RESUMEN de la tesis de Alfonso García Weidner presentada como requisito parcial para obtener el grado de **DOCTOR EN CIENCIAS EN FISICA APLICADA** con opción en **OPTICA**. Ensenada, Baja California, México. Marzo de 1992.

DISEÑO DE UN MODULADOR ELECTRO-OPTICO CON RESPUESTA LINEAL UTILIZANDO LA ESFERA DE POINCARE.

Resumen aprobado por:

Dr.Luis Enrique Celaya S.
Director de Tesis

En este trabajo se presenta un análisis de la no-linealidad en la transmitancia de un modulador de intensidad luminosa, con el objetivo de diseñar un dispositivo cuya respuesta presente una menor distorsión, respecto a los moduladores que se encuentran reportados en la literatura. Para este propósito, se hace necesario el realizar desde una nueva perspectiva, un estudio de los fenómenos de polarización óptica sobre dispositivos de modulación por birrefringencia inducida.

Se propone entonces, el uso de la Esfera de Poincaré para el diseño (cuantitativo) de dispositivos birrefringentes. Para esta finalidad se deducen las ecuaciones parámetricas (caso general) que describen la evolución del estado de polarización sobre la Esfera de Poincaré. Dado que cualquier dispositivo birrefringente se puede representar con un arreglo de polarizadores, retardadores y rotadores, los parámetros ópticos que se analizan son 4: los ejes rápidos, los retardamientos lineales, los retardamientos circulares, y los ejes de los polarizadores. Con éstas ecuaciones paramétricas, se definen dos tipos de trayectorias (aisladas y reales) sobre la Esfera de Poincaré. Estas trayectorias son muy útiles para el análisis y síntesis de dispositivos birrefringentes.

Se aplica el método propuesto para el diseño de un modulador electro-óptico lineal de intensidad luminosa constituído por 3 etapas (cristales), y se comparan sus características con las de otros moduladores.

Finalmente, se compara el método de la Esfera de Poincaré con el método convencional de diseño (Respuesta Impulso) que se utiliza para la síntesis de dispositivos birrefringentes, resaltando sus respectivas ventajas.

TESIS DEFENDIDA POR: **ALFONSO GARCIA WEIDNER**

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:

DR. LUIS ENRIQUE CELAYA SALCIDO.-Director del Comité

DR. MARIO MARTINEZ GARCIA.- Miembro del Comité

DR. ARTURO SERRANO SANTOYO.- Miembro del Comité

DR. JESUS MA. SIQUEIROS BELTRONES.- Miembro del Comité

DR. ENRIQUE RIVERA GARIBALDI.- Miembro del Comité

M.C. JOSUE ALVAREZ BORREGO.-Jefe Depto. Optica

DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director de Estudios de Posgrado

27 DE MARZO DE 1992

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION DE FISICA APLICADA

DEPARTAMENTO DE OPTICA

DISEÑO DE UN MODULADOR ELECTROOPTICO CON RESPUESTA LINEAL UTILIZANDO LA ESFERA DE POINCARE.

T E S I S

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

ALFONSO GARCIA WEIDNER

Ensenada, Baja California, Marzo de 1992.

COMITE DE TESIS

Dr. Luis Enrique Celaya Salcido, Director del comité.
Compañía CALIPO S.A. Monterrey, N. L., México.

Dr. Shamlal Mallick, Co-director del comité.
Institut D'Optique, Centre Scientifique D'Orsay.
Orsay, France.

Dr. Mario Martínez García, Miembro del Comité.
CICESE, Director General. Ensenada, B.C. México.

Dr. Arturo Serrano Santoyo, Miembro del Comité.
CICESE, Depto. de Telecomunicaciones y Electrónica.
Ensenada, B. C., México.

Dr. Jesús Siqueiros Beltrones, Miembro del Comité.
UNAM Instituto de Física (Lab. Ensenada).
Ensenada, B. C., México.

Dr. Enrique Rivera Garibaldi, Miembro del Comité.
Compañía CALIPO S.A. Ensenada, B. C., México.

Dr. Luis E. Calderón Aguilera, Miembro Ex-oficio del Comité.
CICESE, Director Académico. Ensenada, B. C., México.

DEDICATORIA

a la memoria de mi padre

con todo mi amor

a mi hija Mashenka

a mi madre

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, especialmente a mis hermanas Norma Elena, Ana María, Maricela, Leticia y a Michelle por su enorme cariño, apoyo y comprensión.

A mi director de tesis Dr. Luis Enrique Celaya, por los conocimientos, amistad y apoyo brindados durante muchos años. Al Dr. Shamlal Mallick por su amistad, observaciones y finas atenciones.

Al Dr. Mario Martínez y al Dr. Arturo Serrano por su participación en esta tesis. Al Dr. Chandrasekar Roychoudhuri y al Dr. Jesús Siqueiros por su decidida colaboración en este trabajo.

En particular a mi compañero y colaborador de trabajo C. a Dr. Manuel Yamada por su ayuda permanete.

Al Dr. Enrique Rivera y al Dr. Heriberto Márquez por su apoyo y amistad. Al Dr. Hector Escamilla por sus consejos y revisiones en las publicaciones del trabajo.

A la Sra. Ofelia Pardo por su constante apoyo en la mecanografía. A la Sra. Rosita Corona por su ayuda y amistad.

A la Dra. Diana Tentori por su ayuda en las actividades de investigación.

Al Ing. Lucio Tirado por el apoyo y amistad que siempre me ha brindado.

Al Sr. Ramón Moreno y a la Dra. Cornejo por sus constantes atenciones.

A los compañeros del Departamento de Optica, y al personal de biblioteca por la enorme ayuda brindada. A la Compañía CALIPO S.A. así como a quienes en ella trabajan, por su ayuda y facilidades de infraestructura otorgada durante este trabajo.

Al Sistema Nacional de Investigadores por sus reconocimentos.

Gracias a mis amigos y a mis compañeros de fútbol.

CONTENIDO

		Página
I	INTRODUCCION.	1
II	MODULADORES ELECTRO-OPTICOS CONVENCIONALES.	5
	II.1 Descripción de la luz polarizada.	5
	II.2 Propagación óptica en medios birrefringentes.	6
	II.3 Presentación del problema.	11
III	METODOS PARA EL ANALISIS Y SINTESIS DE DISPOSITIVOS BIRREFRINGENTES.	18
	III.1 Método convencional (Respuesta Impulso).	18
	III.1.1 Análisis.	18
	III.1.2 Síntesis.	21
	III.2 Método de la Esfera de Poincaré.	24
	III.2.1 Descripción del estado de polarización en la Esfera de Poincaré.	27
	III.2.2 Ecuaciones paramétricas de los elementos birrefringentes y su representación en la Esfera de Poincaré.	30
	III.2.3 Análisis.	37
	III.2.3.1 Trayectorias aisladas.	39
	III.2.3.2 Trayectorias reales.	42
	III.2.3.3 Teorema de equivalencia.	44
	III.2.4 Síntesis.	47

CONTENIDO (Continuación)

		Página
IV	DISEÑO DE UN MODULADOR ELECTRO-OPTICO CON RESPUESTA LINEAL.	55
IV.1	Especificación de los parámetros del sistema óptico.	57
IV.1.1	Parámetros del modulador.	57
IV.1.2	Configuración óptica.	58
IV.1.3	Comportamiento del modulador.	59
IV.2	Aproximación inicial del diseño.	61
IV.2.1	Trayectorias aisladas iniciales.	61
IV.2.2	Trayectorias aisladas finales.	62
IV.2.3	Ecuaciones paramétricas del modulador.	63
IV.2.4	Valores iniciales y restricciones matemáticas.	64
IV.3	Optimización del diseño.	65
IV.3.1	Fenómeno de Gibbs para la función de transmitancia.	66
IV.3.2	Condiciones de linealidad.	67
IV.4	Valores finales del diseño.	68
IV.5	Comparación del diseño con otros moduladores.	69
V	CONCLUSIONES	88
LITERATURA CITADA		96

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1.	Estado de polarización (derecho).	17
2.	Modulador convencional.	17
3.	Curva de transmitancia para el modulador convencional.	17
4.	Respuesta impulso de un cristal birrefringente.	23
5.	Función de transmitancia en amplitud para un dispositivo birrefringente: (a) en el tiempo, (b) en la frecuencia.	23
6.	Modulador de Ammann.	23
7.	Esfera de Poincaré.	49
8.	Trayectorias debidas a: (a y c) un rotador derecho, (b) un retardador elíptico de media onda, (d) un retardador lineal de media onda.	49
9.	Modulador de Solc : (a) configuración óptica, (b) Transmitancia conforme a sus trayectorias aisladas.	50
10.	Trayectorias aisladas para el modulador de Solc: (a) Representación tridimensional, (b) Representación mapamundi.	51
11.	Trayectorias reales para el modulador de Solc: (a) Representación tridimensional, (b) Representación mapamundi.	52
12.	Transmitancia real para el modulador de Solc.	53
13.	Valores de las componentes S_1 de la trayectoria real final.	54
14.	Arreglo óptico del modulador lineal bajo diseño.	75
15.	Curva de transmitancia propuesta.	75
16.	Análisis del comportamiento de un modulador sobre la Esfera de Poincaré.	76

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
17.	Esquema de las trayectorias aisladas del modulador: (a) iniciales, (b) finales.	76
18.	Fenómeno de Gibbs para la curva de transmitancia: (a) $\beta = 2$, (b) $\beta = 3.5$, (c) $\beta = 5$, (d) $\beta = 7$.	77
19.	Trayectorias aisladas obtenidas para el modulador: (a) iniciales, (b) finales.	78
20.	Trayectorias reales obtenidas para el modulador: (a) representación mapamundi, (b) representación tridimesnional.	79
21.	Curva de transmitancia para el modulador diseñado.	80
22.	(a) Curvas de transmitancias T y T_L para el modulador convencional, y (b) su diferencia D.	81
23.	(a) Curvas de transmitancias T y T_L para el modulador de Ammann, y (b) su diferencia D.	83
24.	(a) Curvas de transmitancias T y T_L para el modulador diseñado, y (b) su diferencia D.	85

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I.	Parámetros del modulador diseñado.	80
II.	Valores de T, T_L, y D para la figura 22.	82
III.	Valores de T, T_L, y D para la figura 23.	84
IV.	Valores de T, T_L, y D para la figura 24.	86
V.	Parámetros para los moduladores.	87
VI.	Características de operación para los moduladores.	87

DISEÑO DE UN MODULADOR ELECTROOPTICO CON RESPUESTA LINEAL UTILIZANDO LA ESFERA DE POINCARE.

I. INTRODUCCION

Debido a sus variadas aplicaciones en instrumentación, comunicaciones y procesado de información, la modulación de haces luminosos utilizando cristales que exhiben el efecto electroóptico lineal (efecto Pockels) ha sido un tema de interés e innovaciones constantes durante los últimos años en el ámbito internacional [García Weidner, 1989; García Weidner y Yamada Shinoda, 1989].

Uno de los inconvenientes que presentan los moduladores de intensidad luminosa convencionales, es la no-linealidad en su curva de respuesta, ésto es, la intensidad luminosa modulada (a la salida del dispositivo) sólo guarda una relación lineal con el voltaje de modulación (señal de entrada) alrededor de una pequeña región en su curva de transmitancia. El propósito del presente trabajo, es el estudiar el comportamiento de estos dispositivos y finalmente encontrar el diseño de un modulador electroóptico (optimizado) cuya función de transferencia sea más lineal que la de los dispositivos convencionales.

En el capítulo II se proporcionan los fundamentos de la polarización y propagación óptica en cristales. Los postulados más notables al respecto, lo constituyen el hecho de que en un medio anisotrópico pueden existir hasta dos ondas que se propagan

en forma independiente (Ecuación de Fresnel), denominadas onda ordinaria y extraordinaria para un cristal uniaxial. Por otra parte, se tiene que un modelo geométrico llamado Elipsoide de Indices permite analizar estas dos propagaciones tanto en cristales con birrefringencia natural como para cristales con birrefringencia inducida. En éste mismo capítulo se describe la birrefringencia inducida eléctricamente mediante el efecto Pockels y su aplicación en la construcción de moduladores de intensidad luminosa. Conforme a éstas bases, se hace la presentación de nuestro problema: la no-linealidad en la respuesta de un modulador.

En el capítulo III se describen al método convencional (Respuesta Impulso) y al método propuesto (Esfera de Poincaré) para el estudio de dispositivos birrefringentes. En la primera parte (capítulo III.1), se describen brevemente los principios del método convencional, el cual se basa en el análisis de Fourier y la respuesta del sistema óptico a una delta de Dirac. Posteriormente se presenta su aplicación para la solución de nuestro problema, ésto es, para el diseño de un modulador lineal de intensidad luminosa. Se observa que el método convencional utiliza ecuaciones matriciales que nos dan poca información sobre la fenomenología de la polarización óptica que ocurre en el dispositivo. Por otra parte, se encuentra que requiere de un desarrollo matemático muy elaborado y aunque el método en

sí es de caracter general, las expresiones que se utilizan no son generales, sino que hay que plantear y resolver ecuaciones particulares para cada caso específico.

En la segunda parte (capítulo III.2), se describe la Esfera de Poincaré. Después de realizar una amplia búsqueda bibliográfica, se encontró que no aparecen reportadas ecuaciones generales que describan el comportamiento de los dispositivos cristalinos sobre la Esfera de Poincaré, ya que de hecho, tradicionalmente se ha venido utilizando como un método de análisis cualitativo. Quizás como consecuencia de lo mismo, no existe reportado ningún compendio que ilustre detalladamente las características globales de la Esfera para ser aplicada en el análisis y síntesis de cualquier sistema óptico birrefringente, sino que por el contrario, algunas de sus propiedades reportadas se encuentran dispersas en la literatura. Por esta razón, se presentó la necesidad de deducir las ecuaciones (paramétricas) de la Esfera de Poincaré. Estas ecuaciones se pueden tratar de obtener utilizando geometría analítica tridimensional, trigonometría esférica o el análisis vectorial, pero las expresiones resultantes son muy elaboradas. Por otra parte, debido a que el cálculo de Stokes-Mueller está fundamentado en principios fenomenológicos de la polarización óptica, se utilizó finalmente ésta herramienta matemática. Consecuentemente, las ecuaciones obtenidas están expresadas directamente por los parámetros birrefringentes de los elementos de un sistema óptico, y pueden ser fácilmente programadas en

computadora. Posteriormente, utilizando éstas ecuaciones se definen para cualquier sistema óptico, a dos tipos de trayectorias (trayectorias reales y aisladas) sobre la esfera, que describen las propiedades del dispositivo. Con ésto, se propone el uso de la Esfera de Poincaré como un método cuantitativo general para el análisis [García Weidner, 1992a] y síntesis [García Weidner, 1992b] de dispositivos birrefringentes, y se describen sus principales características.

En el capítulo IV se aplican las trayectorias reales y aisladas (ecuaciones paramétricas) de la Esfera de Poincaré para el diseño de un modulador lineal de tres etapas. Posteriormente se presentan los valores obtenidos, y se comparan las características del dispositivo diseñado respecto a los que se encuentran reportados en la literatura. Se observa que a diferencia del método convencional, se obtiene información específica sobre la evolución del estado de polarización en la medida que el haz óptico atraviesa al modulador. Por otra parte, las ecuaciones paramétricas utilizadas al plantear el diseño son las mismas ecuaciones que se utilizarían para diseñar a otros dispositivos, ésto es, son de caracter general.

Finalmente en el capítulo V, se presentan las conclusiones del presente trabajo de investigación. Se comparan ambos métodos (Esfera de Poincaré vs. Respuesta Impulso) y se proponen algunos tópicos interesantes de investigación para un trabajo futuro.

II. MODULADORES ELECTROOPTICOS CONVENCIONALES.

II.1 Descripción de la luz polarizada.

Con referencia a un sistema de coordenadas Cartesianas OXYZ, las componentes rápida y lenta de un haz monocromático de luz elípticamnte polarizado, que se propagan a lo largo de la dirección positiva del eje z, están dadas respectivamente por

$$\vec{E}_x\ (z,t) = \hat{i}\ A_x\ \cos(\omega t - kz + \Gamma_x) = \hat{i}\ E_x \tag{1}$$

$$\vec{E}_y\ (z,t) = \hat{j}\ A_y\ \cos(\omega t - kz + \Gamma_y) = \hat{j}\ E_y\ , \tag{2}$$

donde ω es la velocidad angular, t es el tiempo transcurrido, k la constante de propagación, $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son vectores unitarios a lo largo de los ejes x y y, $A_{x,y}$ son las amplitudes de campo eléctrico, y $\Gamma_{x,y}$ sus ángulos de fase. Conforme la onda luminosa se propaga, la punta del vector de campo eléctrico total $\vec{E}_T = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ rota describiendo un tipo particular de trayectoria elíptica, la cual a su vez define las distintas formas de luz polarizada. Dependiendo del valor del retardamiento relativo $\Gamma = \Gamma_y - \Gamma_x$, el sentido de rotación cambia y diferentes convenciones acerca de éste sentido de rotación han sido sugeridas. En la presente tésis, adoptaremos la convención de signos, sentidos de rotación y fórmulas propuestas en la 2ª Conferencia Internacional sobre Elipsometría, ampliadas por Hauge et. al. [1980]. Entonces, designaremos un estado de polarización derecho cuando el vector de campo eléctrico total $\vec{E}_T$ se propague describiendo una hélice

positiva (derecha) en el espacio, i.e. cuando un observador que recibe la radiación ve un sentido de rotación horario en la elipse.

Eliminando a t de las relaciones (1) y (2) obtenemos la ecuación que describe al estado de polarización:

$$\left\{\frac{E_x}{A_x}\right\}^2 + \left\{\frac{E_y}{A_y}\right\}^2 - 2\frac{E_x E_y}{A_x A_y} \cos \Gamma = \operatorname{sen}^2 \Gamma \ . \tag{3}$$

Esta ecuación muestra a una elipse cuyos ejes mayor y menor miden 2a y 2b respectivamente (figura 1), inclinada a un ángulo azimutal ψ dado por

$$\tan 2\psi = 2\frac{A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \Gamma \ . \tag{4}$$

Definiremos la razón de elipticidad (o simplemente elipticidad) ϵ y a la razón de amplitudes α mediante las siguientes relaciones:

$$\tan \epsilon = \frac{b}{a} \tag{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x} \ . \tag{6}$$

II.2 Propagación óptica en medios birrefringentes.

En un cristal anisotrópico los vectores de desplazamiento $\vec{D}$ y campo eléctrico $\vec{E}$ no son paralelos [Yariv y Yeh, 1984] y están relacionados por el tensor dieléctrico $\epsilon_{\nu\xi}$ de la siguiente manera,

$$D_\nu = \sum_\xi \epsilon_{\nu\xi} E_\xi \qquad (\nu,\xi = 1,2,3 = x,y,z) \ . \tag{7}$$

Sean $\vec{K}$ el vector de propagación (perpendicular a $\vec{D}$) y $\vec{P}$ el vector de Poynting (perpendicular a $\vec{E}$) dados por

$$|\vec{K}| = k = \frac{\omega}{c} n = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{8}$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \ , \tag{9}$$

donde $\vec{H}$ es el vector de campo magnético, n el índice de refracción del medio, c la velocidad de la luz en el vacío, y λ la longitud de onda correspondiente. Entonces, de acuerdo a la ecuación (7), el vector $\vec{K}$ que indica la dirección del frente de onda, no es paralelo al vector $\vec{P}$ que indica la dirección del frente del flujo de energía. Las características de estas propagaciones [García Weidner, 1989e] se establecen a partir de la ecuación de Fresnel de las normales de onda,

$$\sum_\nu \left\{ \frac{P_\nu^2}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_\nu}\right)} \right\} = 0 \ . \tag{10}$$

De acuerdo a ésta ecuación (10), la estructura de un medio anisotrópico permite la propagación de dos ondas independientes (como máximo) cuyas direcciones de polarización son ortogonales entre sí. Estas ondas viajarán con dos velocidades diferentes, por lo que a las direcciones cristalinas paralelas a las de sus respectivos campos eléctricos se les llaman eje rápido y eje lento de acuerdo a su rapidez de propagación. Dichas velocidades de propagación están asociadas a dos valores de n (n_1 y n_2).

En un cristal uniaxial, n_1 es llamado índice de refracción ordinario n_o ya que obedece directamente a la ley de Snell, y n_2 es el índice de refracción extraordinario n_e .

Para determinar los índices de refracción n_1, n_2 y las direcciones de $\vec{D}$ y $\vec{E}$ se utiliza una construcción geométrica basados en el elipsoide de índices (indicatriz óptica). Este elipsoide es una superficie cuadrática que representa la densidad de energía eléctrica W_E almacenada en un volumen unitario de dieléctrico:

$$W_E = \frac{1}{2}\ \vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\sum_{\nu}\sum_{\xi} E_{\nu}\epsilon_{\nu\xi}E_{\xi} \ . \tag{11}$$

Convencionalmente, se sustituye la relación de Maxwell para la permitividad relativa ($n^2 = \epsilon_r$) y se normaliza a la ecuación (11) en el espacio ρ de la siguiente manera:

$$\sum_{\nu}\sum_{\xi}\left(\frac{1}{n^2_{\nu\xi}}\right)\rho_{\nu}\rho_{\xi} = 1 \qquad (\rho_1 = X,\ \rho_2 = Y,\ \rho_3 = Z) \ . \tag{12}$$

En un cristal uniaxial, a la diferencia de índices $\Delta n = n_e - n_o$ se le denomina birrefringencia lineal o simplemente birrefringencia. Si a éste cristal le incide una onda electromagnética dada por las ecuaciones (1) y (2), después de una distancia z se tendrá un retardamiento lineal

$$\Gamma = k\ \Delta n\ z = \frac{2\pi}{\lambda}\ (n_e - n_o)\ z \ . \tag{13}$$

Los materiales ópticos que manifiestan una birrefringencia circular (o actividad óptica) producen una rotación angular γ en el plano de polarización de un haz óptico que los atravieza; esto es, si el estado de polarización incidente está dado por la figura 1, el estado de polarización emergente estará dado por la misma elipse (misma elipticidad) pero orientada con una nueva inclinación azimutal $\psi' = \psi - \gamma$. Normalmente el retardamiento lineal Γ o circular γ que produce una placa cristalina es constante, sin embargo, mediante la aplicación de campos eléctricos (vgr. efecto Pockels) o magnéticos externos (vgr. efecto Faraday) se puede inducir un retardamiento variable.

Los dispositivos ópticos birrefringentes (optical birefringent networks) son un arreglo de 3 elementos ópticos: polarizadores lineales, rotadores (retardadores circulares) y retardadores (lineales); dispuestos con un determinado orden para realizar alguna función específica. Estos 3 elementos ópticos normalmente son fabricados de materiales cristalinos tales como el cuarzo, calcita, mica, XDP, LNB, YIG, etc., y la acción de cada uno de ellos sobre un haz óptico es diferente:

i) Polarizador. A la salida de un polarizador tendremos siempre un haz linealmente polarizado independientemente del tipo de luz que le incida. La inclinación ψ_P del haz emergente define el eje de transmisión P del polarizador. A un

polarizador colocado al final del sistema se le denominará analizador, con un eje de transmisión A inclinado a un ángulo ψ_A.

ii) Rotador. Un retardador circular o rotador, introduce un giro γ al eje azimutal de la elipse que describe el estado de polarización óptica incidente.

iii) Retardador. Introduce un retardamiemto Γ entre las componentes del campo eléctrico que viajan paralelas a sus ejes rápido (F) y lento. Dependiento del valor de Γ y de la inclinación ψ_F del eje rápido F respecto a la luz incidente, se puede determinar el estado de polarización emergente. Cuando el estado de polarización incidente no es lineal y/o se tienen varios retardadores colocados en serie, el análisis resulta muy laborioso. Lo mismo ocurre al estudiar algunos materiales cuyos retardamientos (elípticos) inducidos producen simultáneamente una variación en la birrefringencia circular y en la birrefringencia lineal [Henry et. al., 1986; Celaya Salcido et. al., 1981].

Entre los dispositivos birrefringentes encontramos los siguientes ejemplos: moduladores ópticos, aisladores ópticos, filtros frecuenciales y de banda angosta, reguladores/estabilizadores de intensidad luminosa,

controladores de fase, retardadores/rotadores acromáticos, sensores birrefringentes (desplazamiento, temperatura, presión), medidores polarimétricos (RAE, RCE, etc.), demoduladores/discrimadores ópticos (convertidores FM-AM), obturadores biestables y multiestables, etc.

II.3 Presentación del problema.

El efecto Pockels [García Weidner, 1989e] puede utilizarse para modular la intensidad luminosa de un haz de luz, mediante la aplicación de un voltaje a un cristal electro-óptico. Para operar al cristal como un modulador de intensidad luminosa, se coloca a éste entre dos polarizadores P y A (ver figura 2).

Al aplicarle un campo eléctrico al cristal por medio de una fuente de voltaje, se producirá una variación en los valores del índice de refracción debido al efecto Pockels, y consecuentemente se introducirá un retardamiento Γ entre la propagación de los rayos ordinario y extraordinario; el cristal puede verse entonces como una placa retardadora controlada por voltaje. Los cambios en los valores de n pueden ser expresados como funciones lineales de las componentes del campo eléctrico $\vec{E}$ aplicado, de la siguiente manera:

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2_{v\xi}}\right) = \sum_K r_{v\xi,K} \; E_K \qquad (K = 1,2,3 = x,y,z) \;, \qquad (14)$$

donde $r_{\nu\xi K}$ es el tensor electro-óptico lineal. Utilizando ésta ecuación se puede ver que la ecuación (12) del elipsoide de índices, bajo la acción del efecto Pockels se escribe

$$\sum_{\nu}\sum_{\xi}\left[\left(\frac{1}{n_{\nu\xi}}\right)^2 + \Delta\left(\frac{1}{n_{\nu\xi}}\right)^2\right]\rho_\nu\rho_\xi =$$

$$\sum_{\zeta}\left[\left(\frac{1}{n_\zeta}\right)^2 + \sum_{K} r_{\zeta K}\ E_K\right]\rho_\zeta = 1\ , \quad (\zeta = 1,\ldots,6)\ , \quad (15)$$

o bién, desarrollando términos,

$$(n_x^{-2} + r_{1k}E_K)X^2 + (n_y^{-2} + r_{2k}E_K)Y^2 + (n_z^{-2} + r_{3k}E_K)Z^2 +$$

$$2\ [r_{4K}E_K\ YZ + r_{5K}E_K\ ZX + r_{6K}E_K\ XY] = 1\ . \quad (16)$$

Para un cristal electro-óptico de ADP (Fosfato Dihidrogenado de Amonia) el tensor electro-óptico tiene únicamente tres coeficientes no nulos. Si consideramos a un cristal con el corte ADP-45°Z, entonces la ecuación (16) del elipsoide de índices se reduce a

$$\frac{X^2 + Y^2}{n_o^2} + \frac{Z^2}{n_e^2} + 2\ r_{63}\ E_z\ XY = 1\ . \quad (17)$$

Resolviendo ésta ecuación [García Weidner y Yamada Shinoda, 1988] se obtiene el valor de los índices de refracción inducidos, en términos del voltaje aplicado V y el espaciamiento d de los electrodos. Entonces el valor correspondiente al retardamiento óptico inducido para una placa de longitud L es

$$\Gamma = \pi\ V\left(\frac{L}{d\ \lambda}\ n_o^3\ r_{63}\right)\ . \quad (18)$$

En general para cualquier cristal con cualquier orientación cristalográfica se obtendrá una expresión similar. Siendo los subíndices DC y AC las Componentes Directa y Alterna del voltaje aplicado, entonces si $V = v(t) = v_{DC} + v_{AC}(t)$, se puede escribir

$$\Gamma(t) = \pi \frac{v(t)}{V_\pi} = \pi \frac{v_{DC} + v_{AC}(t)}{V_\pi} , \qquad (19)$$

donde V_π es una constante expresada en volts denominada voltaje de media onda, el cual induce un retardamiento $\Gamma_\pi = 180°$.

Debido a un fenómeno de interferencia óptica, si al modulador (figura 2) le incide una intensidad luminosa I, las variaciones en el retardamiento $\Gamma(t)$ son convertidas a variaciones $I'(t)$ en la intensidad luminosa transmitida. La transmitancia en intensidad T del modulador, i.e. la razón entre su intensidad unitaria incidente I y su intensidad emergente I', queda determinada por

$$T = \frac{I'}{I} = \cos^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cos^2(\psi_A) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \cos^2(\psi_A - \psi_F) . \qquad (20)$$

Para optimizar el rango dinámico del modulador, se escoge $\psi_F = 45°$ y $\psi_A = 0°$ ó $90°$, con lo que obtenemos dos ecuaciones equivalentes para la transmitancia T

$$T_{(\parallel,\otimes)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos(\Gamma) , \qquad (21)$$

donde el signo superior (+) es para el subíndice ($\parallel$) y el signo inferior (-) para el segundo subíndice ($\otimes$). La curva de transmitancia $T_\otimes$ aparece graficada en la figura 3, y en ella se

aprecia claramente la relación no lineal entre la señal electrónica de entrada (el voltaje $v(t)$ o el retardamiento inducido $\Gamma(t)$) y la señal óptica de salida (intensidad luminosa modulada $I'(t)$). En realidad, debido a que no existen detectores optoelectrónicos que puedan seguir las variaciones instantáneas de la intensidad luminosa (~ 10^{15} Hz), se puede considerar a este modulador como un transductor, para la conversión de una señal en forma de energía eléctrica, a una señal en forma de energía óptica.

En general la señal de modulación $v(t)$ se puede descomponer en una suma de componentes armónicos de Fourier, por lo que cada uno de dichos componentes los podemos escribir como

$$\Gamma(t) = \frac{\pi}{V_\pi}\,[v_{DC} + v_{AC}\ \mathrm{sen}(\Omega t + \Omega')] = \Gamma_{DC} + \Gamma_{AC}\ \mathrm{sen}(\Omega t + \Omega') \quad .(22)$$

Sustituyendo esta ecuación en las expresiones de la transmsitancia (21) y utilizando las ecuaciones de Jacobi, obtenemos las transmitancias en términos de sus series de Fourier,

$$\begin{aligned} T_{(\parallel,\otimes)} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\cos\{\Gamma_{DC} + \Gamma_{AC}\ \mathrm{sen}(\Omega t + \Omega')\} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\cos(\Gamma_{DC})\ J_0(\Gamma_{AC}) \\ &\pm \cos(\Gamma_{DC}) \sum_{\eta=1}^{\infty} J_{2\eta}(\Gamma_{AC})\ \cos 2\eta(\Omega t + \Omega') \\ &\pm \mathrm{sen}(\Gamma_{DC}) \sum_{\eta=1}^{\infty} J_{2\eta-1}(\Gamma_{AC})\ \mathrm{sen}(2\eta - 1)(\Omega t + \Omega') \ , \end{aligned} \quad (23)$$

donde $J_{\eta}(\Gamma_{AC})$ es una función Bessel de primera clase, orden η y argumento (Γ_{AC}).

En la ecuación (23) se puede apreciar claramente la aparición de armónicos, productos de intermodulación y otras componentes indeseadas en la señal de salida. Si se utilizan varios cristales ópticos orientados adecuadamente (i.e. un modulador de varias etapas), se puede intentar obtener otras curvas de transmitancia T, que permitan operar al dispositivo con un mayor grado de linealidad en su respuesta. Existe reportada [Hsu et.al., 1947] una fórmula general de intensidad luminosa para cuando se tienen η retardadores colocados en serie (la cual para $\eta=3$ se reduce a las ecuaciones (48) y (49) del Capítulo IV). Como se puede apreciar de ésta fórmula general, la curva de transmitancia siempre estará dada por una función trigonométrica (periódica). Esto se puede verificar también utilizando el análisis de la respuesta impulso (Capítulo III.1) y con la Esfera de Poincaré (Capítulo III.2).

Por lo tanto, el problema en el diseño de un modulador lineal (necesariamente multietapa) o para cualquier dispositivo birrefringente que contenga varios retardardadores, radica en que aún conociendo la fórmula general de su transmitancia, son muchas las variables involucradas (relacionadas mediante funciones trigonométricas). De hecho se puede demostrar que una misma función de transmitancia T, se puede obtener mediante

arreglos físicamente distintos en el laboratorio, esto es, matemáticamente el problema presenta solución múltiple. Se han reportado [Ammann, 1967; Ammann y Yarborough 1968; Yarborough y Amman 1968] algunos diseños de moduladores multietapa con respuesta lineal, solo que para obtener una alta linealidad en su respuesta requieren de muchas etapas ($\eta > 3$), lo cual es poco práctico. Estos diseños fueron obtenidos utilizando el único método general (Respuesta Impulso) que se conoce para el diseño de dispositivos birrefringentes.

Se hace necesario entonces, estudiar sistemáticamente el comportamiento óptico de los elementos birrefringentes involucrados (polarizadores, retardadores y rotadores), para inferir de este estudio algún criterio de diseño para dispositivos birrefringentes, y una posible solución al presente problema con un modulador de tres etapas.

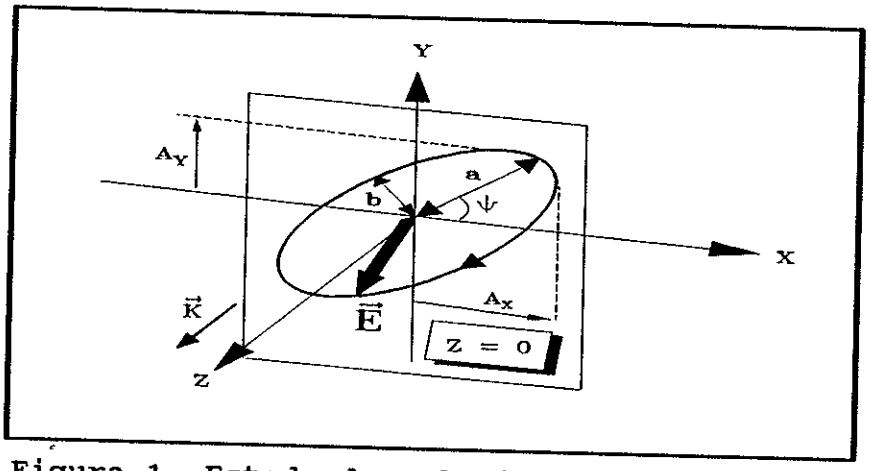


Figura 1. Estado de polarización (derecho).

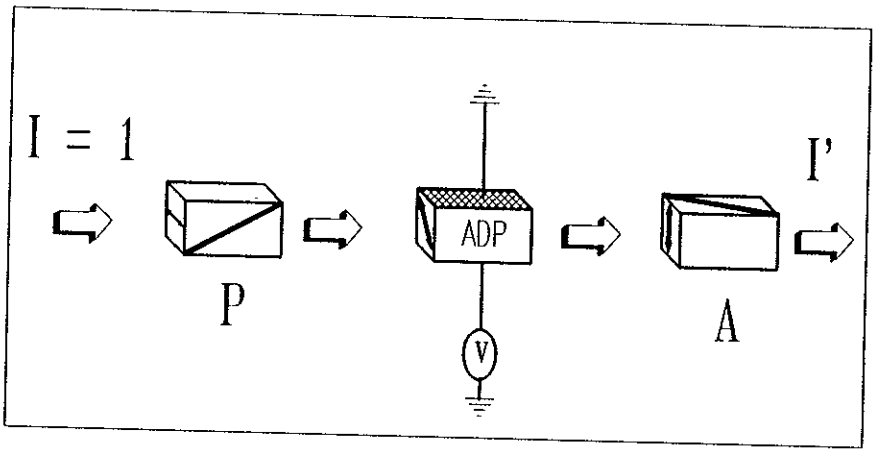


Figura 2. Modulador convencional.

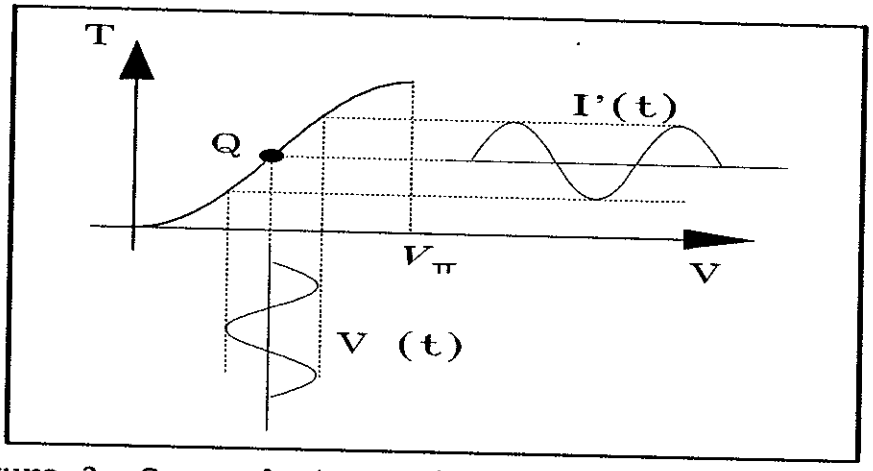


Figura 3. Curva de transmitancia para el modulador convencional.

III. METODOS PARA EL ANALISIS Y SINTESIS DE DISPOSITIVOS BIRREFRINGENTES.

III.1 Método convencional (Respuesta Impulso).

En esta sección se describen los fundamentos del único método general que se conoce para el diseño de dispositivos birrefringentes, desarrollado por Ammann [1971] aproximadamente durante el período 1964-1971. Este método (SOBN Synthesis of Optical Birefringent Networks) se basa en la respuesta impulso de un dispositivo birrefringente y una de sus limitantes, es el hecho de que no incluye en su planteamiento el uso de elementos rotadores (con actividad óptica). También se presenta una solución a nuestro problema de diseño por este método, la cual se encuentra reportada en la literatura [Ammann y Yarborough, 1968].

III.1.1 Análisis.

Supongamos que un punto luminoso (representado por una delta de Dirac $\delta(t)$) emergente de un polarizador incide sobre una placa retardadora como lo ilustra la figura 4. Entonces a la salida de la placa tendremos dos impulsos separados por un retardamiento temporal $\tau = \tau_y - \tau_x$ y orientados espacialmenta a lo largo de los ejes rápido y lento de la misma. Si colocamos un analizador después de la placa retardadora, veremos que finalmente se transmiten dos impulsos cuyas amplitudes C_n dependen de los ángulos que hacen el eje rápido y los ejes de

transmisión de los polarizadores, mientras que su separación τ depende del retardamiento birrefringente introducido por la placa.

Si se tienen η cristales colocados en serie se obtendrán 2η impulsos a la salida. Si los η cristales son iguales, se obtendrán únicamente $\eta + 1$ impulsos igualmente espaciados, ya que algunos de éllos se superponen en el tiempo. Para simplificar el análisis se considera este último caso, en el cual todos los cristales tienen una misma longitud L. Entonces variando el retardamiento Γ podemos modificar la separación τ y variando las orientaciones ψ_η, modificamos la amplitud (peso) de los impulsos, ya que

$$\Gamma = \tau \ \omega = \Delta n \ L \ k. \tag{24}$$

Supongamos una función de transmitancia en amplitud $\mathcal{A}(t)$ arbitraria como la que aparece en la figura 5. Esta puede ser aproximada por la función muestreada $C(t)$ consistente en un tren de impulsos lo suficientemente largo y cuyas separaciones τ son lo suficientemente pequeñas. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &\approx \sum_{\sigma=0}^{\eta} \mathcal{A}(t) \ \delta(t - \sigma\tau) = C(t) \\ &= C_0\delta(t) + C_1\delta(t-\tau) + C_2\delta(t-2\tau) + \ldots + C_\eta\delta(t-\eta\tau), \end{aligned} \tag{25}$$

y su transformada de Fourier será una función periódica de la forma

$$\mathcal{A}(\omega) = \mathcal{F}\{\ \mathcal{A}(t)\ \} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\eta} C_\sigma\ \delta(t - \sigma\tau)\ e^{-j\omega t}\ dt$$

$$\approx C(\omega) = C_0 + C_1 e^{-j\omega\tau} + \ldots + C_\eta e^{-j\eta\omega\tau}$$

$$= C(\Gamma) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\eta} C_\eta e^{-j\eta\Gamma}, \tag{26}$$

la cual representa a un sistema causal, i.e. un sistema que no puede proporcionar una salida antes de tener una entrada. Como se ve de la figura 4, los valores de C_η dependen de los valores angulares de ψ_η. Se tiene entonces, que la curva de transmitancia $\mathcal{A}(t)$ de un dispositivo birrefringente, puede ser representada por un tren finito de impulsos y su forma será función de la diferencia de ángulos $\Delta\psi_\eta = \psi_\eta - \psi_{\eta-1}$ de los elementos adyacentes, ésto es, $\mathcal{A}(t) = f(\Delta\psi_\eta)$. Idealmente, de acuerdo al Teorema de Muestreo, para recuperar una función $\mathcal{A}(t)$ de banda limitada por una frecuencia angular $\omega_M = 2\pi f_M$, deberá ser muestreada en el intervalo de Nyquist, esto es con un período (máximo) de muestreo

$$\tau = \left(\Delta n\ \frac{L}{c}\right) \leq \left(\frac{1}{[2f_M]}\right)\ . \tag{27}$$

Uno de los principales resultados de este método es el hecho de que para un arreglo determinado de placas retardadoras, se puede anticipar su curva de transmitancia en amplitud $\mathcal{A}(\Gamma)$, ya que ésta se representa por una función periódica que es proporcional a la transformada de Fourier de la diferencia de ángulos $\mathcal{A}(\Gamma) \approx \mathcal{F}\{f(\Delta\psi_\eta)\}$.

III.1.2 Síntesis.

El método se puede dividir en las siguientes dos etapas de procedimiento:

i) Se propone la función de transmitancia en amplitud $\mathcal{A}(\Gamma)$ deseada, expresada por una serie exponencial de Fourier para un sistema causal (ecuación 26). Esto requiere de un meticuloso procedimiento de ajuste numérico, ya que por un lado, para el caso de un modulador de intensidad luminosa, la función de transmitancia buscada deberá estar expresada en términos de la intensidad luminosa $T(\Gamma)=\mathcal{A}(\Gamma)\cdot\mathcal{A}^{*}(\Gamma)$; y por otra parte, solo se tiene un número finito de coeficientes C_{η}. Si la función $\mathcal{A}(\Gamma)$ propuesta se desea aproximar por $(\eta+1)$ términos exponenciales, o equivalentemente por

$$\mathcal{A}(\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\eta+1}{2} & \text{términos cosenoidales (para } \eta \text{ non)} \\ \dfrac{\eta}{2}+1 & \text{términos cosenoidales (para } \eta \text{ par)} \end{cases} , \qquad (28)$$

se requieren físicamente de η cristales. Evidentemente, uno de los criterios de diseño es el utilizar la menor cantidad de cristales posibles, con lo que se presenta la limitante de que la aproximación de $\mathcal{A}(\Gamma)$ por el correspondiente tren de impulsos sea muy pobre.

ii) Utilizando un procedimiento matricial sumamente laborioso, se encuentran las proyecciones en dos direcciones ortogonales (X y Y) de cada uno de los impulsos $\delta(t-\eta\tau)$ para

cada elemento birrefringente a lo largo de todo el sistema óptico, partiendo del último elemento hacia el primero. Durante este proceso se encuentra para cada elemento, la orientación de sus ejes rápidos y el valor de sus retardamientos, así como las orientaciones de los polarizadores de entrada y salida. Cabe mencionar que esta segunda etapa involucra muchas operaciones algebráicas con vectores y matrices complejas. La mayor parte de estos cálculos deben resolverse analíticamente para cada caso particular, incluso cuando se trate de diseñar a un mismo tipo de dispositivo, como lo serían dos retardadores acromáticos distintos, etc.

Ammann estudió el diseño de un modulador lineal de etapa múltiple [Ammann y Yarborough, 1968]. En su trabajo resolvió el problema para el càso de $\eta = 9$ cristales electro-ópticos lo cual constituye un dispositivo poco práctico. Sin embargo en este mismo trabajo, reporta la solución para un modulador de tres etapas, al cual en lo sucesivo lo denominaremos modulador de Ammann. De hecho, cada una de las tres etapas esta constituída por un cristal electroóptico y una placa con birrefringencia natural de retardamiento constante. En la figura 6 se muestra este modulador, el cual consta de tres cristales electro-ópticos (1,2,3) y tres placas retardadoras ($\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$), colocadas entre dos polarizadores (P y A), de tal manera que éste modulador requiere de un total de 6 cristales. Los valores de sus parámetros aparecen en la Tabla VI (Capítulo IV).

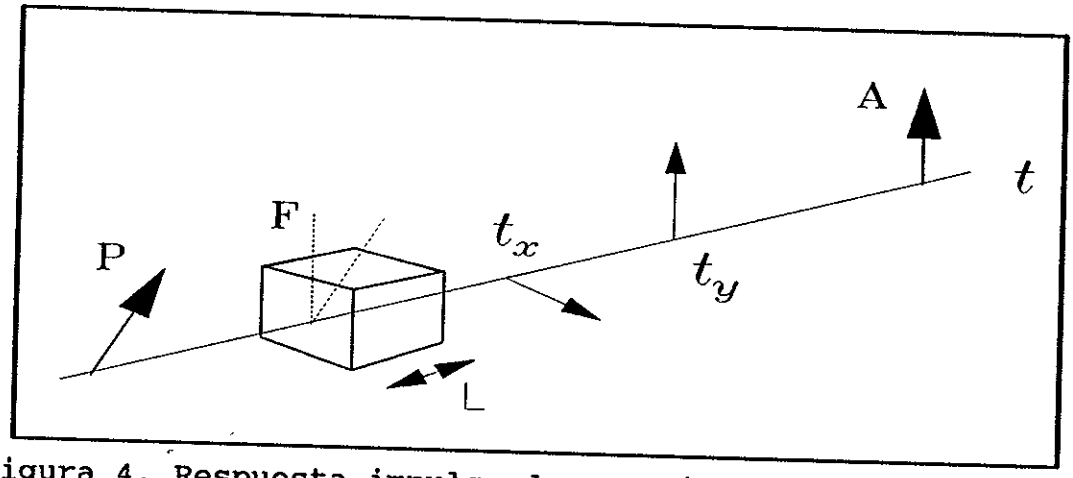


Figura 4. Respuesta impulso de un cristal birrefringente.

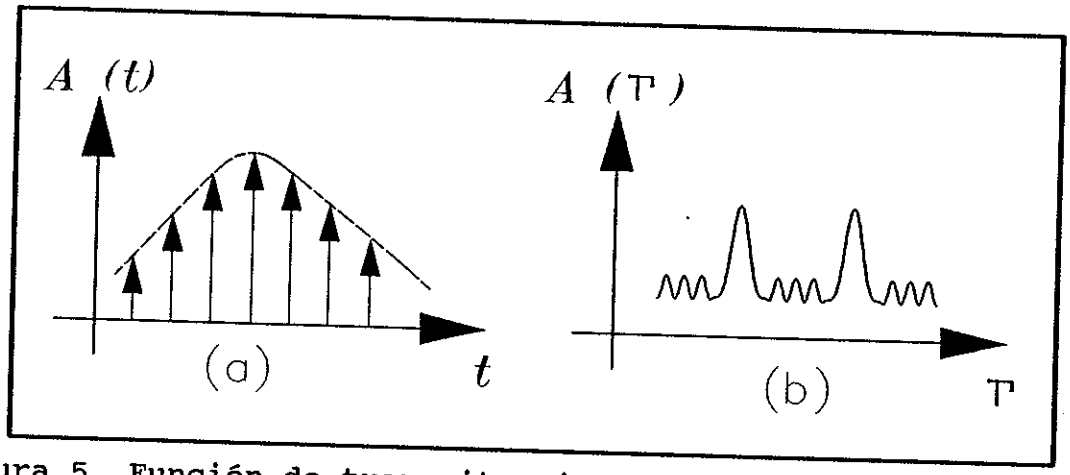


Figura 5. Función de transmitancia en amplitud para un dispositivo birrefringente: (a) en el tiempo, (b) en la frecuencia.

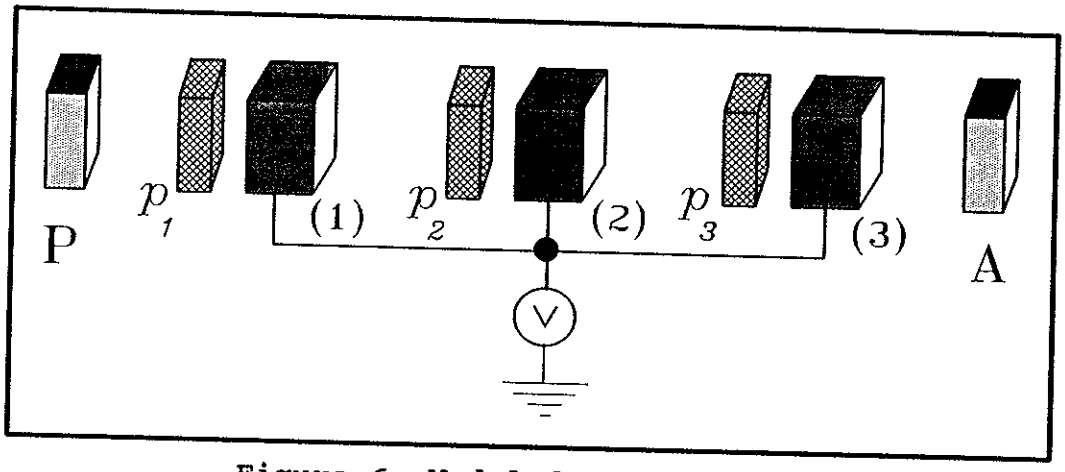


Figura 6. Modulador de Ammann.

III.2 Método de la Esfera de Poincaré.

Durante el estudio de dispositivos birrefringentes, se presentan problemas relacionados con el paso de luz polarizada a través de una serie de polarizadores y placas cristalinas. En estos casos, frecuentemente se hace necesario no solo el evaluar las características del estado de polarización, sino también el visualizar la evolución del estado de polarización dentro del sistema óptico, para poder tener una mayor comprensión acerca de las propiedades de los elementos ópticos involucrados, y de esta manera, poder replantear y solucionar estos problemas.

Aunque algunos métodos analíticos poderosos basados en el Cálculo de Jones y Mueller [Kliger et al. 1990; Theocaris y Gdoutos, 1979] han sido desarrollados para el estudio de los fenómenos de polarización, éstos no nos proporcionan ninguna información acerca de lo que ocurre dentro del sistema óptico. Lo contrario ocurre al utilizar el método geométrico propuesto por Poincaré. En su trabajo, Poincaré [1892] fué el primer investigador que introdujo la representación del estado de polarización sobre un plano complejo y posteriormente, mediante una proyección estereográfica, estableció un mapeo de cada punto en el plano a una esfera cuyos puntos estaban en correspondencia unívoca con todos los diferentes estados de polarización posibles.

Desde entonces, la denominada Esfera de Poincaré ha sido utilizada por numerosos investigadores como una herramienta auxiliar, para el estudio cualitativo de problemas relacionados con la óptica de cristales (las referencias [Theocaris y Gdoutos, 1979; Ramachandran y Ramaseshan, 1961] incluyen una extensa bibliografía concerniente a estos trabajos). Aunque en algunos de estos trabajos se han formulado expresiones matemáticas para analizar cuantitativamente estos problemas, éstas se aplican únicamente a los sitemas o fenómenos ópticos para los que fueron deducidas. Por ello, resulta muy conveniente el contar con ecuaciones de carácter general que nos permitan el uso de la Esfera de Poincaré en los problemas de la óptica de cristales.

Con el advenimiento de la tecnología de fibras ópticas y de óptica integrada, se ha introducido un método equivalente de la Esfera de Poincaré, basado en las ecuaciones de modos acoplados y el formalismo de la teoría de grupos [Ulrich, 1977; Ulrich y Simon, 1979; Chinn, 1989; Takenaka 1973; Korotky, 1986], pero sus expresiones matemáticas no pueden ser extrapoladas fácilmente a la óptica de cristales; es importante resaltar que los fenómenos de propagación y polarización optica en guías de onda, son diferentes a la fenomenología que ocurre en los cristales ópticos [Morales Magallanes, 1990]. También, algunas representaciones planares de la esfera [Kliger et al. 1990; Theocaris y Gdoutos, 1979; Theocaris, 1979; Theocaris 1980; Okoshi, 1986; Tedjojuwono et al., 1989], así como otros modelos

estadísticos [Brosseau,1991] o matemáticos tales como los Quaterniones [Pellat-Finet, 1990; 1991a; 1991b] han sido reportados, pero las ecuaciones algebráicas deducidas en esta tésis son mucho más sencillas y pueden ser programadas fácilmente en lenguaje computacional para ser visualizadas tanto en modelos bidimensionales como tridimensionales [García Weidner, 1992a]. Estas ecuaciones nos permiten evaluar la intensidad luminosa transmitida por un polarizador, así como el estado de polarización $\mathcal{EP}'$ que emerge de un retardador óptico (lineal o circular) en términos del estado de polarización inicial $\mathcal{EP}$ que incide en el retardador. Esta última acción puede ser representada por una trayectoria geométrica sobre la Esfera de Poincaré, y corresponde a una rotación del punto $\mathcal{EP}$ hacia el punto $\mathcal{EP}'$; el valor angular de esta rotación corresponde al valor del retardamiento inducido. El comportamiento de un tren de retardadores se obtiene al concatenar las trayectorias producidas por cada retardador, y tal como se describe más adelante, de acuerdo a la manera en la cual éstas son concatenadas, se pueden construir dos tipos de trayectorias: las trayectorias aisladas y las reales.

Las ecuaciones paramétricas qué se deducen en ésta sección, pueden aplicarse (en forma general) para el análisis y diseño de una amplia variedad de dispositivos birrefringentes.

III.2.1 Descripción del estado de polarización en la Esfera de Poincaré.

Cualquier estado de polarización (figura 1) puede ser totalmente caracterizado mediante 4 cantidades físicamente medibles conocidas como el Vector de Stokes $\overline{S} = (S_0, S_1, S_2, S_3)$ [Kliger et al. 1990; Theocaris y Gdoutos, 1979], cuyos elementos son:

$$\begin{aligned} S_o &= A_x^2 + A_y^2 &&= I \\ S_1 &= A_x^2 - A_y^2 &&= S_o \cos 2\epsilon \cos 2\psi \\ S_2 &= 2A_x A_x \cos\Gamma &&= S_o \cos 2\epsilon \sin 2\psi \\ S_3 &= 2A_x A_y \sin\Gamma &&= S_o \sin 2\epsilon . \end{aligned} \tag{29}$$

El primer elemento S_o representa la intensidad luminosa I del haz óptico polarizado. Una fuente de luz emite trenes de onda polarizadas durante aproximadamente 10^{-8} segundos. Si las ondas guardan una relación de fase constante durante períodos de tiempo fácilmente medibles en el laboratorio (intensidad promedio), tendremos luz totalmente polarizada. Aunque la Esfera de Poincaré puede ser usada para luz parcialmente polarizada, en el presente trabajo consideraremos que los haces ópticos tienen un grado de polarización V del 100%, donde

$$V = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S_o^2}} . \tag{30}$$

Entonces los parámetros de Stokes no son independientes y cumplen con

$$S_o^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 . \tag{31}$$

La Esfera de Poincaré puede ser considerada como la representación geométrica de los parámetros de Stokes (ecuación 31), cuyas componentes S_1, S_2, S_3 expresan las coordenadas Cartesianas de un punto M sobre la esfera (figura 7). Esta es una esfera de radio S_o, y si normalizamos el vector para una intensidad luminosa unitaria ($S_o = 1$), obtendremos una esfera unitaria. Entonces, cualquier estado de polarización posible puede ser representado por un punto M sobre la Esfera de Poincaré y puede ser definido tanto por sus coordenadas Cartesianas M (S_1, S_2, S_3), como por sus dos coordenadas angulares esféricas M (2ψ, 2ϵ), denominadas longitud y latitud; éstas últimas corresponden a los valores dobles de ψ y ϵ. El estado de polarización dibujado en la figura 1 corresponde al punto M en la figura 7.

De acuerdo a la convención de signos adoptada [Hauge et. al., 1980], las direcciones positivas de los ángulos 2ψ y 2ϵ están ilustradas en la figura 7, y los estados de polarización derechos deberán cumplir con $\operatorname{sen}\epsilon > 0$, $S_3 > 0$ y $\operatorname{sen}\Gamma > 0$. Entonces las siguientes características de la Esfera de Poincaré pueden ser observadas:

i) Todos los estados de polarización lineal ($0 \leq 2\psi \leq 2\pi, 0$) están sobre el ecuador. Los puntos H (0, 0) y V (π, 0) son las

polarizaciones lineales horizontal y vertical, mientras que los puntos p y q representan polarizaciones lineales con $\psi = +45°$ y $\psi = -45°$ respectivamente.

ii) Todas las polarizaciones elípticas derechas están representadas en el hemisferio norte, mientras que cada punto en el hemisferio sur representa polarizaciones elípticas izquierdas. El polo norte R $(2\epsilon = \pi/2)$ corresponde a la polarización circular derecha, y el polo sur L $(2\epsilon = -\pi/2)$ representa a la polarización circular izquierda.

iii) Haces ópticos con estados de polarización ortogonales, esto es, con elipticidades opuestas y cuyos ángulos azimutales difieren físicamente por $(\pi/2)$, están representados por puntos diametralmente opuestos sobre la esfera, i.e. los puntos p y q, o R y L.

iv) Los estados de polarización cuyas razones de amplitud son constantes $(\alpha = cte)$ están representados por círculos paralelos que tienen a los puntos H (0,0) y V $(\pi, 0)$ como polos. Utilizando trigonometría esférica se puede demostrar fácilmente que para un estado de polarización representado por el punto M $(2\psi, 2\epsilon)$, su valor angular α es igual a la distancia angular (medida sobre un círculo máximo) entre éste punto M y el origen H (0,0).

v) Los puntos que están en el mismo paralelo $(2\epsilon = cte)$ representan todos los posibles estados de polarización elípticos con la misma elipticidad pero diferentes inclinaciones azimutales 2ψ.

vi) Alternativamente, los puntos que están sobre el mismo meridiano $(2\psi = cte)$ representan a todos los estados de polarización elípticos que tienen la misma inclinación azimutal pero diferentes elipticidades 2ϵ.

III.2.2 Ecuaciones paramétricas de los elementos birrefringentes y su representación en la Esfera de Poincaré.

La acción de un elemento óptico que transforma a un estado de polarización incidente en un estado de polarización emergente determinado, puede ser definida como una trayectoria geométrica sobre la Esfera de Poincaré, gobernada por una ecuación paramétrica. Si un tren de elementos ópticos son usados, la salida de un elemento intermedio se convierte en la entrada del próximo elemento. Para poder evaluar estas trayectorias tomaremos a la dirección del punto H (0, 0) como el origen del sistema de coordenadas angulares esféricas. Sin embargo, esta dirección puede ser fijada con otra orientación en el momento de hacer algún montaje experimental en el laboratorio. En nuestro procedimiento consideraremos que los elementos ópticos son ideales, para los cuales los coeficientes de transmitancia en

intensidad son unitarios, i.e. no existen pérdidas de atenuación (coeficientes de absorción nulos) ni pérdidas de Fresnel (coeficientes de reflexión nulos). Estos efectos eventualmente se pueden hacer pequeños utilizando materiales ópticos apropiados, como películas antirreflectoras sobre las placas cristalinas [Yeh, 1979]. Trataremos únicamente con tres elementos ideales de polarización: un polarizador lineal, un retardador lineal, y un retardador circular. Cualquier componente de polarización utilizado en óptica de cristales, tales como un polarizador elíptico, un polarizador dicroico, un retardador elíptico, o un dispositivo de sombreado (half-shadow), puede ser representado por una combinación de éstos tres elementos ideales. Específicamente, las ecuaciones paramétricas para un polarizador y para un rotador, pueden ser deducidas directamente por otros medios, pero para mantener consistencia en el procedimiento, son obtenidas utilizando el Cálculo de Stokes-Mueller.

Supongamos que un haz óptico totalmente polarizado con intensidad unitaria y caracterizado por el Vector de Stokes $\overline{S}$, incide en cierto elemento óptico representado por su Matriz de Mueller $\tilde{M}$. Entonces, el Vector de Stokes $\overline{S}'$ del haz óptico emergente puede ser escrito como

$$\overline{S}' = \tilde{M}\ \overline{S}. \tag{32}$$

Utilizaremos ésta última ecuación con las Matrices de Mueller apropiadas para poder evaluar la acción de los tres elementos ideales de polarización mencionados con anterioridad.

i) Polarizador Ideal. Un polarizador ideal estará representado sobre la Esfera de Poincaré por las coordenadas $P(2\psi_P, 2\epsilon_P)$, correspondientes al estado de polarización emergente que éste produce para cualquier haz óptico que le incida. Un polarizador o analizador elíptico puede ser construido mediante la combinación apropiada de un polarizador lineal y un retardador lineal.

Supongamos que un haz óptico unitario cuyo estado de polarización está caracterizado por el vector de Stokes $\overline{S}$ y por el punto M $(2\psi, 2\epsilon)$, incide sobre un polarizador representado por $\overline{S}'$ y $P(2\psi_P, 2\epsilon_P)$. Entonces, sustituyendo la ecuación (29) y a la matriz de Mueller correspondiente a un polarizador lineal [Kliger et.al., 1990] en la ecuación (32), obtenemos

$$\begin{bmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\psi_P & \operatorname{sen} 2\psi_P & 0 \\ \cos 2\psi_P & \cos^2 2\psi_P & \frac{\operatorname{sen} 4\psi_P}{2} & 0 \\ \operatorname{sen} 2\psi_P & \frac{\operatorname{sen} 4\psi_P}{2} & \operatorname{sen}^2 2\psi_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ \cos 2\epsilon & \cos 2\psi \\ \cos 2\epsilon & \operatorname{sen} 2\psi \\ \operatorname{sen} 2\epsilon & \end{bmatrix} . \quad (33)$$

Entonces la transmitancia en intensidad T = S_0' del polarizador, queda determinada por

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,[\mathrm{sen}\,2\epsilon_P\ \mathrm{sen}\,2\epsilon + \cos 2\epsilon_P\ \cos 2\epsilon\ \cos 2(\psi - \psi_P)]. \qquad (34)$$

Este resultado puede ser verificado utilizando trigonometría esférica [Ramachandran y Ramaseshan, 1961], y utilizando algunas identidades trigonométricas se puede demostrar que ésta ecuación puede expresarse de la siguiente manera:

$$T = \cos^2 \frac{<\overline{PM}>}{2}, \qquad (35a)$$

donde $<\overline{PM}>$ es la longitud del arco que une a los puntos P y M medida sobre un círculo máximo en la Esfera de Poincaré. Para un polarizador lineal, la ecuaión (34) se reduce a

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \cos 2\epsilon\ \cos(2\psi_P - 2\psi). \qquad (35b)$$

Dado que muchos dispositivos birrefringentes operan colocados entre polarizadores paralelos o perpendiculares, y tomando en cuenta el hecho de que sin perder generalidad, podemos fijar la dirección del polarizador de entrada como nuestro punto origen H (0,0), entonces se observa de esta última ecuación que la función de transmitancia en intensidad, seguirá (salvo un factor constante) la forma de los valores de las coordenadas Cartesianas de los puntos M proyectadas a lo largo del eje S_1. Este resultado es importante, ya que nos ayuda a visualizar la intensidad transmitida (esperada) de un dispositivo birrefringente.

ii) Rotador Ideal. Un retardador circular ideal que exhibe actividad óptica, i.e. que induce una rotación angular γ al estado de polarización incidente, está representado por el eje que une a los polos norte-sur de la Esfera de Poincaré ($\gamma > 0$ para un cristal dextro-rotatorio). Un haz óptico incidente representado por el punto M $(2\psi, 2\epsilon)$ es transformado por el rotador en un haz emergente representado por el punto M' $(2\psi', 2\epsilon')$, cuyas coordenadas angulares pueden ser obtenidas utilizando la ecuación (32). De las ecuaciones (29) se observa que

$$\text{sen } 2\epsilon' = S_3' \tag{36}$$

$$\tan 2\psi' = \frac{S_2'}{S_1'}, \tag{37}$$

mientras que la matriz de Mueller para un retardador circular [Kliger et. al., 1990] está dada por:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\gamma & \text{sen } 2\gamma & 0 \\ 0 & -\text{sen } 2\gamma & \cos 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Entonces, sustituyendo a las ecuaciones (29) y (38) en la ecuación (32), y luego utilizando las ecuaciones (36) y (37), se llega a

$$2\epsilon' = 2\epsilon \tag{39a}$$

$$2\psi' = 2\psi - 2\gamma. \tag{39b}$$

Las ecuaciones (39) pueden ser verificadas mediante inspección directa en la Esfera de Poincaré. Se debe tener un cuidado especial en el signo de γ cuando se esté trabajando con el efecto Faraday [Theocaris y Gdoutos, 1979].

iii) Retardador Lineal Ideal. Un retardador lineal que induce un retardamiento Γ, y que tiene su eje rápido F inclinado a un ángulo azimutal ψ_F, está representado por un eje que pasa por el centro de la Esfera de Poincaré y por el punto F $(2\psi_F, 0)$. Un retardador elíptico puede ser construído mediante la combinación apropiada de retardadores circulares y/o lineales. Nuevamente, un haz óptico incidente representado por las coordenadas M $(2\psi, 2\epsilon)$, emergerá del retardador con un estado de polarización representado por el punto M' $(2\psi', 2\epsilon')$, cuyas coordenadas pueden ser determinadas utilizando la ecuación (32); donde la matriz de Mueller [Kliger et.al., 1990] en este caso está dada por:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\psi_F + \operatorname{sen}^2 2\psi_F \cos\Gamma & \operatorname{sen} 4\psi_F \operatorname{sen}^2 \frac{\Gamma}{2} & -\operatorname{sen} 2\psi_F \operatorname{sen}\Gamma \\ 0 & \operatorname{sen} 4\psi_F \operatorname{sen}^2 \frac{\Gamma}{2} & \operatorname{sen}^2 2\psi_F + \cos^2 2\psi_F \cos\Gamma & \cos 2\psi_F \operatorname{sen}\Gamma \\ 0 & \operatorname{sen} 2\psi_F \operatorname{sen}\Gamma & -\cos 2\psi_F \operatorname{sen}\Gamma & \cos\Gamma \end{bmatrix}. \qquad (40)$$

Sustituyendo las ecuaciones (29) y (40) en la ecuación (32), y luego usando la ecuación (36), obtenemos

$$\operatorname{sen} 2\epsilon' = \operatorname{sen} 2\epsilon \cos\Gamma + \cos 2\epsilon \operatorname{sen} 2(\psi_F - \psi) \operatorname{sen}\Gamma, \qquad (41a)$$

mientras que utilizando la ecuación (37), se encuentra la otra coordenada esférica

$$\tan\ 2\psi' = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}\ , \tag{41b}$$

donde,

$$\mathcal{N} = \operatorname{sen} 4\psi_F\ \cos 2\psi\ \operatorname{sen}^2\frac{\Gamma}{2} + \cos 2\psi_F\ \tan 2\epsilon\ \operatorname{sen}\Gamma$$
$$+(\operatorname{sen}^2 2\psi_F + \cos^2 2\psi_F\ \cos\Gamma)\ \operatorname{sen} 2\psi \tag{41c}$$

$$\mathcal{D} = \operatorname{sen} 4\psi_F\ \operatorname{sen} 2\psi\ \operatorname{sen}^2\frac{\Gamma}{2} - \operatorname{sen} 2\psi_F\ \tan 2\epsilon\ \operatorname{sen}\Gamma$$
$$+(\cos^2 2\psi_F + \operatorname{sen}^2 2\psi_F\ \cos\Gamma)\ \cos 2\psi\,. \tag{41d}$$

Las ecuaciones (41) fueron reportadas recientemente en la literatura [García Weidner, 1992a] y nos permiten estudiar el comportamiento de un modulador electro-óptico. Resulta muy conveniente utilizar una notación abreviada para éstas ecuaciones, definidas por

$$\epsilon' = f(\psi,\epsilon;\psi_F,\Gamma) \tag{42a}$$

$$\psi' = f(\psi,\epsilon;\psi_F,\Gamma), \tag{42b}$$

en lugar de las ecuaciones (41a) y (41b) respectivamente. Por ejemplo, supóngase un retardador cuyo eje rápido F1 está inclinado a un ángulo ψ_{F1}, al cual le incide un haz luminoso representado por el punto $i0$ = H = (0°, 0°); y que se desea encontrar al estado de polarización emergente representado por $i1 = (2\psi_{i1},\ 2\epsilon_{i1})$ debido al retardamiento inducido Γ_1. Entonces, las ecuaciones correspondientes a las relaciones (41a) y (41b) son expresadas como

$$\epsilon_{i1} = f(0°,0°;\psi_{F1},\Gamma_1) \tag{43}$$

$$\psi_{i1} = f(0°, 0°; \psi_{F1}, \Gamma_1), \tag{44}$$

las cuales respectivamente representan

$$\begin{aligned} \text{sen } 2\epsilon_{i1} &= \text{sen } 0° \cos\Gamma_1 + \cos 0° \text{ sen } 2(\psi_{F1} - 0°) \text{ sen}\,\Gamma_1 \\ &= \text{sen } 2\psi_{F1} \text{ sen}\,\Gamma_1 \end{aligned} \tag{45}$$

$$\tan 2\psi_{i1} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} = \frac{\text{sen } 4\psi_{F1} \text{ sen}^2 \left(\frac{\Gamma_1}{2}\right)}{\{\cos^2 2\psi_{F1} + \text{sen}^2 2\psi_{F1} \cos \Gamma_1\}} . \tag{46}$$

Estas dos últimas ecuaciones (45, 46) se utilizarán para construir las primeras trayectorias (1) de las figuras 10, 11, 17, 19 y 20.

III.2.3 Análisis.

Las ecuaciones (35), (39) y (41) pueden aplicarse para visualizar la evolución del estado de polarización así como la transmitancia en intensidad de una gran variedad de dispositivos birrefringentes. Utilizando éstas ecuaciones, se puede observar que la acción de un rotador está representada sobre la Esfera de Poincaré mediante una rotación angular γ, desde un haz óptico incidente M $(2\psi, 2\epsilon)$ hasta un haz emergente M' $(2\psi', 2\epsilon')$, alrededor del eje polar R-L; ésto se ilustra con las trayectorias "a" y "c" de la figura 8. Así mismo, se tiene que la acción de un retardador lineal está representada por la rotación angular Γ alrededor de un eje ecuatorial que surge del centro de la esfera y que pasa por el punto F $(2\psi_F, 0)$; por ejemplo, con la trayectoria "d" de la figura 8, en la cual $\Gamma = 180°$. La trayectoria "b" corresponde a un retardador

elíptico cuyo eje rápido es F_E.

Particularmente, las ecuaciones (39) y (41) nos permiten calcular las coordenadas angulares $(2\psi', 2\epsilon')$ de un estado de polarización emergente, en términos de sus valores previos $(2\psi, 2\epsilon)$ y del retardamiento inducido, esto es, son funciones paramétricas del tipo

$$\left.\begin{aligned} \psi' &= f(\psi,\epsilon,\Gamma) \\ \epsilon' &= f(\psi,\epsilon,\Gamma) \end{aligned}\right\} \quad \text{ó} \quad \left.\begin{aligned} \psi' &= f(\psi,\epsilon,\gamma) \\ \epsilon' &= f(\psi,\epsilon,\gamma) \end{aligned}\right\} \quad , \tag{47}$$

y dependiendo de la manera en que asignemos los valores iniciales de ψ y ϵ, podremos construir trayectorias aisladas o reales sobre la Esfera de Poincaré [García Weidner, 1992a].

En el primer caso, el comportamiento de un tren de placas retardadoras es descrito aislando la rotación producida por cada retardador, esto es, considerando que el retardador bajo evaluación es el único que se encuentra presente en el sistema óptico. Consecuentemente, éstas trayectorias estarán siempre formadas por una sucesión de arcos circulares (un arco para cada retardador), de tal manera que el punto final de cada arco coincide con el punto inicial del próximo arco circular.

En el segundo caso, las trayectorias reales son construidas tomando como puntos iniciales de rotación, a cada uno de la trayectoria anterior (concernientes al retardador precedente) que corresponden al mismo retardamiento inducido. Aquí, los puntos de la trayectoria están representando a los estados de polarización reales, i.e. los que físicamente están ocurriendo en el sistema óptico. En general, éstas trayectorias reales aparecen como arcos distorsionados (no circulares). Es

importante notar que de acuerdo a éstas definiciones, si el sistema óptico contiene únicamente a un solo retardador, sus trayectorias aisladas y reales serán idénticas.

III.2.3.1 Trayectorias aisladas.

Tradicionalmente, la Esfera de Poincaré ha sido utilizada como un método cualitativo de análisis [Kliger et al., 1990; Theocaris y Gdoutos, 1979], dibujando sobre su superficie las trayectorias aisladas para cada elemento óptico de un dispositivo birrefringente, i.e. el comportamiento de un montaje óptico para un valor particular de Γ o γ. Incluso algunos modelos de la esfera hechos de plástico o madera [Jerrard, 1954; Koester, 1959] han sido usados para visualizar éstas trayectorias. Las gráficas que describen a las trayectorias aisladas son muy fáciles de obtener, y es bién sabido [Kliger et al., 1990; Johnson, 1981] que no representan la evolución del estado de polarización que físicamente ocurre en el laboratorio. De hecho, éstas trayectorias solo representan adecuadamente a los estados de polarización inicial y final, y consecuentemente a los correspondientes valores iniciales y finales de la intensidad transmitida.

Para ilustrar las trayectorias, analizaremos el comportamiento de un modulador electro-óptico configurado como un filtro Solc pasa banda tipo alternado de tres etapas [Solc, 1965]; su diagrama se muestra en la figura 9, y en lo sucesivo lo denominaremos modulador de Solc. Los ejes rápidos de cada

etapa (1), (2) y (3) están representados en la Esfera de Poincaré por los puntos F1, F2 y F3 (figura 10), orientados con ángulos azimutales $\psi_{F1} = \psi_{F3} = 15°, \psi_{F2} = -15°$, y colocados entre polarizadores cruzados representados por H (0,0) y V (0,0).

Cuando un voltaje (constante) de media onda es aplicado, se induce un retardamiento constante de media onda ($\Gamma = 180°$) en las placas cristalinas y el dispositivo birrefringente actúa como un filtro de banda angosta. Normalmente, para estudiar el comportamiento de este filtro, se dibujan sus trayectorias aisladas (figura 10a) sobre la Esfera de Poincaré. Partiendo del estado de polarización inicial H(0,0), se traza un semicírculo centrado en F1 ($\Gamma_1 = 180°$ y $\psi_{F1} = 15°$ en las ecuaciones 45 y 46) hasta obtener el estado de polarización que emerge del primer retardador, el cual a su vez será el punto inicial para el segundo retardador. Posteriormente, partiendo de este último punto y aislando la trayectoria del primer retardador, se empieza a dibujar otro semicírculo centrado ahora en F2, el cual corresponde a la acción del segundo retardador y cuyo estado de polarización emergente se convierte en el punto inicial de la próxima etapa. Siguiendo el mismo procedimiento se dibuja el semicírculo correspondiente a F3 hasta alcanzar el estado de polarización V (180°,0) que emerge del dispositivo. Para obtener estas trayectorias fué necesario evaluar sucesivamente la ecuación (41), manteniendo los valores de ψ y ϵ constantes e iguales a los de los puntos iniciales en cada trazo.

Una manera sencilla de dibujar las trayectorias de la Esfera de Poincaré en una representación bidimensional, es graficándolas sobre un plano tipo mapamundi, como se ilustra en la figura 10b. Debido a que los polos norte y sur están ahora representados por líneas rectas en lugar de dos puntos, en la medida que nos alejemos del ecuador estas trayectorias planares se tornarán más distorsionadas respecto a sus contrapartes tridimensionales. Hay que notar que después de cada etapa los estados de polarización emergentes están sobre el ecuador, y deberán coincidir con sus correspondientes estados de polarización en las trayectorias reales.

Para obtener las transmitancias aisladas correspondientes (T1, T2 y T3 en la figura 9b), aplicamos la ecuación (35b) a cada etapa. Estas curvas únicamente nos muestran que en efecto, el dispositivo tendrá un máximo contraste en su transmitancia (fluctuando desde $T_{(1)}$ = 0% hasta $T_{(3)}$ = 100%). Sin embargo, no nos muestran la razón de su comportamiento como un filtro de banda angosta, así como tampoco la aparición de los bién conocidos lóbulos secundarios [Solc,1965] asociados a su transmitancia.

III.2.3.2 Trayectorias reales.

Uno de los aspectos más interesantes de contar con ecuaciones paramétricas que describan la evolución del estado de polarización sobre la Esfera de Poincaré, es que nos permiten obtener en forma directa las trayectorias reales para un sistema óptico.

Con referencia al modulador de la figura 9, asumiremos que ahora el retardamiento ya no es constante sino que toma valores que van desde $\Gamma = 0°$ hasta $\Gamma = 180°$. Esto se puede interpretar de dos formas: si el dispositivo es operado como un modulador óptico para un haz monocromático de luz, la variación en el retardamiento (Γ) representa a una función del voltaje (variable) aplicado; por otra parte, si el dispositivo es usado como filtro (con un voltaje constante aplicado), ésta variación corresponde a los diferentes valores de $\Gamma \sim \lambda^{-1}$ que serían vistos por cada longitud de onda de un haz luminoso policromático.

Para obtener las trayectorias reales del dispositivo (figura 11), usaremos nuevamente la misma ecuación (41), pero sin mantener fijos a los valores de ψ y ϵ en cada etapa. Al realizar éstos trazos, para el primer retardador siempre obtendremos el mismo resultado que para su trayectoria aislada, no siendo así para los elementos subsecuentes. Para el segundo retardador, cada uno de los puntos de la primera trayectoria

circular (concerniente al primer retardador) que experimentan un retardamiento Γ, son rotados alrededor del eje F2 por el mismo ángulo Γ, y los estados de polarización emergentes mostrarán un trazo distorsionado en lugar de los arcos circulares obtenidos en su trayectoria aislada. La misma situación ocurre con el tercer retardador.

En la figura 11, estas trayectorias están graficadas para $0 \leq \Gamma \leq 360°$ y el trazo final está marcado con puntos negros para cada Γ igual a un valor múltiplo de 30°. Se puede observar que para $-75° < \Gamma < 75°$ estos puntos permanecen cerca del origen H(0,0) describiendo un lazo curvo, y posteriormente se mueven con gran rapidez hacia el estado emergente V (180°,0); en contraste, se tiene que los puntos correspondientes en las trayectorias aisladas (circulares) son equidistantes. Utilizando la ecuación (35b), se pueden dibujar (figura 12) las transmitancias que cada retardador produciría si fuera el último elemento en el sistema óptico, de tal manera que se puede observar la evolución de la curva de transmitancia (T1 → T2) hasta que alcanza su forma final (T3). Estas curvas fueron verificadas utilizando tanto la ecuación de transmitancia del filtro [Solc, 1965], así como la ecuación general de transmitancia para un tren de retardadores [Hsu et al., 1947].

Tomando en en cuenta el hecho de que la intensidad transmitida (ecuación 35a) es proporcional a la longitud angular

entre el punto final V (180°,0) y los subsecuentes puntos $M(2\psi,2\epsilon)$ de la trayectoria sobre la Esfera de Poincaré, resulta muy simple ver como aparecen los lóbulos laterales en la figura 12. Lo mismo se aplica para entender el comportamiento del dispositivo como filtro de banda angosta; tal como se estableció en el capítulo III.2.2, este comportamiento puede visualizarse fácilmente examinando la proyección de la trayectoria final a lo largo del eje Cartesiano S_1. La forma que toman los valores de éstas coordenadas se muestran en la figura 13; de hecho, si un sistema óptico muestra un contraste máximo en su transmitancia, ésta propiedad no solo se aplica al eje S_1, sino que se puede utilizar cualquier eje arbitrario, que conecte a dos puntos diametrálmente opuestos sobre la esfera.

III.2.3.3 Teorema de equivalencia.

Las trayectorias aisladas están relacionadas con el Teorema de Equivalencia para Luz Polarizada. Este teorema [Theocaris y Gdoutos, 1979] establece (para elementos ideales sin absorción) que un sistema óptico formado por cualquier cantidad de rotadores y retardadores, es ópticamente equivalente a otro sistema óptico constituído únicamente por dos elementos: un rotador y un retardador. El término ópticamente equivelente es usado en el sentido de que para un mismo estado de polarización incidente, los estados de polarización emergentes del sistema óptico inicial y de su equivalente son idénticos. Este teorema se puede visualizar fácilmente en la Esfera de Poincaré, debido

a que para obtener cualquier estado de polarización emergente $M'(2\psi',2\epsilon')$ lo único que se nesecita es un rotador para obtener la coordenada $2\psi'$ y un retardador para obtener la otra coordenada $2\epsilon'$.

Una aplicación interesante concerniente al uso de las trayectorias aisladas y reales en el estudio del comportamiento de un dispositivo birrefringente, radica en la posibilidad de substituir al dispositivo óptico por un dispositivo equivalente, capaz de producir no tan solo el mismo estado de polarización emergente (tal como lo establece el Teorema de Equivalencia), sino también capaz de generar la misma trayectoria real (final) sobre la Esfera de Poincaré, sin tener que modificar la configuración óptica. Para ilustrar ésto, tomemos el caso de un rotador con retardamiento angular γ variable (vgr. una Celda Faraday). Entonces, para un haz óptico monocromático que incide con cualquier estado de polarización, el rotador tendrá la característica de poder producir cualquier estado de polarización emergente que tenga la misma latitud inicial (ϵ = constante).

Es bién sabido que una placa de media onda con su eje rápido orientado a un ángulo azimutal ψ_F, puede producir el intercambio entre cualquier par de estados de polarización lineales (ϵ = constante). Si construímos a éste dispositivo con una Celda Pockels, su trayectoria real se verá como la de la

línea "d" en la figura 8. Esta no es precisamente la acción del rotador (cuya trayectoria sigue el camino "c"), y para poder obtener diferentes estados emergentes que estén sobre el ecuador, necesitaríamos rotar sucesivamente la orientación ψ_F del eje rápido F. Un comportamiento similar se observaría tratando de utilizar un retardador elíptico de media onda: la trayectoria del retardador seguiría el camino "b" en lugar del camino "a" correspondiente al rotador.

Sin embargo, tenemos que si colocamos a la Celda Pockels entre dos placas de un cuarto de onda, como en la figura 9a pero excluyendo a los polarizadores, y con $\psi_{F1} = 0°$, $\psi_{F2} = 45°$, $\psi_{F3} = 90°$ y $\Gamma_1 = \Gamma_3 = 90°$, $\Gamma_2 = 2\gamma$, su trayectoria real (final) sería exáctamente la del rotator ("a" y "c") sin la necesidad de modificar la orientación ψ_F. De hecho, si el estado de polarización incidente es siempre lineal, éste modulador de tres etapas puede ser considerado como el equivalente electro-óptico de una placa de media onda giratoria (frecuentemente utilizada en elipsometría).

Consideremos el caso general de un modulador multietapa: la trayectoria real del primer retardador siempre será un círculo (cerrado). Consecuentemente, las trayectorias reales de los siguientes retardadores (y las de sus arreglos equivalentes) serán líneas cerradas. Entonces, su transmitancia (dada por la ecuación 35a) será una función periódica.

III.2.4 Síntesis.

Las ecuaciones paramétricas así como las trayectorias presentadas anteriormente, nos permiten utilizar el método de la Esfera de Poincaré no solo como un procedimiento gráfico de análisis, sino también como un procedimiento de síntesis [García Weidner, 1992b] para dispositivos birrefringentes. Un procedimento de síntesis puede dividirse en los siguientes tres pasos:

i) Especificación de los parámetros del sitema óptico. Estos son importantes para tener una comprensión clara del dispositivo bajo diseño. Es necesario identificar su comportamiento en la Esfera de Poincaré.

ii) Aproximación inicial del diseño. Utilizando las ecuaciones paramétricas se obtiene una primera aproximación del diseño graficando sobre la Esfera de Poincaré a las trayectorias aisladas correspondientes. Frecuentemente, un análisis de la evolución del estado de polarización durante el paso de la luz a través del dispositivo, resulta muy útil para sugerir intuitivamente los elementos que deben ser modificados para sintetizar la respuesta deseada, así como para introducir algunas restricciones matemáticas. Esta etapa se lleva a cabo iterativamente mediante un análisis gráfico y

cuantitativo.

iii) Optimización del diseño. Utilizando las mismas ecuaciones paramétricas de la etapa anterior, se puede optimizar al dispositivo mediante la evaluación de sus trayectorias reales así como de su curva de transmitancia. Esta optimización se obtiene al introducir restricciones matemáticas sobre su curva de transmitancia, de tal manera que ésta etapa consiste en un procedimiento escenciálmente numérico y no requiere de una mayor interacción con el análisis gráfico.

En el siguiente capítulo se muestra el diseño de un modulador electro-óptico lineal y se describen con mayor detalle los tres pasos anteriores. Resulta interesante notar que con el método convencional de la respuesta impulso [Ammann, 1971], se requiere manipular analíticamente a un conjunto particular de ecuaciones para cada dispositivo bajo diseño; mientras que el método de la Esfera de Poincaré utiliza siempre las mismas ecuaciones paramétricas, las cuales son resueltas numéricamente empleando programas de computadora.

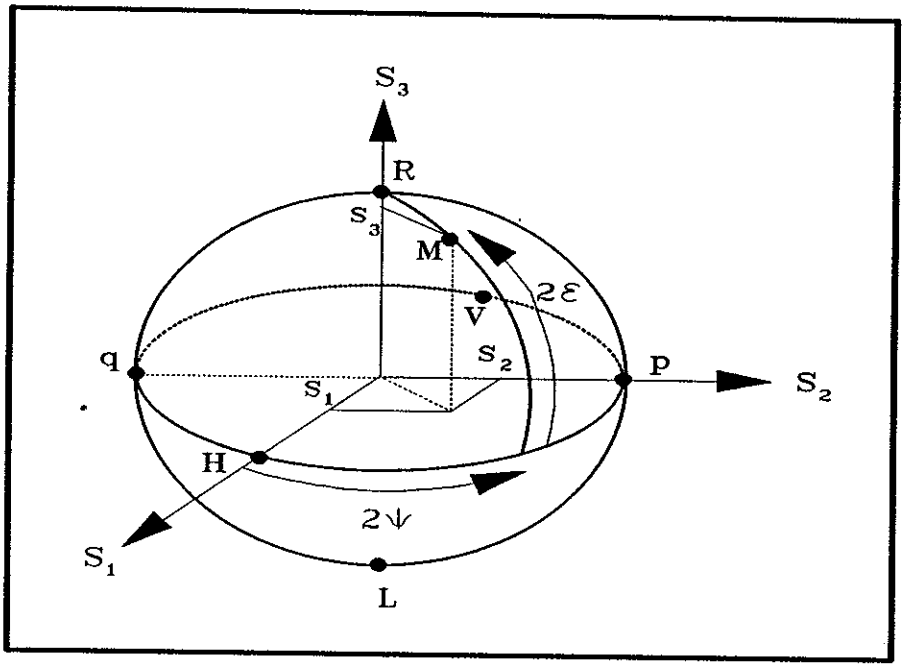


Figura 7. Esfera de Poincaré.

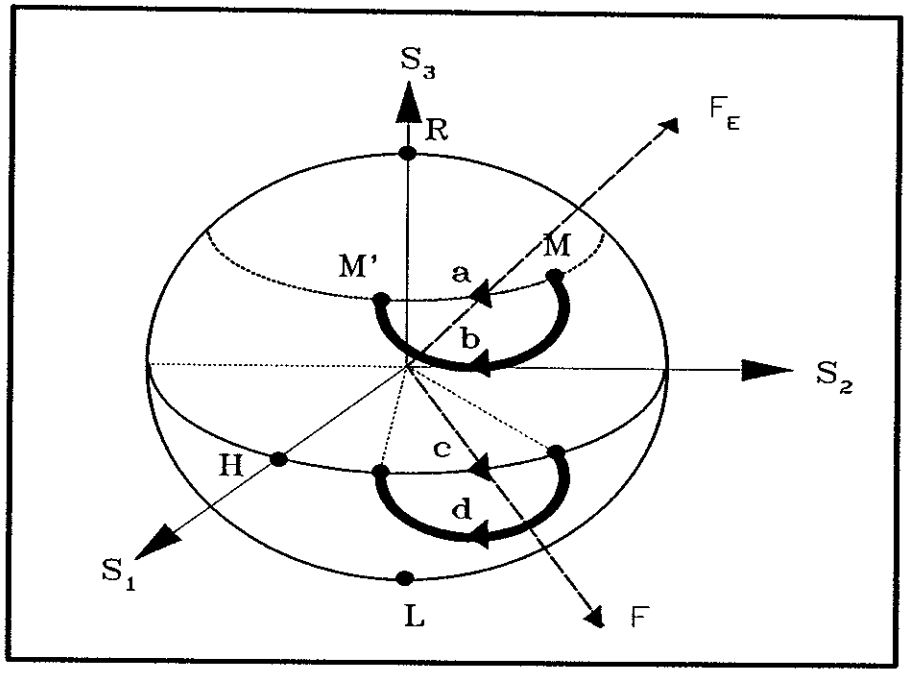
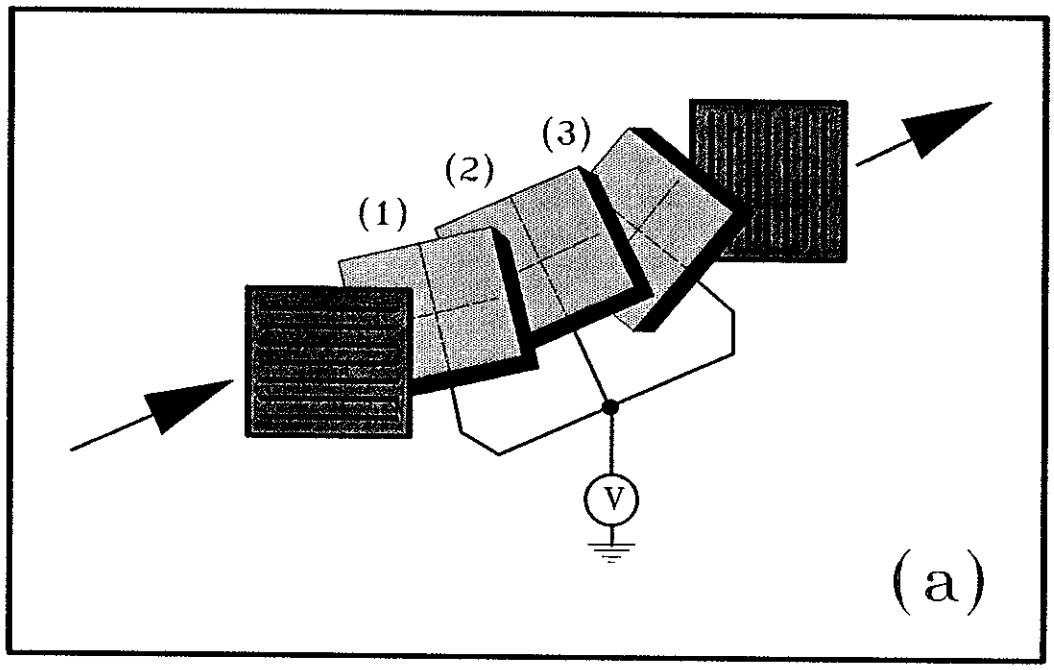


Figura 8. Trayectorias debidas a: (a y c) un rotador derecho,
(b) un retardador elíptico de media onda,
(d) un retardador lineal de media onda.



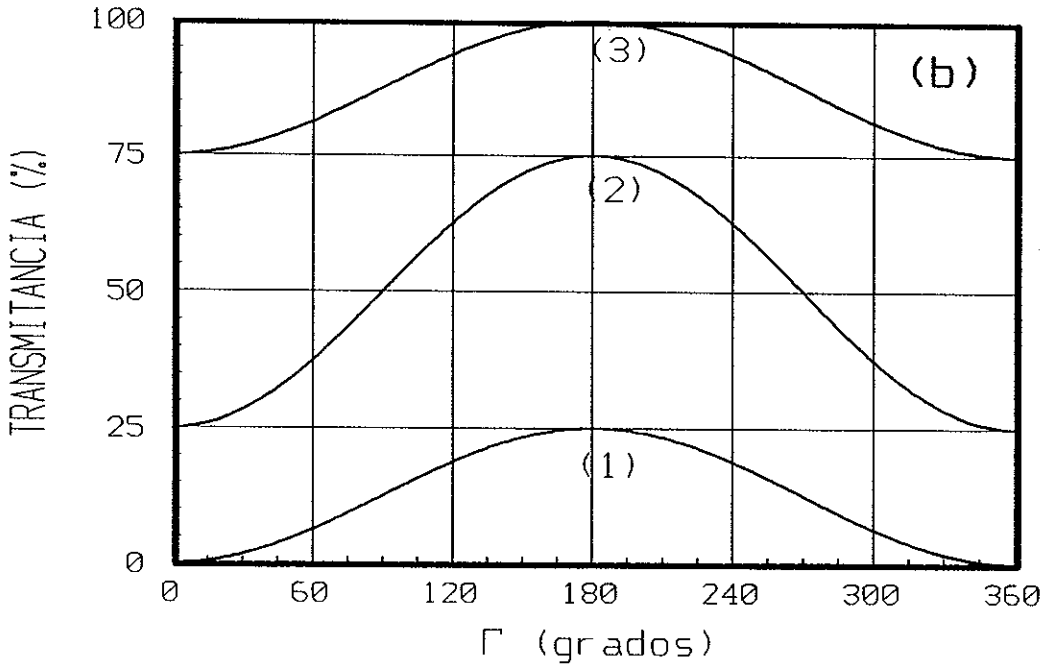


Figura 9. Modulador de Solc : (a) configuración óptica, (b) Transmitancia conforme a sus trayectorias aisladas.

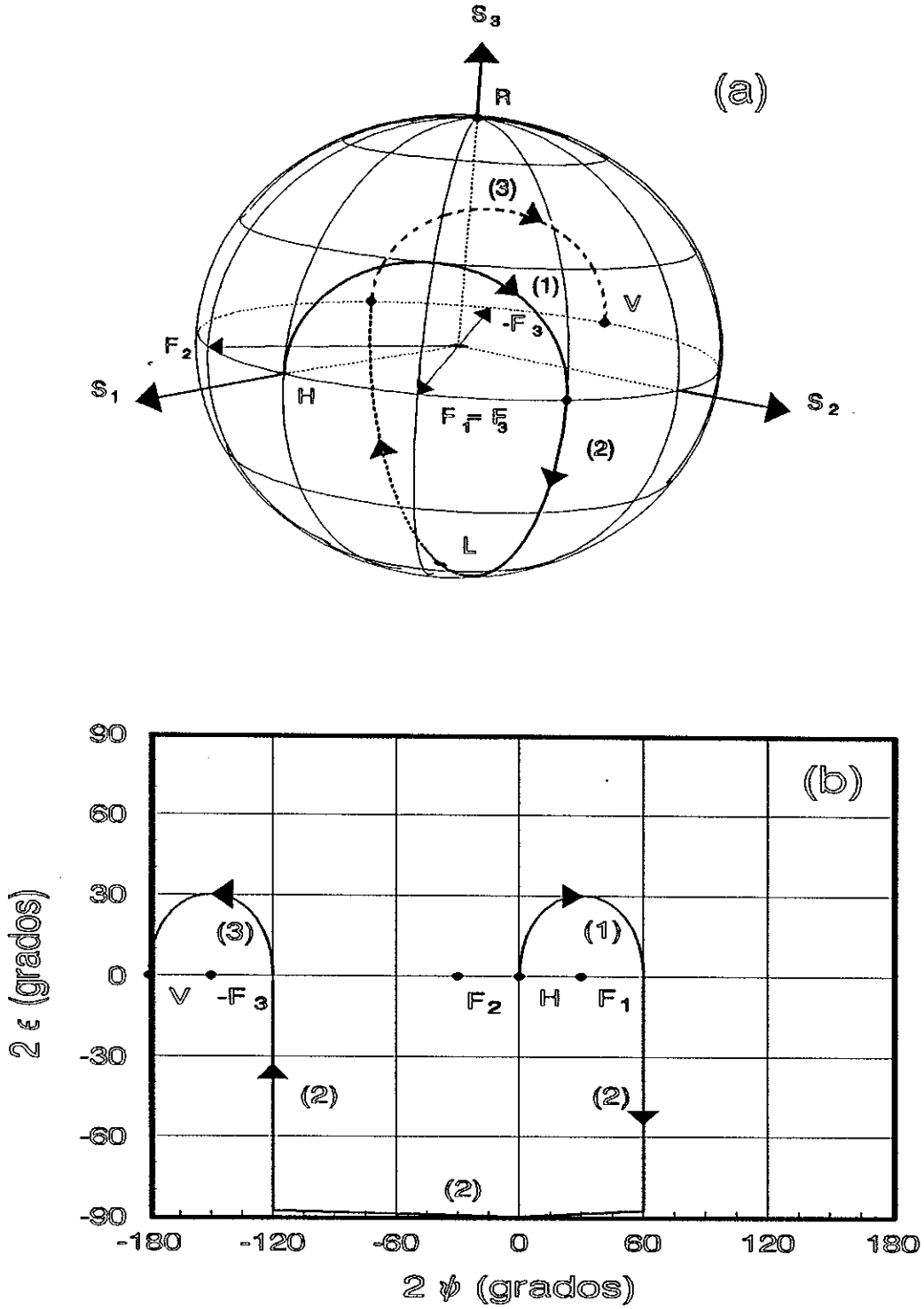


Figura 10. Trayectorias aisladas para el modulador de Solc:
(a) Representación tridimensional,
(b) Representación mapamundi.

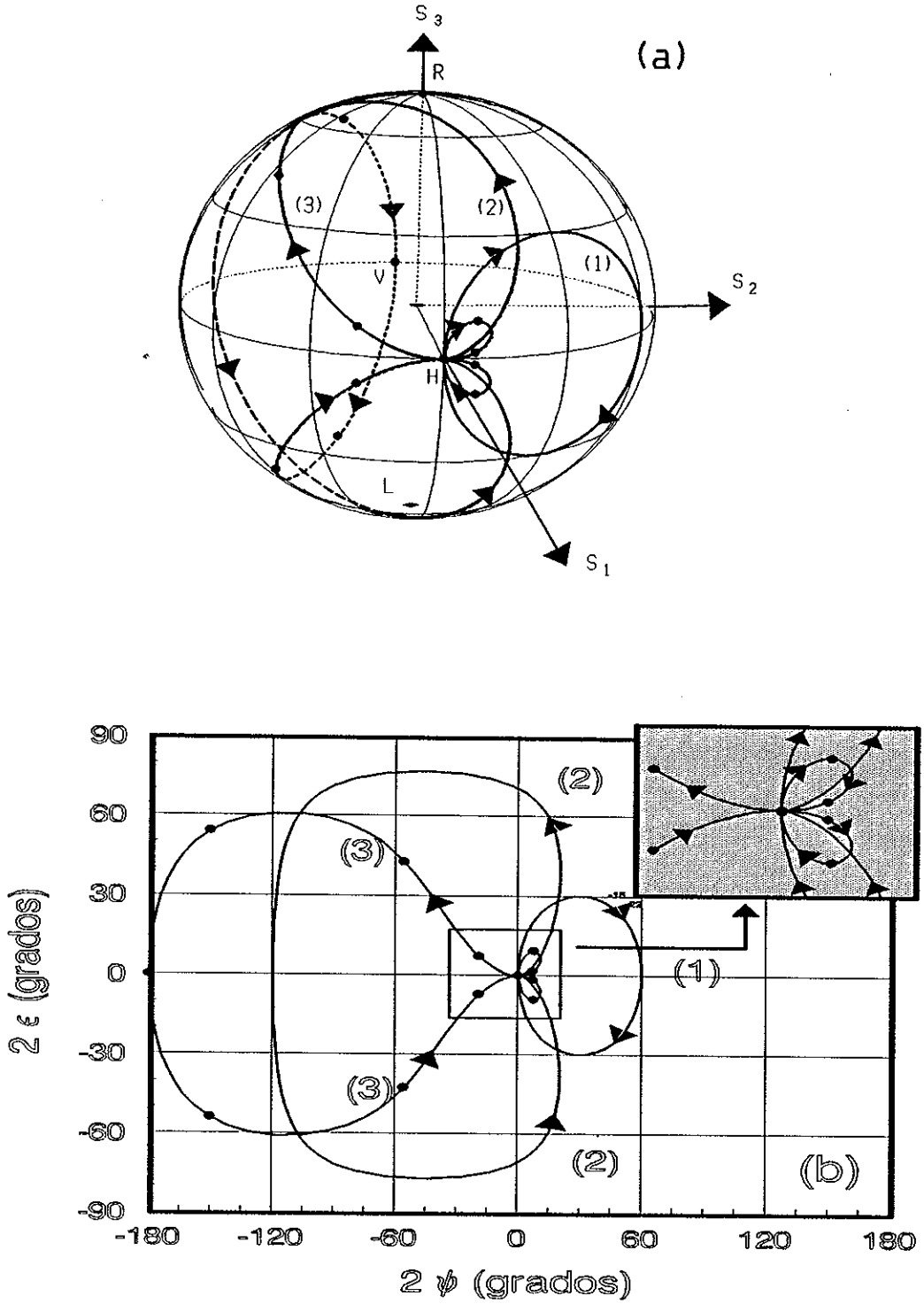


Figura 11. Trayectorias reales para el modulador de Solc:
(a) Representación tridimensional,
(b) Representación mapamundi.

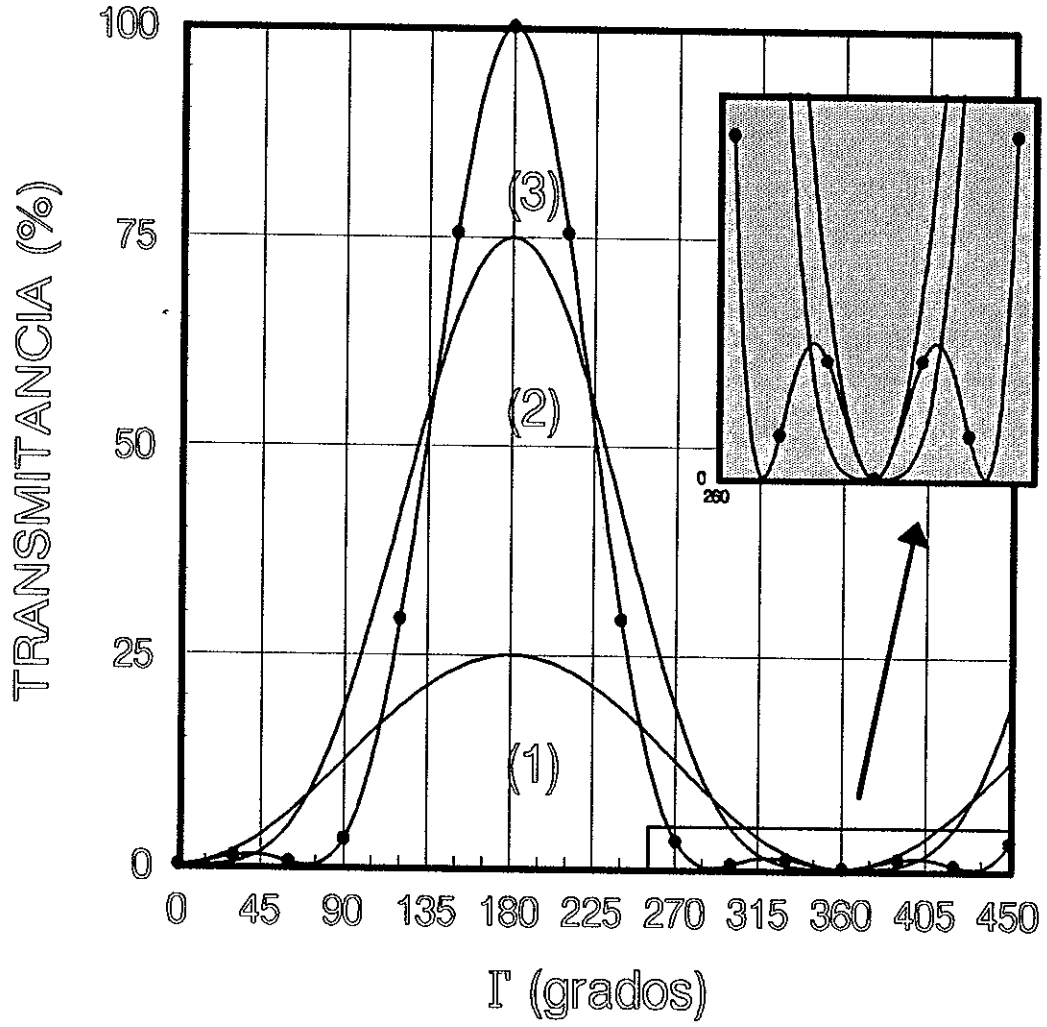


Figura 12. Transmitancia real para el modulador de Solc.

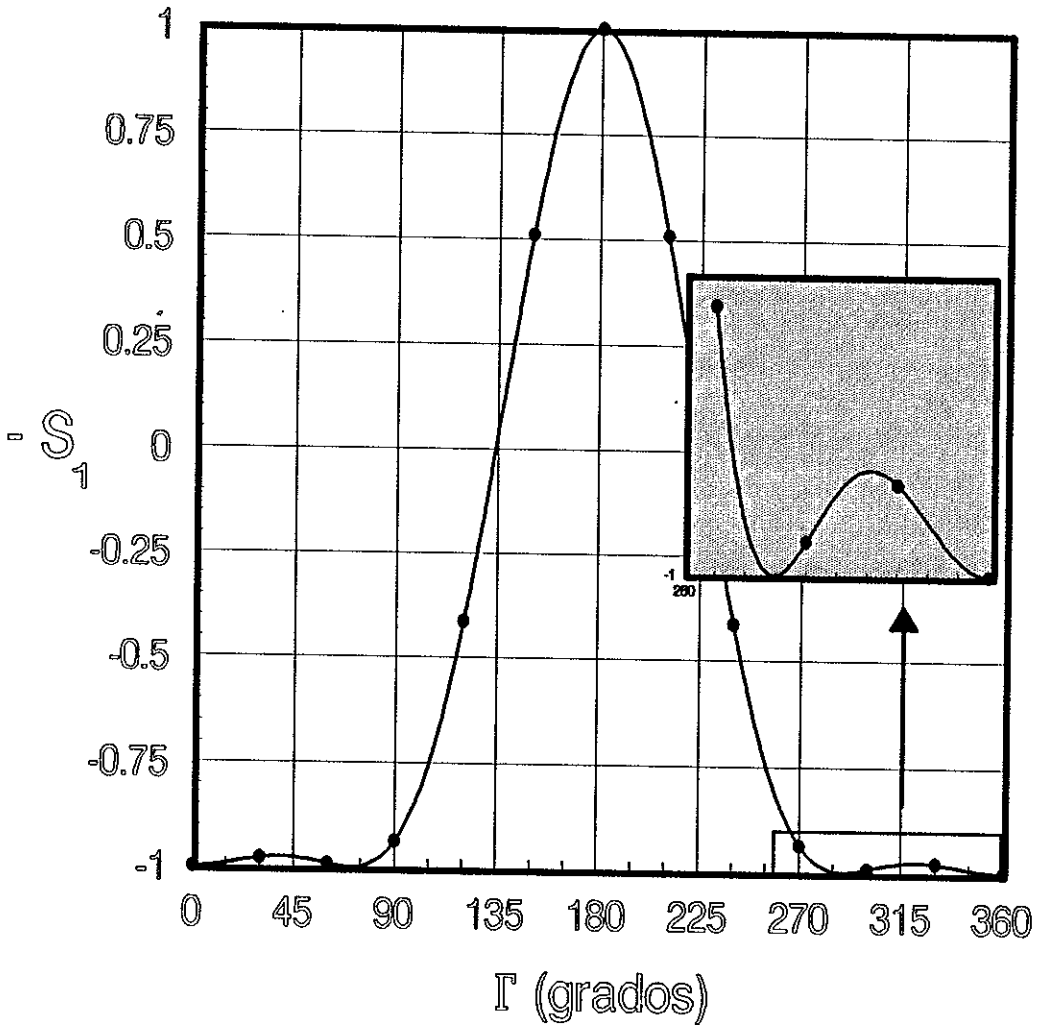


Figura 13. Valores de las componentes S_1 de la trayectoria real final.

IV. DISEÑO DE UN MODULADOR ELECTRO-OPTICO CON RESPUESTA LINEAL.

La curva de transmitancia de un modulador electro-óptico puede ser obtenida a partir de la fórmula general de intensidad propuesta por Hsu et al. [1947]. Esta fórmula ha sido verificada experimentalmente, así como por diferentes procedimientos matemáticos para casos particulares. Como se mencionó en el capítulo II, no es fácil deducir un diseño a partir de esta ecuación. Para el caso particular de un modulador de tres etapas, la ecuación se reduce a

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos\psi_A \\ - \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos(\psi_A + 2\psi_{F1} - 2\psi_{F2}) \\ - \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos(\psi_A + 2\psi_{F1} - 2\psi_{F3}) \\ - \cos\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos(\psi_A + 2\psi_{F2} - 2\psi_{F3}) \end{array} \right\}^2 +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos(\psi_A - 2\psi_{F1}) \\ + \cos\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos(\psi_A - 2\psi_{F2}) \\ + \cos\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos(\psi_A + -2\psi_{F3}) \\ - \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_2}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi_3}{2}\right) \cos(\psi_A - 2\psi_{F1} + 2\psi_{F2} - 2\psi_{F3}) \end{array} \right\}^2 , \quad (48)$$

donde cada retardamiento Π contiene un término constante y otro de modulación

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= \Gamma_{DC1} + \Gamma_{AC1} \\ \Pi_2 &= \Gamma_{DC2} + \Gamma_{AC2} \\ \Pi_3 &= \Gamma_{DC3} + \Gamma_{AC3} \end{aligned}\right\} . \tag{49}$$

Estas ecuaciones serán utilizadas para verificar los resultados de nuestro diseño.

De acuerdo a la ecuación (35a), la curva de transmitancia para nuestro modulador depende de la longitud angular que existe entre el punto fijo A que define al analizador, y los puntos M que definen la trayectoria real sobre la Esfera de Poincaré

$$T(\Gamma) = \cos^2 \frac{<\overline{A(2\psi_A, 2\epsilon_A)\ M(2\psi_M, 2\epsilon_M)}>}{2} . \tag{50}$$

Entonces, en principio es posible encontrar alguna trayectoria de puntos M sobre la Esfera de Poincaré, cuyas longitudes de arco $<\overline{AM}>$ siguen (para algún intervalo $\Delta\Gamma$) el perfil dado por la raíz cuadrada de una función coseno inverso: de ser así, ésta trayectoria representará la acción del modulador lineal buscado.

IV.1 Especificación de los parámetros del sistema óptico.

IV.1.1 Parámetros del modulador.

Para caracterizar la respuesta de un modulador de intensidad luminosa, resulta conveniente definir los siguientes términos:

i) El rango de modulación ΔT, el cual está dado por $\Delta T = T_{max} - T_{min}$, donde T_{max} y T_{min} son respectivamente los valores máximo y mínimo de la curva de transmitancia. Debe notarse que $0\% \leq \Delta T \leq 100\%$.

ii) El punto de operación Q, que está dado por $Q = (\Gamma_Q, T_Q)$, y corresponde al punto en la curva de transmitancia alrededor del cual oscilan la señal de modulación y la señal modulada (figura 3). Este punto no siempre tendrá su posición óptima en la región central ($T_Q = 50\%$) de la curva de transmitancia, como lo es el caso del modulador obtenido en este trabajo.

iii) El retardamiento total Γ_T , el cual es el retardamiento óptico requerido para obtener el rango de modulación máximo (idealmente $\Delta T = 100\%$) en la curva de transmitancia.

iv) El voltaje total V_T, que es el voltaje requerido para inducir el retardamiento total Γ_T. Frecuentemente, el

voltaje total se expresa en unidades angulares las cuales corresponden al valor del retardamiento Γ_T inducido.

Los valores de éstos parámetros para un modulador convencional son: ΔT = 100%, Q = (90°, 50%), $\Gamma_T = \Gamma_\pi$ = 180° y $V_T = V_\pi$.

IV.1.2 Configuración óptica.

La configuración óptica del modulador que se pretende diseñar se muestra en la figura 14. Consiste de un polarizador de entrada P, tres cristales electro-ópticos (1,2,3) y un analizador de salida. Los cristales electro-ópticos son escogidos (de cualquier material) de tal manera, que todos presentan el mismo valor V_π . Tomando como referencia a la dirección del punto H(0,0) en la Esfera de Poincaré, estos cristales tienen sus ejes rápidos inclinados por los ángulos azimutales ψ_{F1}, ψ_{F2}, ψ_{F3} y están representados por los puntos F1, F2 y F3. El polarizador y el analizador tienen sus ejes de transmisión inclinados por los ángulos azimutales ψ_P y ψ_A, y están representados en la Esfera de Poincaré por los puntos P y A respectivamente. Las resistencias eléctricas R_1, R_2, R_3 y R actúan como divisores de voltaje sobre la componente DC (constante) de la señal moduladora, de tal forma que cada cristal experimenta diferentes voltajes v_{DC1}, v_{DC2} y v_{DC3}. Estos voltajes inducen a su vez, los retardamientos ópticos constantes Γ_1, Γ_2 y Γ_3. Los capacitores de paso (C), permiten que la componente

AC del voltaje aplicado sea la misma para cada cristal.

Escogimos un modulador de tres etapas ya que contiene un número de cristales que todavía se puede considerar práctico, y comparado con un modulador de dos etapas, nos dá la alternativa de obtener mucho más formas distintas en su curva de transmitancia. Este hecho puede visualizarse fácilmente analizando la fórmula general de transmitancia para un modulador multietapa [Hsu et al., 1947].

IV.1.3 Comportamiento del modulador.

Debido a que la curva de transmitancia está determinada por una función periódica, se pueden considerar para el diseño, las siguientes características:

i) Del diagrama de la figura 14 se infiere que la trayectoria final del modulador sobre la Esfera de Poincaré, deberá tocar al punto P. Entonces, de la ecuación (50) tenemos que para asegurar un alto rango de modulación $\Delta T = 100\%$, existe la condición necesaria (pero no suficiente) de que la longitud $<\overline{AM}>$ tome un valor múltiplo de 180°; esto se puede lograr orientando a P y A en direcciones perpendiculares (o paralelas). La condición suficiente para asegurar un rango $\Delta T = 100\%$ es que la trayectoria final pase por A y un punto M diametrálmente opuesto.

ii) La función que describe la curva de transmitancia en intensidad luminosa para un modulador de η etapas, está dada por una serie trigonométrica que puede contener hasta la η-*ésima* armónica [Ammann, 1971]. Entonces, una posible curva de transmitancia para un modulador lineal podría ser parecida a la onda triangular que se muestra (graficada para un período) en la figura 15.

iii) El modulador solo operará en alguno de los segmentos (L,S) de la figura 15. Una manera conveniente de obtener una buena aproximación del segmento lineal L mediante una función trigonométrica de transmitancia es haciendo $L > S$, tal como ocurre en el caso de un modulador retroalimentado [García Weidner, 1988; García Weidner, 1989a]. Es de esperarse que la porción L de la curva sea más lineal que la porción S.

iv) Si P y A son perpendiculares, entonces la trayectoria más corta que une a estos dos puntos estará dada por un círculo máximo sobre la Esfera de Poincaré, tal como se muestra en la figura 16. Esto se logra únicamente utilizando el arreglo del modulador convencional (i.e. los tres cristales paralelos). Conforme a lo anterior se tiene que para lograr $L > S$ es necesario que $V_T > V_\pi$, y consecuentemente $\Gamma_T > \Gamma_\pi$. Por ésta razón, para obtener una transmitancia lineal, se requiere de un modulador multietapa.

v) Utilizando la Esfera de Poincaré (figura 16), se puede observar que el valor mínimo posible Γ_{min} para cada etapa es $\Gamma_{min} = (0.3\ \Gamma_{\pi}) = 60°$, lo cual ocurre para el arreglo del modulador convencional. Consecuentemente la longitud máxima de L (figura 15) corresponderá al valor de $\Gamma_{max} = 360° - 60° = 300°$.

Para tratar de acercarnos al perfil de transmitancia deseado, la idea es encontrar el arreglo óptico para un modulador de tres etapas cuyo voltaje total V_T sea mayor que el de un modulador convencional. Entonces, para nuestro diseño tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} 180° < \Gamma_T \leq 300° \\ |\psi_A - \psi_P| \approx 90° \end{array}\right\} . \qquad (5)$$

IV.2 Aproximación inicial del diseño.

Tomando en cuenta las consideraciones de la sección anterior, podemos construir las trayectorias aisladas que nos ayudarán a evaluar los parámetros de diseño. En la figura 17 se muestra un diagrama de las trayectorias aisladas iniciales y finales utilizando una representación mapamundi de la Esfera de Poincaré. La forma verdadera y sentidos de rotación de estas trayectorias se determinará numéricamente más adelante.

IV.2.1 trayectorias aisladas iniciales.

Estas trayectorias (figura 17a) se obtienen considerando que la componente de modulación $v_{AC} = 0$. Entonces, antes de

aplicar la componente v_{AC}, cada etapa experimentará únicamente los retardamientos constantes Γ_1, Γ_2 y Γ_3 inducidos respectivamente por las componentes constantes v_{DC1}, v_{DC2} y v_{DC3} del voltaje aplicado v. Debido a que el estado de polarización inicial de éstas trayectorias puede ser escogido arbitrariamente, lo tomaremos igual al punto H(0,0). El primer cristal tranformará al punto H(0,0) en el punto $i1 = (2\psi_{i1}, 2\epsilon_{i1})$. El segundo cristal transformará al punto $i1$ en el punto $i2 = (2\psi_{i2}, 2\epsilon_{i2})$; mientras que el tercer cristal transformará al punto $i2$ en el punto $i3 = (2\psi_{i3}, 2\epsilon_{i3})$. El punto final $i3$ de ésta trayectoria representa a la posición de P, por lo cual es deseable que esté sobre el plano ecuatorial.

IV.2.2 trayectorias aisladas finales.

Estas trayectorias (figura 17b) corresponden al momento cuando el voltaje aplicado toma su valor máximo $v(t) = v_{AC} + v_{DC} = V_T$. Bajo ésta situación, cada etapa experimentará un retardamiento inducido $DC + AC$, esto es, $\Gamma_1 + \Gamma_T$, $\Gamma_2 + \Gamma_T$ y $\Gamma_3 + \Gamma_T$ respectivamnte. En este caso, el primer cristal transformará al punto H(0,0) en el punto $f1 = (2\psi_{f1}, 2\epsilon_{f1})$; el segundo cristal transformará al punto $f1$ en el punto $f2 = (2\psi_{f2}, 2\epsilon_{f2})$; y el tercer cristal transformará al punto $f2$ en el punto $f3 = (2\psi_{f3}, 2\epsilon_{f3})$. El punto final $f3$ de ésta trayectoria representa la posición A del analizador, y consecuentemente, se desea que esté sobre el ecuador.

IV.2.3 Ecuaciones paramétricas del modulador.

Sustituyendo a las ecuaciones (41a) y (41b) en la ecuación (35b) podemos evaluar la transmitancia de un modulador. Entonces, para un modulador de tres etapas, cada punto $(2\psi, 2\epsilon)$ en la curva de transmitancia estará dado por una función que depende de nueve parámetros:

$$T = f(\psi_P, \psi_{F1}, \psi_{F2}, \psi_{F3}, \psi_A, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_T) \quad . \tag{52}$$

Al iniciar el diseño, de desconocen tanto los nueve parámetros de la función anterior, así como los sentidos de rotación para cada trayectoria de la figura 17. Esta información será obtenida utilizando las ecuaciones del capítulo III.2.2. Debido a que el estado de polarización emergente en cada etapa se convierte en el estado de polarización incidente para la próxima etapa, utilizando la notación abreviada (ecuaciones 42a y 42b) podemos plantear el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas no lineales:

<u>trayectorias iniciales</u>

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{i1} &\approx f(0°, 0°; \psi_{F1}, \Gamma_1) \\
\epsilon_{i1} &\approx f(0°, 0°; \psi_{F1}, \Gamma_1) \\
\psi_{i2} &\approx f(\psi_{i1}, \epsilon_{i1}; \psi_{F2}, \Gamma_2) \\
\epsilon_{i2} &\approx f(\psi_{i1}, \epsilon_{i1}; \psi_{F2}, \Gamma_2) \\
\psi_{i3} &\approx f(\psi_{i2}, \epsilon_{i2}; \psi_{F3}, \Gamma_3) \\
\epsilon_{i3} &\approx f(\psi_{i2}, \epsilon_{i2}; \psi_{F3}, \Gamma_3) \\
(2\psi_{i3}, 2\epsilon_{i3}) &\approx (2\psi_P, 0°)
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

<u>trayectorias finales</u>

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{f1} &\approx f(0°, 0°; \psi_{F1}, \Gamma_1 + \Gamma_T) \\
\epsilon_{f1} &\approx f(0°, 0°; \psi_{F1}, \Gamma_1 + \Gamma_T) \\
\psi_{f2} &\approx f(\psi_{f1}, \epsilon_{f1}; \psi_{F2}, \Gamma_2 + \Gamma_T) \\
\epsilon_{f2} &\approx f(\psi_{f1}, \epsilon_{f1}; \psi_{F2}, \Gamma_2 + \Gamma_T) \\
\psi_{f3} &\approx f(\psi_{f2}, \epsilon_{f2}; \psi_{F3}, \Gamma_3 + \Gamma_T) \\
\epsilon_{f3} &\approx f(\psi_{f2}, \epsilon_{f2}; \psi_{F3}, \Gamma_3 + \Gamma_T) \\
(2\psi_{f3}, 2\epsilon_{f3}) &\approx (2\psi_A, 0°)
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

IV.2.4 Valores iniciales y restricciones matemáticas.

Usando un programa de computadora, se pueden resolver las ecuaciones que nos darán nuestros nueve parámetros de diseño $\{\psi_P, \psi_{F1}, \psi_{F2}, \psi_{F3}, \psi_A, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_T\}$. Normalemente, los métodos numéricos requieren que se asignen valores iniciales a estos parámetros, utilizando posteriormente las cantidades resultantes como los nuevos valores iniciales estableciendo un proceso iterativo. Se sabe que pueden existir varias configuraciones ópticas correspondientes a diferentes conjuntos de parámetros, capaces de producir la misma curva de transmitancia. Consecuentemente la solución numérica convergerá a una configuración particular, dependiendo de que tan cercanos a esta configuración fueron los valores de los parámetros inicialmente propuestos. Entonces conviene tratar de forzar la solución numérica a algún tipo particular de configuración óptica al introducir algunas restricciones matemáticas. Durante ésta etapa del procedimiento resulta muy ilustrativo observar la evolución de las trayectorias sobre la Esfera de Poincaré, para ir introduciendo los cambios pertinentes, ya que la convergencia a una solución en este caso, se visualiza con mayor rapidez mediante los resultados gráficos que con los numéricos.

En principio, los valores iniciales pueden ser escogidos arbitrariamente. Debido a que las inclinaciones de los retardadores pueden tomar valores entre $0° < \psi_F < 180°$,

inicialmente repartimos equitativamente los valores en este intervalo con $\psi_{F1} = 45°$, $\psi_{F2} = 90°$ y $\psi_{F3} = 135°$; mediante un procedimiento similar se asignaron los valores a los retardamientos constantes (iguales a 180°) y de la ecuación (51) $\Gamma_T = 240°$. Utilizando estas cantidades en las ecuaciones (42a) y (42b) se obtuvieron los valores iniciales para los puntos "i" y "f" de la figura 17. Por otra parte, conforme a la asignación de los valores iniciales, se plantearon las siguientes restricciones matemáticas:

$$\left.\begin{array}{rcl} \psi_{F1} & < & \psi_{F2} \\ \psi_{F2} & < & \psi_{F3} \\ \Gamma_Q & \approx & 0.5\ \Gamma_T \\ T_Q & \approx & 50\,\% \end{array}\right\} . \qquad (55)$$

Utilizando un programa de computadora, se resolvieron simultáneamente las ecuaciones (51) a (55) iterando los resultados después de cada corrida. Con esto se obtuvo la aproximación inicial del diseño.

IV.3 Optimización del diseño.

Para optimizar los valores encontrados en la sección anterior, es conveniente evaluar las trayectorias reales sobre la esfera de poincaré así como la curva de transmitancia del modulador. En esta etapa fueron introducidas tres restricciones adicionales: una para el retardamiento y dos para la linealidad de la transmitancia. Después de resolver el sistema de ecuaciones simultáneas con la primera restricción, se utilizaron estos resultados para resolver un nuevo sistema de ecuaciones que

incluía además a la segunda restricción, procediendo en forma similar para incluir la tercer restricción. Idealmente, en el intervalo $0 < \Gamma < \Gamma_T$ la curva de transmitancia se debe poder aproximar por la ecuación de una linea recta

$$T_L = m\Gamma + b \quad . \tag{56}$$

Entonces, para evaluar la no linealidad de la curva de transmitancia, definimos a la desviación de la linealidad D, como la diferencia entre la transmitancia dada por la ecuación (52) respecto a su aproximación lineal T_L dada por la ecuación (56), utilizando la relación

$$D = T - T_L \quad . \tag{57}$$

Los valores de m y b fueron obtenidos ajustando una linea recta a la curva de transmitancia en su punto de operación Q.

IV.3.1 Fenómeno de Gibbs para la función de transmitancia.

Durante la aproximación inicial del diseño, encontramos que la linealidad de la curva de transmitancia era muy sensible a los cambios del parámetro Γ_T. Para optimizar el valor de Γ_T analizamos el fenómeno de Gibbs [Carlslaw, 1950] para diferentes ondas triangulares con períodos $\phi = (\beta \ \Gamma_{min})$ y factores numéricos $\beta \geq 2$. Para un modulador de tres etapas, la función triangular de la figura 15 se debe expresar por una serie de Fourier truncada hasta la tercer armónica. En éste caso, las oscilaciones debido al fenómeno de Gibbs (figura 18) toman su valor mínimo para $\beta \approx 3$. Debido a ésto, fijamos el valor correspondiente de Γ_T para

$\beta \approx 3$, el cual está dado por

$$\Gamma_T \approx 230° \quad . \tag{58}$$

Al resolver las ecuaciones (51) a (55) simultáneamente con la relación (58), las evaluaciones numéricas convergen rápidamente a un diseño que muestra una respuesta lineal razonablemente buena.

IV.3.2 Condiciones de linealidad.

Para tratar de evitar que la curva de transmitancia tenga pequeñas oscilaciones que la desvien de su aproximación lineal en el intervalo $0 < \Gamma < \Gamma_T$, introducimos la siguiente restricción

$$\frac{d^2 T}{d\Gamma^2} \approx 0 \quad . \tag{59}$$

Las derivadas fueron obtenidas numéricamente, empezando con un pequeño intervalo ΔT_1 alrededor del punto de operación T_Q (ver figura 15), e incrementando después de cada evaluación el intervalo ΔT_1 a un nuevo valor ΔT_2. Este procedimiento fué repetido iterativamente incrementando sucesivamente el valor de los nuevos intervalos.

Se puede imponer un ajuste adicional a la linealidad si se fija la pendiente en todos los puntos de la curva de transmitancia para el intervalo de interés. Usando el valor de m en el punto de operación

$$m \approx \left.\frac{dT}{d\Gamma}\right|_{T=T_Q} , \tag{60}$$

introducimos la siguiente restricción

$$\frac{\Delta T}{\Delta \Gamma} \approx m , \tag{61}$$

la cual fué evaluada para los intervalos crecientes ΔT_1, ΔT_2, etc., en una forma similar a la que se utilizó al evaluar la ecuación (59).

IV.4 Valores finales del diseño.

Las figuras 19 (a y b) muestran las trayectorias aisladas obtenidas utilizando el procedimiento descrito anteriormente. Estas trayectorias fueron graficadas conforme a las evaluaciones numéricas, y correponden a las trayectorias que fueron esquematizadas en la figura 17. Los trazos de la figura 19 están marcados para cada Γ igual a un valor múltiplo de 90°.

Las figuras 20 (a y b) muestran las trayectorias reales del modulador lineal utilizando tanto la representación mapamundi de la Esfera de Poincaré, así como su representación tridimensional. También en éstas figuras, las trayectorias están marcadas para cada Γ igual a un valor múltiplo de 90°. Se puede observar que el correspondiente punto final *f3* de la figura 17 está cerca del plano ecuatorial ($\epsilon_{f3} = 5.2°$), pero no sobre el

ecuador como idealmente se deseaba. Consecuentemente, el modulador lineal obtenido mostrará un valor máximo en su transmitancia de T_{max} = 98 % .

Los valores de los parámetros obtenidos que definen el diseño de nuestro modulador lineal, se muestran en la Tabla I; mientras que en la figura 21, se muestra el perfil de su curva de transmitancia, graficada para dos períodos.

IV.5 Comparación del diseño con otros moduladores.

En la figura 22(a) se muestran la curva de transmitancia T vs. Γ y su aproximación lineal T_L vs. Γ, para el modulador convencional (correspondiente al arreglo óptico de la figura 2); mientras que en la figura 22(b) aparece su diferencia de linealidad D vs. Γ. Los valores numéricos de éstas gráficas se presentan en la Tabla II.

En forma similar, en las figuras 23 y 24 se muestran las gráficas de T vs. Γ, T_L vs. Γ y D vs. Γ, para el modulador de Ammann (figura 6) y para el modulador lineal diseñado (figura 14) respectivamente. Así mismo, en las Tablas III y IV se proporcionan los valores númericos correspondientes a éstas figuras (23 y 24).

En la Tabla V se resumen los valores de los parámetros correspondientes a las configuraciones ópticas de los tres

moduladores (convencional, de Ammann y diseñado) expresados en grados. Se incluyen también al final de ésta tabla, los respectivos valores de m y b, calculados para las figuras 22, 23 y 24; esto es, considerando que $0\% \leq T \leq 100\%$ y que el retardamiento Γ está dado en grados. Utilizando los valores de la Tabla V, las curvas de transmitancias de éstas figuras, fueron verificadas con la fórmula general de transmitancia dada por las ecuaciones (48) y (49).

De éstas Tablas se puede apreciar, que el retardamiento total Γ_T es menor para el modulador convencional ($\Gamma_T = 180°$), que para el modulador de Ammann ($\Gamma_T = 210°$), y que para nuestro modulador lineal diseñado ($\Gamma_T = 229.7°$); lo cual es una desventaja en éstos dos últimos moduladores, ya que para su operación requieren de una fuente que proporcione un mayor voltaje.

Sin embargo, en cuanto a la linealidad en la curva de respuesta ocurre lo contrario. Si se desea operar con baja distorsión al modulador, por ejemplo con una desviación de linealidad $-1\% \leq D \leq 1\%$, entonces el máximo rango de modulación para el modulador convencional es de $\Delta T \approx 50\%$, para el modulador de Ammann es de $\Delta T \approx 70\%$ y para nuestro modulador es de $\Delta T \approx 90\%$; la mejoría en la linealidad para nuestro diseño es notable. Incluso encontramos que para $-0.5\% \leq D \leq 0.5\%$, nuestro modulador logra un rango de modulación hasta $\Delta T \approx 85\%$; y para una distorsión

sumamente pequeña correspondiente a un valor de $-0.055\% \leq D \leq 0.055\%$, nuestro diseño alcanza un rango de modulación de $\Delta T \approx 75\%$, el cual es superior al rango de modulación ($\Delta T \approx 70\%$) que presenta el modulador de Ammann para $|D| \leq 1\%$.

Otro aspecto que resulta notable respecto al modulador diseñado, es que considerando que su función de transmitancia se puede expresar por una serie trigonométrica que contiene únicamente hasta la tercer armónica, para una pequeña desviación de linealidad $|D| \leq 1\%$ logra presentar un elevado rango de modulación ($\Delta T \approx 90\%$); esto es difícil de superar, ya que al ser una función periódica similar a una onda triangular (figura 15), inevitablemente en los codos de su curva de transmitancia (T_{max}, T_{min}) se debe de presentar alguna diferencia de linealidad.

La mejoría en la linealidad obtenida con nuestro diseño respecto al modulador de Ammann, depende en gran medida por la forma en que fueron planteados ambos procedimientos. En su trabajo, de acuerdo al método de la respuesta impulso, Ammann [1967] expresó la función de transmitancia mediante una serie exponencial (ecuación 26), y posteriormente la expandió en una serie de potencias para identificar los términos no lineales. Su propósito fué cancelar los coeficientes de éstos últimos términos en la función de transmitancia, pero debido a que éste procedimiento es analítico, solo se pueden anular un número finito de coeficientes el cual a su vez, depende de la cantidad

de cristales utilizados; una vez hecho ésto, su procedimiento no incluye ninguna etapa de optimización. Por el contrario, aunque el método de la Esfera de Poincaré requiere de una mayor comprensión sobre el dispositivo que se está diseñando, una vez que se obtiene un diseño inicial, nos dá la oportunidad de ir introduciendo diferentes restricciones matemáticas asociadas al comportamiento del dispositivo; éstas son resueltas numéricamente mediante aproximaciones sucesivas, hasta lograr un diseño optimizado. En particular durante nuestro procedimiento, encontramos que la manera en la que se escoge al valor de Γ_T es de mucha importancia, ya que es un parámetro que modifica sensiblemente las trayectorias obtenidas para cada corrida de datos.

En la Tabla VI se presentan las características de operación para los tres moduladores. El aspecto más relevante que aquí se observa, es que mientras nuestro diseño requiere un valor de voltaje total ($V_T = 1.27 V_\pi$) ligeramente mayor al del modulador de Ammann ($V_T = 1.17 V_\pi$), la desviación de linealidad D muestra una gran mejoría.

Respecto a la configuración óptica utilizada, podemos notar que nuestro arreglo (figura 14) es más eficiente que el de Ammann (figura 6): normalmente, cuando los retardamientos constantes Γ_1, Γ_2, y Γ_3 son ajustados utilizando resistencias eléctricas [García Weidner, 1985] en lugar de placas cristalinas,

se puede obtener una mayor precisión en el retardamiento. Además, debido a que nuestro arreglo óptico tan solo requiere la mitad del número de cristales utilizados por Ammann, el montaje experimental es más sencillo y los requerimientos de alineación son menos severos. De hecho, las diferencias que encontró Ammann [Yarborough y Ammann, 1968] entre sus cálculos y sus pruebas experimentales, las atribuyó a problemas de alineación y a la inexactitud de las placas retardadoras (cuarzo) utilizadas.

Por último, es importante mencionar que una alternativa (no óptica) para mejorar la respuesta del modularor, es utilizando circuitos electrónicos adicionales que controlen la distorsión, como lo sería el uso de un lazo de retroalimentación electrónica en la señal de salida. Esto ha sido reportado [Feldman, 1978] al estudiar la biestabilidad óptica extrínseca de una celda Pockels, y dos configuraciones opto-electrónicas distintas [García Weidner, 1989a; García Weidner, 1989c] que ayudan a linearizar al dispositivo, han sido propuestas.

La utilización de sistemas de modulación retroalimentados o compensados electrónicamente ha sido estudiada previamente [García Weidner, 1987a, 1987b, 1988, 1989d; Morales Magallanes y García Weidner, 1989]. Al respecto conviene clarificar dos aspectos: i) Eventualmente los voltajes de modulación son grandes (decenas a centenas de volts) en el rango de frecuencias que van de KHz a MHz, con lo cual la circuitería electrónica llega

a complicarse; de hecho, para estos moduladores comerciales resulta más costosa la fuente electrónica de modulación (dirver) que la misma Celda Pockels (modulador óptico). ii) En todo caso, ambas técnicas se pueden combinar, ya que resulta más sencillo regular a un modulador cuasilineal que a uno del tipo convencional.

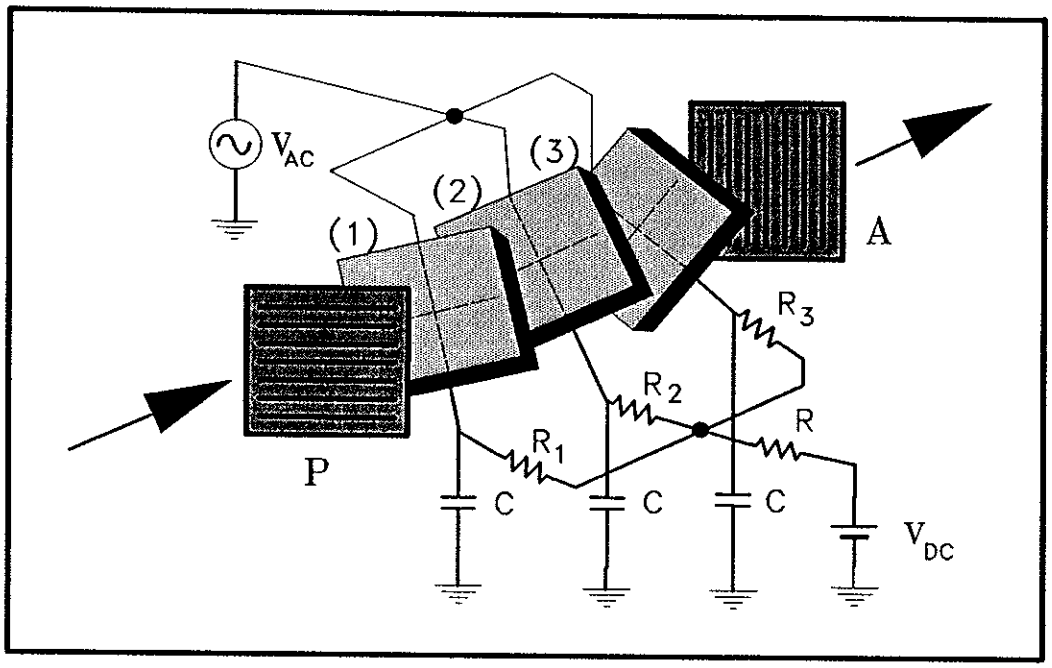


Figura 14. Arreglo óptico de modulador lineal bajo diseño.

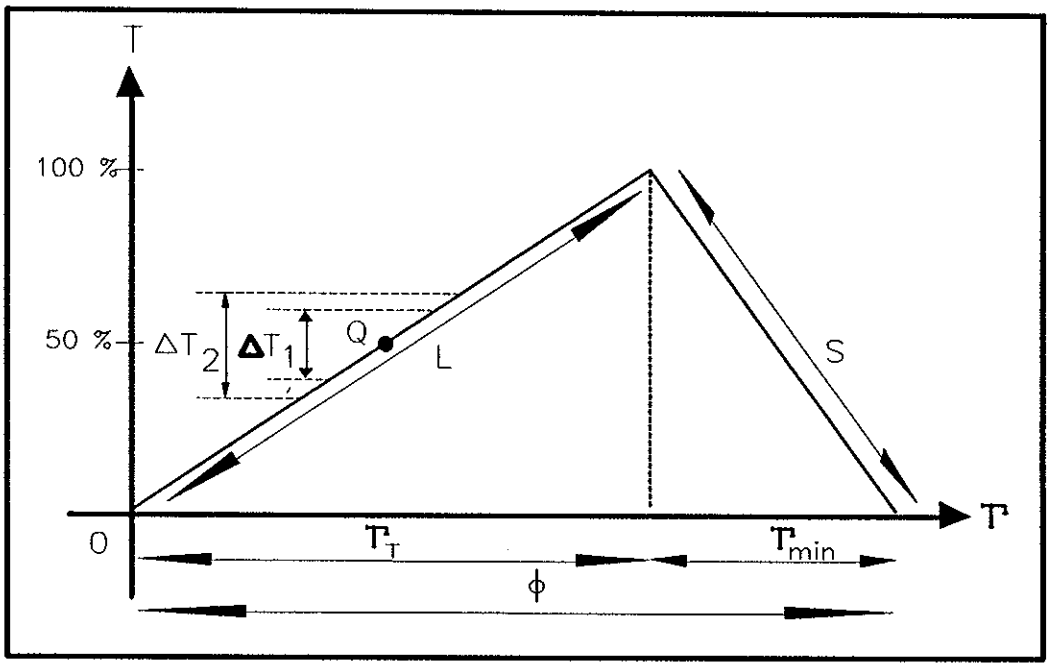


Figura 15. Curva de transmitancia propuesta.

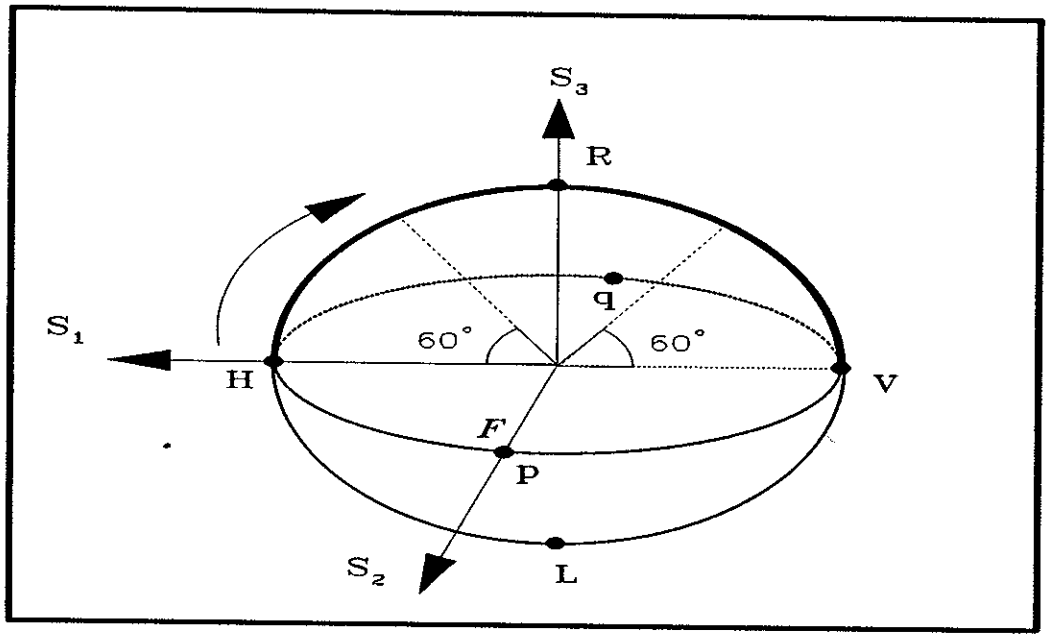


Figura 16. Análisis del comportamiento de un modulador sobre la Esfera de Poincaré.

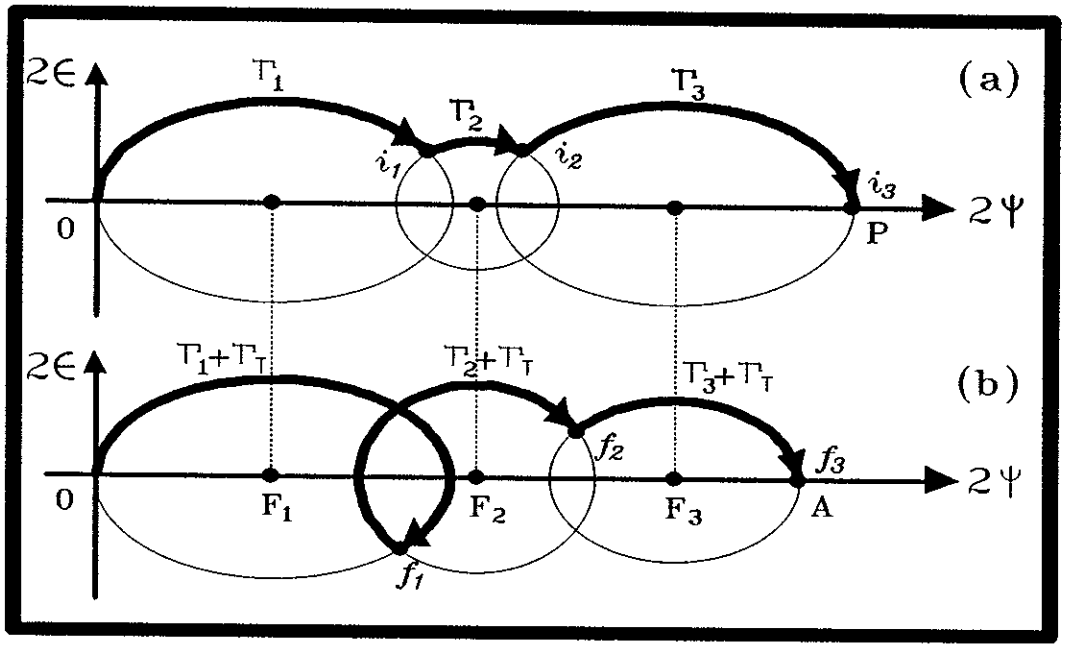


Figura 17. Esquema de las trayectorias aisladas del modulador: (a) iniciales, (b) finales.

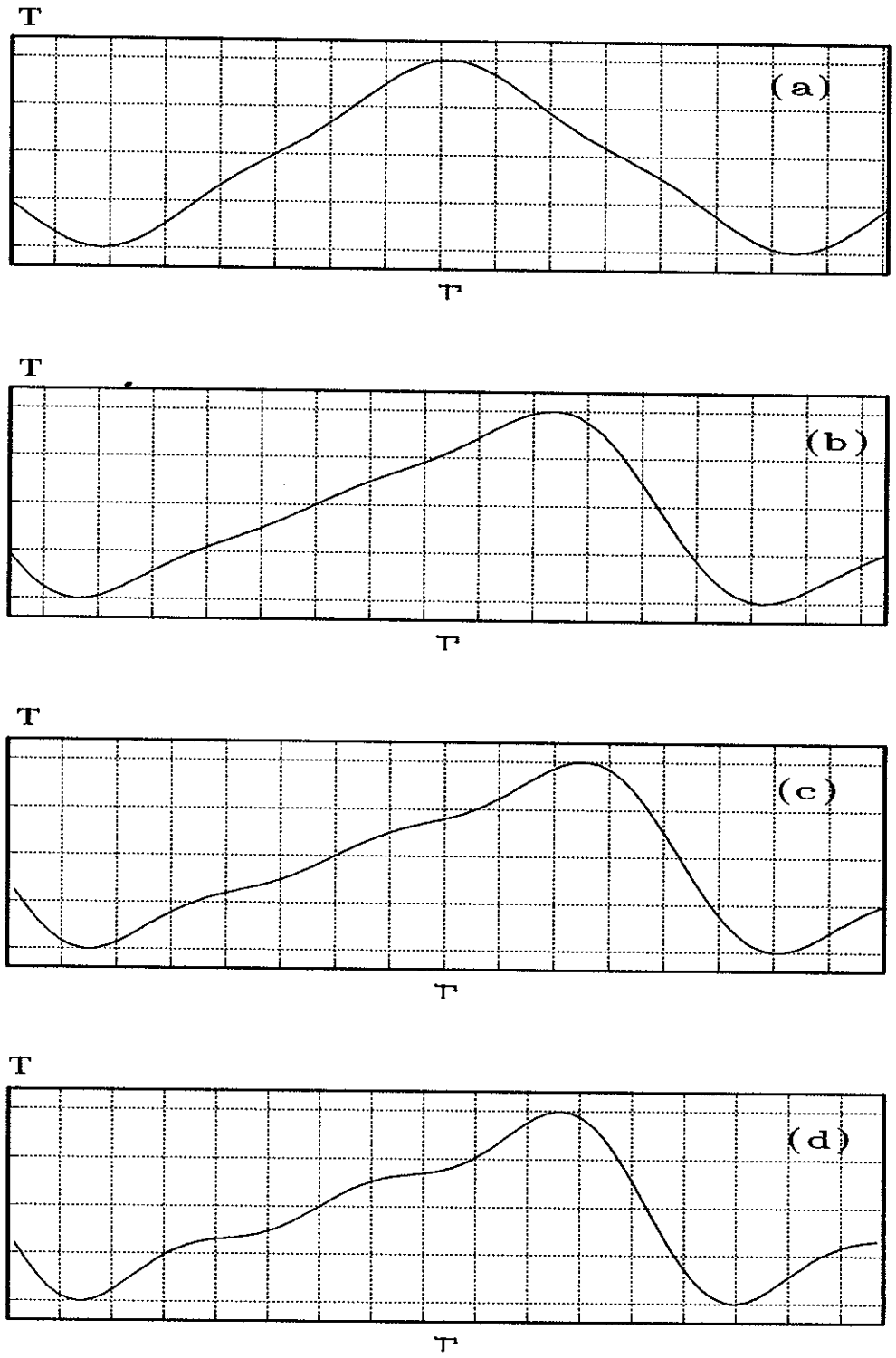
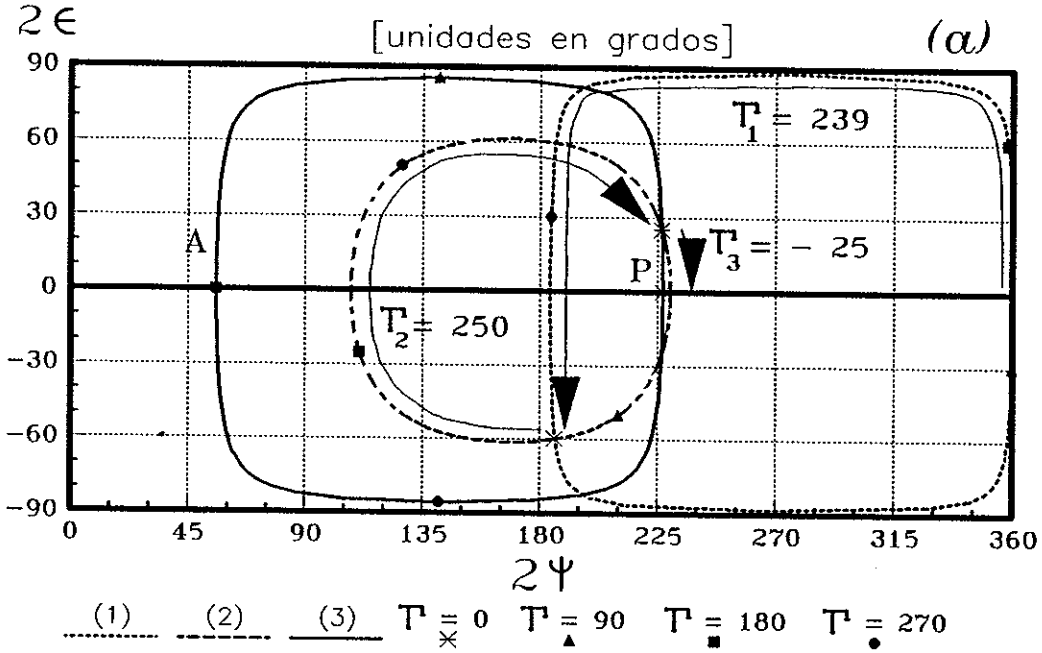


Figura 18.Fenómeno de Gibbs para la curva de transmitancia: (a) $\beta = 2$, (b) $\beta = 3.5$, (c) $\beta = 5$, (d) $\beta = 7$.



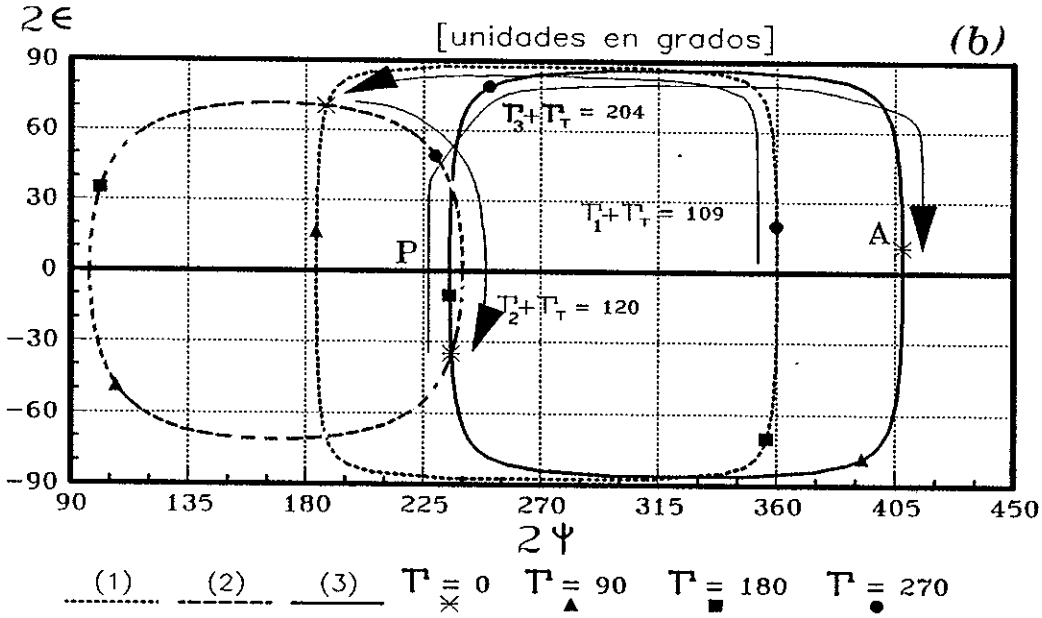
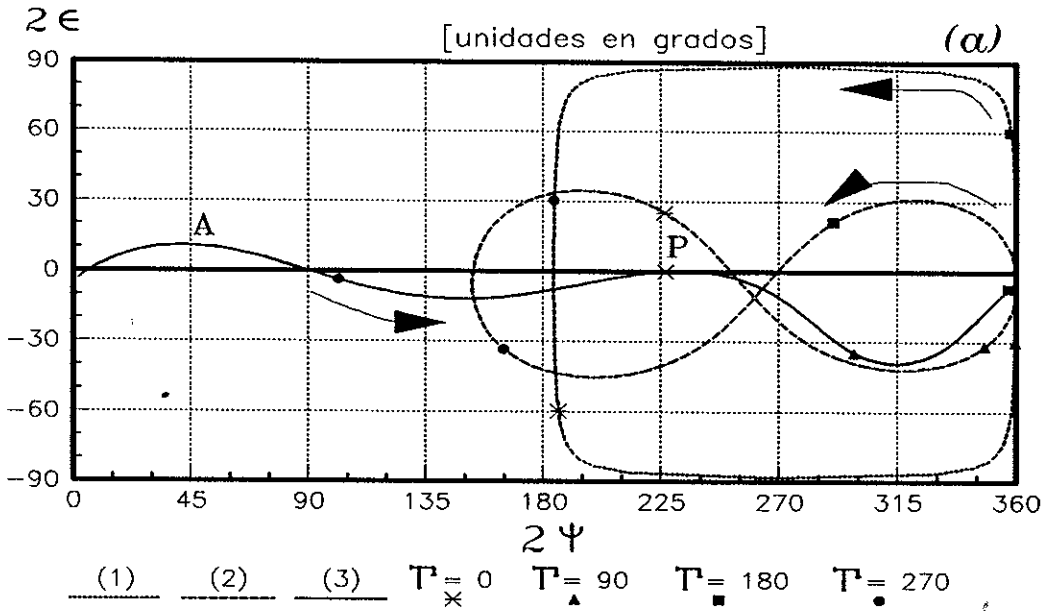


Figura 19. Trayectorias aisladas obtenidas para el modulador: (a) iniciales, (b) finales.



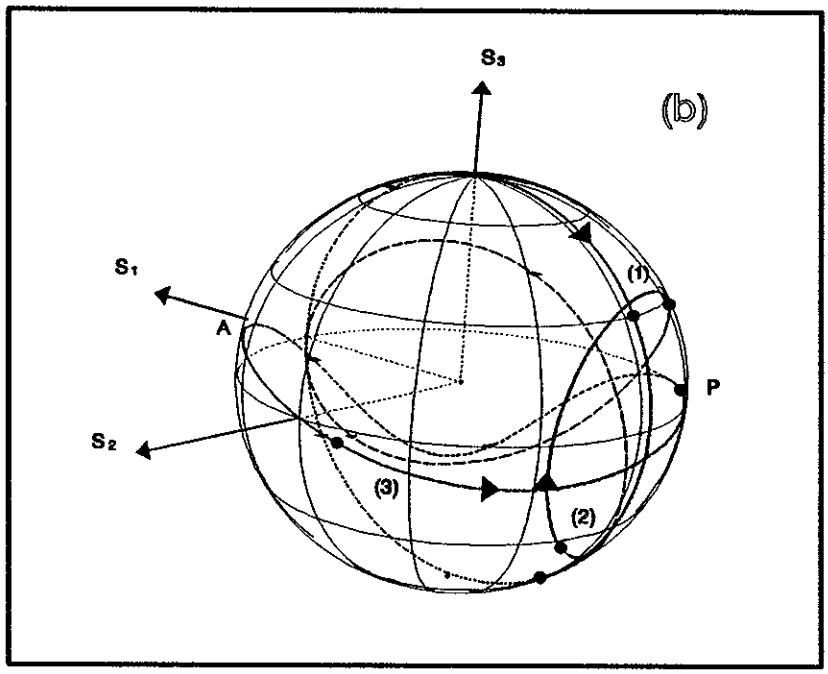


Figura 20. Trayectorias reales obtenidas para el modulador:
(a) representación mapamundi,
(b) representación tridimesnional.

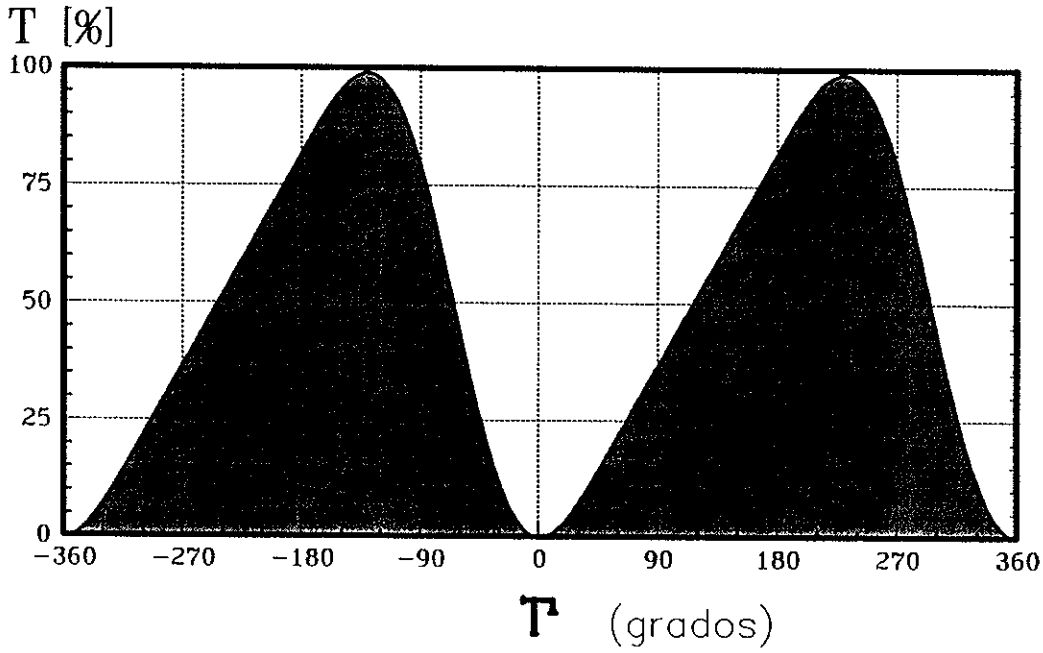
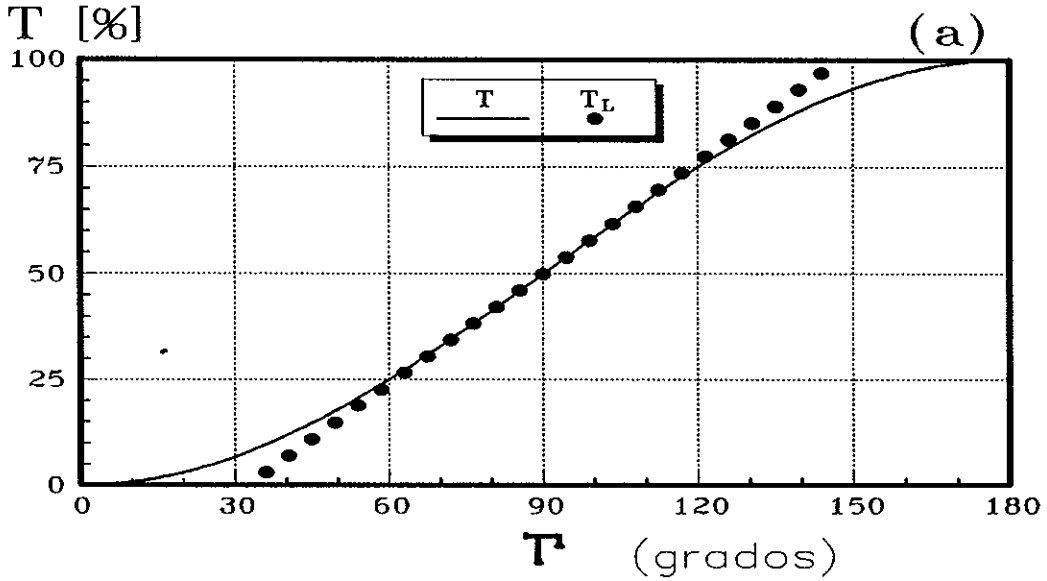


Figura 21. Curva de transmitancia para el modulador diseñado.

Tabla I. Parámetros del modulador diseñado.

Orientación	Valor en grados	Retardamiento	Valor en grados
ψ_P	113.482	Γ_T	229.7
ψ_{F1}	45.973	Γ_1	239.845
ψ_{F2}	84.281	Γ_2	250.838
ψ_{F3}	160.681	Γ_3	- 25.205
ψ_A	23.464		



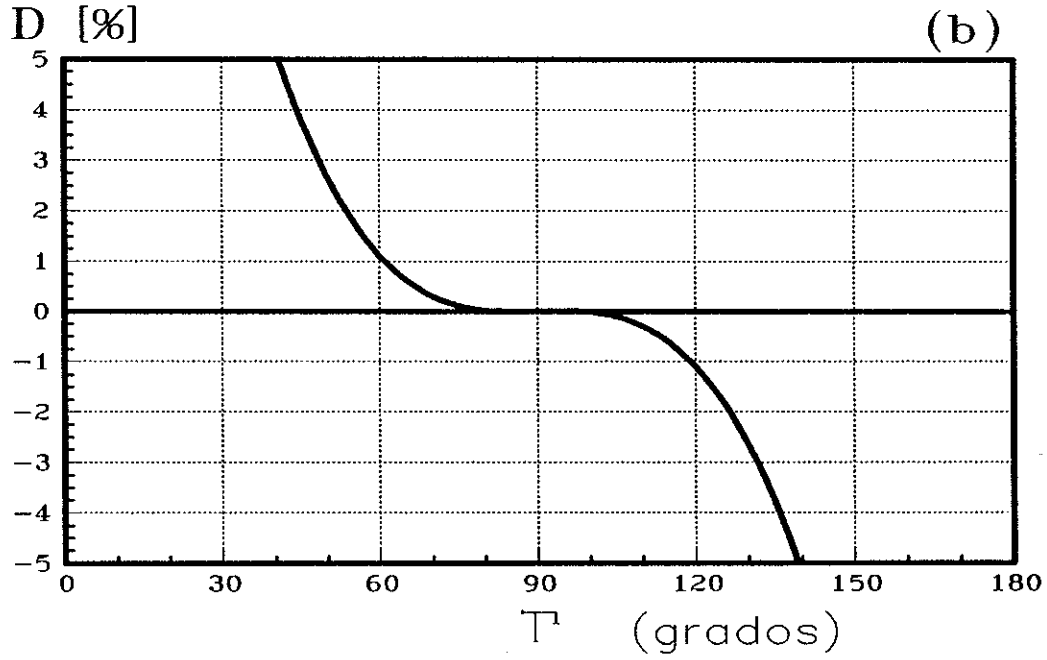
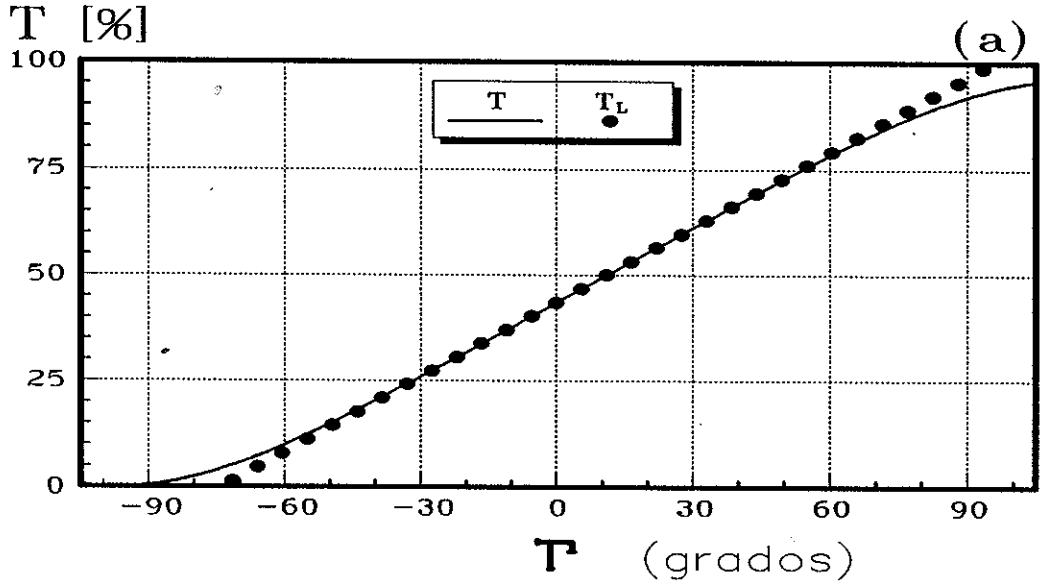


Figura 22. (a) Curvas de transmitancias T y T_L para el modulador convencional, y (b) su diferencia D.

Tabla II. Valores de T, T_L, y D para la figura 22.

Γ [grados]	T [%]	T_L [%]	D [%]
0.000	3.7520E−31	−28.310	28.31000
5.143	0.2013	−23.830	24.03000
10.290	0.8035	−19.360	20.16000
15.430	1.8020	−14.880	16.68000
20.570	3.1880	−10.410	13.60000
25.710	4.9520	−5.934	10.89000
30.860	7.0780	−1.459	8.53700
36.000	9.5490	3.015	6.53400
41.140	12.3500	7.489	4.85700
46.290	15.4500	11.960	3.48300
51.430	18.8300	16.440	2.38800
56.570	22.4600	20.910	1.54300
61.710	26.3100	25.390	0.92010
66.860	30.3500	29.860	0.48800
72.000	34.5500	34.330	0.21420
77.140	38.8700	38.810	0.06467
82.290	43.2900	43.280	0.00477
87.430	47.7600	47.760	−0.00110
92.570	52.2400	52.230	0.01110
97.710	56.7100	56.710	0.00524
102.900	61.1300	61.180	−0.05467
108.000	65.4500	65.660	−0.20420
113.100	69.6500	70.130	−0.47800
118.300	73.6900	74.600	−0.91010
123.400	77.5400	79.080	−1.53300
128.600	81.1700	83.550	−2.37800
133.700	84.5500	88.030	−3.47300
138.900	87.6500	92.500	−4.84700
144.000	90.4500	96.970	−6.52400
149.100	92.9200	101.400	−8.52700
154.300	95.0500	105.900	−10.88000
159.400	96.8100	110.400	−13.59000
164.600	98.2000	114.900	−16.67000
169.700	99.2000	119.300	−20.15000
174.900	99.8000	123.800	−24.02000
180.000	100.0000	128.300	−28.29000



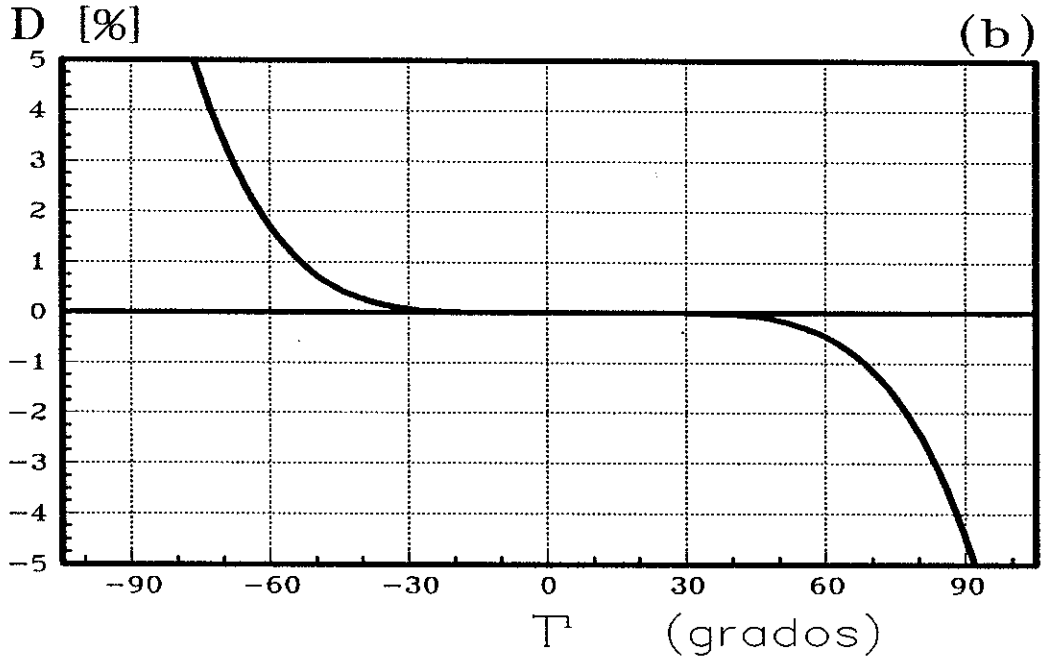
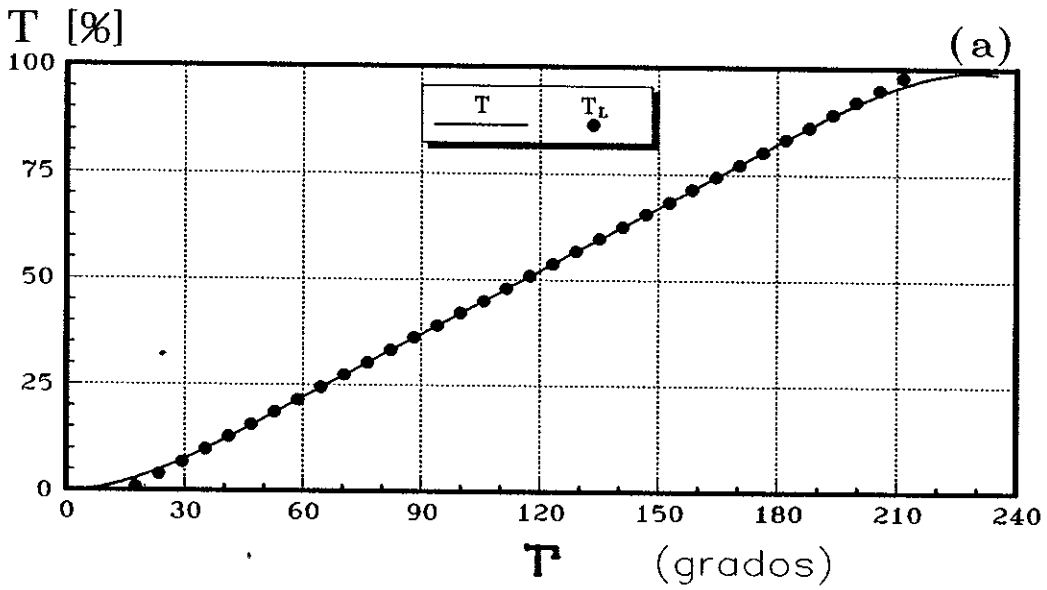


Figura 23. (a) Curvas de transmitancias T y T_L para el modulador de Ammann, y (b) su diferencia D.

Tabla III. Valores de T, T_L, y D para la figura 23.

Γ [grados]	T [%]	T_L [%]	D [%]
−110.000	1.51700	−21.3600	22.87000
−103.700	0.39130	−17.6500	18.04000
−97.430	0.00095	−13.9400	13.94000
−91.140	0.30200	−10.2400	10.54000
−84.860	1.23800	−6.5320	7.77000
−78.570	2.74300	−2.8260	5.56900
−72.290	4.74500	0.8803	3.86500
−66.000	7.17100	4.5860	2.58500
−59.710	9.94700	8.2920	1.65400
−53.430	13.00000	12.0000	1.00400
−47.140	16.28000	15.7000	0.57120
−40.860	19.71000	19.4100	0.29890
−34.570	23.26000	23.1200	0.14010
−28.290	26.88000	26.8200	0.05617
−22.000	30.55000	30.5300	0.01777
−15.710	34.24000	34.2300	0.00380
−9.429	37.94000	37.9400	0.00054
−3.143	41.65000	41.6500	0.00037
3.143	45.35000	45.3500	0.00020
9.429	49.06000	49.0600	−0.00021
15.710	52.77000	52.7700	−1.71700E−07
22.000	56.47000	56.4700	0.00103
28.290	60.18000	60.1800	0.00068
34.570	63.88000	63.8800	−0.00725
40.860	67.55000	67.5900	−0.03439
47.140	71.20000	71.3000	−0.09904
53.430	74.77000	75.0000	−0.22710
59.710	78.25000	78.7100	−0.45280
66.000	81.59000	82.4100	−0.81860
72.290	84.74000	86.1200	−1.37500
78.570	87.64000	89.8300	−2.18200
84.860	90.23000	93.5300	−3.30100
91.140	92.43000	97.2400	−4.80400
97.430	94.18000	100.9000	−6.76100
103.700	95.41000	104.6000	−9.24200
110.000	96.04000	108.4000	−12.31000



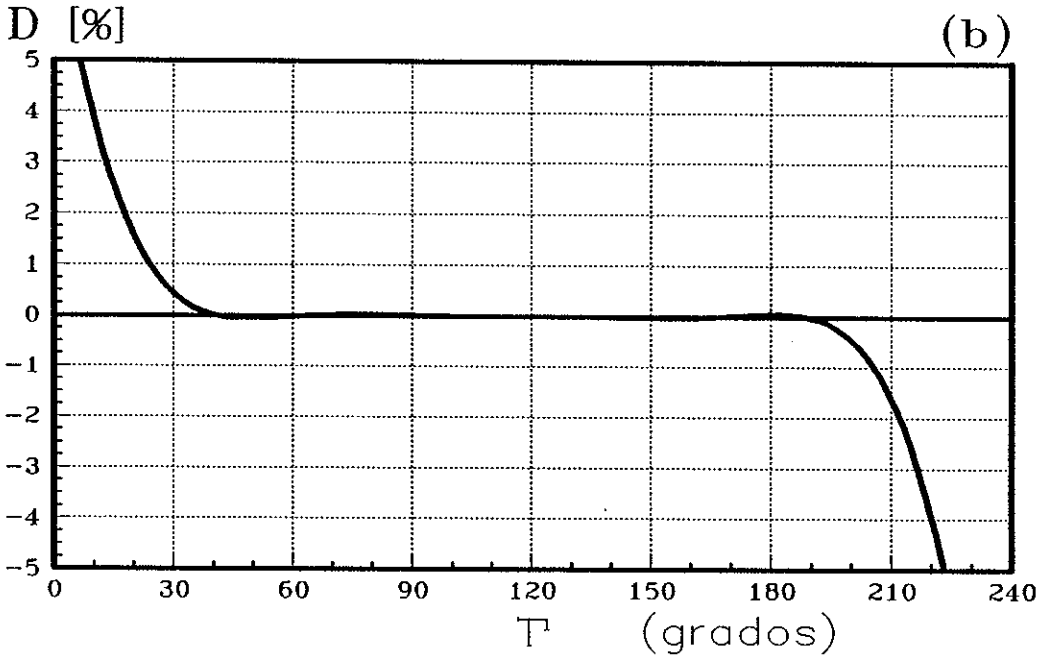


Figura 24. (a) Curvas de transmitancias T y T_L para el modulador diseñado, y (b) su diferencia D.

Tabla IV. Valores de T, T_L, y D para la figura 24.

Γ [grados]	T [%]	T_L [%]	D [%]
0.000	1.0080E−05	−7.847	7.84700
6.714	0.4713	−4.490	4.96100
13.430	1.7780	−1.133	2.91100
20.140	3.7640	2.224	1.54000
26.860	6.2750	5.581	0.69350
33.570	9.1640	8.938	0.22540
40.290	12.3100	12.300	0.00991
47.000	15.6000	15.650	−0.05517
53.710	18.9600	19.010	−0.04558
60.430	22.3600	22.370	−0.01173
67.140	25.7400	25.720	0.01798
73.860	29.1100	29.080	0.03226
80.570	32.4700	32.440	0.03129
87.290	35.8200	35.800	0.02114
94.000	39.1600	39.150	0.00923
100.700	42.5100	42.510	0.00102
107.400	45.8700	45.870	−0.00151
114.100	49.2200	49.220	0.00014
120.900	52.5800	52.580	0.00222
127.600	55.9400	55.940	0.00078
134.300	59.2900	59.300	−0.00629
141.000	62.6300	62.650	−0.01779
147.700	65.9800	66.010	−0.02889
154.400	69.3300	69.370	−0.03239
161.100	72.7000	72.720	−0.02156
167.900	76.0900	76.080	0.00540
174.600	79.4800	79.440	0.04008
181.300	82.8500	82.800	0.05809
188.000	86.1700	86.150	0.01392
194.700	89.3500	89.510	−0.16280
201.400	92.3000	92.870	−0.56860
208.100	94.9000	96.220	−1.32500
214.900	97.0100	99.580	−2.57400
221.600	98.4700	102.900	−4.47000
228.300	99.1300	106.300	−7.17000
235.000	98.8300	109.700	−10.82000

Tabla V. Parámetros para los moduladores.

Valores en grados	modulador convencional	modulador de Ammann	modulador diseñado
ψ_P	0	99	113.482
ψ_{F1}	45	4.667	45.973
Γ_1	0	169.023	239.845
ψ_{F2}	**	54.2	84.281
Γ_2	**	258.977	250.838
ψ_{F3}	**	- 76.267	160.681
Γ_3	**	348.931	- 25.205
ψ_A	90	9.067	23.464
m	0.87	0.5896	0.5
b	- 28.305	43.5	- 7.8473
Configuración óptica	Figura 2	Figura 6	Figura 14

Tabla VI. Características de operación para los moduladores.

Modulador	$D = T - T_L$	ΔT	V_T
Convencional	$\pm 1\%$	$\approx 50\%$	$180° = V_\pi$
Ammann	$\pm 1\%$	$\approx 70\%$	$210° = 1.17 V_\pi$
diseñado	$\pm 1\%$ $\pm 0.5\%$ $\pm 0.055\%$	$\approx 90\%$ $\approx 85\%$ $\approx 75\%$	$229.7° = 1.27 V_\pi$

V. CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha estudiado el problema de la no-linealidad en la curva de transmitancia de un modulador electro-óptico, obteniéndose como resultado un nuevo diseño que exhibe una alta linealidad en su curva de respuesta.

El método convencional (Respuesta Impulso) para el diseño de estos moduladores, nos proporciona una solución a este problema, sin embargo no es la óptima. Para poder plantear otra solución a este problema, fué necesario realizar (desde una nueva perspectiva) un estudio de los fenómenos de polarización óptica sobre los dispositivos de modulación por birrefringencia inducida.

El método de la Esfera de Poincaré, el cual nos brinda un procedimiento gráfico muy efectivo para el análisis de luz polarizada, ha sido presentado como una herramienta muy útil para plantear y resolver problemas de la óptica de cristales, no solo cualitativamente sino también cuantitativamente. Las ecuaciones (35), (39) y (41) deducidas en la presente tesis son de caracter general, y pueden ser utilizadas para obtener la transmitancia en intensidad así como información cuantitativa sobre los fenómenos de polarización que ocurren dentro de un dispositivo birrefringente. Aunque el comportamiento de muchos dispositivos pueden modelarse a partir de tres elementos ideales

(polarizador, rotador y retardador), utilizando las Matrices de Mueller apropiadas, las ecuaciones (35), (39) y (41) pueden ser re-escritas para describir directamente la acción de componentes tales como retardadores dicroicos y retardadores elípticos.

Lo más relevante de nuestro estudio sobre la Esfera de Poincaré, no lo constituyen las ecuaciones paramétricas en sí, sino la forma en las que éstas son utilizadas: para cualquier dispositivo cristalino con propiedades de polarización, existen dos tipos de trayectorias que se pueden dibujar sobre la Esfera de Poincaré, a las cuales hemos denominado trayectorias aisladas y reales. Para obtener estas trayectorias se emplean las mismas ecuaciones paramétricas, sólo que en el primer caso, se utilizan las mismas coordenadas del estado de polarización emergente producidas por el propio retardador (o rotador) que se está evaluando; mientras que para las trayectorias reales, se utilizan las coordenadas del estado de polarización emergente que corresponde al mismo valor de Γ (o γ) producido por el retardador (o rotador) anterior. De hecho entonces, solo estamos asumiendo que el dispositivo está operando bajo un retardamiento constante o variable en cada caso.

Se propuso en esta tesis, un procedimiento para el diseño de un modulador electro-óptico con una respuesta extremádamente lineal; debido a que la síntesis se plantea en función del

voltaje V_T (o V_π), el resultado es válido para cualquier tipo de cristales con los que se construya al modulador. Básicamente, el procedimiento consiste en obligar a que las trayectorias que un arreglo óptico produce sobre la Esfera de Poincaré, correspondan a un perfil de transmitancia predeterminado. En principio, este criterio no se limita al diseño de un modulador, sino que puede utilizarse como un método general de diseño (cuantitativo) para otros dispositivos birrefringentes. En nuestro caso encontramos, que el criterio para escoger el valor de Γ_T tiene una gran influencia en la respuesta del modulador.

Realizando un análisis comparativo entre el método de la Respuesta Impulso (método RI) y el método de la Esfera de Poincaré (método EP), encontramos que se complementan en muchos aspectos y resulta muy conveniente trabajarlos en conjunto. Las ventajas (y desventajas) de cada uno de ellos son las siguientes:

i) Contrariamente al método EP, el método RI no contempla dispositivos birrefringentes que contienen rotadores ópticos (i.e. un aislador compensado, los filtros de Hurbult, un modulador Faraday, etc.).

ii) Exceptuando la situación anterior, ambos métodos son de carácter general, solo que el método EP busca soluciones numéricas mediante aproximaciones sucesivas y una interacción gráfica; mientras que el método RI requiere el planteamiento y

solución de ecuaciones mediante su manipulación algebráica.

iii) El método EP utiliza siempre el mismo tipo de ecuaciones paramétricas, adaptadas a las características del dispositivo bajo diseño. Aunque ésto es muy ventajoso, requiere de una muy buena comprensión (o experiencia) sobre el comportamiento de los dispositivos y su identificación sobre la Esfera de Poincaré.

iv) Alternativamente al punto anterior, el método RI necesita plantear expresiones matemáticas escencialmente distintas para cada dispositivo y manipularlas algebráicamente antes de poder buscar soluciones numéricas. Aunque esto es tedioso y en ocasiones muy complicado, no requiere de ningún conocimiento particular sobre el dispositivo que se diseña. Por el contrario, éste procedimiento propone teoremas matemáticos, que nos ayudan a conocer propiedades del dispositivo, y que pueden ser muy útiles para el método EP.

v) Si el número de elementos ópticos de un dispositivo se incrementa (i.e. el número de retardadores), el método EP no se complica demasiado, ya que requiere escencialmente de la comprensión global del funcionamiento del dispositivo. De hecho, si dos dispositivos son del mismo tipo (i.e. un modulador de tres etapas y otro de cuatro), el procedimiento es muy similar.

Sin embargo, en la medida que el número de elementos aumenta, se requiere de una mayor capacidad en equipo de cómputo (memoria, programación, etc.).

vi) Debido a que en el método RI la ecuación de transmitancia es expresada mediante una serie exponencial (trigonométrica), si el número de elementos ópticos involucrados son muchos, las ecuaciones se complican demasiado. Incluso si dos dispositivos son del mismo tipo, requiere de un planteamiento matemático particular para cada caso. Además, la curva de transmitancia deseada se debe poder aproximar mediante una serie de Fourier: esto establece un compromiso directo (que puede ser limitante) en cuanto al número mínimo de cristales que se deben incluir en el arreglo óptico.

vii) Lo más relevante del método EP, es que nos puede proporcionar directamente un análisis cualitativo de un sistema óptico. Al observar la evolución del estado de polarización durante el paso de la luz a través del dispositivo, nos ayuda a sugerir intuitivamente cuales elementos deben ser modificados para obtener una respuesta deseada; o bién para saber si en determinadas condiciones un dispositivo óptico es totalmente equivalente a otro. En particular, la transmitancia de muchos sistemas ópticos se pueden visualizar observando la proyección de sus trayectorias reales a lo largo de un eje ecuatorial (i.e. S_1).

viii) El método RI nos permite conocer los impulsos luminosos que van transmitiendo cada uno de los elementos del sistema óptico, y establecer (matemáticamente) propiedades de simetría y equivalencia. Sin embargo, únicamente nos proporciona un análisis cualitativo para el sistema óptico completo: de una manera indirecta mediante la transformada de Fourier de su transmitancia.

Como se mencionó en el Capítulo III.2, en busqueda de una utilización más práctica de la esfera, diferentes proyecciones ortográficas y estereográficas fueron propuestas por varios autores. Respecto a las trayectorias aisladas y sus representaciones planares, existe un punto importante a considerar: las operaciones fundamentales en la esfera están definidas como trayectorias circulares sobre su superficie (rotaciones alrededor de algún diámetro). La simplicidad de éstas operaciones, las cuales convierten a la Esfera de Poincaré en un método intuitivo y poderoso, se pierde en su representación bidimensional. En general, los trazos circulares (cerrados) sobre la esfera, se transforman en líneas curvas no-circulares sobre un plano, cuyas trayectorias aisladas no evolucionan tan fácilmente como lo hacen en tres dimensiones. En el pasado, trabajar con un modelo tridimensional no fué una tarea fácil. Algunos modelos de la esfera provistos de escalas graduadas fueron construídos (Capítulo III.2.3.1), pero se limitaban a

describir las trayectorias aisladas, y fueron utilizados como una regla de cálculo para encontrar soluciones rápidas en problemas de polarización óptica.

Con la ayuda de una computadora, las ecuaciones paramétricas presentadas en ésta tesis, contribuyen a un manejo más eficiente de la Esfera de Poincaré. Actualmente, las computadoras personales así como diferentes programas computacionales que permiten graficar y rotar curvas en tres dimensiones, se han vuelto sumamente accesibles. Entonces, utilizando ésta tecnología moderna, la esfera puede ser fácilmente manipulada en tres dimensiones, tal como fué concebida inicialmente por Poincaré, y nuevas aplicaciones pueden ser exploradas. En particular, usando éste método hemos diseñado un modulador que muestra una excelente respuesta lineal ($|D| \leq 1\%$) sobre un amplio rango de modulación ($\Delta T \approx 90\%$) .

Futuras Líneas de Investigación.

i) Estudiar la combinación óptima que se puede obtener al conjuntar las técnicas electrónicas de linearización con la Esfera de Poincaré.

ii) Estudiar los efectos colaterales que se introducen al diseñar un modulador lineal de varias etapas (cristales): efectos capacitivos y su respuesta en frecuencia, dispersión

térmica de la birrefringencia (efecto Joule), tolerancias de corte y alineación, influencia de la dispersión (en frecuencia y temperatura) del tensor electro-óptico.

iii) Ampliar los efectos que se pueden incluir al utilizar la Esfera de Poincaré, como lo serían el uso de polarizadores parciales, retardadores elípticos, elementos dicroicos, etc., en el diseño de dispositivos de modulación.

iv) Estudiar el diseño de otros dispositivos que exhiben birrefringencia inducida (aisladores acromáticos, etc.) utilizando las ecuaciones paramétricas de la Esfera de Poincaré, para evaluar su utilidad como un procedimiento general de síntesis.

v) En forma paralela al diseño del modulador, se inició el estudio para la síntesis de un modulador lineal de dos etapas, así como para la síntesis de un dispositivo para la caracterización de materiales cristalinos (retardamiento en placas de baja birrefringencia y cristales electro-ópticos).

vi) Resulta interesante estudiar con la Esfera de Poincaré, la analogía que presenten algunas componentes ópticas de polarización (tales como cristales fotorefractivos, polarizadores elípticos, etc.) respecto a las componentes de un sistema dinámico convencional [Ogata, 1970] (tales como R, L , C en un circuito eléctrico), para una mayor comprensión sobre su comportamiento y aplicaciones.

LITERATURA CITADA.

Ammann E.O., 1967, Birefringent devices, Tech. Rept. NAS8-20570, Sylvania Electronic Systems, Mountain View, California, U.S.A.

Ammann E.O., J.M. Yarborough, 1968, Synthesis of electrooptic modulators for amplitude modulation of light, IEEE J. of Quant. Elec. QE-4, 4 (4) : 209-221.

Ammann E.O., 1971, Synthesis of Optical Birefringent Networks, p. 123-177 (Cap. IV). En : Progress in optics Volume IX, (E. Wolf, Ed.), North Holland P.C., Amsterdam.

Brosseau Ch., 1991, Polarization transfer and entropy transformation, Optik, 88 (3) : 109-117.

Carlslaw H.S., 1950, An introduction to the theory of Fourier's series and integrals, Third edition, Dover Pub. Inc., New York.

Chinn S.R., 1989, Differential coupled mode analysis and the Poincaré Sphere, Appl. Opt., 28 : 1661-1665.
ERRATUM en Appl. Opt. 28 : 3795.

Feldman A., 1978, Ultralinear bistable electro-optic polarization modulator, Appl. Phys. Lett., 33 (3) : 243-245.

García Weidner A., 1985, Grabación de imágenes en moduladores espaciales para procesado óptico de información, Tésis de Maestría CICESE, Ensenada B.C.

García Weidner A., 1987a, Tunable optical birefringent filters used as light modulators, Notas de Fisíca UNAM, 10 (3): 96-98.

García Weidner A., 1987b, Performance characteristics of a correlation light modulator using ADP crystals, Notas de Física UNAM, 10 (3): 99-101.

García Weidner A., 1988, Filtros ópticos sintonizables utilizando moduladores electroópticos retroalimentados, p. 131-141. En : Memorias V Seminario Anual de Metrología, CINVESTAV / IPN, México D.F.

García Weidner A., 1989a, Biestabilidad óptica en moduladores electroópticos sin utilizar retroalimentación optoelectrónica, p.267-274. En : Memorias VI Seminario Anual de Metrología, CINVESTAV / IPN, México D.F.

García Weidner A., 1989b , La integración de dispositivos electroópticos con computadoras electrónicas, p. 1-19. En : Memorias del XIV Simposium Internacional de Sistemas Computacionales, ITESM, Monterrey N.L.,México.

García Weidner A., 1989c, Bistable characteristics on a single mirrorless electrooptic light modulator, Notas de Física UNAM, 12 : 87-90.

García Weidner A., 1989d, Modulación ultralineal en un modulador por correlación de dos etapas, Supl.Bol.Soc.Mex.Fis., 3 (2): 32.

García Weidner A., 1989e , Moduladores electroópticos, Comunicaciones Académicas CIOPP9102, CICESE, Ensenada B.C.

García Weidner A., 1992a, The Poincaré Sphere: isolated and real trajectories describing the state of polarization, J. Optics (Paris), 22 (6) : 10 pags.
Se encuentra en proceso de impresión.

García Weidner A., 1992b, The Poincaré Sphere Method: design of an ultralinear Pockels effect modulator, Appl. Opt. (Optical Technology). Sometido a publicación en Oct.18 1991. (Comunicaciones Académicas CPOPA9114, CICESE Ensenada B.C.).

García Weidner A., M. Yamada Shinoda, 1988, Moduladores electroópticos tipo ADP-45 Z, Supl.Bol.Soc.Mex.Fis., 2 : 28.

García Weidner A., M. Yamada Shinoda, 1989, Los Transistores Opticos, Revista de Información Científica y Tecnológica ICYT (CONACYT), 11 (150) : 8-9.

Hauge P.S., R.H. Muller, C.G. Smith, 1980, Conventions and formulas for using the Mueller-Stokes calculus in ellipsometry, Surface Sci., 96 : 81 -107

Henry M., S. Mallick, D. Rouede, L.E. Celaya Salcido, A. García Weidner, 1986, Propagation of light in an optically active electrooptic crystal of Bi_{12} SiO_{20}: measurement of the electro-optic coefficient, J. Appl. Phys., 59 (8): 2650-2654.

Hsu H., M. Richartz, Y. Liang, 1947, A generalized intensity formula for a system of retardation plates, J. Opt. Soc. Am., 37 (2) : 99-106.

Jerrard H.G., 1954, Transmission of light through birefringent and optically active media: the Poincaré Sphere, J. Opt. Soc. Am., 44 : 634-640.

Johnson M., 1981, Poincaré sphere representation of birefringent networks, Appl. Opt. 20 : 2075-2080.

Kliger D.S., J.W. Lewis, C.E. Randall, 1990, Polarized light in optics and spectroscopy, Academic Press, San Diego.

Koester Ch. J., 1959, Achromatic combinations of half-wave plates, J. Opt. Soc. Am., 49 : 405-409.

Korotky S.K., 1986, Three-space representation of phase-mismatch swithing in coupled two-state optical systems, IEEE J. Quantum Electron., QE-22: 952-958.

Morales Magallanes A., 1990, Estudio de la birreringencia inducida en una fibra óptica monomodo por el efecto fotoelástico, Tésis de Maestría CICESE, Ensenada B.C.

Morales Magallanes A., A. García Weidner, 1989, Regulador de intensidad luminosa en forma de fibra óptica, Supl.Bol.Soc.Mex.Fis., 3 (2): 9.

Ogata K., 1970, Modern control engineering, Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Okoshi T., 1986, A planar chart equivalent to Poincaré sphere for expressing state-of-polarization of light", IEEE J. Lightwave Technol. LT-4, 4 : 1367-1372.

Pellat-Finet P., 1990, An introduction to a vectorial calculus for polarization optics, Optik, 84 (5) : 169 - 175.

Pellat-Finet P., 1991a, Geometrical approach to polarization optics: I-Geometrical structure of polarized light, Optik, 87 (1) : 27 - 33.

Pellat-Finet P., 1991b, Geometrical approach to polarization optics: II-Quaternionic representation of polarized light, Optik, 87 (2) : 68 - 76.

Poincare H., 1892, Polarisation rotatoire.- Theorie de M. Mallard, p. 275-306, En : Theorie mathematique de la lumiere (Vol. II, Chap. XII), Georges Carre Ed., Paris.

Ramachandran G.N., R. Ramaseshan, 1961, Crystal optics, p. 1-217. En : Encyclopedia of physics (Vol. xxv/1), S. Flugge Ed., Springer-Verlag, Berlin.

Solc I., 1965, Birefringent chain filters, J. Opt. Soc. Am., 55 : 621-625.

Takenaka H., 1973, A unified formalism for polarization optics by using group theory (Part I), Japan J. Appl. Appl. Phys. 12 : 226-231.

Tedjojuwono K.K., W.W. Hunter, S.L. Ocheltree, 1989, Planar Poincaré Chart: a planar graphic representation of the state of light polarization, Appl. Opt. 28 : 2614-2622. ERRATA en Appl. Opt. 28 : 4733.

Theocaris P.S., 1979, Elliptic polarization represented by the Carter and Smtih Charts, Appl. Opt., 18 : 4017-4024.

Theocaris P.S., E.E. Gdoutos, 1979, Matrix theory of photoelasticity, Springer-Verlag, Berlin.

Theocaris P. S., 1980, Stokes parameters in elliptic polarization defined by the j, k, l-vector trihedron, Optik, 55 : 141-156.

Ulrich R., 1977, Representation of codirectional coupled waves, Opt. Let., 1 : 109-111.

Ulrich R., A. Simon, 1979, Polarization optics of twisted single-mode fibers, Appl. Opt. 18 : 2241-2251.

Yarborough J.M., E.O. Ammann, 1968, Experiments on a multistage electrooptic amplitude modulator, IEEE J. of Quant. Elec. QE-4, 4 (4) : 230-232.

Yariv A., P. Yeh, 1984, Optical waves in crystals, John Wiley, New York.

Yeh P., 1979, Transmission spectrum of a Solc filter, Opt. Commm., 29 (1) : 1-6.