

TESIS DEFENDIDA POR
Héctor Javier Estrada García
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez
Codirector del Comité

Dr. Claude Moog
Codirector del Comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Miembro del Comité

Dr. Yuri Orlov
Miembro del Comité

Dr. Jean-Pierre Richard
Miembro del Comité

Dr. Jesús de León Morales
Miembro del Comité

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez
*Coordinador del programa de posgrado
en Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
*Encargado del despacho de la
Dirección de Estudios de Posgrado*

Marzo de 2008

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS CON RETARDOS EN LA
TRANSMISIÓN DE DATOS**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

HÉCTOR JAVIER ESTRADA GARCÍA

Ensenada, Baja California, México, Marzo de 2008

RESUMEN de la tesis de **HÉCTOR JAVIER ESTRADA GARCÍA**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **DOCTOR EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES** con orientación en **INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL**. Ensenada, Baja California. Marzo de 2008.

SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS CON RETARDOS EN LA TRANSMISIÓN DE DATOS

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez
Codirector de Tesis

Dr. Claude Moog
Codirector de Tesis

En esta tesis se aborda el problema de sincronización para sistemas mecánicos con retardos en el canal de comunicaciones, en donde se considera que los retardos son relativamente grandes pero acotados, y se propone una solución. La técnica propuesta es causal, por lo que no se requiere la utilización de predictores o considerar los efectos del retardo como una perturbación. Dicha propuesta se basa en la información disponible sobre la estructura de los sistemas y la teoría de estabilización para sistemas lineales con retardos. Se realiza el estudio del problema de sincronización de dos dispositivos mecánicos distantes (uno en Nantes, Francia; el otro en Ensenada, México), intercomunicados a través de la red Internet, usando un dispositivo subactuado, el cual es un péndulo invertido con una unión prismática. Los resultados obtenidos son ilustrados mediante experimentos. Otra contribución de esta tesis es la propuesta de soluciones causales al problema de seguimiento de trayectoria. Los resultados de esta tesis son una nueva aportación a los trabajos de sincronización y de desacoplamiento de perturbaciones que hasta la fecha se han reportado.

Palabras Clave: Retardos, Péndulo Invertido, Causal, Sincronización

ABSTRACT of the thesis presented by **HÉCTOR JAVIER ESTRADA GARCÍA**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of **DOCTOR OF SCIENCE** in **ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS** with specialization in **INSTRUMENTATION AND CONTROL**. Ensenada, Baja California. March, 2008.

**SYNCHRONIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS WITH TIME-DELAYS IN
THE DATA TRANSMISSION**

In this thesis, the problem of synchronization for mechanical systems with delays in the communication channel is approached, where is considered that the delays are bounded. The proposed technique is causal, the use of predicting or considering the effects of the retardation like a disturbance is not required. This proposal is based on the information available on the structure of the systems and the theory of stabilization for linear systems with delays. We carry out the study of the synchronization problem of two distant mechanical devices (one in Nantes, France; the other in Ensenada, Mexico), communicating by Internet network. We consider an underactuated device which is an inverted pendulum with a prismatic joint. The obtained results are illustrated with experiments. Another contribution of this thesis is the proposition of causal solutions to the problem of trajectory tracking. The results of this thesis constitute a new contribution to work of synchronization with respect to the results reported in the literature.

Keywords: Time-Delays, Inverted Pendulum, Causal, Synchronization

Dedicatoria

Dedico esta tesis a ...

Mis padres por su gran amor y cariño.

Liseth, gracias por estar aquí conmigo cuando lo necesitaba y por aguantar todo este tiempo siempre a mi lado, te quiero mucho y siempre estaré contigo.

Agradecimientos

A los doctores Luis Alejandro Márquez Martínez y Claude Moog por su apoyo durante mis estudios doctorales.

A los doctores Joaquín Álvarez Gallegos y Iouri Orlov por sus enseñanzas y comentarios para llevar a buen término mi trabajo de tesis, y por aceptar formar parte de mi comité de tesis.

A los doctores Jesús de León y Jean-Pierre Richard por sus atinados comentarios en la revisión de mi tesis y por aceptar formar parte de mi comité.

A todos mis compañeros y amigos con los cuales tuve el gusto de convivir durante mi estancia en el CICESE así como en el IRCCyN.

Un agradecimiento muy especial a Juan Pablo Vite por su valiosa amistad y compañía durante todo el tiempo que tenemos de conocernos.

A Oscar Gomes por su valiosa ayuda y amistad, a Araceli Garate ya que sin su ayuda no podría haber terminado mis experimentos.

A Ollin Peñaloza, David Tlalolini, Jonatan Peña y Sergio Espinoza por las batallas memorables en las discusiones así como en otros asuntos, gracias por compartir su amistad conmigo.

A María, Daniela, Minerva, Lis, Ale Mina y Rubén, Jorge Acosta, gracias por su amistad.

A Moisés Miranda, Raúl Santiesteban y todos aquellos con los que tuve la fortuna de convivir alguna vez y que por el momento olvido.

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de CONACYT, a través de la beca de doctorado (ref. 170370), y del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE. Apoyo adicional ha sido amablemente brindado por el Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, IRCCyN, la Ecole Centrale de Nantes, la Université de Nantes y el gobierno francés a través de la beca EIFFEL DOCTORAT.

Contenido

Página

I. Introducción general.	1
I.1. Teleoperación, sistemas con retardos y sincronización.	1
I.2. Formulación del problema	3
I.3. Contribuciones.	4
I.4. Descripción de la tesis.	5
II. Solución del seguimiento de trayectoria.	8
II.1. Introducción.	8
II.2. Definiciones preliminares y notación.	10
II.2.1. Sistemas considerados.	10
II.2.2. Definiciones matemáticas.	10
II.3. Solución por retroalimentación estática.	13
II.4. Solución por retroalimentación estática con dinámica retardada.	18
II.5. Conclusiones de capítulo.	29
III. Modelo y propiedades del péndulo ECP505.	30
III.1. Introducción.	30
III.2. Análisis teórico del ECP505.	30
III.3. Realización en el espacio de estados.	34
III.4. Puntos de equilibrio.	35
III.5. Parámetros del sistema.	37
III.6. Estabilidad local.	39
III.7. Conclusiones de capítulo.	41
IV. Control local del péndulo.	42
IV.1. Modelos de fricción.	43
IV.2. Prelinealización.	45
IV.3. Linealización máxima.	47
IV.4. Comparación entre observadores y derivador.	51
IV.4.1. Observador para sistemas lagrangianos de n grados de libertad.	51
IV.4.2. Observador para sistemas lagrangianos de n grados de libertad reducido.	55

IV.4.3.	Diferenciador robusto exacto de segundo orden.	56
IV.4.4.	Resultados experimentales de los observadores y el diferenciador.	58
IV.5.	Conclusiones de capítulo.	62
V.	Sincronización de dos péndulos invertidos con retardos en la comunicación.	63
V.1.	Definición de sincronización	64
V.2.	Ejemplo.	65
V.3.	Ecuaciones diferenciales lineales con retardos.	68
V.4.	Sincronización maestro-esclavo.	69
V.4.1.	Definición del problema.	69
V.4.2.	Solución causal.	70
V.5.	Conclusiones de capítulo	77
VI.	Plataforma experimental y resultados.	78
VI.1.	Esquema de sincronización.	78
VI.2.	Resultados experimentales.	80
VI.2.1.	Experimentación local.	80
VI.2.2.	Experimentación a distancia: IRCCyN - CICESE.	81
VI.3.	Conclusiones de capítulo.	87
VII.	Conclusiones generales.	89
VII.1.	Aportaciones principales.	91
VII.2.	Trabajo a futuro.	91
VIII.	Résumé en français.	93
VIII.1.	Introduction.	93
VIII.1.1.	Contributions.	95
VIII.1.2.	Plan de la thèse.	96
VIII.2.	Résolution de la poursuite de trajectoire avec des équations d'erreur sans retard.	97
VIII.2.1.	Notations et définitions préliminaires.	99
VIII.2.2.	Solution par bouclage statique.	101
VIII.2.3.	Solution par bouclage statique avec dynamique retardée.	101
VIII.3.	Commande locale du pendule.	105
VIII.3.1.	Pré-linéarisation.	106
VIII.3.2.	Linéarisation maximale.	108
VIII.4.	Synchronisation de deux pendules inverses avec retards dans la communication.	111
VIII.4.1.	Définition de synchronisation	112
VIII.4.2.	Équations d'erreur linéaires avec des retards.	113
VIII.4.3.	Synchronisation maître - esclave.	114
VIII.5.	Mise en oeuvre et résultats expérimentaux.	119
VIII.6.	Conclusions.	127

A. Programas realizados en Matlab	130
Bibliografía	135

Lista de Figuras.

Figura	Página
1. Diagrama de cuerpo libre del ECP 505.	31
2. Diagrama del modelo de control.	43
3. Seguimiento de trayectoria utilizando el observador robusto.	58
4. Señal de error.	59
5. Comparación entre el observador robusto y el derivador.	60
6. Seguimiento de trayectoria utilizando el observador reducido.	60
7. Señal de error observador reducido.	61
8. Comparación entre el observador reducido y el derivador.	62
9. Esquema de control para el seguimiento de trayectoria.	70
10. Simulación de seguimiento de trayectoria.	72
11. Señal de error en simulación.	72
12. Esquema de sincronización.	73
13. Simulación de sincronización.	75
14. Señal de error de sincronización simulada.	75
15. Sincronización sin considerar el retardo.	76
16. Error en la sincronización sin considerar el retardo.	77
17. Esquema de la plataforma experimental utilizada.	79
18. Respuesta maestro - esclavo con condiciones iniciales iguales.	80
19. Respuesta maestro - esclavo con condiciones iniciales diferentes.	81
20. Sincronización con retardo péndulos virtuales.	82
21. Señal de error en fase para dos péndulos virtuales.	83
22. Señal de entrada de control péndulo virtual.	83
23. Maestro - esclavo con péndulo físico (IRCCyN).	84
24. Señal de error en fase péndulos físico - virtual.	84
25. Gráfica de pérdida de datos:0= no pérdida de dato, 1=dato perdido.	85
26. Sincronización péndulo físico (CICESE) como maestro.	85
27. Señal de error en fase para el péndulo físico como maestro.	86
28. Sincronización con dos péndulos físicos.	86
29. Señal de error en fase para los dos péndulos físicos.	87
30. Señal de entrada de control péndulo mecánico con retardo.	87

31.	Diagramme du modèle de commande.	106
32.	Schéma de commande pour le suivi de trajectoire.	114
33.	Poursuite de trajectoire pour un signal sinusoïdal.	116
34.	Signal d'erreur pour le système maître.	116
35.	Schéma de synchronisation.	117
36.	Simulation de synchronisation.	118
37.	Signal d'erreur synchronisation.	119
38.	Schéma de configuration.	119
39.	Réponse locale de la configuration maître - esclave.	120
40.	Réponse maître - esclave avec des conditions initiales différentes.	121
41.	Réponse maître - esclave pendule virtuel - pendule virtuel.	122
42.	Signal d'erreur de phase entre deux pendules virtuels.	122
43.	Différences entre les données reçues.	123
44.	Synchronisation avec un pendule réel (IRCCyN).	124
45.	Signal d'erreur de phase entre pendules réel - virtuel.	124
46.	Synchronisation avec un pendule réel (CICESE).	125
47.	Signal d'erreur de phase entre pendule réel et virtuel.	125
48.	Synchronisation avec deux pendules réels.	126
49.	Signal d'erreur de phase entre deux pendules réels.	127

Lista de tablas.

Tabla	Página
I. Compensadores considerados.	12
II. Parámetros del péndulo ECP505.	38
III. Valores de los coeficientes usados en la sincronización	69

Capítulo I

Introducción general.

I.1. Teleoperación, sistemas con retardos y sincronización.

La teleoperación permite a los usuarios manipular e interactuar con ambientes remotos utilizando mecanismos robóticos del tipo maestro - esclavo. Las aplicaciones van desde manejo de material nuclear y exploración espacial, donde los usuarios están protegidos de condiciones peligrosas, hasta lo que se conoce como telemanipulación, por ejemplo cirugía de invasión mínima, donde herramientas pequeñas permiten operaciones menos traumáticas en un paciente. Estos sistemas telerobóticos enfrentan muy seguido un reto muy importante: la presencia de retardo en la comunicación entre las localidades del maestro y el esclavo.

Los retardos en tiempo siempre han sido considerados no deseados en la teoría de control, debido a su tendencia de reducir los márgenes de estabilidad del sistema. Algunos libros de control (Gu *et al.*, 2003; Nise, 2000), muestran el efecto del retardo en tiempo en la estabilidad del sistema: reducen el margen de fase. Por otra parte, una gran cantidad de trabajos existentes tratan el análisis y diseño de controladores para estabilizar sistemas que presentan inestabilidad debido a los retardos (Dugard y Verriest, 1998; Gorecki *et al.*, 1989).

En años recientes, los esfuerzos de investigación han sido enfocados al estudio de compor-

tamientos dinámicos y estabilidad de sistemas con retardos conmensurados y no conmensurados (ver e.g. Gu *et al.*, 2003 y referencias incluidas). En el trabajo de tesis de (Witrant, 2005) se presenta un estudio de la estabilidad de sistemas controlados a través de redes, y se muestra su aplicación al péndulo invertido ECP505 en configuración de red local. Un esquema de control que garantiza, bajo ciertas consideraciones, estabilidad de un teleoperador bilateral controlado para cualquier retardo en la comunicación fue presentado primeramente en (Anderson y Spong, 1989). Desde entonces, el problema de estabilización de teleoperadores bilaterales controlados en presencia de retardos en la comunicación ha atraído considerablemente la atención de algunos investigadores (Alvarez-Gallegos *et al.*, 1997; Leung *et al.*, 1995; Niemeyer y Slotine, 2004; Zhu y Salcudean, 2000; Niculescu y Gu (Eds), 2004). Un estudio comparativo de diferentes esquemas de control para teleoperación con retardos en la comunicación puede ser encontrado en (Arcara y Melchiorri, 2002). Un estudio de control y observación de sistemas con retardos variables se presenta en (Seuret, 2006).

La sincronización puede ser definida como la mutua correspondencia en tiempo de dos o más procesos (Pikovsky *et al.*, 2001). En muchos sistemas de la naturaleza y sistemas creados por el hombre la sincronización es un fenómeno natural, como por ejemplo, la sincronización de dos relojes de péndulo sujetos a una barra flexible comun.

El fenómeno de sincronización produce que un conjunto de sistemas con interacciones o interconexiones pueda realizar una función o tarea común. Esta característica puede ser de mucha utilidad, y en algunos casos necesaria, por ejemplo en generadores de potencia (Ivanescu *et al.*, 2000), arreglos de mecanismos con aplicaciones industriales como pintura, ensamble y transporte. Sin embargo, en muchos de estos sistemas el fenómeno de sincronización no se presenta en forma natural, por lo que se deben agregar interconexiones artificiales o un sistema adicional cuyo objetivo es generar señales de acoplamiento o control para obtener sincronización entre los sistemas.

Dos esquemas que permiten la sincronización controlada son la configuración maestro -

esclavo y la configuración bidireccional (Rodríguez - Angeles, 2000). En la primera, un sistema, denominado maestro, impone su dinámica al otro sistema denominado esclavo, aunque también se puede tener varios sistemas que actúan como esclavo. En la segunda, la sincronización es el resultado de la interacción de todos los sistemas involucrados ya que la dinámica de cada sistema influye en el resto de los sistemas.

Por otro lado, la sincronización puede ser clasificada por el número de estados sincronizados y por la función que los relaciona. De acuerdo al número de estados sincronizados se clasifica en sincronización completa y en sincronización parcial, si todos o sólo un subconjunto de las variables de estado se sincronizan. De acuerdo a la relación que existe entre los estados la sincronización puede ser idéntica, de fase o aproximada dependiendo de la función que relacione dichos estados.

Una de las aplicaciones más importantes es la sincronización de sistemas mecánicos. En la práctica muchos de estos sistemas trabajan bajo un esquema cooperativo o coordinado, pero en ambos casos la sincronización debe estar presente. Algunas de las aplicaciones de estos sistemas son en ensamble, pintura, doblado, soldadura; en algunas situaciones estas tareas no pueden ser realizadas por un solo sistema y se requieren dos o más robots manipuladores.

Una cantidad importante de trabajos sobre sincronización de sistemas dinámicos, incluyendo la sincronización de mecanismos, consideran que los sistemas son idénticos y que no existen incertidumbres paramétricas ni perturbaciones externas.

I.2. Formulación del problema

El problema de sincronización de sistemas mecánicos es muy extenso y depende tanto del tipo de sistemas y sus limitaciones estructurales y de medición, así como del objetivo de sincronización. En esta tesis restringiremos nuestro estudio a la sincronización de dos péndulos invertidos, ECP505 de ECPSYSTEMS, y a la sincronización controlada en un esquema

maestro - esclavo. Los péndulos considerados son subactuados, es decir, el número de actuadores es menor al número de grados de libertad. Aunque se consideran dos péndulos iguales, esto no necesariamente quiere decir que sean idénticos en sus parámetros físicos tales como inercias o magnitud de la fricción.

Basados en la estructura de los sistemas definidos anteriormente y el esquema de sincronización elegido, el problema de sincronización que se presenta en esta tesis puede ser formulado como sigue.

Dados dos péndulos invertidos subactuados con retardos en la transmisión de datos τ , y una trayectoria C^∞ de referencia $y_{ref}(t)$, $t \geq 0$, encontrar una ley de control que sincronice ambos péndulos en una configuración maestro-esclavo, tal que la diferencia $e(t)$ entre la salida $y_2(t)$ y la referencia $y_1(t)$ tienda asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, donde $y_1(t)$ es la salida del péndulo maestro y $y_2(t)$ es la salida del esclavo.

Los resultados obtenidos se aplican a un sistema de control que permita la sincronización de sistemas mecánicos a pesar de la existencia de perturbaciones externas como son los retardos en la comunicación.

I.3. Contribuciones.

Las principales aportaciones de esta tesis se enumeran a continuación:

1. Soluciones causales al problema de seguimiento de trayectoria para sistemas con retardos, utilizando ecuaciones diferenciales de error sin retardo.
2. Propuesta de un esquema de control causal para la sincronización Maestro-Esclavo de dos péndulos, basado en linealización máxima y ecuaciones diferenciales lineales de error de tercer orden con retardos.
3. Implementación de un mecanismo para comunicar vía UDP dos plataformas experi-

mentales similares.

Para llegar a dichos resultados propuestos anteriormente, se realizó:

1. Una comparación entre el desempeño de dos observadores discontinuos y un derivador robusto de segundo orden, para seleccionar la mejor opción para estimar la velocidad requerida por los esquemas de control propuestos.
2. Un estudio de los modelos de fricción para sistemas mecánicos.
3. Comparación de sincronización de relojes de computadoras usando relojes GPS y protocolo NTP, seleccionando este último debido a que la construcción de los laboratorios no permite una buena recepción de la señal, lo que causaba variaciones de hasta dos segundos usando GPS.
4. Un análisis estadístico del retardo en la transmisión de datos en Internet entre los dos laboratorios participantes, para obtener un promedio y poder proponer un valor límite, el cual es usado en la ley de control con retardos.
5. Programación de una memoria intermedia (“buffer”), la cual se utiliza para obtener un retardo constante. En el caso de pérdida de datos, éstos son estimados por interpolación.

I.4. Descripción de la tesis.

En el Capítulo II se presenta el estudio del problema de seguimiento de trayectoria para una clase general de sistemas no lineales con retardos, en el cual se investiga la existencia de soluciones causales por retroalimentación estática del estado dentro de un marco algebraico. Se consideran dos clases de compensadores estáticos causales, con o sin dinámica retardada. Se dan condiciones suficientes para obtener una solución, las cuales no implican la máxima

pérdida de observabilidad en oposición a soluciones más estándares. Este capítulo contiene nuestras principales contribuciones para la teoría de sistemas no lineales con retardos. Algunos de los resultados más generales serán reutilizados en el Capítulo IV bajo una forma más elemental, la cual será extendida en el Capítulo V.

Consideramos en este trabajo de tesis el problema de sincronización de dos péndulos invertidos, por lo cual en el Capítulo III se obtiene el modelo no lineal de estos sistemas, péndulo invertido ECP505, utilizando las ecuaciones para sistemas lagrangianos, puesto que este sistema puede ser descrito por dos ecuaciones de Lagrange. También se muestran los parámetros del péndulo y se hace un análisis de los puntos de equilibrio y de estabilidad local. Este capítulo no tiene una contribución propiamente hablando. La modelización matemática que se presenta será utilizada en los capítulos siguientes. Ésta será complementada por una modelización de las fuerzas de fricción en el siguiente capítulo.

En el Capítulo IV se muestra la teoría y los cálculos realizados para obtener el modelo de control con fricción, ya que durante los experimentos se observó que no se puede despreciar los efectos de la fricción, y que era necesario un análisis del modelo de fricción para el péndulo invertido, el cual también se muestra en este capítulo. La ley de control obtenida requiere de variables no medibles y para obtenerlas, se realiza una comparación entre tres soluciones: dos observadores y un diferenciador robusto de segundo orden, para poder utilizar la mejor opción al obtener las variables no medibles.

La teoría para la sincronización de los péndulos invertidos con retardos en tiempo, se muestra en el Capítulo V, primero se da la teoría básica necesaria para poder realizar la sincronización utilizando el modelo con fricción obtenido en el Capítulo IV. Para resolver el problema se utilizaron ecuaciones diferenciales lineales de error con retardos, en comparación con el Capítulo II. Sin embargo, se conservan los principios del Capítulo II, con los cuales se obtiene como resultado un sistema de control causal, sin la necesidad de utilizar predictores.

En el Capítulo VI se presentan los resultados de sincronización obtenidos en la configuración maestro - esclavo. Primero se muestran los resultados obtenidos para una prueba local, i.e., los datos son enviados entre dos computadoras conectadas en la misma red, utilizando dos péndulos virtuales. En una segunda prueba, con la misma configuración, se realiza la sincronización a distancia entre dos péndulos virtuales, uno en Nantes, Francia y el otro en Ensenada, B. C., México. Una vez que la prueba con péndulos virtuales es satisfactoria, se realizan las pruebas con los péndulos físicos, las cuales son también mostradas en este capítulo.

Las conclusiones, aportaciones del trabajo de tesis, así como el trabajo a futuro son reportados en el Capítulo VII.

Capítulo II

Solución del seguimiento de trayectoria.

II.1. Introducción.

El estudio de sistemas con retardos ha sido útil para resolver importantes problemas de control. Muchos sistemas de interés práctico como procesos industriales (Jankovic, 2003), bandas de conducción (Scholtz *et al.*, 2000), control aéreo (Tournes y Shtessel, 1996), sistemas de teleoperación (Anderson y Spong, 1989), dinámica de población en sistemas biológicos (Beretta *et al.*, 1998), son ejemplos de sistemas no lineales con retardos. Los sistemas con retardos en tiempo representan una clase de sistemas de dimensión infinita, los cuales aparecen naturalmente en un gran número de sistemas.

En años recientes se han obtenido avances notables en el análisis y control, dentro de diferentes marcos matemáticos, tal como ecuaciones diferenciales en espacios abstractos (Niculescu y Gu (Eds), 2004), sobre anillos de operadores (Xia *et al.*, 2002) y ecuaciones diferenciales funcionales (Hale y Verduyn, 1993). Una gran cantidad de resultados sobre estabilidad y estabilización de sistemas con retardos pueden ser encontrados en (Richard, 2003; Mazenc y Niculescu, 2001; Jankovic, 2003; Popescu *et al.*, 2004) y referencias ahí incluidas. Algunos resultados en análisis de propiedades estructurales tales como accesibilidad, contro-

labilidad, y observabilidad son reportados en (Xia *et al.*, 2002). Se han reportado otros resultados adicionales, incluyendo linealización por retroalimentación (Germani y Manes, 2001), identificación (Orlov *et al.*, 2006), e invertibilidad (Conte y Perdon, 2000).

Los esquemas de control estándar diseñados para sistemas sin retardo, generalmente tienen soluciones no causales en el caso de sistemas con retardos en tiempo; es decir, soluciones que dependen de valores futuros de las variables del sistema en el lazo de retroalimentación. Estamos interesados en buscar soluciones causales para sistemas no lineales con retardos en tiempo. La aproximación alternativa que consiste en ignorar los retardos puede no ser aceptable debido a que la presencia de retardos puede deteriorar el rendimiento del sistema e incluso causar inestabilidad (Niculescu y Gu (Eds), 2004).

Un tema fundamental en control es el problema de seguimiento de una trayectoria de referencia dada. Su solución es de gran importancia, por ejemplo, en el control remoto de sistemas mecánicos como robots (Chopra *et al.*, 2006). El problema de seguimiento de trayectoria para el caso de sistemas multi-entrada multi-salida (MIMO) han sido considerados para sistemas lineales en (Conte *et al.*, 2006). En este trabajo se establecen condiciones suficientes para resolver el problema de seguimiento de trayectoria. Estas soluciones están basadas en el diseño de un compensador causal con o sin dinámica retardada para sistemas con accesibilidad completa, los cuales dan paso a la pérdida máxima de observabilidad, como se muestra en (Isidori, 1989; Isidori y Ruberti, 1984) para sistemas no lineales sin retardos.

En este capítulo, se proponen soluciones al problema de seguimiento de trayectoria y se establecen condiciones suficientes, más débiles que las existentes en la literatura actual, para la existencia de soluciones causales utilizando retroalimentación de estados (con o sin dinámica retardada), las cuales han sido publicados en (Estrada-García *et al.*, 2006; Estrada-García *et al.*, 2008). Los principios generales desarrollados en este capítulo serán utilizados para la sincronización de dos péndulos en el Capítulo IV. Aunque posteriormente trataremos los sistemas monovariantes esencialmente, vamos a buscar aquí estructuras más profundas y

menos estándares para la síntesis de soluciones causales de sistemas multivariados.

II.2. Definiciones preliminares y notación.

II.2.1. Sistemas considerados.

Consideramos un sistema no lineal, cuadrado, multi-entrada multi-salida Σ con un número finito de retardos commensurables s . Sin pérdida de generalidad, se considera que todos los retardos son enteros. Entonces, el sistema puede ser escrito como

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s)) \\ &+ \sum_{j=0}^s g_j(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s))u(t-j), \\ y(t) &= h(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s)), \\ x(t_0 + \sigma) &= \varphi(\sigma), \sigma \in [-s, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

El estado x pertenece a \mathbb{R}^n , la entrada u y la salida y pertenecen a \mathbb{R}^m . Las componentes de f , g_j , y h son funciones meromorfas. $\varphi(\sigma)$ denota la función de condiciones iniciales. El considerar el campo de funciones meromorfas permite tener un marco matemático adecuado, como se define en (Xia *et al.*, 2002).

II.2.2. Definiciones matemáticas.

Definición 1 . (Moog *et al.*, 2000) *El sistema con retardos Σ_d se dice que tiene grado relativo ρ_i si existe un entero no negativo tal que*

$$\rho = \min \left\{ k \mid \frac{\partial y^{(k)}(t)}{\partial u(t-\tau)} \neq 0 \right\}, \text{ para algunas } \tau, k \in \mathbb{N}.$$

Si, para toda $(k, \tau) \in \mathbb{N}^2$, $\partial y^{(k)}(t)/\partial u(t-\tau) \equiv 0$ hacemos $\rho = \infty$.

Como en el caso de sistemas sin retardos, el problema de seguimiento de trayectoria puede ser resuelto con los métodos de inversión de sistema. El desarrollo práctico requiere en general la inversión de matrices polinomiales definidas localmente casi en cualquier punto. En el ámbito no lineal, este marco algebraico es definido brevemente por la siguiente definición.

Definición 2 .

Sea \mathcal{K} el campo de funciones meromorfas de un número finito de variables independientes en $\{x(t - \tau), u^{(k)}(t - \tau), \tau, k \in \mathbb{N}\}$. Representemos la forma diferencial df de cualquier función $f \in \mathcal{K}$, y sea $\mathcal{E} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{df, f \in \mathcal{K}\}$ el espacio vectorial distribuido sobre \mathcal{K} por las formas diferenciales de todos los elementos de \mathcal{K} . Entonces, $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es un operador que mapea $df(t)$, la función diferencial de cualquier función $f(t)$, a $df(t - 1)$, la forma diferencial de la misma función retardada una unidad de tiempo. Por ejemplo, $\nabla dx(t) = dx(t - 1)$.

Ahora, sea $\mathcal{K}[\nabla]$ el anillo (izquierdo) de polinomios en ∇ con coeficientes en \mathcal{K} . Cualquier elemento $a[\nabla]$ de este polinomio puede ser escrito como $a[\nabla] = a_r(t)\nabla^r + a_{r-1}(t)\nabla^{r-1} + \dots + a_1(t)\nabla + a_0(t)$ con $a_i(t) \in \mathcal{K}$. La suma es definida en este anillo de la forma usual, mientras que el producto (no conmutativo) es definido como

$$a[\nabla] \cdot b[\nabla] = \sum_{i=0}^{r_a} a_i(t) \nabla^i \cdot \sum_{j=0}^{r_b} b_j(t) \nabla^j = \sum_{i=0}^{r_a} \sum_{j=0}^{r_b} a_i(t) b_j(t - i) \nabla^{i+j}.$$

Considerando que las salidas del sistema tienen grado relativo finito ρ_i , las derivadas en tiempo de las salidas hasta el grado relativo son tales que

$$y_i^{(\rho_i)} = \alpha_i(\cdot) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^s \tilde{g}_{ijk}(\cdot) u_j(t - k), \quad (2)$$

donde $\alpha_i(\cdot)$ y $\tilde{g}_{ijk}(\cdot)$ son funciones meromorfas de $(x(t), \dots, x(t - s))$. La notación (\cdot) se pone por $(x(t), x(t - 1), \dots, x(t - s))$.

La matriz de desacoplamiento $D(\nabla) := \sum_{k=0}^s D_k \nabla^k$ es una matriz polinomial de $m \times m$ en ∇ cuyos coeficientes D_k están dados por

$$D_k = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11k}(\cdot) & \cdots & \tilde{g}_{1mk}(\cdot) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{m1k}(\cdot) & \cdots & \tilde{g}_{mmk}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

con \tilde{g}_{ijk} definidos por (2).

Las entradas de la matriz de desacoplamiento, asociada al sistema Σ pertenecen a $\mathcal{K}[\nabla]$. La existencia de su inversa será requerida en el resto del capítulo.

Los sistemas con retardos están descritos por ecuaciones diferenciales o de diferencias y sujetos a dos operadores: diferenciación en tiempo y el operador de corrimiento en tiempo. Entonces los compensadores generales para sistemas con retardos se dividen en diferentes clases dependiendo si tienen su propia dinámica con respecto a cada operador.

Restringimos nuestro interés a retroalimentaciones de estado estáticas causales con o sin dinámica retardada. Estos compensadores son causales en el sentido que no necesitan de valores futuros de los estados o la entrada para poder ser implementados y son definidos como sigue.

Tabla I. *Compensadores considerados.*

Retroalimentación de estado estática	$u(t) = a(\cdot) + b(\cdot)v(t)$
Retroalimentación estática con dinámica retardada	$u(t) = a(\cdot) + b(\cdot)v(t) + \sum_{j=1}^s \tilde{g}_j(t)u(t-j)$

donde $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ y $\tilde{g}_j(t)$ son funciones meromorfas de $(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau))$ con $\tau \in \mathbb{N}$. v es la nueva entrada de control.

Definición del problema de seguimiento de trayectoria. Dado un sistema Σ de la forma (1) y una señal de referencia $y_{ref}(t)$, $t \geq 0$, encontrar un compensador causal C tal que la

diferencia $e(t)$ entre la salida $y(t)$ de Σ , y la referencia $y_{ref}(t)$ sea localmente asintóticamente estable.

II.3. Solución por retroalimentación estática.

Consideraremos que las componentes de salida y_i de las señales de referencia $y_{i_{ref}}(t)$ son de la clase C^{ρ_i} .

Proposición 1 . *Existe una retroalimentación estática de estado que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para el sistema Σ , si todos los componentes de la salida del sistema tienen grado relativo finito ρ_i y la matriz $D(\nabla)$ es invertible.*

Demostración. Consideremos los componentes de la señal de error definida como $e_i(t) = y_i(t) - y_{i_{ref}}(t)$, para $i = 1, \dots, m$. Por la hipótesis del grado relativo tenemos que, para $i = 1, \dots, m$,

$$e_i^{(\rho_i)}(t) = y_i^{(\rho_i)}(x(\cdot), u(\cdot)) - y_{i_{ref}}^{(\rho_i)}(t), \quad (4)$$

donde $u(\cdot)$ denota $(u(t), u(t-1), \dots, u(t-s))$. Usando (2) y (4) podemos escribir el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} y_1^{(\rho_1)}(t) - y_{1_{ref}}^{(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ y_m^{(\rho_m)}(t) - y_{m_{ref}}^{(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(x(\cdot)) - y_{1_{ref}}^{(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(x(\cdot)) - y_{m_{ref}}^{(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^s D_k u(t-k), \quad (5)$$

del cual, debido a que $D(\nabla)$ es invertible, puede ser resuelto para $u(t)$. La solución da como resultado un compensador con retroalimentación de estado estable.

Sean $s^{k_i} + \sum_{j=0}^{k_i-1} \lambda_{ij} s^j$ polinomios Hurwitz, si $u(t)$ se obtiene tal que

$$e_i^{(\rho_i)}(t) + \sum_{j=0}^{k_i-1} \lambda_{ij} e_i^{(j)}(t) = 0, \quad (6)$$

para toda $i = 1, \dots, m$, entonces la condición (6) asegura estabilidad asintótica de $e(t)$.

Ahora tenemos que, de las ecuaciones (5) y (6),

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(x(\cdot)) - y_{1_{ref}}^{(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(x(\cdot)) - y_{m_{ref}}^{(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} \lambda_{1j} \left(y_1^{(j)}(x(\cdot)) - y_{1_{ref}}^{(j)}(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} \lambda_{mj} \left(y_m^{(j)}(x(\cdot)) - y_{m_{ref}}^{(j)}(t) \right) \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^s D_k u(t-k) = 0. \quad (7)$$

La ecuación (7) puede ser resuelta para $u(t)$ como

$$u(t) = -D^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1(x(\cdot)) - y_{1_{ref}}^{(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(x(\cdot)) - y_{m_{ref}}^{(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} - D^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} \lambda_{1j} \left(y_1^{(j)}(x(\cdot)) - y_{1_{ref}}^{(j)}(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} \lambda_{mj} \left(y_m^{(j)}(x(\cdot)) - y_{m_{ref}}^{(j)}(t) \right) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

la cual es una solución al problema de seguimiento de trayectoria para el sistema Σ . ■

Para mostrar cómo se aplica la Proposición 1 a los sistemas con retardos, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 . Sea Σ_d el sistema diferencial no lineal definido por el conjunto de ecuaciones

$$\Sigma_d = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t-1) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t-1) + u_2(t). \\ y_1(t) = x_1(t), \\ y_2(t) = x_1^2(t-1) + x_2(t). \end{cases}$$

Para este sistema tenemos que

$$\dot{y}_1(t) = x_1(t-1) + u_1(t),$$

$$\dot{y}_2(t) = 2x_1(t-1)x_1(t-2) + x_2(t-1) + u_2(t) + 2x_1(t-1)u_1(t-1).$$

Se puede observar fácilmente que ambas componentes de salida y_1 y y_2 tienen grado relativo finito $\rho_1 = \rho_2 = 1$, la matriz

$$D(\nabla) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1(t-1)\nabla & 1 \end{bmatrix},$$

es invertible y

$$D(\nabla)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2x_1(t-1)\nabla & 1 \end{bmatrix}.$$

Seleccionamos para la señal de error la siguiente dinámica estable

$$\dot{e}_i(t) + 2e_i(t) = 0,$$

con la cual se obtiene

$$\begin{aligned}
x_1(t-1) + u_1(t) - \dot{y}_{1_{ref}}(t) + 2x_1(t) - 2y_{1_{ref}}(t) &= 0, \\
2x_1(t-1)x_1(t-2) + 2x_1(t-1)u_1(t-1) + x_2(t-1) \\
+ u_2(t) - \dot{y}_{2_{ref}}(t) + 2x_1^2(t-1) + 2x_2(t) - 2y_{2_{ref}}(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo para $u(t)$, obtenemos

$$u(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ -2x_1(t-1)\varphi_1(t-1) + \varphi_2(t) \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \dot{y}_{1_{ref}}(t) + 2y_{1_{ref}}(t) - x_1(t-1) - 2x_1(t), \\
\varphi_2(t) &= \dot{y}_{2_{ref}}(t) + 2y_{2_{ref}}(t) - 2x_1(t-1)x_1(t-2) - x_2(t-1) - 2x_1^2(t-1) - 2x_2(t),
\end{aligned}$$

y finalmente obtenemos el compensador de retroalimentación de estado estático

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \dot{y}_{1_{ref}}(t) + 2y_{1_{ref}}(t) - x_1(t-1) - 2x_1(t), \\
u_2(t) &= \dot{y}_{2_{ref}}(t) + 2y_{2_{ref}}(t) - 2x_1(t-1)\dot{y}_{1_{ref}}(t-1) + 2x_1^2(t-1) \\
&\quad - 4x_1(t-1)y_{1_{ref}}(t-1) - x_2(t-1) - 2x_2(t).
\end{aligned}$$

Debido a que el error de seguimiento para cada una de las componentes de salida satisface la ecuación $\dot{e}_i(t) + 2e_i(t) = 0$, éste tiende asintóticamente a cero cuando t tiende a ∞ .

Ahora mostraremos que la condición de la Proposición 1 no es necesaria.

Ejemplo 2 . Sea Σ_d el sistema diferencial no lineal definido por el conjunto de ecuaciones:

$$\Sigma_d = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t-1)u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t), \\ y_1(t) = x_1(t), \\ y_2(t) = x_2^2(t-1). \end{cases}$$

Para este sistema se tiene,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= x_2(t-1)u_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= 2x_2(t-1)u_2(t-1), \end{aligned}$$

y la señal de error debe satisfacer la condición,

$$\dot{e}_i(t) + e_i(t) = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_2(t-1)u_1(t) &= \dot{y}_{1_{ref}}(t) - [x_1(t) - y_{1_{ref}}(t)], \\ 2x_2(t-1)u_2(t-1) &= \dot{y}_{2_{ref}}(t) - [x_2^2(t-1) - y_{2_{ref}}(t)]. \end{aligned}$$

Ambas componentes y_1 y y_2 poseen grado relativo finito $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Entonces la matriz

$$D(\nabla) = \begin{bmatrix} x_2(t-1) & 0 \\ 0 & 2x_2(t-1)\nabla \end{bmatrix},$$

no es invertible. Sin embargo, existe una solución de control causal, la cual resuelve localmente el problema de seguimiento,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{x_2(t-1)} \left[\dot{y}_{1_{ref}}(t) - [x_1(t) - y_{1_{ref}}(t)] \right], \\ u_2(t) &= \frac{1}{2x_2(t)} \left[\dot{y}_{2_{ref}}(t+1) - [x_2^2(t) - y_{2_{ref}}(t+1)] \right], \end{aligned}$$

para $x_2(t) \neq 0$ y $x_2(t-1) \neq 0$.

II.4. Solución por retroalimentación estática con dinámica retardada.

La condición presentada en la Proposición 1 acerca de la invertibilidad de la matriz D es un poco fuerte. Se puede definir una condición más débil que la invertibilidad de la matriz D si escribimos esta matriz como $D(\nabla) = D_0 + D_1\nabla + \dots + D_s\nabla^s$, y si $D_0 = D(0)$ es invertible. En tal caso, para resolver el problema de seguimiento de trayectoria, necesitamos emplear compensadores de retroalimentación de estado de la forma

$$u(t) = a(\cdot) + b(\cdot)v(t) + \sum_{j=1}^s \tilde{g}_j(t)u(t-j), \quad (9)$$

donde $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ y $\tilde{g}_j(t)$ son funciones meromorfas de $(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau))$ con $\tau \in \mathbb{N}$. v es la nueva entrada de control. Un compensador de esta clase se dice que tiene una dinámica retardada y puede ser realizado como

$$\begin{aligned} z_1(t+1) &= u(t), \\ z_2(t+1) &= z_1(t), \\ &\vdots \\ z_n(t+1) &= z_{n-1}(t), \\ u(t) &= a(\cdot) + b(\cdot)v(t) + \sum_{j=1}^n \tilde{g}_j(t)z_j(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Proposición 2 .

Dado un sistema Σ de la forma (1), existe un compensador de retroalimentación de estado con dinámica retardada que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para Σ si todas las componentes de salida tienen grado relativo finito y la matriz D_0 es invertible.

Demostración. Al igual que en la demostración de la Proposición 1, obtenemos una relación de la forma (7), con la cual:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(x(\cdot)) - y_{1ref}^{(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(x(\cdot)) - y_{mref}^{(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} \lambda_{1j} \left(y_1^{(j)}(x(\cdot)) - y_{1ref}^{(j)}(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} \lambda_{mj} \left(y_m^{(j)}(x(\cdot)) - y_{mref}^{(j)}(t) \right) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$+ D_0 u(t) + \sum_{k=1}^s D_k u(t-k) = 0.$$

Resolviendo para $u(t)$, y debido a que D_0 es invertible, finalmente obtenemos el compensador de retroalimentación de estados con dinámica retardada

$$z_1(t+1) = u(t)$$

$$z_2(t+1) = z_1(t)$$

$$\vdots$$

$$z_s(t+1) = z_{s-1}(t)$$

$$u(t) = -D_0^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1(x(\cdot)) - y_{1ref}^{(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(x(\cdot)) - y_{mref}^{(\rho_m)}(t) \end{bmatrix} - D_0^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} \lambda_{1j} \left(y_1^{(j)}(x(\cdot)) - y_{1ref}^{(j)}(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} \lambda_{mj} \left(y_m^{(j)}(x(\cdot)) - y_{mref}^{(j)}(t) \right) \end{bmatrix}$$

$$-D_0^{-1} \left(\sum_{k=1}^s D_k z(t+1) \right).$$

(12)

el cual resuelve el problema de seguimiento para Σ . ■

Ejemplo 3 . Sea Σ un sistema diferencial no lineal definido por el conjunto de ecuaciones:

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)u_1(t-1) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t), \\ y_1(t) = x_1(t), \\ y_2(t) = x_2(t-1) + x_2(t). \end{cases}$$

Podemos obtener fácilmente las ecuaciones

$$\dot{y}_1(t) = x_1(t) u_1(t-1) + u_1(t),$$

$$\dot{y}_2(t) = x_2(t-1) + x_2(t) + u_2(t-1) + u_2(t).$$

Ambas componentes y_1 y y_2 tienen grado relativo finito $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Entonces, la matriz

$$D(\nabla) = \begin{bmatrix} x_1(t)\nabla + 1 & 0 \\ 0 & \nabla + 1 \end{bmatrix},$$

no tiene una inversa polinomial. Sin embargo, escribiendo $D = D_0 + D_1\nabla$ con

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tenemos que D_0 es invertible. Sea y_{ref} una referencia de salida dada y denotemos como $e_i(t) = y_i(t) - y_{i_{ref}}(t)$ el error para $i = 1, 2$. Escogiendo $\lambda_{11} = 1$ y $\lambda_{21} = 1$, y definiendo la ecuación

$$\dot{e}_i(t) + e_i(t) = 0,$$

entonces (7) se convierte en

$$\begin{aligned}x_1(t)u_1(t-1) + u_1(t) - \dot{y}_{1_{ref}}(t) + x_1(t) - y_{1_{ref}}(t) &= 0, \\2x_2(t-1) + u_2(t-1) + 2x_2(t) + u_2(t) - \dot{y}_{2_{ref}}(t) - y_{2_{ref}}(t) &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo para $u(t)$, obtenemos

$$u(t) + \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t-1) = \begin{bmatrix} \dot{y}_{1_{ref}}(t) - x_1(t) + y_{1_{ref}}(t) \\ -2x_2(t-1) - 2x_2(t) + \dot{y}_{2_{ref}}(t) + y_{2_{ref}}(t) \end{bmatrix},$$

entonces

$$u(t) = - \begin{bmatrix} x_1(t) \\ 2x_2(t-1) + 2x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{y}_{1_{ref}}(t) + y_{1_{ref}}(t) \\ \dot{y}_{2_{ref}}(t) + y_{2_{ref}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t-1).$$

Definiendo $z_1(t) = u_1(t-1)$, $z_2(t) = u_2(t-1)$, el compensador de retroalimentación de estado con dinámica retardada dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}z_1(t) &= u_1(t-1), \\z_2(t) &= u_2(t-1), \\u_1(t) &= \dot{y}_{1_{ref}}(t) + y_{1_{ref}}(t) - x_1(t) - x_1(t)z_1(t), \\u_2(t) &= -2x_2(t-1) - 2x_2(t) + \dot{y}_{2_{ref}}(t) + y_{2_{ref}}(t) - z_2(t),\end{aligned}$$

resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para Σ , debido a que las componentes de las señales de error satisfacen las ecuaciones $\dot{e}_1(t) + e_1(t) = 0$ y $\dot{e}_2(t) + e_2(t) = 0$, y tienden asintóticamente a cero cuando t tiende a ∞ .

Podemos notar que la condición en la Proposición 2 no es necesaria ya que, del Ejemplo

$$D_0 = \begin{bmatrix} x_2(t-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

la cual no es invertible, pero existe una solución causal al problema de seguimiento de trayectoria.

En cualquier situación que las condiciones de la Proposición 1 o la Proposición 2 no sean cumplidas, es de interés buscar una solución menos restrictiva. Esto es hecho con una clase de compensadores con dinámica retardada. Una investigación más a fondo en la estructura del sistema es requerida; como se muestra en (Moog *et al.*, 2000), se define μ_i como el menor retardo existente entre $y_i^{(\rho_i)}(t)$ y $u(t)$:

$$\mu_i \triangleq \min\{k \in \mathbb{N} \mid \partial y_i^{(\rho_i)}(t) / \partial u(t-k) \neq 0\}. \quad (14)$$

En el caso de sistemas cuyas salidas tienen grado relativo finito ρ_i , podemos asegurar que μ_i siempre existe, y definimos el siguiente vector renglón

$$\tilde{D}_0^i = \partial y_i^{(\rho_i)}(t + \mu_i) / \partial u(t) \text{ para } i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Proposición 3 . *Dado un sistema Σ de la forma (1), existe una retroalimentación de estado estática con dinámica retardada que resuelve localmente el problema de seguimiento de trayectoria si*

$$(i) \quad \partial y_i^{(\rho_i)}(t) / \partial x(t-k) \equiv 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, \mu_i - 1\}.$$

$$(ii) \quad \tilde{D}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{D}_0^1 \\ \vdots \\ \tilde{D}_0^m \end{bmatrix} \text{ es invertible.}$$

Demostración. Sean $s^{(\rho_i)} + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} \lambda_{ij} s^{(j)}(t) = 0$ polinomios Hurwitz y $\epsilon_i(t) = y_i(t) - y_{i_{ref}}(t)$ para $i = 1, \dots, m$. Entonces, las ecuaciones

$$\epsilon_i^{(\rho_i)}(t + \mu_i) + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} \lambda_{ij} \epsilon_i^{(j)}(t + \mu_i) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (16)$$

son equivalentes a:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \alpha_1(t + \mu_1) - y_{1_{ref}}^{(\rho_1)}(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \alpha_m(t + \mu_m) - y_{m_{ref}}^{(\rho_m)}(t + \mu_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_1+1}^s \tilde{g}_{1jk}(t + \mu_1) u_j(t - k + \mu_1) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_m+1}^s \tilde{g}_{mjk}(t + \mu_m) u_j(t - k + \mu_m) \end{bmatrix} \\ & + \tilde{D}_0 u(t) + \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} \lambda_{1j} \left(y_1^{(j)}(t + \mu_1) - y_{1_{ref}}^{(j)}(t + \mu_1) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} \lambda_{mj} \left(y_m^{(j)}(t + \mu_m) - y_{m_{ref}}^{(j)}(t + \mu_m) \right) \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

De la condición (ii), (17) puede resolverse para $u(t)$ como

$$\begin{aligned} u(t) = & -\tilde{D}_0^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1(t + \mu_1) - y_{1_{ref}}^{(\rho_1)}(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \alpha_m(t + \mu_m) - y_{m_{ref}}^{(\rho_m)}(t + \mu_m) \end{bmatrix} \\ & -\tilde{D}_0^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_1+1}^s \tilde{g}_{1jk}(t + \mu_1) u_j(t - k + \mu_1) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_m+1}^s \tilde{g}_{mjk}(t + \mu_m) u_j(t - k + \mu_m) \end{bmatrix} \\ & -\tilde{D}_0^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} \lambda_{1j} \left(y_1^{(j)}(t + \mu_1) - y_{1_{ref}}^{(j)}(t + \mu_1) \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} \lambda_{mj} \left(y_m^{(j)}(t + \mu_m) - y_{m_{ref}}^{(j)}(t + \mu_m) \right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

la cual es una retroalimentación de estado causal por la condición (i) de la Proposición 3 y resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para el sistema (1). ■

El Ejemplo 2 cumple con las condiciones de la Proposición 3, debido a que

$$\tilde{D}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{D}_0^1 \\ \tilde{D}_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t-1) & 0 \\ 0 & 2x_2(t) \end{bmatrix},$$

\tilde{D}_0 es invertible, y los retardos positivos en $y_{i_{ref}}$ no afectan la causalidad del sistema, debido a que la señal de referencia es conocida para cualquier instante de tiempo.

Las proposiciones anteriores proveen condiciones suficientes para resolver el problema de seguimiento de trayectoria (PST), las cuales dan lugar a la pérdida máxima de observabilidad. Estas se encuentran lejos de ser condiciones necesarias, como se muestra en algunos ejemplos. Nuevas condiciones suficientes se dan a continuación, las cuales son más débiles y no requieren la cancelación de modos estables no controlables.

Solución general.

Consideremos el sistema no lineal con retardos (19), el cual muestra una dinámica autónoma η como sigue,

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \dots, x(t-s), \eta(t), \dots, \eta(t-s)) + \\ \quad + \sum_{j=0}^s g_j(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s))u(t-j), \\ \dot{\eta}(t) = \zeta(\eta(t), \dots, \eta(t-s)), \\ y(t) = h(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s), \eta(t), \dots, \eta(t-s)) \\ x(t_0 + \sigma) = \varphi(\sigma), \sigma \in [-s, 0]. \end{cases} \quad (19)$$

La descomposición de un sistema no lineal con retardo en tiempo (SNLR) general en (19) puede ser obtenida calculando el submódulo de las formas diferenciales autónomas \mathcal{H}_∞

como en (Xia *et al.*, 2002), debido a que $d\eta \in \mathcal{H}_\infty$. Suponemos que la dinámica autónoma $\eta(t)$ permanece acotada para todo $t \geq 0$.

Otra vez consideramos que todas las componentes de salida tienen grado relativo finito ρ_i para $i = 1, \dots, m$. Ahora podemos definir una nueva proposición.

Proposición 4 .

Considérense polinomios Hurwitz $s^{(\rho_i)} + \lambda_{i,\rho_i-1}s^{(\rho_i-1)} + \dots + \lambda_{i,0}$ para $i = 1, \dots, m$ con $\lambda_{i,\rho_i-1}, \dots, \lambda_{i,0} \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\Phi_i(\cdot) \triangleq \epsilon_i^{(\rho_i)}(t) + \lambda_{i,\rho_i-1}\epsilon_i^{(\rho_i-1)}(t) + \dots + \lambda_{i,0}\epsilon_i(t), \quad (20)$$

donde $\Phi_i(\cdot)$ está indicada por $\Phi_i(y_{i_{ref}}(t), \dots, y_{i_{ref}}^{(\rho_i)}(t), x(t), \dots, x(t-s), \eta(t), \dots, \eta(t-s), u(t), \dots, u(t-s))$ y $\epsilon_i = y(t) - y_{i_{ref}}(t)$.

Sean $\chi_i(t)$ y $\beta_i(t)$ definidos por

$$\begin{aligned} \beta_i(t) &\triangleq \Phi_i(0, \dots, 0, \eta(t), \eta(t-1), \dots, \eta(t-\mu_i+1), 0, \dots, 0), \\ \chi_i(t) &\triangleq \Phi_i(t) - \beta_i(t), \end{aligned} \quad (21)$$

y μ_i definido como en (14). Calcular

$$\begin{bmatrix} \chi_1(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \chi_m(t + \mu_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}_m(t + \mu_m) \end{bmatrix} + \tilde{g}_0(t)u(t) + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_1+1}^s \tilde{g}_{1jk}(t)u_j(t-k) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_m+1}^s \tilde{g}_{mjk}(t)u_j(t-k) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

con $\tilde{g}_0(t)$ definido por

$$\tilde{g}_0(t) = \begin{bmatrix} \partial\chi_1(t + \mu_1)/\partial u(t) \\ \vdots \\ \partial\chi_m(t + \mu_m)/\partial u(t) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Entonces existe una retroalimentación de estado estática con dinámica retardada, la cual resuelve localmente el PST, si las condiciones siguientes son satisfechas para $i = 1, \dots, m$:

i) $d\beta_i(t) \in \text{span} \{d\eta\}$.

ii) $\beta_i(t)$ tiende exponencialmente a cero.

iii) \tilde{g}_0 es invertible.

iv) $\partial\chi_i(t)/\partial(x(t-k), \eta(t-k)) \equiv 0, \forall k \in \{0, \dots, \mu_i - 1\}$.

Demostración.

La ecuación $\chi_i(t + \mu_i) = 0$, puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}_m(t + \mu_m) \end{bmatrix} + \tilde{g}_0(t)u(t) + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_1+1}^s \tilde{g}_{1jk}(t + \mu_1)u_j(t - k + \mu_1) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_m+1}^s \tilde{g}_{mjk}(t + \mu_m)u_j(t - k + \mu_m) \end{bmatrix} = 0. \quad (24)$$

De la condición iii) de la Proposición 4, la retroalimentación (24) puede resolverse para $u(t)$:

$$u(t) = \tilde{g}_0^{-1}(t) \left[- \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}_m(t + \mu_m) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_1+1}^s \tilde{g}_{1jk}(t)u_j(t - k + \mu_1) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_m+1}^s \tilde{g}_{mjk}(t)u_j(t - k + \mu_m) \end{bmatrix} \right], \quad (25)$$

de la condición iv), obtenemos que la ecuación (25) es causal.

Utilizando la retroalimentación estática (25), el sistema en lazo cerrado tiene la dinámica de error

$$\epsilon_i^{(\rho_i)}(t) + \lambda_{\rho_i-1} \epsilon_i^{(\rho_i-1)}(t) + \cdots + \lambda_0 \epsilon_i(t) = \beta_i(t). \quad (26)$$

De la condición *ii*), para cada $\beta_i(t)$ existen dos constantes $a_i, b_i > 0$ tales que

$$|\beta_i(t)| \leq a_i e^{-b_i t}. \quad (27)$$

Definimos $\dot{\xi}_i(t) = -b_i \xi_i(t)$, $\xi_i(0) = a_i$ y escribiendo

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_i \\ \dot{\xi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \epsilon_i + g_i(t) \\ -b_i \xi_i(t) \end{bmatrix},$$

donde $\epsilon_i := [\epsilon_i(t), \dots, \epsilon_i^{(\rho_i-1)}(t)]^T$, A_i corresponde a la dinámica (26), y el término $g_i(t) = [0 \quad \beta_i(t)]^T$. Debido a que la dinámica del error se seleccionó para ser estable, existen $P_i = P_i^T > 0$ que solucionan las ecuaciones de Lyapunov $P_i A_i + A_i^T P_i = -I$. Ahora definimos $V_i(\epsilon_i, \xi_i) = \epsilon_i^T P_i \epsilon_i + \frac{\|P_i\|^2}{2b_i} \xi_i^2$, de lo cual resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\epsilon_i, \xi_i) &= -\|\epsilon_i\|^2 + \epsilon_i^T P_i g_i + g_i^T P_i \epsilon_i - \|P_i\|^2 \xi_i^2 \\ &\leq -\|\epsilon_i\|^2 + 2\|P_i\| \|\epsilon_i\| |\beta_i| - \|P_i\|^2 \xi_i^2 \\ &\leq -\|\epsilon_i\|^2 + 2\|P_i\| \|\epsilon_i\| |\xi_i| - \|P_i\|^2 \xi_i^2 = \\ &= -(\|\epsilon_i\| - \|P_i\| |\xi_i|)^2 \end{aligned}$$

la cual comprueba la estabilidad asintótica de la dinámica del error. ■

Para mostrar como se aplican las condiciones dadas en la proposición anterior, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Considerese el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) + x_1(t) \\ \dot{\eta}(t) = -\eta(t) \\ y_1(t) = x_1^2(t-1) + \eta(t) \\ y_2(t) = x_2(t-2) + \eta^2(t-1) \end{cases} \quad (28)$$

Definimos la dinámica estable $\dot{\epsilon}(t) + \epsilon(t) = 0$ y diferenciando cada salida hasta el grado relativo respectivo, obtenemos la matriz de desacoplamiento $D(\nabla)$ como

$$\begin{bmatrix} 2x_1(t-1)\nabla & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

la cual no es invertible. Pero podemos definir las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= 2x_1(t-1)u_1(t-1) + x_1^2(t-1) - (\dot{y}_{1_{ref}}(t) + y_{1_{ref}}(t)) \\ \Phi_2(t) &= x_2(t-2) + u_2(t-2) + x_1(t-2) - \eta^2(t-1) - (\dot{y}_{2_{ref}}(t) + y_{2_{ref}}(t)) \end{aligned} \quad (30)$$

de las cuales obtenemos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0 \\ \beta_2 &= -\eta^2(t-1) \end{aligned} \quad (31)$$

y

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= 2x_1(t-1)u_1(t-1) + x_1^2(t-1) \\ \chi_2(t) &= u_2(t-2) + x_1(t-2) + x_2(t-2) \end{aligned} \quad (32)$$

La ecuación $\chi_i(t + \mu_i) = 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x_1(t)u_1(t) &= -x_1^2(t) + (\dot{y}_{1_{ref}}(t+1) + y_{1_{ref}}(t+1)) \\ u_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + (\dot{y}_{2_{ref}}(t+2) + y_{2_{ref}}(t+2)) \end{aligned} \quad (33)$$

y la solución local $u(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2x_1(t)} [-x_1^2(t) + (\dot{y}_{1_{ref}}(t+1) + y_{1_{ref}}(t+1))] \\ u_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + (\dot{y}_{2_{ref}}(t+2) + y_{2_{ref}}(t+2)) \end{aligned} \quad (34)$$

de la cual obtenemos un compensador causal para $x_1(t) \neq 0$. La dinámica del error en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1(t) + \epsilon_1(t) &= 0 \\ \dot{\epsilon}_2(t) + \epsilon_2(t) &= -\eta^2(t-1) \end{aligned} \quad (35)$$

por lo tanto, ya que $\eta(t)$ es exponencialmente estable, las señales de error $\epsilon_i(t)$ tienden a cero y (34) resuelve el PST.

II.5. Conclusiones de capítulo.

Se ha mostrado que el problema de seguimiento de trayectoria para sistemas no lineales con retardos multi-entrada multi-salida puede ser resuelto en diferentes maneras. Se han obtenido condiciones suficientes para obtener soluciones causales con retroalimentación con o sin máxima pérdida de observabilidad. Asimismo, producen ecuaciones lineales del error libres de retardos que pueden ser autónomas o no autónomas. El enfoque desarrollado en este capítulo será utilizado más adelante, en particular en el Capítulo IV.

Nuestros resultados han sido formulados en un caso general multivariable, y pueden aplicarse igualmente en los sistemas monovariable. La aplicación de una ley de control causal para la sincronización de dos péndulos reutilizará estos resultados de cierta manera más elemental. En este capítulo, sólo consideramos ecuaciones de error sin retardos. El caso de ecuaciones con retardos será, sin embargo, considerado en el caso particular de los péndulos en el Capítulo V.

Capítulo III

Modelo y propiedades del péndulo

ECP505.

III.1. Introducción.

En este capítulo se presenta un análisis para obtener un modelo matemático del péndulo ECP505. Se modela el sistema en el espacio de estado para tener una representación más funcional y poder realizar las pruebas y simulaciones del control que se va a proponer. También se muestran los parámetros del sistema obtenidos del manual del ECP505. Por último, se hace un análisis de la estabilidad local. Aunque el material aquí presentado no es novedoso, se incluye como referencia pues será la base del trabajo presentado en los capítulos siguientes.

III.2. Análisis teórico del ECP505.

Sin tomar en cuenta por el momento los efectos de la fricción en el péndulo, los cuales serán abordados en el próximo capítulo, la planta puede ser modelada como se muestra en la

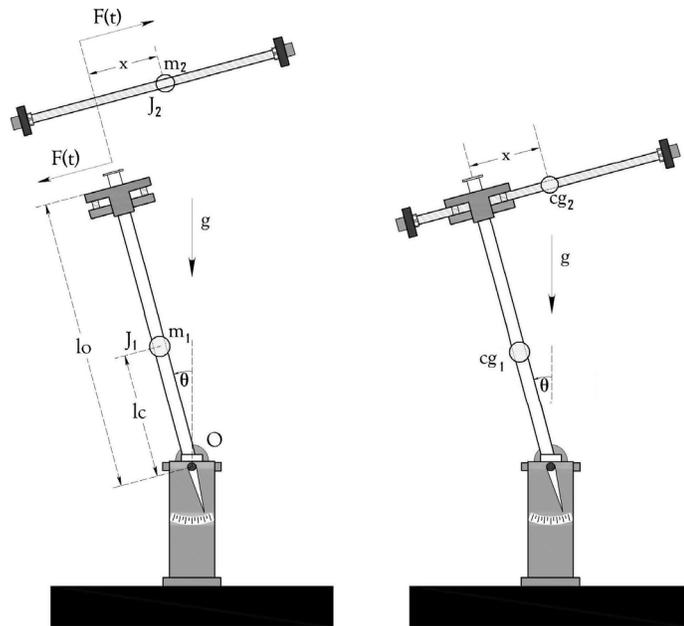


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre del ECP 505.

Figura 1. La energía cinética total de un sólido rígido es una suma de dos términos cuando se referencia al centro de masas del sistema rígido. Un término corresponde a la energía cinética debida al movimiento de translación del sólido y el otro término es la energía cinética debida a la rotación del mismo.

Con ayuda de la Figura 1, tenemos que la energía cinética de los eslabones es:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1v_{cg_1}^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2; K_2 = \frac{1}{2}m_2v_{cg_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2, \quad (36)$$

donde las v_{cg} son las velocidades inerciales de los centros de gravedad de los eslabones respectivos, y las J_i son los momentos de inercia rotacionales con respecto a los respectivos centros de masa. Para determinar las velocidades inerciales de los centros de gravedad, se utiliza:

$$v_{cg_1}^2 = l_{cg_1}^2 \dot{\theta}^2, \quad (37)$$

$$v_{cg_2}^2 = \dot{\mathbf{x}}^2 + \dot{\mathbf{y}}^2, \quad (38)$$

donde \mathbf{x} y \mathbf{y} representan las componentes vectoriales del desplazamiento total del eslabón 2. Basándonos en la geometría del modelo y escogiendo $q_1 = \theta$ y $q_2 = x$, se obtienen estos componentes quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= q_2 \cos q_1 - l_0 \sin q_1, \\ \mathbf{y} &= q_2 \sin q_1 + l_0 \cos q_1. \end{aligned} \quad (39)$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{q}_2 \cos q_1 - q_2 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_0 \dot{q}_1 \cos q_1, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \dot{q}_2 \sin q_1 + l_0 \dot{q}_1 \sin q_1 - q_2 \dot{q}_1 \cos q_1. \end{aligned}$$

Elevamos ambos términos al cuadrado y los sumamos para determinar la rapidez al cuadrado del centro de masas del eslabón 2

$$v_{cg_2}^2 = \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 q_2^2 + l_0^2 \dot{q}_1^2 - 2l_0 \dot{q}_2 \dot{q}_1. \quad (40)$$

Sustituyendo las ecuaciones (40) y (37) en (36), y sumando resulta

$$K = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - l_0 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (m_2 (q_2^2 + l_0^2) + l_c^2 m_1 + J_2 + J_1),$$

$$K = \frac{1}{2} J_0(q_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - m_2 l_0 \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (41)$$

donde

$$J_0(q_2) = J_1 + J_2 + m_2(l_0^2 + q_2^2) + m_1l_c^2, \quad (42)$$

es el momento de inercia del sistema referido a O .

La energía potencial U está dada por la ecuación

$$U = m_1gl_c \cos q_1 + m_2g(q_2 \sin q_1 + l_0 \cos q_1). \quad (43)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, utilizamos el método de Lagrange, en el cual el lagrangiano queda expresado como

$$L = \sum_{i=1}^n (K_i - U_i).$$

La ecuación de movimiento de Lagrange está descrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial q_i} = F_i, \quad (44)$$

donde q_i es la i -ésima coordenada generalizada, y F_i es la fuerza generalizada asociada.

Como el sistema está formado de dos eslabones, únicamente tendremos dos ecuaciones para definir el modelo del sistema, las cuales son:

$$J_0\ddot{q}_1 - l_0m_2\ddot{q}_2 + 2m_2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + gm_2q_2 \cos q_1 - (l_0m_2 + l_cm_1)g \sin q_1 = 0, \quad (45)$$

$$-l_0m_2\ddot{q}_1 + m_2\ddot{q}_2 - m_2q_2\dot{q}_1^2 + gm_2 \sin q_1 = u(t). \quad (46)$$

Estas ecuaciones son útiles para el diseño y análisis de sistemas no lineales. Por ejemplo, cuando un control lineal es implementado basado en el modelo linealizado de la planta, la respuesta en tiempo del sistema con el sistema completo y el linealizado puede ser simulado

para evaluar el rango de validez de la aproximación lineal. La simulación con un modelo no lineal puede ser comparado con los resultados reales en el sistema ECP para ver los efectos de próximos modelos y el comportamiento dinámico no ideal.

III.3. Realización en el espacio de estados.

La ecuación que describe el comportamiento dinámico del ECP puede representarse de la siguiente forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u, \quad (47)$$

basados en la ecuación (47) y utilizando las ecuaciones (45) y (46), se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -l_0 m_2 & m_2 \\ J_0 & -l_0 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 q_2 \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} g m_2 \sin q_1 \\ g m_2 q_2 \cos q_1 - (m_2 l_0 + l_c m_1) g \sin q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Despejando los términos con segunda derivada, la ecuación queda de la forma:

$$\ddot{q} = -M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\dot{q} - M^{-1}(q)g(q) + M^{-1}(q)u, \quad (49)$$

con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{l_0 m_2 q_2 \dot{q}_1}{J^*} & \frac{2m_2 q_2 \dot{q}_1}{J^*} \\ -\frac{J_0 q_2 \dot{q}_1}{J^*} & \frac{2l_0 m_2 q_2 \dot{q}_1}{J^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{m_2 q_2 \cos q_1 - K \sin q_1}{J^*} + \frac{l_0 m_2 \sin q_1}{J^*} \\ \frac{m_2 l_0 q_2 \cos q_1 - K l_0 \sin q_1}{J^*} + \frac{J_0 \sin q_1}{J^*} \end{pmatrix} g - \begin{pmatrix} \frac{l_0}{J^*} \\ \frac{J_0}{m_2 J^*} \end{pmatrix} u(t),
\end{aligned} \tag{50}$$

donde $J^* = l_0^2 m_2 - J_0$, $K = l_0 m_2 + l_c m_1$; definiendo un cambio de variables, los nuevos estados son:

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = \dot{q}_1, \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \dot{q}_2.$$

Utilizando las nuevas variables en la ecuación (50):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{2m_2 x_3 x_2 x_4 - l_0 m_2 x_3 x_2^2}{J^*} \\ x_4 \\ \frac{2l_0 m_2 x_3 x_2 x_4 - J_0 x_3 x_2^2}{J^*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m_2 x_3 \cos x_1 - K \sin x_1}{J^*} + \frac{l_0 m_2 \sin x_1}{J^*} \\ 0 \\ \frac{m_2 l_0 x_3 \cos x_1 - K l_0 \sin x_1}{J^*} + \frac{J_0 \sin x_1}{J^*} \end{pmatrix} g \\
&- \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{l_0}{J^*} \\ 0 \\ \frac{J_0}{m_2 J^*} \end{pmatrix} u(t).
\end{aligned} \tag{51}$$

III.4. Puntos de equilibrio.

Para encontrar los puntos de equilibrio se considera que en el equilibrio $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, u(t) = 0$ y $J^* \neq 0$, con lo cual la ecuación (51) se reduce a

$$\begin{aligned}
x_2 &= 0, \\
-l_0 m_2 x_3 x_2^2 + 2m_2 x_3 x_2 x_4 + (m_2 x_3 \cos x_1 - K \sin x_1)g + gl_0 m_2 \sin x_1 &= 0, \\
x_4 &= 0, \\
-J_0 x_3 x_2^2 + 2l_0 m_2 x_3 x_2 x_4 + (m_2 l_0 x_3 \cos x_1 - Kl_0 \sin x_1)g + gJ_0 \sin x_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Como se observa x_2 y x_4 son igual a cero. Ahora resolvemos las otras dos ecuaciones para encontrar el valor de x_1 y x_3

$$m_2 x_3 g \cos x_1 - l_c m_1 g \sin x_1 = 0, \quad (52)$$

$$(m_2 l_0 x_3 \cos x_1 - Kl_0 \sin x_1)g + gJ_0 \sin x_1 = 0. \quad (53)$$

Multiplicando la ecuación (52) por l_0 y restándole la ecuación (53) resulta

$$(l_0^2 m_2 - J_0) \sin x_1 = 0. \quad (54)$$

Para que se cumpla (54) tenemos dos casos, que $l_0^2 m_2 - J_0 = 0$, o que $\sin(x_1) = 0$. Para el primer caso utilizando la ecuación (42), tenemos que

$$q_2 = \sqrt{\frac{-J_1 - J_2 - m_1 l_c^2}{m_2}} \quad (55)$$

y ya que por definición J_1, J_2, m_1, m_2 son siempre positivas, las soluciones de (55) están dentro del conjunto de números imaginarios, por lo tanto no se considerarán estas soluciones.

En el segundo caso tenemos que

$$x_1 = \arcsin(0) = n\pi \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Debido a las limitaciones físicas del sistema, el único punto para el cual se tiene un equilibrio es en $x_1 = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación (52), obtenemos el valor de x_3 para completar el estado de equilibrio

$$(m_2 x_3 \cos(0) - K \sin(0))g + gl_0 m_2 \sin(0) = 0,$$

$$m_2 x_3 = 0.$$

De lo cual resulta que $x_3 = 0$, y el punto de equilibrio local está dado por:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 0. \quad (56)$$

III.5. Parámetros del sistema.

Es necesario identificar los parámetros del péndulo invertido para diseñar e implementar controladores que lo estabilicen y le permitan seguir las coordenadas en desplazamientos angulares.

El propósito del procedimiento será para obtener valores numéricos para las ecuaciones simbólicas arriba derivadas. Se reconoce que no todos los parámetros pueden ser medidos con el péndulo completamente ensamblado, como por ejemplo los pesos de los motores y codificadores. La Tabla II muestra los parámetros del sistema. Sus valores nominales han sido medidos antes de su ensamble.

De las definiciones en la Tabla II tenemos

Tabla II. *Parámetros del péndulo ECP505.*

Parametro.	Valor.	Descripción.
l_0	0.330 (m)	Longitud del eslabón oscilante, desde el pivote hasta el eslabón deslizante.
m_2	por identificar	Masa del eslabón deslizante completo, incluidos los elementos adaptados.
m_{2_0}	0.103 (kg)	Masa del eslabón deslizante con cinturón, banda y guardas(sin pesas).
m_{w_2}	0.110 (kg)	Masa combinada de las pesas del eslabón deslizante.
m_1	por identificar	Masa del ensamble completo menos m_2 .
m_{w_1}	1.000 (kg)	Masa de la pesa de balance del brazo.
m_{1_0}	0.785 (kg)	Masa del ensamble de movimiento completo menos m_2 y m_{w_1} .
l_{c_0}	0.071 (m)	Posición del centro de gravedad del péndulo ensamblado completamente, con el eslabón deslizante y la pesa de balance removidos.
J_0^*	$0.025(kg - m^2)$	$[J_{0_e} - m_1 l_0^2]$ evaluado cuando $m_{w_1} = 0$.

$$m_1 = m_{1_0} + m_{w_1} = 0.785kg + 1.000kg = 1.785 kg,$$

$$m_2 = m_{2_0} + m_{w_2} = 0.103kg + 0.110kg = 0.213 kg.$$

El parámetro l_{w_1} se define como la distancia desde el pivote hasta el centro de gravedad de la pesa de balance (m_{w_1}), es variable, puede ser cambiada por el usuario y se mide fácilmente

$$l_{w_1} = -\frac{w_d + l_t + l_b}{2},$$

donde $w_d = 0.015(m)$ es el ancho de la placa de soporte que cruza el eje de rotación, $l_t = 0.085(m)$ es la distancia entre la placa de soporte y las pesas, y la distancia de la placa hasta la parte inferior de las pesas es $l_b = 0.148(m)$, entonces $l_{w_1} = -0.108(m)$.

Los tres parámetros restantes J^* (obtenida del manual), J_{0_e} y l_c , son derivadas de las

ecuaciones anteriores como sigue

$$l_c = \frac{m_{w_1} l_{w_1} + m_{l_0} l_{c_0}}{m_1} = \frac{(1)(-0.108) + (0.785)(0.071)}{1.785} = -0.029 \text{ m.}$$

$J_0^* = 0.025$ es el momento de inercia polar respecto al pivote menos el eslabón deslizante y el contrapeso.

$$J_{0_e} = J_0^* + m_2 l_0^2 + m_{w_1} (l_{w_1})^2 = 0.059 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J^* = [m_2 l_0^2 - J_{0_e}] = -0.036.$$

Con los cuales el sistema (51) queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 1.932x_3x_2^2 - 11.712x_3x_2x_4 - 57.489x_3 \cos x_1 - 14.241 \sin x_1 \\ x_4 \\ 1.638x_3x_2^2 - 3.865x_3x_2x_4 - 18.971x_3 \cos x_1 - 14.517 \sin x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9.072 \\ 0 \\ 7.690 \end{pmatrix} u(t). \quad (57)$$

III.6. Estabilidad local.

Para determinar la estabilidad local de los puntos de equilibrio se emplea el teorema conocido como el método directo de Lyapunov (Khalil, 2002), el cual analiza la estabilidad local de

trayectorias de sistemas no lineales.

Utilizando la ecuación (51), y llevándola a la forma

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2, \\ f_2 &= -\frac{l_0 m_2 x_3 x_2^2 + 2m_2 x_3 x_2 x_4 + (m_2 x_3 \cos x_1 - K \sin x_1)g + gl_0 m_2 \sin x_1}{J^*}, \\ f_3 &= x_4, \\ f_4 &= -\frac{J_0 x_3 x_2^2 + 2l_0 m_2 x_3 x_2 x_4 + (m_2 l_0 x_3 \cos x_1 - Kl_0 \sin x_1)g + gJ_0 \sin x_1}{J^*}. \end{aligned}$$

La matriz de estabilidad local A quedaría definida como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-gm_2 \sin x_1 x_3 + (-k+l_0 m_2)g \cos x_1}{l_0^2 m_2 - J_0} & \frac{2m_2 x_3 (x_4 - l_0 x_2)}{l_0^2 m_2 - J_0} & \frac{m_2 x_2 (2x_4 - l_0 x_2) + gm_2 \cos x_1}{l_0^2 m_2 - J_0} & \frac{2m_2 x_2 x_3}{l_0^2 m_2 - J_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-gl_0 m_2 \sin x_1 x_3 + (-kl_0 + J_0)g \cos x_1}{l_0^2 m_2 - J_0} & \frac{2x_3 (l_0 m_2 x_4 - J_0 x_2)}{l_0^2 m_2 - J_0} & \frac{gl_0 m_2 (2x_2 x_4 + \cos x_1) - J_0 x_2^2}{l_0^2 m_2 - J_0} & \frac{2l_0 m_2 x_2 x_3}{l_0^2 m_2 - J_0} \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el punto de equilibrio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-gk+gl_0 m_2}{l_0^2 m_2 - J_0} & 0 & \frac{gm_2}{l_0^2 m_2 - J_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-gkl_0+gJ_0}{l_0^2 m_2 - J_0} & 0 & \frac{gl_0 m_2}{l_0^2 m_2 - J_0} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14.2411 & 0 & -57.4886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -14.5170 & 0 & -18.9712 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz A resulta ser igual a

$$\lambda^4 + \frac{gk - 2gl_0 m_2}{l_0^2 m_2 - J_0} \lambda^2 + \frac{g^2 l_0^2 m_2^2 - g^2 J_0 m_2}{l_0^4 m_2^2 - 2J_0 l_0^2 m_2 + J_0^2} = 0.$$

Sustituyendo los valores de los parámetros, se tiene que

$$\lambda^4 + 32.85\lambda^2 - 558.28 = 0. \quad (58)$$

Ya que existe un cambio de signo en el polinomio, el punto de equilibrio es inestable ya que tiene al menos una raíz del polinomio con parte real positiva.

III.7. Conclusiones de capítulo.

En este capítulo se presentó el modelo y las propiedades básicas del péndulo invertido. La práctica ha mostrado que el modelo matemático obtenido en este capítulo no es adecuado para nuestros fines, debido a que no considera los términos de fricción. Estos serán considerados en el siguiente capítulo. Aunque en este capítulo no hubo aportaciones novedosas, es de importancia para obtener un modelo matemático base, el cual es usado en los capítulos posteriores.

Como ya se mencionó en el Capítulo I, el péndulo es un sistema subactuado. Algunas de las características de este tipo de sistemas son: dinámica no lineal, acoplamiento entre las partes actuadas y las no actuadas, fase no mínima de la dinámica cero. Desafortunadamente, las técnicas de control comúnmente utilizadas no pueden ser aplicadas generalmente a sistemas subactuados. Las características mencionadas ocasionan ciertas limitantes en la dinámica del sistema, las cuales restringen el conjunto de trayectorias que pueden ser seguidas por el sistema y a su vez en puede complicar el problema de sincronización. Esto motivó la aplicación del método presentado en el Capítulo IV para el control del péndulo y la definición de la trayectoria a seguir.

Capítulo IV

Control local del péndulo.

En este capítulo se presenta primeramente el modelo que será considerado para incluir términos de fricción en el modelo del péndulo, esto debido a que los efectos no deseados que produce la fricción, tales como errores de estado estáticos, ciclos límites, y un pobre desempeño del sistema, necesitan ser compensados. También se presenta el método utilizado para obtener una salida linealizante de grado mayor, con la cual se pueda realizar una ley de control local para el péndulo invertido. El objetivo es determinar un conjunto de salidas que permitan obtener un sistema con una dinámica cero unidimensional que sea localmente asintóticamente estable (Grizzle *et al.*, 2005), es decir, de fase mínima. Esta solución fue propuesta para poder obtener una ley de control para el péndulo invertido, ya que como se menciona en el Capítulo III el péndulo es un sistema subactuado y presenta algunas limitaciones.

En la ley de control obtenida, se requiere conocer la posición y la velocidad de ambos eslabones del péndulo. La posición de la barra deslizante es medida por medio de un codificador (encoder) localizado atrás del motor, y la posición angular de la barra giratoria es medida con otro codificador conectado a la base giratoria. En los sistemas utilizados no disponemos de medidores de velocidad para ninguno de los eslabones, lo cual nos llevo a realizar un estudio de los métodos comúnmente utilizados para la obtención de estados no medibles. Obser-

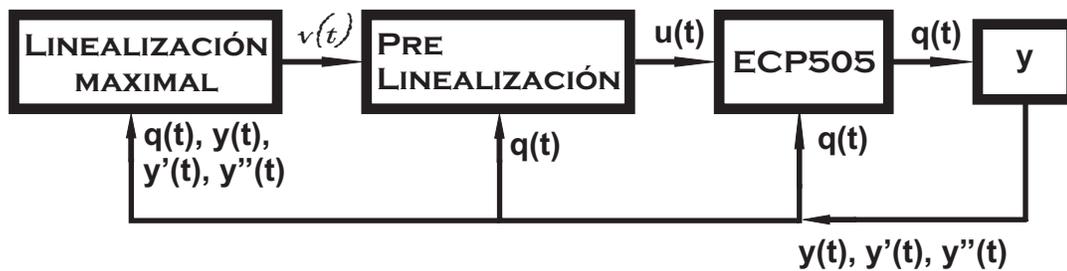


Figura 2. Diagrama del modelo de control.

vadores de alta ganancia ((Dabroom y Khalil, 1997),(Eker y Åström, 1996)), observadores basados en técnicas de modos deslizantes ((Xiong y Saif, 2001) (McCann *et al.*, 2001)), filtros Kalman extendidos (Zhuang y Rahman, 2003) y diferenciación robusta ((Levant, 1998), (Levant, 2001)), son algunos de estos métodos. Esta gran variedad de métodos disponibles motivó realizar una comparación entre diferentes opciones, las cuales fueron dos observadores robustos (Rosas Almeida *et al.*, 2007) y un diferenciador robusto de segundo orden (Levant, 2003), todos basados en modos deslizantes. Esta comparación fue realizada para poder seleccionar el método que se utilizará, el cual es el diferenciador robusto de segundo orden, ya que mostro un mejor desempeño experimental. Los resultados obtenidos con los tres métodos también son presentados en este capítulo.

IV.1. Modelos de fricción.

La fricción ocurre en todos los sistemas mecánicos (e.g. baleros, transmisiones, cilindros hidráulicos y neumáticos, válvulas, frenos y ruedas). La fricción aparece en la interfaz entre dos superficies en contacto, para reducir sus efectos comúnmente se utilizan lubricantes como la grasa o aceite, pero también puede existir contacto seco entre las superficies. La fricción es fuertemente influenciada por contaminantes, lo cual hace más complicada la compensación. Hay un amplio rango de fenómenos físicos que causan fricción, como por ejemplo las

deformaciones plásticas y elásticas.

La fricción fue estudiada extensivamente en la ingeniería mecánica clásica y ha tenido un fuerte resurgimiento en los últimos años. La fricción también es muy importante para la ingeniería de control, por ejemplo en aplicaciones de servomecanismos de alta precisión, robots, sistemas hidráulicos y neumáticos. Es por consiguiente muy importante para los ingenieros de control entender el fenómeno de fricción y conocer cómo trabajar con ella.

Existen varios modelos de fricción, cada uno de los cuales toma en cuenta ciertos aspectos de la fuerza de fricción. Algunos de los modelos clásicos de fricción son: fricción de Coulomb, dada por $F = F_c \text{sign}(v)$ (Canudas de Wit *et al.*, 1995; Olsson *et al.*, 1998), donde la fuerza de fricción F_C es proporcional a la fuerza normal ejercida por la carga, la fuerza causada por la viscosidad de lubricantes es denominada fricción viscosa, la cual es descrita como $F = F_c \cdot v$. Modelos más completos como el modelo de de Dahl (Dahl, 1968) y el modelo de LuGre (Canudas de Wit *et al.*, 1995) también pueden ser utilizados.

El modelo que se utilizará para el ECP505 es un modelo simple de fricción viscosa, el cual depende directamente de la velocidad del sistema. Este modelo fue seleccionado debido a que los modelos que incluyen términos no diferenciables (e.g. fricción de Coulomb) no pueden ser fácilmente aplicados en el método de linealización propuesto. En nuestro caso de estudio, se propone la ecuación para la fricción dada por

$$F = a\dot{q}(t),$$

Una vez definido el modelo de fricción que será utilizado, obtenemos la ley de control, para ello se utilizará primeramente el método de prelinealización presentado en (Spong, 1994), y después se procederá a encontrar la salida linealizante de grado máximo.

IV.2. Prelinealización.

En esta sección se pretende encontrar una ley de control que linealice parcialmente el sistema (Spong, 1994), esto se hace con la finalidad de que la nueva entrada de control que se va a diseñar sea menos compleja. La ecuación de Lagrange para el primer eslabón con un término de fricción viscosa queda determinada por la ecuación:

$$\begin{aligned} -C_2\ddot{q}_2(t) + 2m_2q_2(t)\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) + (m_2q_2(t)^2 + C_1)\ddot{q}_1(t) \\ -C_4g \sin(q_1(t)) + a_1\dot{q}_1(t) + m_2gq_2(t) \cos(q_1(t)) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

para el segundo eslabón obtenemos también su ecuación de Lagrange con fricción viscosa:

$$m_2\ddot{q}_2(t) + a_2\dot{q}_2(t) - C_2\ddot{q}_1(t) - m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 + m_2g \sin(q_1(t)) = u \quad (60)$$

donde C_1, C_2, C_4 son constantes que dependen únicamente de los parámetros del sistema. a_1, a_2 son las constantes de proporcionalidad de la fuerza de fricción, m_2 es la masa del segundo eslabón y g es la constante gravitacional. Las variables $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son la posición angular (primer eslabón) y la posición lineal (segundo eslabón), respectivamente.

Considerando la fricción en el primer eslabón despreciable, entonces $a_1 = 0$ por lo tanto no será considerada en el resto del capítulo. Ahora podemos resolver la ecuación (59) para $\ddot{q}_1(t)$

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{C_2\ddot{q}_2(t) - 2m_2q_2(t)\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) + C_4g \sin(q_1(t)) - m_2gq_2(t) \cos(q_1(t))}{m_2q_2(t)^2 + C_1}. \quad (61)$$

Resolviendo también la ecuación (60) para $\ddot{q}_2(t)$

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{u - a_2\dot{q}_2(t) + C_2\ddot{q}_1(t) + m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 - m_2g \sin(q_1(t))}{m_2} \quad (62)$$

Sustituyendo (61) en la ecuación anterior, así como $J_0 = m_2q_2(t)^2 + C_1$:

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{J_0u + C_2^2\ddot{q}_2(t) + (-2m_2C_2q_2(t)\dot{q}_1(t) - a_2J_0)\dot{q}_2(t)}{m_2J_0} + \frac{J_0m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 + (C_2C_4g - J_0m_2g)\sin(q_1(t)) - m_2C_2gq_2(t)\cos(q_1(t))}{m_2J_0}. \quad (63)$$

Resolviendo nuevamente para $\ddot{q}_2(t)$:

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{J_0u + (-2m_2C_2q_2(t)\dot{q}_1(t) - a_2J_0)\dot{q}_2(t) + J_0m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2}{m_2J_0 - C_2^2} + \frac{(C_2C_4g - J_0m_2g)\sin(q_1(t)) - m_2C_2gq_2(t)\cos(q_1(t))}{m_2J_0 - C_2^2}. \quad (64)$$

Sustituyendo $\ddot{q}_2(t) = v$ en la segunda derivada de $q_1(t)$ podemos escribir las ecuaciones del péndulo en la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t) &= \mathcal{J}(q_2(t))v + R(q, \dot{q}) \\ \ddot{q}_2(t) &= v \end{aligned} \quad (65)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(q_2(t)) &= \frac{C_2}{J_0} \\ R(q, \dot{q}) &= -\frac{2m_2q_2(t)\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) - C_4g\sin(q_1(t)) + m_2gq_2(t)\cos(q_1(t))}{J_0}. \end{aligned}$$

La ecuación 65 es un modelo prelinealizado para el péndulo invertido (Spong, 1994). Para obtener la ecuación prelinealizante, resolvemos (64) en función de u , lo cual nos da la entrada de control prelinealizante:

$$u = \frac{(m_2 J_0 - C_2^2) v + (2m_2 C_2 q_2(t) \dot{q}_1(t) + a_2 J_0) \dot{q}_2(t) + (-m_2 q_2(t) J_0) (\dot{q}_1(t))^2}{(m_2 g J_0 - C_2 C_4 g) \sin(q_1(t)) + \frac{J_0}{m_2 C_2 g q_2(t)} \cos(q_1(t))} + \frac{J_0}{J_0}. \quad (66)$$

IV.3. Linealización máxima.

Aplicando la teoría de control algebraico, para obtener una linealización máxima del modelo no lineal del péndulo invertido ECP505, hay que buscar una salida con grado relativo lo más elevado posible. Para ello hay que calcular el subespacio integrable \mathcal{H}_k de grado mayor (véase Conte *et al.*, 1999). Con ello podemos obtener un conjunto de vectores base, los cuales deben ser integrables, y asegurar que la salida podrá ser derivada hasta encontrar dependencia de la entrada. Para el caso del péndulo, este subespacio de grado mayor es \mathcal{H}_4 , el cual no es integrable. Sin embargo, $\mathcal{H}_3 = \text{span}_{\mathcal{K}}\{d\sigma, dp\}$, donde p y σ se definen como

$$\sigma = -C_2 \dot{q}_2(t) + (m_2 q_2(t)^2 + C_1) \dot{q}_1(t), \quad (67)$$

$$p = q_1(t) - \frac{C_2 \arctan\left(\frac{m_2 q_2(t)}{\sqrt{C_1 m_2}}\right)}{\sqrt{C_1 m_2}}, \quad (68)$$

sí es integrable. Entonces la familia de salidas linealizantes $y = Kp + \sigma$ queda definida por

$$y = \left(q_1(t) - \frac{C_2 \arctan\left(\frac{m_2 q_2(t)}{\sqrt{C_1 m_2}}\right)}{\sqrt{C_1 m_2}} \right) K - C_2 \dot{q}_2(t) + (m_2 q_2(t)^2 + C_1) \dot{q}_1(t). \quad (69)$$

Obtenemos la primera derivada de y , la cual es

$$\dot{y} = \left(\dot{q}_1(t) - \frac{C_2 \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) K + C_4 g \sin(q_1(t)) - m_2 g q_2(t) \cos(q_1(t)) \quad (70)$$

y para la segunda derivada se obtiene

$$\ddot{y} = \left(\frac{2m_2 C_2 q_2(t) (\dot{q}_2(t))^2}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2 q_2(t) \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) - C_4 g \sin(q_1(t)) + m_2 g q_2(t) \cos(q_1(t))}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) K + \quad (71)$$

$$m_2 g \cos(q_1(t)) \dot{q}_2(t) - m_2 g q_2(t) \sin(q_1(t)) \dot{q}_1(t) - C_4 g \cos(q_1(t)) \dot{q}_1(t).$$

La tercera derivada de y es igual a

$$y^{(3)} = \frac{4kl_0 m_2^2 q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} \ddot{q}_2(t) + \frac{2l_0 k m_2^2 \dot{q}_2^3(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{8kl_0 m_2^3 \dot{q}_2^2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^3} \dot{q}_2^3(t) + \frac{(C_4) k g \cos q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} +$$

$$- \frac{2m_2 k \dot{q}_1(t) \dot{q}_2^2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \ddot{q}_2(t) - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \ddot{q}_1(t) - \frac{m_2 k g \cos q_1(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} +$$

$$\frac{m_2 k g q_2(t) \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)} R(q, \dot{q}) +$$

$$+ (C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t)) \ddot{q}_1(t) - m_2 g \cos q_1(t) \ddot{q}_2(t) +$$

$$+ (m_2 g q_2(t) \cos q_1(t) - C_4 g \sin q_1(t)) \dot{q}_1^2(t) + 2m_2 g \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) \sin q_1(t). \quad (72)$$

Factorizamos los términos comunes en la ecuación (72)

$$y^{(3)} = \left(\frac{4kl_0 m_2^2 q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - m_2 g \cos q_1(t) \right) \ddot{q}_2(t) +$$

$$+ \left(C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t) - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) \ddot{q}_1(t) -$$

$$- \frac{2m_2 k \dot{q}_1(t) \dot{q}_2^2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \frac{m_2 k g \cos q_1(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{m_2 k g q_2(t) \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{C_4 k g \cos q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \quad (73)$$

$$+ \left(\frac{2l_0 k m_2^2}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{8kl_0 m_2^3 \dot{q}_2^2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^3} \right) \dot{q}_2^3(t) + 2m_2 \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) g \sin q_1(t) -$$

$$- \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)} R(q, \dot{q}) + (m_2 g q_2(t) \cos q_1(t) - C_4 g \sin q_1(t)) \dot{q}_1^2(t).$$

Sustituyendo (65) en (73)

$$\begin{aligned}
y^{(3)} = & \left(\frac{4kl_0m_2^2q_2(t)\dot{q}_2(t)}{(m_2q_2(t)^2+C_1)^2} - \frac{2m_2kq_2(t)\dot{q}_1(t)}{m_2q_2(t)^2+C_1} - m_2g \cos q_1(t) \right) v + \\
& + \left(C_4g \cos q_1(t) + m_2gq_2(t) \sin q_1(t) - \frac{2m_2kq_2(t)\dot{q}_2(t)}{m_2q_2(t)^2+C_1} \right) \left(\mathcal{J}(q_2(t))v + R(q, \dot{q}) \right) - \\
& - \frac{2m_2k\dot{q}_1(t)\dot{q}_2^2(t)}{m_2q_2(t)^2+C_1} - \frac{m_2kg \cos q_1(t)\dot{q}_2(t)}{m_2q_2(t)^2+C_1} + \frac{m_2kq_2(t) \sin q_1(t)\dot{q}_1(t)}{m_2q_2(t)^2+C_1} + \frac{(C_4)kg \cos q_1(t)\dot{q}_1(t)}{m_2q_2(t)^2+C_1} + \\
& + \left(\frac{2l_0km_2^2}{(m_2q_2(t)^2+C_1)^2} - \frac{8kl_0m_2^3q_2^2(t)}{(m_2q_2(t)^2+C_1)^3} \right) \dot{q}_2^3(t) + 2m_2\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t)g \sin q_1(t) - \\
& - \frac{2m_2kq_2(t)\dot{q}_2(t)}{(m_2q_2(t)^2+C_1)} R(q, \dot{q}) + (m_2gq_2(t) \cos q_1(t) - C_4g \sin q_1(t))\dot{q}_1^2(t).
\end{aligned} \tag{74}$$

Puesto que en esta derivada aparece dependencia explícita de la entrada v , se procede a obtener la entrada linealizante. Para ello, definimos una trayectoria C^∞ de referencia $y_{ref}(t)$, $t \geq 0$, y la señal de error $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$, y utilizando ecuaciones diferenciales de error como en el Capítulo II, la dinámica del error quedaría de la forma

$$y^{(3)}(t) - y_{ref}^{(3)}(t) + \lambda_1(\ddot{y}(t) - \ddot{y}_{ref}(t)) + \lambda_2(\dot{y}(t) - \dot{y}_{ref}(t)) + \lambda_3(y(t) - y_{ref}(t)) = 0, \tag{75}$$

Igualamos $y^{(3)} = w$ donde

$$w = y_{ref}^{(3)}(t) - \lambda_1(\ddot{y}(t) - \ddot{y}_{ref}(t)) - \lambda_2(\dot{y}(t) - \dot{y}_{ref}(t)) - \lambda_3(y(t) - y_{ref}(t)). \tag{76}$$

Sustituyendo (74) y (76) en (75), despejando y agrupando términos comunes para v

$$\begin{aligned}
w = & \left(\left(C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t) - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) \left(\mathcal{J}(q_2(t)) \right) \right. \\
& + m_2 g \cos q_1(t) + \frac{4kl_0 m_2^2 q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \left. \right) v + \\
& + \left(C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t) - \frac{4m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) \left(R(q, \dot{q}) \right) - \\
& - \frac{2m_2 k \dot{q}_1(t) \dot{q}_2^2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \frac{m_2 k g \cos q_1(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{m_2 k g q_2(t) \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{(C_4) k g \cos q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \\
& + \left(\frac{2l_0 k m_2^2}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{8kl_0 m_2^3 q_2^2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^3} \right) \dot{q}_2^3(t) + 2m_2 \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) g \sin q_1(t) - \\
& + (m_2 g q_2(t) \cos q_1(t) - C_4 g \sin q_1(t)) \dot{q}_1^2(t).
\end{aligned} \tag{77}$$

Resolviendo ahora la ecuación anterior para v obtenemos la ecuación para la nueva entrada de control

$$v = \frac{w - \Psi(q, \dot{q})(R(q, \dot{q})) - \phi(q, \dot{q})}{\Psi(q, \dot{q})\mathcal{J}(q_2(t)) + \xi(q, \dot{q})}, \tag{78}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Psi(q, \dot{q}) & = \left(C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t) - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right), \\
\phi(q, \dot{q}) & = - \frac{2m_2 k \dot{q}_1(t) \dot{q}_2^2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \frac{m_2 k g \cos q_1(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{m_2 k g q_2(t) \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \\
& + \left(\frac{2l_0 k m_2^2}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{8kl_0 m_2^3 q_2^2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^3} \right) \dot{q}_2^3(t) + \frac{(C_4) k g \cos q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \\
& - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} R(q, \dot{q}) + 2m_2 g \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) \sin q_1(t) \\
& + (m_2 g q_2(t) \cos q_1(t) \dot{q}_1(t) - C_4 g \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)) \dot{q}_1(t), \\
\xi(q, \dot{q}) & = \frac{4kl_0 m_2^2 q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - m_2 g \cos q_1(t).
\end{aligned} \tag{79}$$

Para el sistema linealizado es necesario conocer los estados $\dot{q}_1(t)$ y $\dot{q}_2(t)$, los cuales no están disponibles para medirlos. Para encontrar estos estados, se realiza una comparación en-

tre dos observadores robustos y un derivador robusto de segundo orden como es el propuesto en (Levant, 2003).

IV.4. Comparación entre observadores y derivador.

Los observadores o estimadores de estado son algoritmos utilizados para obtener mediciones estimadas de variables no medibles. Basados en manipulación de los modelos de sistemas permiten estimaciones de las variables de estado como velocidad o aceleración.

El problema de observación de sistemas con entradas desconocidas ha sido uno de los más importantes problemas en la teoría de control durante ya largo tiempo. Actualmente en la literatura, condiciones necesarias y suficientes para la robustez de un observador con respecto a entradas desconocidas han sido ampliamente establecidas. Estas condiciones requieren que las entradas desconocidas puedan ser representadas por las salidas conocidas, lo cual se vuelve restrictivo debido a que no se incluye la clase más simple de sistemas mecánicos con entradas desconocidas, donde solamente la posición está disponible. Para resolver esta situación, se utiliza principalmente el diseño de observadores adaptables, que aseguran una convergencia exponencial de la estimación del error a un pequeño vecindario cercano al cero.

La teoría de observación de sistemas con entradas desconocidas ha sido desarrollada activamente dentro de la teoría de estructura variable utilizando la técnica de modos deslizantes. Los observadores por modos deslizantes han sido utilizados ampliamente debido a sus atractivas características: son poco sensibles a entradas desconocidas, posibilidad de usar inyección de salida equivalente para identificar entradas desconocidas, convergencia en tiempo finito a valores exactos de los vectores de estado.

IV.4.1. Observador para sistemas lagrangianos de n grados de libertad.

Un sistema lagrangiano de n grados de libertad se puede representar por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \phi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta + \gamma(t) = u, \quad (80)$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posición generalizado, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de fuerza gravitacional, el término $\phi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta$ incluye los términos producidos por el vector de variaciones paramétricas θ , así como las fuerzas de fricción. $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector acotado de perturbaciones externas; finalmente, $u \in \mathbb{R}^m$, donde $m \leq n$, es la fuerza de entrada generalizada. Considérese que las variables medidas son las posiciones generalizadas q_i .

Como se propone en (Rosas Almeida *et al.*, 2007), definiendo las variables de estado $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$, la representación en el espacio de estado del sistema (80) es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ f(x) + g(x_1) + \xi(t) + M^{-1}(q)u \end{bmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (81)$$

Considerando el siguiente sistema de segundo orden

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -av_1 - bv_2 + \epsilon(t) - csign(v_1) \end{bmatrix} \quad (82)$$

con a y b constantes positivas, $\epsilon(t)$ es una perturbación con la cota

$$|\epsilon(t)| \leq \rho_0 \quad (83)$$

donde ρ_0 es constante, c es un parámetro de control, y $sign(\cdot)$ es la función signo. Defina la matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \quad (84)$$

y la matriz P , la cual es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + PA = -I$ para la matriz Hurwitz A , como

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Las propiedades de estabilidad del sistema (82) están dadas por el teorema siguiente

Teorema 1 . Para el sistema (82) con P definida por (85), si

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{C_{2,i}\rho_0}{\theta} \right) \quad (86)$$

para algún $0 < \theta < 1$, entonces el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov.

Se propone un observador para el sistema (81) como

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ f(\hat{x}) + g(x_1) + \xi(t) + M^{-1}(q)u \end{bmatrix} + H(y + \hat{y}) \quad (87)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1$$

donde el vector $H(y + \hat{y})$ tiene la forma

$$H(y + \hat{y}) = \begin{bmatrix} C_1(y + \hat{y}) \\ C_2(y + \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y + \hat{y}) \end{bmatrix} \quad (88)$$

y C_1, C_2 y C_3 matrices diagonales definidas positivas, deben de ser seleccionadas tal que

$$\begin{aligned}
C_{1,i} &> 0 \\
C_{2,i} &> 0 \\
C_{3,i} &> 2\lambda_{max}(P)\sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}\left(\frac{C_{2,i}\rho_0}{\theta}\right)
\end{aligned} \tag{89}$$

donde la matriz P y la constante θ son definidas por (85) y el Teorema 1.

Definiendo las variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, la dinámica del error está descrita por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 - C_1 e_1 \\ f(x) - f(x - e) + \xi(t) - C_2 e_1 - C_3 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}. \tag{90}$$

La representación en el espacio de estado del sistema ECP505 está dada por la ecuación (51); entonces la ecuación del observador propuesto queda de la forma

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ \frac{2m_2\hat{x}_2\hat{x}_3\hat{x}_4 - l_0m_2\hat{x}_2^2\hat{x}_3 + m_2gx_3 \cos x_1 - l_c m_1 g \sin x_1}{J^*} \\ \hat{x}_4 \\ \frac{2l_0m_2\hat{x}_3\hat{x}_2\hat{x}_4 - J_0\hat{x}_2^2\hat{x}_3 + m_2l_0gx_3 \cos x_1 + (J_0 - Kl_0)g \sin x_1}{J^*} \end{pmatrix} - \\
&\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{l_0u}{J^*} \\ 0 \\ \frac{J_0u}{m_2J^*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{1,1}(x_1 - \hat{x}_1) \\ C_{2,1}(x_1 - \hat{x}_1) + C_{3,1}\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ C_{1,2}(x_3 - \hat{x}_3) \\ C_{2,2}(x_3 - \hat{x}_3) + C_{3,2}\text{sign}(x_3 - \hat{x}_3) \end{pmatrix}, \\
y &= \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{91}$$

donde $C_{1,1} = 90$, $C_{2,1} = 90$ y $C_{3,1} = 14$ para el primer grado de libertad, y $C_{1,2} = 90$,

$C_{2,2} = 100$ y $C_{3,2} = 7.5$ para el segundo grado de libertad. Debido a que no existe un método definido para determinar los valores exactos de estos coeficientes, todos son seleccionadas de manera empírica, tanto en el caso de los observadores como en el derivador.

IV.4.2. Observador para sistemas lagrangianos de n grados de libertad reducido.

En esta sección se presenta el análisis y simplificación del observador para sistemas lagrangianos de n grados de libertad propuesto en (Rosas Almeida *et al.*, 2007), de manera que se omiten los términos $f(\hat{x})$ y $g(x_1)$, tal que la ecuación (87) se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + h_1, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= M^{-1}u + h_2, \\ \hat{y} &= \hat{x}_1,\end{aligned}\tag{92}$$

donde $h_1 = C_1e_1$ y $h_2 = C_2e_1 + C_3\text{sign}(e_1)$.

Ahora la dinámica del error obtenida de (81) y (92) es

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - C_1e_1, \\ \dot{e}_2 &= f(x) + g(x_1) + \xi(t) - C_2e_1 - C_3\text{sign}(e_1).\end{aligned}\tag{93}$$

Se define ahora como término de perturbación

$$\Theta(x, t) = f(x) + g(x_1) + \xi(t),\tag{94}$$

y se requiere que $\Theta(x, t)$ sea acotada, es decir,

$$\|\Theta(x, t)\| = \|f(x) + g(x_1) + \xi(t)\| \leq \varsigma,\tag{95}$$

donde ς es una constante. Reescribiendo el sistema (93) de acuerdo con (94)

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - C_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= \Theta(x, t) - C_2 e_1 - C_3 \text{sign}(e_1).\end{aligned}\tag{96}$$

Bajo la suposición que el sistema está acotado para cualquier entrada y perturbación acotadas, y considerando que es posible encontrar un conjunto de matrices C_1 , C_2 y C_3 tales que el origen del sistema del error sea un punto de equilibrio exponencialmente estable, entonces el sistema definido por (92) es un observador para el sistema definido por (81).

El segundo observador utilizado está dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ -\frac{l_0 u}{J^*} \\ \hat{x}_4 \\ -\frac{J_0 u}{m_2 J^*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{1,1}(x_1 - \hat{x}_1) \\ C_{2,1}(x_1 - \hat{x}_1) + C_{3,1} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ C_{1,2}(x_3 - \hat{x}_3) \\ C_{2,2}(x_3 - \hat{x}_3) + C_{3,2} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3) \end{pmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{97}$$

donde los valores de las constantes son $C_{1,1} = 200$, $C_{2,1} = 48$ y $C_{3,1} = 17$ para el primer grado de libertad, y $C_{1,2} = 200$, $C_{2,2} = 20$ y $C_{3,2} = 15$ para el segundo.

IV.4.3. Diferenciador robusto exacto de segundo orden.

La principal dificultad en la diferenciación es la sensibilidad a entrada de ruido. Los diferenciadores de alta ganancia tienen, para cualquier ganancia finita, un ancho de banda finito. Entonces, siendo no exacto, es al mismo tiempo, insensible con respecto a ruidos de alta frecuencia. Esta característica puede ser considerada como ventaja o desventaja dependiendo de las circunstancias. Otro de los inconvenientes de los diferenciadores de alta ganancia es su efecto pico: el máximo valor de la salida durante el transitorio crece infinitamente cuando

las ganancias tienden a infinito.

El principio de separación para sistema lineales, establece que un controlador y un observador pueden ser diseñados separadamente, tal que la retroalimentación de salida y la combinación observador - controlador conserve las principales características del controlador con el estado completo disponible. El principio de separación fue probado para estabilización asintótica con retroalimentación continua de sistemas autónomos con observadores de alta ganancia (Atassi y Khalil, 2000).

Las derivadas exactas pueden ser calculadas por una implementación sucesiva del diferenciador robusto exacto de primer orden con convergencia en tiempo finito. Este diferenciador está basado en modos deslizantes de segundo orden, si la segunda derivada en tiempo de la señal base desconocida está acotada. La precisión de este diferenciador es proporcional a $\epsilon^{1/2}$, donde ϵ es la medida máxima de la magnitud del ruido y se considera desconocida.

Sea la señal de entrada $f(t)$ una función definida en: $[0, \infty)$ formada por una señal de ruido acotada con características desconocidas y una señal base desconocida $f_0(t)$, donde su n -ésima derivada tiene una constante Lipschitz también desconocida $L > 0$. El problema es encontrar estimaciones robustas en tiempo real de $\dot{f}_0(t), \ddot{f}_0(t), \dots, f^{(n)}(t)$. El diferenciador robusto de segundo orden viene dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= v_0 \\
 v_0 &= -\lambda_0 |z_0 - f(t)|^{2/3} \text{sign}(z_0 - f(t)) + \omega_0 + z_1 \\
 \dot{\omega}_0 &= -\alpha_0 |z_0 - f(t)|^{1/3} \text{sign}(z_0 - f(t)) \\
 \dot{z}_1 &= v_1 \\
 v_1 &= -\lambda_1 |z_1 - v_0|^{1/2} \text{sign}(z_1 - v_0) + \omega_1 \\
 \dot{\omega}_1 &= -\alpha_1 \text{sign}(z_1 - v_0), z_2 = \omega_1
 \end{aligned} \tag{98}$$

donde las constantes α_i, λ_i escogidas correctamente deben de satisfacer el siguiente teorema

Teorema 2 . (Levant, 2003) Considerese el sistema (98). Con los parámetros siendo correc-

tamente seleccionados, las siguientes igualdades son verdaderas en ausencia de ruidos en la entrada después de un proceso transitorio de tiempo finito

$$z_0 = f_0(t); z_i = v_{i-1}; f_0^{(i)}(t), i = 1, \dots, n. \quad (99)$$

IV.4.4. Resultados experimentales de los observadores y el diferenciador.

En las figuras siguientes se muestran las respuestas en lazo cerrado de ambos observadores y se hace comparación contra la respuesta del derivador robusto en lazo abierto, esto se hace para mostrar las diferencias que existen entre los tres sistemas y tener una base para seleccionar el que presenta mejores características. En la Figura 3 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado siguiendo una señal de referencia $y_{ref} = \text{sen}(\omega t)$ donde $\omega = \pi$, utilizando el derivador robusto (Rosas Almeida *et al.*, 2007).

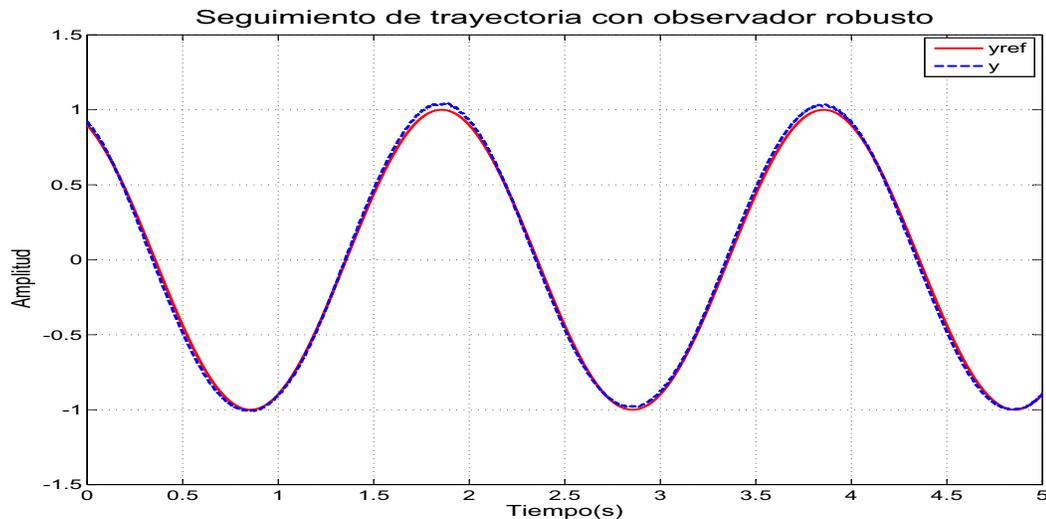


Figura 3. Seguimiento de trayectoria utilizando el observador robusto.

La Figura 4 muestra la señal de error obtenida entre la salida del sistema y la señal de referencia utilizando también el observador robusto, en la misma se puede observar que el

error está dentro de un margen de $\pm 5\%$ de la amplitud de la señal de referencia. Debido a que el observador robusto requiere del modelo completo del sistema, y que se tienen variaciones paramétricas con respecto al modelo real, además de que no se establece un método específico para determinar los parámetros óptimos de sintonización del observador, este error no pudo ser reducido. Cabe mencionar que esta magnitud del error se obtiene únicamente en los resultados experimentales, en simulaciones numéricas el error tiende asintóticamente a cero.

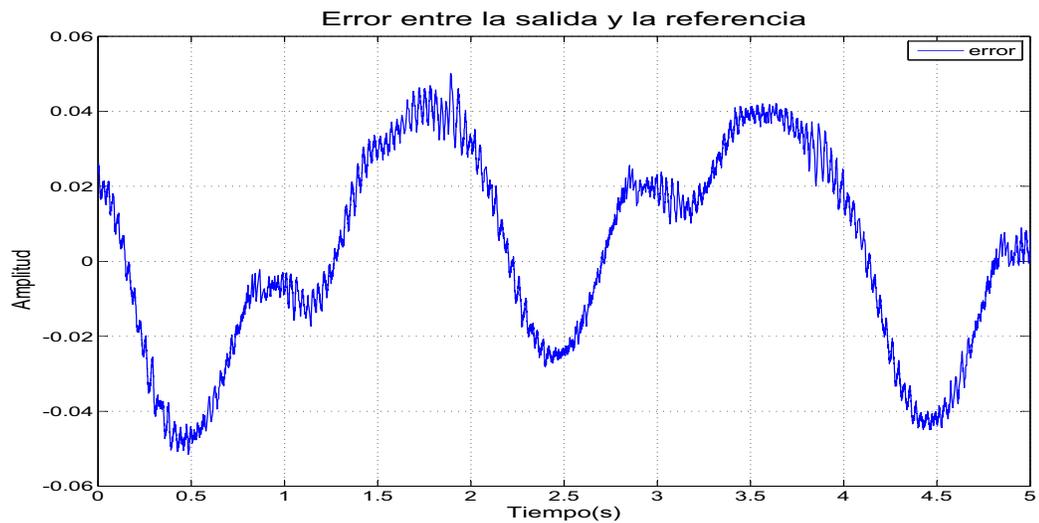


Figura 4. Señal de error.

En la Figura 5 se muestran los resultados obtenidos para las velocidades de ambos eslabones, se realiza la comparación con la salida del derivador robusto en lazo abierto, y la salida del observador en lazo cerrado, se observa que la señal del derivador es más suave que la del observador.

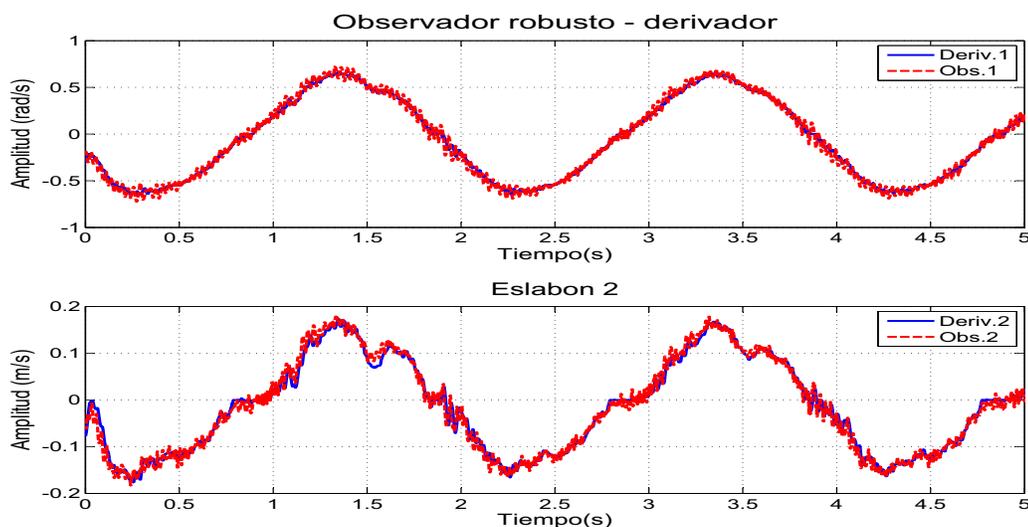


Figura 5. Comparación entre el observador robusto y el derivador.

A continuación se incluyen las respuestas del sistema de control, utilizando el observador reducido y se compara igualmente contra el derivador robusto, la señal de referencia es la misma que la utilizada anteriormente. En la Figura 6 se muestran el seguimiento de trayectoria del péndulo con el observador reducido en lazo cerrado.

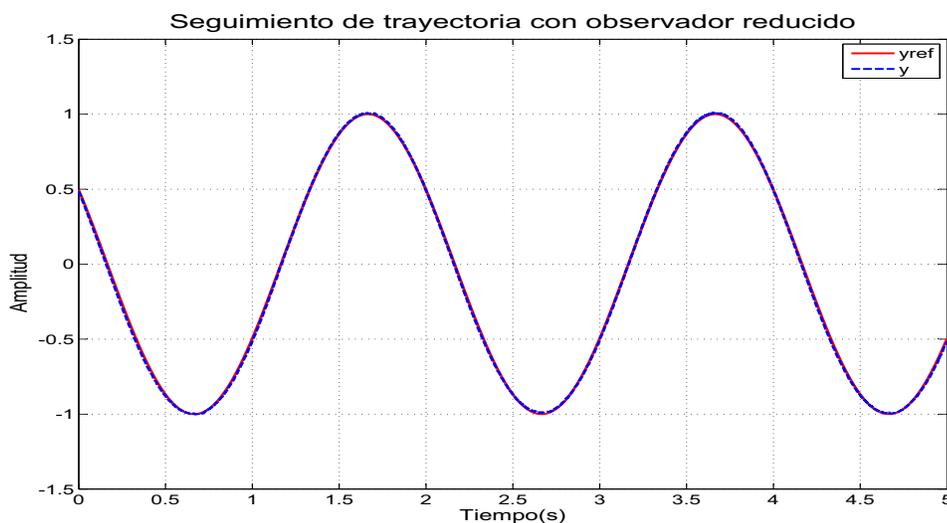


Figura 6. Seguimiento de trayectoria utilizando el observador reducido.

La Figura 7 muestra la señal de error entre la referencia y la salida del sistema, en estado estable utilizando el observador reducido en lazo cerrado, la amplitud de la señal de error está dentro del $\pm 2\%$ de la amplitud de la señal de referencia.

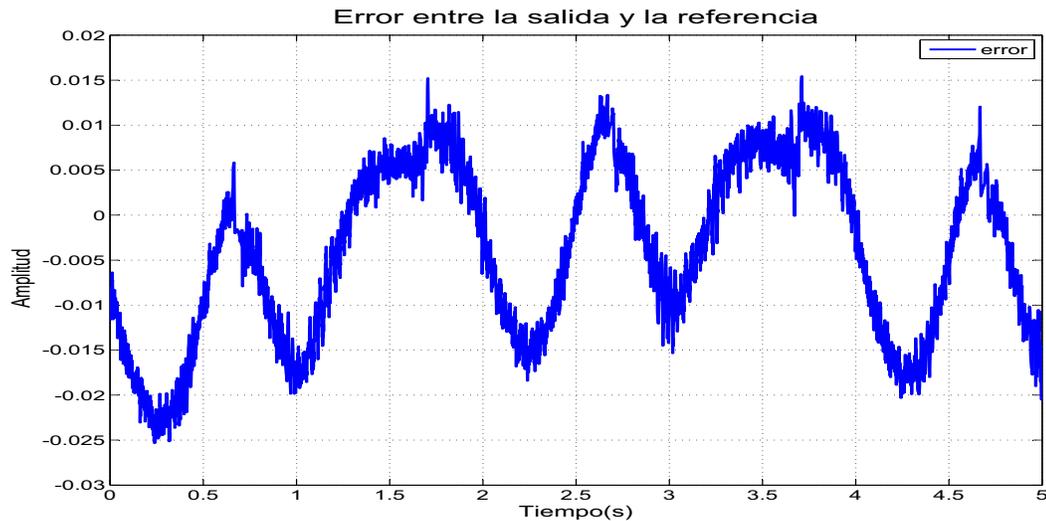


Figura 7. Señal de error observador reducido.

En la Figura 8 se puede ver como las respuestas del derivador y del observador reducido prácticamente muestran la misma amplitud y trayectoria. Al momento de hacer la implementación, fueron los que mostraron un comportamiento más robusto a los cambios en frecuencia, por lo que cualquiera de estas dos configuraciones puede ser utilizada para obtener las variables de velocidad del péndulo.

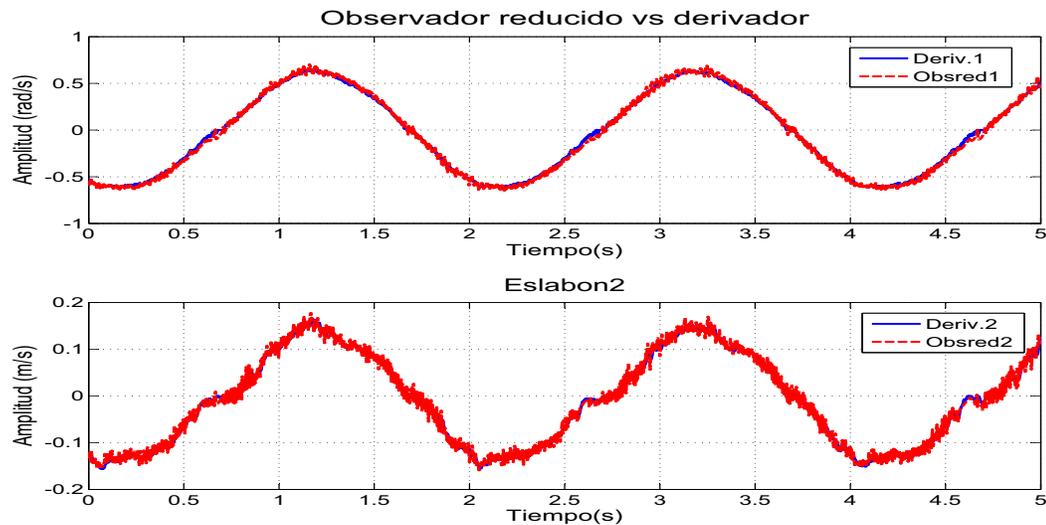


Figura 8. Comparación entre el observador reducido y el derivador.

IV.5. Conclusiones de capítulo.

En este capítulo se presentó la ley de control que será utilizada posteriormente. Con este modelo se incluyeron los términos de fricción del péndulo, para ello se consideraron varios modelos de fricción, y se descartaron los que incluían términos no diferenciables debido a que al incluirlos no es posible aplicar el método propuesto de manera directa. Los coeficientes de fricción se determinaron de manera empírica, puesto que su valor real no pudo ser determinado de manera exacta. Esto debido a las variaciones en el comportamiento del péndulo en diferentes pruebas bajo las mismas condiciones. Al final se presentan las comparaciones realizadas entre los observadores y el derivador robusto, con las cuales se optó por utilizar el derivador robusto, éste presenta una mejor respuesta en lazo cerrado. En estas comparaciones, los coeficientes requeridos por cada uno de los métodos, fueron calculadas empíricamente, debido a que no se establece una metodología para calcular los valores óptimos.

Capítulo V

Sincronización de dos péndulos invertidos con retardos en la comunicación.

En este capítulo se presenta el modelo de control propuesto para la sincronización. El principal problema que se tiene que solucionar en nuestro caso para lograr la sincronización, es el retardo existente en la comunicación entre los dos péndulos. Este retardo es generado por el tiempo de transmisión de datos a través de la red Internet, también es importante señalar que el retardo es variable debido a los protocolos de comunicación. Por el momento el retardo se considerará constante en este capítulo, ya que es necesario para poder plantear la solución propuesta. En el siguiente capítulo se propone el diseño de una memoria intermedia (buffer), para hacer que el retardo sea constante.

Generalmente, en las soluciones obtenidas para control de sistemas con retardos en tiempo, no sólo existe dependencia del valor actual del estado $x(t_0)$, sino también de sus valores pasados $x(t_0 + \tau)$, donde τ es el valor del retardo, el cual puede ser constante o variable. Una de las soluciones para obtener estos valores son los predictores, por ejemplo el predictor de (ver e.g. Weidong y Xiaoming, 1999). En nuestro caso, la solución propuesta tiene la característica de ser causal, evitando así la utilización de predictores.

En el Capítulo IV se obtuvo una ley de control local para el péndulo invertido, utilizando ecuaciones diferenciales lineales de error sin retardo (EDLESR), la cual servirá como base para obtener la nueva ley de sincronización maestro - esclavo basada en ecuaciones diferenciales lineales de error con retardo (EDLECR). La modificación de la ley de control local es necesaria, ya que debido al retardo en la comunicación, la solución obtenida con esta ley sería una solución no causal. Primero se introduce una definición formal de la sincronización. Después de esta definición, se muestra la teoría básica que será utilizada en el resto del capítulo. Por último, se presenta el modelo de sincronización maestro - esclavo obtenida. Los resultados obtenidos en este capítulo fueron publicados en (Estrada-García *et al.*, 2007).

V.1. Definición de sincronización

A continuación se presenta la definición de sincronización que será considerada. Dicha definición se basa en los conceptos presentados en (Blekhman *et al.*, 2002). Consideremos k sistemas dinámicos

$$S_i = \{T, U_i, X_i, Y_i, \phi_i, h_i\}, i = 1, \dots, k, \quad (100)$$

donde T es el conjunto común de instantes de tiempo; U_i, X_i, Y_i el conjunto de entradas, estados y salidas, respectivamente; $\phi_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow X_i$ los mapeos de transición, y $h_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ los mapeos de salida.

Supongamos que son dados l funcionales $\kappa_j : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_k \times T \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, l$. \mathcal{F}_i son el conjunto de todas las funciones $\mathcal{F}_i = \{y : T \rightarrow Y_i\}$.

En lo sucesivo, tomaremos como el conjunto de tiempo $T = \mathbb{R} = \{t : 0 \leq t < \infty\}$. Para cualquier $\zeta \in T$ el operador de corrimiento $\sigma_\zeta : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_i$ es definido como sigue $(\sigma_\zeta y)(t) = y(t + \zeta)$ para toda $y \in \mathcal{F}_i$ y toda $t \in T$. Sean $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ las soluciones de los sistemas $S_1, \dots, S_k, x^{(i)}(\cdot) \in X_i$ con condiciones iniciales $x^{(1)}(0), \dots, x^{(k)}(0)$

respectivamente, definidas para toda $t \in T$.

Suponemos por simplicidad que todo S_i , $i = 1, \dots, k$ son sistemas suaves de dimensión finita, descritos por ecuaciones diferenciales con una entrada dimensionalmente finita, i.e.

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), & i = 1, \dots, k, \\ \frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), \end{cases} \quad (101)$$

donde $x_i \in X_i$ y $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control. El campo vectorial F_0 describe la dinámica del sistema de interconexión, y \tilde{F}_i son campos vectoriales de las interconexiones.

Definición 3 *El problema de sincronización controlada aproximada con respecto a las funcionales κ_j , $j = 1, \dots, l$, es encontrar un control u como una función de retroalimentación de los estados x_0, x_1, \dots, x_k , y del tiempo asegurando que existe un $\epsilon > 0$ y $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in T$ tal que*

$$|\kappa_j(\sigma_{\zeta_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\zeta_k} y_k(\cdot), t)| \leq \epsilon, j = 1, \dots, l. \quad (102)$$

Para sincronización asintótica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\kappa_j(\sigma_{\zeta_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\zeta_k} y_k(\cdot), t)) = 0, j = 1, \dots, l. \quad (103)$$

Esta definición sera utilizada para definir el tipo de sincronización obtenida con los resultados presentados más adelante.

V.2. Ejemplo.

Con el siguiente ejemplo se trata de ilustrar el problema de causalidad que se genera en la sincronización con EDLESR, y cómo al considerar EDLECR la solución obtenida es causal.

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u_1(t), \\ y_1(t) &= x_1(t),\end{aligned}\tag{104}$$

el cual se quiere sincronizar con otro sistema idéntico,

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= u_2(t), \\ y_2(t) &= x_2(t).\end{aligned}\tag{105}$$

Supongamos que los dos sistemas están lo suficientemente alejados para considerar los efectos del retardo en la comunicación, el cual se considera constante.

Utilizando EDLESR, como en el Capítulo IV, para encontrar una ley de control local para el sistema (104), definimos la señal de error como $e_1(t) = y_1(t) - y_{ref}(t)$ y la dinámica del error queda de la forma

$$\dot{e}_1(t) + \lambda_1 e_1(t) = 0,\tag{106}$$

con la cual obtenemos el compensador

$$u_1(t) = \dot{y}_{ref}(t) - \lambda_1 (x_1(t) - y_{ref}(t)),\tag{107}$$

el cual resuelve el problema de control local del sistema (104). Para sincronizar ambos sistemas, se define una nueva señal de error dada por $e_2 = y_2(t) - y_1(t)$, con dinámica $\dot{e}_2(t) + \lambda_2 e_2(t) = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, con la cual se obtiene un compensador de la forma

$$u_2(t) = \dot{y}_1(t) - \lambda_2 (x_2(t) - y_1(t)).\tag{108}$$

El compensador (108) requiere de la disponibilidad de las señales $\dot{y}_1(t)$ y $y_1(t)$, pero debido al retardo en la comunicación, únicamente disponemos de las señales $\dot{y}_1(t - \tau)$ y $y_1(t - \tau)$, con lo cual el compensador es no causal ya que , necesitamos obtener las señales

$\dot{y}_1(t)$ y $y_1(t)$ en el instante t . Esto implicaría la utilización de predictores o algún otro método para determinar estas señales.

Ahora, si en lugar de utilizar EDLESR para la sincronización hacemos uso de EDLECR, en el sistema esclavo, la dinámica del error estaría dada por la ecuación

$$\dot{e}_2(t) + \lambda_2 e_2(t - \tau) = 0, \quad (109)$$

con λ_2 escogida correctamente de tal manera que (109) sea estable. El nuevo compensador obtenido es de la forma

$$u_2(t) = \dot{y}_1(t) - \lambda_2 (x_2(t - \tau) - y_1(t - \tau)). \quad (110)$$

Con esta ecuación estaría solucionado el problema de causalidad para el término $y_1(t - \tau)$, con lo cual nos quedaría por resolver el problema de causalidad para $\dot{y}_1(t)$. Para ello, en el control del sistema maestro, utilizamos igualmente EDLECR y obtenemos el compensador

$$u_1(t) = \dot{y}_{ref}(t) - \lambda_1 (x_1(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)). \quad (111)$$

sustituimos $\dot{y}_1(t) = u_1(t)$ en la ecuación (3),

$$u_2(t) = \dot{y}_{ref}(t) - \lambda_1 (y_1(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)) - \lambda_2 (y_2(t - \tau) - y_1(t - \tau)), \quad (112)$$

obtenemos un compensador causal para lograr la sincronización. Aunque en la ecuación (112) se requieren la señal de referencia y_{ref} y su derivada al instante t , esto no afecta la causalidad de la solución, ya que dichas señales son conocidas de antemano. Con este ejemplo, se trata de ilustrar cómo es que la utilización de EDLECR nos lleva de una solución no causal a una que es causal. Este mismo enfoque será utilizado a continuación, para obtener

la sincronización de los péndulos invertidos. Primero presentamos las ecuaciones diferenciales con retardos y después la sincronización maestro - esclavo de los péndulos, así como los resultados obtenidos mediante una simulación numérica.

V.3. Ecuaciones diferenciales lineales con retardos.

En (Cahlon y Schmidt, 2006) la estabilidad asintótica de la solución cero de las ecuaciones diferenciales lineales de tercer orden con retardos en tiempo de la forma

$$\gamma^{(3)}(t) = a_1\ddot{\gamma}(t) + a_2\ddot{\gamma}(t - \tau) + b_1\dot{\gamma}(t) + b_2\dot{\gamma}(t - \tau) + c_1\gamma(t) + c_2\gamma(t - \tau), \quad (113)$$

donde $\tau > 0$ es un retardo constante y $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ son constantes, es presentada. Se muestra la estabilidad para diversos casos.

Utilizaremos los resultados anteriores para el caso particular de $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, por lo que (113) se reduce a

$$\gamma^{(3)}(t) = a_2\ddot{\gamma}(t - \tau) + b_2\dot{\gamma}(t - \tau) + c_2\gamma(t - \tau). \quad (114)$$

Basaremos las soluciones de (113) en el teorema y el lema siguientes

Teorema 3 *Para que todas las soluciones de (113) tiendan a cero conforme $t \rightarrow \infty$ es necesario y suficiente que todos los ceros de la ecuación*

$$\hat{H}(s) = s^3 - a_1s^2 - a_2s^2e^{-s\tau} - b_1s - b_2se^{-s\tau} - c_1 - c_2e^{-s\tau}. \quad (115)$$

tengan partes reales negativas, donde (115) es la ecuación característica de (113)

Tabla III. Valores de los coeficientes usados en la sincronización

Coeficientes	Valor	Descripción
$\Lambda_M = [a_m, b_m, c_m]$	$[-4, -5, -2]$	Coeficientes del maestro
$\Lambda_S = [a_s, b_s, c_s]$	$[-3, -3, -1]$	Coeficientes del esclavo

Lema 1 Sean $D = \tau a_2$, $E = \tau^2 b_2$, $M = \tau^3 c_2$, entonces la solución de (114) es asintóticamente estable sólo si $E < 0$, $M < 0$, $D < 0$ y $-E/\omega^2 = \cos(\omega)$ tenga dos raíces r_1, r_2 en $(0, \pi/2)$ (o equivalentemente, $-E < 0.55$).

Basándonos en el Teorema 3 y el Lema 1 calculamos los conjuntos de coeficientes que serán utilizados tanto en simulaciones como en las experimentaciones. Tomando como cota máxima $-E < 0.55$ con lo cual se obtiene que $|b_2| \leq 6$, se encontraron y probaron varios valores de $a_{m,s}$, $b_{m,s}$ y $c_{m,s}$, seleccionando un conjunto de raíces negativas tal que estos valores cumplan con el Teorema 3. Los parámetros escogidos son dados en la Tabla III.

V.4. Sincronización maestro-esclavo.

V.4.1. Definición del problema.

Dados dos péndulos invertidos con retardos en la transmisión de datos τ , y una trayectoria C^∞ de referencia $y_{ref}(t)$, $t \geq 0$, encontrar una ley de control que sincronice ambos péndulos en una configuración maestro-esclavo, tal que la diferencia $e(t)$ entre la salida $y_2(t)$ y la referencia $y_1(t)$ tienda asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, donde $y_1(t)$ es la salida del péndulo maestro y $y_2(t)$ es la salida del esclavo.

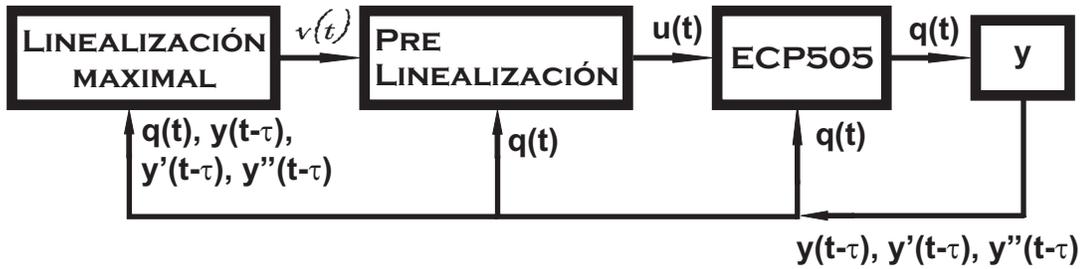


Figura 9. Esquema de control para el seguimiento de trayectoria.

V.4.2. Solución causal.

Para la sincronización, primeramente obtenemos la ley de control local para el sistema maestro, al igual que en el Capítulo IV, definimos la señal de error y sus derivadas como

$$\begin{aligned} e(t) &= y_M(t) - y_{ref}(t), & \dot{e}(t) &= \dot{y}_M(t) - \dot{y}_{ref}(t), \\ \ddot{e}(t) &= \ddot{y}_M(t) - \ddot{y}_{ref}(t), & e^{(3)}(t) &= y_M^{(3)}(t) - y_{ref}^{(3)}(t), \end{aligned} \quad (116)$$

donde $y_M(t)$ es la salida del sistema maestro, y $y_{ref}(t)$ es la referencia de trayectoria la cual deberá seguir el sistema. Si igualamos $\gamma(t) = e(t)$ en (114) podemos obtener

$$e^{(3)}(t) + a_m \ddot{e}(t - \tau) + b_m \dot{e}(t - \tau) + c_m e(t - \tau) = 0. \quad (117)$$

Aplicando las ecuaciones (116) en (117):

$$\begin{aligned} & y_M^{(3)}(t) - y_{ref}^{(3)}(t) + a_m (\ddot{y}_M(t - \tau) - \ddot{y}_{ref}(t - \tau)) + \\ & + b_m (\dot{y}_M(t - \tau) - \dot{y}_{ref}(t - \tau)) + c_m (y_M(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)) = 0, \end{aligned} \quad (118)$$

para resolver (118), utilizamos el algoritmo de prueba propuesto en (Cahlon y Schmidt, 2006), para obtener un conjunto de coeficientes para la solución de cero de (118) y que sea asintóticamente estable.

Ahora, igualando $y_M^{(3)}(t) = w_m$, y de la ecuaciones (77) y (79) obtenemos

$$y_M^{(3)}(t) = w_m = (\Psi_m(q, \dot{q})J_m(q_2(t)) + \xi_m(q, \dot{q}))v_m + \Psi_m(q, \dot{q})(R_m(q_1, q_2)) + \phi_m(q, \dot{q}), \quad (119)$$

donde

$$w_m = -a_m(\ddot{y}_M(t - \tau) - \ddot{y}_{ref}(t - \tau)) - b_m(\dot{y}_M(t - \tau) - \dot{y}_{ref}(t - \tau)) - c_m(y_M(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)) + y_{ref}^{(3)}(t). \quad (120)$$

Resolviendo para v_m

$$v_m = \frac{w_m - \Psi_m(q, \dot{q})(R_m(q_1, q_2)) - \phi_m(q, \dot{q})}{\Psi_m(q, \dot{q})J_m(q_2(t)) + \xi_m(q, \dot{q})}, \quad (121)$$

obtenemos la nueva entrada de control que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para el sistema maestro. En la Figura 10 se presentan los resultados de simulación para esta ley de control utilizando un retardo en tiempo $\tau = 0.3$ segundos, el cual es el retardo promedio calculado entre Nantes y Ensenada. Si no se considera un retardo en la ecuación (120), la solución al problema de sincronización sería no causal, ya que requeriría la tercer derivada de $y_M(t)$ al instante t , la cual no está disponible debido al retardo de transmisión. Es por ello que se considera una ley de control local con retardos.

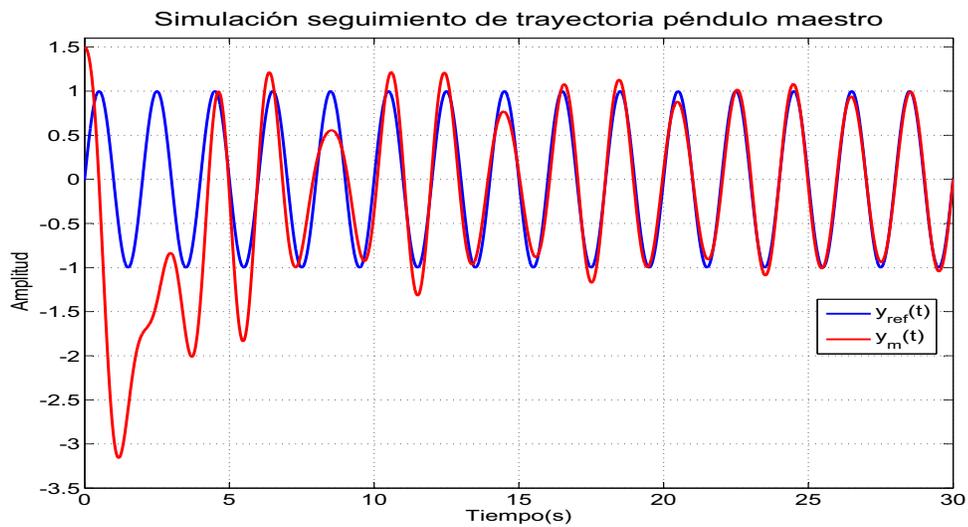


Figura 10. Simulación de seguimiento de trayectoria.

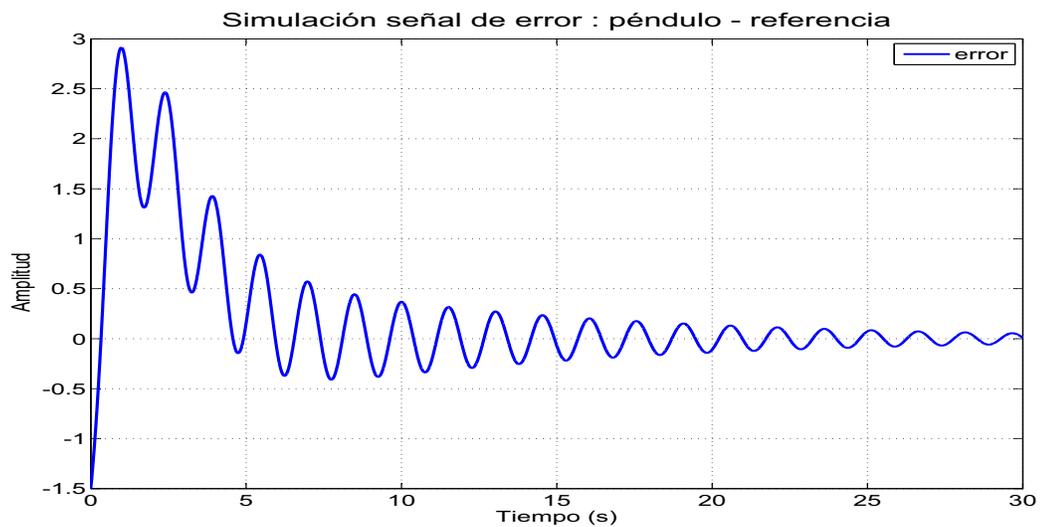


Figura 11. Señal de error en simulación.

Para la sincronización, se propone un esquema como el de la Figura 12. Utilizamos el mismo método que se propuso para el control local del sistema maestro, con la diferencia de que ahora la señal de referencia sería la salida del maestro $y_M(t)$. Para este caso la señal de error está dada por

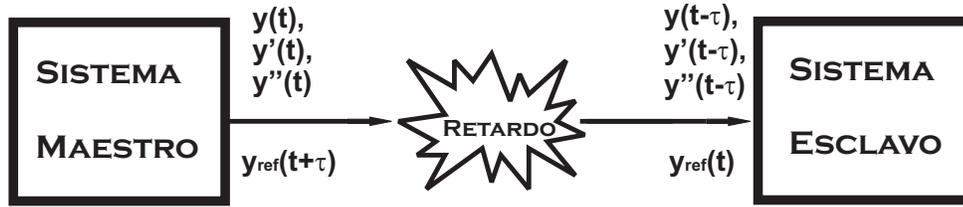


Figura 12. Esquema de sincronización.

$$\begin{aligned} e(t) &= y_S(t) - y_M(t), & \dot{e}(t) &= \dot{y}_S(t) - \dot{y}_M(t), \\ \ddot{e}(t) &= \ddot{y}_S(t) - \ddot{y}_M(t), & e^{(3)}(t) &= y_S^{(3)}(t) - y_M^{(3)}(t), \end{aligned} \quad (122)$$

donde $y_S(t)$ es la salida del sistema esclavo, $y_M(t)$ es la señal de referencia. Nuevamente, igualando $\gamma(t) = e(t)$ en (114) con lo cual se consigue

$$e^{(3)}(t) + a_s \ddot{e}(t - \tau) + b_s \dot{e}(t - \tau) + c_s e(t - \tau) = 0. \quad (123)$$

Aplicando la ecuación (122) en (123):

$$\begin{aligned} & y_S^{(3)}(t) - y_M^{(3)}(t) + a_s (\ddot{y}_S(t - \tau) - \ddot{y}_M(t - \tau)) + \\ & + b_s (\dot{y}_S(t - \tau) - \dot{y}_M(t - \tau)) + c_s (y_S(t - \tau) - y_M(t - \tau)) = 0. \end{aligned} \quad (124)$$

De nuevo, aplicando el algoritmo de prueba propuesto en (Cahlon y Schmidt, 2006), podemos obtener un conjunto de coeficientes para que la solución de (124) sea asintóticamente estable. En este caso, necesitamos el valor de la señal $y_M^{(3)}(t)$, pero debido a que existe un retardo en el canal de comunicaciones, no es posible obtenerla de manera directa desde el sistema maestro, lo cual genera un problema de causalidad. En su lugar, podemos reconstruir este término de las ecuaciones (119) y (120) de manera que

$$y_M^{(3)}(t) = -a_m(\ddot{y}_M(t-\tau) - \ddot{y}_{ref}(t-\tau)) - b_m(\dot{y}_M(t-\tau) - \dot{y}_{ref}(t-\tau)) - c_m(y_M(t-\tau) - y_{ref}(t-\tau)) + y_{ref}^{(3)}(t). \quad (125)$$

Sustituyendo (125) en (124) se obtiene

$$\begin{aligned} y_S^{(3)}(t) - \{ & -a_m(\ddot{y}_M(t-\tau) - \ddot{y}_{ref}(t-\tau)) - b_m(\dot{y}_M(t-\tau) - \dot{y}_{ref}(t-\tau)) \\ & - c_m(y_M(t-\tau) - y_{ref}(t-\tau)) + y_{ref}^{(3)}(t) \} + a_s(\dot{y}_S(t-\tau) - \dot{y}_M(t-\tau)) + \\ & + b_s(\dot{y}_S(t-\tau) - \dot{y}_M(t-\tau)) + c_s(y_S(t-\tau) - y_M(t-\tau)) = 0, \end{aligned} \quad (126)$$

y nuevamente con las ecuaciones (77) y (79) podemos obtener la entrada de control para la sincronización, la cual es

$$v_s = \frac{w_s - \Psi_s(q, \dot{q})(R_s(q_1, q_2)) - \phi_s(q, \dot{q})}{\Psi_s(q, \dot{q})J_s(q_2(t)) + \xi_s(q, \dot{q})}, \quad (127)$$

donde

$$\begin{aligned} w_s = & - \left(-a_m(\ddot{y}_M(t-\tau) - \ddot{y}_{ref}(t-\tau)) - b_m(\dot{y}_M(t-\tau) - \dot{y}_{ref}(t-\tau)) \right. \\ & \left. - c_m(y_M(t-\tau) - y_{ref}(t-\tau)) + y_{ref}^{(3)}(t) \right) + a_s(\ddot{y}_S(t-\tau) - \ddot{y}_M(t-\tau)) \\ & + b_s(\dot{y}_S(t-\tau) - \dot{y}_M(t-\tau)) + c_s(y_S(t-\tau) - y_M(t-\tau)), \end{aligned} \quad (128)$$

En la ecuación (127), aparece también el término $y_{ref}^{(3)}(t)$. En este caso, no hay problema con el hecho de que la tercera derivada de la referencia sea requerida sin retardo, ya que es posible conocer la función de referencia y sus derivadas para $-\infty < t < \infty$. Es posible conocer $y_{ref}^{(3)}(t)$ para cualquier periodo de tiempo, si el retardo es constante, únicamente es necesario cambiar la fase de la señal de referencia localmente para ajustar el retardo.

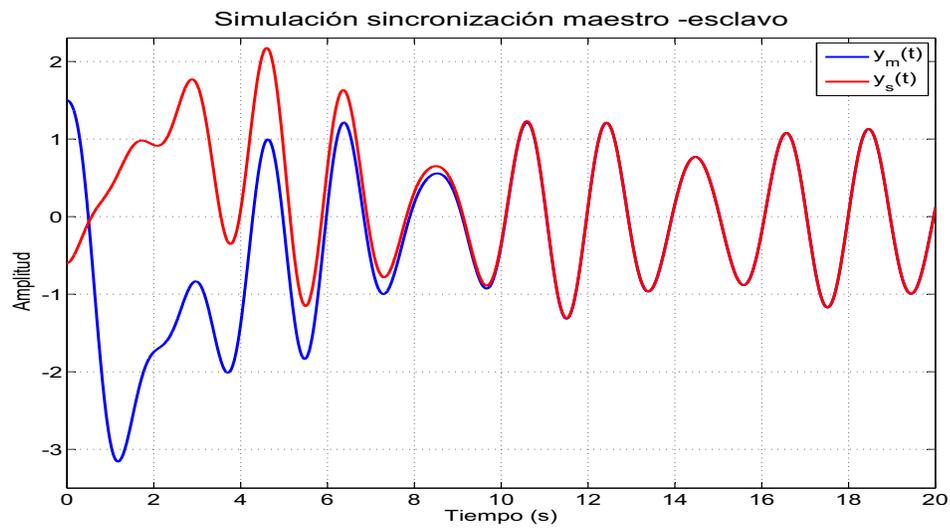


Figura 13. Simulación de sincronización.

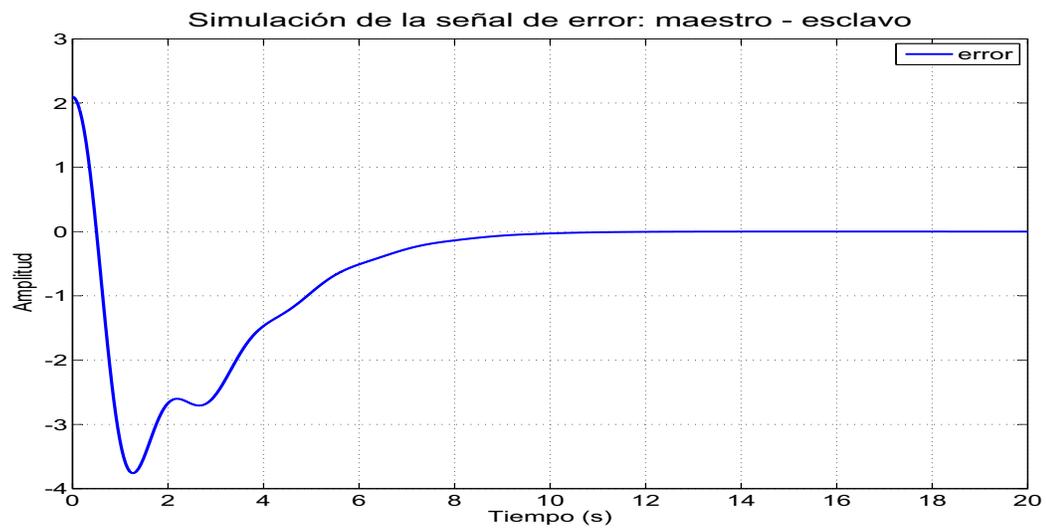


Figura 14. Señal de error de sincronización simulada.

Es importante hacer notar que si el conjunto de coeficientes Λ son iguales, $\Lambda_1 = \Lambda_2$, la ecuación (128) quedaría como

$$\begin{aligned}
w_s = & a(\ddot{y}_M(t - \tau) - \ddot{y}_M(t - \tau)) + b(\dot{y}_M(t - \tau) - \dot{y}_M(t - \tau)) \\
& + c(y_M(t - \tau) - y_M(t - \tau)) - ay_{ref}^{(3)}(t) + a(\ddot{y}_S(t - \tau) - \ddot{y}_{ref}(t - \tau)) \\
& + b(\dot{y}_S(t - \tau) - \dot{y}_{ref}(t - \tau)) + c(y_S(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)),
\end{aligned} \tag{129}$$

que se reduce a

$$\begin{aligned}
w_s = & a(\ddot{y}_S(t - \tau) - \ddot{y}_{ref}(t - \tau)) + b(\dot{y}_S(t - \tau) - \dot{y}_{ref}(t - \tau)) \\
& + c(y_S(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)) - ay_{ref}^{(3)}(t).
\end{aligned} \tag{130}$$

Esto ocasiona que la dependencia del maestro en el esclavo se pierda, y que la sincronización sea realizada con $y_{ref}(t)$ en lugar de $y_M(t)$. Para evitar esta singularidad, debemos buscar los coeficientes de manera que $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$.

Si no se considera el retardo existente en la sincronización, el esclavo sería sincronizado con el maestro, pero con una diferencia en la fase, como se muestra en la figura siguiente. Es por ello la importancia de considerar el retardo en nuestro esquema de sincronización.

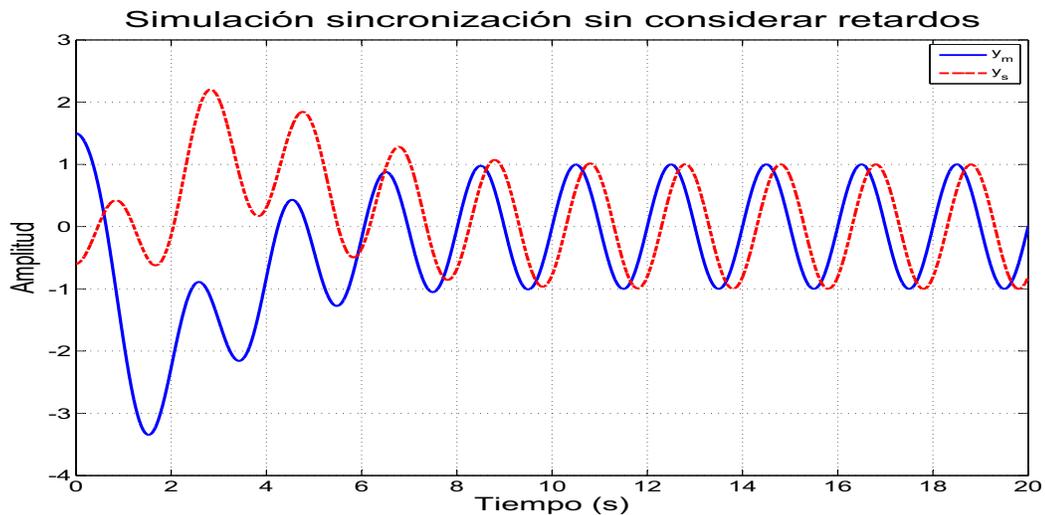


Figura 15. Sincronización sin considerar el retardo.

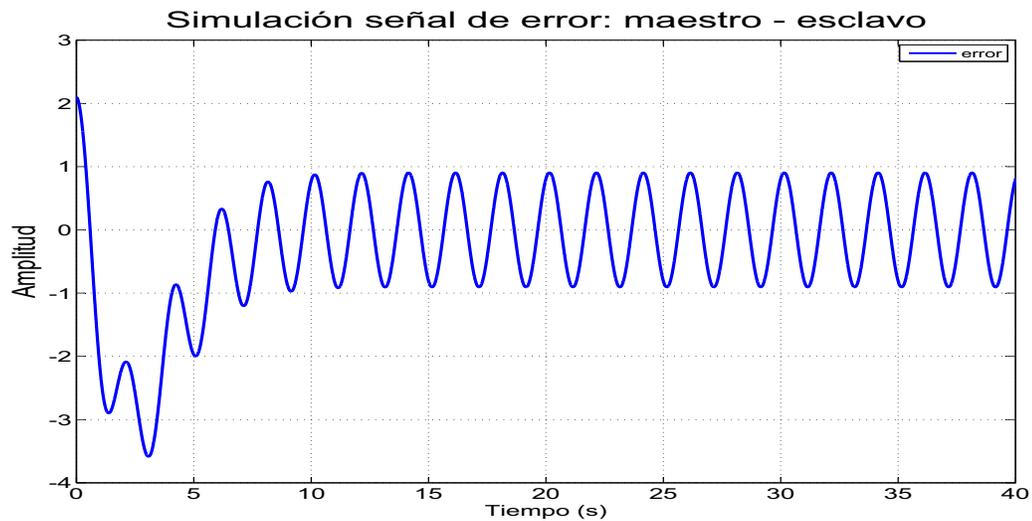


Figura 16. Error en la sincronización sin considerar el retardo.

V.5. Conclusiones de capítulo

En este capítulo se presentó un esquema de sincronización válido para sistemas con retardos en la comunicación. Este resultado no requiere predictores de estado ni considera como perturbación los efectos del retardo. Dicho esquema está basado en la inclusión de términos con retardo en las ecuaciones de error usadas para la síntesis de los controladores. Los retardos en tiempo en la señal de control retroalimentada pueden ser útiles para la sincronización de un sistema, y el seguimiento de trayectoria puede conseguirse mientras que el error entre el sistema y la señal de referencia tienda asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Con las ED-LECR podemos hacer que la solución al problema de sincronización sea causal, a diferencia de utilizar EDLESR. Estos esquemas de control garantizan la estabilidad de la sincronización para casi cualquier retardo constante en el canal de comunicación.

Capítulo VI

Plataforma experimental y resultados.

En este capítulo se muestran los resultados prácticos de lo que se obtuvo teóricamente. El método de solución ha ido adaptándose de acuerdo a los resultados experimentales obtenidos, lo cual nos llevó a investigar varias soluciones.

Al principio de la tesis, se planteó la posibilidad de utilizar el protocolo de comunicación por Internet TCP/IP. Sin embargo, al momento de hacer las pruebas de comunicación, se tuvieron algunos problemas con el tiempo de envío y recepción. Esto motivó a utilizar el protocolo UDP, el cual tiene la característica de ser más rápido que TCP/IP. El inconveniente en UDP, es que en caso de pérdida de datos, no hay reenvío por parte del servidor, lo que imposibilita obtener los datos perdidos directamente de la fuente.

VI.1. Esquema de sincronización.

En la plataforma experimental, tomando como base el modelo propuesto en (Peñaloza-Mejía *et al.*, 2006), se utilizó lo siguiente:

1. Tarjetas de control dSPACE[®] plataforma DS1104 versión RTL1104 combinada con lenguaje de programación Matlab/Simulink[®] versiones 6.5 y 7.0.

2. Protocolo NTP para sincronización de los relojes de las computadoras..
3. Dos péndulos invertidos, los cuales son el modelo 505 del fabricante ECPSYSTEMS, y están formados por una barra horizontal en la presencia de la gravedad para balancear y controlar la barra vertical.
4. Dos computadoras PC Pentium IV con Windows 2000 Pro y Windows XP.

La Figura 17 muestra un diagrama a bloques del proceso de envío y recepción de datos en Internet.

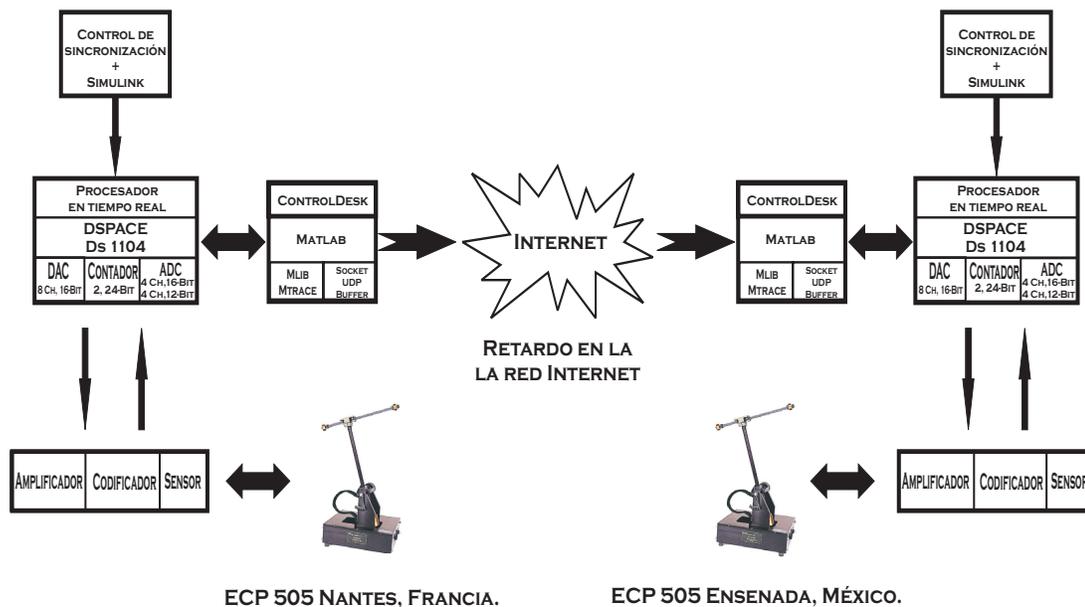


Figura 17. Esquema de la plataforma experimental utilizada.

En la comunicación, utilizamos zócalos UDP (UDP sockets) programados en código Matlab[®], tanto en el sistema maestro como en el esclavo, los cuales son los encargados de la transmisión de datos. La tasa de envío en el lado del maestro es de 30 milisegundos. Cuando se reciben los datos, éstos son almacenados en una memoria intermedia (buffer), la cual es la

encargada de retransmitirlos al sistema de control. Esto con la finalidad de que sea posible obtener datos a una tasa de recepción constante, ya que el retardo en Internet es variable y los datos no se reciben con la misma frecuencia con la que son enviados. Las variaciones de tiempo entre paquetes sucesivos produce una perturbación no deseada en el sistema, es por ello que se implementó esta memoria intermedia.

VI.2. Resultados experimentales.

VI.2.1. Experimentación local.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en la red local del IRCCyN, el péndulo maestro es simulado como una fuente senoidal con sus derivadas, programadas en código Matlab[®], y el esclavo es simulado utilizando un modelo del ECP505 en Simulink[®], y ejecutado en la tarjeta dSPACE.

En la Figura 18 se puede observar la respuesta del péndulo con condiciones iniciales iguales. Los dos péndulos inician con una amplitud nula, la salida del esclavo (y_1) se sincroniza de forma aproximada con la señal de referencia (salida del maestro, (y_{ref})).

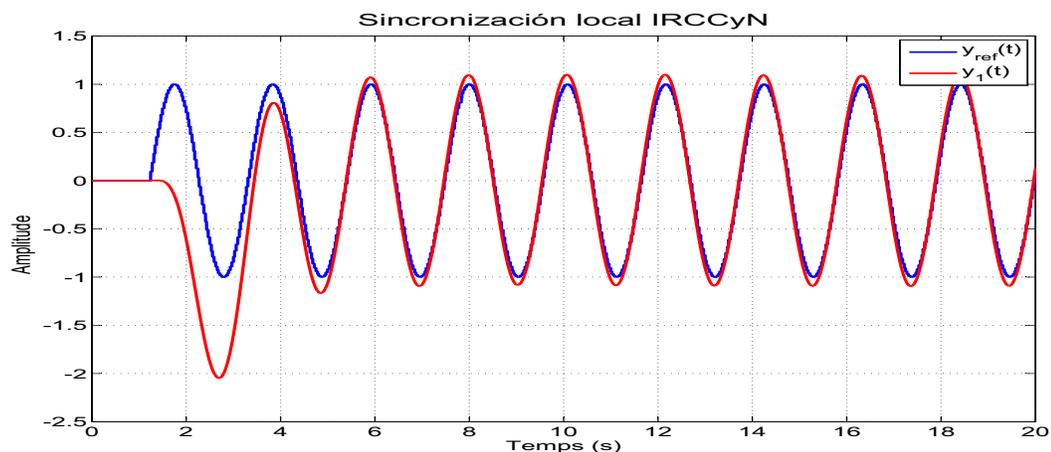


Figura 18. Respuesta maestro - esclavo con condiciones iniciales iguales.

En la Figura 19 se muestran los resultados obtenidos para condiciones similares a las de la Figura 18, la diferencia es que los péndulos tienen condiciones iniciales diferentes, y se obtiene un resultado semejante al anterior.

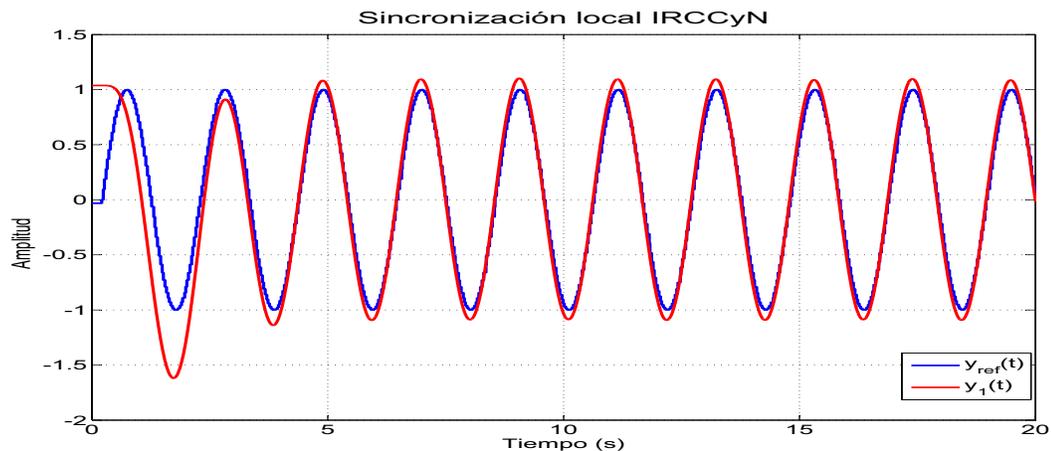


Figura 19. Respuesta maestro - esclavo con condiciones iniciales diferentes.

En las figuras mostradas anteriormente, se puede observar una pequeña diferencia entre la salida del péndulo y la señal de referencia, esta diferencia es debida en parte a errores de cómputo, ya que al variar el método de integración numérico la magnitud del error también tenía una variación. Estos errores son ocasionados también por la diferencia entre el periodo de muestreo del sistema de control y el de la referencia. Este error puede ser reducido si se utiliza un programa que interpole o extrapole la señal entre datos sucesivos, para tener la misma cantidad de muestras por segundo tanto de la señal de referencia como la señal de salida del sistema. Este método puede introducir otro retardo al sistema, por lo cual es necesario tenerlo en cuenta al momento de implementar todo el sistema.

VI.2.2. Experimentación a distancia: IRCCyN - CICESE.

Una vez que toda la plataforma de experimentación fue satisfactoriamente probada de manera local, es decir, se consiguió realizar la conexión y sincronizar los péndulos a través de la red,

se realizaron las pruebas de sincronización entre los laboratorios de Francia y México. Estas pruebas fueron realizadas en tres formas: entre dos péndulos virtuales, tal como se realizó localmente, con un péndulo físico como maestro y uno virtual como esclavo, y con los dos péndulos físicos.

Para el caso de dos péndulos virtuales, el péndulo maestro es implementado en el IRCCyN (Nantes, Francia) y el esclavo se implementa en la tarjeta dSPACE en el CICESE (Ensenada, México). En la Figura 20 se observa la respuesta del sistema con un retardo $\tau = 0.3s.$, con condiciones iniciales diferentes. Como se puede ver, la salida del esclavo es sincronizada con la salida del maestro. Se puede notar que la salida del esclavo se estabiliza después de casi 20 s., el incremento en tiempo de la parte transitoria de la respuesta del sistema es una de las características que presentan los sistemas con retardos.

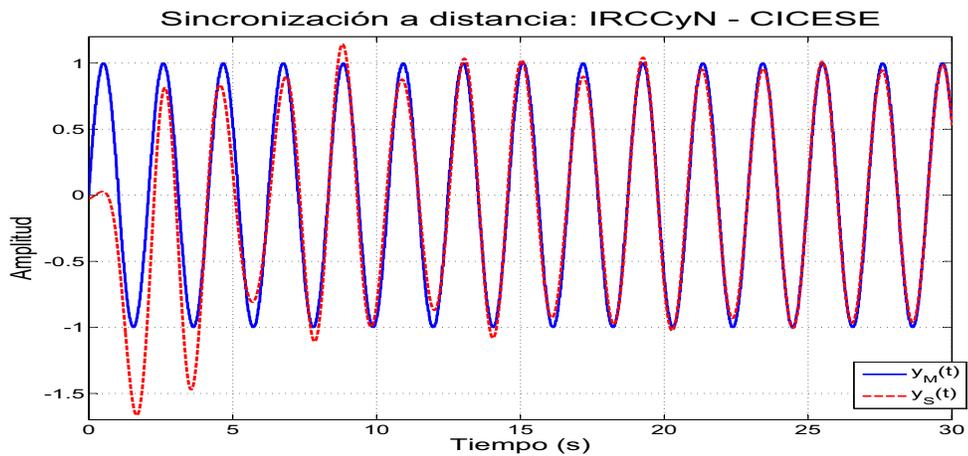


Figura 20. Sincronización con retardo péndulos virtuales.

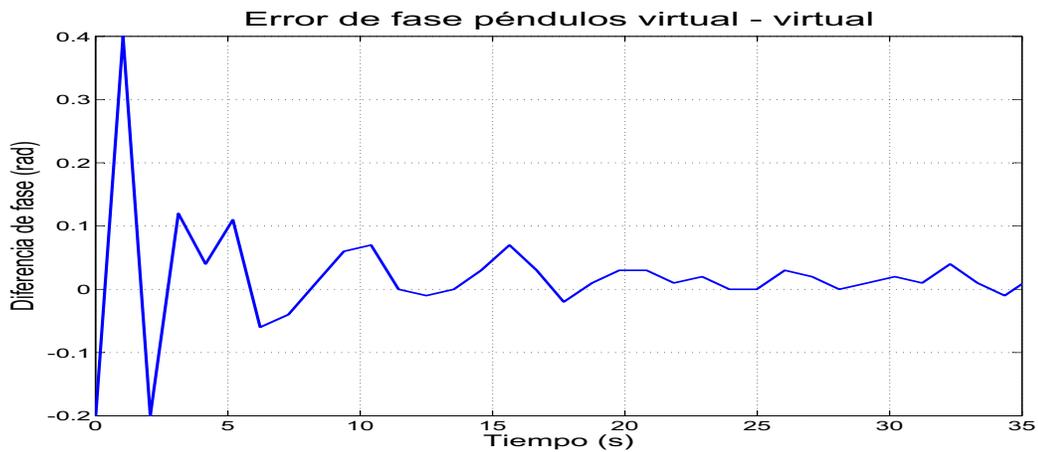


Figura 21. Señal de error en fase para dos péndulos virtuales.

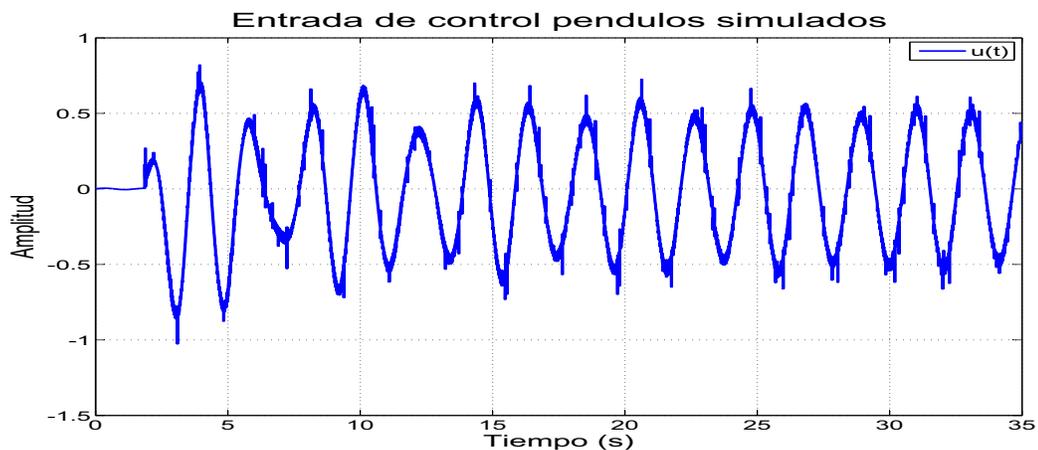


Figura 22. Señal de entrada de control péndulo virtual.

Para la implementación de la sincronización maestro - esclavo con un péndulo físico como maestro, los resultados obtenidos no fueron satisfactorios, como lo muestra la Figura 23, utilizando el péndulo físico del IRCCyN. En este caso no se puede realizar la sincronización teniendo un retardo de 0.3 s. Esto puede ser debido por una parte al periodo de muestreo como se mencionó anteriormente, pero también a que se tienen algunos problemas mecánicos con el péndulo real, los cuales no pudieron ser resueltos.

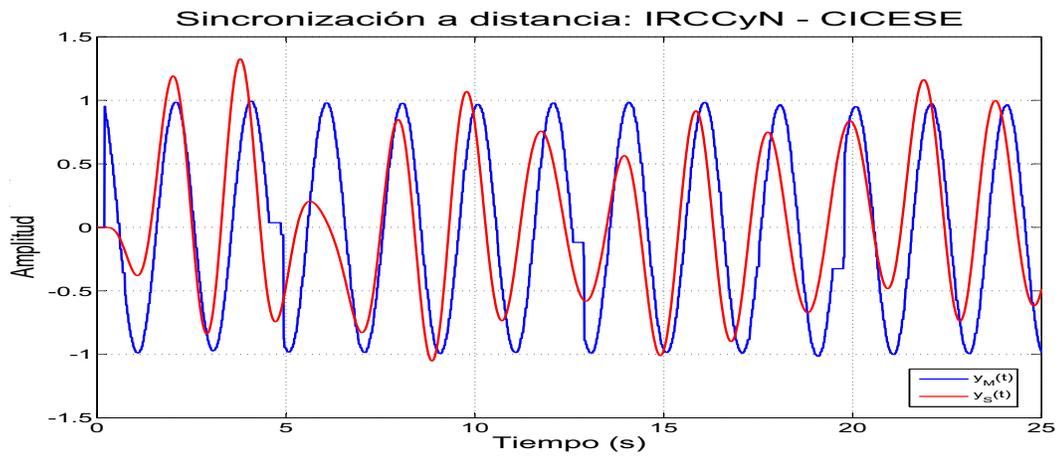


Figura 23. Maestro - esclavo con péndulo físico (IRCCyN).

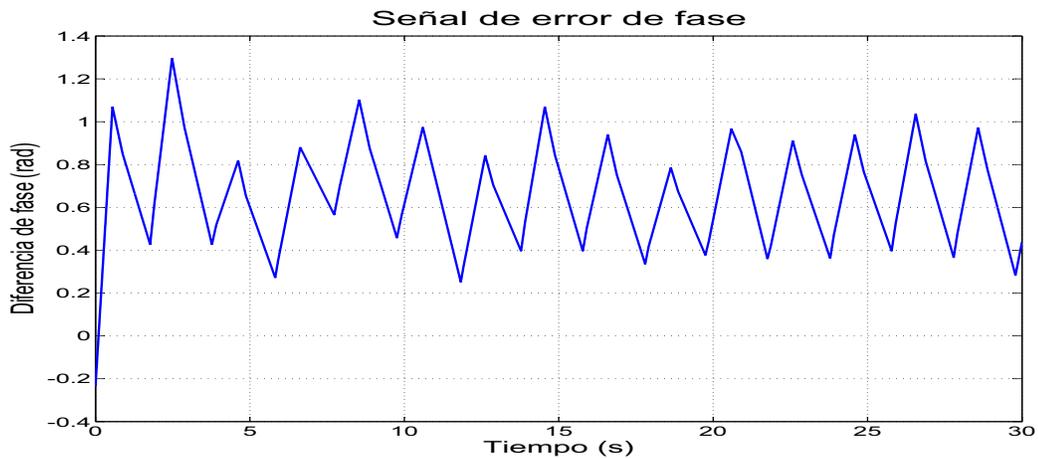


Figura 24. Señal de error en fase péndulos físico - virtual.

A continuación se muestra una gráfica obtenida con los datos recibidos, en la cual se observa cuando hay pérdida de datos. Cuando un dato es enviado desde el maestro, es numerado secuencialmente, y cuando el esclavo recibe el dato lo compara contra el número de dato anterior, obtiene la diferencia y guarda el resultado en una variable. Como se puede observar, existe pérdida de datos en la conexión, los cambios en la señal indican la pérdida de datos y cuántos datos se perdieron. En este caso se perdió únicamente un dato, aunque fue en cuatro ocasiones, como se ve en la Figura 25 donde 1 representa pérdida de datos.

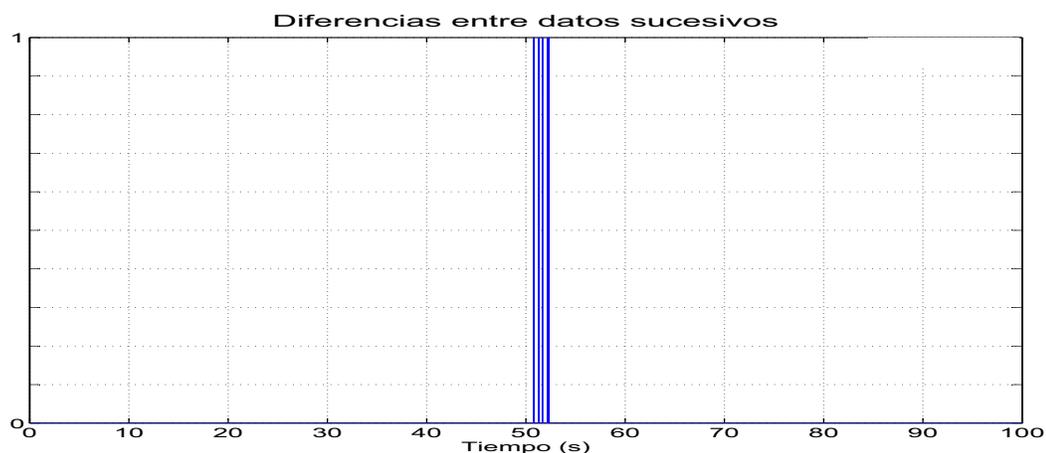


Figura 25. Gráfica de pérdida de datos: 0= no pérdida de dato, 1=dato perdido.

Se realizaron pruebas utilizando el péndulo real del CICESE como maestro, los resultados obtenidos fueron mejores que en el caso anterior, tal como lo muestran las figuras 26 y 27, se incluye una gráfica de la señal de error en fase, como es de esperarse, a diferencia del resultado obtenido en la Figura 21, los errores en fase son más grandes.

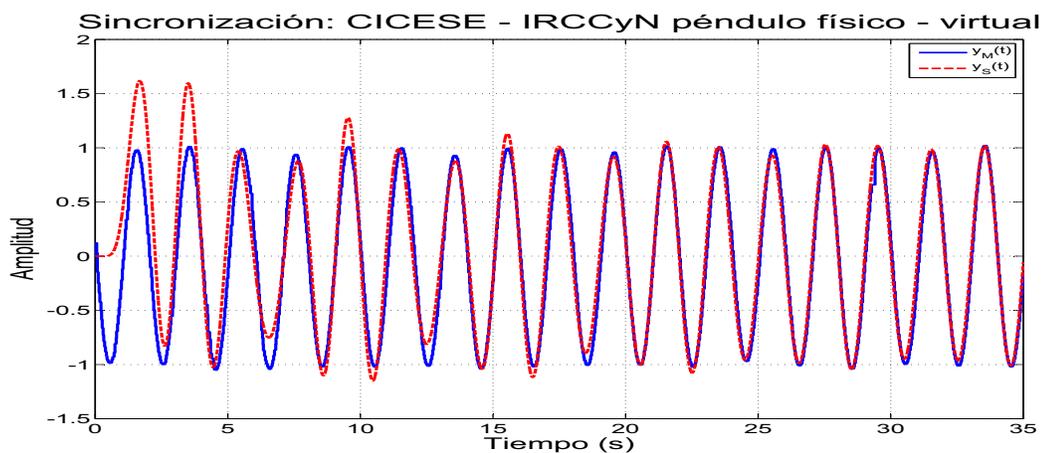


Figura 26. Sincronización péndulo físico (CICESE) como maestro.

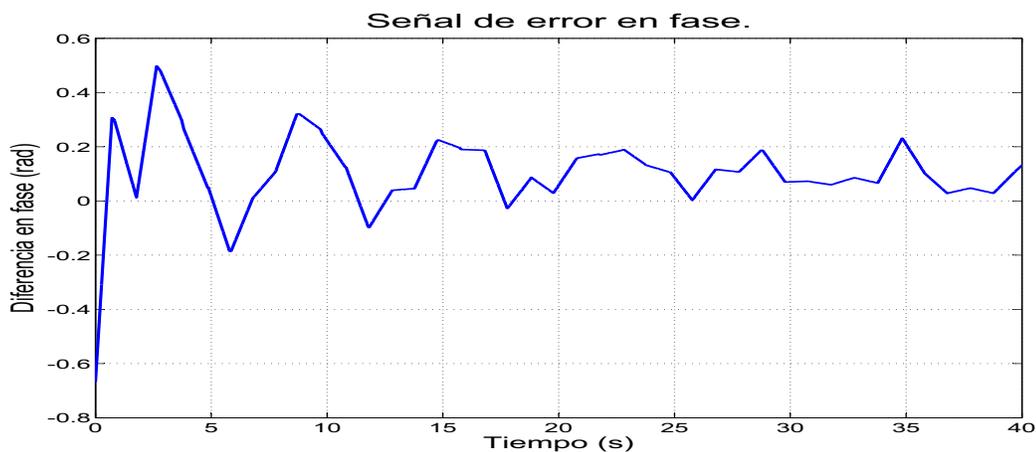


Figura 27. Señal de error en fase para el péndulo físico como maestro.

En el caso de sincronización utilizando los dos péndulos reales, no se pudo realizar la sincronización con el péndulo del CICESE como maestro, esto se debe a los problemas mecánicos que presenta el péndulo del IRCCyN. Utilizando el péndulo del CICESE como esclavo los resultados obtenidos son mostrados en la Figura 28.

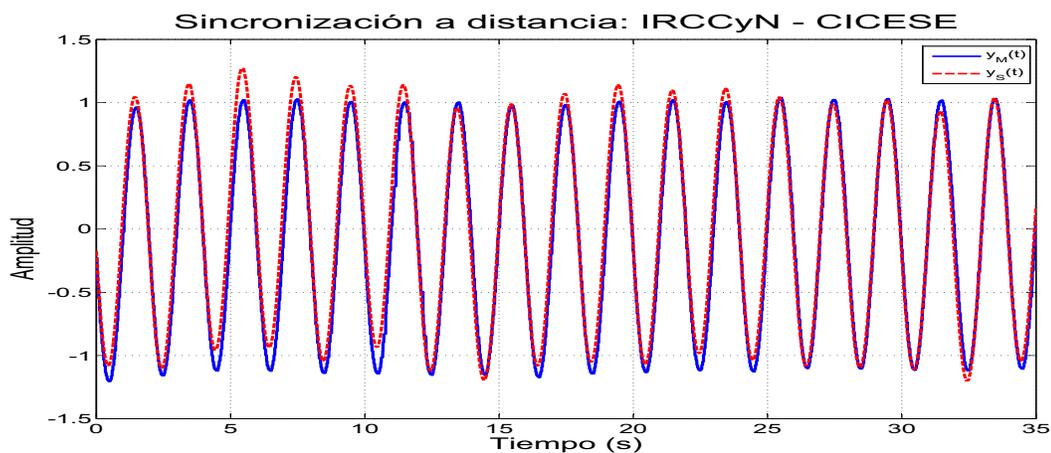


Figura 28. Sincronización con dos péndulos físicos.

En la Figura 29 se puede observar cómo el comportamiento de la señal de error en fase tiene variaciones grandes en la magnitud del error. Estas variaciones son debidas, como ya

se mencionó, a los problemas mecánicos que presenta uno de los péndulos utilizados.

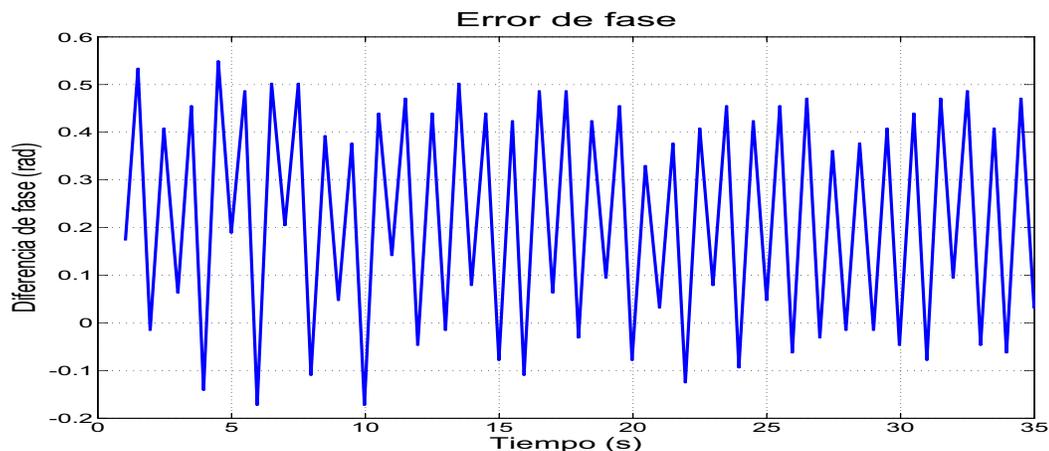


Figura 29. Señal de error en fase para los dos péndulos físicos.

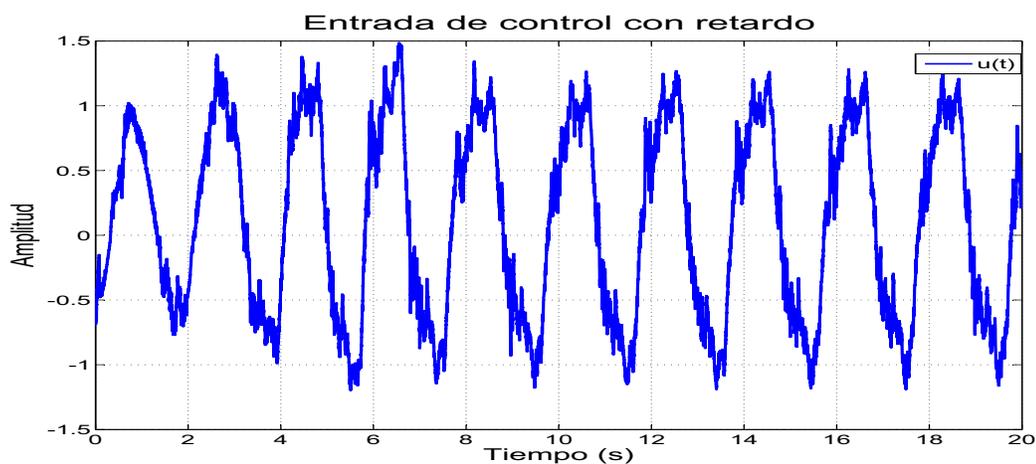


Figura 30. Señal de entrada de control péndulo mecánico con retardo.

VI.3. Conclusiones de capítulo.

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en las pruebas de sincronización maestro - esclavo entre los dos laboratorios: CICESE -IRCCyN. Primero se presentan las herramientas utilizadas así como el esquema propuesto para la comunicación entre los labo-

ratorios. Después se realizaron varias pruebas de sincronización, primero entre dos péndulos virtuales para probar la conexión, luego se hizo entre un péndulo real como maestro y un virtual como esclavo. Al final se realizó utilizando los dos péndulos físicos para la prueba. Aunque estas pruebas fueron satisfactorias, la plataforma de conexión aún presenta algunos errores.

Como se puede observar en las gráficas mostradas, todavía existe una diferencia tanto en amplitud como en fase entre las salidas del sistema maestro y el esclavo. Esto es debido a fallas mecánicas importantes, constatadas en uno de los dos péndulos utilizados. A pesar de estas fallas, se puede observar cómo la sincronización de las dos señales es obtenida de forma aproximada. Al tomar esto en cuenta, consideramos que los resultados son satisfactorios.

Capítulo VII

Conclusiones generales.

En este trabajo de tesis se abordó el problema de sincronización de dos péndulos invertidos con retardos en la comunicación. Se propuso el esquema de sincronización maestro - esclavo. Con este esquema se obtuvieron soluciones causales, siendo ésta una de las principales aportaciones. Los algoritmos obtenidos durante el desarrollo de la tesis han sido probados mediante simulaciones numéricas, y también fueron llevados a la práctica, obteniéndose buenos resultados en ambos casos.

Para llegar a dichos resultados, se siguió un proceso que arrojó otras aportaciones, a saber:

- Se obtuvieron soluciones causales al problema de seguimiento de trayectoria para una clase de SNL, las cuales complementan los resultados presentados en (Conte *et al.*, 2006), en el cual se presentan soluciones al problema para sistema lineales con retardos. También con estos resultados se incluyen una mayor cantidad de sistemas con retardos, ya que las condiciones suficientes presentadas son menos restrictivas que las obtenidas en otros trabajos (véase Márquez-Martínez y Moog, 2001).
- Esquemas de control causales para sincronización, basados en ecuaciones de error diferenciales y de diferencias.

- Debido a que dichas leyes requieren medición del estado completo de los sistemas, se realizó una comparación entre diversas soluciones para obtener el estado completo, las cuales fueron:
 - Un derivador robusto.
 - Dos observadores discontinuos.

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, tomando en cuenta diversos factores adversos como son:

- En el derivador presentado en el capítulo IV no se tiene procedimiento para la selección de las constantes óptimas, sólo se tiene un criterio cualitativo, lo cual es un punto importante que produce variaciones en la señal derivada.
- Debido a las componentes de alta frecuencia de la señal obtenida del derivador, en los estados del sistema se presentan pequeñas señales de alta frecuencia (“chattering”), lo que aumenta el error en la sincronización.
- Incertidumbres paramétricas.
- Las perturbaciones externas introducidas en la comunicación por internet y el sistema operativo utilizado. Algunas de estas son: pérdida de datos, retardo variable en la transmisión, retardo generado entre el tiempo de adquisición del dato y el tiempo de envío (Windows RealTime), retardo en la transferencia entre el tiempo de recepción del dato y el tiempo de acceso a la tarjeta dSPACE.
- Fallas mecánicas en los dispositivos ECP505, las cuales afectan directamente el algoritmo control.

VII.1. Aportaciones principales.

Las principales aportaciones en este trabajo de tesis, se pueden resumir en las siguientes:

- Se obtuvieron condiciones suficientes para la solución del problema de seguimiento de trayectoria, tanto para sistemas lineales como no lineales. La principal característica de estas proposiciones es la causalidad, con lo cual se evita el uso de predictores en el sistema de control.
- Se han propuesto técnicas de sincronización para sistemas con retardo en la transmisión de datos, las cuales son causales, independientemente de la magnitud del retardo.
- Los algoritmos de control fueron probados matemáticamente y su aplicación exitosa en la práctica los hace más atractivos como tema de investigación.
- Se diseñó y construyó una plataforma de comunicación de datos en Internet, basada en el protocolo UDP.
- Se obtuvo un modelo simple de fricción para el péndulo ECP505, el cual puede servir para futuras investigaciones en este tema.

VII.2. Trabajo a futuro.

El campo de investigación en la sincronización de sistemas mecánicos es bastante amplio, y aun existen muchos problemas que siguen abiertos. Uno de los principales es la investigación de técnicas de sincronización cuando el retardo es variable.

Otro aspecto a mejorar es la identificación de parámetros en el sistema, ya que las incertidumbres paramétricas sumadas a los efectos que produce el retardo ocasionan muchas veces que el sistema sea inestable.

Entre los problemas que continúan abiertos en el problema de seguimiento de trayectoria, se sugieren los temas siguientes para investigación adicional

- Solución con ecuaciones de error lineales estables con retardos.
- Buscar condiciones necesarias menos restrictivas e incluso necesarias y suficientes.

Para la realización de la sincronización de los péndulos con retardos, se requiere hacer una investigación más profunda para identificar los factores externos que puedan afectar al sistema. A diferencia con los sistemas sin retardos, los errores producidos por fuerzas no modeladas en el sistema, son más difíciles de corregir con el retardo.

Realizar un cambio de plataforma, ya que la tarjeta dSPACE no permite la programación en código abierto, pues se utiliza Simulink para mandar los algoritmos a la tarjeta. Esto hace que no sea fácil realizar los algoritmos requeridos para el control, o en ocasiones las herramientas necesarias sólo están disponibles como utilerías (toolbox) externas al programa de base, lo cual implica una restricción económica.

También se debe realizar un cambio a un sistema operativo en el cual se pueda tener la opción de trabajo en tiempo real. Windows también tiene la opción de tiempo real, pero ya se ha comprobado que no funciona como tal.

Para la sincronización de relojes, utilizar relojes GPS de alta calidad, ya que el que se tiene actualmente no está sincronizado de manera continua, lo que produce variaciones entre los relojes desde algunos milisegundos hasta 2 o más segundos.

Buscar mejorar la manera de obtener la rapidez de los eslabones, un método sencillo podría ser utilizando algún tipo de filtro que actúe como derivador. Finalmente, otro problema importante es la extensión de los resultados presentados a otros tipos de problemas, tal como la sincronización de redes eléctricas de potencia.

Chapitre VIII

Résumé en français.

VIII.1. Introduction.

Dans cette thèse, on propose le développement d'une technique de synchronisation pour systèmes mécaniques avec des retards dans le transfert d'informations. On considère que les retards sont bornés avec la utilisation d'un tampon et synchronisation des horloges des ordinateurs. On propose de nouveaux schémas de synchronisation avec retards dans la transmission de données ; la causalité des solutions obtenues est assurée non par l'utilisation de prédicteurs, mais en utilisant la structure des systèmes. La stabilité de l'erreur est obtenue par linéarisation et l'application de résultats de stabilité connus pour les systèmes linéaires à retards. On effectue l'étude du problème de synchronisation de deux dispositifs mécaniques distants (l'un à Nantes, France ; l'autre à Ensenada, Mexique), communiquant par un réseau. On considère un dispositif sous actionné qui est un pendule inverse lié à une barre transversale par une liaison prismatique. Les résultats de cette thèse constituent une nouvelle contribution aux travaux de synchronisation eu égard aux résultats rapportés dans la littérature.

Dans bon nombre de systèmes physiques et les systèmes créés par l'homme, la synchronisation est un phénomène naturel, par exemple, la synchronisation d'un réseau d'unités de

production d'énergie.

Le phénomène de synchronisation produit qu'un ensemble de systèmes avec interactions ou interconnexions puisse effectuer une fonction ou une tâche commune. Cette caractéristique peut être d'une grande utilité, et dans quelques cas nécessaires, par exemple dans des générateurs de puissance, des ensembles de mécanismes avec des applications industrielles comme la peinture, l'assemblage et le transport. Toutefois, dans beaucoup de ces systèmes, le phénomène de synchronisation ne se présente pas de manière naturelle. Ce pourquoi on doit ajouter des interconnexions artificielles, ou un système additionnel, dont l'objectif est de produire des signaux connexion ou commande pour obtenir une synchronisation entre les systèmes.

Deux schémas qui permettent la synchronisation contrôlée sont la configuration maître - esclave et la configuration bidirectionnelle. Dans la première, un système, appelé maître, impose sa dynamique à l'autre système appelé esclave, bien qu'on puisse aussi avoir plusieurs systèmes qui accomplissent la fonction d'esclave. Dans la seconde, la synchronisation est le résultat de l'interaction de tous les systèmes impliqués puisque la dynamique de chaque système influence le reste des systèmes.

D'autre part, la synchronisation peut être classée par le nombre d'états synchronisés et par la fonction qui les met en rapport. En fonction du nombre d'états synchronisés, selon que la totalité ou seulement une partie des variables d'état sont synchronisées, il est fait état de synchronisation complète ou partielle. La synchronisation est parfaite, de phase ou bien approchée, en fonction de la relation existant entre les états. Dans le cas général, on parlera de synchronisation généralisée.

Une des applications les plus importantes, est la synchronisation de systèmes mécaniques. Dans la pratique, bon nombre de ces systèmes travaillent sous un schéma coopératif ou coordonné (Stilwell y Bay, 1993), et dans les deux cas la synchronisation doit être présente. Dans quelques situations, les tâches ne peuvent pas être effectuées par un seul système, et on

requiert deux ou plus tels que de robots manipulateurs.

Une quantité importante de travaux sur la synchronisation de systèmes dynamiques, y compris la synchronisation de mécanismes, considèrent que les systèmes sont identiques et qu'il n'existe pas d'incertitude paramétrique ni de perturbation externe.

L'objectif de ce travail de thèse est la synchronisation de systèmes à retards. Une contribution théorique à la résolution causale du problème de poursuite de trajectoire est proposée sans utiliser de prédicteurs. Les résultats obtenus sont appliqués à un système de commande qui permet la synchronisation de systèmes mécaniques malgré l'existence de perturbations externes comme les retards dans la communication.

VIII.1.1. Contributions.

Les principales contributions de cette thèse sont énoncées comme suit :

1. Les contributions au problème de poursuite de trajectoire pour systèmes à retards, utilisant des équations d'erreur sans retard, sont présentées dans la Section VIII.2.
2. La conception d'un modèle mathématique avec friction du pendule ECP505.
3. Dans la synchronisation, on utilise la théorie de stabilité de systèmes linéaires avec des retards pour assurer la stabilité en boucle fermée. Dans ce cas on utilise des équations d'erreur linéaires avec des retards.

Pour l'application des résultats proposés précédemment, on effectue :

1. La synchronisation de deux pendules inverses, l'un à Nantes, France, l'autre à Ensenada, Mexique.
2. Une analyse théorique du pendule inverse ECP 505, adapté à notre problématique étant donné les caractéristiques physiques de ce système. L'analyse du système avec des outils de commande algébrique.

3. Une analyse statistique du retard dans la transmission de données par Internet entre les deux laboratoires participant, pour obtenir une borne supérieure du retard.
4. La conception d'un tampon qui sert à rendre le retard constant et obtenir une valeur pour les données perdues.
5. Synchronisation maître - esclave des pendules en appliquant la linéarisation maximale et des équations différentielles linéaires d'erreur de troisième ordre à retards, pour obtenir des solutions causales. A notre connaissance, il s'agit de la première application réelle de ce type d'équations pour des systèmes avec des retards.

Pour la plate-forme expérimentale, on utilise localement les outils suivants :

1. Une carte de commande dSPACE[©], plate-forme DS1104 version RTLIB1104 combinée avec langage de programmation Matlab/Simulink[©].
2. Communication entre les horloges d'ordinateurs en utilisant le protocole NTP.
3. Un pendule inverse, le modèle 505 du fabricant ECPSYSTEMS, qui est constitué par une barre horizontale en liaison prismatique avec une barre verticale.
4. Un ordinateur PC.

VIII.1.2. Plan de la thèse.

Dans la Section VIII.2 on présente le problème de poursuite de trajectoire pour une classe générale de systèmes non linéaires à retards, ainsi que nos résultats sur l'existence de solutions causales par bouclage statique de l'état dans un cadre algébrique. On considère deux classes de compensateurs statiques causaux, avec ou sans dynamique retardée. On donne des conditions suffisantes pour obtenir une solution causale, qui n'impliquent pas nécessairement la perte maximale d'observabilité en opposition à des solutions plus standard.

Dans la Section VIII.3, on montre la théorie et les calculs effectués pour obtenir le modèle choisi pour la commande du pendule. Pour pouvoir effectuer la commande, on requiert l'utili-

sation d'un certain observateur d'état, ou une autre méthode, pour pouvoir avoir accès à l'état complet du système, puisqu'en plus de être sous actionné, dans ce système on a uniquement accès aux variables de position.

La synchronisation des pendules inverses avec des retards en temps, est montré dans la Section VIII.4, on donne d'abord la théorie de base nécessaire pour pouvoir effectuer la synchronisation. Pour résoudre le problème, on résoud des équations d'erreur linéaires à retards. La solution obtenue est une commande causale, qui ne nécessite donc pas de prédicteur.

La Section VIII.6 montre les conclusions générales de ce travail de thèse.

VIII.2. Résolution de la poursuite de trajectoire avec des équations d'erreur sans retard.

L'étude des systèmes linéaires et non linéaires à retards a été utile pour résoudre d'importants problèmes de commande. Bon nombre de systèmes d'intérêt pratique comme des processus industriels (Jankovic, 2003), les laminoirs (Scholtz *et al.*, 2000), les systèmes aéronautiques (Tournes y Shtessel, 1996), les systèmes biologiques en dynamique de population (Beretta *et al.*, 1998), les télé-manipulateurs (Anderson y Spong, 1989), les réseaux de transmissions et les satellites commandés à partir du sol sont des exemples de systèmes non linéaires avec retards.

Les systèmes à retards en temps représentent une classe de systèmes de dimension infinie. Durant les années récentes, des progrès remarquables dans l'analyse et la commande ont été obtenus pour différents cadres mathématiques, comme les équations différentielles dans des espaces abstraits (Niculescu y Gu (Eds), 2004), sur les anneaux d'opérateurs (Xia *et al.*, 2002) et les équations différentielles fonctionnelles (Hale y Verduyn, 1993). Un grand nombre de résultats sur la stabilité et la stabilisation de systèmes à retards peuvent être trouvés dans (Richard, 2003; Mazenc y Niculescu, 2001; Jankovic, 2003; Popescu *et al.*, 2004) et leurs

références. Quelques résultats d'analyse des propriétés structurelles telles que l'accessibilité, et l'observabilité sont reportés dans (Xia *et al.*, 2002). Des résultats additionnels incluant la linéarisation par bouclage (Germani y Manes, 2001), l'identification (Orlov *et al.*, 2006), et l'inversibilité peuvent être trouvés dans (Conte y Perdon, 2000).

Les schémas de commande standard, développés pour des systèmes sans retard, ont généralement des solutions non causales dans le cas des systèmes à retards, c-à-d, des solutions qui dépendent de valeurs futures des variables du système. Nous nous intéressons à la recherche de solutions causales, si elles existent, pour les systèmes non linéaires à retards. L'approche alternative qui consiste à ignorer les retards peut ne pas être acceptable car la présence de retards peut détériorer les performances du système et même causer son instabilité (Tchangani *et al.*, 1998).

Un sujet fondamental de commande est le problème de poursuite d'une trajectoire de référence donnée. Sa solution est d'une grande importance, par exemple, dans la commande à distance de systèmes mécaniques comme les robots (Chopra *et al.*, 2006). Le problème de poursuite de trajectoire pour le cas de systèmes multi-entrées multi-sorties a été considéré pour les systèmes linéaires dans (Conte *et al.*, 2006). Dans ce travail, des conditions suffisantes ont été établies pour la synthèse d'un compensateur causal, avec ou sans dynamiques retardées, pour les systèmes avec accessibilité complète ; lesquels conduit à une perte maximale d'observabilité, comme il est montré dans (Isidori A., 1989; Isidori y Ruberti, 1984) pour des systèmes non linéaires sans retard.

On résout le problème de poursuite de trajectoire et on établit des conditions suffisantes plus faibles que celles existant dans la littérature, pour l'existence d'une solution causale par bouclage statique (avec ou sans dynamique retardée). Ces résultats ont été publiés dans (Estrada-García *et al.*, 2006; Estrada-García *et al.*, 2008).

VIII.2.1. Notations et définitions préliminaires.

Systèmes étudiés.

Considérons le système non linéaire Σ , multivariable, avec s retards constants, décrits par

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s)) + \\ &\quad \sum_{j=0}^s g_j(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s))u(t-j) \\ y(t) &= h(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s)) \\ x(t_0 + \sigma) &= \varphi(\sigma), \sigma \in [-s, 0]. \end{cases} \quad (131)$$

L'état $x \in \mathbb{R}^n$, l'entrée $u \in \mathbb{R}^m$ et la sortie $y \in \mathbb{R}^m$. Les entrées de f , g_j , et h sont des fonctions analytiques, i.e. admettent un développement de Taylor dans un voisinage de tout point. $\varphi(\sigma)$ dénote la fonction des conditions initiales.

Préliminaires mathématiques.

Définition 1 . (Moog et al., 2000) La sortie y_i du système Σ_d a un degré relatif ρ_i s'il existe $\tau, k \in \mathbb{N}$

$$\rho = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists \tau = 0, 1, \dots, s, \frac{\partial y^{(k)}(t)}{\partial u(t-\tau)} \neq 0 \right\}.$$

Si, pour tout $(k, \tau) \in \mathbb{N}^2$, $\partial y^{(k)}(t)/\partial u(t-\tau) \equiv 0$, alors on pose $\rho = \infty$.

Comme dans le cas des systèmes sans retard, le problème de poursuite de trajectoire peut être résolu avec les méthodes d'inversion de système. Le développement pratique requiert en général l'inversion de matrices polynômiales définies localement autour de presque tout point. Dans le cadre non linéaire, ce cadre algébrique est brièvement défini par la définition suivante.

Définition 2 . Soit \mathcal{K} le corps des fonctions méromorphes d'un nombre fini de variables

indépendantes de $\{x(t - \tau), u^{(k)}(t - \tau), \tau, k \in \mathbb{N}\}$.

Soit df la forme différentielle de la fonction $f \in \mathcal{K}$, et soit $\mathcal{E} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{df, f \in \mathcal{K}\}$ l'espace vectoriel engendré sur \mathcal{K} par les formes différentielles de tous les éléments de \mathcal{K} .

Alors, $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est l'opérateur qui associe $df(t)$, la forme différentielle de $f(t)$, à $df(t - 1)$, la forme différentielle de la même fonction retardée d'une unité de temps. Par exemple, $\nabla dx(t) = dx(t - 1)$.

Supposons que les sorties du système aient un degré relatif fini ρ_i , la dérivée d'ordre ρ_i de la sortie y_i est :

$$y_i^{(\rho_i)} = \alpha_i(\cdot) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^s \tilde{g}_{ijk}(\cdot) u_j(t - k) \quad (132)$$

où $\alpha_i(\cdot)$ et $\tilde{g}_{ijk}(\cdot)$ sont des fonctions méromorphes de $(x(t), \dots, x(t - s))$. La notation (\cdot) représente $(x(t), x(t - 1), \dots, x(t - s))$.

La matrice $D(\nabla) := \sum_{k=0}^s D_k \nabla^k$ est une matrice polynômiale de dimension $m \times m$, en ∇ dont les coefficients D_k sont donnés par

$$D_k = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11k}(\cdot) & \cdots & \tilde{g}_{1mk}(\cdot) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{m1k}(\cdot) & \cdots & \tilde{g}_{mmk}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (133)$$

avec \tilde{g}_{ijk} définis par (132).

Les entrées de la matrice, associée au système Σ appartiennent à $\mathcal{K}[\nabla]$. L'existence d'une propriété d'inversion sera requise dans le reste du chapitre.

Les systèmes à retards sont décrits par des équations différentielles et aux différences et soumis à deux opérateurs : la différenciation en temps et l'opérateur retard. Les compensateurs pour les systèmes à retards sont définis en différentes classes dépendant de l'existence d'une dynamique propre relativement à chaque opérateur, ou non.

Nous restreignons notre intérêt aux bouclages statiques causaux avec ou sans dynamique retardée. Ces compensateurs sont causaux dans le sens qu'ils ne nécessitent pas la connaissance de valeurs futures des états ou de l'entrée pour pouvoir être mis en oeuvre. Ces compensateurs sont définis comme suit :

Retour d'état statique	$u(t) = a(\cdot) + b(\cdot)v(t)$
Retour d'état statique avec dynamique retardée	$u(t) = a(\cdot) + b(\cdot)v(t) + \sum_{j=1}^s \tilde{g}_j(t)u(t-j)$

où a , b et \tilde{g}_j sont fonctions méromorphes de $(x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau))$ avec $\tau \in \mathbb{N}$. v est la nouvelle entrée de commande.

Définition du problème de poursuite de trajectoire (PST). Etant donné un système Σ_d de la forme (131) et un signal de référence $y_{ref}(t)$, $t \geq 0$, trouver localement, si possible, un compensateur causal C tel que la différence $e(t)$ entre la sortie $y(t)$ de Σ_d , et la référence $y_{ref}(t)$ soit localement asymptotiquement stable.

VIII.2.2. Solution par bouclage statique.

Nous considérerons les composantes de sortie y_i et des signaux de référence $y_{i_{ref}}(t)$ de classe C^{ρ_i} .

Proposition 1 .(Estrada-García et al., 2006) *Il existe un bouclage statique d'état qui résout le PST pour Σ_d si toutes les composantes de la sortie du système Σ , ont un degré relatif fini ρ_i , et si la matrice $D(\nabla)$ est inversible.*

VIII.2.3. Solution par bouclage statique avec dynamique retardée.

La condition de la Proposition 1 qui requiert l'inversibilité de la matrice D est forte. Une alternative est étudiée à présent. Notons $D(\nabla)$ comme $D(\nabla) = D_0 + D_1\nabla + \dots +$

$D_n \nabla^n$. Si la matrice D_0 est inversible, alors il est possible de résoudre le PST en utilisant des compensateurs de retour d'état statique avec dynamique retardée du type

$$u(t) = a(\cdot) + b(\cdot)v(t) + \sum_{j=1}^s \tilde{g}_j(t)u(t-j).$$

Ce compensateur peut être réalisé par

$$\begin{aligned} z_1(t) &= u(t-1) \\ &\vdots \\ z_n(t) &= u(t-s) \\ u(t) &= F(\cdot)\xi(t) + G_1(\cdot)z_1(t) + \cdots + G_n(\cdot)z_n(t). \end{aligned} \tag{134}$$

Proposition 2 .(Estrada-García et al., 2006) *Etant donné un système Σ_d de la forme (131) il existe un bouclage statique d'état avec des dynamiques retardées qui résout le PST si toutes les sorties ont un degré relatif fini et la matrice D_0 est inversible.*

Si les conditions dans la Proposition 1 ou la Proposition 2 ne sont pas satisfaites, il est intéressant de rechercher une solution plus sophistiquée. On propose maintenant une condition suffisante plus faible qui est neuve tant pour les systèmes non linéaires que pour les systèmes linéaires. Ceci est fait avec une classe de compensateurs avec dynamique retardée. Une recherche plus en profondeur dans la structure du système est requise ; comme il est montré dans (Moog *et al.*, 2000), on définit μ_i comme le plus petit retard existant entre $y_i^{(\rho_i)}(t)$ et $u(t)$:

$$\mu_i \triangleq \min\{k \in \mathbb{N} \mid \partial y_i^{(\rho_i)}(t) / \partial u(t-k) \neq 0\}. \tag{135}$$

En considérant que toutes les sorties du système ont un degré relatif fini ρ_i , on peut définir le vecteur ligne suivant :

$$\tilde{D}_0^i = \partial y_i^{(\rho_i)}(t + \mu_i) / \partial u(t) \text{ for } i = 1, \dots, m. \quad (136)$$

Proposition 3 .

Etant donné le système Σ_d de la forme (131) le PST par bouclage statique avec des dynamiques retardées a une solution locale autour de presque tout point si

$$(i) \partial y_i^{(\rho_i)}(t) / \partial x(t - k) \equiv 0 \forall k \in \{0, \dots, \mu_i - 1\}.$$

$$(ii) \tilde{D}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{D}_0^1 \\ \vdots \\ \tilde{D}_0^m \end{bmatrix} \text{ est invertible.}$$

Les propositions précédentes fournissent des conditions suffisantes pour résoudre le PST, qui donnent lieu à une perte maximale d'observabilité. Ces conditions sont loin d'être nécessaires. Des nouvelles conditions suffisantes données dans la suite, sont plus faibles et ne requièrent pas la compensation des états stables non commandables par une perte d'observabilité.

Solution générale.

Considérons un système non linéaire avec des retards (137) comportant une dynamique autonome η comme suit,

$$\Sigma_d : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \dots, x(t-s), \eta(t), \dots, \eta(t-s)) + \\ \quad + \sum_{j=0}^s g_j(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s))u(t-j) \\ \dot{\eta}(t) = \zeta(\eta(t), \dots, \eta(t-s)) \\ y(t) = h(x(t), x(t-1), \dots, x(t-s), \eta(t), \dots, \eta(t-s)) \\ x(t_0 + \sigma) = \varphi(\sigma), \sigma \in [-s, 0]. \end{cases} \quad (137)$$

La décomposition d'un système non linéaire avec retard dans (137) peut être obtenue en calculant le submodule des formes différentielles autonomes \mathcal{H}_∞ comme dans (Xia *et al.*, 2002), car $d\eta \in \mathcal{H}_\infty$. Nous supposons que la dynamique autonome $\eta(t)$ reste bornée pour tout $t \geq 0$.

Considérons à nouveau que toutes les composantes de la sortie ont un degré relatif fini ρ_i pour $i = 1, \dots, m$. Maintenant nous pouvons établir une nouvelle proposition.

Proposition 4 .

Soient les polynômes Hurwitz

$s^{(\rho_i)} + \lambda_{i,\rho_i-1}s^{(\rho_i-1)} + \dots + \lambda_{i,0}$ pour $i = 1, \dots, m$ avec $\lambda_{i,\rho_i-1}, \dots, \lambda_{i,0} \in \mathbb{R}$. Définissons

$$\Phi_i(\cdot) \triangleq \epsilon_i^{(\rho_i)}(t) + \lambda_{i,\rho_i-1}\epsilon_i^{(\rho_i-1)}(t) + \dots + \lambda_{i,0}\epsilon_i(t) \quad (138)$$

où $\Phi_i(\cdot)$ représente $\Phi_i\left(y_{i_{ref}}(t), \dots, y_{i_{ref}}^{(\rho_i)}(t), x(t), \dots, x(t-s), \dots, \eta(t), \dots, \eta(t-s), u(t), \dots, u(t-s)\right)$ et $\epsilon_i = y(t) - y_{i_{ref}}(t)$.

Soient $\chi_i(t)$ et $\beta_i(t)$ définis par

$$\begin{aligned} \beta_i(t) &\triangleq \Phi_i(0, \dots, 0, \eta(t), \eta(t-1), \dots, \eta(t-\mu_i+1), 0, \dots, 0) \\ \chi_i(t) &\triangleq \Phi_i(t) - \beta_i(t) \end{aligned} \quad (139)$$

et μ_i défini comme dans (135). Notons

$$\begin{bmatrix} \chi_1(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \chi_m(t + \mu_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t + \mu_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}_m(t + \mu_m) \end{bmatrix} + \tilde{g}_0(t)u(t) + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_1+1}^s \tilde{g}_{1jk}(t)u_j(t-k) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=\mu_m+1}^s \tilde{g}_{mjk}(t)u_j(t-k) \end{bmatrix} \quad (140)$$

avec $\tilde{g}_0(t)$ défini par

$$\tilde{g}_0(t) = \begin{bmatrix} \partial\chi_1(t + \mu_1)/\partial u(t) \\ \vdots \\ \partial\chi_m(t + \mu_m)/\partial u(t) \end{bmatrix}. \quad (141)$$

Alors il existe un bouclage d'état statique avec dynamique retardée, qui résout localement le PST, si les conditions suivantes sont satisfaites pour $i = 1, \dots, m$

1. $d\beta_i \in \text{span} \{d\eta\}$.
2. $\beta_i(t)$ tend exponentiellement vers zéro.
3. \tilde{g}_0 est inversible.
4. $\partial\chi_i(t)/\partial(x(t-k), \eta(t-k)) \equiv 0, \forall k \in \{0, \dots, \mu_i - 1\}$.

VIII.3. Commande locale du pendule.

Pour effectuer la synchronisation, il est nécessaire de trouver une loi de commande locale avec laquelle on puisse effectuer la poursuite de trajectoire d'un signal de référence. Pour résoudre ce problème de commande, nous utiliserons la méthode proposée dans (Grizzle *et al.*, 2005), puisque le pendule inverse est un système sous actionne et il possède une dynamique zéro non stable, en appliquant cette méthode nous obtenons une entrée de commande par retour d'état tel que la dynamique zéro du système est stable. Pendant la mise en oeuvre de la loi de commande, il a été nécessaire de faire une compensation de la force de frottement, puisqu'elle affecte considérablement le système. Nous présentons donc un modèle approché du pendule avec frottement.

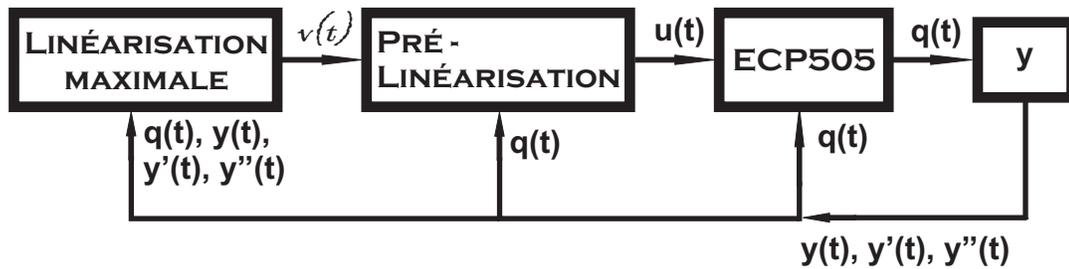


FIGURE 31. Diagramme du modèle de commande.

Modèle de frottement.

Le modèle qui sera utilisé pour l'ECP505 est un modèle simple de frottement visqueux, qui dépend directement de la vitesse du système. Dans notre cas d'étude on a l'équation pour le frottement :

$$F = a\dot{q}(t).$$

Pour obtenir la loi de commande nécessaire pour la poursuite de trajectoire, on utilise la méthode présentée en (Spong, 1994), ainsi que la théorie de commande algébrique, pour trouver une sortie qui produit la linéarisation maximale pour le système.

VIII.3.1. Pré-linéarisation.

L'équation de Lagrange pour la barre verticale avec un terme de frottement visqueux est déterminée par l'équation :

$$\begin{aligned} -C_2\ddot{q}_2(t) + 2m_2q_2(t)\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) + (m_2q_2(t)^2 + C_1)\ddot{q}_1(t) \\ -C_4g \sin(q_1(t)) + a_1\dot{q}_1(t) + m_2gq_2(t) \cos(q_1(t)) = 0. \end{aligned} \quad (142)$$

Pour la barre horizontale nous obtenons aussi l'équation de Lagrange avec frottement visqueux :

$$m_2\ddot{q}_2(t) + a_2\dot{q}_2(t) - C_2\ddot{q}_1(t) - m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 + m_2g \sin(q_1(t)) = u \quad (143)$$

où C_1, C_2, C_4 sont constants et dépendent uniquement des paramètres du système ; a_1, a_2 sont les constantes de proportionnalité de la force de frottement. Les variables $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont la position angulaire (barre verticale) et la position linéaire (barre horizontale) respectivement. Nous considérerons négligeable le frottement pour la barre verticale par conséquent $a_1 = 0$.

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (142) pour $\ddot{q}_1(t)$

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{C_2\ddot{q}_2(t) - 2m_2q_2(t)\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) + C_4g \sin(q_1(t)) - m_2gq_2(t) \cos(q_1(t))}{m_2q_2(t)^2 + C_1}. \quad (144)$$

En résolvant aussi l'équation (143) pour $\ddot{q}_2(t)$ on obtient

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{u - a_2\dot{q}_2(t) + C_2\ddot{q}_1(t) + m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 - m_2g \sin(q_1(t))}{m_2} \quad (145)$$

En remplaçant (144) dans l'équation précédente, ainsi que $J_0 = m_2q_2(t)^2 + C_1$:

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{J_0u + C_2^2\ddot{q}_2(t) + (-2m_2C_2q_2(t)\dot{q}_1(t) - a_2J_0)\dot{q}_2(t) + J_0m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 + J_0m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 + (C_2C_4g - J_0m_2g) \sin(q_1(t)) - m_2C_2gq_2(t) \cos(q_1(t))}{m_2J_0}. \quad (146)$$

En résolvant pour $\ddot{q}_2(t)$:

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{J_0u + (-2m_2C_2q_2(t)\dot{q}_1(t) - a_2J_0)\dot{q}_2(t) + J_0m_2q_2(t)(\dot{q}_1(t))^2 + (C_2C_4g - J_0m_2g) \sin(q_1(t)) - m_2C_2gq_2(t) \cos(q_1(t))}{m_2J_0 - C_2^2}. \quad (147)$$

En remplaçant $\ddot{q}_2(t) = v$ dans la deuxième dérivée de $q_1(t)$ nous pouvons écrire les équations du pendule dans la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1(t) &= J(q_2(t))v + R(q, \dot{q}) \\ \ddot{q}_2(t) &= v\end{aligned}\tag{148}$$

où

$$\begin{aligned}J(q_2) &= \frac{C_2}{J_0} \\ R(q, \dot{q}) &= -\frac{2m_2q_2(t)\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) - C_4g \sin(q_1(t)) + m_2gq_2(t) \cos(q_1(t))}{J_0}.\end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation de pré-linéarisation, nous résolvons (147) en fonction de u ce qui nous donne l'entrée de commande :

$$\begin{aligned}u &= \frac{(m_2J_0 - C_2^2)v + (2m_2C_2q_2(t)\dot{q}_1(t) + a_2J_0)\dot{q}_2(t) + (-m_2q_2(t)J_0)(\dot{q}_1(t))^2}{J_0} \\ &\quad + \frac{(m_2gJ_0 - C_2C_4g) \sin(q_1(t)) + m_2C_2gq_2(t) \cos(q_1(t))}{J_0}.\end{aligned}\tag{149}$$

VIII.3.2. Linéarisation maximale.

En appliquant la théorie de commande algébrique, pour obtenir une linéarisation maximale du modèle non linéaire du pendule inverse ECP 505, il faut chercher une sortie dont le degré relatif est le plus élevé possible. Pour trouver cette sortie, il est nécessaire de chercher le sous espace intégrable \mathcal{H}_k de degré plus grand possible. Dans le cas du pendule, cet sous espace est \mathcal{H}_4 , mais puisque il n'est pas intégrable, nous sommes parvenus à calculer le sous espace \mathcal{H}_3 .

$$\mathcal{H}_3 = \text{span}_{\mathcal{K}} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{m_2q_2(t)^2 + C_1}{C_2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2m_2\dot{q}_1q_2(m_2q_2(t)^2 + C_1)}{C_2^2} & -\frac{m_2q_2(t)^2 + C_1}{C_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ d\dot{q}_1 \\ dq_2 \\ d\dot{q}_2 \end{bmatrix} \right\}.\tag{150}$$

\mathcal{H}_3 est sous la forme $\mathcal{H}_3 = \text{span}\{d\sigma, dp\}$, et définissons comme p et σ

$$\sigma = -C_2\dot{q}_2(t) + (m_2q_2(t)^2 + C_1)\dot{q}_1(t), \quad (151)$$

$$p = q_1(t) - \frac{C_2 \arctan\left(\frac{m_2q_2(t)}{\sqrt{C_1m_2}}\right)}{\sqrt{C_1m_2}}. \quad (152)$$

en prenant $y = Kp$ ou $y = K\sigma$ comme sortie, le système résultant ne possède pas une dynamique de zéro asymptotiquement stable. Mais c'est toujours possible de trouver une sortie de la forme $y = Kp + \sigma$ avec une dynamique de zéro asymptotiquement stable à condition de prendre K positif.

La première dérivée de σ

$$\dot{\sigma} = C_4g \sin(q_1(t)) - m_2gq_2(t) \cos(q_1(t)). \quad (153)$$

La deuxième dérivée de σ est donnée par

$$\ddot{\sigma} = m_2gq_2(t) \sin(q_1(t))\dot{q}_1(t) + C_4g \cos(q_1(t))\dot{q}_1(t) - m_2g \cos(q_1(t))\dot{q}_2(t). \quad (154)$$

La première dérivée de la fonction p reste de la forme :

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}q_1(t) - \frac{C_2\dot{q}_2(t)}{m_2q_2(t)^2 + C_1}. \quad (155)$$

La deuxième dérivée est :

$$\ddot{p} = \frac{2m_2C_2q_2(t)(\dot{q}_2(t))^2}{(m_2q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2q_2(t)\dot{q}_1(t)\dot{q}_2(t) - C_4g \sin(q_1(t)) + m_2gq_2(t) \cos(q_1(t))}{m_2q_2(t)^2 + C_1}. \quad (156)$$

Alors la famille de sorties $y = Kp + \sigma$ est définie par

$$y = \left(q_1(t) - \frac{C_2 \arctan\left(\frac{m_2 q_2(t)}{\sqrt{C_1 m_2}}\right)}{\sqrt{C_1 m_2}} \right) K - C_2 \dot{q}_2(t) + (m_2 q_2(t)^2 + C_1) \dot{q}_1(t). \quad (157)$$

Nous obtenons sa première dérivée, qui est ;

$$\dot{y} = \left(\dot{q}_1(t) - \frac{C_2 \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) K + C_4 g \sin(q_1(t)) - m_2 g q_2(t) \cos(q_1(t)) \quad (158)$$

et pour la deuxième dérivée on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \left(\frac{2m_2 C_2 q_2(t) (\dot{q}_2(t))^2}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2 q_2(t) \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) - C_4 g \sin(q_1(t)) + m_2 g q_2(t) \cos(q_1(t))}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) K + \\ & m_2 g \cos(q_1(t)) \dot{q}_2(t) - m_2 g q_2(t) \sin(q_1(t)) \dot{q}_1(t) - C_4 g \cos(q_1(t)) \dot{q}_1(t). \end{aligned} \quad (159)$$

Si nous égalons $y^{(3)} = w$ et regroupons des termes communs pour la troisième dérivée de y , est égale à

$$\begin{aligned} w = & \left(\left(C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t) - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) \left(J(q_2(t)) \right) \right. \\ & \left. + m_2 g \cos q_1(t) + \frac{4kl_0 m_2^2 q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) v + \\ & + \left(C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t) - \frac{4m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) \left(R(q_1(t), q_2(t)) \right) - \\ & - \frac{2m_2 k \dot{q}_1(t) \dot{q}_2^2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \frac{m_2 k g \cos q_1(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{m_2 k g q_2(t) \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{(C_4) k g \cos q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \\ & + \left(\frac{2l_0 k m_2^2}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{8kl_0 m_2^3 \dot{q}_2^2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^3} \right) \dot{q}_2^3(t) + 2m_2 \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) g \sin q_1(t) - \\ & + (m_2 g q_2(t) \cos q_1(t) - C_4 g \sin q_1(t)) \dot{q}_1^2(t). \end{aligned} \quad (160)$$

En résolvant maintenant l'équation précédente en v nous obtenons l'équation pour la nouvelle entrée de commande

$$v = \frac{w - \Psi(q, \dot{q})(R(q_1, q_2)) - \phi(q, \dot{q})}{\Psi(q, \dot{q})J(q_2(t)) + \xi(q, \dot{q})} \quad (161)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi(q, \dot{q}) &= \left(C_4 g \cos q_1(t) + m_2 g q_2(t) \sin q_1(t) - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} \right) \\ \phi(q, \dot{q}) &= -\frac{2m_2 k \dot{q}_1(t) \dot{q}_2^2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \frac{m_2 k g \cos q_1(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \frac{m_2 k g q_2(t) \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} + \\ &+ \left(\frac{2l_0 k m_2^2}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{8kl_0 m_2^3 \dot{q}_2^2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^3} \right) \dot{q}_2^3(t) + \frac{(C_4) k g \cos q_1(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - \\ &- \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_2(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} R(q_1(t), q_2(t)) + 2m_2 g \dot{q}_1(t) \dot{q}_2(t) \sin q_1(t) \\ &+ (m_2 g q_2(t) \cos q_1(t) \dot{q}_1(t) - C_4 g \sin q_1(t) \dot{q}_1(t)) \dot{q}_1(t) \end{aligned}$$

$$\xi(q, \dot{q}) = \frac{4kl_0 m_2^2 q_2(t) \dot{q}_2(t)}{(m_2 q_2(t)^2 + C_1)^2} - \frac{2m_2 k q_2(t) \dot{q}_1(t)}{m_2 q_2(t)^2 + C_1} - m_2 g \cos q_1(t)$$

et

$$w = y_{ref}^{(3)}(t) - \lambda_1(\ddot{y}(t) - \ddot{y}_{ref}(t)) - \lambda_2(\dot{y}(t) - \dot{y}_{ref}(t)) - \lambda_3(y(t) - y_{ref}(t)). \quad (162)$$

VIII.4. Synchronisation de deux pendules inverses avec retards dans la communication.

L'objectif de commande est la poursuite d'une trajectoire de référence, qui en principe va être appliquée aux deux systèmes comme une commande locale. Pour avoir la stabilité asymptotique, après un certain temps on applique la commande de synchronisation, qui doit compenser une différence de phase entre les deux pendules. Le retard dans la communication

est supposé constant et le signal d'erreur satisfait une équation différentielle de troisième ordre avec retard, qui permet de garantir la causalité.

VIII.4.1. Définition de synchronisation

Ensuite se présente la définition de synchronisation qui sera considéré. Cette définition se base en les concepts présentés dans (Blekhman *et al.*, 2002). Considérons k systèmes dynamiques

$$S_i = \{T, U_i, X_i, Y_i, \phi_i, h_i\}, i = 1, \dots, k, \quad (163)$$

où T est l'ensemble de moments de temps ; U_i, X_i, Y_i sont l'ensemble d'entrées, états et sorties, respectivement ; $\phi_i : t \times X_i \times U_i \rightarrow X_i$ sont les applications (mappings) de transition, et $h_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ les applications de sortie.

Supposons qu'ils sont donnés l fonctionnels $\kappa_j : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_k \times T \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, l$. \mathcal{F}_i sont l'ensemble de toutes les fonctions $\mathcal{F}_i = \{y : T \rightarrow Y_i\}$.

Nous prendrons comme l'ensemble de temps $T = \mathbb{R} = \{t : 0 \leq t < \infty\}$. Pour tout $\zeta \in T$ l'opérateur de décalage $\sigma_\zeta : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_i$ il est défini comme suit $(\sigma_\zeta y)(t) = y(t + \zeta)$ pour toute $y \in \mathcal{F}_i$ y toda $t \in T$. Soient $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ les solutions des systèmes $S_1, \dots, S_k, x^{(i)}(\cdot) \in X_i$ avec des conditions initiales $x^{(1)}(0), \dots, x^{(k)}(0)$ respectivement, définies pour toute $t \in T$.

Nous supposons par simplicité que tout $S_i, i = 1, \dots, k$ sont des systèmes lisses de dimension fini, décrits par des équations différentiels avec une entrée dimensionnellement fini, i.e.

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), & i = 1, \dots, k, \\ \frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), \end{cases} \quad (164)$$

où $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée (variable de commande).

Définition 3 *Le problème de synchronisation contrôlé approximatif en ce qui concerne les fonctionnels κ_j , $j = 1, \dots, l$, est de trouver une loi commande u comme une fonction de retour des états x_0, x_1, \dots, x_k , et du temps en assurant qu'il existe un $\epsilon > 0$ et $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in T$ comme*

$$|\kappa_j(\sigma_{\zeta_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\zeta_k} y_k(\cdot), t)| \leq \epsilon, j = 1, \dots, l. \quad (165)$$

Pour synchronisation asymptotique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\kappa_j(\sigma_{\zeta_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\zeta_k} y_k(\cdot), t)) = 0, j = 1, \dots, l. \quad (166)$$

Cette définition sera utilisée pour définir le type de synchronisation obtenu avec les résultats présentés.

VIII.4.2. Équations d'erreur linéaires avec des retards.

Dans (Cahlon y Schmidt, 2006) est présentée la stabilité asymptotique de la solution des équations différentielles linéaires de troisième ordre avec des retards de la forme

$$y^{(3)}(t) = a_1 \ddot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t - \tau) + b_1 \dot{y}(t) + b_2 \dot{y}(t - \tau) + c_1 y(t) + c_2 y(t - \tau) \quad (167)$$

où $\tau > 0$ et $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ sont constants, est présenté.

En définissant l'ensemble de variables $A = \tau a_1; B = \tau^2 b_1; C = \tau^3 c_1; D = \tau a_2; E = \tau^2 b_2, M = \tau^3 c_2$, et pour le cas de retard pur, $A = B = C = 0$, ils proposent un algorithme pour le calcul des coefficients garantissant la stabilité asymptotique de l'équation (167).

VIII.4.3. Synchronisation maître - esclave.

Définition du problème.

Etant donnés deux pendules inverses avec des retards dans le canal de communication, et une trajectoire de référence $C^\infty y_{ref}(t), t \geq 0$, trouver une loi de commande qui synchronise les deux pendules dans une configuration maître - esclave, tel que la différence $e(t)$ entre la sortie $y_2(t)$ et la référence $y_1(t)$ soit asymptotiquement stable, où $y_1(t)$ est la sortie du pendule maître et $y_2(t)$ est la sortie du esclave.

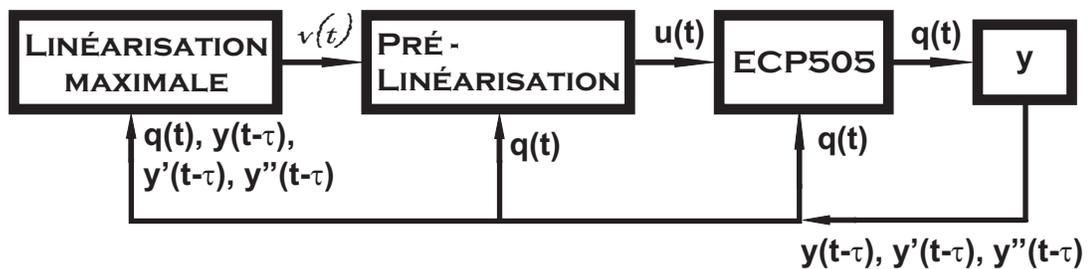


FIGURE 32. Schéma de commande pour le suivi de trajectoire.

Solution causale.

Pour la synchronisation, nous avons besoin d'obtenir une commande locale pour le système maître ; d'abord définissons le signal d'erreur et leurs dérivées comme :

$$\begin{aligned}
 e(t) &= y_1(t) - y_{ref}(t) \\
 \dot{e}(t) &= \dot{y}_1(t) - \dot{y}_{ref}(t) \\
 \ddot{e}(t) &= \ddot{y}_1(t) - \ddot{y}_{ref}(t) \\
 e^{(3)}(t) &= y_1^{(3)}(t) - y_{ref}^{(3)}(t)
 \end{aligned}
 \tag{168}$$

où $y_1(t)$ est la sortie du système, et $y_{ref}(t)$ est la trajectoire de référence. Si nous égalons $y(t) = e(t)$ en (167) avec $A = B = C = 0$ nous pouvons obtenir

$$e^{(3)}(t) + a_2\ddot{e}(t - \tau) + b_2\dot{e}(t - \tau) + c_2e(t - \tau) = 0. \quad (169)$$

En appliquant l'équation (168) en (169) :

$$\begin{aligned} & y_1^{(3)}(t) - y_{ref}^{(3)}(t) + a_2(\ddot{y}_1(t - \tau) - \ddot{y}_{ref}(t - \tau)) + \\ & + b_2(\dot{y}_1(t - \tau) - \dot{y}_{ref}(t - \tau)) + c_2(y_1(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)) = 0 \end{aligned} \quad (170)$$

pour résoudre (170), nous utilisons l'algorithme proposé dans (Cahlon y Schmidt, 2006), pour obtenir un ensemble de coefficients pour que la solution nulle de (170) soit asymptotiquement stable.

Maintenant, égalant $y_1^{(3)}(t) = w$, et de l'équation (160) on obtient

$$\begin{aligned} y_1^{(3)}(t) = w = & (\Psi(q, \dot{q})J(q_2(t)) + \xi(q, \dot{q}))v + \\ & + \Psi(q, \dot{q})(R(q_1, q_2)) + \phi(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (171)$$

où

$$\begin{aligned} w = & -a_2(\ddot{y}_1(t - \tau) - \ddot{y}_{ref}(t - \tau)) - b_2(\dot{y}_1(t - \tau) - \dot{y}_{ref}(t - \tau)) - \\ & - c_2(y_1(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)) + y_{ref}^{(3)}(t). \end{aligned} \quad (172)$$

En résolvant (171) en v

$$v = \frac{w - \Psi(q, \dot{q})(R(q_1, q_2)) - \phi(q, \dot{q})}{\Psi(q, \dot{q})J(q_2(t)) + \xi(q, \dot{q})} \quad (173)$$

nous obtenons la nouvelle entrée de contrôle qui résout le PST pour le système maître. Dans la Figure 33 sont présentés les résultats de simulation pour cette loi de commande en utilisant un retard en temps $\tau = 0.3$ seconde. Si $\tau = 0$ dans l'équation (172), la solution au problème de synchronisation serait non causale, puisque $y_M^{(3)}(t)$ est nécessaire du côté de l'esclave, eu

égard au retard de communication, seul $y_M^{(3)}$ est disponible à l'instant $(t - \tau)$. La considération d'une équation d'erreur avec retard permet de contourner ce problème.

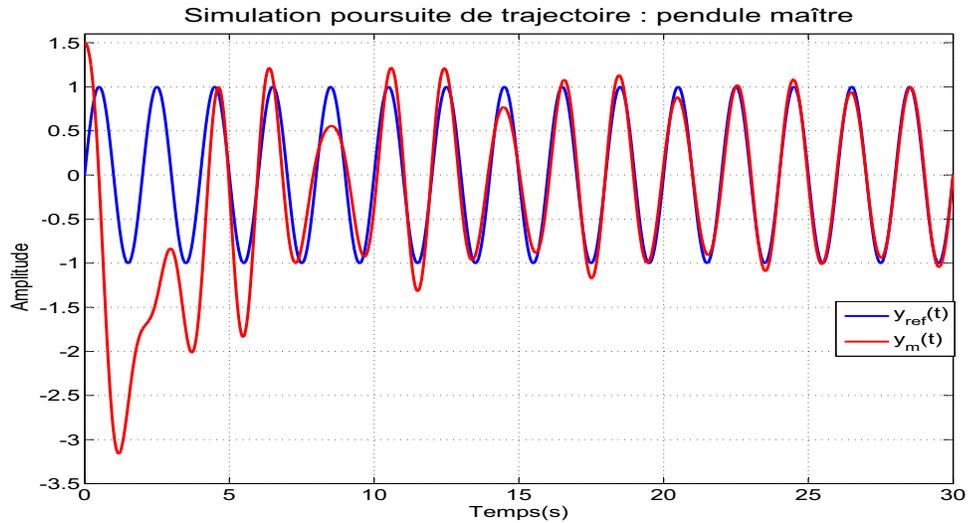


FIGURE 33. Poursuite de trajectoire pour un signal sinusoïdal.

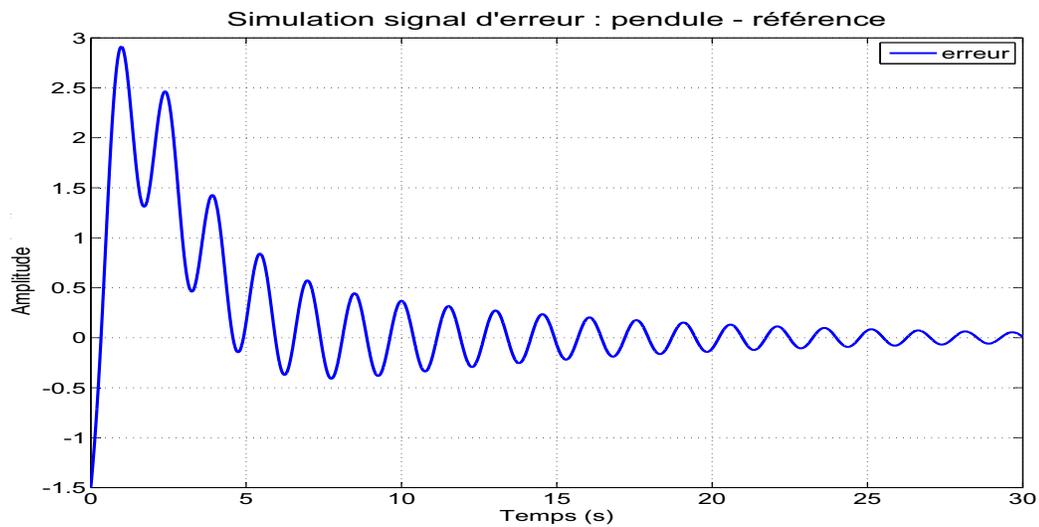


FIGURE 34. Signal d'erreur pour le système maître.

Pour la synchronisation, nous utilisons la même méthode qui a été proposée pour la commande locale du système maître, dans ce cas le signal d'erreur est donné par

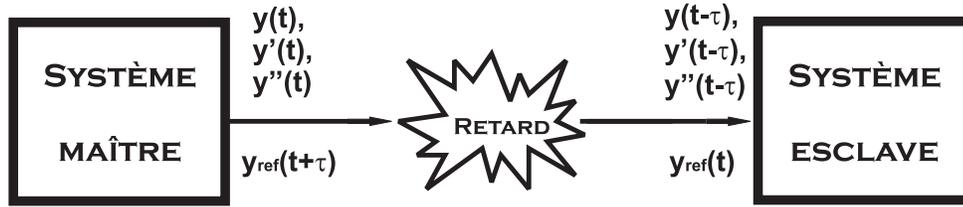


FIGURE 35. Schéma de synchronisation.

$$\begin{aligned}
 e(t) &= y_2(t) - y_1(t) \\
 \dot{e}(t) &= \dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t) \\
 \ddot{e}(t) &= \ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_1(t) \\
 e^{(3)}(t) &= y_2^{(3)}(t) - y_1^{(3)}(t)
 \end{aligned} \tag{174}$$

où $y_2(t)$ est la sortie du système esclave, et $y_1(t)$ est le signal de référence, qui est la sortie du système maître. Nous égalons $y(t) = e(t)$ en (167) avec $A = B = C = 0$ et $\tau = 0.3$ et par conséquent on obtient :

$$e^{(3)}(t) + a_2\ddot{e}(t - \tau) + b_2\dot{e}(t - \tau) + c_2e(t - \tau) = 0. \tag{175}$$

En appliquant l'équation (174) en (175) :

$$\begin{aligned}
 &y_2^{(3)}(t) - y_1^{(3)}(t) + a_2(\ddot{y}_2(t - \tau) - \ddot{y}_1(t - \tau)) + \\
 &+ b_2(\dot{y}_2(t - \tau) - \dot{y}_1(t - \tau)) + c_2(y_2(t - \tau) - y_1(t - \tau)) = 0.
 \end{aligned} \tag{176}$$

A nouveau, on applique l'algorithme proposé dans (Cahlon y Schmidt, 2006), et on obtient un ensemble de coefficients pour que la solution de (176) soit asymptotiquement stable. Dans ce cas, nous avons besoin de la valeur du signal $y_1^{(3)}(t)$, qui est la troisième dérivée du signal de référence, mais en raison du retard dans le canal de communications, il n'est pas possible d'obtenir $y_1^{(3)}(t)$ de manière directe depuis le système maître. Nous pouvons

reconstruire ce terme à partir des équations (171) et (172).

$$y_1^{(3)}(t) = -a_2(\ddot{y}_1(t - \tau) - \ddot{y}_{ref}(t - \tau)) - b_2(\dot{y}_1(t - \tau) - \dot{y}_{ref}(t - \tau)) - c_2(y_1(t - \tau) - y_{ref}(t - \tau)) + y_{ref}^{(3)}(t). \quad (177)$$

Dans cette équation, apparaît aussi le terme $y_{ref}^{(3)}(t)$. Dans ce cas, il n'y a pas de problème avec le fait que la troisième dérivée de la référence est requise sans retard. Il est possible de connaître la fonction pour $-\infty < t < \infty$, donc il est possible d'obtenir la référence dans toute période de temps, si le retard est constant ; il est uniquement nécessaire de changer la phase du signal de référence localement pour adapter le retard.

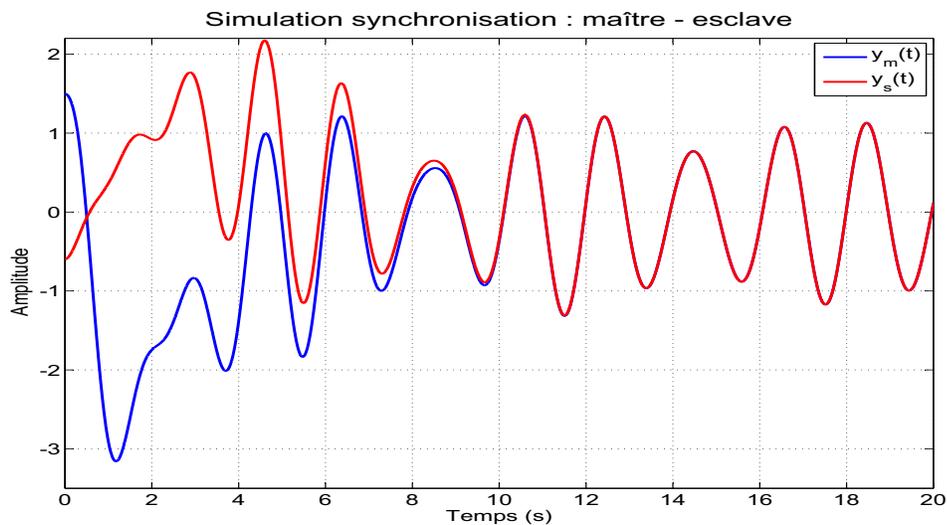


FIGURE 36. Simulation de synchronisation.

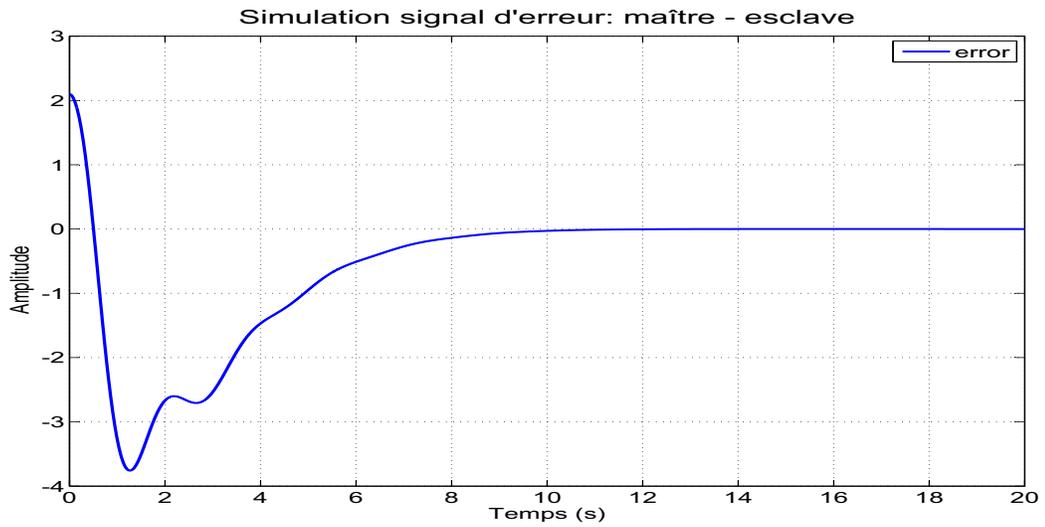


FIGURE 37. Signal d'erreur synchronisation.

VIII.5. Mise en oeuvre et résultats expérimentaux.

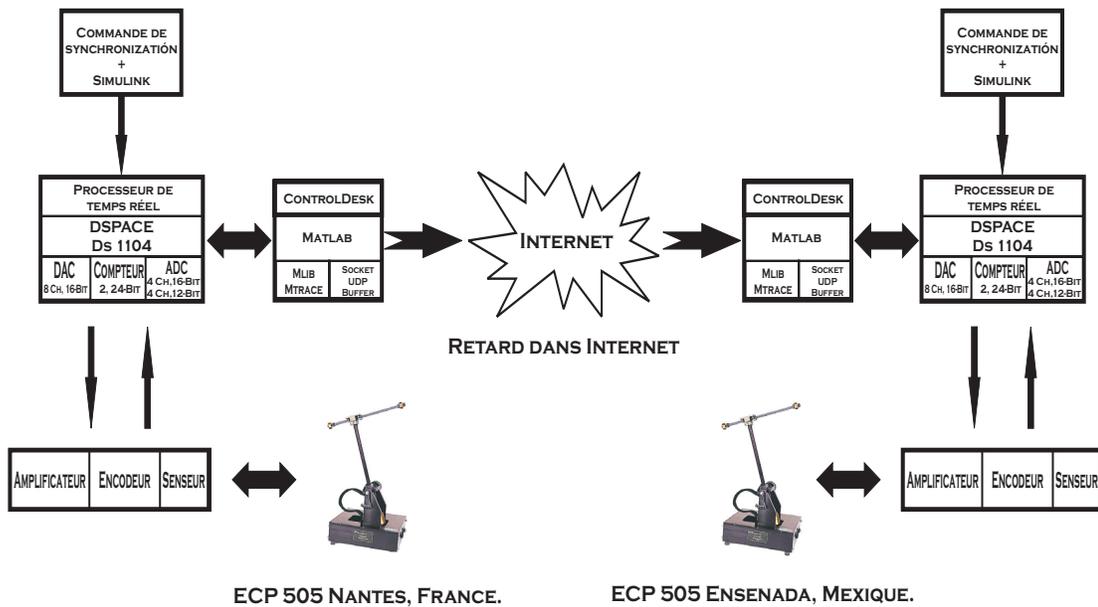


FIGURE 38. Schéma de configuration.

Pour la mise en oeuvre nous avons choisi le protocole de communication UDP, puisque si l'on veut avoir un système en temps réel, il est nécessaire d'avoir l'information avec le plus petit retard possible. Le schéma de configuration qui est utilisé est dans la Figure 38.

Dans la suite, on montre les résultats obtenus dans le réseau local de l'IRCCyN, les pendules maître et l'esclave sont des pendules virtuels, le maître est mis en oeuvre virtuellement avec Matlab, et l'esclave dans la carte dSPACE.

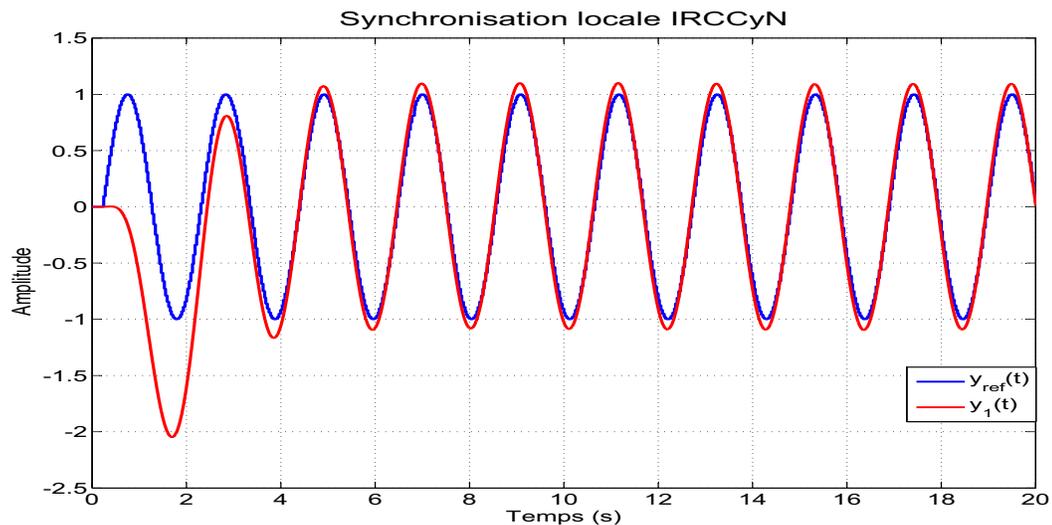


FIGURE 39. Réponse locale de la configuration maître - esclave.

Dans la Figure 39, on peut observer la réponse des pendules avec des conditions initiales égales. Il peut être observé comme la sortie de l'esclave (y_1) est synchronisée avec le signal de référence donné par le maître (y_{ref}).

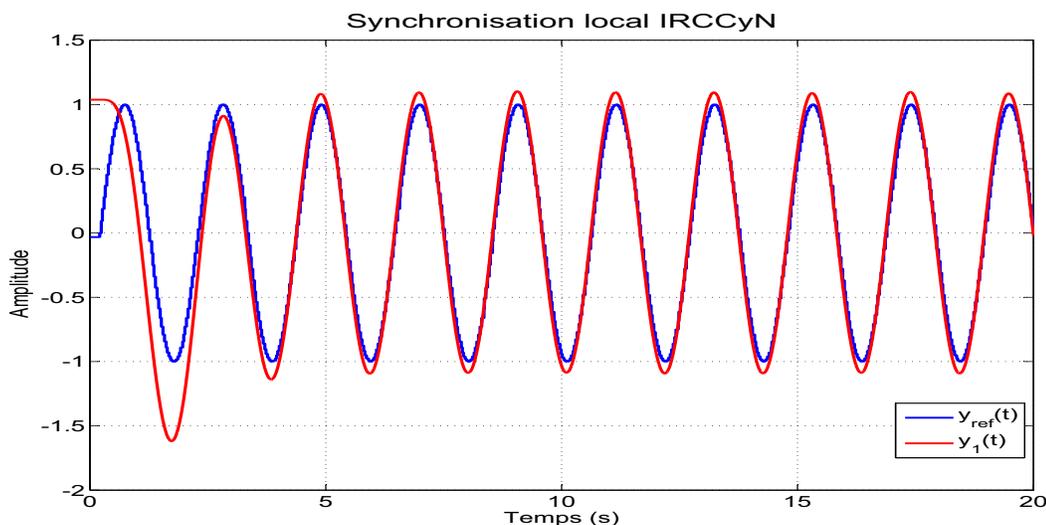


FIGURE 40. Réponse maître - esclave avec des conditions initiales différentes.

Dans la Figure 40 on montre la réponse avec des conditions initiales différentes, on peut observer comme le esclave (y_1) est synchronisée avec le maître (y_{ref}).

On peut également observer une petite différence entre la sortie du maître et celle de l'esclave, cette différence est due à des erreurs de calcul, ces erreurs sont provoquées par la différence entre la période d'échantillonnage du système de commande et de celui de la référence. Cette erreur peut être réduite avec la conception d'un logiciel d'application qui effectue le calcul numérique du signal entre des données consécutives reçues.

Pour réduire l'erreur mentionnée précédemment, il a été nécessaire d'utiliser un tampon, qui reçoit les données de la connexion UDP, détecte s'il y a des erreurs dans les données reçues et reconstruit celles qui sont perdues avec une interpolation. Après la vérification, le tampon envoie les données reçues chaque 30 millisecondes. vers le schéma de commande.

Ensuite, on montre les résultats de la synchronisation : maître - esclave, obtenus entre les deux laboratoires, IRCCyN et CICESE. Le pendule de maître est simulé à l'IRCCyN, tandis que l'esclave est simulé au CICESE. On a utilisé la même configuration que dans les essais locaux.

La Figure 41 montre la réponse du système avec un retard de 0.3 secondes, qui correspond à la borne du retard réel des communications Internet entre Nantes et Ensenada, les conditions initiales sont différentes et on observa la convergence de la sortie y vers le signal de référence y_{ref} .

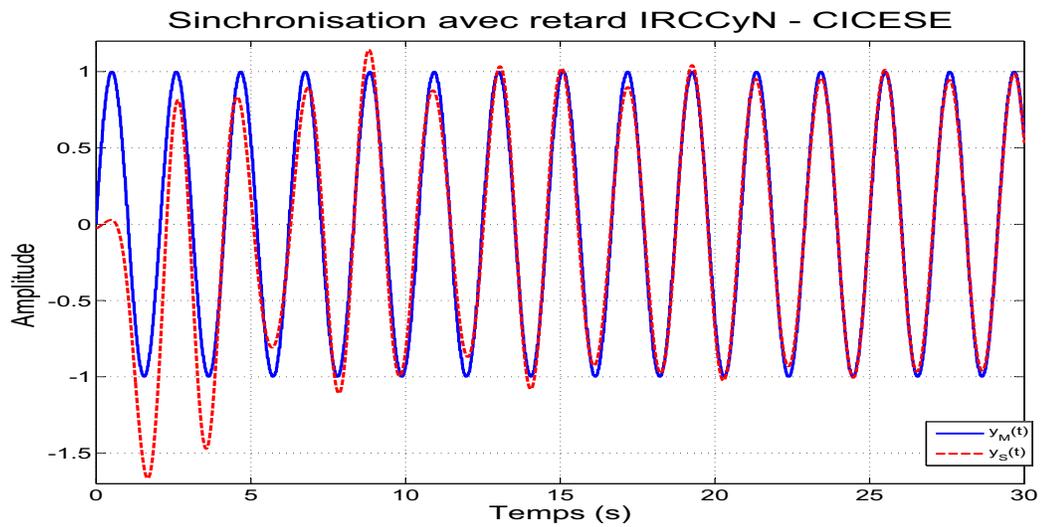


FIGURE 41. Réponse maître - esclave pendule virtuel - pendule virtuel.

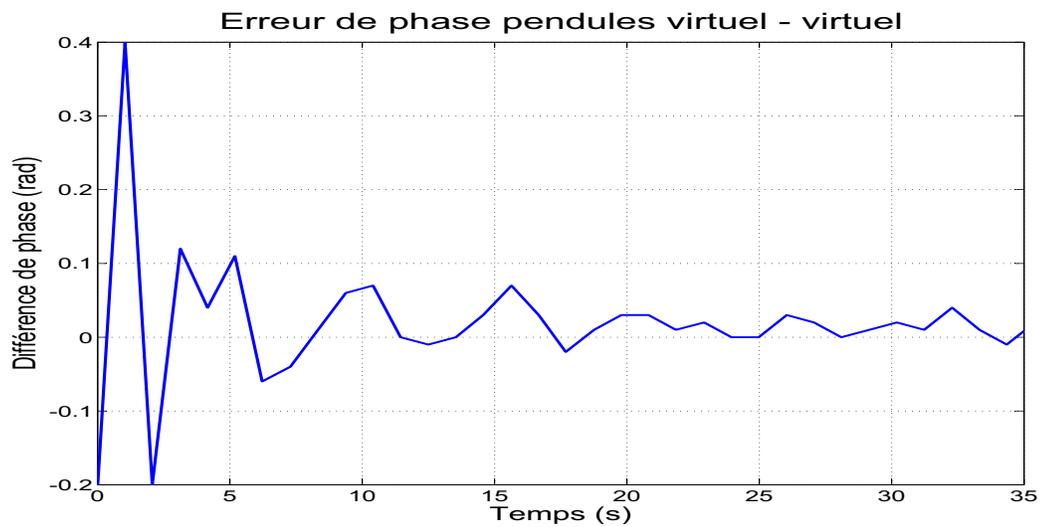


FIGURE 42. Signal d'erreur de phase entre deux pendules virtuels.

Pour montrer la perte de données, chaque donnée envoyée par le maître est numérotée, et quand l'esclave a reçu la donnée, il la compare avec celle qu'il a reçu précédemment, il obtient la différence et la garde dans une variable. Dans la Figure 43, sont représentées les différences entre les données reçues, et on peut observer qu'il existe perte de données mais elles sont petites.

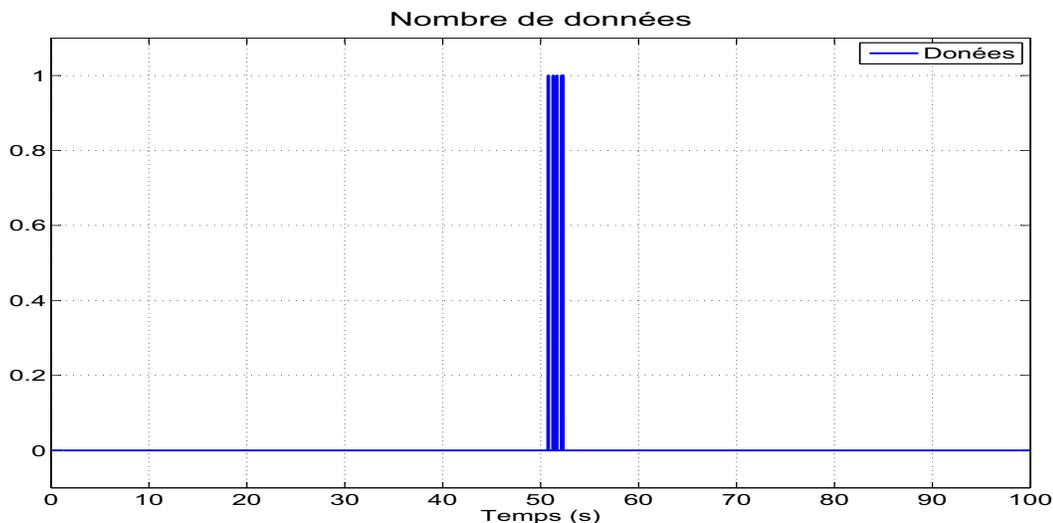


FIGURE 43. *Différences entre les données reçues.*

Pour la mise en oeuvre de la synchronisation maître - esclave avec un pendule physique comme maître, les résultats obtenus n'ont pas été encore satisfaisants, comme lui montre la Figure 43. Dans ce cas on ne peut pas effectuer la synchronisation avec un retard 0.3 s, en utilisant le pendule réel de l'IRCCyN comme maître. Ceci peut être provoqué d'une part par la période d'échantillonnage comme il a été précédemment mentionné, mais aussi parce que les signaux obtenus du pendule réel, ne sont pas aussi précises que dans le cas du pendule virtuel.

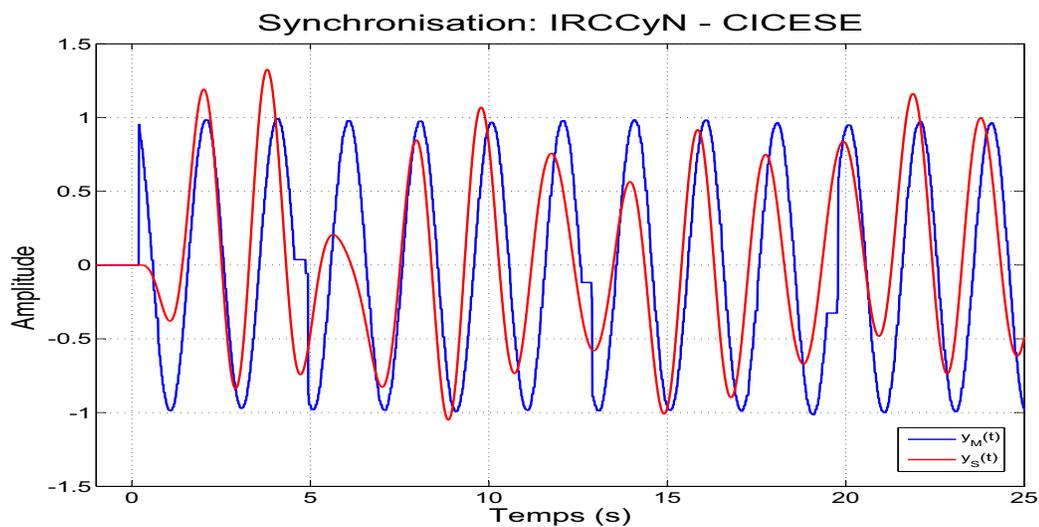


FIGURE 44. Synchronisation avec un pendule réel (IRCCyN).

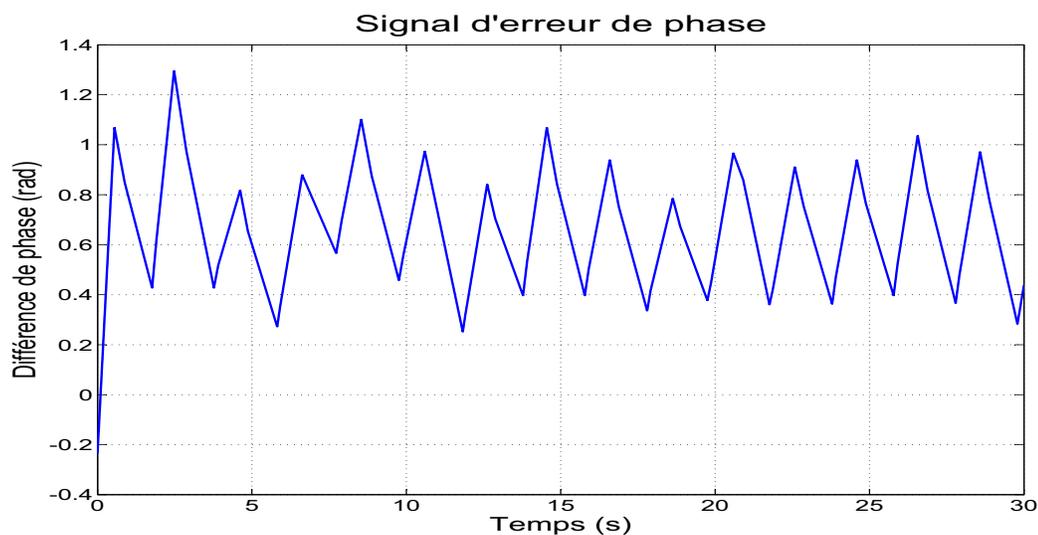


FIGURE 45. Signal d'erreur de phase entre pendules réel - virtuel.

On a effectué des essais en utilisant le pendule réel du CICESE comme maître avec retard, les résultats obtenus ont été meilleurs que dans le cas précédent, comme le montre les figures 46 et 47, pour la synchronisation nous avons obtenu

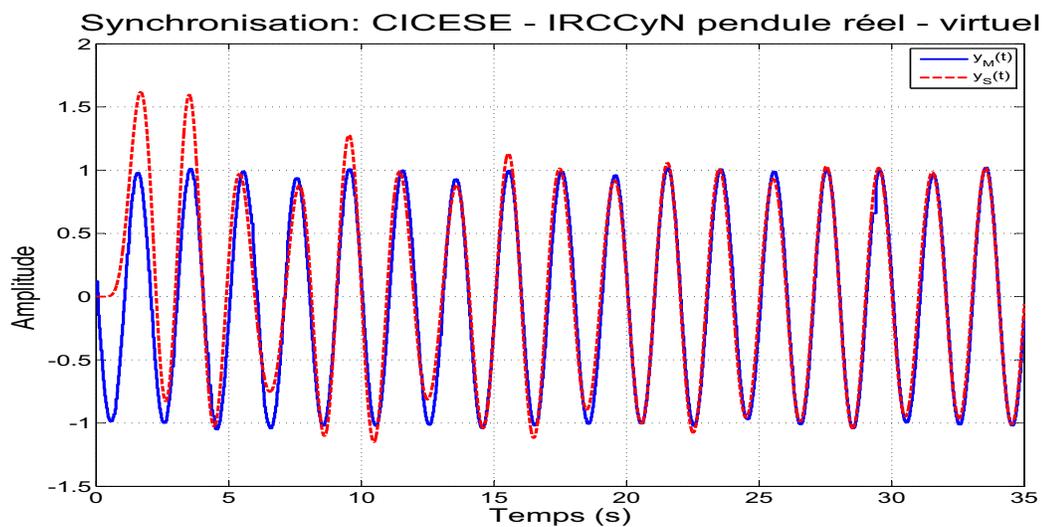


FIGURE 46. Synchronisation avec un pendule réel (CICESE).

et le signal d'erreur de phase

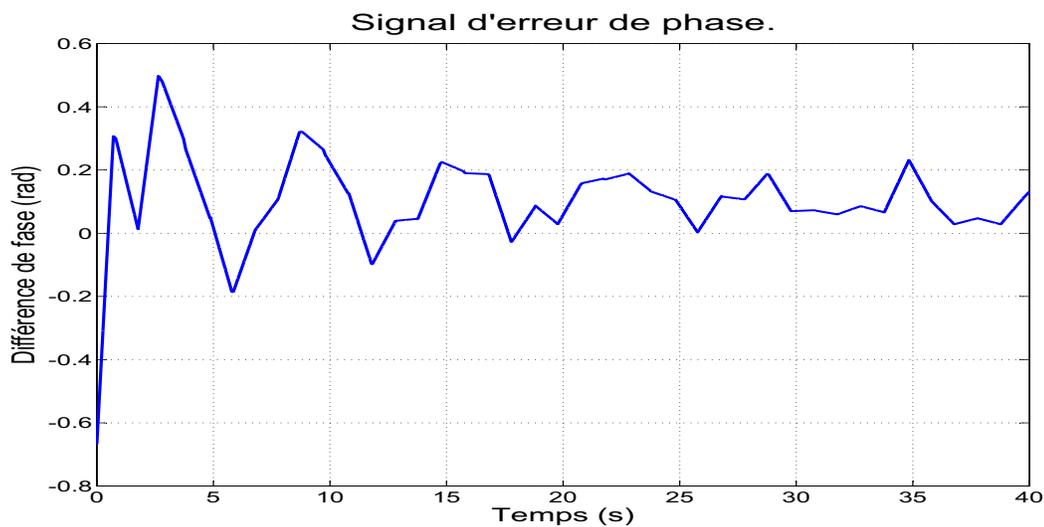


FIGURE 47. Signal d'erreur de phase entre pendule réel et virtuel.

Dans le cas de synchronisation en utilisant les deux pendules réels, les résultats obtenus sont montrés dans la Figure 48.

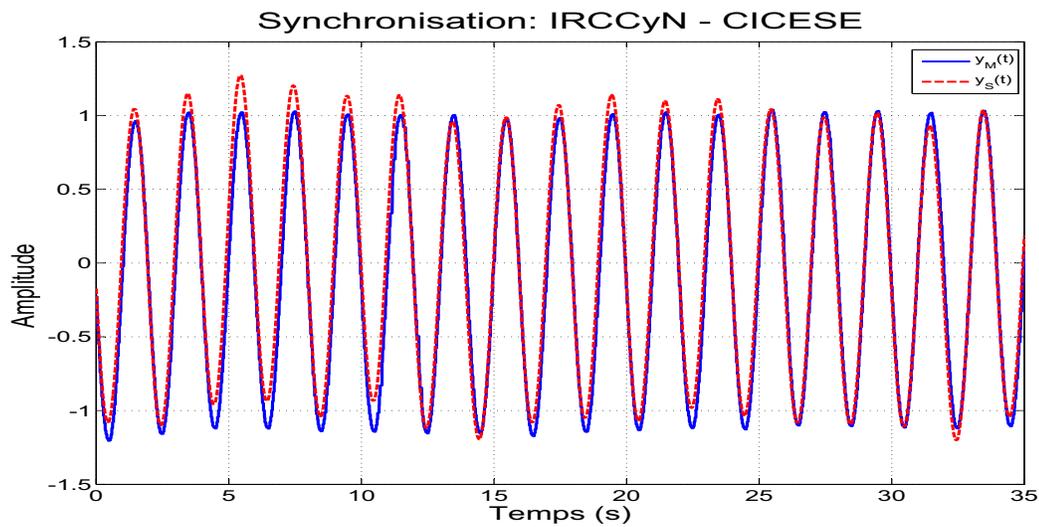


FIGURE 48. *Synchronisation avec deux pendules réels.*

Nous pouvons observer dans la Figure 48, que contrairement aux résultats obtenus avec un pendule réel et un virtuel, quand on utilise les deux pendules réels on a des erreurs tant en amplitude comme en phase (Figure 49), dues aux défaillances mécaniques importantes constatées sur l'un des deux pendules. Malgré cela, il peut être observé comme la synchronisation des deux signaux est achevée de façon approchée. En prenant cela en compte, nous considérons que les résultats sont satisfaisants, même s'ils ne sont pas optimaux.

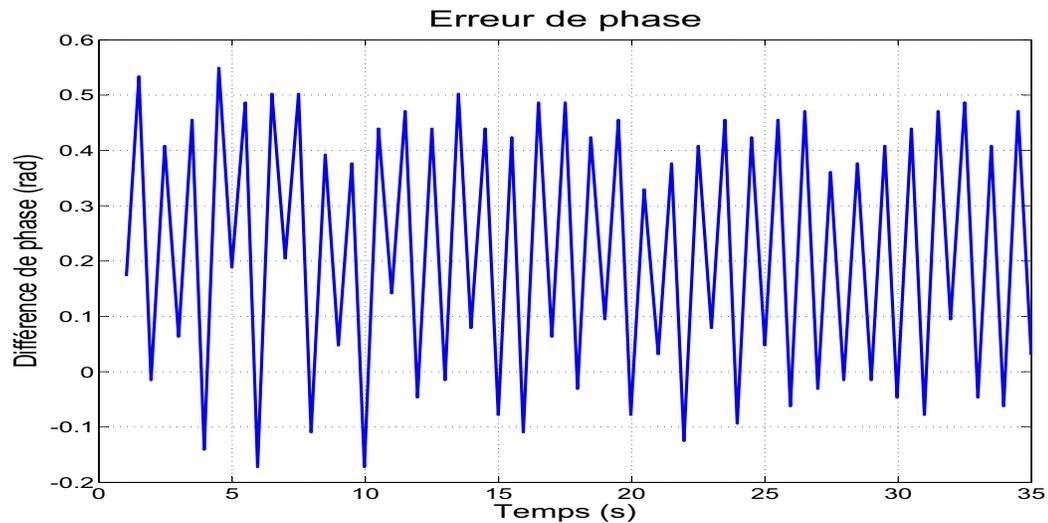


FIGURE 49. *Signal d'erreur de phase entre deux pendules réels.*

VIII.6. Conclusions.

L'analyse de systèmes non linéaires avec des retards est complexe, dû à leur nature à dimension infinie. On a montré que le PST, pour systèmes non linéaires avec des retards multi entrée multi sortie, peut être résolu de plusieurs manières. On a obtenu des conditions suffisantes, totalement constructives, pour avoir des solutions causales avec ou sans perte maximale d'observabilité. Les solutions conduisent à des équations linéaires d'erreur sans retard, qui peuvent être autonomes ou non autonomes. Ces conditions sont plus faibles que celles disponibles dans la littérature actuelle, et sont innovatrices tant dans le cas de systèmes à retard linéaires et non linéaires. Parmi les problèmes qui restent ouverts, ces contributions suggèrent les sujets suivants pour une recherche additionnelle au PST :

- Solution avec des équations d'erreur linéaires, stables, avec des retards.
- Chercher des conditions nécessaires plus faibles voire nécessaires et suffisantes.

Lors de l'expérimentation, on a constaté des différences entre la simulation et les expériences. Celles-ci sont dues au fait qu'en réalité le modèle mathématique est idéal et il n'est

pas souvent possible de mesurer avec l'exactitude requise les paramètres du système, ainsi que les perturbations externes qui affectent le système.

L'existence d'un retard n'affecte pas toujours négativement le comportement d'un système de commande. Des retards en temps dans le signal de commande peuvent être utiles pour la synchronisation d'un système, et la poursuite de trajectoire peut être obtenue tandis que l'erreur entre le système et la signal de référence est asymptotiquement stable.

Quand on a des retards dans le système de communication, on peut maintenir la causalité et la stabilité de la loi de synchronisation comme il a été déjà démontré. Ces schémas de commande garantissent la stabilité des systèmes synchronisés pour presque tout retard constant dans le canal de communication. Il est nécessaire de souligner que la méthode proposée permet de prouver la stabilité du système synchronisé pour un retard constant arbitraire dans la communication, et dans un certain sens, la stabilité est uniforme en ce qui concerne le retard.

Étant donné la popularité croissante de la télé-opération par Internet, il existe un grand intérêt pour développer des schémas de commande que peuvent travailler avec des retards variables dans la communication. C'est dans cette ligne que s'inscrivent nos travaux.

Malgré le grand problème qui représente la transmission de données à travers Internet, on a pu obtenir la synchronisation des deux pendules avec des conditions différentes. Bien que ces essais aient été satisfaisants, la plate-forme de connexion présente encore quelques erreurs.

Il est important de remarquer qu'on pourrait encore améliorer les algorithmes d'envoi et de réception de données en incluant par exemple la correction d'erreurs en envoi. D'autres améliorations possibles qui pourraient être faites dans le futur, avec le retard qu'implique le temps de traitement de chaque échantillon, est d'envoyer davantage d'échantillons par paquet dans chaque itération, afin d'avoir une plus grande quantité de données disponibles du côté de l'esclave.

Il est aussi considéré de traiter les données hors ligne, pour faire une meilleure interpolation (extrapolation). Pour inclure la plus grande quantité de cas possibles d'erreur, on aurait besoin d'une recherche plus approfondie pour déterminer chacun des manques et de sa possible solution. Bien que la réponse du système ne soit pas optimale, nous considérons qu'elle est satisfaisante puisque les deux systèmes convergent la même trajectoire en un temps raisonnable.

Apéndice A

Programas realizados en Matlab

Todos los programas presentados fueron hechos en código Matlab, el primer programa que se presenta es con el cual fueron enviados los datos desde el sistema maestro (Servidor).

```
% Programa de conexion udp
% servidor
clear all;
clc;
global t h data
k=1;
%ip='130.66.77.49';           %direccion ip de la pc irccyn
ip='158.97.22.163';         %direccion ip de la pc cicese
mlib('SelectBoard','DS1104'); %seleccionamos el modelo de la
                               %tarjeta dspace
variables = {'Model Root/y';'Model Root/yp';'Model Root/...
            y2p';'Model Root/y3p'};
%indicamos la direccion fisica de las variables que se van
%a leer
```

```

[var1 var2 var3 var4]=mlib('GetTrcVar',variables);
%trazamos las variables y las almacenamos
escribe='write'; lee='Read'; datos='data';
host=ip; %indica la direccion IP del cliente
port='4000'; %indica el numero de puerto que se
%va a utilizar
udp=pnet('udpsocket',4000); %crear un socket UDP en el
%puerto 4000
h=30; %Retardo de ejecucion del timer en
%milisegundos
while(t<100) %indicamos el tiempo de conexion
%Lee los datos de la dspace
send_var(i,:) = [mlib(lee,var1) mlib(lee,var2) ...
mlib(lee,var3) mlib(lee,var4) k];
pause(0.003);
data=send_var;
if udp~=-1,
try
pnet(udp,'write',data); % Escribe al buffer de escritura
pnet(udp,'writepacket',host,port); % manda lo que está en
% el buffer como
% paquete UDP
end
end
t=t+(h/1000); %incrementamos la variable de tiempo
pause(h/1000) %Pausa en la ejecucion del programa

```

```

    %para que se envíen los datos
end
pnet(udp,'close');          %cierra la conexión UDP

```

EL siguiente programa es el encargado de la recepción de datos (cliente) y el envío a la tarjeta dSPACE.

```

%Programa cliente
clc;
dato1 = 0;
dato2 = 0;
datax = [0; 0; 0; 0;0];
data3 = [0; 0; 0; 0;0];
% Selección de la tarjeta dSPACE
mlib('SelectBoard','DS1104');
% Identifica las variables compartidas en el DSP
variables = {'Model Root/ref/Value'; 'Model Root/ref1/...
            Value';'Model Root/ref2/Value';...
            'Model Root/ref3/Value'};
[var1 var2 var3 var4] = mlib('GetTrcVar',variables);
% Variables auxiliares para leer y escribir
escribe='write'; lee='read'; datos='data';
% Escribe las variables recibidas al DSP
lport='4000'; %utiliza el puerto 4000
disp 'esperando la recepción de datos.';
udp=pnet('udpsocket',lport); % abre el socket UDP en el
                                % puerto lport.

```

```

try
    while 1,
        len=pnet(udp,'readpacket'); % Espera/lee el paquete udp
        %en el bufer de lectura.
        if len>0,
            % si el paquete es mas grande que 1 byte entonces lee
            % un maximo de 1000 doubles en el orden de byte.
            data=pnet(udp,'read',1000,'double'); %lee un arreglo
            % de elementos desde la conexion udp
            dato1 = data(5);
            %interpolamos el dato faltante, al menos uno si son
            %varios.
            if (dato1>(dato2+1));
                for(i=dato2+1:dato1)
                    data3= (data+datax)/2;
                    %escribimos el dato interpolado
                    mlib(escribe,var1,datos,data3(1));
                    mlib(escribe,var2,datos,data3(2));
                    mlib(escribe,var3,datos,data3(3));
                    mlib(escribe,var4,datos,data3(4));
                end
            %pause(0.002); %esperamos 2 milisegundos para que la tarjeta
            %lea las variables
            end
            %escribimos el dato que se recibio
            mlib(escribe,var1,datos,data(1));

```

```
mllib(escrrobe,var2,datos,data(2));
mllib(escrrobe,var3,datos,data(3));
mllib(escrrobe,var4,datos,data(4));
dato2 = dato1; %guardamos el numero de dato actual en la
               %variable dato2
               %guardamos los datos actuales en el vector
               %datax

datax = data;
    end
    end
end
pnet(udp,'close'); %cierra la conexion udp
return;
```

Bibliografía

- Alvarez-Gallegos, J., Rodriguez, D. de C., Spong, M. W., (1997) A stable control scheme for teleoperators with time delay, *International Journal of Robotics and Automation*, 12(3): 73-79.
- Anderson R.J. and Spong M. W., (1989), Bilateral control of Teleoperators with time delay, *IEEE transactions on Automatic Control*, 34(5): 494-501.
- Arcara, P., Melchiorri, C., (2002), Control schemes for teleoperation with time delay: A comparative study. *Robotics and Autonomous Systems* , 38(1): 49-64.
- Atassi, A. N., y Khalil, H. K., (2000), Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs. *Systems and Control Letters*, 39: 183 - 191.
- Beretta E., Kolmanovskii V., Shaikhet L., (1998), Stability of Epidemic Model with Time Delays Influenced by Stochastic Perturbations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 45(3-4): 269-277.
- Blekhman, I.I., Fradkov A.L., Tomchina O.P. y Bogdanov, D.E.,(2002) “Self - synchronization and controlled synchronization: general definition and example design”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 58: 367-384.
- Cahlon B., Schmidt D., (2006) Stability criteria for certain third-order delay differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 188: 319-335.
- Canudas de Wit C., Olsson H., Åström K. J., y Lischinsky P., (1995) A New Model for Control of Systems with Friction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3): 419-425.
- Chopra N., Spong M. W., Ortega R. y Barabanov N., (2006) On tracking performance in bilateral teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 22(4): 861-866.
- Conte G. y Perdon A.M., (2000), Invertibility and inversion for systems over rings and applications to delay-differential systems. *Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control*, 3: 2817-2822, Sydney, Australia.

- Conte G., Moog C. H. and Perdon A.M., (1999), Nonlinear Control Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 242, Springer, London.
- Conte G., Perdon A.M. y Moog C.H., (2007), Inversion and tracking problem for time delay linear systems. *In applications of time delay linear systems*, Springer Verlag, 2da. Ed., 352: 267-284.
- Dabroom, A., y Khalil, H. K., (1997), Numerical differentiation using high-gain observers. *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*: 4790-4795, San Diego, CA, USA.
- Dahl, P., (1968), A solid friction model. Technical Report TOR-0158(3107-18)-1, The Aerospace Corporation, El Segundo, CA.
- Dugard L., Verriest E.I., (1998), Stability and Control of Time-Delay Systems, *Springer*, Berlin.
- Eker J., y Åström K. J., (1996), A Nonlinear Observer for the Inverted Pendulum, *8th IEEE Conference on Control Application*: 332-337.
- Estrada-García H.J., Moog C.H. y Márquez-Martínez L.A., (2006), Tracking problem for nonlinear time delay multi-input multi-output systems. *45th IEEE Conference on Decision and Control*: 1812-1816, San Diego, CA.
- Estrada-García H.J., Peñaloza-Mejía O., Moog C.H. y Márquez-Martínez L.A., (2008), Trajectory Tracking Problem: Causal Solutions for Nonlinear Time-Delay Systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, por aparecer.
- Estrada-García H. J., Márquez-Martínez L. A., Moog C., (2007), Master - Slave Synchronization for Two Inverted Pendulums With Communication Time-Delay, *IFAC WORKSHOP TDS(Time Delay Systems)*, Nantes, France.
- Germani A. y Manes C., (2001), On the existence of the linearizing state-feedback for nonlinear delay systems. *In Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 5: 4628-4629.
- Gorecki H., Fuksa S., Grabowski P., Korytowski A., (1989), Analysis and Synthesis of Time Delay Systems, *Wiley*, New York.
- Grizzle J. W., Moog C., Chevallereau C., (2005), Nonlinear Control of Mechanical Systems With an Unactuated Cyclic Variable, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5): 559 - 576.
- Gu K., Kharitonov V.L., Chen J., (2003), Stability of Time-Delay Systems, first ed., *Birkhäuser*, Boston, USA.
- Hale J.H. y Verduyn S.M., (1993), Introduction to functional differential equations. *Springer-Verlag*, New York.

- Isidori A., (1989), *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 2nd ed. Berlin, Germany.
- Ivanescu D., Snyder A.F., Dion J.M., Dugard L., Georges D., Hadjsaid N., (2000), Robust Stabilizing Controller for an Interconnected Power System: A Time Delay Approach, *Fourteenth International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems*, June 19 - 23, Perpignan, France.
- Isidori A. y Ruberti A., (1984), *On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear control systems*, *System Control Letters*, 4: 17-22.
- Jankovic M., (2003), *Control of nonlinear systems with time delay*, Proc. of the 42nd IEEE Conf. on Decision and Control, 5: 4545 - 4550, Maui, USA.
- Khalil H. K., (2002) *Nonlinear Systems*, 3ra. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Leung, G. M., Francis, B. A., Apkarian, J., (1995) *Bilateral controller for teleoperators with time delay via mu-synthesis*. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11: 105-116.
- Levant, A., (1998), *Robust exact differentiation via sliding mode technique*. *Automatica*, 34: 379-384.
- Levant, A., (2001), *Higher order sliding modes and arbitrary order exact robust differentiation*, *Proceedings of the European Control Conference*: 996-1001.
- Levant A., (2003), *Higher-order sliding modes, differentiation and output - feedback control*, *Int. Journal of Control*, Taylor & Francis, 76: 924 - 941.
- McCann, R.A., Islam, M.S., Husain, I., (2001), *Application of a sliding-mode observer for position and speed estimation in switched reluctance motor drives*, *IEEE Transactions on Industry Applications*, 37: 51 - 58.
- Márquez-Martínez L.A. y Moog C.H., (1999), *New results on the analysis and control of nonlinear time-delay systems*, *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 4: 4240 - 4244, Phoenix AZ.
- Márquez-Martínez L.A. y Moog C.H., (2001), *Trajectory tracking control for nonlinear time-delay systems*. *Kybernetika*, 37(4): 370-380.
- Mazenc F. y Niculescu S.I., (2001), *Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems*. *Systems and control letters*, 42: 245-251.
- Mboup M., Join C., Fliess M., (2007), *A Revised Look at Numerical Differentiation with an Application to Nonlinear Feedback Control*, *Mediterranean Conference on Control and Automation*, Athens, Greece.

- Moog C.H., Castro-Linares R., Velasco-Villa M., y Márquez-Martínez L.A., (2000), The Disturbance Decoupling Problem for Time-Delay Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(2).
- Niculescu S.I. y Gu K. (Eds). (2004) Advances in time-delay systems. *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, Springer.
- Niemeyer, G., Slotine, J.-J., (2004) Telem Manipulation with time delays, *International Journal of Robotics Research*, 23(9): 873-890.
- Nise N.S., (2000) Control Systems Engineering, 3ra. ed., Wiley, New York.
- Olsson H., Åström K.J., Canudas de Wit C., Gäfvert M. y Lischinsky P., (1998) Friction Models and Friction Compensation, *European Journal of Control*, 4: 176 - 195.
- Orlov Y., Belkoura L., Richard J.P. y Dambrine M., (2003), Adaptive identification of linear time-delay systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(9): 857-872.
- Peñaloza-Mejía O., Márquez-Martínez L.A., Álvarez-Gallegos J., (2006), Plataforma experimental para el control a distancia de mecanismos sobre redes de comunicación. *Congreso Nacional de Control Automático*, AMCA.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M. y Kurths J. (2001), Synchronization. A universal Concept in Nonlinear Sciences, *Cambridge University Press*.
- Popescu D., Rasvan V. y Stefan R., (2004), Applications of stability criteria to time-delay systems. *Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 18: 01-20.
- Richard, J. P. (2003), Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10): 1667-1694.
- Rodríguez Angeles Alejandro. 2002. Sincronization of mechanical systems. Tesis doctoral, Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands. xx pp.
- Rosas Almeida D. I., Alvarez J., Fridman L., (2007), Robust Observation and Identification of nDOF Lagrangian Systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(9): 842-861.
- Scholtz E., Craig I.K. y Pistorius P.C., (2000), Modelling for control of a Steckel hot rolling mill, *ISIJ International*, 40(10): 1003-1012.
- Seuret A., (2006), Commande et observation des systèmes à retards variables: théorie et applications, Tesis doctoral, École Centrale de Lille, Lille, Francia.
- Spong, M. W., (1994), "Partial Feedback Linearization of Underactuated Mechanical Systems", *IROS'94*, Munich, Germany: 314-321.

- Stilwell D. y Bay J., (1993), Toward the development of a material transport system using swarms of ant-like robots, *In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, GA.: 766 - 771.
- Tchangani A. P., Dambrine M., Richard J. P., Kolmanovskii V. B., (1998) Stability of nonlinear differential equations with distributed delay, *Nonlinear Analysis*, Pergamon, 34(7): 1081-1095.
- Tournes C. y Shtessel Y., (1996), Aircraft Control Using Sliding Mode Control, Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, San Diego, CA., July 29-31, AIAA paper.
- Weidong Z, Xiaoming X.(1999), Simple predictor for processes with time delay, *Proceedings of the American Control Conference*,2(2): 822 - 826.
- Witrant E., (2005), Stabilisation des systèmes commandes par réseaux, Tesis doctoral, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, Francia.
- Xia X., Márquez-Martínez L.A., Zagalak P. y Moog C.H., (2002), Analysis of nonlinear time-delay systems using modules over non-commutative rings. *Automatica*, 38: 1549-1555.
- Xiong Yi, Saif, M., (2001) Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12): 2012-2017.
- Zhu, W.-H., Salcudean, S. E., (2000) Stability guaranteed teleoperation: An adaptive motion/force control approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-45(11): 1951-1969.
- Zhuang, Xu, Rahman, M.F., (2003), An extended Kalman filter observer for the direct torque controlled interior permanent magnet synchronous motor drive, *Fifth International Conference on Power Electronics and Drive Systems*, 1: 686-691.
- Hora exacta y el UTC(CNM) <http://www.cenam.mx/HoraExacta.asp>, 2007.