando como valores nominales del sistema (62) a:

$$\beta = 4.0, \quad \beta^0 = 12.5, \quad \alpha = 7.5, \quad \alpha^0 = 12.5 \quad \text{y} \quad \tau = 0.3. \quad (66)$$

Estos valores de los parámetros se obtuvieron de la operación del motor en una fábrica, Orlov et al. (2006).

Los estimadores de parámetros iniciales de la ley de identificación adaptable (63)-(64)

son:

$$\hat{\beta}(0) = 2.0, \hat{\beta}^0(0) = 13.6, \hat{\alpha}(0) = 6.0, \hat{\alpha}^0(0) = 10.5. \quad (67)$$

Las condiciones iniciales de los estados de la planta son:

$$x_1(0) = 0.0683, \quad x_2(0) = 0.0. \quad (68)$$

El valor de  $x_1(0) = 0.0683$  es la medida inicial de la razón A/C en el cilindro del motor.

Las condiciones iniciales de los estimadores de estados del identificador son:

$$\hat{x}_1(0) = 0.0683, \quad \hat{x}_2(0) = 0.1. \quad (69)$$

La señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica  $v(t)$  que se aplicó al SLRT (62) se limitó a que estuviera definida en  $v(t) \in [\frac{1}{18}, \frac{1}{11}]$  y se generó como solución del sistema dinámico

$$\dot{v}(t) = 0.37 \cdot \text{sign}(\text{sen}(0.1 + 31.71t)), \quad \text{con condición inicial } v(0) = \frac{1}{18}. \quad (70)$$

### IV.3.2 Resultados de la simulación con el valor de retardo conocido

La Figura 2 muestra que los estimadores de parámetros  $\hat{\beta}(t), \hat{\beta}^0(t), \hat{\alpha}(t)$  y  $\hat{\alpha}^0(t)$  evolucionan en el tiempo y convergen rápidamente hacia los valores nominales  $\beta, \beta^0, \alpha$  y  $\alpha^0$  del SLRT SISO de segundo orden (61), implicando que el objetivo del identificador adaptable se cumplió, debido a que se satisface la ecuación (65) de la página 38. La convergencia rápida de los estimadores de parámetros hacia los valores nominales es por la

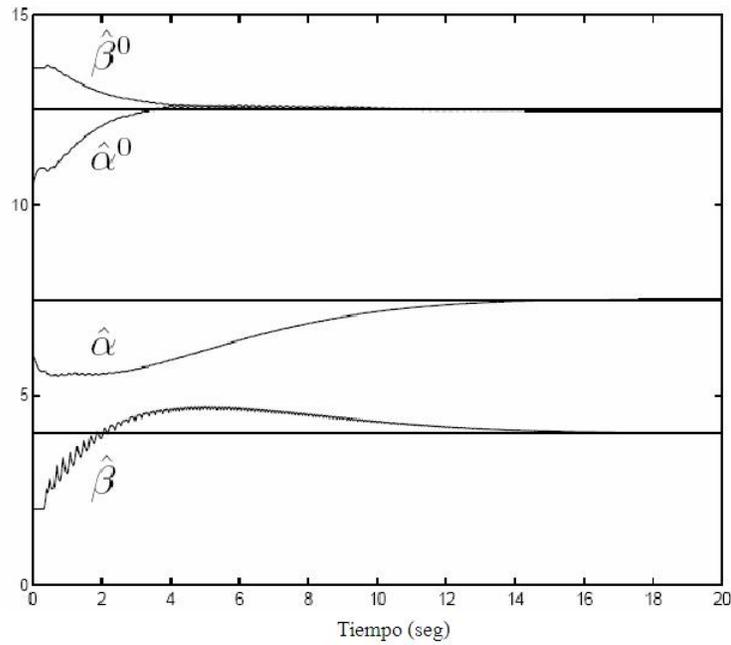


Figura 2: Evolución en el tiempo de los estimadores de parámetros  $\hat{\beta}(t)$ ,  $\hat{\beta}^0(t)$ ,  $\hat{\alpha}(t)$  y  $\hat{\alpha}^0(t)$  hacia los valores nominales  $\beta$ ,  $\beta^0$ ,  $\alpha$  y  $\alpha^0$ , para el caso de un solo retardo conocido.

ley de identificación adaptable (63)-(64), la aplicación de la señal de entrada de control suficientemente no suave  $v(t)$  (véase la Figura 3) y los parámetros de adaptación.

Los parámetros de adaptación son:

$$\gamma = 10, \lambda_1 = 750, \lambda_2 = 430, \lambda_3 = 900, \lambda_4 = 760.$$

Además, se observa que el estado medible de la planta  $x_1(t)$  y el estimador de estado del identificador  $\hat{x}_1(t)$  se inicializan con la condición  $x_1(0) = \hat{x}_1(0) = 0.683$ . Debido a esto aparece modos deslizantes desde que se inicia el proceso de identificación a través de la superficie  $s = x_1(0) - \hat{x}_1(0) = 0$  y por la conmutación del observador de entrada

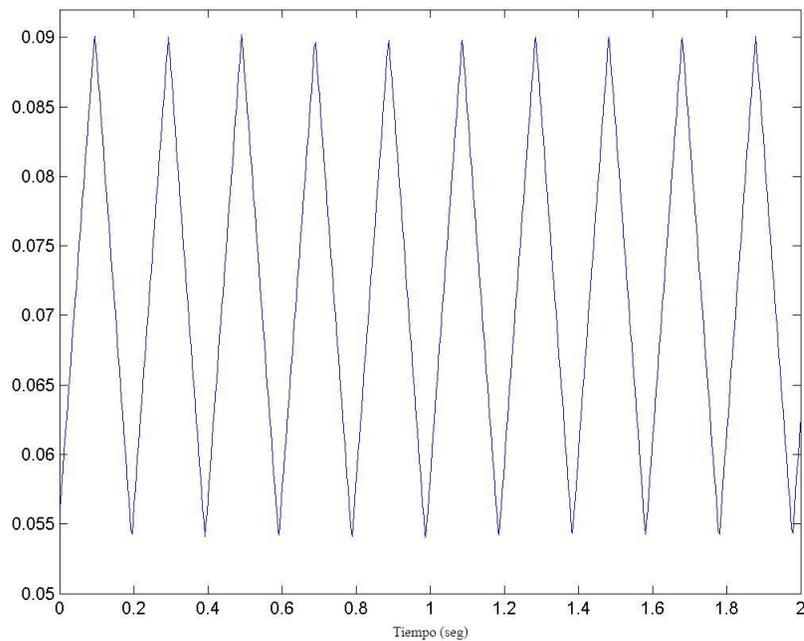


Figura 3: Evolución de la entrada de control  $v(t)$  a través del tiempo.

(64) de amplitud pequeña  $L = 0.2$ . Si el proceso de identificación se iniciara en la forma  $s = x_1(0) - \hat{x}_1(0) \neq 0$ , entonces la variación de  $\hat{x}_1(t)$  aceptable, para iniciar el proceso de identificación de parámetros, es  $\hat{x}_1(t) \in [0.0658, 0.072]$ .

#### IV.4 Modelo de identificación de parámetros con retardo desconocido

Debido a que el valor del retardo  $\tau$  es desconocido, entonces aplicando el procedimiento de retardos distribuidos y considerando a (61) como un sistema con un número grande de retardos ficticios  $\tau_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, N$  distribuidos uniformemente sobre el intervalo de tiempo  $[0, Nh]$ , se tiene que la dinámica de la razón  $A/C$  está dada por el SLRT

*SISO de segundo orden*

$$\ddot{y}(t) = \sum_{i=1}^N \{\beta_i \dot{v}(t - ih) + \beta_i^0 v(t - ih)\} - \alpha \dot{y}(t) - \alpha^0 y(t). \quad (71)$$

#### IV.4.1 Ecuación de espacio de estados del SLRT SISO con retardo desconocido

Realizando el siguiente cambio de variables  $y(t) = x_1(t)$ ,  $\dot{y}(t) = x_2(t)$  en (71), se define la ecuación de estados de la planta por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \sum_{i=1}^N \{\beta_i \dot{v}(t - ih) + \beta_i^0 v(t - ih)\} - \alpha x_2(t) - \alpha^0 x_1(t), \end{aligned} \quad (72)$$

donde los parámetros positivos a identificar son:  $\beta_i, \beta_i^0, \alpha, \alpha^0$  y  $\tau_i = ih$ , con dinámica interna asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov.

### IV.5 Identificación de parámetros con el valor de retardo desconocido

Considerando la estructura del sistema (71) y el valor del retardo  $\tau$  desconocido entonces, aplicando el procedimiento de retardos distribuidos y el Teorema 3 para identificar los parámetros  $\beta_i, \beta_i^0, \alpha, \alpha^0$  y  $\tau_i$  en línea, además de la Observación 2 de la página 29, se tiene que las leyes de identificación adaptables (19)-(24) se describen por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) &= \hat{x}_2(t) + w(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= \gamma w(t) + \sum_{i=1}^N \{\hat{\beta}_i(t) \dot{v}(t - ih) + \hat{\beta}_i^0(t) v(t - ih)\} \\ &- \hat{\alpha}(t) [\hat{x}_2(t) + w(t)] - \hat{\alpha}^0(t) \hat{x}_1(t), \end{cases} \quad (73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\beta}}_i(t) = \lambda_{1i}\dot{v}(t - ih)w(t); \quad \hat{\beta}_i(0) = 2 \\ \dot{\hat{\beta}}_i^0(t) = \lambda_{2i}v(t - ih)w(t); \quad \hat{\beta}_i^0(0) = 13.6 \quad i = 1, \dots, N \\ \dot{\hat{\alpha}}(t) = -\lambda_3[\hat{x}_2(t) + w(t)]w(t); \quad \hat{\alpha}(0) = 6 \\ \dot{\hat{\alpha}}^0(t) = -\lambda_4\hat{x}_1(t)w(t); \quad \hat{\alpha}^0(0) = 10.5 \\ w(t) = (L + |\hat{x}_2(t)|)\text{sign}[x_1(t) - \hat{x}_1(t)], \quad L \geq \delta + \|y(\cdot)\|_{C^1}, \end{array} \right. \quad (74)$$

donde  $\gamma, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_3, \lambda_4 > 0$  son los parámetros de adaptación,  $L$  es una cota superior de la  $C^1$ -norma de la variable de salida  $y(t)$  y  $\delta > 0$  es una constante.

El objetivo de identificación de acuerdo a (31) es:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_1(t) &= y(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_2(t) = \dot{y}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}(t) = \alpha, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}^0(t) &= \alpha^0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}_{i_0}(t) = \beta, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}_{i_0}^0(t) = \beta^0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}_i(t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}_i^0(t) = 0, \end{aligned} \quad (75)$$

para algún  $i_0 \in \overline{1, \dots, N}$  e  $i = 1, \dots, i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, N$ . Un estimador del retardo es obtenido por  $\tau = i_0 h$ .

#### IV.5.1 Solución del SLRT SISO a través de simulaciones numéricas

Las simulaciones numéricas de (73)-(74) se realizaron con el paquete SIMNON Versión 3.0, aplicando el algoritmo de integración Runge-Kutta-Fehlberg 45 con ajuste automático del paso de integración y con una tolerancia del error de  $10^{-6}$ , considerando como valores nominales del sistema (71) a:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 4.0, \quad \beta_3^0 = 12.5, \quad \alpha = 7.5, \quad \alpha^0 = 12.5 \quad \text{y} \quad \tau = 0.3 \\ \beta_1 &= \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_1^0 = \beta_2^0 = \beta_4^0 = \beta_5^0 = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Estos valores de los parámetros se obtuvieron de la operación del motor en una fábrica, Orlov et al. (2006).

El generador de retardos utilizado en (73) fue  $h = 0.1$  con una cota superior de  $N = 5$  y valores del retardo  $\tau_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Los estimadores de parámetros iniciales de la ley de identificación (73) son:

$$\hat{\beta}_i(0) = 2.0, \quad \hat{\beta}_i^0(0) = 13.6, \quad \hat{\alpha}(0) = 6.0, \quad \hat{\alpha}^0(0) = 10.5 \quad i = 1, \dots, 5. \quad (77)$$

Las condiciones iniciales de los estados de la planta son

$$x_1(0) = 0.0683, \quad x_2(0) = 0.0. \quad (78)$$

El valor de  $x_1(0) = 0.0683$  es la medida inicial de la razón  $A/C$  en el cilindro del motor.

Las condiciones iniciales de los estimadores de estados del identificador son:

$$\hat{x}_1(0) = 0.0683, \quad \hat{x}_2(0) = 0.1. \quad (79)$$

La señal de entrada de control suficientemente no suave y periódica  $v(t)$  que se aplicó al SLRT (72) se limitó a que estuviera definida en  $v(t) \in [\frac{1}{18}, \frac{1}{11}]$  y se generó como solución del sistema dinámico

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{v}(t) = 0.03 \cdot \text{sign}(\text{sen}(0.1 + 6.28t)) + 0.16 \cdot \text{sign}(\text{sen}(0.1 + 28.26t)) \\ \text{con condición inicial } v(0) = \frac{1}{18}. \end{cases} \quad (80)$$

#### IV.5.2 Resultados de la simulación del SLRT SISO con el valor de retardo desconocido

Las Figuras 4, 5 y 6, muestran que los estimadores de parámetros  $\hat{\beta}_i(t)$ ,  $\hat{\beta}_i^0(t)$ ,  $\hat{\alpha}(t)$  y  $\hat{\alpha}^0(t)$  evolucionan en el tiempo y convergen rápidamente hacia los valores nominales

$\beta, \beta^0, \alpha$  y  $\alpha^0$  del SLRT SISO de segundo orden (71), implicando que el objetivo del identificador adaptable se cumplió, debido a que se satisface la ecuación (75) de la página 43. La convergencia rápida de los estimadores de parámetros hacia los valores

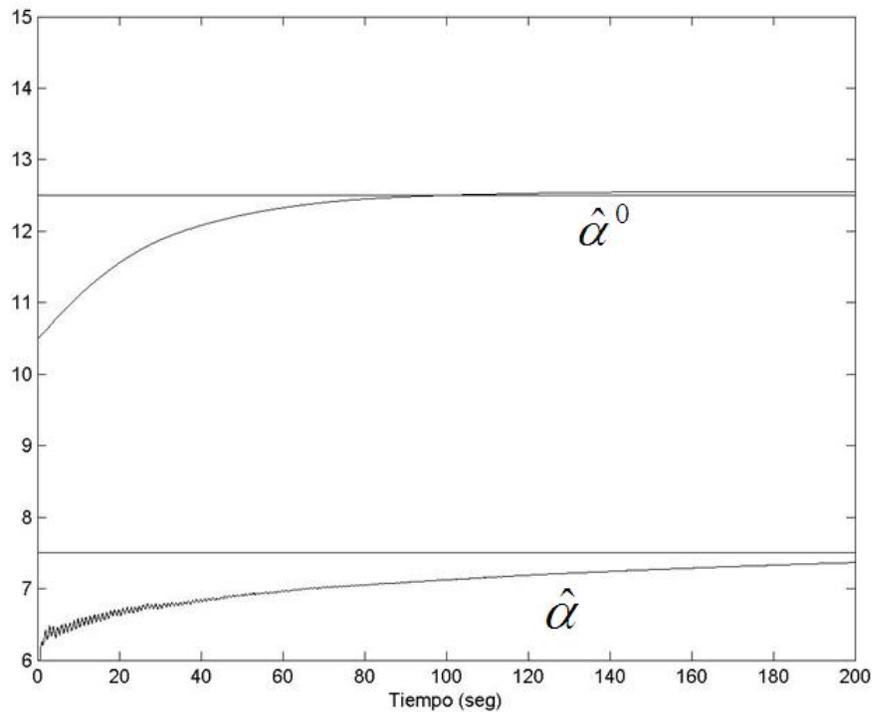


Figura 4: Evolución en el tiempo de los estimadores de parámetros  $\hat{\alpha}(t)$  y  $\hat{\alpha}^0(t)$  hacia los valores nominales  $\alpha$  y  $\alpha^0$ , para el caso de múltiples retardos.

nominales es alcanzada por la ley de identificación adaptable (72)-(73), la aplicación de la señal de entrada de control suficientemente no suave  $v(t)$  (véase la Figura 7) y los parámetros de adaptación.

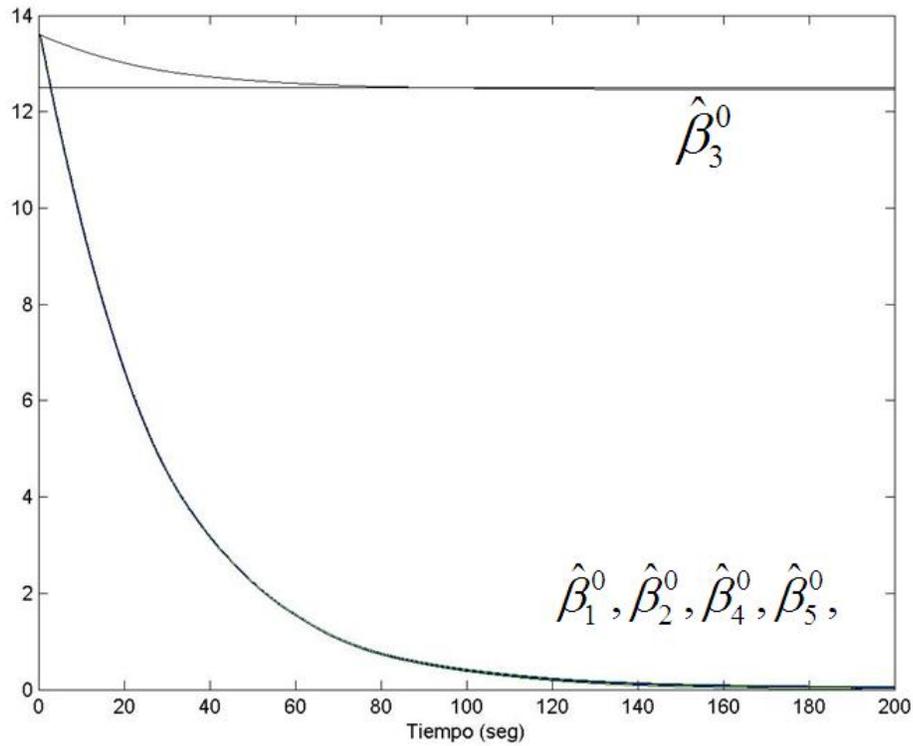


Figura 5: Evolución en el tiempo de la estimación de parámetros  $\hat{\beta}_i^0(t)$  para el caso de múltiples retardos.

Los parámetros de adaptación son:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= 565, \lambda_{12} = 235, \lambda_{13} = 350, \lambda_{14} = 470, \lambda_{15} = 452, \\
 \lambda_{21} &= 145, \lambda_{22} = 145.5, \lambda_{23} = 12.2, \lambda_{24} = 146.5, \lambda_{25} = 146.5, \\
 \lambda_3 &= 470, \lambda_4 = 22.2, \gamma = 95.
 \end{aligned} \tag{81}$$

En lo que respecta al valor nominal del retardo del sistema, éste corresponde a  $\tau_3 = 0.3$  y los valores de los retardos ficticios fueron  $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.2, \tau_4 = 0.4, \tau_5 = 0.5$ . Por otro lado, los estimadores de parámetros  $\hat{\beta}_3(t), \hat{\beta}_3^0(t), \hat{\alpha}(t)$  y  $\hat{\alpha}^0(t)$ , se pueden considerar

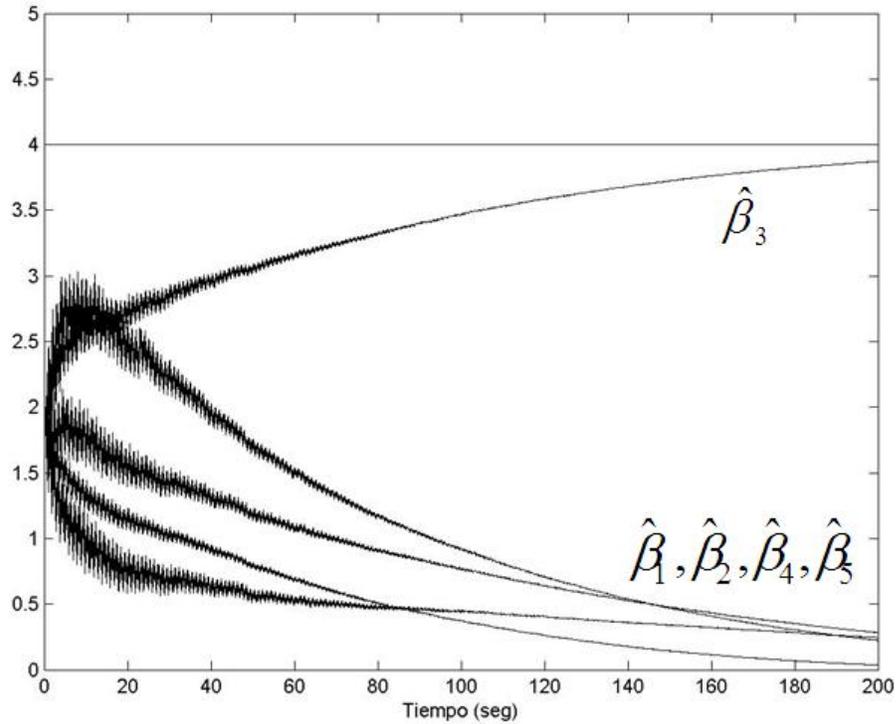


Figura 6: Evolución en el tiempo de la estimación de parámetros  $\beta_i(t)$  para el caso de múltiples retardos.

como una aproximación adecuada de los parámetros del sistema  $\beta, \beta^0, \alpha$  y  $\alpha^0$ .

Además, se observa que el estado medible de la planta  $x_1(t)$  y el estimador de estado del identificador  $\hat{x}_1(t)$  se inicializan con la condición  $x_1(0) = \hat{x}_1(0) = 0.683$ . Debido a esto aparece modos deslizantes desde que se inicia el proceso de identificación a través de la superficie  $s = x_1(0) - \hat{x}_1(0) = 0$  y por la conmutación del observador de entrada (73) de amplitud pequeña  $L = 0.2$ . Si el proceso de identificación se iniciara en la forma  $s = x_1(0) - \hat{x}_1(0) \neq 0$ , entonces la variación de  $\hat{x}_1(t)$  aceptable para iniciar el proceso de identificación de parámetros, es  $\hat{x}_1(t) \in [0.0663, 0.0703]$ .

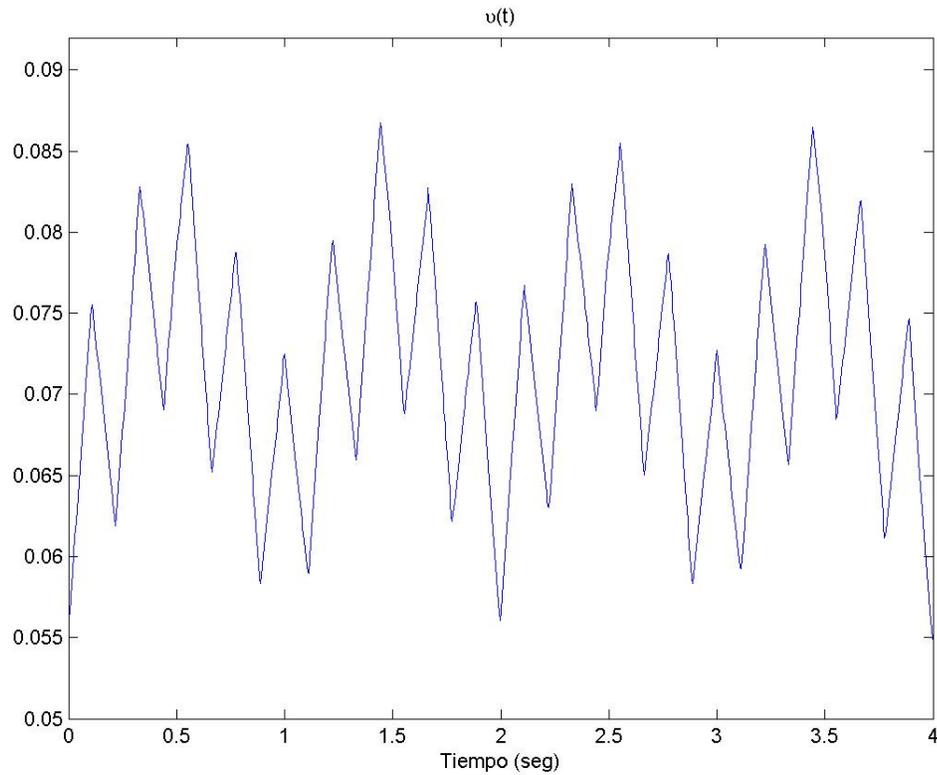


Figura 7: Evolución de la entrada de control  $v(t)$  a través del tiempo.

## IV.6 Robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable

Para estudiar la robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable contra incertidumbres en los valores de los retardos del SLRT SISO se utiliza el error cuadrático medio definido por:

$$J(t) = \frac{1}{12} \left\{ [\alpha - \hat{\alpha}(t)]^2 + [\alpha^0 - \hat{\alpha}^0(t)]^2 + \sum_{i=1}^5 [\beta_i - \hat{\beta}_i(t)]^2 + \sum_{i=1}^5 [\beta_i^0 - \hat{\beta}_i^0(t)]^2 \right\} \quad (82)$$

que calcula la diferencia entre los estimadores de parámetros en el tiempo del identificador adaptable

$$\hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}^0(t), \hat{\beta}(t), \hat{\beta}^0(t), \hat{\beta}_i(t), \hat{\beta}_i^0(t), \quad i = 1, \dots, 5,$$

y los valores nominales de la planta

$$\alpha = 7.5, \quad \alpha^0 = \beta^0 = \beta_3^0 = 12.5, \quad \beta = \beta_3 = 4,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_1^0 = \beta_2^0 = \beta_4^0 = \beta_5^0 = 0.$$

Se realizó la simulación de  $J(t)$  para dos casos:

a) El sistema acoplado, considera que todos los valores de los retardos de la planta ( $\tau_3 = 0.3$ ) y los del identificador adaptable ( $\tau_3 = 0.3$ ) son idénticos. La función  $J(t)$  se muestra en la Figura 8.

b) El sistema desacoplado considera como valor del retardo para la planta ( $\tau_3 = 0.305$ ) y para el identificador adaptable el valor de ( $\tau_3 = 0.3$ ). Todos los demás valores de retardos no se modifican, la función  $\bar{J}(t)$  se muestra en la Figura 8.

La Figura 8 muestra claramente la robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable desarrollado contra incertidumbres en los valores de los retardos del SLRT SISO, en conjunto para todos los estimadores de parámetros a través del error cuadrático medio. Sin embargo, no muestra la robustez para cada uno de los estimadores de parámetros del identificador, por lo que se recomienda aplicar (82) para cada uno de los estimadores de parámetros para poder tener una mejor visión de la robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable, como lo muestran las figuras

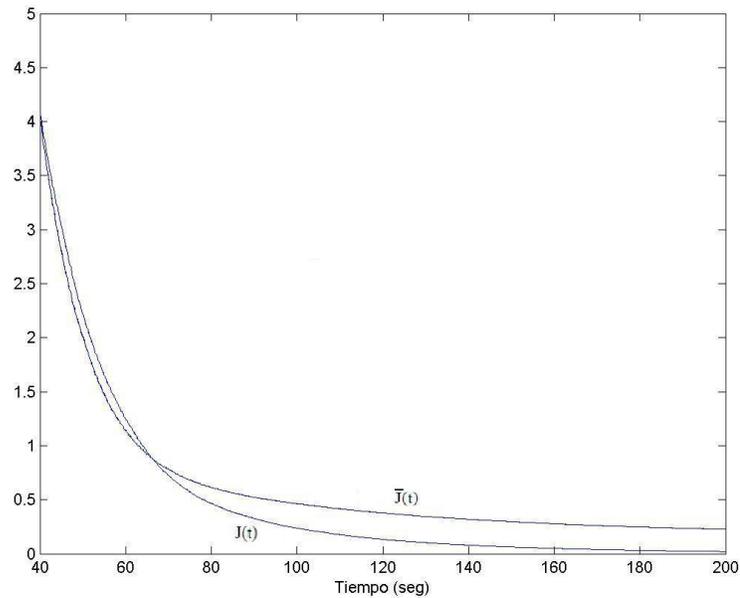


Figura 8: Representación del error cuadrático medio de todos los estimadores de parámetros del identificador adaptable, para los casos: a) retardos acoplados (función  $J(t)$ ) y b) retardos desacoplados (función  $\bar{J}(t)$ ).

siguientes.

Las figuras 10, 11 y 12 muestran que efectivamente se tiene robustez en los parámetros  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\alpha}^0$  y  $\hat{\beta}^0$  del identificador adaptable contra incertidumbres en los valores de los retardos. En la Figura 9 del estimador de parámetro  $\hat{\beta}$  se aprecia poca robustez debido a la característica física que representa dicho parámetro (fracción de combustible a inyectar al cilindro del motor).

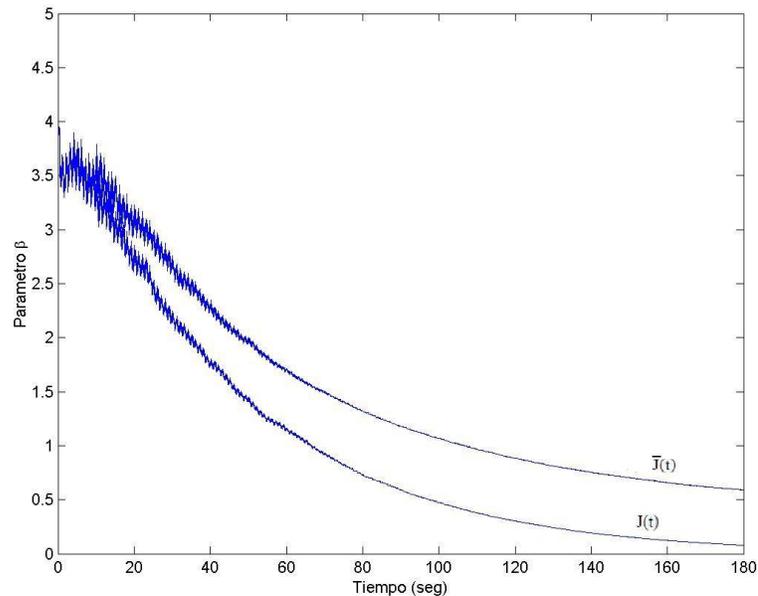


Figura 9: Representación del error cuadrático medio del parámetro  $\hat{\beta}$  del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado).

## IV.7 Resultado experimental

La fase experimental la realizó el Dr. Kolmanovsky (investigador del centro de investigaciones Ford, en Dearborn, Michigan) quién implementó el algoritmo del identificador adaptable para un motor real, tomando en cuenta los resultados obtenidos a través de las simulaciones numéricas que ilustraban la efectividad del algoritmo.

Para poder aplicar el identificador adaptable en la fase experimental fue necesario convertirlo a tiempo discreto, con periodos de tiempo de muestreo de 10 milisegundos. El retardo  $\tau$  fue estimado con experimentos de cambio de paso de combustible. Los datos de la dinámica de la razón A/C de un motor real estaban disponibles en intervalos de tiempo de  $[0, 60]$  segundos, considerando constante el flujo del aire y la inyección de

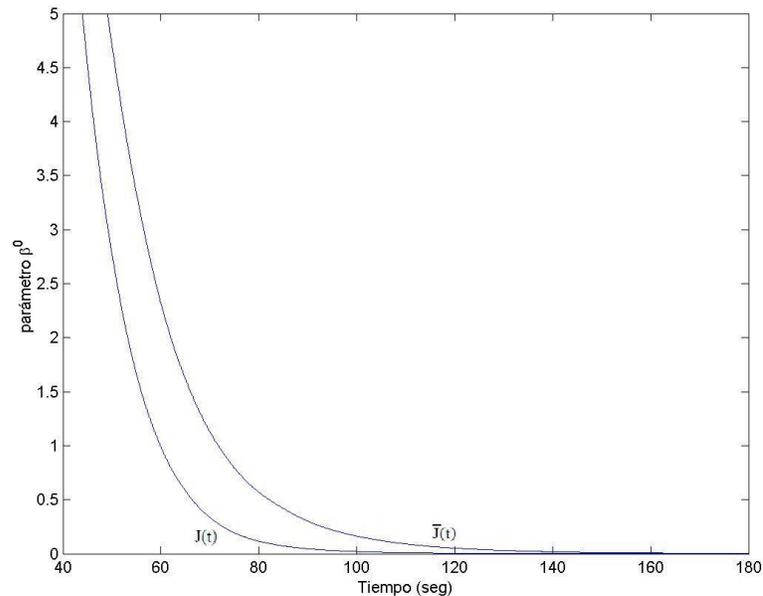


Figura 10: Representación del error cuadrático medio del parámetro  $\hat{\beta}^0$  del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado).

gasolina al motor se realizó a una velocidad modulada, como lo muestra la Figura 3 de la página 41.

En la Figura 13 se muestra la dinámica del error (en milésimas) de la razón A/C por el método actual (guión) y para el identificador adaptable (sólido), en un periodo de tiempo de 60 segundos. Con base en la Figura 13, se tiene que con la implementación del algoritmo del identificador adaptable se reduce el error de la dinámica razón A/C en el puerto inyector de gasolina en un 40%. El error (Mooncheol et al (1998)) está dado por:

$$\text{error} = \text{valor deseado} - \text{valor observado} = 14.64 - \text{valor observado}$$

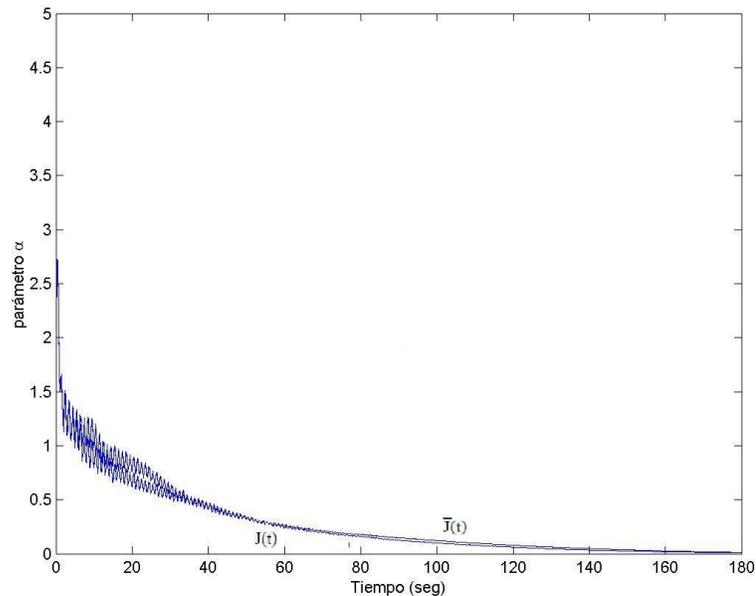


Figura 11: Representación del error cuadrático medio del parámetro  $\hat{\alpha}$  del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado).

## IV.8 Comentarios finales

En este capítulo se implementó el algoritmo del identificador adaptable, a través de simulaciones numéricas, para identificar los parámetros (valores nominales desconocidos) de la dinámica de la razón A/C de un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford. Las figuras 2,4,5 y 6 muestran que el objetivo del identificador adaptable se cumplió, ya que los estimadores de parámetros del identificador adaptable evolucionan en el tiempo y convergen asintóticamente hacia los valores nominales de los parámetros del SLRT SISO de segundo orden con condiciones iniciales (atribuidas

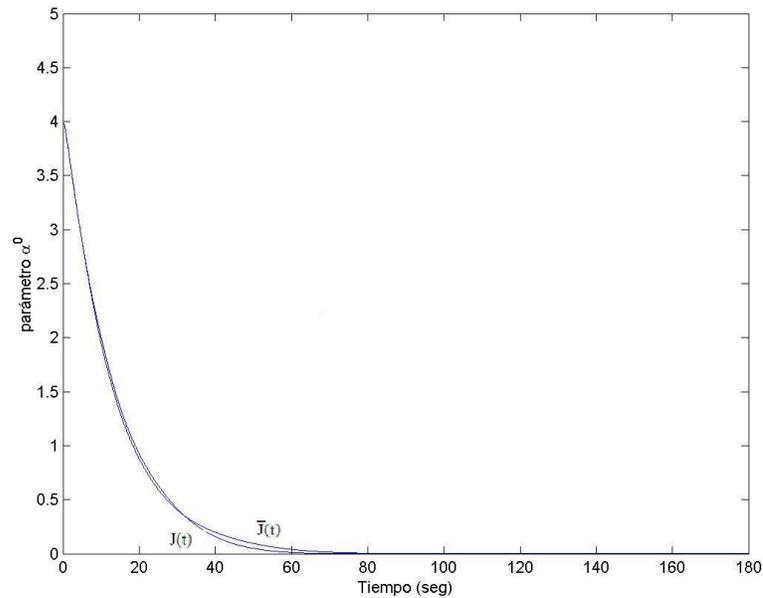


Figura 12: Representación del error cuadrático medio del parámetro  $\hat{\alpha}^0$  del identificador adaptable con retardos desconocidos (desacoplado).

al motor) y parámetros de adaptación positivos, para los casos en que los valores de los retardos constantes son conocidos o desconocidos. Es importante resaltar que con la aplicación de una entrada de control suficientemente no suave y periódica al SLRT SISO de segundo orden, se garantiza la identificación en línea de los parámetros del sistema.

Además se estudió la robustez, para cada uno de los estimadores de parámetros del identificador adaptable, contra incertidumbres en los valores de los retardos desconocidos (acoplado-desacoplado) del SLRT SISO, con la finalidad de tener una mejor visión de la contribución porcentual al error cuadrático medio de los parámetros analizados. En el capítulo siguiente se aplica el algoritmo de un identificador adaptable, a

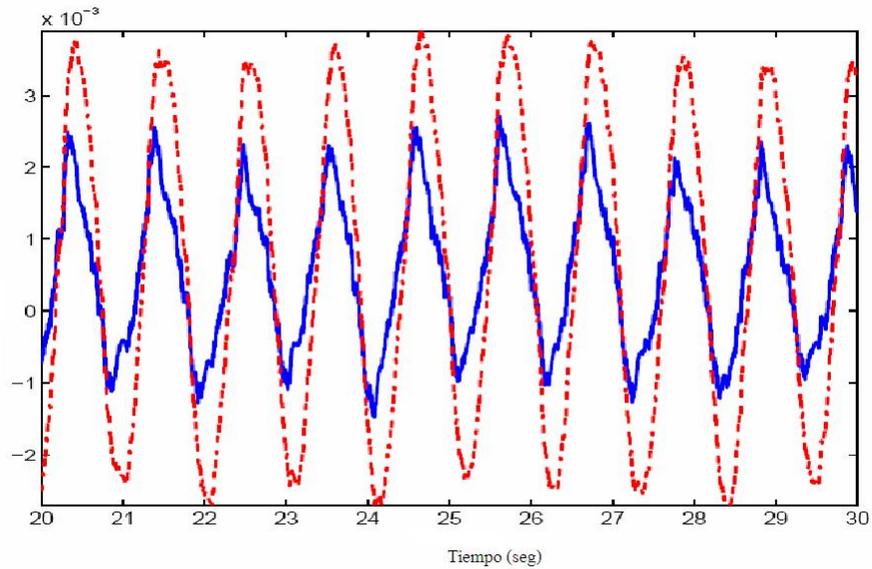


Figura 13: Dinámica del error (en milésimas) de la razón  $A/C$ , por el método actual (guión) y para el identificador adaptable (sólido) en el intervalo de  $[20, 30]$  segundos.

la identificación de un parámetro constante de un SLPD.

# Capítulo V

## Identificador adaptable aplicado a un sistema lineal con parámetros distribuidos

*En este capítulo se generaliza el algoritmo de un identificador adaptable para un SLPD gobernado por una ecuación con derivadas parciales de tipo parabólico.*

### V.1 Identificabilidad de SLPD

*Asumiendo que la estructura del SLPD es conocida a priori y se representa por*

$$\Sigma : \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \\ u_x(0, t) = -gu(0, t); \quad u(1, t) = U(t), \end{cases} \quad (83)$$

*entonces el concepto de identificabilidad del SLPD se basa en la comparación de la salida del sistema (83) con la salida del modelo de referencia dado por*

$$\Sigma : \begin{cases} \hat{u}_t(x, t) = \hat{u}_{xx}(x, t) \\ \hat{u}_x(0, t) = -\hat{g}\hat{u}(0, t); \quad \hat{u}(1, t) = U(t), \end{cases} \quad (84)$$

*donde el parámetro  $g$  del sistema (83) es reemplazado por  $\hat{g}$  en (84). En las ecuaciones (83) y (84),  $g, \hat{g} \in \mathbb{R}$  son constantes.*

El parámetro  $g$  de (83) es constante y desconocido. La entrada de control al sistema se realiza por la frontera  $u(1, t)$  donde esta el actuador, y la frontera  $u(0, t)$  que multiplica al parámetro  $g$  es la **salida medible** por un sensor. Estos sistemas presentan grado relativo infinito, debido a que el sensor y el actuator están en lados opuestos del dominio de la ecuación diferencial parcial lineal parabólico Boskovic y Krstic (2003).

## V.2 Definición de identificabilidad de un SLPD

**Definición 10** Orlov et al. (2006). El sistema (83) es identificable si existe una entrada de control  $U(t)$  tal que al aplicarla a los sistemas (83) y (84) produzca la identidad de las salidas medibles  $u(0, t) \equiv \hat{u}(0, t)$ , y resultando como consecuencia que  $g = \hat{g}$ , considerando las condiciones iniciales arbitrarias  $u(0, t), \hat{u}(0, t) \in L_2(0, 1)$ .

### Problema a resolver:

Identificar el parámetro constante  $g$  que multiplica a la frontera  $u(0, t)$  del sistema (83), para los casos en que el sistema sea estable en lazo abierto e inestable en lazo cerrado, por medio de un identificador adaptable.

## V.3 SLPD en lazo abierto

Determinar los valores del parámetro  $g$  del sistema lineal (83) en lazo abierto, para los cuales éste es estable

$$\Sigma : \begin{cases} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\ u_x(0, t) &= -gu(0, t); \quad u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (85)$$

Para determinar la estabilidad del sistema (85) se propone la siguiente función de Lyapunov,

$$V(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \|u(x, t)\|^2. \quad (86)$$

Entonces, derivando  $V(x, t)$  con respecto al tiempo e integrando por partes

$$\begin{cases} V_t(x, t) &= \int_0^1 uu_t dx = \int_0^1 uu_{xx} dx = uu_x|_0^1 - \int_0^1 u_x^2 dx \\ &= gu^2(0) - \int_0^1 u_x^2 dx \leq gu^2(0) - u^2(0) = -u^2(0)(1 - g). \end{cases} \quad (87)$$

En (87) se aplicó la desigualdad de Cauchy-Schwartz evaluada en  $x = 0$ :

$$\begin{cases} u^2(x) &= |u(x)|^2 = \left| \int_1^x u_x(\epsilon) d\epsilon \right|^2 \leq \left( \int_x^1 u_x^2(\epsilon) d\epsilon \right)^{0.5} \left( \int_x^1 d\epsilon \right)^{0.5} \\ &\leq |1 - x| \left( \int_x^1 u_x^2(\epsilon) d\epsilon \right). \end{cases} \quad (88)$$

Por lo tanto, con base a (87) se tiene que la dinámica interna del sistema (85) es asintóticamente estable si  $g < 1$ , y únicamente estable cuando  $g = 1$ . La prueba de que el sistema es inestable cuando  $g > 1$  se muestra en Smyshlyaev y Krstic (2007).

### V.3.1 Análisis de identificabilidad de un SLPD en lazo abierto

**Lema 1.** Supóngase que el sistema (83) con entrada de control  $U(t) \equiv 0$  es asintóticamente estable. Al aplicarle una entrada de control constante  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$  éste posee una solución estacionaria invariante con el tiempo de la forma

$$u^{ss}(x) = u_1 \frac{(1 - gx)}{(1 - g)} \quad \text{donde} \quad u^{ss}(0) = u_0 = \frac{u_1}{1 - g} \neq 0. \quad (89)$$

*Prueba.* La ecuación (89) satisface a la ecuación (83) incluyendo las condiciones de frontera. Introduciendo la variable de error

$$\omega(x, t) = u(x, t) - u^{ss}(x), \quad (90)$$

el sistema (83) se transforma en

$$\Sigma : \begin{cases} \omega_t(x, t) &= \omega_{xx}(x, t) \\ \omega_x(0, t) &= -g\omega(0, t); \quad \omega(1, t) = 0, \end{cases} \quad (91)$$

el cual es asintóticamente estable por suposición.  $\square$

### V.3.2 Teorema de identificabilidad de un SLPD en lazo abierto

**Teorema 4.** *El parámetro  $g$  del sistema asintóticamente estable (83) se identifica, a partir de la salida medible  $u(0, t)$  y de la aplicación de una entrada de control constante  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$  al sistema (83).*

*Prueba.* Si se fija la entrada de control  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$ , y considerando que los sistemas (83) y (84) producen la misma salida medible  $u(0, t) = \hat{u}(0, t) \forall t \geq 0$ , entonces por el Lema 1, los sistemas (83) y (84) poseen una solución invariante con el tiempo fija de la forma  $u^{ss}(x)$  y  $\hat{u}^{ss}(x)$  respectivamente, y estas soluciones satisfacen que  $u^{ss}(0) \neq 0$  y  $\hat{u}^{ss}(0) \neq 0$  para  $x = 0$ .

Considerando las siguientes variables  $\delta u = u - \hat{u}$ ;  $\delta g = g - \hat{g}$ , y restando (84) a (83)

se obtiene el sistema

$$\Sigma : \begin{cases} \delta u_t(x, t) &= \delta u_{xx}(x, t) \\ \delta u_x(0, t) &= -\delta g u(0, t); \quad \delta u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (92)$$

Substituyendo en (92) la variable dada en términos de las soluciones invariantes con el tiempo  $\delta u^0(x) = u^{ss}(x) - u^{ss}(x)$ , se tiene el sistema

$$\Sigma : \begin{cases} 0 &= \delta u_{xx}^0(x, t) \\ \delta u_x^0(0, t) &= -\delta g u_0; \quad \delta u^0(1, t) = 0; \quad \text{donde } u_0 = u^{ss}(0) \neq 0, \end{cases} \quad (93)$$

con una solución de la forma

$$\delta u^0(x) = \delta g u_0(1 - x). \quad (94)$$

Ahora, tomando en cuenta que  $\delta u(0, t) = u^{ss}(0, t) - u^{ss}(0, t) = 0$ , entonces también se tiene una relación similar para la solución

$$\delta u^0(0) = 0. \quad (95)$$

Con base en (94) y (95) se tiene que  $\delta g u_0 = 0$ , y por (89) se tiene que  $u_0 \neq 0$ ; entonces  $\delta g = 0$ , lo que implica que  $g = \hat{g}$  y el parámetro  $g$  es identificable al aplicarle una entrada de control constante  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$  al sistema lineal (83)  $\square$

## V.4 Diseño del identificador adaptable

*Este estudio se definió para el SLPD (83) el cual, en lazo abierto, se supone asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov. La identificación del sistema (83)*

es por la aplicación de una señal de entrada de control constante  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$ .

Si la identificabilidad del sistema (83) está garantizada, entonces la tarea de identificar el parámetro nominal  $g$  desconocido del SLPD se logra a través del diseño del identificador adaptable cuyo estimador de parámetro evoluciona en el tiempo y converge hacia el parámetro nominal desconocido en un tiempo finito.

El siguiente algoritmo del gradiente es utilizado para identificar en línea el parámetro  $g$  del SLPD (83), Orlov et al. (2006),

$$\dot{\hat{g}}(t) = \gamma \frac{\hat{e}(0, t)v(0, t)}{1 + v^2(0, t)}; \quad \hat{g} \in \mathbb{R}, \quad (96)$$

donde  $\gamma > 0$  es el parámetro de ganancia de adaptación.

El identificador (96) utiliza el error de predicción

$$\hat{e}(x, t) = u(x, t) - \hat{g}(t)v(x, t) - \eta(x, t), \quad (97)$$

evaluado en  $x = 0$ , el filtro de entrada

$$\Sigma : \begin{cases} \eta_t(x, t) & = \eta_{xx}(x, t) \\ \eta_x(0, t) & = 0; \quad \eta(1, t) = u(1, t), \end{cases} \quad (98)$$

y el filtro de salida

$$\Sigma : \begin{cases} v_t(x, t) & = v_{xx}(x, t) \\ v_x(0, t) & = -u(0, t); \quad v(1, t) = 0, \end{cases} \quad (99)$$

tal que el problema de condiciones de frontera

$$\Sigma : \begin{cases} e_t(x, t) = e_{xx}(x, t) \\ e_x(0, t) = 0; \quad e(1, t) = 0, \end{cases} \quad (100)$$

escrito en términos del error

$$e(x, t) = u(x, t) - gv(x, t) - \eta(x, t), \quad (101)$$

tiene como solución exacta exponencialmente estable Tikhonov y Samarskii (2000)

$$e(x, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]^2 t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \left[ \int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) e_0(x) dx \right]. \quad (102)$$

La ley de identificación (96) asegura la convergencia del error del parámetro  $\Delta g = g - \hat{g}$ , para condiciones iniciales arbitrarias  $u(0, t), v(0, t), \eta(0, t) \in L_2(0, 1)$  y  $\hat{g}(0) \in \mathbb{R}$ , parámetro de adaptación  $\gamma > 0$ , y entrada de control constante  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$ , es decir, se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta g(t) = 0. \quad (103)$$

#### V.4.1 Teorema del identificador adaptable de parámetros para el SLPD asintóticamente estable en lazo abierto

**Teorema 5.** Considerando el sistema (83) asintóticamente estable, con las ecuaciones (96), (98) y (99) y aplicándole al sistema una entrada de control constante  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$  entonces las señales  $u(x, t), v(x, t), \eta(x, t)$  y  $\hat{g}(t)$  son uniformemente acotadas, y la tarea de identificación (103) se logra con la leyes de identificación (97)-(99), con

condiciones iniciales arbitrarias y el parámetro de adaptación.

La prueba se realiza a través de varias etapas.

*Prueba.* 1. Utilizando el **Lema 1**, y aplicando la entrada de control constante  $U(t) \equiv u_1 \neq 0$  a los sistemas lineales invariantes con el tiempo (83) y (99), se tiene que éstos poseen soluciones estacionarias invariantes con el tiempo de la forma

$$u^{ss}(x) = u_1 \frac{(1 - gx)}{(1 - g)}; \quad v^{ss}(x) = u_1 \frac{(1 - x)}{(1 - g)}, \quad (104)$$

implicando que las funciones  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  son uniformemente acotadas, y considerando la ecuación (101) se tiene que  $\eta(x, t)$  es uniformemente acotada. Falta probar que  $\hat{g}(t)$  es uniformemente acotada.

2. Escribiendo la ecuación (96) en términos de su desviación nominal  $\Delta g = g - \hat{g}$ , ésta se transforma en

$$\Delta \dot{g}(t) = -\gamma \frac{\hat{e}(0, t)v(0, t)}{1 + v^2(0, t)}. \quad (105)$$

Tomando en cuenta las relaciones (97) y (101) se obtiene el error de predicción

$$\hat{e}(x, t) = e(x, t) + \Delta g(t)v(x, t). \quad (106)$$

Utilizando (106) evaluado en  $x = 0$ , en (105)

$$\Delta \dot{g}(t) = -\gamma \frac{(e(0, t) + \Delta g(t)v(0, t))v(0, t)}{1 + v^2(0, t)}. \quad (107)$$

Para probar que  $\hat{g}(t)$  es uniformemente acotada, se propone la siguiente funcional

definida positiva

$$V(e, \Delta g) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^2(x, t) dx + \frac{1}{2\gamma} [\Delta g(t)]^2, \quad (108)$$

calculando la derivada de  $V(e, \Delta g)$  con respecto al tiempo sobre las soluciones de los sistemas parabólicos (100) y (105) y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} V_t(e, \Delta g) &= \int_0^1 ee_t dx + \frac{1}{\gamma} \Delta g(t) \left[ \frac{-\gamma \hat{e}(0, t)v(0, t)}{1 + v^2(0, t)} \right] \\ &= \int_0^1 ee_{xx} dx - \frac{\hat{e}^2(0, t)}{1 + v^2(0, t)} + \frac{\hat{e}(0, t)e(0, t)}{1 + v^2(0, t)} \\ &\leq - \int_0^1 e_x^2 dx - \frac{\hat{e}^2(0, t)}{1 + v^2(0, t)} + \frac{|\hat{e}(0, t)||e(0, t)|}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}} \\ &\leq - \|e_x\|^2 - \frac{\hat{e}^2(0, t)}{1 + v^2(0, t)} + \frac{|\hat{e}(0, t)| \|e_x\|}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}} \\ &\leq -\frac{1}{2} \|e_x\|^2 - \frac{1}{2} \frac{\hat{e}^2(0, t)}{1 + v^2(0, t)}, \end{aligned} \quad (109)$$

se tiene que (109), asegura que  $\Delta g = g - \hat{g}$  sea uniformemente acotada y por consiguiente, se tiene que  $\hat{g}$  es uniformemente acotada.

3. Se tiene que (107) acoplada con el sistema parabólico (100) resulta ser asintóticamente autónomo porque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(0, t) = v^{ss}(0) = \frac{u_1}{1 - g} \neq 0. \quad (110)$$

4. Por extensión del principio de invariancia Rouché et al. (1977) a los sistemas parabólicos asintóticamente autónomos (100) y (107), ocurre la convergencia de las trayectorias del sistema al máximo subconjunto invariante del conjunto de soluciones de (100) y (107) que satisfacen la relación

$$V_t(e, \Delta g) = 0. \quad (111)$$

Empleando (109) se tienen los siguientes resultados sobre el conjunto donde (111) es satisfecho

$$e(x, t) = 0, \quad (112)$$

$$\hat{e}(0, t) = e(0, t) + \Delta g(t)v(0, t) = \Delta g(t)v(0, t) = 0, \quad (113)$$

y debido a (110), la convergencia del identificador (103) es alcanzada  $\square$

#### V.4.2 Identificación del parámetro $g$ del SLPD asintóticamente estable en lazo abierto

*Con base en el modelo matemático simplificado (que representa el desplazamiento del calor en el cohete de propulsor sólido mostrado en la Figura 14), expresado por una ecuación diferencial parcial lineal parabólico Boskovic y Krstic (2003), se mostrará la efectividad del identificador adaptable.*

*La planta del SLPD (con  $g = 0.3$ ) está dada por:*

$$\Sigma : \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \\ u_x(0, t) = -0.3u(0, t); \quad u(1, t) = 0.4 \\ u(x, 0) = 10\cos(12.5\pi x) - \cos(41.5\pi x), \end{cases} \quad (114)$$

*con filtro de entrada*

$$\Sigma : \begin{cases} \eta_t(x, t) = \eta_{xx}(x, t) \\ \eta_x(0, t) = 0; \quad \eta(1, t) = u(1, t) \\ \eta(x, 0) = \cos(0.5\pi x), \end{cases} \quad (115)$$

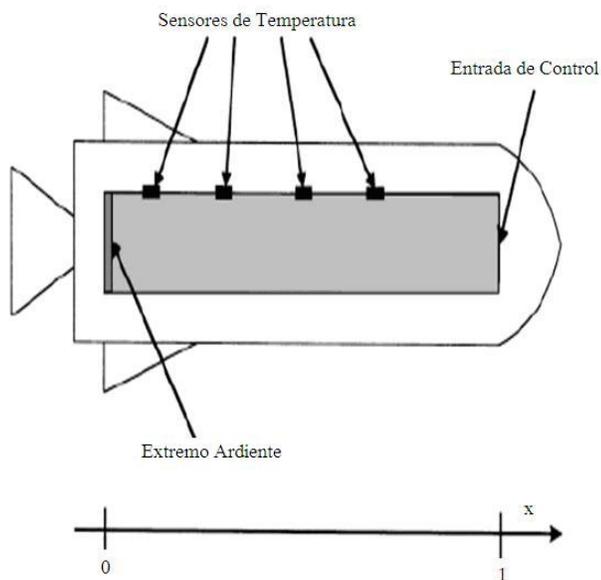


Figura 14: Cohete de propulsor sólido.

y filtro de salida

$$\Sigma : \begin{cases} v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) \\ v_x(0, t) = -u(0, t); \quad v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = \cos(22.5\pi x). \end{cases} \quad (116)$$

El algoritmo del gradiente para identificar en línea el parámetro  $g$ , para las condiciones iniciales arbitrarias  $u(0, t), v(0, t), \eta(0, t) \in L_2(0, 1)$ , es el siguiente:

$$\dot{\hat{g}}(t) = \gamma \frac{\hat{e}(0, t)v(0, t)}{1 + v^2(0, t)}; \quad \hat{g}(0) = 1.2 \quad \gamma = 5.2 \quad (117)$$

La simulación se realizó en MAPLE, versión 9. La efectividad del identificador adaptable y el sistema lineal en estudio (función  $u(x, t)$ ), se muestran en la figuras 15 y 16, respectivamente .

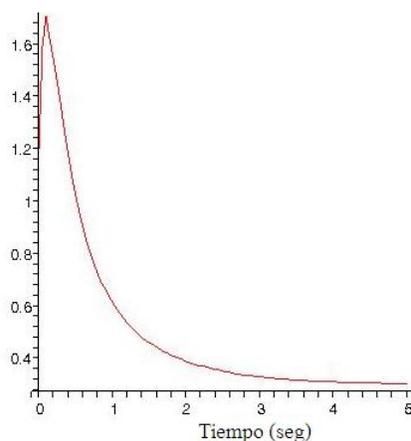


Figura 15: Evolución del parámetro  $\hat{g}(t)$  en el tiempo.

## V.5 Slpd inestable en lazo cerrado

*El siguiente controlador de frontera*

$$u(1, t) = u_1 + \int_0^1 \hat{g} e^{\hat{g}(1-\epsilon)} (\hat{g}v(\epsilon, t) + \eta(\epsilon, t)) d\epsilon, \quad (118)$$

*acoplado a los filtros (98)-(99) y la ley del gradiente (96), se propone para identificar el parámetro  $g$ , para el caso general donde la dinámica interna del sistema implícito (83) no está garantizada ser asintóticamente estable.*

*Para el caso en que  $u_1 = 0$ , el controlador propuesto (118) fue desarrollado en Smyshlyayev y Krstic (2005), para estabilizar asintóticamente el sistema inestable (83) con desconocimiento a priori del parámetro  $g$  de la condición de frontera. El presente controlador modificado (118) con una componente constante  $u_1 \neq 0$ , es aplicado para excitar continuamente el sistema y lograr la convergencia del parámetro deseado (103).*

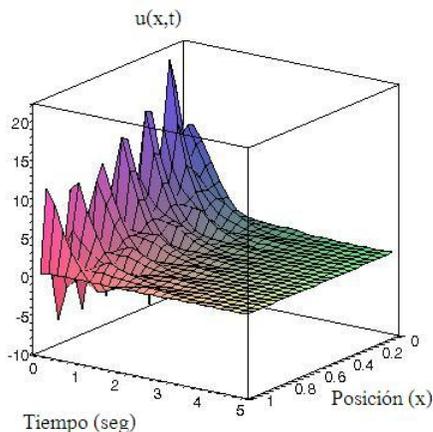


Figura 16: Evolución de la función  $u(x, t)$  en el tiempo.

La prueba de existencia y unicidad de una solución suave en lazo cerrado para el sistema (83), acoplado con (96)-(99) y (118), se realiza a través de métodos estándares (teoremas de punto fijo). Debido a que el objetivo es probar la acotación y regulación de funciones (probar estabilidad) la prueba se omitió. Y sólo se supone la existencia y unicidad de las correspondientes soluciones suaves de (83), (96)-(99) y (118).

Definiendo la siguiente transformación:

$$\hat{w}(x, t) = \hat{g}v(x, t) + \eta(x, t) + \int_0^x \hat{g}e^{\hat{g}(x-\epsilon)} (\hat{g}v(\epsilon, t) + \eta(\epsilon, t)) d\epsilon, \quad (119)$$

derivando con respecto al tiempo la transformación (119)

$$\hat{w}_t(x, t) = \dot{\hat{g}}v(x, t) + \hat{g}v_t(x, t) + \eta_t(x, t) + R1 + R2, \quad (120)$$

donde

$$\begin{aligned}
R1 &= \int_0^x \hat{g}e^{\hat{g}(x-\epsilon)}(\dot{\hat{g}}v(\epsilon, t) + \hat{g}v_t(\epsilon, t) + \eta_t(\epsilon, t)) d\epsilon \\
&= \dot{\hat{g}} \int_0^x \hat{g}e^{\hat{g}(x-\epsilon)}v(\epsilon, t) d\epsilon + \hat{g}^2\hat{w}(x, t) + \hat{g}(\hat{g}v_x(x, t) + \eta_x(x, t)) \\
&+ \hat{g}^2e^{\hat{g}x}\hat{e}(0, t).
\end{aligned} \tag{121}$$

y

$$R2 = \dot{\hat{g}} \int_0^x e^{\hat{g}(x-\epsilon)}\hat{w}(\epsilon, t) d\epsilon \tag{122}$$

Además, se tiene que

$$\hat{w}_{xx}(x, t) = \hat{g}(\hat{g}v_x(x, t) + \eta_x(x, t)) + \hat{g}^2\hat{w}(x, t) + \hat{g}v_{xx}(x, t) + \eta_{xx}(x, t). \tag{123}$$

substituyendo (121)-(123) en (120) se obtiene el sistema definido por

$$\Sigma : \begin{cases} \hat{w}_t(x, t) = \dot{\hat{g}}v(x, t) + \hat{w}_{xx}(x, t) + \hat{g}^2e^{\hat{g}x}\hat{e}(0, t) \\ \quad + \dot{\hat{g}} \int_0^x e^{\hat{g}(x-\epsilon)}(\hat{g}v(\epsilon, t) + \hat{w}(\epsilon, t)) d\epsilon \\ \hat{w}_x(0, t) = -\hat{g}\hat{e}(0, t) \\ \hat{w}(1, t) = 0, \end{cases} \tag{124}$$

donde  $\dot{\hat{g}}$  es definido por (96), y los sistemas de  $\hat{e}(x, t)$  y  $v(x, t)$  están dados por:

$$\Sigma : \begin{cases} \hat{e}_t(x, t) = \hat{e}_{xx}(x, t) - \dot{\hat{g}}v(x, t) \\ \hat{e}_x(0, t) = -(g - \hat{g})(\hat{w}(0, t) + \hat{e}(0, t)) \\ \hat{e}(1, t) = 0, \end{cases} \tag{125}$$

$$\Sigma : \begin{cases} v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) \\ v_x(0, t) = -(\hat{w}(0, t) + \hat{e}(0, t)) \\ v(1, t) = 0, \end{cases} \tag{126}$$

respectivamente.

**Lema 2.** Sean  $v, \ell_1$  y  $\ell_2$ , funciones de valores reales definidas sobre  $\mathbb{R}_+$ , y sea  $c$  una constante positiva. Si  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son no negativas,  $\ell_1 \in l_2$ ,  $\ell_2 \in l_\infty$  y  $\dot{v} \leq -cv + \ell_1(t)v + \ell_2(t)$ ,  $v(0) \geq 0$  entonces  $v \in l_\infty$ . Si además  $\ell_2 \in l_1$ , entonces  $v \in l_1 \cap l_\infty$ , la prueba se muestra en Krstic et al. (1995).

### V.5.1 Teorema del identificador adaptable de parámetros para el SLPD inestable en lazo cerrado

**Teorema 6.** Considerando el sistema (83) con las ecuaciones (96), (98)-(99) y aplicándole al sistema la entrada de control (118), donde  $u_1 \neq 0$  es una constante, entonces para un  $\hat{g}(0) \in \mathbb{R}$  y algunas condiciones iniciales  $u_0, v_0, \eta_0 \in L_2(0, 1)$ , las señales  $u(x, t), v(x, t), \eta(x, t)$  y  $\hat{g}(t)$  son uniformemente acotadas y  $\hat{g}(t) \rightarrow g$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

La prueba se realiza a través de varias etapas.

*Prueba.* 1. Utilizando el resultado (109), como una estimación superior de la derivada con respecto al tiempo de la funcional definida positiva (108), calculada sobre las soluciones de los sistemas parabólicos (100) y (105), se asegura que  $\Delta g = g - \hat{g}$  sea uniformemente acotada y por consiguiente  $\hat{g}(t)$  es uniformemente acotada por  $g_0$ . Además, las siguientes propiedades se satisfacen

$$\frac{\hat{e}(0, t)}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}} \in l_2, \quad \Delta g \in l_\infty. \quad (127)$$

Puesto que:

$$\frac{\hat{e}(0, t)}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}} = \frac{e(0, t)}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}} + \Delta g \frac{v(0, t)}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}}, \quad (128)$$

$$\dot{\hat{g}}(t) = \gamma \frac{e(0, t)}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}} \frac{v(0, t)}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}}, \quad (129)$$

entonces se tiene que:

$$\frac{\hat{e}(0, t)}{\sqrt{1 + v^2(0, t)}} \in l_2 \cap l_\infty, \quad \Delta g \in l_\infty, \quad \dot{\hat{g}}(t) \in l_2 \cap l_\infty, \quad (130)$$

donde  $l_2$  y  $l_\infty$  para  $t \geq 0$  son las normas para el tiempo.  $l_1$  es una función definida en  $l_1 \cap l_\infty$ .

2. Se tienen dos sistemas interconectados (124), (126) para  $\hat{w}$  y  $v$ . Estos son manejados por dos señales externas: una constante  $u_1$  y una señal  $\hat{e}(0, t)$  con las propiedades de (130). El objetivo es probar que los sistemas  $\hat{w}$  y  $v$  son asintóticamente estables, alrededor de los puntos límites

$$\hat{w}^{lp}(x) = u_1. \quad (131)$$

$$v^{lp}(x) = u_1(1 - x). \quad (132)$$

Para lograr este propósito se introducen las variables del error  $\bar{w} = \hat{w} - \hat{w}^{lp}$  y  $\bar{v} = v - v^{lp}$ .

Calculando la derivada con respecto al tiempo de  $\bar{w}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{w}_t(x, t) &= \dot{\hat{g}}(\bar{v}(x, t) + v^{lp}(x)) + \bar{w}_{xx}(x, t) + \hat{g}^2 e^{\hat{g}x} \hat{e}(0, t) \\ &+ \dot{\hat{g}} \int_0^x e^{\hat{g}(x-\epsilon)} (\hat{g}(\bar{v}(\epsilon, t) + v^{lp}(\epsilon)) + \bar{w}(\epsilon, t) + u_1) d\epsilon, \end{aligned} \quad (133)$$

y puesto que

$$\dot{\hat{g}} \int_0^x e^{\hat{g}(x-\epsilon)} \hat{g}(v^{lp}(\epsilon) + u_1) d\epsilon = \dot{\hat{g}}(e^{\hat{g}x} u_1 - v^{lp}(x)), \quad (134)$$

entonces se generan los sistemas para  $\bar{w}$  y  $\bar{v}$ :

$$\Sigma : \begin{cases} \bar{w}_t(x, t) &= \dot{\hat{g}}(\bar{v}(x, t) + u_1 e^{\hat{g}x}) + \bar{w}_{xx}(x, t) + \hat{g}^2 e^{\hat{g}x} \hat{\epsilon}(0, t) \\ &+ \dot{\hat{g}} \int_0^x e^{\hat{g}(x-\epsilon)} (\hat{g} \bar{v}(\epsilon, t) + \bar{w}(\epsilon, t)) d\epsilon \\ \bar{w}_x(0, t) &= -\hat{g} \hat{\epsilon}(0, t) \\ \bar{w}(1, t) &= 0, \end{cases} \quad (135)$$

$$\Sigma : \begin{cases} \bar{v}_t(x, t) &= \bar{v}_{xx}(x, t) \\ \bar{v}_x(0, t) &= -(\bar{w}(0, t) + \hat{\epsilon}(0, t)) \\ \bar{v}(1, t) &= 0. \end{cases} \quad (136)$$

Considerando la función de Lyapunov definida por

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{v}^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{w}^2(x) dx, \quad (137)$$

derivando con respecto al tiempo y considerando los sistemas (135)-(136), además de

las desigualdades de Poincare, Agmon y Young se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= - \int_0^1 \bar{v}_x^2(x) dx + \int_0^1 \bar{w}(x) \bar{w}_t(x) dx \\
&= - \int_0^1 \bar{v}_x^2(x) dx - \int_0^1 \bar{w}_x^2(x) dx + \dot{g} \int_0^x \bar{w}(x) \bar{v}(x) dx \\
&+ \hat{g}^2 \hat{e}(0) \int_0^1 \bar{w}(x) e^{\hat{g}x} dx + \hat{g} \hat{e}(0) \bar{w}(0) \\
&+ \dot{g} u_1 \int_0^1 \bar{w}(x) e^{\hat{g}x} dx + \dot{g} \int_0^1 \bar{w}(x) \int_0^x e^{\hat{g}(x-\epsilon)} (\hat{g} \bar{v}(\epsilon, t) + \bar{w}(\epsilon, t)) d\epsilon dx \\
&+ \bar{v}(0) (\hat{e}(0) + \bar{w}(0)) \\
&\leq - \|\bar{w}_x\|^2 + |\hat{e}(0)| (g_0 |\bar{w}(0)| + g_0^2 e^{g_0} \|\bar{w}\|) + \frac{(1 + g_0 e^{g_0})^2 |\dot{g}|^2}{c_1} \|\bar{v}\|^2 \\
&+ \frac{c_1}{2} \|\bar{w}\|^2 + \frac{g_0 e^{2g_0} |\dot{g}|^2}{c_1} \|\bar{w}\|^2 - \|\bar{v}_x\|^2 + \frac{1}{2} \|\bar{v}_x\|^2 + \frac{1}{2} \|\bar{w}_x\|^2 \\
&+ |\bar{v}(0)| |\hat{e}(0)| + \frac{c_1}{2} \|\bar{w}\|^2 + \frac{u_1^2 e^{2g_0} |\dot{g}|^2}{2c_1} \\
&\leq - \left(\frac{1}{2} - 4c_1\right) \|\bar{w}_x\|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{v}_x\|^2 + \ell_1 \|\bar{w}\|^2 + \ell_1 \|\bar{v}\|^2 + \ell_1 \\
&+ g_0 |\hat{e}(0)| |\bar{w}(0)| + g_0^2 e^{g_0} |\hat{e}(0)| \|\bar{w}\| + |\bar{v}(0)| |\hat{e}(0)|. \tag{138}
\end{aligned}$$

Los últimos 3 términos se acotan por

$$\begin{aligned}
g_0 |\hat{e}(0)| |\bar{w}(0)| &\leq g_0 |\bar{w}(0)| \frac{\hat{e}(0)}{\sqrt{1+v^2(0)}} (1 + |u_1| + |\bar{v}(0)|) \\
&\leq c_2 \|\bar{w}_x\|^2 + \frac{g_0^2(1+|u_1|)^2}{4c_2} \frac{\hat{e}^2(0)}{1+v^2(0)} \\
&\quad + 2g_0 \sqrt{\|\bar{w}\| \|\bar{w}_x\| \|\bar{v}_x\| \|\bar{v}\|} \frac{|\hat{e}(0)|}{\sqrt{1+v^2(0)}} \\
&\leq c_2 \|\bar{w}_x\|^2 + \ell_1 + g_0 \frac{|\hat{e}(0)|}{\sqrt{1+v^2(0)}} (\|\bar{w}\| \|\bar{w}_x\| + \|\bar{v}_x\| \|\bar{v}\|) \\
&\leq c_2 \|\bar{w}_x\|^2 + \ell_1 + c_3 \|\bar{w}_x\|^2 + c_4 \|\bar{v}_x\|^2 \\
&\quad + g_0^2 \frac{\hat{e}^2(0)}{1+v^2(0)} \left( \frac{\|\bar{v}\|^2}{4c_3} + \frac{\|\bar{w}\|^2}{4c_4} \right) \\
&\leq c_2 \|\bar{w}_x\|^2 + c_3 \|\bar{w}_x\|^2 + c_4 \|\bar{v}_x\|^2 \\
&\quad + \ell_1 \|\bar{v}\|^2 + \ell_1 \|\bar{w}\|^2 + \ell_1,
\end{aligned} \tag{139}$$

$$\begin{aligned}
g_0^2 e^{g_0} |\hat{e}(0)| \|\bar{w}\| &\leq g_0^2 e^{g_0} \|\bar{w}\| \frac{\hat{e}(0)}{\sqrt{1+v^2(0)}} (1 + |u_1| + |v(0)|) \\
&\leq c_5 \|\bar{w}\|^2 + \frac{g_0^4 e^{2g_0} (1+|u_1|)^2}{4} \frac{\hat{e}^2(0)}{1+v^2(0)} \left( \frac{1}{c_5} + \frac{\|\bar{w}\|^2}{c_6} \right) \\
&\quad + c_6 \|\bar{v}_x\|^2 \\
&\leq c_5 \|\bar{w}\|^2 + \ell_1 \|\bar{w}\|^2 + c_6 \|\bar{v}_x\|^2 + \ell_1,
\end{aligned} \tag{140}$$

$$\begin{aligned}
|\bar{v}(0)| |\hat{e}(0)| &\leq \frac{|\bar{v}(0)| |\hat{e}(0)|}{\sqrt{1+v^2(0)}} (1 + 2u_1^2 + 4 \|\bar{v}\| \|\bar{v}_x\|) \\
&\leq \frac{c_7}{2} \|\bar{v}_x\|^2 + \frac{(1+2u_1^2)^2}{2c_7} \frac{\hat{e}^2(0)}{1+v^2(0)} + \frac{c_7}{2} \|\bar{v}_x\|^2 \\
&\quad + \frac{8}{c_7} \left( \frac{|\bar{v}(0)| |\hat{e}(0)|}{\sqrt{1+v^2(0)}} \right)^2 \|\bar{v}\|^2 \\
&\leq c_7 \|\bar{v}_x\|^2 + \ell_1 \|\bar{v}\|^2 + \ell_1.
\end{aligned} \tag{141}$$

Substituyendo (139), (140) y (141) en (138), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & - \left( \frac{1}{2} - 4c_1 - c_2 - c_3 - 4c_5 \right) \|\bar{w}_x\|^2 + \ell_1 \|\bar{w}\|^2 \\ & - \left( \frac{1}{2} - c_4 - c_6 - c_7 \right) \|\bar{v}_x\|^2 + \ell_1 \|\bar{v}\|^2 + \ell_1. \end{aligned} \quad (142)$$

Seleccionando  $4c_1 = c_2 = c_3 = 4c_5 = \frac{1}{16}$  y  $c_4 = c_6 = c_7 = \frac{1}{12}$ , se llega a que

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{1}{8}V + \ell_1 V + \ell_1, \quad (143)$$

y por el **Lema 2**, se tiene que  $\|\bar{w}\|, \|\bar{v}\| \in l_2 \cap l_\infty$ . Además, por integración de (142) se tiene que  $\|\bar{v}_x\|, \|\bar{w}_x\| \in l_2$ .

Usando el hecho de que  $\|\bar{v}_x\|, \|\bar{w}_x\|$  son acotados, se tiene que

$$\left| \frac{d}{dt} (\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2) \right| \leq \ell_1 \|\bar{w}_x\|^2 + \ell_1 \|\bar{v}_x\|^2 + \ell_1 \leq \infty. \quad (144)$$

Y por el **Lema** de Barbalat se llega a que  $\|\bar{v}\| \rightarrow 0, \|\bar{w}\| \rightarrow 0$ . Por la desigualdad de Agmon Orlov et al. (2006) se tiene

$$\max_{x \in [0,1]} |\bar{v}(x, t)| \leq 2 \|\bar{v}\| \|\bar{v}_x\|, \quad (145)$$

y por lo tanto,  $\bar{v}(x, t)$  es uniformemente acotada y regulada a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por el mismo argumento se llega a que  $\bar{w}$  es uniformemente acotada y regulada a cero. Por lo tanto, se concluye que los sistemas  $\hat{w}$  y  $v$  son asintóticamente estables, alrededor de los puntos límites  $\hat{w}^{lp}(x)$  y  $v^{lp}(x)$  respectivamente.

3. Para probar que  $\eta(x, t)$  y  $u(x, t)$  son acotadas, es necesario utilizar la transformada

inversa de (119), expresada en términos de  $\eta(x, t)$ ,  $v(x, t)$  y  $\hat{w}(x, t)$ :

$$\eta(x, t) = \hat{w}(x, t) - \hat{g} \int_0^x \hat{w}(\epsilon, t) d\epsilon - \hat{g}v(x, t). \quad (146)$$

Puesto que  $v(x, t)$  y  $\hat{w}(x, t)$  son acotadas, de (146) se concluye que  $\eta(x, t)$  es acotada.

Por último, la acotación de  $u(x, t)$  se deriva de (100) y (101).

4. Se tiene que (107) acoplada con el sistema parabólico (100) resulta ser asintóticamente autónomo porque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(0, t) = v^{lp}(0) = u_1 \neq 0. \quad (147)$$

Por extensión del principio de invariancia Rouché et al. (1977) a los sistemas parabólicos asintóticamente autónomos (100), (107) y debido a (147), la solución converge al máximo subconjunto invariante  $\Delta g(t)v(0, t) = 0$ , resultando la convergencia del identificador (103). Así, el Teorema 6 es probado.  $\square$

### V.5.2 Identificación del parámetro $g$ del SLPD inestable en lazo cerrado

La planta del SLPD (con  $g = 4.5$ ) está dada por:

$$\Sigma : \begin{cases} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\ u_x(0, t) &= -4.5u(0, t); \\ u(1, t) &= 0.4 - \int_0^1 \hat{g}e^{\hat{g}(1-\epsilon)}(\hat{g}v(\epsilon, t) + \eta(\epsilon, t)) d\epsilon \\ u(x, 0) &= 2\text{sen}(\pi x), \end{cases} \quad (148)$$

con el filtro de entrada

$$\Sigma : \begin{cases} \eta_t(x, t) = \eta_{xx}(x, t) \\ \eta_x(0, t) = 0; \quad \eta(1, t) = u(1, t) \\ \eta(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (149)$$

y filtro de salida

$$\Sigma : \begin{cases} v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) \\ v_x(0, t) = -u(0, t); \quad v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (150)$$

El algoritmo del gradiente para identificar en línea el parámetro  $g$ , para las condiciones iniciales arbitrarias  $u(0, t), v(0, t), \eta(0, t) \in L_2(0, 1)$ , es el siguiente

$$\dot{\hat{g}}(t) = \gamma \frac{\hat{e}(0, t)v(0, t)}{1 + v^2(0, t)}; \quad \hat{g}(0) = 2 \quad \gamma = 10. \quad (151)$$

La simulación se realizó en MATLAB versión 7. La efectividad del identificador adaptable, la entrada de control  $u(1, t)$  y el sistema lineal en estudio (función  $u(x, t)$ ), se muestran en las figuras 17, 18 y 19, respectivamente.

## V.6 Comentarios finales

En este capítulo se estudió el desempeño del algoritmo del identificador adaptable para identificar el parámetro constante  $g$  en los SLPD, estable en lazo abierto e inestable en lazo cerrado que modelan el desplazamiento del calor en el cohete de propulsor sólido a través de simulaciones numéricas.

Las figuras 15 y 17 muestran que el objetivo del identificador adaptable se cumplió, ya que el estimador del parámetro  $\hat{g}$  del identificador adaptable evoluciona en el tiempo

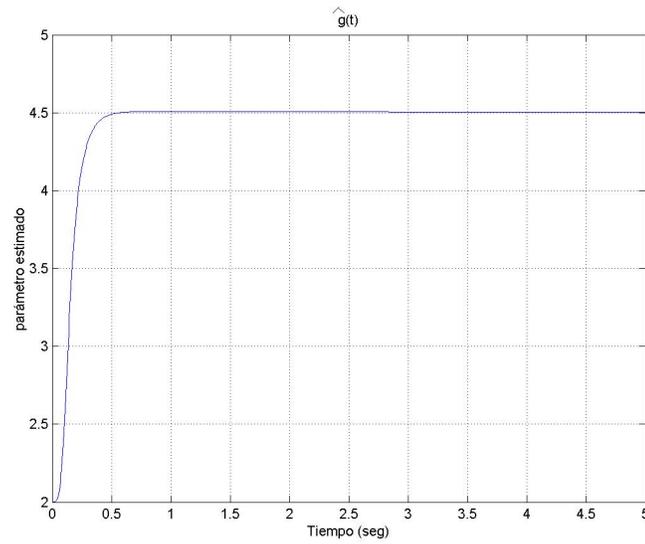


Figura 17: Evolución del parámetro  $\hat{g}(t)$  en el tiempo.

y converge asintóticamente hacia el valor nominal del parámetro  $g$  del SLPD con las condiciones de frontera (atribuidas al cohete de propulsor sólido) y el parámetro de adaptación positivo. La aplicación de una entrada de control constante al SLPD garantiza la identificación en línea del parámetro  $g$  en lazo abierto.

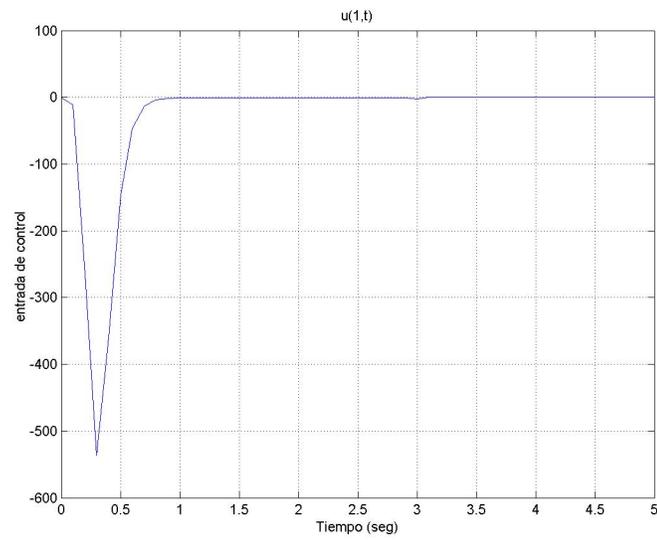


Figura 18: Evolución de la entrada de control  $u(1,t)$  en el tiempo.

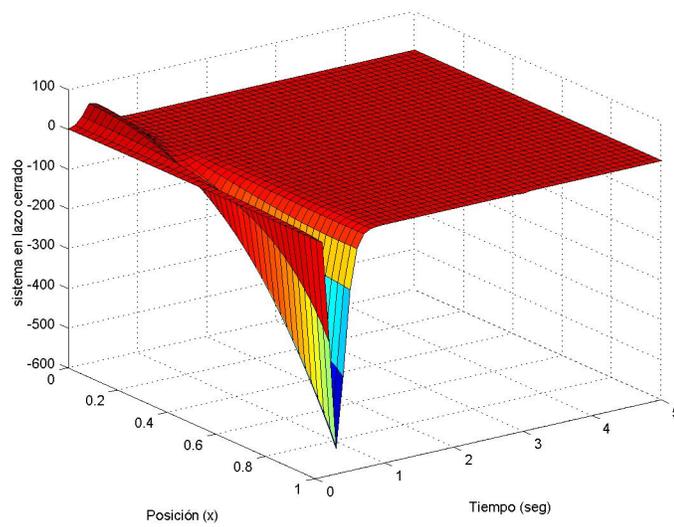


Figura 19: Evolución de la función  $u(x,t)$  en el tiempo.

# Capítulo VI

## Conclusiones

*En el presente trabajo de tesis se estudió la identificabilidad de una clase de SLRT SISO e invariantes con el tiempo, con un número finito de retardos en el vector estado y en la entrada de control. Los SLRT SISO son gobernados por ecuaciones diferenciales funcionales de orden  $n$ , con desconocimiento de los valores de los parámetros y de los retardos, con una sola entrada, y una sola salida sin retardo disponible para medirse. La identificación se logra por la aplicación de una entrada de control suficientemente no suave y periódica, la cual se diseña independientemente de la forma particular del SLRT SISO.*

*Se construyó un observador de estado en modos deslizantes para los SLRT SISO con parámetros desconocidos, y se utilizó para diseñar un identificador adaptable de parámetros. El identificador adaptable diseñado consiste de un observador de estado en modos deslizantes y un estimador de parámetros. Al aplicarlo a un SLRT SISO identificable permitió la identificación en línea de los valores nominales de los parámetros y de los retardos del sistema sin usar la diferenciación de la salida medible.*

*Si los valores de los múltiples retardos del SLRT SISO son desconocidos, es imposible repetir la estructura del sistema identificado. Debido a esto, se utilizó el procedimiento*

*de retardos distribuidos desarrollado en las ecuaciones del identificador adaptable, agregando términos de los retardos ficticios al sistema original. Excitando el sistema que se identificará por una señal de entrada suficientemente no suave y periódica la convergencia de los estimadores de parámetros a sus valores nominales está garantizada, observándose que los estimadores de parámetros que convergen a cero revelan los retardos ficticios, mientras que los otros parámetros que no convergen a cero indican que son los valores nominales de los retardos del sistema.*

*La efectividad del identificador adaptable fue ilustrada a través de detalladas simulaciones numéricas para identificar los parámetros (valores nominales desconocidos) de la dinámica de la razón A/C de un puerto inyector de gasolina de un motor de combustión interna Ford. Además, se estudió la robustez de los estimadores de parámetros del identificador adaptable contra incertidumbres en los valores de los retardos del SLRT SISO de segundo orden utilizando el error cuadrático medio.*

*La efectividad del algoritmo del identificador adaptable fue probada experimentalmente, obteniéndose como resultado, la reducción del error de la dinámica de la razón A/C en el puerto inyector de gasolina en un 40%.*

*Se resolvió el problema teórico de identificabilidad de una clase de SLPD estables en lazo abierto, con un parámetro desconocido en una condición de frontera y con salida medible. La identificación se logra por la aplicación de una entrada de control constante en lazo abierto.*

*La efectividad del identificador adaptable para identificar el parámetro constante del sistema que modela el desplazamiento del calor en el cohete de propulsor sólido, fue*

*ilustrada a través de simulaciones numéricas, para los casos en que el sistema sea estable en lazo abierto e inestable en lazo cerrado.*

## **VI.1 Aportaciones**

*Las contribuciones de este trabajo de tesis a la literatura existente son:*

- *La especificación de una clase de SLRT SISO identificables, que presentan retardos en el vector estado y en la entrada de control y cuya salida es medible sin retardo.*
- *El diseño de un identificador adaptable de parámetros, que consiste de un observador de estado en modos deslizantes y un estimador de parámetros, considerando que los valores de los retardos son conocidos a priori.*
- *La generalización del identificador adaptable, a través del procedimiento de retardos distribuidos en un intervalo finito, cuando los valores de los múltiples retardos son desconocidos.*
- *Los resultados teóricos se complementaron a través de simulaciones numéricas y experimentales, con el propósito de identificar los valores de los parámetros, incluyendo los valores de los retardos del proceso industrial de la razón A/C de un motor Ford.*
- *La generalización del algoritmo del identificador adaptable a un SLPD gobernado por una ecuación con derivadas parciales de tipo parabólico.*

*La teoría y los resultados numéricos (simulaciones) y experimentales obtenidos en este trabajo de tesis se sometieron a revisión para publicarse en: memorias de congreso (participación con conferencia: Gómez et al. (2006), Orlov et al. (2006) y Orlov et al. (2006)) y revista con arbitraje internacional Gómez et al. (2007).*

## **VI.2 Trabajos futuros**

*Con base en el estudio realizado sobre el SLRT SISO e invariante con el tiempo de orden  $n$ , en lo que respecta a la identificación de los parámetros de la planta y de los valores de los retardos constantes (conocidos o desconocidos), se pretende:*

- 1. Extender el Teorema 2 de identificabilidad de SLRT SISO y el Teorema 3 del identificador adaptable de parámetros:
  - (a) A un SLRT con retardos variables en función del tiempo  $\tau(t)$ .*
  - (b) A sistemas no lineales con retardos constantes en el tiempo.**
- 2. Extender los resultados obtenidos en este estudio, al control adaptable en lazo cerrado.*
- 3. Diseñar un programa en lenguaje estructurado, que permita implementar el algoritmo del identificador adaptable en SLRT SISO, a través del procedimiento de*

*retardos distribuidos, cuando los valores de los múltiples retardos son desconocidos. La Versión 3.0 de SIMNON se limita a 20 estados.*

4. *En lo que respecta a SLPD en lazo abierto y cerrado, se pretende extender el identificador adaptable a SLPD con dos parámetros desconocidos (posiblemente, variables en el tiempo), uno en la planta y el otro en una condición de frontera.*

# Bibliografía

- Aquino. 1999. *Transient A/F control characteristics of 5-liter central fuel injection engine*. SAE Paper 810494.
- Belkoura L., Orlov Y. 2002. *Identifiability analysis of linear delay-differential systems*. IMA J. Mathematical Control Information. 19: 73-81 p.
- Boskovic D., Krstic M. 2003. *Stabilization of a solid propellant rocket instability by state feedback*. Int. J. Robust Nonlinear Control. 13: 483-495 p.
- Gómez O., Orlov Y., Kolmanovsky I. 2006. *Identificación adaptativo de parámetros de sistemas lineales con retardo en el tiempo*. Conferencia AMCA. México. Octubre 2006.
- Gómez O., Orlov Y., Kolmanovsky I. 2007. *On-line identification of SISO linear time-invariant delay systems from output measurements*. Automatica. 43(12): 2060-2069 p.
- Haddock J., Terjeki J. 1983. *Lyapunov-Razumikhin Functions and an invariance principle for functional differential Equations*. J. Differential Equations. 48: 95-121 p.
- Hale J. 1971. *Functional differential equations*. Springer-Verlag, New York. 447 p.
- Ioannou P.A., Sun J. 1995. *Robust adaptive control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 819 p.
- Jankovic, M., Kolmanovsky, I. 1999. *Controlling nonlinear systems through time delays: An automotive perspective*. Proceedings of 1999 European Control Conference, Karlsruhe, Germany, paper F1027-1.
- Khalil H. K. 1992. *Nonlinear systems*. Macmillan, New York. 750 p.
- Kharitonov V. L., Niculescu S., Moreno J., Michiels W. 2005. *Static output feedback stabilization: Necessary conditions for multiple delay controllers*. IEEE Trans. on Automat. Control. 50(1): 82-86 p.
- Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. 1986. *Stability of functional differential equations*. Academic Press. New York-London. 217 p.
- Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. 1999. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht: Kluwer. 664 p.
- Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. 1995. *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley. New York. 576 p.

- Lafay J., Fliess M., Mounier H. y Sename O. 1996. *Sur la commandabilite des systemes lineaires a retards*. CNRS Conference *Analysis and Control of Systems with Delays*, Nantes, France. May 1996. 19-42 p.
- Morse A.S. 1976. *Ring models for delay-differential systems*. *Automatica*. 12: 529-531 p.
- Mooncheol Won, Seibum B. Choi y J. K. Hedrick. 1998. *Air-to-fuel ratio control of spark ignition engines using gaussian network sliding control*. *IEEE Trans. On Control Systems Technology*, 6(5): 678-687 p.
- Orlov Y., Belkoura L., Richard J.-P., Dambrine M. 2001. *Identifiability analysis of linear time-delay systems*. *Proc. of the 40th IEEE Conf. Decision and Control*. Orlando, Fl, December 2001. 4776-4781 p.
- Orlov Y. 2003. *Extended invariance principle for nonautonomous switched systems*. *IEEE Trans. On Automat. Control* 48(8): 1448-1452 p.
- Orlov Y. 2003. *On-line parameter identification and adaptive control linear time-delay systems: Identifiability analysis and algorithm synthesis*. *Proc. of the II International Conference on System Identification and Control Problems*. Moscow. January 2003. 1508-1525 p.
- Orlov Y., Belkoura L., Richard J.-P., Dambrine M. 2002. *On identifiability of linear time-delay systems*. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 47(8): 1319-1323 p.
- Orlov Y., Belkoura L., Richard J.-P., Dambrine M. 2003. *Adaptive identification of linear time-delay systems*. *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 13: 857-872 p.
- Orlov Y., Perruquetti W., Richard J.-P. 2003. *Sliding mode control synthesis of uncertain time-delay systems*. *Asian. J. Control*. 5: 568-577 p.
- Orlov Y., Kolmanovsky I., Gómez O. 2006. *Identification of SISO linear time-delay systems from output measurements: Theory and application to engine air-to-fuel control*. *Proc. of the American Control Conference Minneapolis, Minnesota*. June 2006. 1179-1184 p.
- Orlov Y., Kolmanovsky I., Gómez O. 2006. *Delay estimation in linear systems using output feedback*. *Proc. Of the 45th IEEE Conf. Decision and Control.*, San Diego. December 2006. 858-863 p.
- Orlov Y., Smyshlyaev A., Krstic M. 2006. *Adaptive identification of a linear unstable parabolic system with boundary sensing and actuation*. *Proc. Of the 45th IEEE Conf. Decision and Control.*, San Diego. December 2006. 727-732 p.
- Richard J.-P. 2003. *Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems*. *Automatica*. 39: 1667-1694 p.

- Rouche N., Habets P., Laloy M. 1977. *Stability theory by Lyapunov's direct method.* Springer Verlag. New York. 396 p.
- Smyshlyaev A., Krstic M. 2007. *Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs- Part III: Output feedback examples with swapping identifiers.* *Automatica.* 43(9): 529-531 p.
- Smyshlyaev A., Krstic M. 2004. *Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations.* *IEEE Trans. On Automat. Contr.* 49(12): 2185-2202 p.
- Smyshlyaev A., Krstic M. 2005. *Output feedback adaptive controllers with swapping identifiers for two unstable PDEs with infinite relative degree.* *Proc. of the 44th Conference on Decision and Control. Seville. Spain. December 2005.* 1509-1514 p.
- Sontag E.D. 1976. *Linear system over commutative rings.* *Ricerche Di Automat. Italy* 7(1): 1-34 p.
- Tikhonov A., Samarskii A. 2000. *Equations of mathematical physics.* E. Mellen. New York. 784 p.
- Turin, R.C., Geering H.P. 1995. *Model-reference adaptive A/F-ratio control in an si engine based on Kalman-filtering techniques.* *Proceedings of American Control Conference, Seattle, Washington. June 1995.* 4082-4090 p.
- V.I. Utkin. 1992. *Sliding modes in control optimization.* Springer-Verlag. Berlin. 286 p.