

TESIS DEFENDIDA POR

Raúl Santiesteban Cos

Y aprobada por el siguiente comité:

Dr. Yuri Orlov Kuchina

Director del Comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Miembro del Comité

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Miembro del Comité

Dr. Leonid Fridman

Miembro del Comité

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Miembro del Comité

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

*Coordinador del Programa de Posgrado
en Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. David Covarrubias Rosales

*Director de Estudios
de Posgrado*

24 de Octubre de 2008



CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA

POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

Control de osciladores conmutados con fricción de Coulomb

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR

Presenta:

Raúl Santiesteban Cos

Ensenada, Baja California, México. Octubre de 2008.

RESUMEN de la tesis de **Raúl Santiesteban Cos**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California. Octubre de 2008.

Control de osciladores conmutados con fricción de Coulomb

Resumen aprobado por:

Dr. Yuri Orlov Kuchina

Director de Tesis

En este trabajo se desarrollan algoritmos de control para problemas de control como: regulación, estabilización orbital y retroalimentación por posición, para osciladores no lineales. Los osciladores que se utilizan como aplicaciones de prueba, se refieren a los sistemas mecánicos: el péndulo simple, el sistema masa-resorte y el sistema carro-péndulo, los cuales son afectados por el fenómeno de fricción de Coulomb. Para cumplir este objetivo, se utilizan técnicas de control basadas en modos deslizantes, así como técnicas de control basadas en impulsos, las cuales muestran ser robustas ante la fricción y perturbaciones externas.

Palabras clave: Control en modos deslizantes, sistemas mecánicos con fricción de Coulomb, control impulsivo.

ABSTRACT of the thesis presented by **Raúl Santiesteban Cos**, as a partial requirement to obtain the DOCTOR degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS with specialization in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California. October 2008.

Control of switched oscillators with Coulomb friction

Abstract approved by:

Dr. Yuri Orlov Kuchina

Thesis director

In this work, algorithms for control problems like: regulation, orbital stabilization and position feedback for three nonlinear oscillators, are proposed. The nonlinear oscillators are related to the mechanical systems: one-link pendulum system, spring-mass system and the subactuated cart-pendulum system, besides the Coulomb friction and external perturbations are considered in the dynamics of this three testbeds. For this purpose, we use sliding mode and impulsive based algorithms, so the closed-loop system is robust against friction phenomena and external perturbations.

Keywords: Sliding mode control, mechanical systems with Coulomb friction, impulsive control.

Agradecimientos

A mi.

A los cuasi-carnales.

A Dios.

A la sangre.

Al profe Dr. Yuri Orlov Kuchina.

Al Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos.

Al Dr. Leonid Fridman.

Al Dr. Joaquín Álvarez Gallegos.

Al Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez.

A los compañeritos de la school.

A Rosy, Laura y Aurora.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Ensenada, México
24 de Octubre de 2008.

Raúl Santiesteban Cos

Tabla de Contenido

| Capítulo | Página |
|---|-------------|
| Resumen | iii |
| Abstract | iv |
| Lista de Figuras | viii |
| Lista de Tablas | xii |
| I Introducción. | 1 |
| I.1 Objetivos. | 4 |
| I.2 Antecedentes y metodología. | 4 |
| I.3 Contribución. | 7 |
| I.4 Estructura del trabajo. | 8 |
| I.5 Notación. | 10 |
| II Preliminares. | 12 |
| II.1 Introducción. | 12 |
| II.2 Matemáticas: preliminares | 12 |
| II.2.1 Derivada Dini de una función real | 12 |
| II.2.2 Modelos de fricción | 13 |
| II.3 Sistemas mecánicos subactuados. | 16 |
| II.4 Sistemas impulsivos. | 20 |
| II.4.1 Simulaciones numéricas. | 21 |
| II.5 Modificación del oscilador de Van der Pol. | 22 |
| III Estabilización local para el sistema carro-péndulo: FOSM, SOSM, H_∞ y sus comparaciones. | 26 |
| III.1 Controlador en modo deslizante de primer orden (FOSM). | 26 |
| III.1.1 Simulaciones numéricas. | 33 |
| III.2 Controlador en modo deslizante de segundo orden (SOSM). | 34 |
| III.2.1 Modelo del carro-péndulo. | 36 |
| III.2.2 Diseño de la ley de control. | 38 |
| III.2.3 Simulaciones numéricas (SOSM). | 43 |
| III.3 Control H_∞ | 55 |
| III.3.1 Resultados numéricos. | 57 |
| III.4 Comparación entre controladores: FOSM, SOSM, H_∞ | 64 |
| IV Estabilización en órbita del carro-péndulo: aplicación al control de elevación/balaneo. | 67 |
| IV.1 Establecimiento del problema. | 67 |
| IV.2 Síntesis de control SOSM. | 70 |
| IV.2.1 Prototipo del carro-péndulo. | 73 |
| IV.3 Diseño del controlador híbrido I. | 74 |
| IV.3.1 Simulación numérica. | 74 |
| IV.4 Control de elevación y estabilización II. | 87 |
| IV.4.1 Diseño del controlador de elevación II. | 90 |

Tabla de Contenido (Continuación)

| Capítulo | Página |
|--|------------|
| IV.4.2 Diseño del control híbrido II. | 91 |
| IV.4.3 Simulación numérica. | 91 |
| IV.5 Diseño de control híbrido III. | 94 |
| IV.5.1 Simulaciones numéricas. | 95 |
| V Estabilización del péndulo invertido vía retroalimentación de posición. | 99 |
| V.1 Establecimiento del problema. | 99 |
| V.2 Diseño del observador y síntesis de control SOSM. | 101 |
| V.2.1 Diseño del observador conmutado. | 101 |
| V.2.2 Síntesis de control SOSM. | 101 |
| V.3 Resultados numéricos. | 105 |
| V.3.1 Modelo de LuGre para el fenómeno de fricción. | 106 |
| V.4 Resultados experimentales. | 107 |
| VI Estabilización de oscilador de un grado de libertad con control impulsivo. | 120 |
| VI.1 Introducción. | 120 |
| VI.2 Control impulsivo: aplicación a sistema masa-resorte. | 121 |
| VI.3 Diseño de control impulsivo. | 124 |
| VI.4 Resultados numéricos. | 128 |
| VII Conclusiones | 133 |
| VII.1 Trabajo a futuro. | 135 |
| Bibliografía | 136 |

Lista de Figuras

| Figura | | Página |
|--------|---|--------|
| 1 | <i>a)</i> Sistema de Lorenz en lazo abierto y <i>b)</i> Estabilización del sistema de Lorenz usando control impulsivo. | 24 |
| 2 | Ciclo límite de la ecuación modificada de Van der Pol. | 25 |
| 3 | Sistema mecánico subactuado carro-péndulo. | 27 |
| 4 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. <i>a)</i> Posición de carro sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 44 |
| 5 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. <i>a)</i> Posición de péndulo sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 45 |
| 6 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. <i>a)</i> Velocidad de carro sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 46 |
| 7 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. <i>a)</i> Velocidad de péndulo sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 47 |
| 8 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. <i>a)</i> Torque aplicado al sistema sin fricción ni perturbaciones. <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 48 |
| 9 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. <i>a)</i> Energía del sistema sin fricción ni perturbaciones. <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 49 |
| 10 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. <i>a)</i> Posición de carro sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 50 |
| 11 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. <i>a)</i> Posición de péndulo sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 51 |
| 12 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. <i>a)</i> Velocidad de carro sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 52 |
| 13 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. <i>a)</i> Velocidad de péndulo sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 53 |
| 14 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. <i>a)</i> Torque aplicado al sistema sin fricción ni perturbaciones. <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 54 |
| 15 | Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. <i>a)</i> Energía del sistema sin fricción ni perturbaciones. <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 58 |

Lista de Figuras (Continuación)

| Figura | Página |
|--|--------|
| 16 Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . <i>a)</i> Posición de carro sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 59 |
| 17 Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . <i>a)</i> Posición de péndulo sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 60 |
| 18 Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . <i>a)</i> Velocidad de carro sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 61 |
| 19 Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . <i>a)</i> Velocidad de péndulo sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 62 |
| 20 Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . <i>a)</i> Torque aplicado al sistema sin fricción ni perturbaciones y <i>B)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 63 |
| 21 Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . <i>a)</i> Energía del sistema sin fricción ni perturbaciones y <i>b)</i> con fricción y perturbaciones constantes. | 66 |
| 22 Diagrama del sistema mecánico carro-péndulo en lazo cerrado. | 75 |
| 23 Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. <i>a)</i> Posición de carro y <i>b)</i> Posición de péndulo. | 77 |
| 24 Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. <i>a)</i> Velocidad de carro y <i>b)</i> Velocidad de péndulo. | 78 |
| 25 Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. <i>a)</i> Error de seguimiento de seguimiento y <i>b)</i> Error de seguimiento de velocidad. | 79 |
| 26 Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. Torque aplicado al sistema en lazo cerrado. | 80 |
| 27 Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. <i>a)</i> Posición de carro y <i>b)</i> Posición de péndulo. | 81 |
| 28 Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. <i>a)</i> Velocidad de carro y <i>b)</i> Velocidad de péndulo. | 82 |
| 29 Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. <i>a)</i> Error de seguimiento de seguimiento y_1 y <i>b)</i> Error de seguimiento de velocidad y_2 | 83 |
| 30 Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. Torque aplicado. | 84 |
| 31 Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. <i>a)</i> Posición de carro y <i>b)</i> Posición de péndulo. | 85 |

Lista de Figuras (Continuación)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 32 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. <i>a)</i> Velocidad de carro y <i>b)</i> Velocidad de péndulo. | 86 |
| 33 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. Torque. | 87 |
| 34 | Órbita homoclínica. | 88 |
| 35 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. <i>a)</i> Posición de carro y <i>b)</i> Posición de péndulo. | 92 |
| 36 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. <i>a)</i> Velocidad de carro y <i>b)</i> Velocidad de péndulo. | 93 |
| 37 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. Torque. | 94 |
| 38 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local H_∞ . <i>a)</i> Posición de carro y <i>b)</i> Posición de péndulo. | 96 |
| 39 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local H_∞ . <i>a)</i> Velocidad de carro y <i>b)</i> Velocidad de péndulo. | 97 |
| 40 | Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local H_∞ . Torque aplicado al sistema en lazo cerrado. | 98 |
| 41 | Sistema mecánico péndulo simple. | 100 |
| 42 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso sin perturbaciones. <i>a)</i> Error de seguimiento de posición y <i>b)</i> Error de seguimiento de velocidad. | 109 |
| 43 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso sin perturbaciones. <i>a)</i> Error de estimación de posición y <i>b)</i> Error de estimación de velocidad. | 110 |
| 44 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso sin perturbaciones. Torque aplicado. | 111 |
| 45 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso con variaciones paramétricas. <i>a)</i> Error de seguimiento de posición y <i>b)</i> Error de seguimiento de velocidad. | 112 |
| 46 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso con variaciones paramétricas. <i>a)</i> Error de estimación de posición y <i>b)</i> Error de estimación de velocidad. | 113 |
| 47 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso con variaciones paramétricas. Torque aplicado. | 114 |

Lista de Figuras (Continuación)

| Figura | Página |
|--------|---|
| 48 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal y el modelo de LuGre para el fenómeno de fricción. <i>a)</i> Error de seguimiento de posición y <i>b)</i> Error de seguimiento de velocidad. 115 |
| 49 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal y el modelo de LuGre para el fenómeno de fricción. <i>a)</i> Error de estimación de posición y <i>b)</i> Error de estimación de velocidad. 116 |
| 50 | Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal y el modelo de LuGre para el fenómeno de fricción. Torque aplicado al sistema en lazo cerrado. 117 |
| 51 | Estabilización orbital del péndulo de laboratorio usando el observador no lineal. Error de seguimiento del sistema (118) para el caso sin perturbaciones. 117 |
| 52 | Estabilización orbital del péndulo de laboratorio usando el observador no lineal. <i>a)</i> Posición del sistema sin perturbaciones y <i>b)</i> Salida del oscilador modificado de Van der Pol. 118 |
| 53 | Estabilización orbital del péndulo de laboratorio usando el observador no lineal. Torque aplicado al sistema para el caso sin perturbaciones. 119 |
| 54 | Sistema masa-resorte. 121 |
| 55 | Retrato de fase para el sistema masa-resorte no forzado (144). 123 |
| 56 | Retrato de fase del sistema impulsivo en lazo cerrado (146)–(150): las líneas punteadas son para los saltos en la velocidad, las líneas solidas son para las trayectorias perturbadas y la línea segmentada es para la trayectoria libre de perturbaciones. 125 |
| 57 | Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso sin perturbaciones. <i>a)</i> Posición y <i>b)</i> Velocidad. 129 |
| 58 | Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso sin perturbaciones. <i>a)</i> Retrato de fase y <i>b)</i> Entrada de control. 130 |
| 59 | Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso con perturbaciones. <i>a)</i> Posición y <i>b)</i> Velocidad. 131 |
| 60 | Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso con perturbaciones. <i>a)</i> Retrato de fase y <i>b)</i> Entrada de control. 132 |

Lista de Tablas

| Tabla | | Página |
|-------|---|--------|
| I | Notación. | 10 |
| II | notación (continuación). | 11 |
| III | Parámetros de fricción para el sistema carro-péndulo utilizando el controlador FOSM. | 34 |
| IV | Parámetros de fricción para el sistema carro-péndulo utilizando el controlador SOSM. | 43 |
| V | Parámetros de fricción para el sistema carro-péndulo utilizando el controlador H_∞ | 57 |
| VI | Comparación entre controladores: FOSM, SOSM, H_∞ | 65 |
| VII | Parámetros del carro-péndulo (90). | 74 |
| VIII | Parámetros del modelo de LuGre. | 107 |

Capítulo I

Introducción.

Un sistema conmutado se puede ver como un sistema híbrido compuesto de una familia de subsistemas continuos regidos por una regla de restitución (ver Liberzon (2003)). Un ejemplo de este tipo de sistemas son los sistemas mecánicos afectados por la fricción de Coulomb y backlash. Un caso particular de los sistemas conmutados son los sistemas impulsivos, los cuales son sistemas afectados por fenómenos de impacto.

La estabilización de sistemas mecánicos subactuados, donde hay menos actuadores que grados de libertad, presentan un interesante problema (como ejemplo, se puede ver Fantoni *et. al.* (2000) y Ortega *et. al.* (2002)). Como se sabe, estos sistemas poseen propiedades no holonómicas, causadas por restricciones diferenciales no-integrables, y por lo tanto, no pueden ser estabilizados a través de retroalimentación suave (ver Berkemeier y Fearing (1999) y Zhang y Tarn (2002)). Con esto en mente, la presente investigación se enfoca en desarrollar métodos de control para estabilización de sistemas conmutados, principalmente, sistemas mecánicos subactuados afectados por el fenómeno de fricción.

El método de control desarrollado en Riachy *et. al.* (2008), cuenta con una transformación no lineal del sistema subactuado a una forma canónica similar a la de Bartolini *et. al.* (2002); Utkin *et. al.* (1999). Para estabilizar localmente el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable, se fija una salida del sistema para asegurar que la correspondiente dinámica zero es local asintóticamente estable. Una vez que la salida es escogida, se tiene la propiedad de estabilidad que se desea para el sistema en lazo cerrado, al aplicar un controlador de estructura variable que conduce al sistema,

representado en la forma canónica, a la variedad de la dinámica zero en tiempo finito.

Otra parte de este trabajo se dedica a resolver el problema de estabilización orbital. La motivación surge de las aplicaciones donde el modo de operación natural es periódico. La estabilización en órbita de sistemas mecánicos ha recibido mucha atención en los últimos años (ver Shiriaev *et. al.* (2005)). Para estos sistemas el paradigma de la estabilización en órbita, refiriéndose al balanceo periódico Canudas-de-Wit *et. al.* (2002), difiere de las formulaciones típicas de seguimiento donde la trayectoria de referencia a seguir es conocida *a priori*. El objetivo de control para el balanceo periódico, resulta un sistema, en lazo cerrado, que genera su propia órbita periódica similar a la que produce un oscilador no lineal, por ejemplo ver Chevallereau *et. al.* (2003). Además, el sistema en lazo cerrado debe de ser capaz de moverse de una órbita a otra simplemente cambiando los parámetros tales como su frecuencia o su amplitud.

Es bien sabido que los controladores basados en modos deslizantes presentan el problema de alta frecuencia conocido como "chattering". Para evitar este fenómeno de alta frecuencia, se propone aplicar un algoritmo H_∞ no suave para resolver el problema de estabilización local del sistema carro-péndulo, en su punto de equilibrio inestable. Dicho algoritmo tiene sus orígenes en la teoría de Basar y Bernhard (1990) y en el análisis de ganancia L_2 de Van Der Shaft (1992) y de Isidori y Astolfi (1999). La construcción del controlador H_∞ no suave, que se aplica en este trabajo, sigue la línea de investigación de Aho *et. al.* (2000), Orlov y Aho (2000) y de Orlov y Aguilar (2004), donde se considera que se tiene acceso a todos los estados del sistema.

Otro problema interesante a estudiar en teoría de control, es cuando no se tiene acceso a todos los estados del sistema. La importancia radica en que, a veces en la práctica, no se conoce toda la información del sistema, como por ejemplo, la velocidad. Una parte de esta tesis se enfoca a resolver dicha problemática, construyendo un observador (inspirado en Davila *et. al.* (2005)) y así obtener una estimación de la

velocidad del sistema mecánico. Para facilitar la exposición de este algoritmo de estimación, nos enfocamos a estudiar el caso de estabilizar en órbita al péndulo simple (sistema de un grado de libertad), el cual está afectado por fricción viscosa y de Coulomb. Para mostrar la capacidad del algoritmo de retroalimentación de posición se toma en cuenta el efecto de perturbaciones paramétricas y además, se considera el modelo de LuGre, para describir el fenómeno de fricción, en los experimentos numéricos. Se utiliza la síntesis cuasihomogénea por retroalimentación de estado, recientemente desarrollada en Orlov *et. al.* (2008), junto con el algoritmo de estimación de velocidad SOSM para resolver el problema en cuestión. Se construye una función de Lyapunov no suave y así probar la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado, en contraste con Davila *et. al.* (2005), cuyo método geométrico prueba la estabilidad del observador en lazo abierto.

Otro punto interesante a tratar en este trabajo es el desarrollo de una nueva estrategia basada en control impulsivo. Para esta parte del trabajo se utiliza como sistema de prueba al sistema masa-resorte afectado únicamente por fricción de Coulomb. Este sistema posee un conjunto de puntos de equilibrio, debido a la fricción seca. Se utiliza control impulsivo para obligar al sistema a salir de este conjunto de puntos de equilibrio y así estabilizarlo en el origen. Se muestra lo robusto del sistema en lazo cerrado, a pesar de pequeñas variaciones paramétricas y perturbaciones acotadas.

Los métodos de control que existen en la literatura ignoran o consideran una aproximación suave para el fenómeno de fricción seca, por lo que el desempeño del sistema en lazo cerrado se ve limitado al considerar dicho fenómeno. Con esta motivación, el objetivo general de este trabajo es desarrollar algoritmos de control robusto, de sistemas mecánicos (incluso subactuados), ante el fenómeno de fricción y perturbaciones externas para mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado.

I.1 Objetivos.

El objetivo de este trabajo es proponer una solución adecuada a problemas de control, como regulación, estabilización orbital y retroalimentación por posición, desarrollando métodos de control, para sistemas mecánicos (incluyendo aquellos que son subactuados), que sean robustos ante el fenómeno de fricción y perturbaciones externas.

Los objetivos específicos son desarrollar algoritmos de control robusto ante el fenómeno de Coulomb y perturbaciones externas para resolver los problemas de:

- I. Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con aplicación al control de elevación/balanceo.
- II. Retroalimentación por posición en el caso del sistema péndulo invertido.
- III. Regulación, basado en impulsos, en el caso del sistema masa-resorte.

I.2 Antecedentes y metodología.

Los sistemas que son descritos por una interacción entre sistemas continuos, sistemas discretos, conmutaciones e impulsos usualmente se llaman sistemas híbridos. La teoría de control, tradicionalmente, se había enfocado ya sea en sistemas continuos o en sistemas discretos. Sin embargo muchos sistemas encontrados en la práctica tienen una naturaleza híbrida. Según Liberzon (2003), un sistema conmutado se define como un sistema continuo con respecto al tiempo regido por una ley de conmutación discreta. Entonces los sistemas conmutados se pueden describir de la siguiente manera: Sea un espacio de estado continuo particionado en un número infinito de dominios por medio de una familia de superficies de conmutación. Dentro de cada dominio el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias con el lado derecho diferenciable. En el espacio de estado el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias con

el lado derecho discontinuo, cuyas trayectorias se definen en el sentido de Filippov (ver Filippov (1988)).

Cuando la trayectoria llega a una superficie de conmutación, el estado continuo puede sufrir un cambio instantáneo, especificado por una regla de restitución. Dicha regla es un mapeo cuyo dominio y rango es la unión de superficies de conmutación y el espacio de estado, respectivamente. Estos cambios instantáneos del estado se les llama efectos impulsivos (ver Yang (2001)). A los sistemas afectados por los efectos impulsivos se les puede considerar como un caso particular de los sistemas conmutados (aquellos afectados por colisiones, percusiones, etc., ver Brogliato (1996) y Orlov (2000)). En Orlov (2002) se muestra como la dinámica de los impactos se puede tratar con el formalismo de distribuciones no lineales, a través de un claro ejemplo: el lanzamiento de una nave espacial.

Resumiendo, un sistema conmutado se define por:

- i) una familia de superficies conmutables, que determinan los dominios de operación,
- ii) la familia de subsistemas continuos en el tiempo, los cuales están bien definidos para cada dominio y
- iii) la regla de restitución, que determina los posibles cambios instantáneos del sistema.

Algunos antecedentes relacionados con el análisis de sistemas conmutados se mencionan a continuación. El comportamiento cualitativo de un sistema m -conmutado compuesto de m subsistemas lineales fue analizado por Peleties y DeCarlo Peleties y DeCarlo (1992) usando múltiples funciones de Lyapunov. Más aún, M. Branicky Branicky (1998) presenta algunas herramientas, desarrolladas por D. Liberzon Liberzon (2003), de análisis para los sistemas conmutados e híbridos. En particular, estos últimos

usan funciones múltiples de Lyapunov para el análisis de estabilidad de los sistemas conmutados y se usan sistemas de funciones iterativas para la estabilidad de Lagrange.

En Lee *et. al.* (1999) se presenta un análisis de estabilidad de sistemas conmutados. Donde se introduce el concepto de tiempo, máximo/mínimo, de permanencia y redundancia. D. Shevtitz y B. Paden se apoyan en el análisis de funciones de Lyapunov no suaves, donde se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas dinámicos no suaves (ver Shevtitz y Paden (1994)).

Como antecedentes para el estudio de controladores cuasihomogéneos, se pueden ver los trabajos de Orlov (2003)-Orlov (2005b), estabilizando un manipulador de un eslabón en tiempo finito. Aunque este controlador exhibe el llamado comportamiento *Zeno* con un número infinito de conmutaciones en un intervalo de tiempo finito (ver Liberzon (2003); Lygeros *et. al.* (2003) para el modo *Zeno*), este no cuenta con la generación de modos deslizantes de primer orden, mientras provee de características robustas similares a aquellas que posee su contraparte en modo deslizante. El *modo deslizante de segundo orden* (SOSM por sus siglas en inglés: Second Order Sliding Mode) aparece en el punto de equilibrio solamente (ver Levant (1993) para el trabajo original y para los avances en el área ver Bartolini *et. al.* (1998); Fridman y Levant (1996, 2002)).

En contraste con los algoritmos estándar de control en modo deslizante que son capaces de proveer al manipulador en lazo cerrado solamente con la última propiedad de acotamiento Lu y Spurgeon *et. al.* (1997). El controlador basado en SOSM, mencionado anteriormente, estabiliza al manipulador en tiempo finito, lo cual constituye una interesante alternativa en comparación a los controladores estándar en modo deslizante. En aplicaciones de sistemas mecánicos completamente actuados con fricción Orlov (2003)-Orlov *et. al.* (2003b) estos controladores han demostrado tener un buen desempeño a pesar de las incertidumbres significativas en la descripción del sistema, como es típicamente en el caso de control de sistemas electro-mecánicos con fenómenos

no lineales difíciles de modelar (como ejemplos tenemos la fricción seca y backlash).

En cuanto a las estrategias de control basadas en la energía del sistema se tiene como referencia el trabajo de R. Ortega y a R. Lozano donde se lleva al péndulo invertido hacia una órbita homoclínica para luego cambiar a un controlador local y estabilizar al péndulo en su equilibrio inestable (ver Ortega *et. al.* (1998) y Lozano *et. al.* (2000)). En Lozano *et. al.* (2000) usa la función de energía del sistema como función de Lyapunov para llevar al carro-péndulo a una órbita homoclínica. Cuando el carro-péndulo llega a una región de atracción se cambia a un controlador local para estabilizar al sistema en su punto de equilibrio inestable. Este análisis se limita a sistemas mecánicos sin fricción, entonces el desempeño del controlador a sistemas con fricción se ve limitado.

En la práctica, un problema común es la falta de acceso a todos los estados del sistema, como por ejemplo la velocidad, por lo que en este trabajo se estudia como resolver este problema. Como antecedentes, se tienen los trabajos de Davila *et. al.* (2005) y Rosas *et. al.* (2005) donde se proponen algoritmos de estimación basados en modos deslizantes. En esta tesis se propone un observador no lineal basado en modos deslizantes de segundo orden, inspirado en los trabajos antes mencionados, que copia la estructura de la planta.

I.3 Contribución.

En esta tesis la contribución se enfoca principalmente en proponer algoritmos para la estabilización de tres clases de osciladores afectados por el fenómeno de fricción de Coulomb. Los tres osciladores, que se utilizan como aplicaciones de prueba, se refieren a los sistemas mecánicos: el péndulo simple, el sistema masa-resorte y el sistema carro-péndulo. La primera aportación es haber desarrollado una estrategia para la estabilización del carro-péndulo (controlador de elevación/balanceo), utilizando como modelo de referencia al oscilador modificado de Van der Pol. Otra aportación, es haber

resuelto el problema de retroalimentación por posición para la estabilización orbital del péndulo simple, usando el mismo modelo de referencia. A diferencia del primer caso, este último caso, se considera que no se tiene acceso a toda la información del sistema mecánico, es decir, posición y velocidad. Entonces, se desarrolla un observador conmutado para resolver el problema de retroalimentación de posición. La última aportación fue desarrollar una alternativa para la estabilización de sistemas mecánicos afectados por fricción de Coulomb con control impulsivo. En este último caso se resuelve el problema cuando el sistema mecánico, por su naturaleza, tiene una zona de estancamiento (conjunto de puntos de equilibrio debido a la fricción seca). Entonces se desarrolla un control impulsivo que estabiliza de manera asintótica al sistema mecánico masa-resorte, a pesar de ser afectado por fricción de Coulomb y perturbaciones externas acotadas.

I.4 Estructura del trabajo.

Para mostrar de manera sencilla dicha contribución se le da la siguiente estructura a este trabajo. En el siguiente capítulo se pretende mostrar una pequeña compilación del conocimiento preliminar en matemáticas y teoría de control, para que sirva de base para los siguientes capítulos. En el tercer capítulo se estudian controladores locales conmutados (por ejemplo: controlador en modo deslizante de primer orden, controlador FOSM por sus siglas en inglés, First Order Sliding Mode), los cuales resuelven de manera satisfactoria el problema de estabilización para sistemas mecánicos afectados por fricción seca. En esta parte del trabajo se pretende dar motivación para seguir estudiando el controlador en modo deslizante de segundo orden SOSM (por sus siglas en inglés: Second Order Sliding Mode). Esto da paso al capítulo 4, donde se estudia la primera contribución de este trabajo: *control en modo deslizante de segundo orden de sistemas mecánicos: estabilización orbital con aplicación al control*

de elevación/balanceo del carro-péndulo.

Hasta aquí, se ha considerado que la información del estado del sistema está disponible, es decir, se pueden tener mediciones de posición y velocidad del sistema carro-péndulo. Lo que nos da motivación para estudiar la segunda aportación de este trabajo en el capítulo 5: aproximación en modo deslizante de segundo orden para la estabilización orbital del péndulo, afectado por fricción seca, vía retroalimentación de posición.

Cuando un sistema mecánico es afectado por fricción de Coulomb, se puede tener una zona de estancamiento, es decir, un conjunto de puntos de equilibrio. En el capítulo 6, se desarrolla un controlador que resuelve el problema estabilización de un oscilador de un grado de libertad afectado por fricción de Coulomb y perturbaciones externas, usando control impulsivo. Por último se dan conclusiones de este trabajo y la bibliografía que se utilizó a lo largo de éste.

I.5 Notación.

En esta sección se da la notación que se usa a lo largo de este trabajo.

Tabla I: Notación.

| | |
|----------------|---|
| \mathbb{R} | Números reales |
| \mathbb{N} | Números naturales |
| \mathbb{R}^n | N-ada de números reales |
| a | Constante que se usa como ganancia de un controlador |
| F | Función que describe el fenómeno de fricción |
| F_c | Constante positiva que denota el nivel de fricción Coulomb |
| F_v | Constante positiva que denota el nivel de fricción de viscosa |
| g | Constante de Gravedad |
| h, p | Constantes positivas que se usan para sintonizar un controlador SOSM |
| i | Constante positiva que se usa como índice ($i \in \mathbb{N}$) |
| J | Momento de inercia |
| k | Constante positiva que denota la rigidez de un resorte |
| l | longitud de péndulo |
| N | Cota máxima del término de perturbación |
| m_p | Masa de péndulo |
| m_c | Masa de carro |
| m_r | Masa de para sistema masa-resorte |
| q | Vector de coordenadas generalizadas, donde $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ |
| r | Retroalimentación |
| s, s_1, s_2 | Superficie deslizante |
| S, S_w | Conjunto en \mathbb{R}^2 |
| t | Tiempo |
| u, τ | Entrada de control |
| v | Velocidad |
| w, w_1 | Constantes positivas que se utilizan para sintonizar el observador SOSM |
| z | Salida del oscilador de Van der Pol |

Tabla II: notación (continuación).

| | |
|--|---|
| $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \kappa, \nu$ | Constantes positivas en \mathbb{R} |
| $\gamma, \epsilon, \varrho$ | Constantes positivas que se usan para sintonizar al controlador H_∞ |
| δ | Denota un incremento |
| θ | Ángulo |
| $\sigma_1, \sigma_2, v_s, \sigma_x, \sigma_\theta,$ | Parámetros que describen el fenómeno de fricción usando el modelo de Dahl o LuGre (rigidez, coeficiente de amortiguamiento, <i>etc.</i>) |
| $\varphi(v)$ | Función que describe el fenómeno de fricción para carro |
| φ_c | Constante positiva que denota el nivel de fricción de Coulomb para carro |
| φ_v | Constante positiva que denota el nivel de fricción viscosa para carro |
| $\psi(\dot{\theta})$ | Función que describe el fenómeno de fricción para péndulo |
| ψ_c | Constante positiva que denota el nivel de fricción de Coulomb para péndulo |
| ψ_r | Constante positiva que denota el nivel de fricción de Coulomb para resorte |
| ψ_v | Constante positiva que denota el nivel de fricción viscosa para péndulo |
| ω_i | Término de perturbación ($i = 1, 2$) |

Capítulo II

Preliminares.

II.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es aportar algunos conocimientos básicos, necesarios para una mejor comprensión de este trabajo. Se empieza por estudiar la notación que se utilizará a lo largo del trabajo, para después continuar con algunas definiciones matemáticas. Después continuaremos con el modelado del fenómeno de fricción. La fricción es un fenómeno que afecta, en gran medida, el desempeño de un sistema mecánico, por lo que es importante comprender su naturaleza. Continuaremos con la definición de sistemas mecánicos subactuados, así como el diseño de control de modos deslizantes de segundo orden para este tipo de sistemas. En la siguiente sección se estudiarán algunas definiciones de control impulsivo o control por impactos. Y por último se estudia un poco de generadores armónicos, en esta sección nos enfocaremos principalmente al oscilador de Van der Pol modificado.

II.2 Matemáticas: preliminares

II.2.1 Derivada Dini de una función real

Para cualquier función real $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, se define la derivada de f en el punto x como el siguiente límite (si es que existe) :

$$f'(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \quad (1)$$

La derivada Dini superior de una función continua, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, denotado por

$D^+f(t)$, se define como

$$D^+f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \frac{f(t + \delta) - f(t)}{\delta}. \quad (2)$$

La derivada Dini inferior, $D^-f(t)$, se define como

$$D^-f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \frac{f(t + \delta) - f(t)}{\delta}. \quad (3)$$

Nota: como las derivadas convencionales, la derivada Dini no siempre existe.

Si f se define en un espacio vectorial, entonces la derivada Dini superior con respecto a t en la dirección d se denota como

$$D^+f(t, d) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{f(t + hd) - f(t)}{h}. \quad (4)$$

Si f es localmente Lipschitz, entonces D^+f es finita. Si f es diferenciable con respecto a t , entonces la derivada Dini con respecto a t es la derivada con respecto a t .

II.2.2 Modelos de fricción

La fricción es un fenómeno natural que representa la fuerza de reacción tangencial entre dos superficies en contacto. Ya que esta fuerza depende de muchos factores tales como la geometría de contacto, la superficie del material, del desplazamiento y velocidades de los cuerpos en contacto y la presencia de lubricantes, entre otros, es muy difícil deducir un modelo general para la fricción utilizando principios básicos de física. En su lugar se utilizan modelos que capturan las características esenciales de la fricción. A continuación se hace un repaso de algunos modelos para describir el fenómeno de fricción.

Modelos estáticos

Los modelos clásicos de fricción son descritos por mapeos estáticos entre la velocidad y las fuerzas de fricción. La idea principal de estos modelos es que la fricción se opone al

movimiento y su magnitud es dependiente de la velocidad v y el área de contacto.

El modelo de fricción de Coulomb

$$F(v) = F_C \operatorname{sgn}(v) \quad (5)$$

es un modelo ideal conmutado, multi-valuado cuando la velocidad es cero:

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v > 0 \\ [-1, 1], & \text{si } v = 0 \\ -1, & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Ya que no se especifica la fuerza de fricción $F(v)$ cuando la velocidad es cero, la fuerza estática $F(0)$ se reconoce que contrarresta fuerzas externas menores al nivel de fricción de Coulomb F_C . Entonces, la fuerza de estancamiento¹, que describe la fuerza de fricción de Coulomb en descanso, puede tomar cualquier valor en el segmento $[-F_C, F_C]$. la correspondiente ecuación de estado

El modelo de fricción viscosa

$$F(v) = F_v v \quad (7)$$

se usa con un coeficiente de fricción viscosa $F_v > 0$ para describir la fuerza de fricción causada por la viscosidad de los lubricantes. Al combinar con la fricción de Coulomb, se tiene

$$F(v) = F_v v + F_C \operatorname{sgn}(v) \quad (8)$$

Para tomar en cuenta el fenómeno de Stribeck a muy bajas velocidades este último modelo se le añade el fenómeno de fricción de Stribeck $\sigma_s e^{-(v/v_s)^2} \operatorname{sgn}(v)$, donde las constantes $\sigma_s > 0$ y $v_s > 0$ denotan el nivel de Stribeck y la velocidad de Stribeck,

¹(En inglés, la fuerza de estancamiento se le da el nombre de "stiction", una palabra que es una combinación de "stick" y "friction".)

respectivamente. El modelo resultante está dado por

$$F(v) = F_v v + [F_C + \sigma_s e^{-(\frac{v}{v_s})^2}] \text{sgn}(v) \quad (9)$$

donde el nivel de fuerza de estancamiento $F_S = \sigma_s + F_C$ se considera que es más alto que el nivel de Coulomb F_C .

Modelos dinámicos

Para tener una mejor aproximación con los datos experimentales, frecuentemente se considera un modelo dinámico para describir la fuerza de fricción. Propuesto en Dahl (1968), el siguiente modelo dinámico

$$\dot{F}_D = \sigma_1 v - \sigma_1 |v| \frac{F_D}{F_C} \quad (10)$$

donde $\sigma_1 > 0$, y $F_C > 0$ denotan la rigidez y el nivel de Coulomb, respectivamente. Este modelo describe el comportamiento de la fuerza de fricción F_D durante el estancamiento donde la velocidad v , del cuerpo en contacto, es infinitesimal. Formalmente, fijando $\sigma_1 = \infty$, el modelo dinámico de Dahl (10) se reduce al modelo estático de Coulomb (5). Ya que el modelo de Dahl (10) es no-suave, más que discontinuo, se puede ver como una regularización del modelo discontinuo de Coulomb (5) cuando $\sigma_1 \rightarrow \infty$.

El modelo de Dahl (10) se comporta en esencia como modelo clásico de fricción de Coulomb con un retardo en el cambio de la fuerza de fricción cuando la dirección del movimiento cambia, el modelo de Dahl no toma en cuenta el fenómeno de Stribeck. Para tomar en cuenta el efecto de Stribeck, el modelo de LuGre de Canudas-de-Wit *et al.* (1995)

$$F_L = F_v v + \sigma_1 \eta + \sigma_2 \frac{d\eta}{dt} \quad (11)$$

se puede utilizar. En el modelo de LuGre (11) el punto de contacto de fricción se puede

imaginar como el contacto entre cerdas donde $F_v > 0$ es el coeficiente de fricción viscosa, $\sigma_1 > 0$ es la rigidez, $\sigma_2 > 0$ es el coeficiente de amortiguamiento, η es la desviación promedio de las cerdas, cuya dinámica está gobernada por

$$\frac{d\eta}{dt} = v - \frac{\sigma_1|v|}{[F_C + (F_S - F_C)e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2}]}\eta, \quad (12)$$

donde $F_C > 0$ es el nivel de fricción de Coulomb, $F_S > 0$ es el nivel de la fuerza de estancamiento, $v_s > 0$ denota la velocidad de Stribeck y v es la velocidad actual del cuerpo en contacto.

Entonces, el modelo completo de LuGre (11), (12) se caracteriza por seis parámetros $F_v, \sigma_1, \sigma_2, F_C, F_S, v_s$. Se reduce al modelo de Dahl (10) si $F_v = 0, \sigma_2 = 0$, y $F_S = F_C$. Además, para el movimiento en estado estable cuando v es constante y $\dot{\eta} = 0$, y la relación entre la velocidad y la fuerza de fricción de LuGre (11) está dada por el modelo clásico (9).

II.3 Sistemas mecánicos subactuados.

En esta sección se estudian los sistemas subactuados y la síntesis cuasihomogénea para sistemas subactuados de la forma:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[B\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - F(\dot{q})]. \quad (13)$$

En la ecuación anterior, $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posición, $\tau \in \mathbb{R}^m$ es el torque de entrada, donde $m < n$. Las variables \dot{q} y \ddot{q} son los vectores de velocidad y aceleración respectivamente, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ representa los términos de la fuerza centrífuga y de coriolis, $G(q)$ es el vector de gravedad, $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ es la fuerza de fricción y B es la matriz de entrada de rango m que mapea el torque de entrada τ de dimensión m al espacio de coordenadas de dimensión n .

Entonces un sistema subactuado es aquel que tiene menor número de actuadores

independientes m que grados de libertad n a controlar. Como por ejemplo el carro-péndulo o el pendubot. Una gran parte de este trabajo se dedica a estudiar al sistema mecánico subactuado carro-péndulo, por lo que más adelante se da una descripción detallada de este sistema.

El sistema (13) puede ser representado localmente, a través de un cambio no lineal de coordenadas de estado y una transformación de la retroalimentación (ver Byrnes and Isidori (1991)), en la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= g(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) \\ \ddot{\xi} &= f(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) + u.\end{aligned}\tag{14}$$

con ξ como salida del sistema. Si, además, el sistema es de fase mínima localmente con respecto a la salida ξ y suficientemente suave, este puede ser estabilizado localmente por un controlador cuasihomogéneo similar a

$$u = -\omega^{nom}(y, \dot{y}, t) - \alpha \operatorname{sgn}(y) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}) - hy - p\dot{y}\tag{15}$$

donde

$$N < \beta < \alpha - N, \quad h, p \geq 0\tag{16}$$

En el capítulo 3 se describe esta ley de control de forma más detallada.

Se consideran las siguientes suposiciones:

1. Las funciones $g(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi})$ y $f(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi})$ son continuas seccionalmente en todos sus argumentos y además la función $g(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi})$ es continua en $(\xi, \dot{\xi})$ localmente alrededor de $(\xi, \dot{\xi}) = 0$ para casi todo (x, \dot{x}) .
2. Dadas funciones diferenciables por secciones $\xi(t), \dot{\xi}(t)$ de magnitudes suficientemente

pequeñas, una solución arbitraria del sistema

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, \xi(t), \dot{\xi}(t)) \quad (17)$$

es acotada en cualquier intervalo de tiempo finito.

3. El sistema

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, 0, 0) \quad (18)$$

tiene al origen como punto de equilibrio estable asintóticamente local.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales de estado (14)-(18) con el lado derecho continuo por tramos, se definen en el sentido de Filippov Filippov (1988).

Bajo la suposición 1, se garantiza la existencia de tal solución (posiblemente no siendo única) de cada ecuación con condiciones iniciales arbitrarias y entrada de control continua seccionalmente u por el Teorema 8 de (Filippov, 1988, p. 85).

Otras suposiciones se hacen por razones técnicas. La suposición 2 se introduce para evitar el efecto inestable del fenómeno de sobre-tiro (un trabajo detallado de tal fenómeno en configuración continua, como en Sussman y Kokotovic (1991)). La suposición 3 significa que (14), especificado con la entrada $u^* = \xi$, es un sistema de fase mínima localmente. El papel de esta idea es bien conocida en la teoría de los campos suaves Byrnes and Isidori (1991) y ahora esta bajo el estudio de los sistemas de estructura variable.

El sistema (14) esta operando bajo condiciones de incertidumbre. La ganancia no lineal g no puede desestabilizar al sistema en lazo cerrado por la hipótesis de fase mínima, por lo que no se requiere más información sobre esta ganancia. El término que desestabiliza

$$f(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) = f^{nom}(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) + f^b(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) \quad (19)$$

se divide en una parte nominal f^{nom} , conocida *a priori*, y una ganancia acotada no

conocida f^b cuyos componentes f_j^b , $j = 1, \dots, m$ tienen cota superior globalmente

$$|f_j^b(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi})| \leq N_j \quad (20)$$

a priori se conocen las constantes $N_j > 0$. Además, se supone que las funciones f^{nom} y f^b son continuas por secciones.

Inspirados en el controlador cuasihomogéneo (15), (16), la siguiente ley de control de estructura variable

$$\begin{aligned} u(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) = & -f^{nom}(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi}) - \alpha \text{sign } \xi - \beta \text{sign } \dot{\xi} \\ & -H\xi - P\dot{\xi} \end{aligned} \quad (21)$$

con parámetro de ganancia

$$H = \text{diag}\{h_j\}, \quad P = \text{diag}\{p_j\}, \quad (22)$$

$$\alpha = \text{diag}\{\alpha_j\}, \quad \beta = \text{diag}\{\beta_j\} \quad (23)$$

donde,

$$\begin{aligned} N_j &< \beta_j < \alpha_j - N_j, \\ h_j, p_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (24)$$

se propone para estabilizar localmente al sistema con incertidumbre (14), (19), (20) cuyo estado $(x, \dot{x}, \xi, \dot{\xi})$ esta disponible para mediciones. En adelante, la notación *diag* se utiliza para denotar una matriz diagonal de dimensiones apropiadas; $\text{sgn } \xi$ con un vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$ se puede traducir como el vector columna $(\text{sgn } \xi_1, \dots, \text{sgn } \xi_m)^T$.

En Riachy *et. al.* (2008), se demuestra que la ley de control de estructura variable (21), (24) lleva al sistema con incertidumbre (14) a la variedad de dinámica zero $\xi = \dot{\xi} = 0$ en tiempo finito, obteniendo así el siguiente resultado:

Teorema 1. Sean satisfechas las suposiciones 1-3 y sea llevado el sistema con

incertidumbre (14), (19), (20) por la retroalimentación de estados (21), tal que la condición (24) es válida. Entonces el sistema en lazo cerrado (14), (21)-(24) es local asintóticamente estable y uniforme en las incertidumbres admisibles (19), (20).

II.4 Sistemas impulsivos.

En esta sección se estudiará un poco sobre la definición de control impulsivo. La motivación para estudiar este tipo de estrategia de control es aportar una alternativa a los métodos existentes de control de sistemas conmutados, además en este trabajo se propone estabilizar al sistema masa-resorte, afectado por fricción de Coulomb, utilizando este tipo de control. Esta información se puede ver de manera más extensa y detallada en Yang (2001), por esta razón, esta sección se da como un breve repaso de algunos capítulos de este libro.

Los sistemas conmutados se pueden describir de la siguiente manera: sea un espacio de estado continuo particionado en un número infinito de dominios por medio de una familia de superficies de conmutación. A los sistemas afectados por los efectos impulsivos se les puede considerar como un caso particular de los sistemas conmutados (aquellos afectados por colisiones, percusiones, etc., ver Brogliato (1996) y Orlov (2000)).

De Yang (2001) tenemos la siguiente definición

Definición 1. *Control impulsivo.* Dada una planta no-impulsiva P cuya variable de estado se denota como $x \in \mathbb{R}$, un conjunto de instantes de control $T = \tau_i$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $\tau_i < \tau_{i+1}$ y leyes de control $U(i, x) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$. A cada τ_i , x cambia de forma impulsiva por $x(\tau_i^+) = x(\tau_i) + U(i, x)$ tal que la salida $y = g(t, x)$, $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$, se acerca al objetivo $y^* \in \mathbb{R}^m$ como $i \rightarrow \infty$. Si la planta es impulsiva, entonces la ley de control puede ser no-impulsiva.

El control basado en impactos se describe utilizando ecuaciones diferenciales impulsivas. En un sistema con control impulsivo, la planta P a controlar debe tener al menos una variable de estado que pueda variar de forma impulsiva, es decir, que pueda variar de forma "instantánea" a cualquier valor dado por la ley de control. En este

sentido no todos los sistemas físicos pueden ser controlados a través de impulsos. Al instante de tiempo τ_i , cuando se aplica el control impulsivo $U(i, x)$ a la planta P , se le llama instante de control τ_i . Estos instantes pueden ser o no ser equidistantes, inclusive se pueden escoger cuando cierta condición de la planta P se satisfaga. El sentido de control impulsivo se puede entender como un salto en una variable de estado de la planta P en un instante de tiempo τ_i . La idea de este tipo de control es aportar una alternativa a los métodos existentes de control de sistemas conmutados.

Entonces un sistema con control impulsivo se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_i(x) \\ \Delta x &= U(i, y), \quad t = \tau_i(x) \\ y &= g(t, x)\end{aligned}\tag{25}$$

donde x y y son las variables de estado y la salida, respectivamente. $U(i, y)$ es la ley de control impulsivo. En este sistema, la entrada de control se implementa usando "cambios instantáneos" en algunas variables de estado.

A continuación se hace un ejercicio utilizando el sistema caótico de Lorenz. En este ejercicio se muestra como el control impulsivo estabiliza al sistema caótico en forma asintótica. Para simplificar la exposición de este ejercicio se omite información, ya que en Yang (2001) contiene todo el desarrollo teórico de este tipo de control, incluyendo experimentos numéricos detallados de este ejercicio.

II.4.1 Simulaciones numéricas.

Para las simulaciones numéricas se utilizan los siguientes parámetros: para el sistema caótico de Lorenz: $\sigma = 10; r = 28; b = 8/3;$, con condiciones iniciales en $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 17)$; y para el controlador impulsivos se utilizan las siguientes ganancias $B = (a_x, a_y, a_z)^T = (-1.5, -1, -1)$ y $\delta = 0.04$. La primer columna de la figura 1 muestra el

sistema de Lorenz en lazo abierto, mientras que la segunda columna muestra el sistema de Lorenz en lazo cerrado.

II.5 Modificación del oscilador de Van der Pol.

La modificación de la ecuación de Van der Pol de (ver Orlov *et. al.* (2008)) está dada por

$$\ddot{z} + \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z = 0, \quad (26)$$

Una ventaja de la modificación del oscilador de Van der Pol es que posee un ciclo límite estable, el cual puede ser expresado en forma explícita como:

$$z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} = \rho^2 \quad (27)$$

Substituyendo la ecuación (27) en la ecuación modificada de Van der Pol (26) se concluye que el ciclo límite (27) es generado por un oscilador armónico lineal:

$$\ddot{z} + \mu^2 z = 0, \quad (28)$$

inicializado en (26).

En la figura II.5 se muestra el retrato de fase de la modificación de la ecuación de Van der Pol (26), usando los parámetros siguientes: $\varepsilon = 1000$, $\rho = 0.01$, $\mu = 1$.

El parámetro ρ define la amplitud del ciclo límite, el parámetro μ define la frecuencia y el parámetro ε define la velocidad de convergencia de las trayectorias hacia el ciclo límite.

Las motivaciones para usar este oscilador armónico son:

- i) posee un ciclo límite estable y puede ser expresado en forma explícita por la ecuación (27)
- ii) se pueden modificar los parámetros μ , ρ , ε del oscilador armónico en línea.

- iii) produce una salida con un solo armónico.

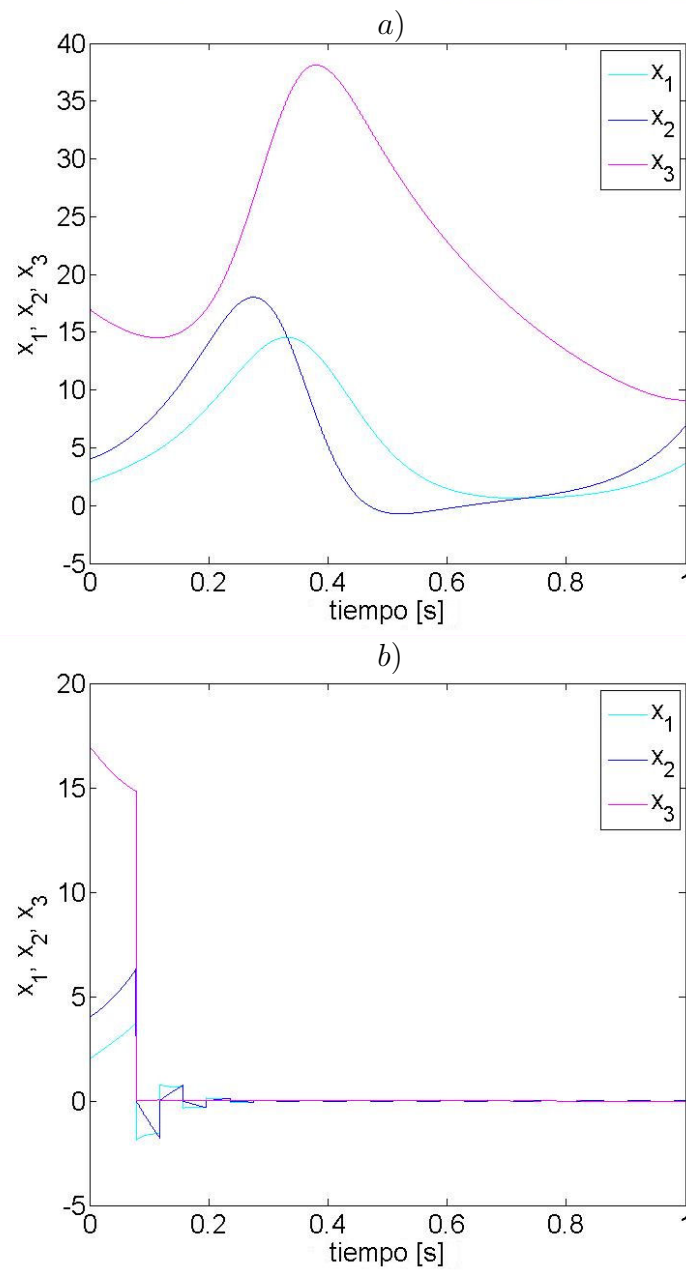


Figura 1: *a)* Sistema de Lorenz en lazo abierto y *b)* Estabilización del sistema de Lorenz usando control impulsivo.

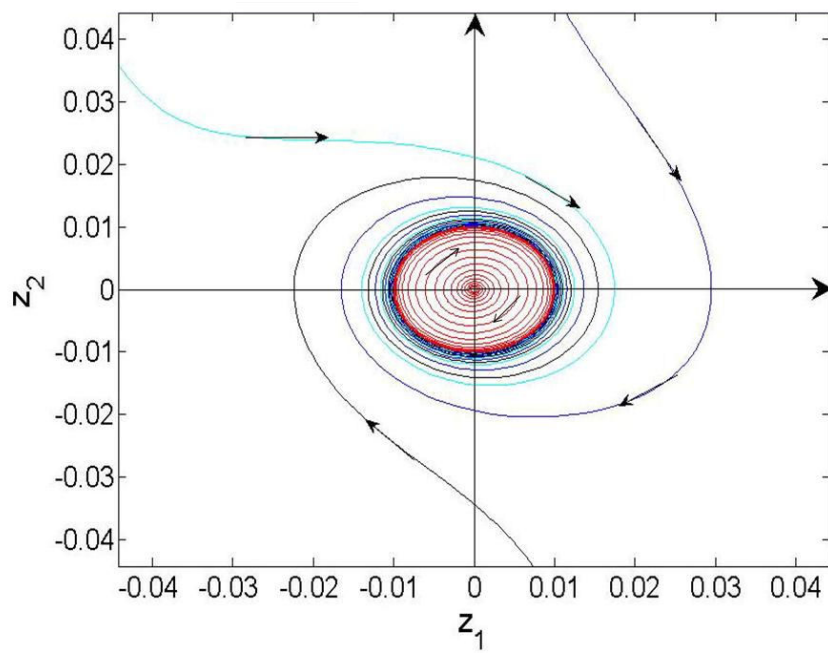


Figura 2: Ciclo límite de la ecuación modificada de Van der Pol.

Capítulo III

Estabilización local para el sistema carro-péndulo: FOSM, SOSM, H_∞ y sus comparaciones.

III.1 Controlador en modo deslizante de primer orden (FOSM).

En (Utkin (1992)), se desarrolla un controlador en modo deslizante de primer orden FOSM, utilizando como aplicación al sistema mecánico subactuado carro-péndulo. Sin embargo, en las ecuaciones que modelan la dinámica del carro-péndulo no se toman en cuenta los efectos de la fricción. Entonces, el objetivo de esta sección es construir el mismo tipo de controlador tomando en cuenta que el sistema mecánico está afectado por fricción y perturbaciones acotadas, tanto en carro como en el péndulo.

$$\begin{aligned}(m_c + m_p)\ddot{x} + m_p l \sin \theta \dot{\theta}^2 - m_p l \cos \theta \ddot{\theta} &= \tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t), \\ \frac{4}{3}m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p l \cos \theta \ddot{x} - m_p g l \sin \theta &= -\varphi(\dot{\theta}) + \omega_2(t).\end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores, x y θ son coordenadas generalizadas (ver figura 3), m_c y m_p son la masa del carro y del péndulo respectivamente, l es la distancia del centro de masa del péndulo a el pivote de este, g es la aceleración de la gravedad, τ es la entrada de control, $\omega_1(t)$ y $\omega_2(t)$ son perturbaciones acotadas las cuales se usan para tomar en cuenta las incertidumbres del modelo y perturbaciones externas. $\psi(\dot{x})$ y $\varphi(\dot{\theta})$ son las fuerzas de fricción del carro y del péndulo, respectivamente.

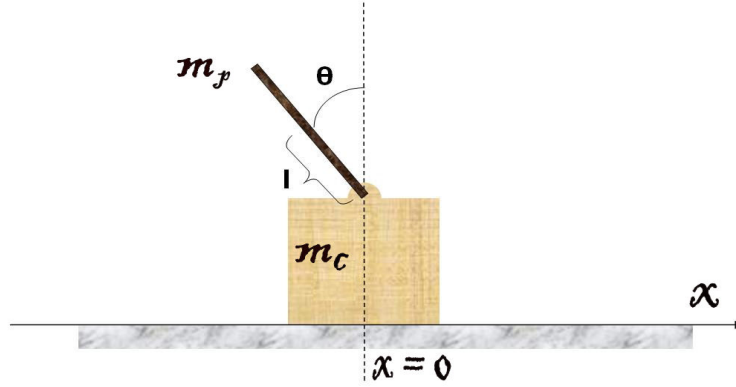


Figura 3: Sistema mecánico subactuado carro-péndulo.

Se usa el siguiente modelo para describir la fricción

$$\psi(\dot{x}) = \psi_{Dahl}(\dot{x}) + \psi_v \dot{x} \text{ y } \varphi(\dot{\theta}) = \varphi_{Dahl}(\dot{\theta}) + \varphi_v \dot{\theta}$$

donde $\psi_v, \varphi_v > 0$ denota los coeficientes de la fricción viscosa. Se supone que la evolución de la fricción de Coulomb está descrita por el modelo de Dahl y está dado por:

$$\dot{\psi}_{Dahl}(\dot{x}) = \sigma_x \left[\dot{x} - \frac{\psi_{Dahl}(\dot{x})}{\psi_c} |\dot{x}| \right] \text{ y } \dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}) = \sigma_\theta \left[\dot{\theta} - \frac{\varphi_{Dahl}(\dot{\theta})}{\varphi_c} |\dot{\theta}| \right]$$

donde σ_x y σ_θ son los coeficientes de rigidez, así como ψ_c y φ_c representan la fuerza de fricción de Coulomb del carro (motor lineal) y de la barra, respectivamente.

El objetivo de control es estabilizar al sistema mecánico subactuado carro-péndulo en la posición donde el péndulo se encuentra en la posición vertical inestable $\theta = 0$ y el carro en $x = 0$, el cual es la parte actuada del sistema.

Por conveniencia de diseño, se escriben las ecuaciones (III.1) en términos de la posición y de la velocidad, tanto de péndulo como de carro. Después de varias

operaciones matemáticas se obtiene la siguiente representación en espacio de estado:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(3m_p g l \cos \theta - 4m_p l^2 \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \\ \dot{\theta} \\ \frac{3((m_c + m_p)g - m_p l \cos \theta \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4l}{D} \\ 0 \\ \frac{3 \cos \theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t)) \\
 &- \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3 \cos \theta}{D} \\ 0 \\ \frac{3(m_c + m_p)}{m_p l D} \end{bmatrix} (\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t))
 \end{aligned} \tag{29}$$

donde

$$\begin{aligned}
 D &= l(4m_c + m_p + 3m_p \sin^2 \theta) > 0 \\
 \tau &= u^* + m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Para reducir el sistema (29) a su forma regular se utiliza un cambio de variable $y = \phi(x, \theta)$ tal que la segunda derivada con respecto a y no dependa del control u^* . De tal forma que las variables de estado $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ usando la transformación de coordenadas, quedan como $(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$

$$y = \phi(x, \theta) = x + \varrho(\theta) \tag{31}$$

donde

$$\varrho(\theta) = -\frac{4l}{3} \ln \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)}$$

es solución de la ecuación diferencial $\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{B_1}{B_2}$, donde $B_1 = \frac{4k}{3}$ y $B_2 = -\frac{\cos \theta}{kl}$.

$$\dot{y} = \dot{x} - \frac{4l}{3} \frac{\dot{\theta}}{\cos \theta}$$

$$\ddot{y} = \ddot{x} - \frac{4l}{3} \frac{\ddot{\theta}}{\cos \theta} - \frac{4l \sin \theta \dot{\theta}^2}{3 \cos^2 \theta} \quad (32)$$

La forma regular se obtiene de substituir (29) en (32), después de simplificar obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= G(\theta, \dot{\theta}) \tan \theta + \zeta \\ \ddot{\theta} &= \nu(\theta, u^*) \end{aligned} \quad (33)$$

donde

$$\begin{aligned} G(\theta, \dot{\theta}) &= -\frac{1}{D} (4l(m_c + m_p)g - 3m_p g l \cos^2 \theta) \\ &\quad - \frac{4l\dot{\theta}^2}{3 \cos \theta} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\zeta(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{D} \left(\frac{4(m_c + m_p)}{m_p \cos \theta} - 3 \cos \theta \right) \left(\frac{\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2}{\cos \theta} \right) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \nu(\theta, u^*) &= \frac{1}{D} (3(m_c + m_p)g \sin \theta + 3 \cos \theta (u^* - \psi(\dot{x}) + \omega_1)) \\ &\quad - \frac{3(m_c + m_p)}{m_p l D} (\phi(\dot{\theta}) - \omega_2) \end{aligned} \quad (36)$$

Paso 1.

Considere la ecuación del sistema (33). La función denotada como $G(\theta, \dot{\theta})$ es negativa para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Para este control intermedio se escoge $\tan \theta$ como

una combinación de y y \dot{y}

$$\tan \theta = \alpha_1 s_2 \quad (37)$$

donde $\alpha_1 > 0$ y $s_2 = y + \dot{y}$, entonces la primer ecuación de (33) se representa como

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -y + s_2 \\ \dot{s}_2 &= -y + (\alpha_1 G(\theta, \dot{\theta}) + 1)s_2 + \zeta \end{aligned} \quad (38)$$

Para mostrar la convergencia de las trayectorias del sistema III.1 a la superficie s_2 , se estudia la derivada de la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(y^2 + s_2^2) \quad (39)$$

con $V = 0$ en el origen $(y, s_2) = (0, 0)$ es

$$\dot{V} = -y^2 + (\alpha_1 G + 1 + \frac{\zeta}{s_2})s_2^2 \quad (40)$$

$$\dot{V} = -y^2 - |G|(\alpha_1 - \frac{1 + \frac{\zeta}{s_2}}{|G|})s_2^2 \quad (41)$$

ya que $G(\theta, \dot{\theta}) < 0$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, se observa que $\dot{V} < 0$ cuando se satisface la desigualdad $\alpha_1 > \frac{1 + \frac{\zeta}{s_2}}{|G|}$, entonces el parámetro α_1 se debe escoger para satisfacer la desigualdad anterior, para cualquier t . Entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable si $y \rightarrow 0$ y $s_2 \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow \infty$. Consecuentemente $(x, \theta) \rightarrow (0, 0)$ mientras $t \rightarrow \infty$.

Para implementar el control intermedio (37) el control u^* se debe diseñar tal que la función $s_1 = \tan \theta - \alpha_1(y + \dot{y}) \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow \infty$, entonces $\tan \theta \rightarrow \alpha_1(y + \dot{y})$.

Paso 2.

La función s_1 tiende a cero asintóticamente si es solución de la ecuación diferencial

$$\dot{s}_1 = -\frac{\alpha}{\cos^2 \theta} s_1 \quad (42)$$

o

$$s(\theta, \dot{\theta}, y, \dot{y}) = (\cos^2 \theta) \dot{s}_1 + \alpha s_1 = 0 \quad (43)$$

con

$$s_1 = \tan \theta - \alpha_1 (y + \dot{y}) \quad (44)$$

y

$$\dot{s}_1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} - \alpha_1 (\dot{y} + G \tan \theta + \zeta) \quad (45)$$

Paso 3.

Para asignar la ley de control tal que

$$s = \dot{\theta} - \alpha_1 \cos^2 \theta (\dot{y} + G \tan \theta + \zeta) + \alpha s_1 = 0 \quad (46)$$

se calcula la derivada con respecto al tiempo de la función s a lo largo de las soluciones de (33)

$$\dot{s} = \Psi(\theta, \dot{\theta}) \nu + F(\theta, \dot{\theta}, \dot{y}) \quad (47)$$

donde

$$\Psi(\theta, \dot{\theta}) = 1 + \frac{8}{3} l \alpha_1 \dot{\theta} \sin \theta + \frac{\alpha_1 \varphi_v \cos \theta}{D} \left(3 \cos^2 \theta - \frac{4(m_c + m_p)}{m_p} \right)$$

y

$$\begin{aligned}
F(\theta, \dot{\theta}, \dot{y}) &= -2\alpha_1 \cos \theta \sin \theta (\dot{y} + G \tan \theta) \dot{\theta} + \alpha_1 \dot{s}_1 - \alpha_1 \cos^2 \theta G \tan \theta \\
&- \alpha_1 \cos^2 \theta \left(\theta G \sec^2 \theta \dot{\theta} + \frac{1}{D} 6m_p g l \sin^2 \theta \dot{\theta} \right) \\
&- \frac{\alpha_1 \sin \theta}{D} \left[6 \cos^2 \theta \dot{\theta} + \tan^2 \theta (3 \cos^2 \theta \dot{\theta} + \frac{4}{m} \dot{\theta}) \right] (\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2) \\
&+ \frac{\alpha_1 \cos \theta \sin \theta}{D} \left(3 \cos^2 \theta + \frac{4(m_c + m_p)}{m_p \sin \theta} \right) \dot{\varphi}_{Dahl} \\
&+ \frac{\alpha_1 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{D} (3m_p g l \cos^2 \theta - 4l(m_c + m_p)g) 6m \dot{\theta} \\
&- \frac{\alpha_1 \cos^2 \theta}{D} \left(3 \cos^2 \theta + \frac{4(m_c + m_p)}{m_p} \right) (\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2) 6m \sin \theta \dot{\theta} \\
&- \frac{4l}{3} \alpha_1 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 6m \sin \theta \dot{\theta} + \frac{4l\alpha_1}{3} D \dot{\theta}^3 \sin \theta
\end{aligned} \tag{48}$$

El estado alcanza la superficie $s = 0$ para cualquier condición inicial y existen modos deslizantes en cualquier punto de la superficie si la desviación de la superficie s y su derivada con respecto al tiempo tienen signos opuestos. Esta condición se cumple si

$$\nu = -\nu_0 \operatorname{sgn}(s\Psi(\theta, \dot{\theta})) \tag{49}$$

donde

$$\nu_0 \geq \frac{|F_{max}|}{|\Psi_{min}|} \tag{50}$$

Finalmente, el control real se obtiene de (49), (36) y (30)

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{3 \cos \theta} \left(-3(m_c + m_p)g \sin \theta + \frac{3(m_c + m_p)}{ml} \varphi(\dot{\theta}) - D l \nu_0 \operatorname{sgn}(s\Psi) \right) \\
&- ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + \psi(\dot{x})
\end{aligned} \tag{51}$$

Note que los modos deslizantes se pierden si $\Psi = 0$, ya que \dot{s} en (47) no depende del control ν para $\Psi = 0$. Por un lado, tomando en cuenta al sistema carro-péndulo sin ser afectado por el fenómeno de fricción, la función Ψ es positiva para el dominio

$8\alpha_1 \sin \theta \dot{\theta} > -3$ incluyendo el origen (tomando en cuenta $\varphi(\dot{\theta}) = \psi(\dot{x}) = 0$). Por otro lado para el dominio

$$\frac{9 \cos \theta}{64\alpha_1^2 l^2 \sin^2 \theta} > \sin \theta \nu_0 \quad (52)$$

una trayectoria del sistema pueda intersectar la superficie $\Psi = 0$ sólo una vez. Para encontrar esta condición, se calcula la derivada con respecto al tiempo de Ψ con respecto a las trayectorias del sistema para los puntos en la superficie $\Psi = 0$:

$$\dot{\Psi} = \frac{8}{3}\alpha_1 l \cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta} = \frac{8}{3}l\alpha_1 \left(\frac{9 \cos \theta}{64\alpha_1^2 l^2 \sin^2 \theta} - \sin \theta \nu_0 \text{sgn}(s\Psi) \right)$$

Es claro que $\dot{\Psi} > 0$ si la condición (52) se cumple y muestra que existe el dominio de modo deslizante, incluyendo el punto de equilibrio.

III.1.1 Simulaciones numéricas.

En esta sección se realizan experimentos numéricos para ver el comportamiento del sistema carro-péndulo en lazo cerrado, cuando es afectado por fricción y perturbaciones constantes, utilizando este tipo de controlador (ver figuras 4, 6 y 8). Para este ejercicio se utilizan los siguientes parámetros para el controlador : $\alpha_1 = 0.5$; $\nu_0 = 10$; $\alpha = 70$; y condiciones iniciales en $(x(0), \theta(0), \dot{x}(0), \dot{\theta}(0)) = (-0.01, 0.001, 0, 0)$. En la primera columna de las figuras 4, 5, 6, 7 y 8 se muestra al sistema en lazo cerrado sin ser afectado por fricción ni perturbaciones. En la segunda columna se muestra al sistema carro-péndulo en lazo cerrado afectado por fricción, usando el modelo de Dahl para describir dicho fenómeno, y perturbaciones externas constantes $\omega_1 = 4$ y $\omega_2 = 0.0001$, tanto en carro, como en péndulo. Se utilizan los siguientes parámetros para el sistema carro-péndulo:

Como se puede ver en las figuras anteriores, se cumple con el objetivo de control, es decir, se estabiliza al sistema mecánico subactuado carro-péndulo en la posición en su punto de equilibrio inestable, $\theta^* = 0$ y $x^* = 0$. En la figura 9 se observa la

Tabla III: Parámetros de fricción para el sistema carro-péndulo utilizando el controlador FOSM.

| Notación | Valor | Unidades |
|-----------------|---------|-------------------------|
| m_c | 3.4 | kg |
| m_p | 0.147 | kg |
| l | 0.175 | m |
| ψ_v | 8.5 | $N \cdot s/m$ |
| φ_v | 0.0015 | $N \cdot m \cdot s/rad$ |
| ψ_c | 2 | N |
| φ_c | 0.00015 | $N \cdot m$ |
| σ_x | 10,000 | N/m |
| σ_θ | 30 | $N \cdot m/rad$ |

energía acumulada que se aplica al sistema carro-péndulo. Como se puede ver en la figura 9, el controlador FOSM requiere bastante energía para estabilizar localmente al sistema carro-péndulo en su punto de equilibrio inestable. Estos datos se necesitarán más adelante, para poder hacer comparaciones entre los controladores locales.

III.2 Controlador en modo deslizando de segundo orden (SOSM).

La síntesis cuasihomogénea, definida más adelante, se ilustra primero con un ejemplo de un manipulador de un grado de libertad, operando bajo condiciones de incertidumbre. La dinámica del manipulador está gobernada por:

$$\ddot{y} = \omega(y, \dot{y}, t) + u \quad (53)$$

donde y es la posición del manipulador, \dot{y} es la velocidad del manipulador, u es la entrada de control, $\omega(y, \dot{y}, t)$ es una no linealidad continua por secciones que contiene todas las fuerzas que afectan al manipulador (como fricción viscosa y de Coulomb,

gravedad, etc.).

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales (53), continuas por secciones en el lado derecho, se definen en el sentido de Filippov Filippov (1988) como aquellas con inclusiones diferenciales con un lado derecho multivaluado.

Operando bajo condiciones de incertidumbre implica que se tiene conocimiento incompleto de la no linealidad $\omega(y, \dot{y}, t)$. Este término, posiblemente provoque que el sistema sea inestable,

$$\omega(y, \dot{y}, t) = \omega^{nom}(y, \dot{y}, t) + \omega^{un}(y, \dot{y}, t) \quad (54)$$

contiene típicamente una parte nominal, conocida *a priori*, $\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$ para ser manipulada a través de un término no lineal y un término de incertidumbre $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$, los cuales serán compensados. Se supone que $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ es acotada globalmente, *i.e.*, la cota superior

$$|\omega^{un}(y, \dot{y}, t)| \leq N \quad (55)$$

es válida para todo $t \geq 0$ y $(y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2$ y para alguna constante $N > 0$ conocida *a priori*. Además, se supone que las funciones $\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$ y $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ son continuas por secciones.

La siguiente ley de control

$$u = -\omega^{nom}(y, \dot{y}, t) - \alpha \text{sgn}(y) - \beta \text{sgn}(\dot{y}) - hy - p\dot{y} \quad (56)$$

donde

$$N < \beta < \alpha - N, \quad h, p \geq 0 \quad (57)$$

estabiliza el sistema con incertidumbres (53)-(55) en tiempo finito. Al parecer, el controlador antes mencionado (56), (57) consiste en un término no lineal $-\omega^{nom}(z, t)$,

la ganancia lineal $-hy - pj$, y la parte de conmutación $\varphi(y, \dot{y}) = -\alpha \text{sgn}(y) - \beta \text{sgn}(\dot{y})$ tal que $\varphi(cy, c\dot{y}) = \varphi(y, \dot{y})$ para todo $c > 0$. Tal controlador, de aquí en adelante, se le llamará cuasihomogéneo.

Definición 2. *Un controlador se dice que es cuasihomogéneo si se puede representar como una combinación de un controlador conmutado homogéneo y un controlador continuo, el cual tiende a cero en el espacio de estado.*

La técnica propuesta en Orlov (2005a) establece que la estabilidad en tiempo de un sistema homogéneo de estructura variable se conserva a pesar de perturbaciones no homogéneas. En particular, se ha mostrado que el sistema no-homogéneo (53)-(57) es globalmente estable en tiempo finito a pesar de perturbaciones externas (54) sujetas a (55) afectando al sistema.

El comportamiento cualitativo del manipulador de un grado de libertad (53)-(55), llevado por el controlador de estructura variable (56), (57), es como sigue. Mientras se aproxima al origen $y = \dot{y} = 0$, las trayectorias oscilan alrededor de este punto. Se sabe bien de Orlov (2005a), que el sistema en lazo cerrado es estable en tiempo finito y los tiempos de conmutación tienen un punto límite finito. Entonces, el sistema (53)-(57) exhibe un comportamiento Zeno con un número finito de conmutaciones en un tiempo finito. Si alguna trayectoria empieza ahí, entonces aparece el llamado modo deslizante de segundo orden, solamente en el origen (ver Levant (1993)). En un caso particular, cuando el término de incertidumbre $\omega(y, \dot{y}, t) = \omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ no tiene parte nominal y las ganancias h, p del controlador se fijan en cero, la ley de control propuesta (56) se degenera al bien conocido algoritmo homogéneo de "twisting" Fridman y Levant (1996, 2002).

III.2.1 Modelo del carro-péndulo.

En esta sección se desarrollará el método de control en modo deslizante de segundo orden para el sistema mecánico subactuado de dos grados de libertad carro-péndulo

(3). Primeramente se hace un estudio del modelo matemático del sistema carro-péndulo utilizando las leyes de Newton. Al aplicar la segunda ley de Newton, las ecuaciones del sistema dinámico se obtienen

Aplicando la segunda ley de Newton de movimiento, la dinámica del sistema carro-péndulo está dada por

$$\begin{aligned}(m_c + m_p)\ddot{x} + m_p l \sin \theta \dot{\theta}^2 - m_p l \cos \theta \ddot{\theta} &= \tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t), \\ \frac{4}{3}m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p l \cos \theta \ddot{x} - m_p g l \sin \theta &= -\varphi(\dot{\theta}) + \omega_2(t).\end{aligned}$$

Se usa el siguiente modelo para describir la fricción

$$\psi(\dot{x}) = \psi_{Dahl}(\dot{x}) + \psi_v \dot{x} \quad \varphi(\dot{\theta}) = \varphi_{Dahl}(\dot{\theta}) + \varphi_v \dot{\theta}$$

donde $\psi_v, \varphi_v > 0$ denotan los coeficientes de la fricción viscosa. El diseño del control requiere que las perturbaciones desconocidas y las fuerzas de fricción sean diferenciables. Entonces, se supone que la evolución de la fricción de Coulomb está descrita por el modelo de Dahl, el cual está dado por:

$$\dot{\psi}_{Dahl}(\dot{x}) = \sigma_x \left[\dot{x} - \frac{\psi_{Dahl}(\dot{x})}{\psi_c} |\dot{x}| \right] \quad \text{y} \quad \dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}) = \sigma_\theta \left[\dot{\theta} - \frac{\varphi_{Dahl}(\dot{\theta})}{\varphi_c} |\dot{\theta}| \right]$$

donde σ_x y σ_θ son los coeficientes de rigidez, así como ψ_c y φ_c representan la fuerza de fricción de Coulomb del carro (motor lineal) y de la barra, respectivamente. El sistema de ecuaciones se puede reescribir en la forma (13) con:

$$\begin{aligned}M(q) &= \begin{bmatrix} m_c + m_p & -m_p l \cos \theta \\ -m_p l \cos \theta & \frac{4}{3}m_l^2 \end{bmatrix}; C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & ml \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p g l \sin \theta \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \psi(\dot{x}) - \omega_1(t) \\ \varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Después de operaciones matemáticas se obtiene la siguiente representación en espacio de estado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(3m_p g l \cos \theta - 4m_p l^2 \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \\ \dot{\theta} \\ \frac{3((m_c + m_p)g - m_p l \cos \theta \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4l}{D} \\ 0 \\ \frac{3 \cos \theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t)) \\
&- \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3 \cos \theta}{D} \\ 0 \\ \frac{3(m_c + m_p)}{m_p l D} \end{bmatrix} (\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t))
\end{aligned} \tag{58}$$

con $D = l(4m_c + m_p + 3m_p \sin^2 \theta) > 0$. Analizando (58), se puede ver que $\varphi(\dot{\theta})$ y $\omega_2(t)$ son términos de fricción y de perturbación desconocidos. Más adelante se podrá ver que el controlador, por desarrollar, atenúa el efecto de estos términos.

III.2.2 Diseño de la ley de control.

En esta sección, se construye un controlador cuasihomogéneo SOSM para estabilizar localmente al sistema carro-péndulo alrededor de su punto de equilibrio inestable. La idea clave es encontrar una transformación de espacio de estado difeomórfica para llevar al sistema carro-péndulo a su forma regular (14). Para este propósito, se define el siguiente cambio local de variable:

$$\eta = x - \frac{4}{3}l\varrho(\theta) \tag{59}$$

con

$$\varrho(\theta) = \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right), \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}. \tag{60}$$

Entonces, el sistema (58) se transforma en una cadena de dos integradores, con la

entrada de control actuando solamente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ -\left(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos \theta}\right) \tan \theta \\ \dot{\theta} \\ \frac{3((m_c+m_p)g - m_p l \cos \theta \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3 \cos \theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi + \omega_1) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_p l \cos \theta} \\ 0 \\ \frac{3(m_c+m_p)}{m_p l D} \end{bmatrix} (\varphi - \omega_2) \quad (61)$$

Se puede ver que los términos φ y ω_2 afectan al subsistema $(\eta, \dot{\eta})$ de la forma regular (61).

Se escoge una salida ficticia ξ para asegurar que el subsistema $(\eta, \dot{\eta})$ con $\varphi = \omega_2 = 0$ sea de fase mínima con respecto a ella. En seguida, se muestra que la salida requerida ξ puede ser escogida, de forma local, como:

$$\xi = \tan \theta - \lambda_1 \eta - \lambda_2 \dot{\eta}, \quad (62)$$

con λ_1 y $\lambda_2 > 0$.

Tomando en cuenta (59), (60), y (62), se puede ver que θ y x convergen a cero cuando η , $\dot{\eta}$ y ξ tienden a cero. Entonces, forzando un movimiento deslizante en $\xi = 0$ resuelve el problema de estabilización asintótica de x y θ bajo el supuesto de que el subsistema $(\eta, \dot{\eta})$ es de fase mínima con respecto a ξ . El problema ahora es diseñar un controlador de conmutación que garantice la convergencia en tiempo finito de ξ a cero.

Diferenciando ξ dos veces, se obtiene:

$$\ddot{\xi} = \mu(\theta, \dot{\theta}) + \zeta(\theta, \dot{\theta}) + u(\theta, \dot{\theta}), \quad (63)$$

con

$$\begin{aligned}
\mu(\theta, \dot{\theta}) &= 2 \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta}^2 + \left[\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{8l\lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta}{3 \cos \theta} - \frac{\lambda_2 \varphi_v}{m_p l \cos \theta} \right] \\
&\cdot \left[\frac{3[(m_c + m_p)g - m_p l \cos \theta \dot{\theta}^2] \sin \theta - 3 \cos \theta \psi(\dot{x}) - 3 \frac{m_c + m_p}{m_p l} \varphi(\dot{\theta})}{D} \right] \\
&+ \left[g + \frac{4}{3} \frac{l \dot{\theta}^2}{\cos \theta} \right] \lambda_1 \tan \theta + \left[g + \frac{4}{3} \frac{l \dot{\theta}^2 (1 + \sin^2 \theta)}{\cos \theta} \right] \lambda_2 \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \\
&- \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta}{m_p l \cos \theta} \right] \varphi(\dot{\theta}) - \frac{\lambda_2}{m_p l \cos \theta} \dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}), \tag{64}
\end{aligned}$$

$$u(\theta, \dot{\theta}) = \left[\frac{3m_p l + 8m_p l^2 \lambda_2 \dot{\theta} \sin \theta - 3\lambda_2 \cos \theta \varphi_v}{m_p l D \cos \theta} \right] \tau, \tag{65}$$

y el término de incertidumbre

$$\begin{aligned}
\zeta(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{m_p l \cos \theta} \left[\frac{m_p l}{\cos \theta} + \frac{8ml^2 \lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta}{3} - \lambda_2 \varphi_v \right] \\
&\cdot \left[\frac{3 \cos \theta}{D} \omega_1 + \frac{3(m_c + m_p)}{m_p l D} \omega_2 \right] \\
&+ \frac{1}{m_p l \cos \theta} \left[(\lambda_1 + \lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta) \omega_2 + \lambda_2 \dot{\omega}_2 \right] \tag{66}
\end{aligned}$$

Debido a restricciones físicas, se puede escoger λ_2 suficientemente pequeño tal que $3ml + 8ml^2 \lambda_2 \dot{\theta} \sin \theta - 3\lambda_2 \cos \theta \varphi_v \neq 0$ en (65).

El sistema descrito por

$$\ddot{\eta} = - \left(g + \frac{4}{3} l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos \theta} \right) (\xi + \lambda_1 \eta + \lambda_2 \dot{\eta}) + \frac{1}{m_p l \cos \theta} (\varphi - \omega_2). \tag{67}$$

junto con (63) está en una forma regular, similar a (14) cuando $\varphi = \omega_2 = 0$.

Nota 1. Para llevar al sistema carro-péndulo a su forma regular dada por (14), se tiene que describir las ecuaciones de estado en términos de η y ξ . De hecho, (63) y (67) constituye la forma regular, ya que las variables θ y $\dot{\theta}$ son funciones implícitas de las nuevas variables de estado η , $\dot{\eta}$, ξ y $\dot{\xi}$.

Como (63) es similar a (53), se utiliza la ley de control u como sigue:

$$u = -\mu(\theta, \dot{\theta}) - \alpha \operatorname{sgn}(\xi) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi},$$

lo cual nos da:

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{m_p l D \cos \theta}{\left[3m_p l + 8m_p l^2 \lambda_2 \dot{\theta} \sin \theta - 3\lambda_2 \cos \theta \varphi_v \right]} \left[-\mu(\theta, \dot{\theta}) - \alpha \operatorname{sgn}(\xi) \right. \\ & \left. - \beta \operatorname{sgn}(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi} \right] \end{aligned} \quad (68)$$

Se supone que ω_1 , ω_2 , $\dot{\omega}_2$ y $\dot{\theta}$ son acotadas. Entonces ζ es una perturbación uniformemente acotada por una constante $N > 0$, $|\zeta| < N$ para casi todo t , θ y $\dot{\theta}$. Entonces, fijando

$$N < \beta < \alpha - N \quad h, p \geq 0, \quad (69)$$

el controlador cuasihomogéneo (68), (69) asegura la estabilidad en tiempo finito del sistema $(\xi, \dot{\xi})$. La dinámica equivalente en la variedad $\xi = 0$ está dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \rho & -\lambda_2 \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_p l \cos \theta} \end{bmatrix} (\varphi - \omega_2). \quad (70)$$

con $\rho = \left(g + \frac{4}{3} l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos \theta} \right) > 0$, $\forall \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Finalmente, queda investigar la estabilidad asintótica de (70), cuando $\varphi = \omega_2 = 0$.

Nótese que existe un cambio de base:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix},$$

con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}, \kappa > 0,$$

esto transforma al sistema (70) en la forma

$$\dot{\Omega} = \begin{bmatrix} -\kappa & 1 \\ \kappa\sigma & \delta \end{bmatrix} \Omega, \quad (71)$$

$$\sigma = \frac{-\kappa^2 + \lambda_2\rho\kappa - \lambda_1\rho}{\kappa} \quad \text{y} \quad \delta = \kappa - \lambda_2\rho.$$

Tomando

$$V(\Omega) = |\Omega| = \begin{bmatrix} |\Omega_1| \\ |\Omega_2| \end{bmatrix} \quad (72)$$

como función vectorial de Lyapunov (Borne *et. al.* (2003) y Grujić *et. al.* (1976)) el lado derecho de la derivada Dini de $V(\Omega)$ nos da como resultado

$$D^+V(\Omega) \leq \Gamma V(\Omega), \quad (73)$$

con

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\kappa & |1| \\ |\kappa\sigma| & \delta \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Si

$$\lambda_2^2 > \frac{4\lambda_1}{\rho}, \quad (75)$$

entonces existe $\kappa > 0$ tal que $\kappa^2 - \lambda_2\rho\kappa + \lambda_1\rho < 0$ y

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\kappa & 1 \\ \kappa\sigma & \delta \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Note que los términos no constantes en (76) aparecen en el último renglón solamente, y Γ es una matriz Metzler. Esto nos permite aplicar la teoría de estabilidad lineal (ver Borne *et. al.* (2003), Grujić *et. al.* (1976)). Por lo tanto, bajo la condición (75), $\Omega = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema no lineal (71). Ahora, tomando en cuenta la fricción del péndulo $\varphi(\dot{\theta})$ y la perturbación $\omega_2(t)$, se puede ver que se pierde la propiedad de estabilidad asintótica, pero se puede utilizar la teoría de estabilidad lineal para mostrar que el sistema perturbado (70) converge a una bola

alrededor del origen, así obteniendo estabilidad práctica. El radio de esta bola puede reducirse sintonizando λ_1 y λ_2 .

III.2.3 Simulaciones numéricas (SOSM).

En esta sección se realizan experimentos numéricos para ver el comportamiento del sistema carro-péndulo, afectado por fricción y perturbaciones, utilizando este tipo de controlador. Para este experimento se utilizan los siguientes parámetros para el controlador : $h=10$, $p=10$, $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 5$, $\alpha = 10$, $\beta = 5$ y condiciones iniciales en $(x(0), \theta(0), \dot{x}(0), \dot{\theta}(0)) = (0.01, -0.001, 0, 0)$. En la primer columna de las figuras 10, 11, 12, 13 y 14 se muestra al sistema en lazo cerrado sin ser afectado por fricción ni perturbaciones. En la segunda columna se muestra al sistema carro-péndulo en lazo cerrado afectado por fricción, usando el modelo de Dahl para describir dicho fenómeno, y perturbaciones externas constantes $\omega_1 = 3$ y $\omega_2 = 0.0002$, tanto en carro, como en péndulo. Se utilizan los siguientes parámetros para describir el fenómeno de fricción del sistema carro-péndulo, cabe mencionar que se utilizan los mismos datos para la masa del carro, la masa y la longitud del péndulo para todos los controladores que se estudian (ver cuadro III):

Tabla IV: Parámetros de fricción para el sistema carro-péndulo utilizando el controlador SOSM.

| Notación | Valor | Unidades |
|-----------------|--------|-------------------------|
| ψ_v | 8.5 | $N \cdot s/m$ |
| φ_v | 0.0015 | $N \cdot m \cdot s/rad$ |
| ψ_c | 2 | N |
| φ_c | 0.0002 | $N \cdot m$ |
| σ_x | 10,000 | N/m |
| σ_θ | 30 | $N \cdot m/rad$ |

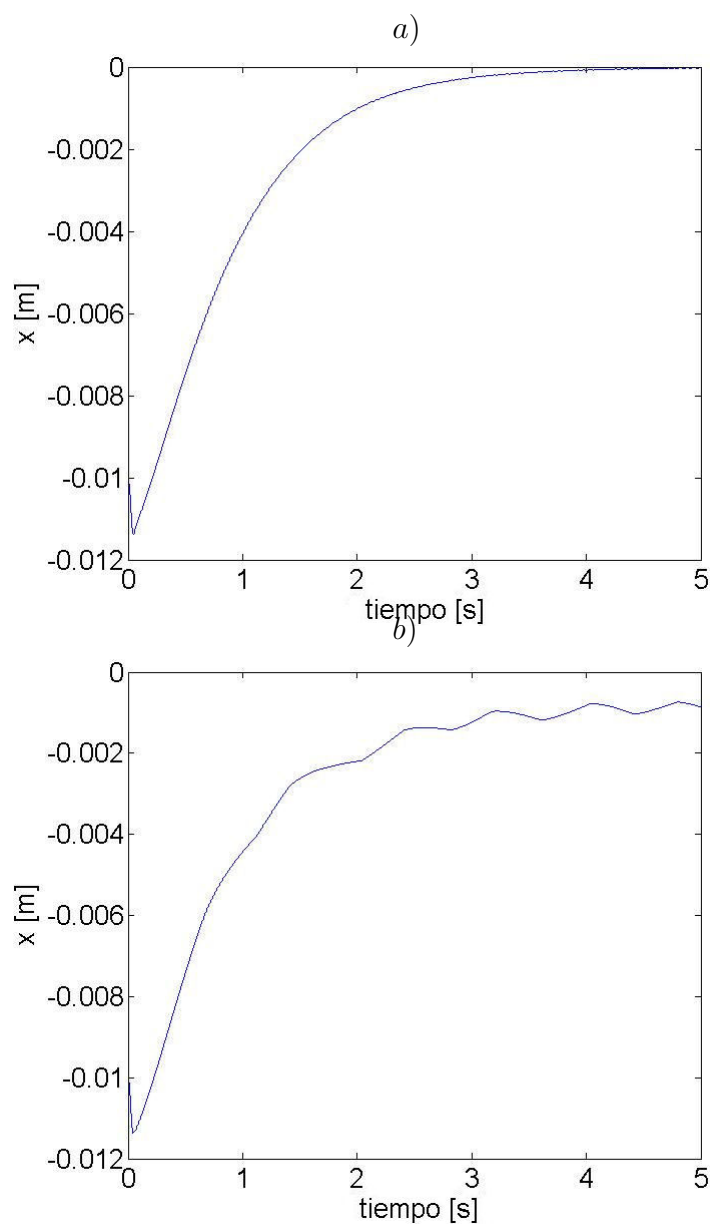


Figura 4: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. *a)* Posición de carro sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

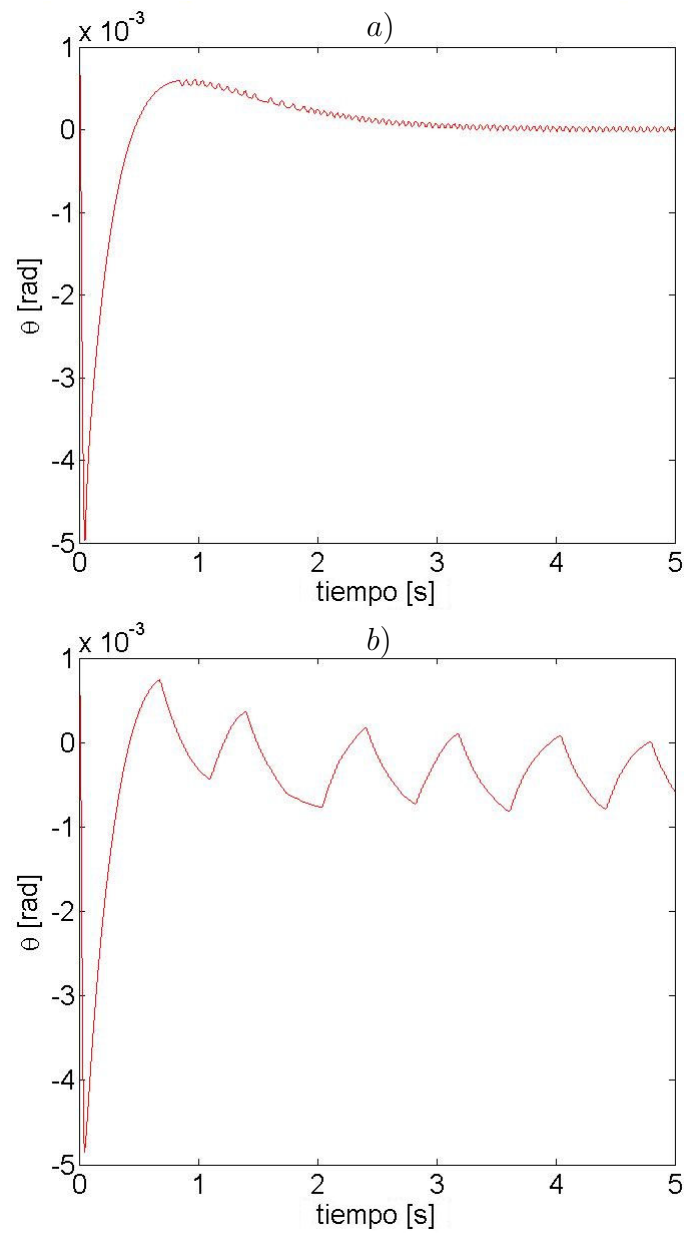


Figura 5: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. *a)* Posición de péndulo sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

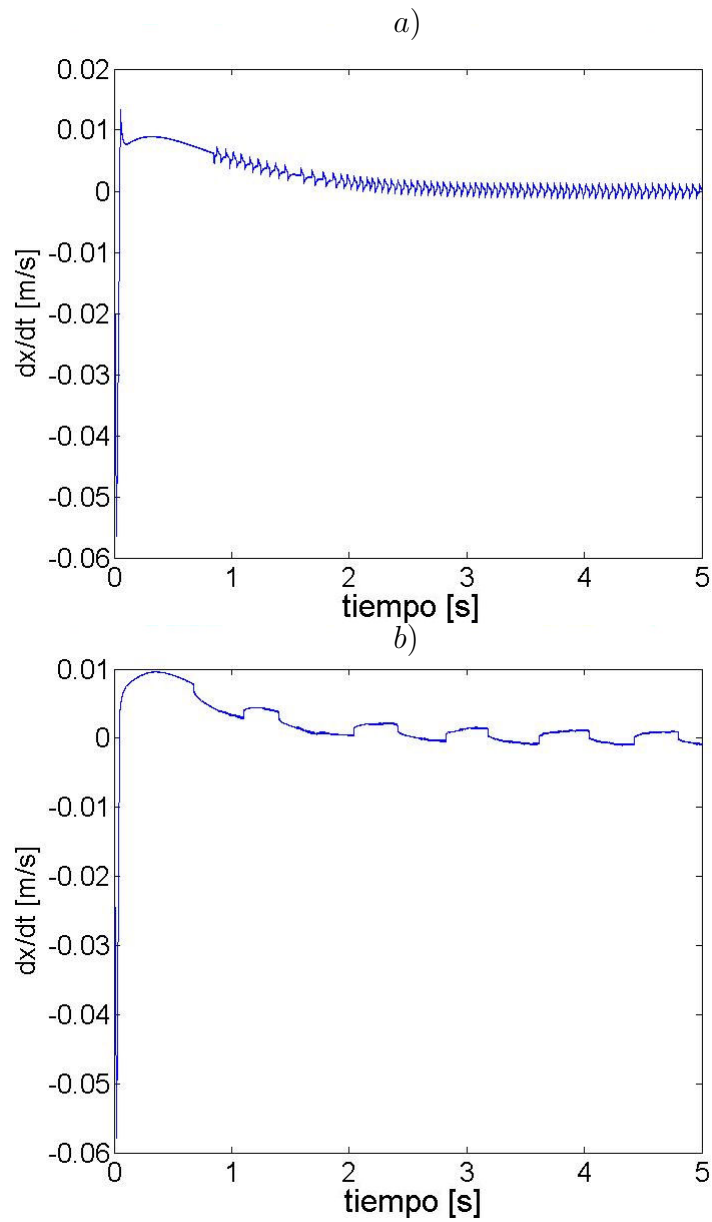


Figura 6: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. *a)* Velocidad de carro sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

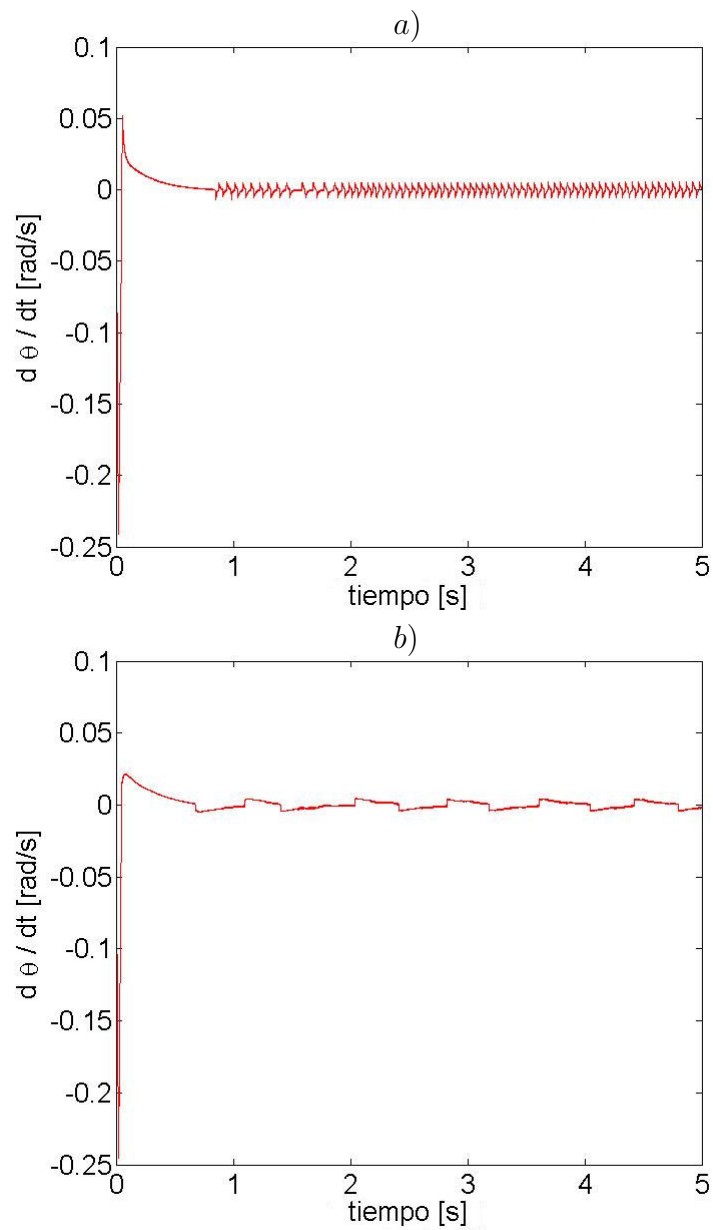


Figura 7: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. *a)* Velocidad de péndulo sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

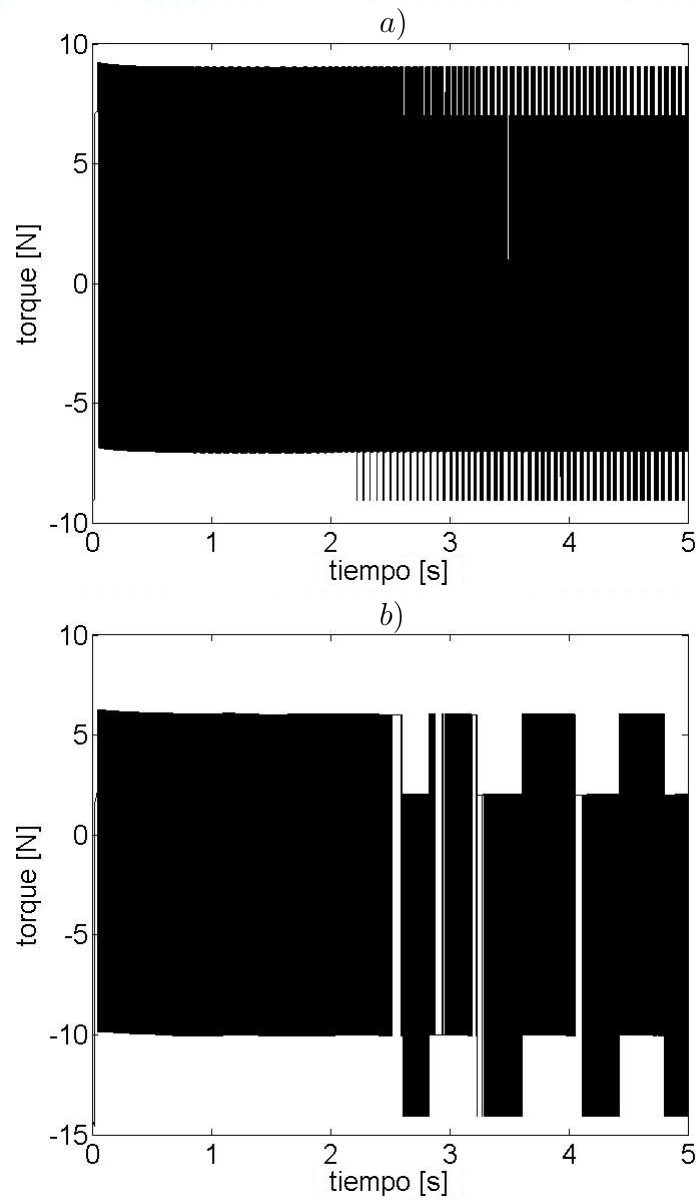


Figura 8: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. *a)* Torque aplicado al sistema sin fricción ni perturbaciones. *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

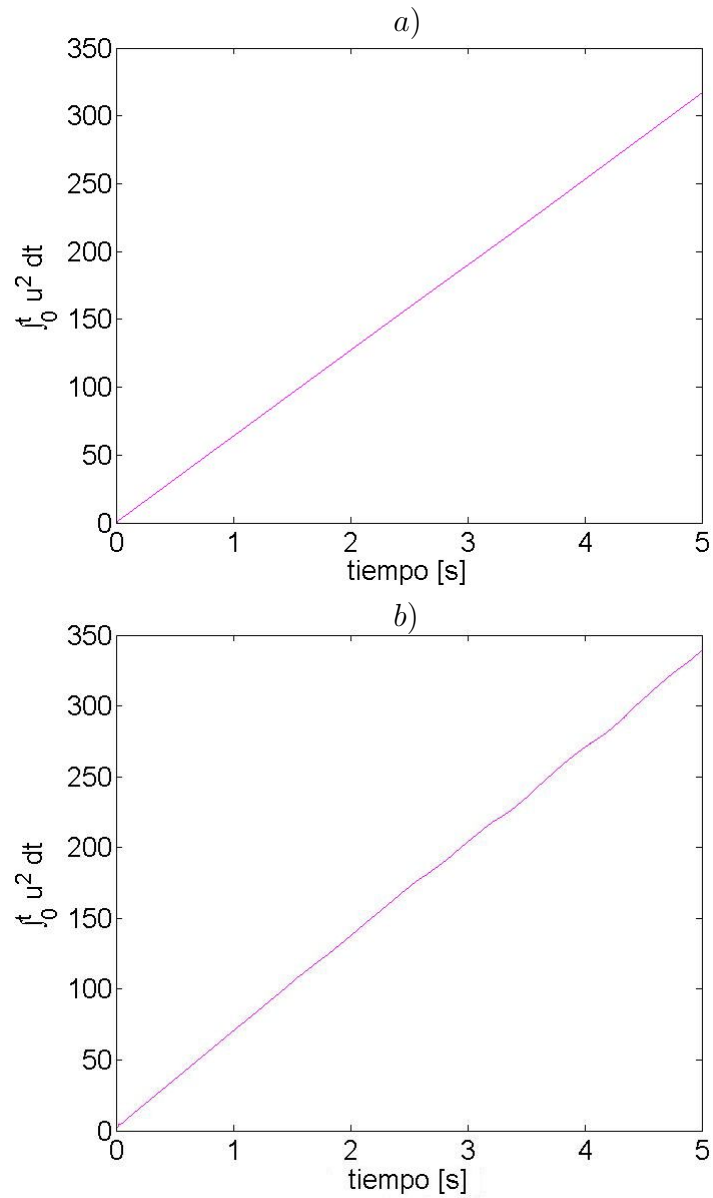


Figura 9: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de primer orden. *a)* Energía del sistema sin fricción ni perturbaciones. *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

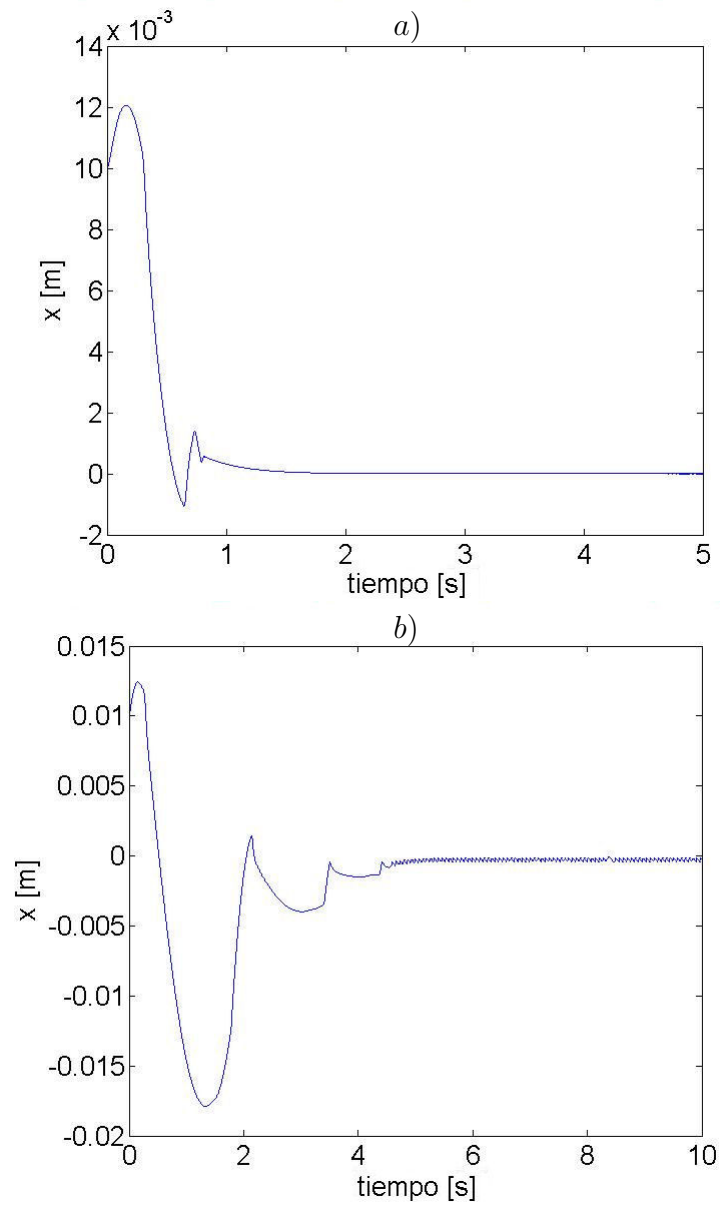


Figura 10: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. *a)* Posición de carro sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

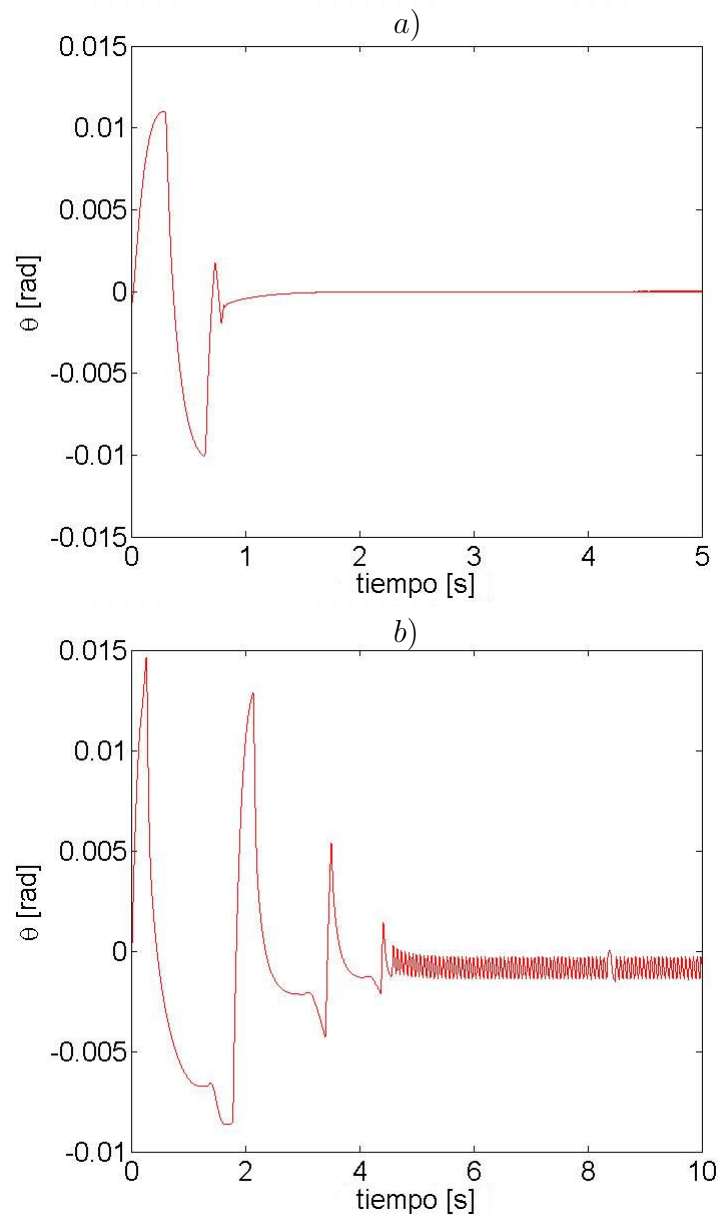


Figura 11: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. *a)* Posición de péndulo sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

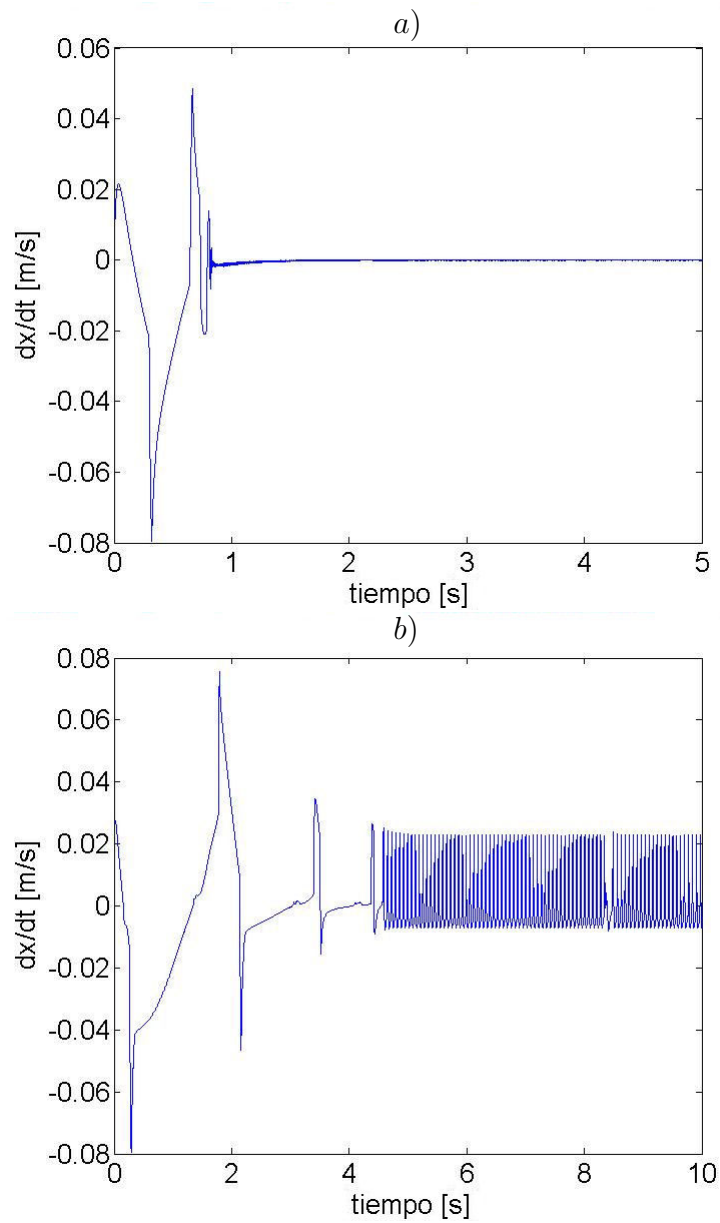


Figura 12: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. *a)* Velocidad de carro sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

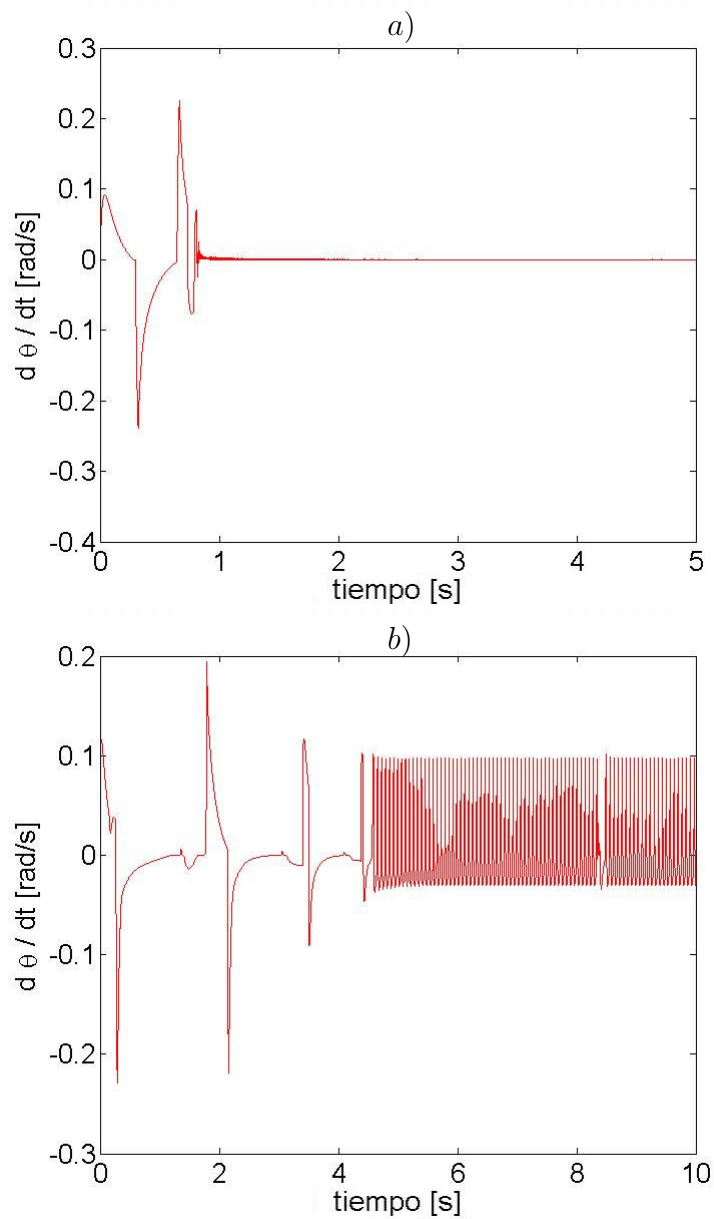


Figura 13: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. *a)* Velocidad de péndulo sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

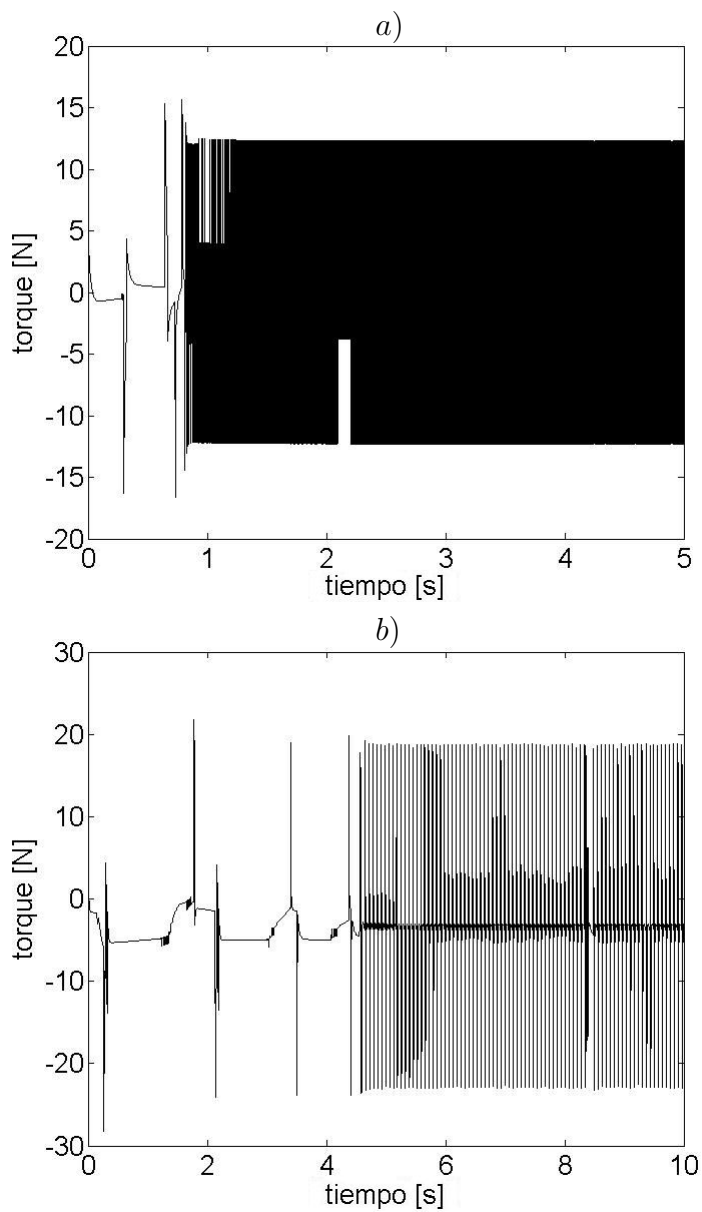


Figura 14: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. *a)* Torque aplicado al sistema sin fricción ni perturbaciones. *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

III.3 Control H_∞ .

En la siguiente sección se desarrolla el controlador local H_∞ para el carro-péndulo. La motivación para utilizar dicha metodología es tratar de resolver el problema conocido como chattering, el cual se presenta en los controladores de primer y de segundo orden en modo deslizante. El procedimiento para diseñar el controlador H_∞ no suave se basa en resolver la ecuación de Ricatti con una cierta perturbación (para el problema de control de H_∞ estándar para sistemas lineales ver Orlov y Aguilar (2004)).

Tomando en cuenta que el sistema carro-péndulo (III.2.1) cumple con las restricciones que se piden en Orlov y Aguilar (2004), para poder aplicar la técnica de control H_∞ , entonces las ecuaciones del carro-péndulo (III.2.1) se pueden reescribir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + n_1 &= \tau_1 + \omega_1 \\ m_{12}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + n_2 &= \omega_2 \end{aligned} \quad (77)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= u + |M|^{-1}\omega_1 - |M|^{-1}\omega_2 \\ \ddot{q}_2 &= -m_{22}^{-1} (n_2 - \omega_2 + m_{12}(u + |M|^{-1}\omega_1 - |M|^{-1}\omega_2)) \end{aligned} \quad (78)$$

donde,

$$\begin{aligned} |M| &= m_{11} - m_{12}m_{22}^{-1}m_{12} \\ N &= (n_1, n_2)' \end{aligned} \quad (79)$$

se define el espacio de estados como $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T$ y $z = (z_1, z_2, z_3)^T$

Entonces el sistema queda en la siguiente forma para aplicar el controlador H_∞ al

sistema carro-péndulo (III.2.1).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)\omega_1 + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{12}u \end{aligned} \quad (80)$$

donde,

$$f(x) = (x_3, x_4, 0, -m_{22}^{-1}n_2)^T \quad (81)$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ |M|^{-1} & -|M|^{-1} \\ -m_{22}^{-1}|M|^{-1}m_{12} & (1 + |M|^{-1}m_{12})m_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (82)$$

$$g_2(x) = (0, 0, 1, -m_{22}^{-1}m_{12})^T \quad (83)$$

$$h_1(x) = (0, x_1, x_2)^T \quad (84)$$

$$k_{12}(x) = (1, 0, 0)^T \quad (85)$$

Se propone la siguiente ley de control (considerando que todos los estados son medibles)

$$u = -g_2^T(x)P_\varepsilon x \quad (86)$$

donde P_ε es la matriz solución, simétrica y definida positiva, de la ecuación de Ricatti perturbada:

$$P_\varepsilon A + A^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon [\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T] P_\varepsilon = -\varepsilon I \quad (87)$$

para algún ε y γ , y donde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), B_1 = g_1(0), B_2 = g_2(0), C_1 = \frac{\partial h_1}{\partial x}(0) \quad (88)$$

III.3.1 Resultados numéricos.

A continuación se muestran experimentos numéricos del sistema carro-péndulo utilizando el controlador H_∞ . Para este ejercicio se utilizaron los valores de $\gamma=70$; $\varepsilon=1.4$; $\rho=1$; para el controlador H_∞ . Se utilizaron las condiciones iniciales $(x(0), \theta(0), \dot{x}(0), \dot{\theta}(0)) = (0.01, -0.001, 0, 0)$. En la primera columna de las figuras 16, 17, 18, 19 y 20 se muestra al sistema en lazo cerrado sin ser afectado por fricción ni perturbaciones. En la segunda columna se muestra al sistema carro-péndulo, en lazo cerrado afectado por fricción, usando el modelo de Dahl para describir dicho fenómeno, y perturbaciones externas constantes $\omega_1 = 0.01$ y $\omega_2 = 0.0001$, tanto en carro, como en péndulo. Se utilizan los siguientes parámetros para describir el fenómeno de fricción del sistema carro-péndulo, recordando que se utilizan los mismos datos para la masa del carro, la masa y la longitud del péndulo para todos los controladores que se estudian (ver cuadro III):

Tabla V: Parámetros de fricción para el sistema carro-péndulo utilizando el controlador H_∞ .

| Notación | Valor | Unidades |
|-----------------|---------|-------------------------|
| ψ_v | 8.5 | $N \cdot s/m$ |
| φ_v | 0.0015 | $N \cdot m \cdot s/rad$ |
| ψ_c | 2 | N |
| φ_c | 0.00115 | $N \cdot m$ |
| σ_x | 6 | N/m |
| σ_θ | 0.1 | $N \cdot m/rad$ |

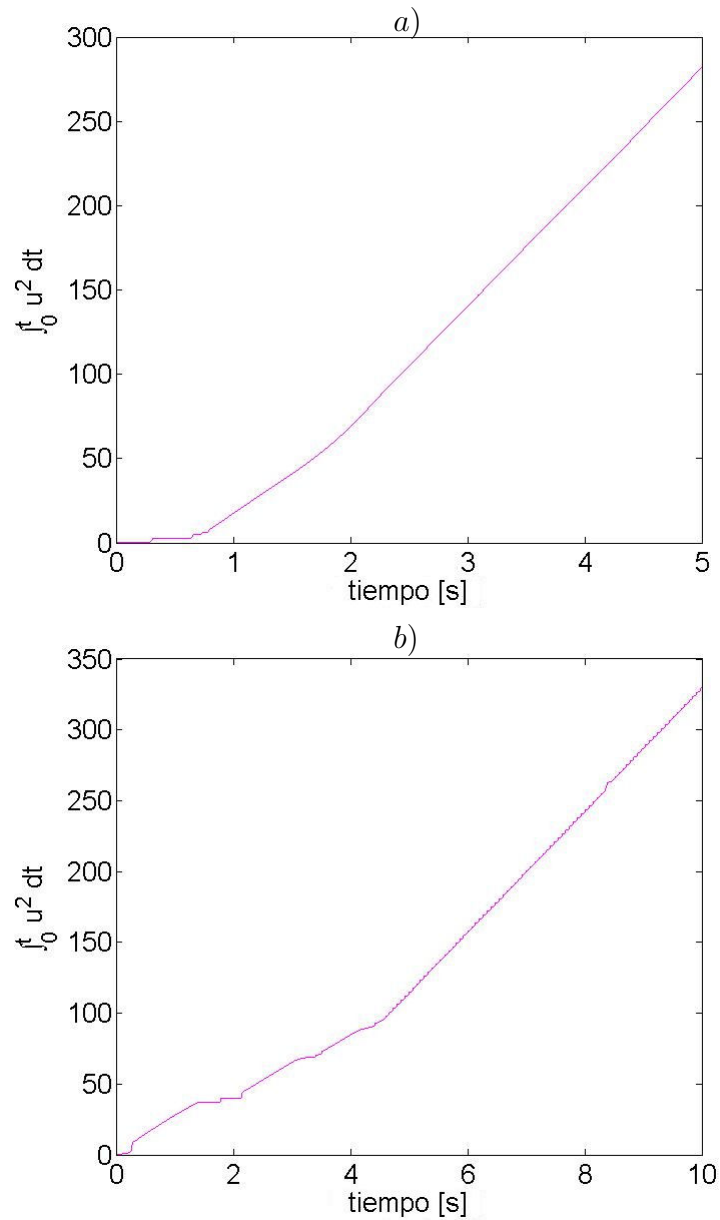


Figura 15: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control en modo deslizante de segundo orden. *a)* Energía del sistema sin fricción ni perturbaciones. *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

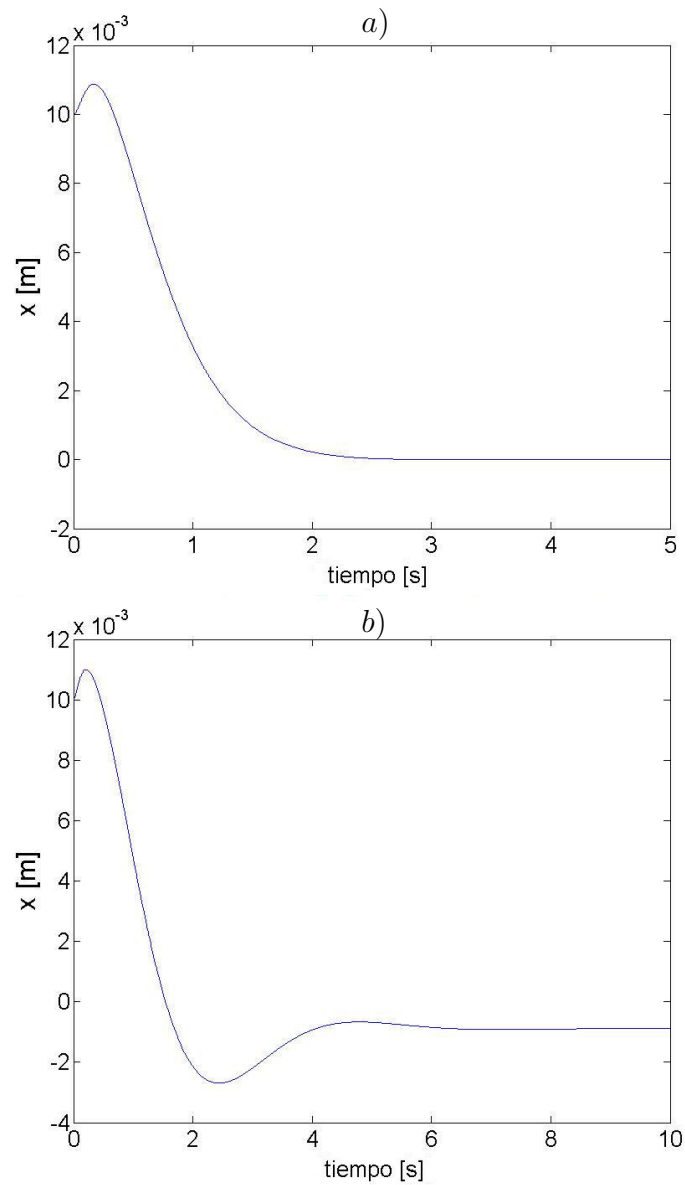


Figura 16: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . *a)* Posición de carro sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

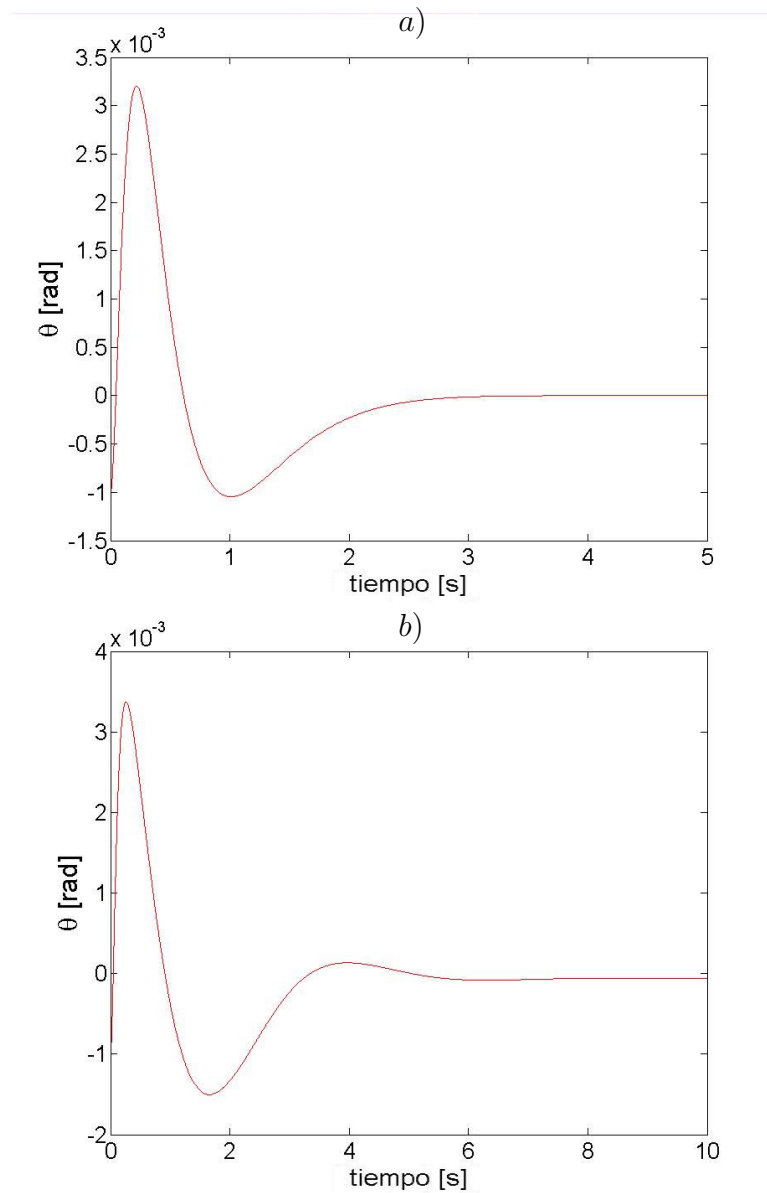


Figura 17: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . *a)* Posición de péndulo sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

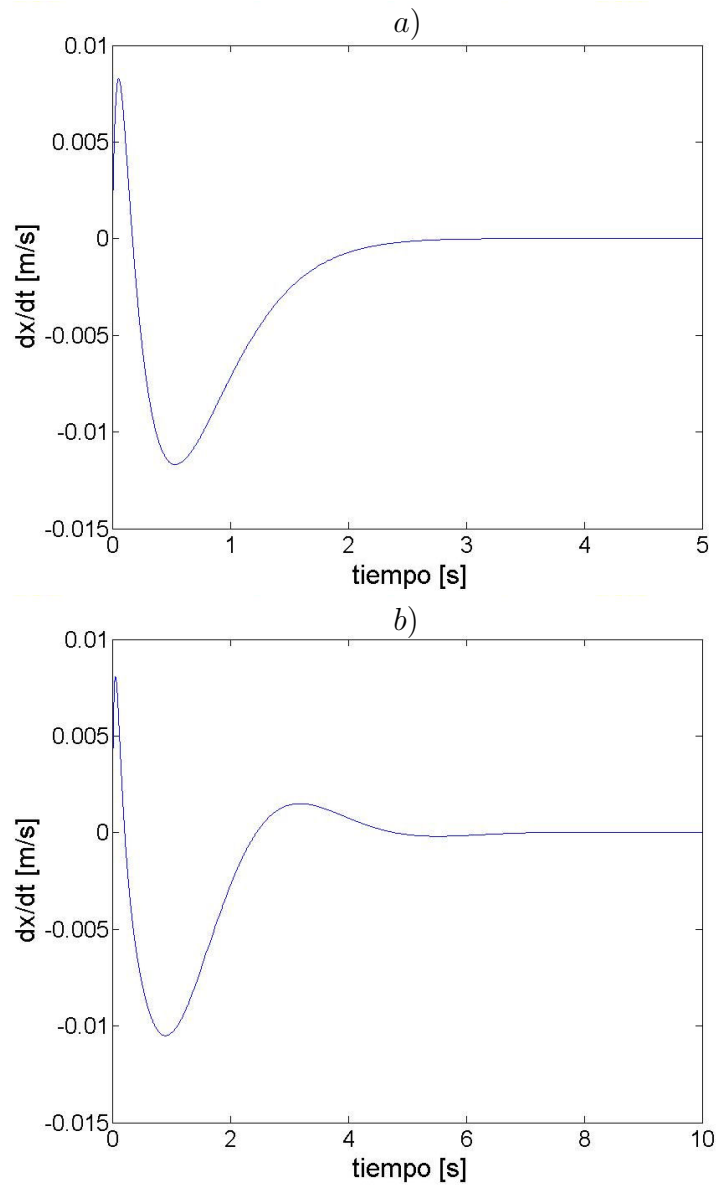


Figura 18: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . *a)* Velocidad de carro sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

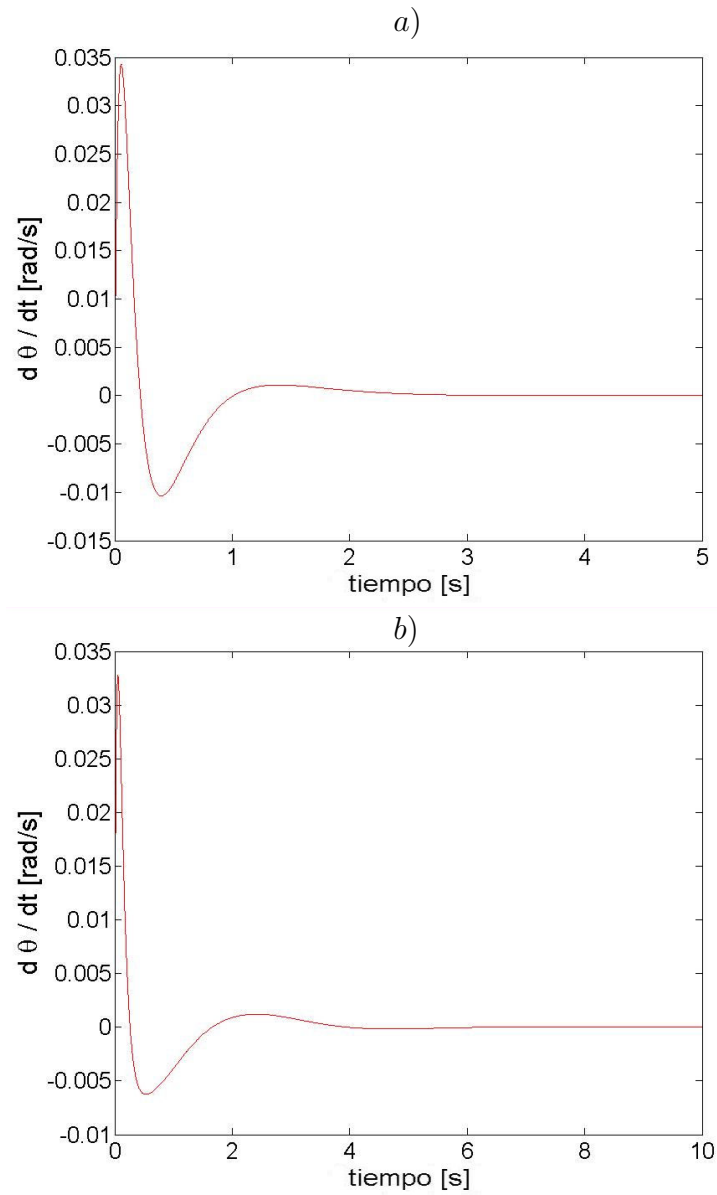


Figura 19: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . *a)* Velocidad de péndulo sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

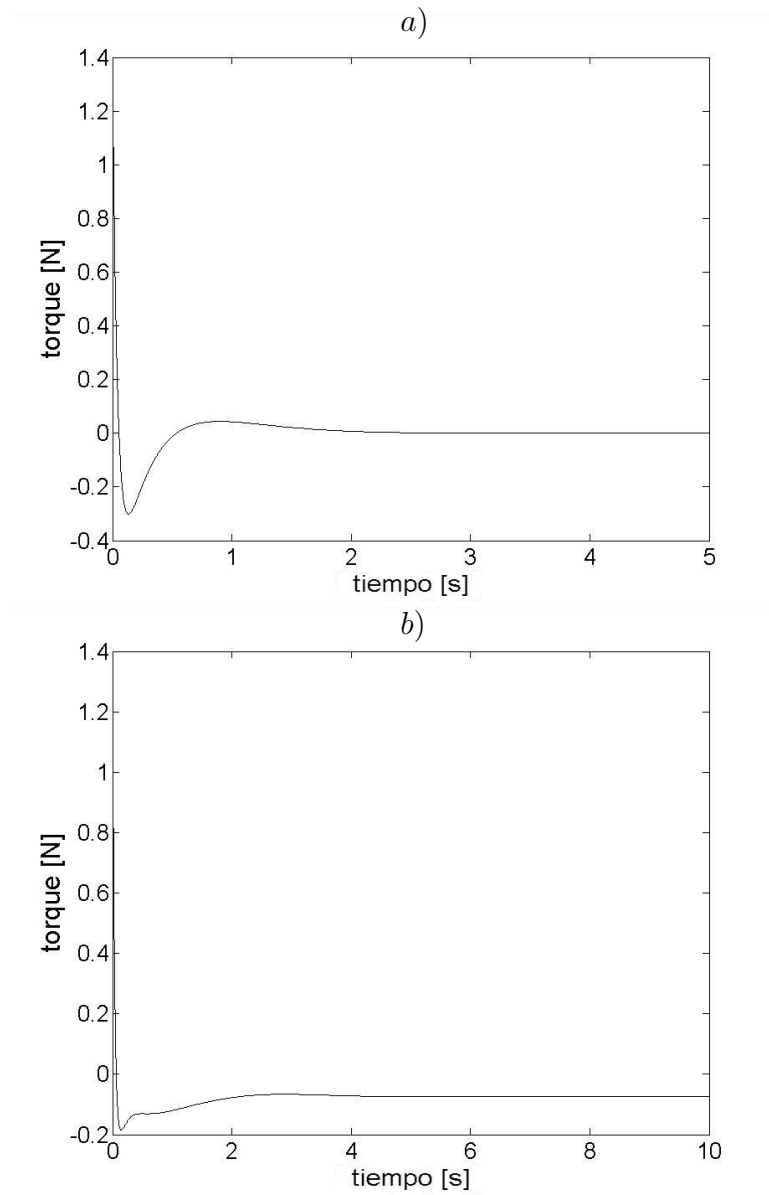


Figura 20: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . a) Torque aplicado al sistema sin fricción ni perturbaciones y b) con fricción y perturbaciones constantes.

III.4 Comparación entre controladores: FOSM, SOSM, H_∞ .

La motivación para comparar estos controladores, se basa en buscar el controlador más robusto ante el fenómeno de fricción, así como perturbaciones externas. Además, buscar el controlador que tenga otras características como tener la mayor región de atracción e inclusive aquel que requiera la menor energía para estabilizar al sistema. Con esto en mente, en esta sección se dará un listado de las ventajas de cada uno de los controladores locales que se han estudiado anteriormente (FOSM, SOSM y H_∞).

La prueba de comparación consiste en sintonizar a los controladores antes mencionados cuando el sistema no es afectado por fricción o perturbaciones. Una vez que se sintonizaron las ganancias de los controladores, se somete el sistema a los efectos de la fricción y de la perturbación externa, empezando por usar pequeños valores, tanto para la fricción como la perturbación externa y entonces ir aumentando dichos valores hasta ver que los resultados del sistema en lazo cerrado no fuesen adecuados.

Los datos del nivel de fricción y perturbaciones que soporta cada controlador se presentó en las tablas III, IV y V. Basándonos en los experimentos numéricos, que se hicieron anteriormente, los controladores en modos deslizantes poseen la característica de ser robustos ante el término de fricción seca, así como perturbaciones externas acotadas. Sin embargo, los métodos basados en control en modo deslizante poseen la desventaja de tener el fenómeno conocido como "chattering", el cual se hace presente, en el caso del control basado en SOSM, en el origen del sistema a tratar. A diferencia de los controladores basados en FOSM que tiene chattering en toda la superficie deslizante.

La región de atracción de cada controlador que se estudió anteriormente, se presenta en la tabla III.4. Estos datos fueron calculados mediante experimentos numéricos de la dinámica del sistema carro-péndulo en lazo cerrado, sin fricción ni perturbaciones externas. Además, basándonos en el estudio numérico de los controladores, se puede

decir que aquellos basados en FOSM poseen una región de atracción menor que aquellos controladores basados en SOSM. Con respecto al controlador H_∞ , podemos decir que éste tiene la mayor región de atracción.

Tabla VI: Comparación entre controladores: FOSM, SOSM, H_∞ .

| Región de Atracción | FOSM | SOSM | H_∞ | Unidades |
|----------------------------|-------------|-------------|------------------------------|-----------------|
| carro | ± 0.022 | ± 0.15 | ± 3 | m |
| péndulo | ± 0.03 | ± 0.1 | ± 1 | rad |

Además, se presentó anteriormente en las figuras 9, 15 y 21 la energía acumulada que se aplica al sistema carro-péndulo por cada controlador, es decir $\int_0^t u^2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) dt$. Como se ve en dichas gráficas, los controladores basados en modos deslizantes usan más energía que el controlador basado en H_∞ , cuando exista, o no, el fenómeno de fricción y perturbaciones. Los controladores basados en modos deslizantes tienen una estructura basada en conmutaciones, lo que provoca que estos utilicen una gran cantidad de energía, por esta razón estos controladores se conocen como "de alta ganancia" a diferencia del controlador H_∞ , el cual no requiere de tanta energía para cumplir el objetivo de control. Además, se puede decir que el controlador H_∞ no genera el fenómeno de chattering, sin embargo, basándonos en los estudios numéricos que se hicieron anteriormente, este controlador no es muy robusto ante la influencia de la fricción de Coulomb ni ante perturbaciones externas constantes. Lo que presenta una desventaja en comparación con los controladores basados en modos deslizantes.

En resumen, todas estas observaciones nos dieron la motivación para seguir estudiando el controlador basado en SOSM y así poder aplicar dichos conocimientos en los capítulos subsecuentes de este trabajo.

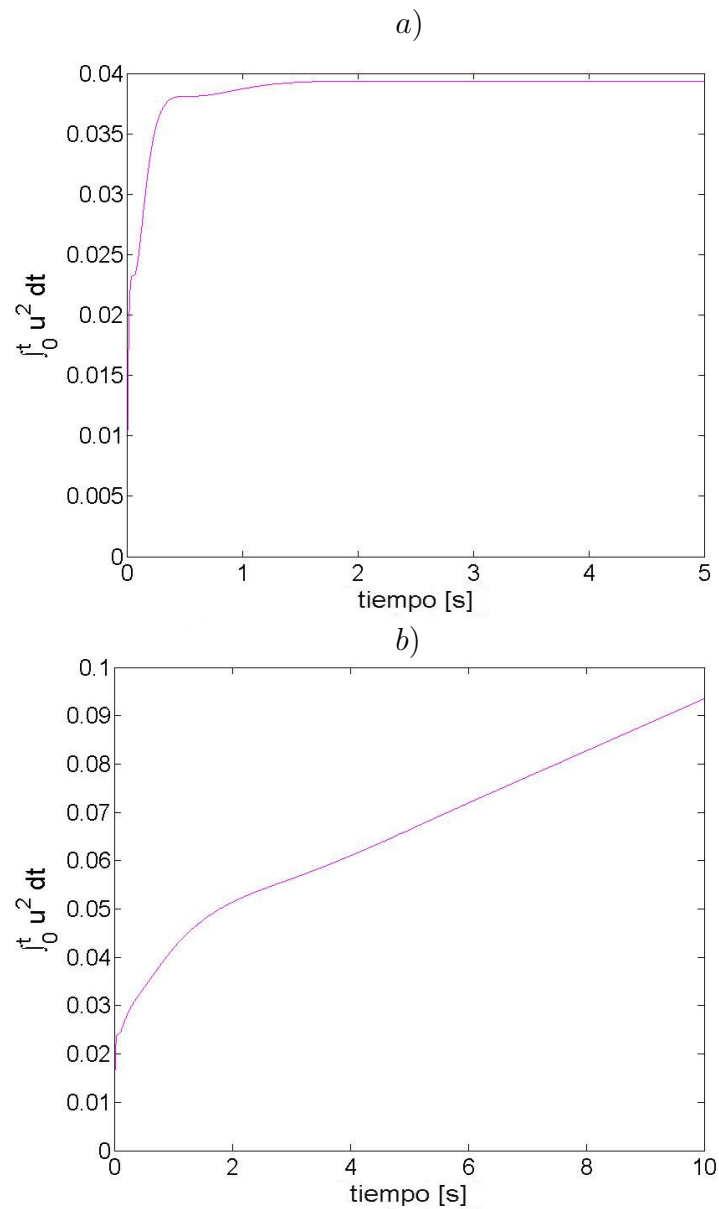


Figura 21: Estabilización local del sistema carro-péndulo usando control H_∞ . *a)* Energía del sistema sin fricción ni perturbaciones y *b)* con fricción y perturbaciones constantes.

Capítulo IV

Estabilización en órbita del carro-péndulo: aplicación al control de elevación/balanceo.

IV.1 Establecimiento del problema.

El sistema del carro-péndulo es gobernado por las siguientes ecuaciones (ver Riachy *et al.* (2008))

$$(m_c + m_p)\ddot{x} + m_p l \sin \theta \dot{\theta}^2 - m_p l \cos \theta \ddot{\theta} = \tau + \omega_1(t) - \psi(\dot{x}), \quad (89)$$

$$\frac{4}{3} m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p l \cos \theta \ddot{x} - m_p g l \sin \theta = \omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta}) \quad (90)$$

donde x es la posición del carro, θ es el ángulo formado por la vertical y la posición del péndulo, m_c es la masa del carro, m_p es la masa de la barra, l es la distancia al centro de masa del péndulo, g es la aceleración gravitacional, τ es la entrada controlada, $\omega_1(t), \omega_2(t)$ son perturbaciones externas, $\psi(\dot{x})$ y $\varphi(\dot{\theta})$ son fuerzas de fricción, que afectan al carro y al péndulo, respectivamente.

Para describir las fuerzas de fricción se utiliza el modelo clásico:

$$\psi(\dot{x}) = \psi_v \dot{x} + \psi_c \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad \varphi(\dot{\theta}) = \varphi_v \dot{\theta} + \varphi_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}). \quad (91)$$

El modelo clásico, modelo utilizado en este artículo, incluye coeficientes de fricción viscosa $\psi_v, \varphi_v > 0$, el nivel de fricción de Coulomb $\psi_c, \varphi_c > 0$. Sujeto al modelo clásico (91), el lado derecho del sistema dinámico (89)–(90) es continuo por secciones. Las soluciones de tal sistema se definen en el sentido de Filippov Filippov (1988) como

aquellas con ciertas inclusiones diferenciales con un lado derecho multivaluado.

Ya que el fenómeno de fricción es difícil de modelar, se han introducido términos de incertidumbre $\omega_1(t), \omega_2(t)$ en las ecuaciones dinámicas (89), (90) para tomar en cuenta las discrepancias del modelo inestable tales como el efecto Stribeck. Debido a las propiedades disipativas de los sistemas mecánicos, normalmente se estiman *a priori* cotas superiores $N_i > 0$, $i = 1, 2$ para las magnitudes de estos términos:

$$|\omega_i(t)| \leq N_i \quad \forall t. \quad (92)$$

El objetivo es diseñar un controlador que haga que la parte actuada del sistema carro-péndulo siga una trayectoria generada por la ecuación modificada de Van der Pol (94):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [z(t) + x(t)] = 0, \quad (93)$$

mientras se atenúa el efecto de las fuerzas de fricción (91) y perturbaciones externas (92).

La modificación de Van der Pol (94) es usada como modelo de referencia en la estabilización de órbita del sistema del carro-péndulo. A este respecto el generador armónico permite que uno modifique en línea no sólo la frecuencia de la señal de la referencia pero también de su amplitud, simplemente cambiando los parámetros del modelo de la referencia.

$$\ddot{z} + \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z = 0, \quad (94)$$

El oscilador modificado de Van der Pol (94) constituye un *generador armónico asintótico no lineal* que exhibe, de forma natural, una señal sinusoidal ideal (28) en su ciclo límite (27), en contraste con oscilador lineal (28), cuya amplitud depende en las condiciones iniciales del oscilador. La amplitud y la frecuencia de la señal sinusoidal del oscilador modificado de Van der Pol puede variar modificando, simplemente, los

parámetros ρ y μ en la ecuación (94).

Para presentar una estrategia de control que nos permita alcanzar nuestros objetivos se linealiza parcialmente la dinámica del carro-péndulo. Para este propósito se reescribe la ecuación de estado (90) en la forma

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4m_p l^2} [m_p l \cos \theta \ddot{x} + m_p g l \sin \theta + \omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})]. \quad (95)$$

Substituyendo (95) en (89) se obtiene

$$\begin{aligned} [(m_c + m_p) - \frac{3}{4}m_p \cos^2 \theta] \ddot{x} &= \tau + \omega_1(t) - \psi(\dot{x}) - m_p l \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ &+ \frac{3}{4}m_p g \cos \theta \sin \theta + \frac{3}{4l}[\omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] \cos \theta \end{aligned} \quad (96)$$

Finalmente, sea $J = (m_c + m_p) - \frac{3}{4}m_p \cos^2 \theta$ y

$$\tau = Ju + m_p l \sin \theta \dot{\theta}^2 - \frac{3}{4}m_p g \cos \theta \sin \theta \quad (97)$$

donde u es la nueva entrada de control y tomando en cuenta que la relación $J \neq 0$ es válida para todos los valores de θ , la deseada linealización se obtiene:

$$\ddot{x} = u + \frac{3 \cos \theta}{4lJ} [\omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{1}{J} [\omega_1(t) - \psi(\dot{x})] \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{3}{4l} \left\{ u \cos \theta + \frac{3m_p \cos^2 \theta + 4J}{4m_p l J} [\omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \theta}{J} [\omega_1(t) - \psi(\dot{x})] + g \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (99)$$

, ya que el sistema (98), (99) describe el modelo linealizado de uniones actuadas, procedimiento conocido como *Linealización colocada* Spong (1995).

La estrategia de control se formaliza de la siguiente manera: La entrada de control

(97) se compone por un controlador de lazo interno, linealizando parcialmente el carro-péndulo, y un controlador de lazo externo u por construir. Dada la salida del sistema

$$y(t) = z(t) + x(t), \quad (100)$$

que combina el estado actuado $x(t)$ del sistema y la variable de referencia $z(t)$ gobernada por la ecuación modificada de Van der Pol (94), el controlador de lazo externo u es para llevar la salida del sistema (100) a la superficie $y = 0$ en tiempo finito y mantenerla ahí a pesar de las fuerzas de fricción $\psi(\dot{x})$, $\varphi(\dot{\theta})$ y las perturbaciones $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, que afectan al sistema.

IV.2 Síntesis de control SOSM.

En esta sección, se diseña un controlador para estabilizar en órbita para balancear el péndulo invertido puesto sobre un carro, desde su posición baja hasta su posición alta y es entonces cuando se cambia a un controlador cuasihomogéneo Riachy *et. al.* (2008), estabilizando localmente al péndulo sobre la vertical. La estrategia de control híbrido, que será examinada en un estudio numérico y experimental, será seleccionar la amplitud ρ y la frecuencia μ del ciclo límite (27) razonablemente pequeña y el parámetro ε , controlando la velocidad de convergencia de las trayectorias hacia el ciclo límite en la ecuación modificada de Van der Pol (94), razonablemente grande para asegurar que el péndulo entre a la región de atracción del controlador cuasihomogéneo que estabiliza localmente. El cambio adecuado del controlador de balanceo al controlador local genera un movimiento de balanceo, asintóticamente estable sobre la vertical.

Debido a (94), (98), (100), la dinámica de salida está dada por

$$\begin{aligned}\ddot{y} = & u + \frac{3 \cos \theta}{4lJ} [\omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{1}{J} [\omega_1(t) - \psi(\dot{x})] \\ & - \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} - \mu^2 z.\end{aligned}\tag{101}$$

La siguiente ley de control

$$\begin{aligned}u = & \frac{3\varphi_v \cos \theta}{4lJ} \dot{\theta} + \frac{\psi_v}{J} \dot{x} + \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z \\ & - \alpha \operatorname{sgn}(y) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}) - hy - p\dot{y}\end{aligned}\tag{102}$$

con los parámetros tales que

$$h, p \geq 0, \quad \alpha - \beta > \frac{3(\varphi_c + N_2)}{4lJ} + \frac{\psi_c + N_1}{J}\tag{103}$$

es propuesta.

El sistema en lazo cerrado (91), (101), (102) se transforma por retroalimentación, obteniendo

$$\begin{aligned}\ddot{y} = & \frac{3 \cos \theta}{4lJ} [\omega_2(t) - \varphi_c \operatorname{sgn}(\dot{\theta})] + \frac{1}{J} [\omega_1(t) - \psi_c \operatorname{sgn}(\dot{x})] \\ & - \alpha \operatorname{sgn}(y) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}) - hy - p\dot{y}\end{aligned}\tag{104}$$

con el lado derecho continuo por secciones.

Relacionado con la síntesis cuasihomogénea de Orlov (2005b), El controlador antes mencionado se compone de un compensador lineal de fricción viscosa

$$u_f = \frac{3\varphi_v \cos \theta}{4lJ} \dot{\theta} + \frac{\psi_v}{J} \dot{x},\tag{105}$$

un compensador no lineal

$$u_c = \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z,\tag{106}$$

la parte de conmutación homogénea (como es en Fridman y Levant (1996) y Fridman y Levant (2002))

$$u_h = -\alpha \operatorname{sgn}(y) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (107)$$

y una parte lineal

$$u_l = -hy - p\dot{y} \quad (108)$$

que se desvanece en el origen $y = \dot{y} = 0$. Como se estudió en el teorema 1 de Riachy *et. al.* (2008), el sistema cuasihomogéneo (104) con los parámetros (103) es estable en tiempo finito a pesar de las fuerzas de fricción (91) y de las perturbaciones uniformemente acotadas (55) que lo afectan. Entonces el objetivo de control se cumple.

Entonces, empezando de un momento de tiempo finito, el sistema carro-péndulo evoluciona en una superficie de dinámica zero en modo deslizante de segundo orden. Mientras que la evolución del sistema se restrinja a dicha superficie, la dinámica estará dada por

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} l \ddot{\theta} = & \cos \theta \left\{ \frac{3 \cos \theta}{4lJ} [\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t)] + \frac{1}{J} [\psi(\dot{x}) - \omega_1(t)] \right. \\ & \left. + \varepsilon \left[\left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{x} + \mu^2 x \right\} \\ & + \frac{3m_p \cos^2 \theta + 4J}{4m_p l J} [\omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{\cos \theta}{J} [\omega_1(t) - \psi(\dot{x})] + g \sin \theta \end{aligned} \quad (109)$$

donde $x(t)$ es una trayectoria de referencia gobernada por la ecuación modificada de Van der Pol (94). Para las órbitas $z(t)$ de la modificación de Van der Pol (94), inicializada en el ciclo límite (27), la dinámica zero (109) se simplifica a

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} l \ddot{\theta} = & \cos \theta \left\{ \frac{3 \cos \theta}{4lJ} [\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t)] + \frac{1}{J} [\psi(\dot{x}) - \omega_1(t)] + \mu^2 x \right\} \\ & + \frac{3m_p \cos^2 \theta + 4J}{4m_p l J} [\omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{\cos \theta}{J} [\omega_1(t) - \psi(\dot{x})] + g \sin \theta. \end{aligned} \quad (110)$$

Para encontrar (109) formalmente, se debe utilizar el método de control equivalente

Utkin *et. al.* (1999) y substituir una única solución u_{eq} de la ecuación algebraica

$$\begin{aligned}
 u + \frac{3 \cos \theta}{4lJ} [\omega_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{1}{J} [\omega_1(t) - \psi(\dot{x})] \\
 - \varepsilon [(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\mu^2}) - \rho^2] \dot{x} - \mu^2 x = 0
 \end{aligned}
 \tag{111}$$

con respecto a u (i.e., la entrada de control equivalente u_{eq} que asegure que $\ddot{y} = 0$) en (99).

Entonces el siguiente resultado se obtiene.

Teorema 2. *Sea la ecuación modificada de Van der Pol (94) con parámetros positivos ε, μ, ρ un modelo de referencia de la dinámica del carro-péndulo (89)–(91) y sea la salida del sistema dada por (100). Entonces el controlador cuasihomogéneo (97), (102), (103) lleva al sistema carro-péndulo a la superficie de dinámica zero $y = 0$ en tiempo finito, uniformemente con respecto a fuerzas de fricción (91) y perturbaciones admisibles (55). Después, la parte actuada $x(t)$ sigue a la salida $-z(t)$ de la ecuación modificada de Van der Pol (94) mientras que la parte no-actuada $\theta(t)$ es gobernada por la ecuación de la dinámica zero (109) en cualquier intervalo de tiempo finito.*

IV.2.1 Prototipo del carro-péndulo.

Para poder observar el desempeño de la síntesis propuesta se hicieron simulaciones en MATLAB, usando Simulink. Se consideran los parámetros reales de laboratorio del sistema carro-péndulo de Riachy *et. al.* (2008). Estos parámetros se listan en la tabla 1.

En resumen, se construyó un controlador de elevación SOSM, con modelo de referencia la ecuación modificada de Van der Pol, y un controlador local SOSM para resolver el problema de estabilizar al sistema carro-péndulo desde su punto de equilibrio estable hacia la vertical, el punto de equilibrio inestable. En las secciones siguientes se proponen diferentes estrategias, en las cuales se describe la regla de conmutación para estos dos controladores (ver diagrama 22).

Tabla VII: Parámetros del carro-péndulo (90).

| Notación | Valor | Unidades |
|-------------|---------|-------------------------|
| M | 3.4 | kg |
| m | 0.147 | kg |
| l | 0.175 | m |
| ψ_v | 8.5 | $N \cdot s/m$ |
| φ_v | 0.0015 | $N \cdot m \cdot s/rad$ |
| ψ_c | 6.5 | N |
| φ_c | 0.00115 | $N \cdot m$ |

IV.3 Diseño del controlador híbrido I.

Para complementar el elevación del péndulo seguido por la estabilización alrededor de la posición vertical, presentada en el capítulo 2, se cambia la ley de control 102, que estabiliza en órbita al sistema carro-péndulo, por el controlador local de Riachy *et. al.* (2008) cuando el péndulo entra en la región de atracción, encontrada numéricamente para el controlador de balanceo. Entonces queda por resolver el problema de escoger el tiempo apropiado para el cambio de controlador. La capacidad del sistema en lazo cerrado para entrar en la región de atracción del controlador local se apoya en resultados numéricos.

IV.3.1 Simulación numérica.

Las condiciones iniciales de la posición del sistema del carro-péndulo y la modificación del oscilador de Van der Pol, usadas en todos los experimentos, son $x(0)=0$, $\theta(0) = \pi \text{ rad}$, y $z(0)=0.05 \text{ rad}$, mientras que todas las condiciones iniciales de velocidad fueron fijadas en cero.

Para empezar este estudio, se implementó por separado el controlador para estabilizar en órbita basado en SOSM, usando como modelo de referencia al oscilador

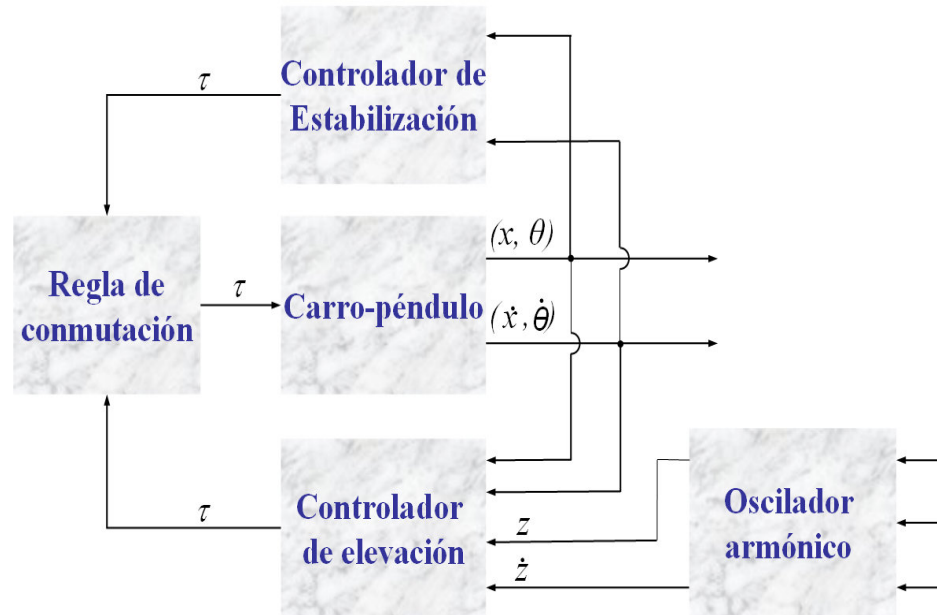


Figura 22: Diagrama del sistema mecánico carro-péndulo en lazo cerrado.

modificado de Van der Pol.

Finalmente, el controlador híbrido I se implementó para elevar al péndulo y estabilizarlo en la posición vertical, mientras que el carro se estabiliza alrededor de su posición inicial. El cambio del controlador para estabilizar en órbita al controlador local se fijó cuando el péndulo entra en la región de atracción, el cual se presenta en el instante de tiempo $t_s \approx 3.4$ s.

La figura 23, 24, 25, 26 se muestra al sistema carro-péndulo en lazo cerrado, mientras es conducido por el controlador para estabilizar en órbita y con perturbaciones externas y permanentes $\omega_1(t) \equiv 5$ N, $\omega_2(t) \equiv 0.001$ N · m, genera un movimiento acotado. Para este experimento se utilizaron los siguientes parámetros para el controlador SOSM : $\alpha=4.5$ N · m, $\beta=0.1$ N · m, $h=4$, $p=4$.

Para demostrar la capacidad del controlador para mover el péndulo de una órbita

a otra al modificar los parámetros, se introdujo un instante de tiempo aleatorio t_0 ($t_0 \approx 20s$), cuando la amplitud ρ y la frecuencia μ del ciclo límite se cambió de sus valores iniciales $\varepsilon= 60 (rad)^{-2}s^{-1}$, $\rho=0.1 rad$, $\mu=2 s^{-1}$ a unos nuevos valores $\varepsilon= 30(rad)^{-2}s^{-1}$, $\rho=0.5 rad$, $\mu=1 s^{-1}$. Predicho por la teoría, la transferencia de órbita se logra cambiando simplemente la amplitud de la órbita del ciclo límite (ver figuras 27, 28, 29 y 30).

En las figuras 31, 32 y 33 muestran que el controlador híbrido balancea el péndulo hacia arriba y lo estabiliza sobre la vertical mientras que estabiliza al carro sobre su posición inicial y atenúa las fuerzas de fricción, variaciones en los parámetros (10%) y perturbaciones permanentes externas $\omega_1(t)=1 N$, $\omega_2(t)=0.001 N \cdot m$. El cambio del controlador para estabilizar en órbita al controlador local se fija cuando el péndulo entra en la región de atracción, lo cual se presenta en el instante de tiempo $t_s \approx 3.2 s$ para el modelo perturbado.

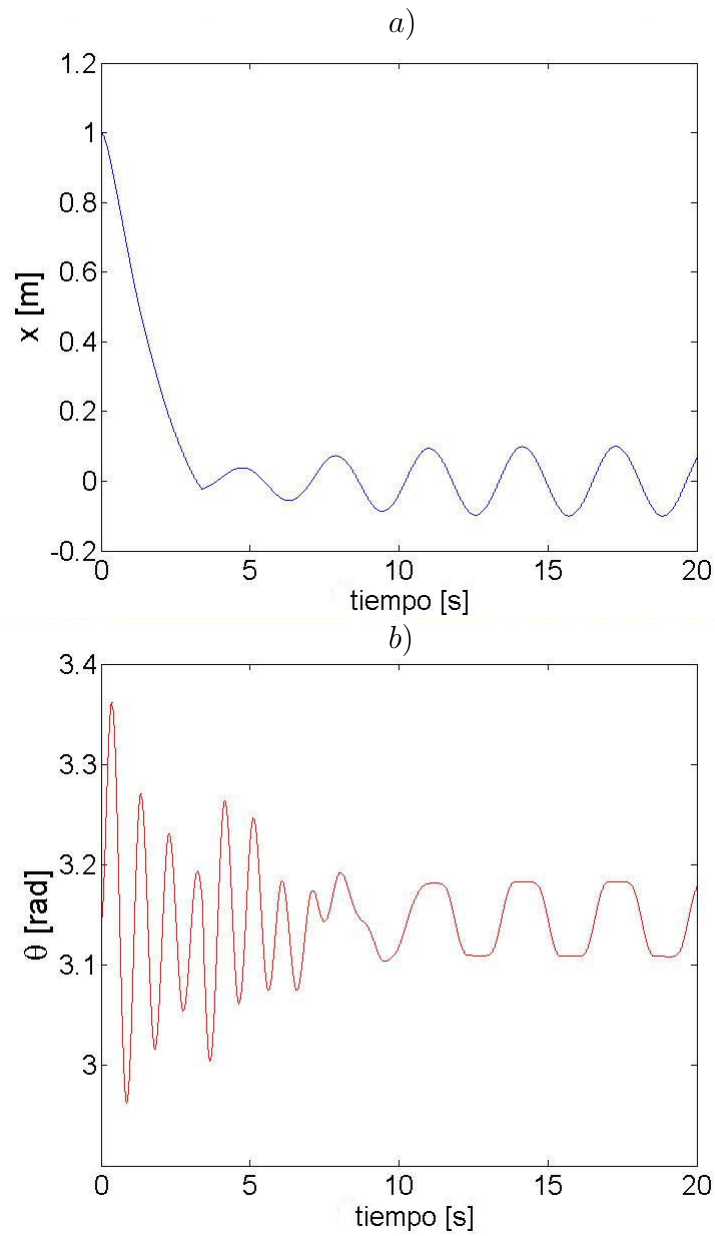


Figura 23: Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. *a)* Posición de carro y *b)* Posición de péndulo.

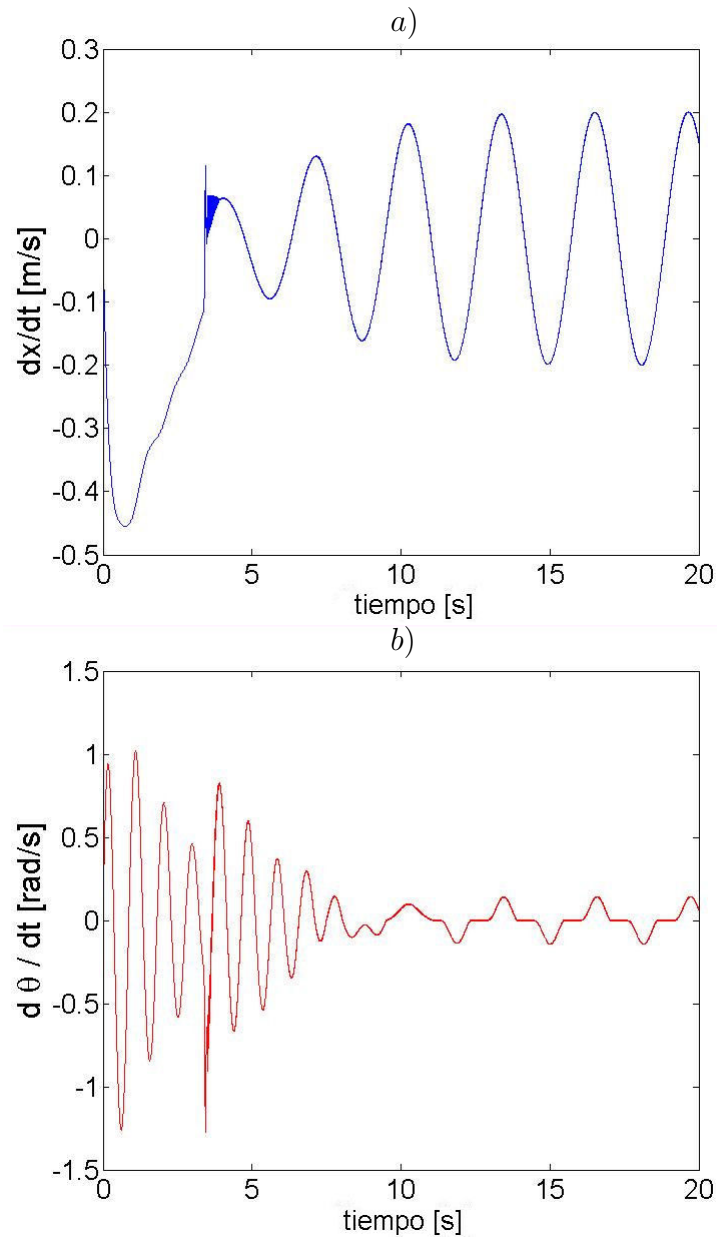


Figura 24: Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. *a)* Velocidad de carro y *b)* Velocidad de péndulo.

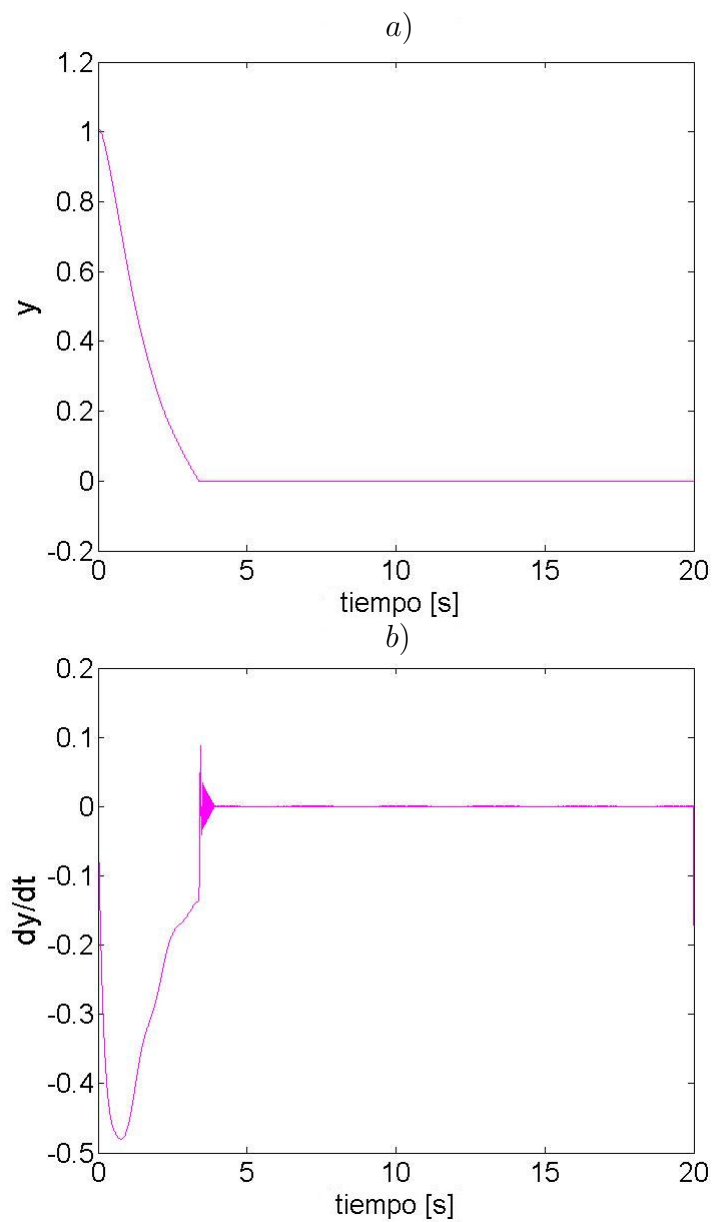


Figura 25: Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. *a)* Error de seguimiento de seguimiento y *b)* Error de seguimiento de velocidad.

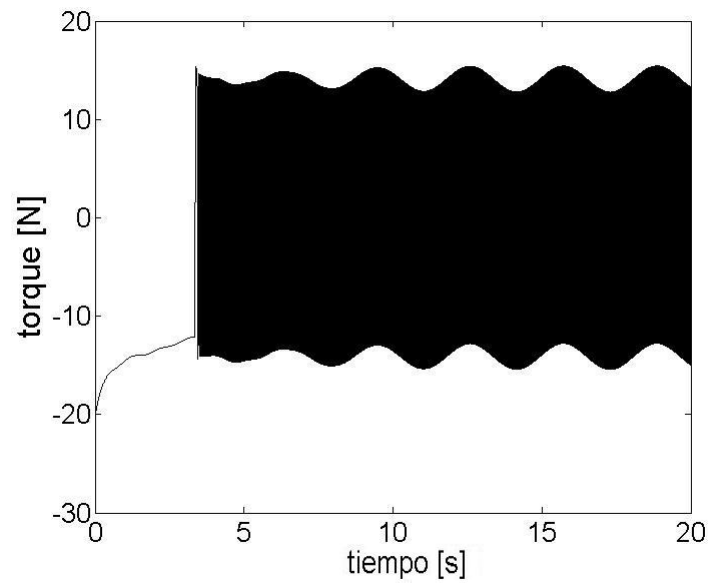


Figura 26: Estabilización en órbita del sistema carro-péndulo con controlador basado en SOSM. Torque aplicado al sistema en lazo cerrado.

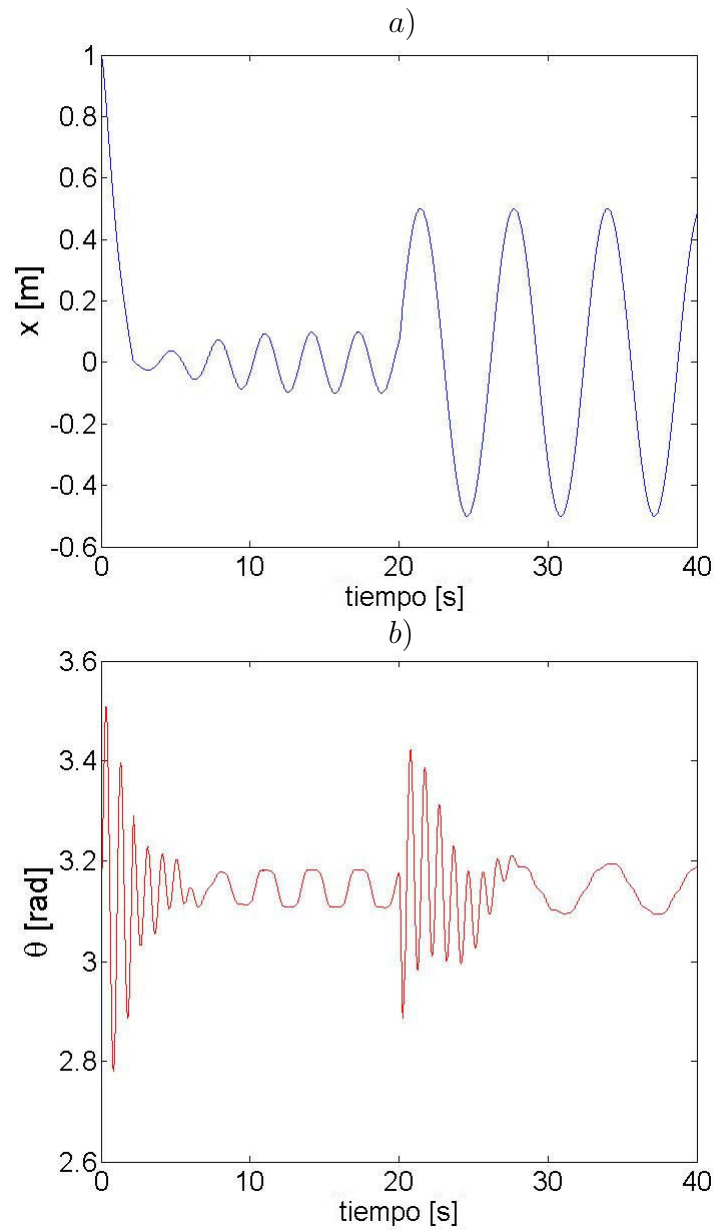


Figura 27: Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. *a)* Posición de carro y *b)* Posición de péndulo.

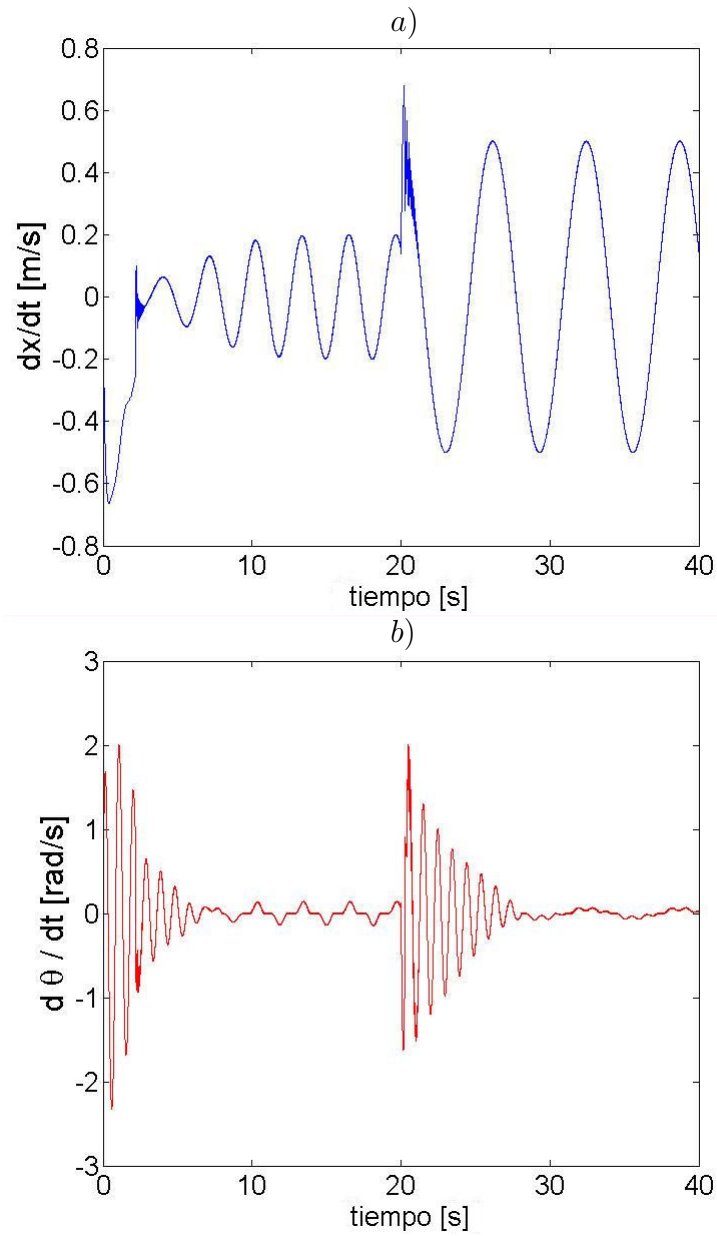


Figura 28: Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. *a)* Velocidad de carro y *b)* Velocidad de péndulo.

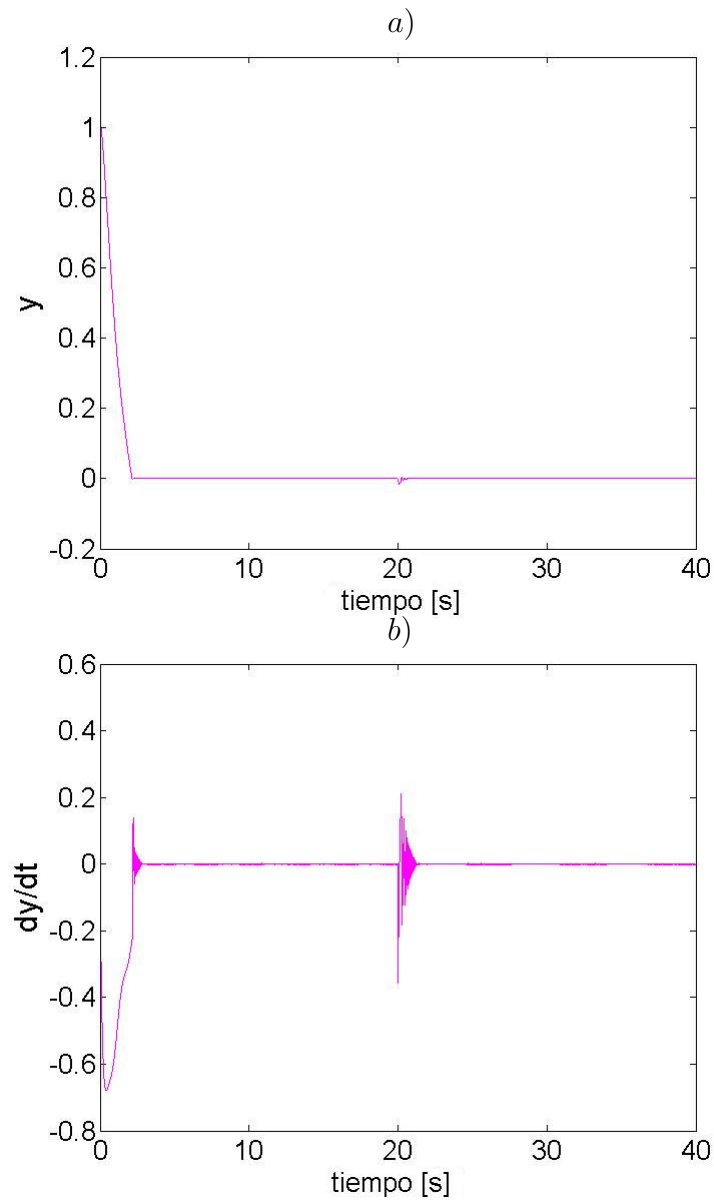


Figura 29: Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. *a)* Error de seguimiento de seguimiento y_1 y *b)* Error de seguimiento de velocidad y_2 .

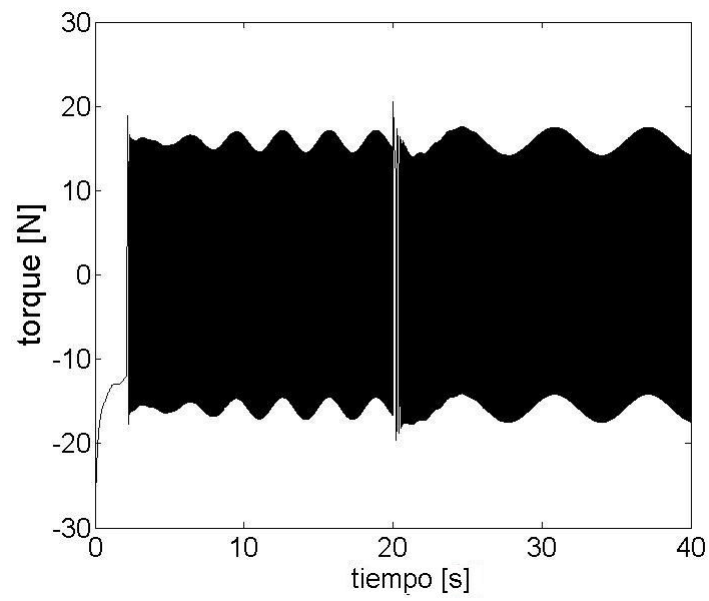


Figura 30: Transferencia de órbita del sistema carro-péndulo bajo perturbaciones externas permanentes. Torque aplicado.

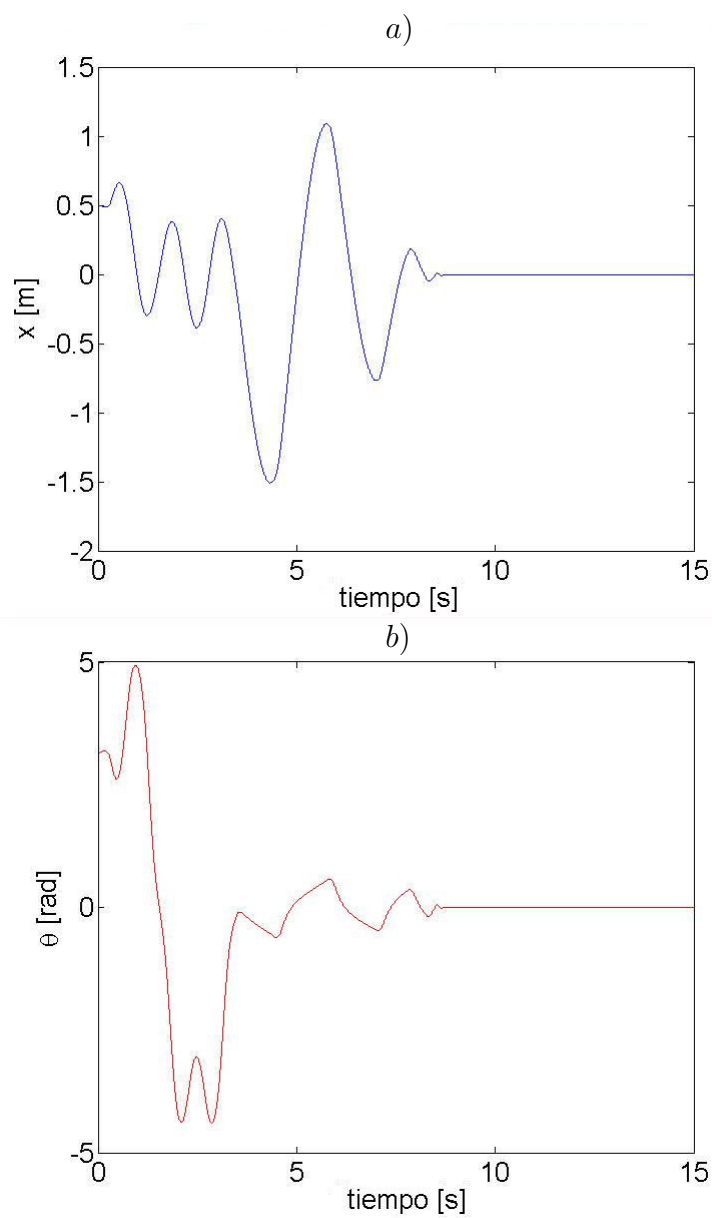


Figura 31: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. *a)* Posición de carro y *b)* Posición de péndulo.

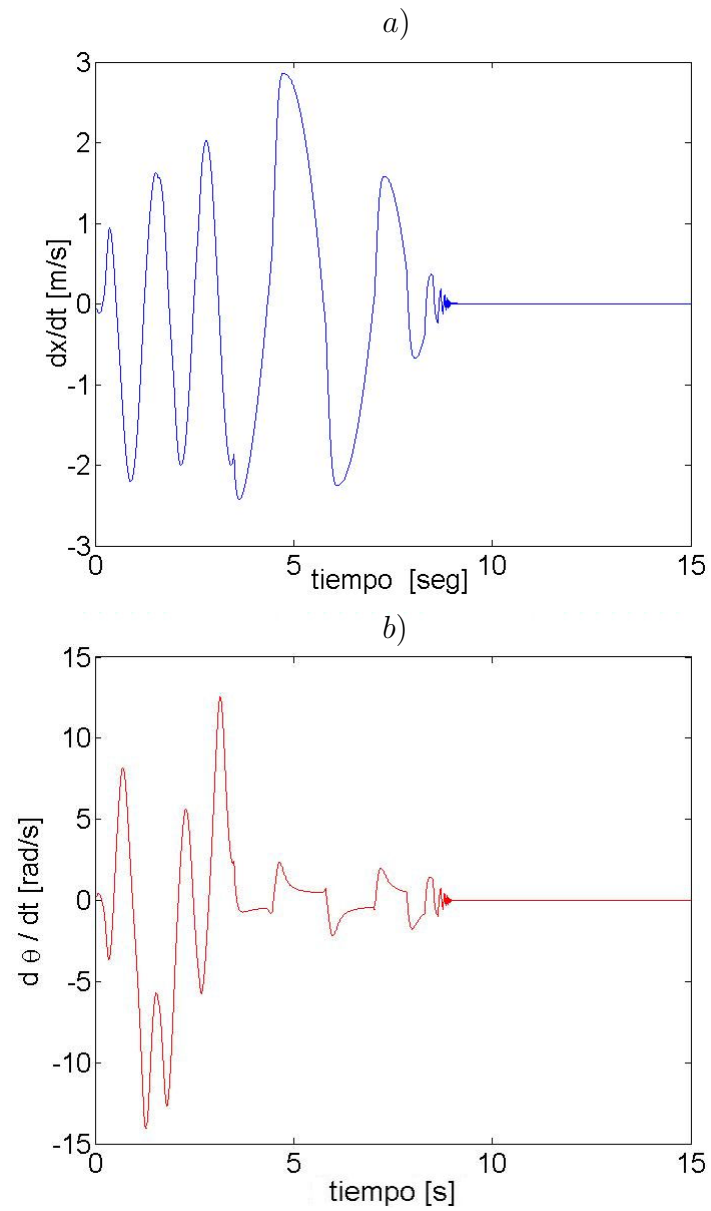


Figura 32: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. *a)* Velocidad de carro y *b)* Velocidad de péndulo.

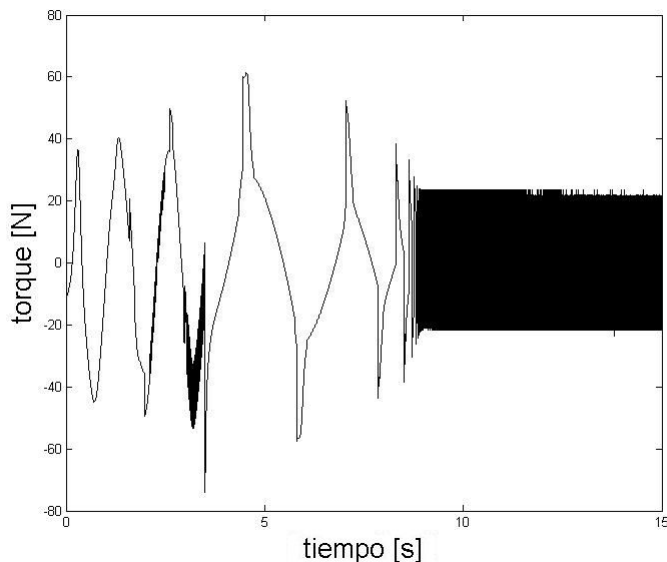


Figura 33: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. Torque.

IV.4 Control de elevación y estabilización II.

Para esta sección se propone una estrategia donde se utiliza el concepto de órbita homoclínica, el cual se desarrollo para sistemas no disipativos, es decir, sistemas donde se ignora el fenómeno de fricción (ver Fantoni *et. al.* (2000)). Considere el sistema dinámico continuo descrito por la ecuación diferencial ordinaria (ver Guckenheimer y Holmes (1983))

$$\dot{x} = f(x) \quad (112)$$

con punto un punto de equilibrio en $x^* = x_0$, entonces la solución $\chi(t)$ del sistema 112 es una órbita homoclínica si

$$\chi(t) \rightarrow x_0 \quad \text{as } t \rightarrow \pm\infty \quad (113)$$

Entonces, una órbita homoclínica es aquella trayectoria que se aleja del punto silla $x^* = x_0$ en una dirección y regresa hacia el mismo punto en otra dirección, conservando el mismo nivel de energía (ver figura IV.4). Se pretende extender esta idea para sistemas disipativos, es decir, sistemas donde se considere el fenómeno de fricción de Coulomb.

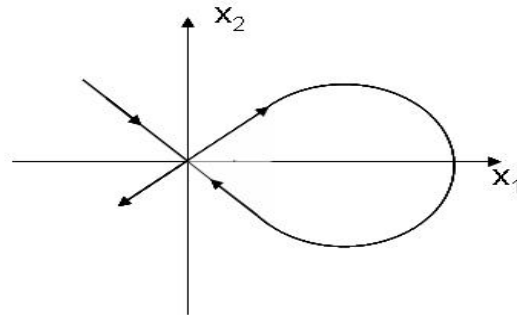


Figura 34: Órbita homoclínica.

En esta metodología, para el problema de elevar/balancear al péndulo, puesto sobre el carro, se requiere moverlo desde su posición hacia abajo a su posición inestable hacia arriba y estabilizarlo sobre la vertical mientras que el carro se estabiliza en el punto deseado. Se diseña un controlador para estabilizar en órbita para elevar al péndulo y hacer que este alcance la órbita homoclínica del nivel de energía del sistema carro-péndulo, que corresponde al punto de equilibrio inestable. Una vez que se alcanza la órbita homoclínica donde la velocidad del carro es infinitesimal, el controlador que estabiliza en órbita se desactiva para dejar al sistema que evolucione a lo largo de la órbita homoclínica. Un controlador que estabilice localmente Riachy *et. al.* (2008) se activa una vez que el movimiento homoclínico entra a una región de atracción de este último controlador.

La estrategia de control híbrido, la cual se probará en un estudio experimental, es

escoger la amplitud ρ y la frecuencia μ del ciclo límite de (27) razonablemente pequeña y el parámetro ε , que controla la velocidad de convergencia de las trayectorias hacia el ciclo límite en la ecuación modificada de Van der Pol (94), se escoge suficientemente grande para asegurar que el sistema carro-péndulo alcance su órbita homoclínica del correspondiente nivel de energía.

Para tomar en cuenta las fuerzas de fricción, que resulta en una pérdida de energía del sistema carro-péndulo, el nivel de energía (117) tiene que ser incrementado a un valor positivo

$$E_0 > \delta \tag{114}$$

Dado un cierto δ , encontrado de forma experimental, el sistema de fuerzas de fricción genera una órbita, la cual converge al punto de equilibrio deseado. Dicha órbita se le conoce como órbita cuasi-homoclínica.

Para que el balanceo sea exitoso es crucial sintonizar, de forma adecuada, el parámetro de energía δ y los parámetros de referencia ε , ρ , μ de la modificación de Van der Pol (94). El parámetro ρ es responsable de la amplitud de las oscilaciones del carro, simplemente se fija un poco menos que la longitud permitida por el equipo de laboratorio. Los parámetros ε y μ son los responsables de que el rango convergencia del oscilador de Van der Pol modificado sea razonablemente alta y de aplicar el nivel deseado de energía (114) al sistema carro-péndulo, a una posición del carro donde éste posee una velocidad infinitesimal (entre más grande sea ε más rápida será la convergencia; entre más grande μ será más grande la energía del ciclo límite y por lo tanto aumenta la energía del carro, que sigue al ciclo límite). Estos parámetros se sintonizan de forma iterativa para alcanzar la órbita cuasi-homoclínica.

Una vez que se sincroniza el sistema con la órbita cuasi-homoclínica, se desactiva el controlador que estabiliza en órbita y la conmutación adecuada al controlador local cuando el movimiento homoclínico entre a la región de atracción de este último

controlador, generando así, un movimiento de elevación y estabilización asintótica del péndulo sobre la vertical.

IV.4.1 Diseño del controlador de elevación II.

Al aplicar la síntesis para estabilizar en órbita (94), (97), (102), que balancea el péndulo de la posición baja a la posición alta, la energía, que se inyecta al sistema del carro-péndulo, debe estar en un nivel apropiado.

Acorde a una aproximación basada en energía, tal nivel de energía es para asegurar que la energía total

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(m_c + m_p)\dot{x}^2 - m_p l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{2}{3} m_p l^2 \dot{\theta}^2 + m_p g l (\cos \theta - 1) \quad (115)$$

de lazo cerrado se incremente del valor negativo

$$E_0 = -2m_p g l \quad (116)$$

en el momento de tiempo inicial al valor cero de energía

$$E_0 = 0 \quad (117)$$

en un instante de tiempo cuando la velocidad del carro es infinitesimal y lista a cambiar de dirección. Entonces, de forma sincronizada, el sistema de fuerzas de fricción generan una órbita homoclínica que converge al punto de equilibrio deseado con el mismo nivel de energía que (117).

Los valores apropiados de los parámetros son utilizados en experimentos numéricos exitosos donde se requiere que la energía total (115) del sistema del carro-péndulo, manejada por el controlador desarrollado (102), entre a una vecindad δ del valor de energía nominal (117) con un valor de $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

En el estudio numérico las ganancias del controlador fueron fijadas a $\alpha = 3 N \cdot m$, $\beta = 1 N \cdot m$, $h = 0$, $p = 0$ así como los parámetros de referencia fueron sintonizados a $\varepsilon = 40 [rad]^{-2}s^{-1}$, $\rho = 0.5 rad$, $\mu = 1 s^{-1}$. Con estos parámetros la energía total (115) del sistema carro-péndulo entra a una vecindad del origen con $\delta = 0.8 N \cdot m$.

IV.4.2 Diseño del control híbrido II.

Para acompañar la elevación del péndulo de la estabilización subsecuente alrededor de la vertical, el controlador de elevación se desactiva cuando el sistema alcanza la órbita homoclínica correspondiente, y es entonces cuando el controlador local Riachy *et. al.* (2008) se activa una vez que el péndulo, que evoluciona a lo largo de la órbita cuasihomoclínica, entra en la región de atracción encontrada numéricamente para el controlador local. El controlador híbrido resultante mueve al péndulo invertido, sobre el carro, de su posición baja hacia su posición hacia arriba y lo estabiliza sobre la vertical mientras que el carro se estabiliza al punto deseado. La capacidad del sistema en lazo cerrado de alcanzar la órbita cuasihomoclínica y entrar a la región de atracción del controlador local se apoya adicionalmente en resultados experimentales (ver Santiesteban *et. al.* (2008)).

IV.4.3 Simulación numérica.

Las condiciones iniciales de la posición del sistema del carro-péndulo y la modificación del oscilador de Van der Pol, usadas en todos los experimentos, son $x(0)=0$, $\theta(0) = \pi rad$, y $z(0)=0.05 rad$, mientras que todas las condiciones iniciales de velocidad fueron fijadas en cero. Los resultados de dichas simulaciones se muestran en las figuras 35, 36 y 37. En la figura 37 se puede ver claramente el intervalo de tiempo (de $t_1=1.9s$ a $t_2=2.1s$ aproximadamente) donde el torque es cero, es decir, el sistema mecánico esta en lazo abierto.

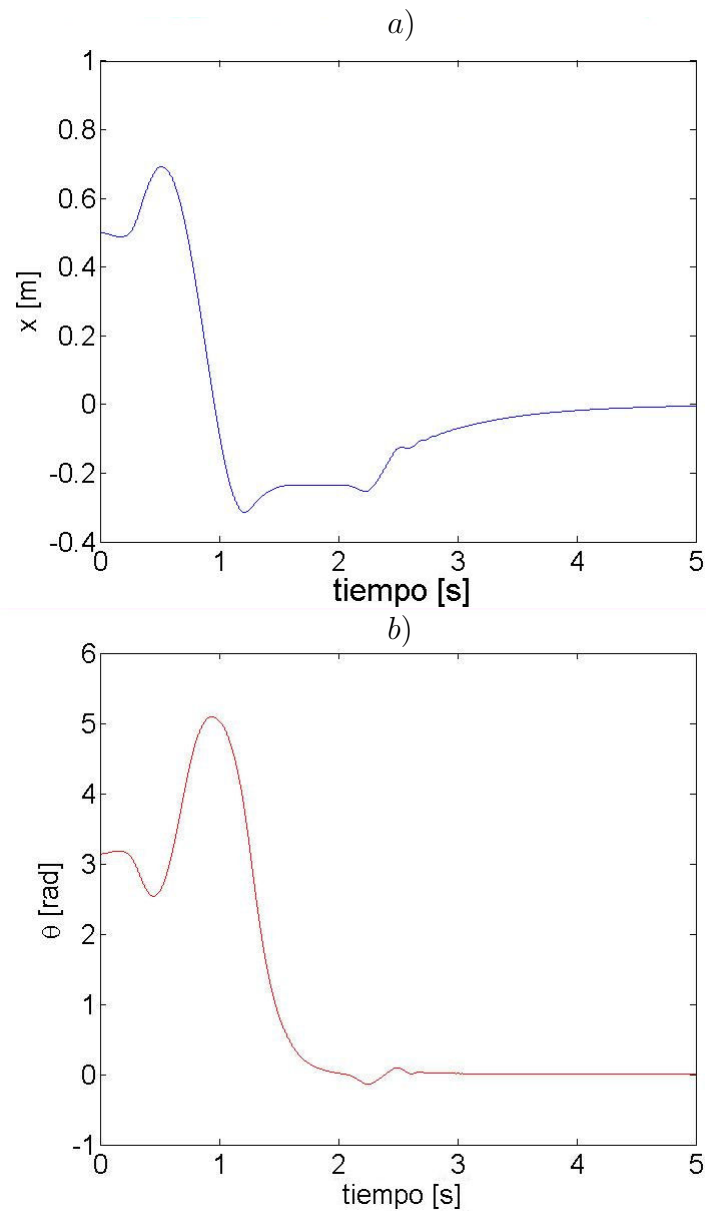


Figura 35: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. *a)* Posición de carro y *b)* Posición de péndulo.

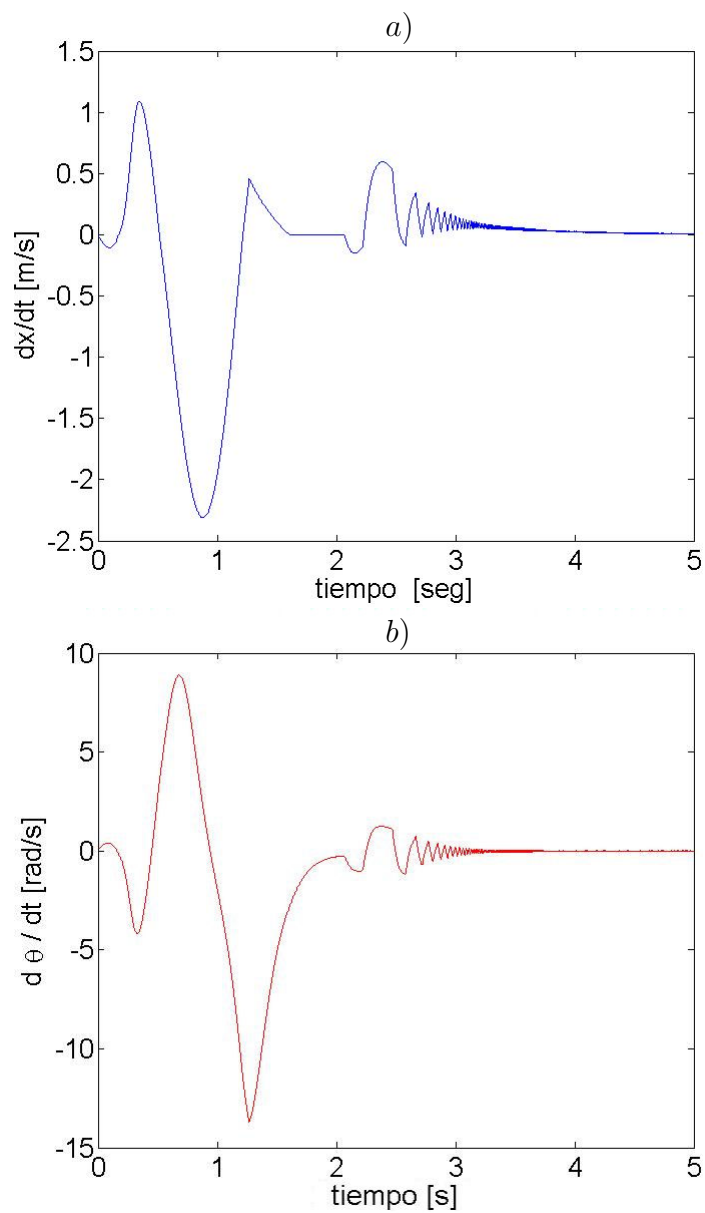


Figura 36: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. *a)* Velocidad de carro y *b)* Velocidad de péndulo.

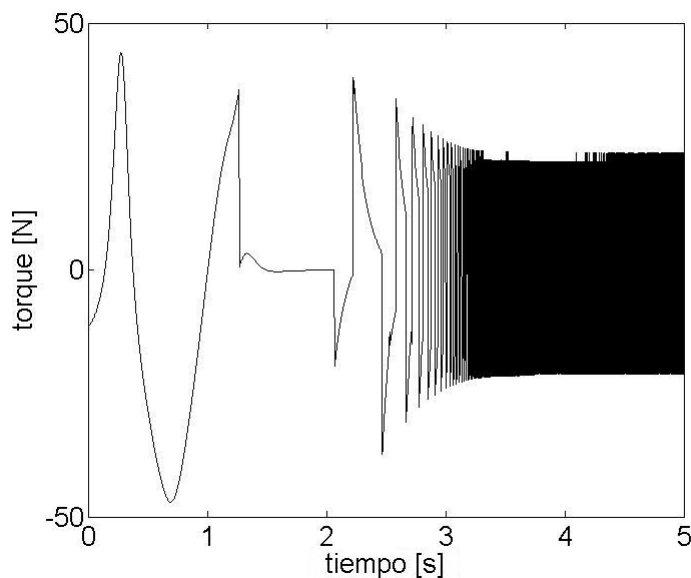


Figura 37: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local SOSM. Torque.

IV.5 Diseño de control híbrido III.

En esta sección se diseña un tercer control híbrido. La motivación para crear un tercer control es resolver el problema del chattering que se da en las dos versiones anteriores. El problema del chattering es un fenómeno no deseado que aparece en los controladores en modo deslizante. Para resolver esta problemática se substituye el controlador local SOSM por el controlador local H_∞ , el cual resuelve dicho problema satisfactoriamente. La estrategia que se utilizará será la misma que en el control híbrido II, en donde se desea que el sistema carro-péndulo alcance la órbita homoclínica correspondiente. Una vez que el péndulo entra en la región de atracción del controlador H_∞ , este se activa. De tal forma que el péndulo se estabiliza en su punto de equilibrio inestable y el carro en la posición deseada, eliminando el fenómeno de chattering. En la siguiente sección se presentan experimentos numéricos que apoyan este tipo de estrategia.

IV.5.1 Simulaciones numéricas.

Para las simulaciones numéricas de esta sección se utilizan los mismos parámetros del sistema carro-péndulo. Y en el diseño del controlador H_∞ se ajustan los parámetros a: $\gamma = 250$; $\varepsilon_2 = 147$; $\rho_2=1$; . Los resultados de dichas simulaciones se muestran en las figuras 38, 39 y 40. En la figura 40 se puede ver claramente el intervalo de tiempo (de $t_1=1.82$ s a $t_2=2.46$ s aproximadamente) donde el torque es cero, es decir, el sistema mecánico esta en lazo abierto.

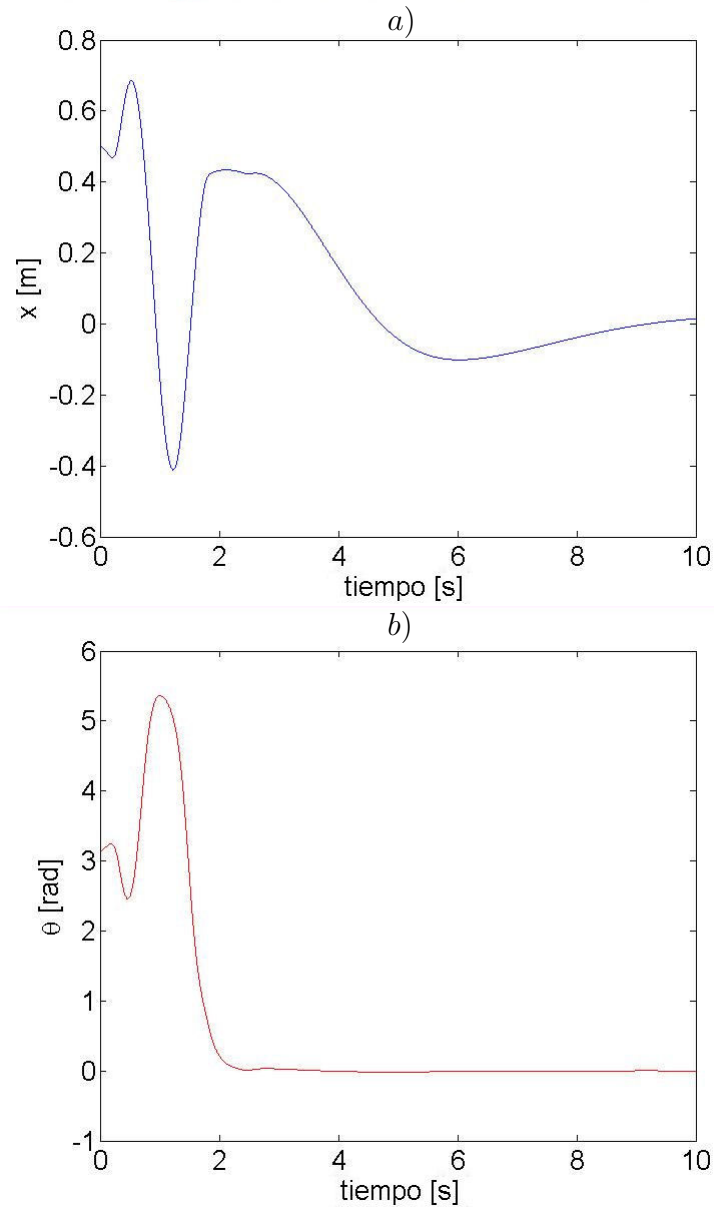


Figura 38: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local H_∞ . *a)* Posición de carro y *b)* Posición de péndulo.

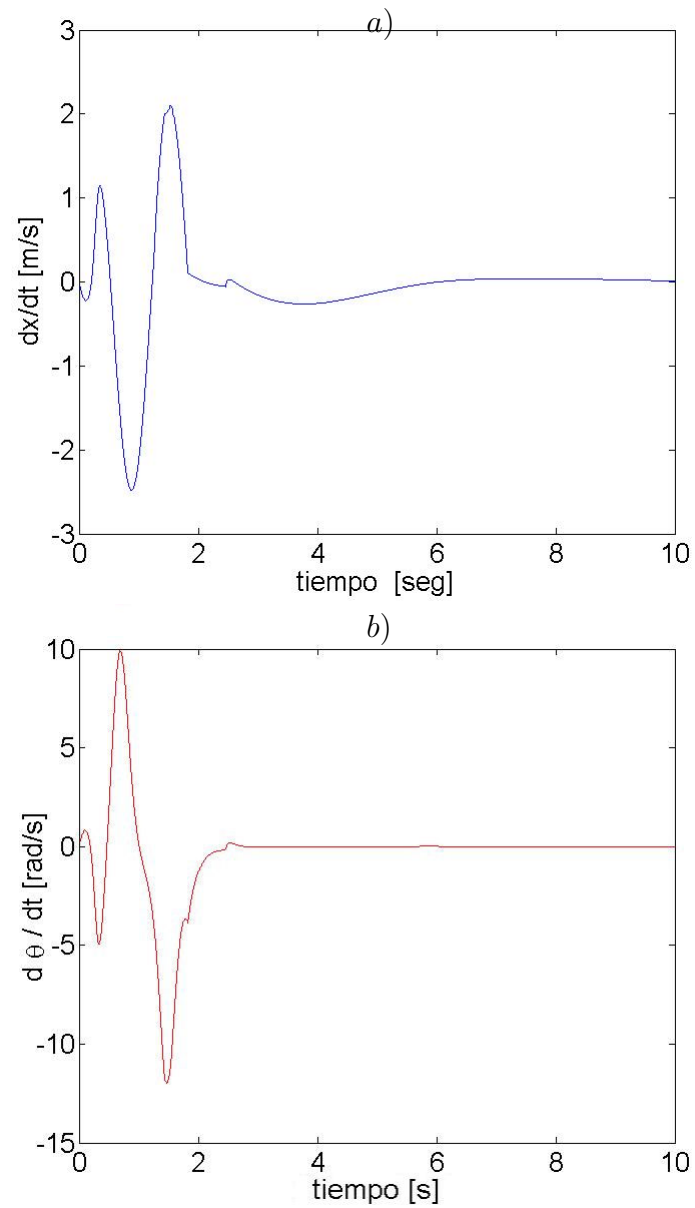


Figura 39: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local H_∞ . a) Velocidad de carro y b) Velocidad de péndulo.

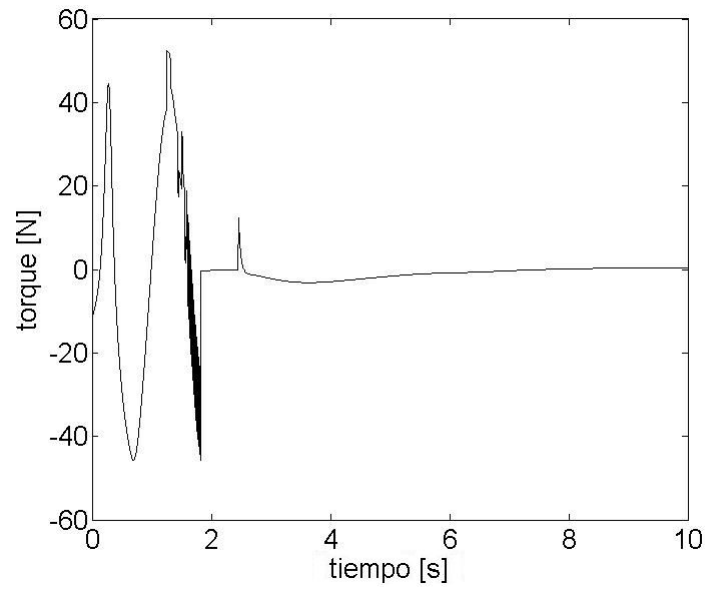


Figura 40: Elevación y estabilización del sistema carro-péndulo, afectado por perturbaciones, llevado por el controlador local H_{∞} . Torque aplicado al sistema en lazo cerrado.

Capítulo V

Estabilización del péndulo invertido vía retroalimentación de posición.

Se utiliza la síntesis cuasihomogénea de retroalimentación de estado, desarrollada recientemente en Orlov *et. al.* (2008), acompañada con un observador de velocidad en modo deslizante de segundo orden (observador SOSM), inspirado de Davila *et. al.* (2005), para presentar la retroalimentación de posición, resolviendo el problema en cuestión. Se construye una función no suave de Lyapunov para todo el sistema en lazo cerrado (sistema forzado - observador). En contraste con Davila *et. al.* (2005), donde el método geométrico, presentado en este mismo artículo, muestra la estabilidad del observador en lazo abierto, mientras que el método presentado aquí muestra la estabilidad en lazo cerrado.

V.1 Establecimiento del problema.

La dinámica del péndulo simple, mostrado en la figura 41, está gobernada por la siguiente ecuación

$$(m_p l^2 + J)\ddot{\theta} = m_p g l \sin(\theta) - \psi(\dot{\theta}) + \tau \quad (118)$$

donde θ es el ángulo entre el péndulo y la vertical, m_p es la masa del péndulo, l es la distancia al centro de masa, J es el momento de inercia del péndulo con respecto al centro de masa, g es la aceleración de la gravedad, $\psi(\dot{\theta})$ es la fuerza de fricción, τ es la entrada de control.

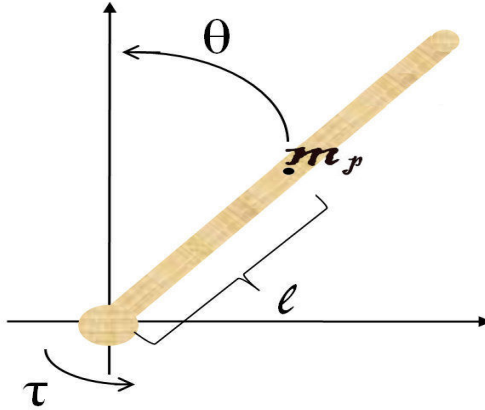


Figura 41: Sistema mecánico péndulo simple.

Para describir la fuerza de fricción $\psi(\dot{\theta})$ se utiliza el modelo clásico

$$\psi(\dot{\theta}) = \psi_v \dot{\theta} + \psi_c \text{sgn}(\dot{\theta}). \quad (119)$$

El modelo, antes mencionado, describe la fricción viscosa con coeficiente $\psi_v > 0$ y con fricción de Coulomb de nivel $\psi_c > 0$, y la notación $\text{sgn}(\dot{\theta})$ para la función signo de la velocidad angular.

Sujeto a (119), el lado derecho del sistema dinámico (118) es continuo por secciones. Por esta razón, las soluciones de este sistema se definen en el sentido de Filippov (1988) como aquella inclusión diferencial con un lado derecho multivaluado.

Un problema interesante para los sistemas mecánicos, afectados por fricción, es la manera en que se tiene acceso a los datos. Usualmente, en la realidad, se tiene acceso solamente a los datos de posición y no a los datos de velocidad. Con esto en mente, *el objetivo* es seguir la salida $\theta(t)$ del generador armónico

$$\ddot{z} + \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z = 0, \quad (120)$$

usando mediciones de posición solamente, mientras se atenuan los efectos de la fricción,

i.e., la relación del límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\theta(t) + z(t)] = 0 \quad (121)$$

tiene que ser satisfecha para las trayectorias del sistema en lazo cerrado.

Se usa la modificación de oscilador de Van der Pol, la cual resulta en un generador armónico asintótico, (120), propuesta en Roup y Bernstein (2002). La motivación para usar el generador armónico (120) como modelo de referencia y en la síntesis cuasihomogénea de retroalimentación de posición, se puede ver en Orlov *et. al.* (2008). Para lograr el objetivo, usando mediciones de posición solamente, a la síntesis cuasihomogénea se le acompaña de diseño de un observador SOSM.

V.2 Diseño del observador y síntesis de control SOSM.

V.2.1 Diseño del observador conmutado.

Para empezar se presenta el observador SOSM.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= \hat{\theta}_2 + w \operatorname{sgn}(\theta_1 - \hat{\theta}_1) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \frac{1}{m_p l^2 + J} (mgl \sin(\theta_1) - \psi(\hat{\theta}_2) + \tau) + w_1 \operatorname{sgn}(\theta_1 - \hat{\theta}_1) \end{aligned} \quad (122)$$

el cual copia la estructura de la planta, el péndulo simple, con parámetros positivos $w, w_1 > 0$, los cuales se usan para mejorar el desempeño del observador y para modelar la fuerza de fricción se utiliza el modelo clásico

$$\psi(\hat{\theta}_2) = \psi_v \hat{\theta}_2 + \psi_c \operatorname{sgn}(\hat{\theta}_2). \quad (123)$$

V.2.2 Síntesis de control SOSM.

Se utiliza la retroalimentación de estado cuasihomogénea, desarrollada en Orlov *et. al.* (2008). Esta ley de control se modifica para usar la retroalimentación de posición,

usando en paralelo un observador SOSM (122) y substituyendo la velocidad estimada $\widehat{\theta}_2$, del observador SOSM, en la retroalimentación de estado para la velocidad.

Utilizando (118), (123), (120), la dinámica del error de seguimiento en términos del error de seguimiento

$$y(t) = z(t) + \theta(t) \quad (124)$$

está dada por

$$\begin{aligned} (m_p l^2 + J)\ddot{y} &= m_p g l \sin(\theta) - \psi_v \theta_2 - \psi_c \operatorname{sgn}(\theta_2) + \tau \\ &\quad - (m_p l^2 + J) \left\{ \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z \right\} \end{aligned} \quad (125)$$

La ley de control cuasihomogénea de Orlov *et. al.* (2008) se modifica para usar la estimación de velocidad $\widehat{\theta}_2$, en lugar de utilizar la velocidad por si misma :

$$\begin{aligned} \tau &= (m_p l^2 + J) \left\{ \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z \right\} - m_p g l \sin(\theta) \\ &\quad - \psi_v \dot{z} - \alpha \operatorname{sgn}(y) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}) - h y - p \dot{y} \end{aligned} \quad (126)$$

donde $\dot{y} = \widehat{\theta}_2 + \dot{z}$, y los parámetros tienen las siguientes restricciones

$$h, p \geq 0, \quad \alpha > \beta. \quad (127)$$

La dinámica del error (125), controlada por la retroalimentación de posición (126), toma la forma

$$\begin{aligned} (m_p l^2 + J)\ddot{y} &= -\psi_c \operatorname{sgn}(\theta_2) - \alpha \operatorname{sgn}(y) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}) \\ &\quad - h y - p \dot{y} - \psi_v \dot{y}. \end{aligned} \quad (128)$$

Con relación a la síntesis cuasihomogénea de Orlov (2005a), el controlador antes

mencionado se compone de un compensador no lineal

$$u_c = (m_p l^2 + J) \left\{ \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z \right\} - m_p g l \sin(\theta), \quad (129)$$

la parte de conmutación (Fridman y Levant (1996) y Fridman y Levant (2002))

$$u_h = -\alpha \operatorname{sgn}(y) - \beta \operatorname{sgn}(\dot{y}),$$

y una parte lineal

$$u_l = -hy - p\dot{y} - \psi_v \dot{y}.$$

Se lleva la dinámica del error de seguimiento (128) a la forma canónica

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= k[-\psi_c \operatorname{sgn}(\theta_2) - \alpha \operatorname{sgn}(y_1) - \beta \operatorname{sgn}(\hat{y}_2) \\ &\quad - hy_1 - p\hat{y}_2 - \psi_v y_2] \end{aligned} \quad (130)$$

con $\kappa = \frac{1}{ml^2 + J} > 0$, donde la dinámica del error de observación

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \dot{\theta}_1 - \dot{\hat{\theta}}_1 = \theta_2 - (\hat{\theta}_2 - w \operatorname{sgn}(\theta_1 - \hat{\theta}_1)) \\ &= \eta_2 - w \operatorname{sgn}(\eta_1) \\ \dot{\eta}_2 &= \dot{\theta}_2 - \dot{\hat{\theta}}_2 = k(-\psi_v \eta_2 - \psi_c (\operatorname{sgn}(\theta_2) + \operatorname{sgn}(\theta_2 - \eta_2))) \\ &\quad - w_1 \operatorname{sgn}(\eta_1) \end{aligned} \quad (131)$$

se da en términos del error de estimación

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \theta_1 - \hat{\theta}_1 \\ \eta_2 &= \theta_2 - \hat{\theta}_2. \end{aligned} \quad (132)$$

Teorema 3. *El sistema, en conjunto, (130), (131), controlado por la retroalimentación de posición (126), es asintóticamente estable en forma global.*

Prueba. Sea la función candidata de Lyapunov no suave

$$V = \frac{1}{2}(\kappa h \nu y_1^2 + \nu y_2^2 + \eta_2^2) + \kappa \nu \alpha |y_1| + \gamma |\eta_1| \quad (133)$$

con $\kappa = \frac{1}{ml^2 + J} > 0$ y

$$\begin{aligned} \gamma w &> 2(p + \psi_v) \left[\nu(\psi_c + \beta) + \frac{w_1 + \gamma}{\kappa} \right]^2, \\ \nu &\leq \frac{(p + \psi_v)\psi_v}{p^2}. \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \kappa h \nu y_1 \dot{y}_1 + \nu y_2 \dot{y}_2 + \eta_2 \dot{\eta}_2 + \kappa \nu \alpha \operatorname{sgn}(y_1) \dot{y}_1 + \gamma \operatorname{sgn}(\eta_1) \dot{\eta}_1 \\ &= \kappa h \nu y_1 y_2 + \kappa \nu y_2 [-\psi_c \operatorname{sgn}(\theta_2) - \alpha \operatorname{sgn}(y_1) - \beta \operatorname{sgn}(\hat{y}_2)] \\ &\quad - h y_1 - p \hat{y}_2 - \psi_v y_2 \\ &\quad + \kappa \eta_2 [-\psi_v \eta_2 - \psi_c (\operatorname{sgn}(\theta_2) + \operatorname{sgn}(\theta_2 - \eta_2))] - \eta_2 w_1 \operatorname{sgn}(\eta_1) \\ &\quad + \kappa \nu \alpha \operatorname{sgn}(y_1) y_2 + \gamma \operatorname{sgn}(\eta_1) (\eta_2 - w \operatorname{sgn}(\eta_1)) \end{aligned} \quad (135)$$

usando $\hat{y}_2 = y_2 - \eta_2$ y simplificando

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\kappa \nu \psi_c y_2 \operatorname{sgn}(\theta_2) - \kappa \beta \nu y_2 \operatorname{sgn}(\hat{y}_2) - \kappa p \nu \hat{y}_2 y_2 - \kappa \nu \psi_v y_2^2 - \kappa \psi_v \eta_2^2 \\ &\quad - \kappa \psi_c \eta_2 \operatorname{sgn}(\theta_2) - \kappa \psi_c \eta_2 \operatorname{sgn}(\hat{\theta}_2) + \gamma \eta_2 \operatorname{sgn}(\eta_1) - w \gamma - \eta_2 w_1 \operatorname{sgn}(\eta_1) \\ &= -\kappa \nu \psi_c \operatorname{sgn}(\theta_2) y_2 - \kappa \nu \beta \operatorname{sgn}(\hat{y}_2) (\hat{y}_2 + \eta_2) - \kappa \nu \psi_v y_2^2 - \kappa p \nu y_2 (y_2 - \eta_2) \\ &\quad - \kappa \psi_v \eta_2^2 - \kappa \psi_c \eta_2 (\operatorname{sgn}(\theta_2) - \operatorname{sgn}(\hat{\theta}_2)) + \gamma \eta_2 \operatorname{sgn}(\eta_1) - w \gamma - w_1 \operatorname{sgn}(\eta_1) \eta_2 \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\kappa \nu \psi_c \operatorname{sgn}(\theta_2) y_2 - \kappa \nu \beta |\hat{y}_2| - \kappa \nu \beta \eta_2 - \kappa \nu \psi_v y_2^2 - \kappa p \nu y_2^2 + \kappa p \nu y_2 \eta_2 \\ &\quad - \kappa \psi_v \eta_2^2 - \kappa \psi_c |\theta_2| \left(1 - \operatorname{sgn}(\theta_2) \operatorname{sgn}(\hat{\theta}_2) \right) \\ &\quad - \kappa \psi_c |\hat{\theta}_2| \left(1 - \operatorname{sgn}(\theta_2) \operatorname{sgn}(\hat{\theta}_2) \right) + \gamma \operatorname{sgn}(\eta_1) \eta_2 - w \gamma - w_1 \operatorname{sgn}(\eta_1) \eta_2 \\ &\leq -\kappa \nu \psi_c \operatorname{sgn}(\theta_2) (\eta_2 + \hat{y}_2) - \kappa \nu \beta |\hat{y}_2| - \kappa \nu \beta \operatorname{sgn}(\hat{y}_2) \eta_2 - \kappa \nu \psi_v y_2^2 \\ &\quad - \kappa p \nu y_2^2 + \kappa p \nu y_2 \eta_2 - \kappa \psi_v \eta_2^2 + \gamma \operatorname{sgn}(\eta_1) \eta_2 - w \gamma - w_1 \operatorname{sgn}(\eta_1) \eta_2 \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\kappa\nu\psi_c\text{sgn}(\theta_2)\eta_2 - \kappa\nu\psi_c\text{sgn}(\theta_2)\widehat{y}_2 - \kappa\nu\beta|\widehat{y}_2| - \kappa\nu\beta\text{sgn}(\widehat{y}_2)\eta_2 - \kappa\nu\psi_v y_2^2 \\
&\quad - \kappa p\nu y_2^2 + \kappa p\nu y_2 \eta_2 - \kappa\psi_v \eta_2^2 + \gamma\text{sgn}(\eta_1)\eta_2 - w\gamma - w_1\text{sgn}(\eta_1)\eta_2 \\
&= \eta_2[-\kappa\nu\psi_c\text{sgn}(\theta_2) - \kappa\nu\beta\text{sgn}(\widehat{y}_2) - w_1\text{sgn}(\eta_1) + \gamma\text{sgn}(\eta_1) - \kappa\nu|\widehat{y}_2|][\beta \\
&\quad - \psi_c\text{sgn}(\theta_2)\text{sgn}(\widehat{y}_2) - \kappa(p + \psi_v)\nu y_2^2 - \kappa p\nu y_2 \eta_2 + \kappa\psi_v \eta_2^2 - w\gamma]
\end{aligned} \tag{138}$$

usando la desigualdad $ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}$, la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \frac{\eta_2^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} (\kappa\nu\psi_c + \kappa\nu\beta + w_1 + \gamma)^2 - w\gamma \\
&\quad - \kappa\nu|\widehat{y}_2| [\beta - \psi_c\text{sgn}(\theta_2)\text{sgn}(\widehat{y}_2)] \\
&\quad - \kappa(p + \psi_v)\nu y_2^2 + \frac{\kappa p\nu}{2\epsilon_1} y_2^2 + \frac{\kappa p\epsilon_1\nu}{2} \eta_2^2 - \kappa\psi_v \eta_2^2
\end{aligned} \tag{139}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &< - \left[w\gamma - \frac{\epsilon}{2} (\kappa\nu\psi_c + \kappa\nu\beta + w_1 + \gamma)^2 \right] - \kappa\nu|\widehat{y}_2| [\beta - \psi_c] \\
&\quad - \left[p + \psi_v - \frac{p}{2\epsilon_1} \right] \kappa\nu y_2^2 - \left[\kappa\psi_v - \frac{\kappa p\epsilon_1\nu}{2} - \frac{1}{2\epsilon} \right] \eta_2^2
\end{aligned} \tag{140}$$

con las restricciones

$$\begin{aligned}
\gamma w &> 2(p + \psi_v) \left[\nu(\psi_c + \beta) + \frac{w_1 + \gamma}{\kappa} \right]^2 \\
\beta &> \psi_c, \quad \epsilon > \frac{1}{\kappa\psi_v}, \quad \epsilon_1 \geq \frac{p}{2(p + \psi_v)}
\end{aligned} \tag{141}$$

se puede ver que $\dot{V} < 0$. □

Se demuestra que la derivada temporal de (133) a lo largo de las trayectorias (130), (131) es negativa definida, entonces se concluye la estabilidad asintótica global, como en Alvarez *et. al.* (2000).

V.3 Resultados numéricos.

Se verifica el desempeño de la síntesis cuasihomogénea usando retroalimentación de posición mediante experimentos numéricos, usando el programa de SIMULINK,

MATLAB. El péndulo tiene una masa de $m_p=0.5234 \text{ kg}$, centrada en $l=0.108 \text{ m}$, con una inercia de $J=0.006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ con respecto al centro de masa. Estos parámetros fueron tomados de un péndulo real del laboratorio de CICESE. La fricción en el motor se identificó con los siguientes parámetros $\psi_v = 0.00053 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$ y $\psi_c=0.05492 \text{ N} \cdot \text{m}$. La posición inicial del péndulo y del oscilador modificado de van der Pol fueron fijados en $\theta(0)=0.5 \text{ rad}$ y $z(0)=0.01 \text{ rad}$, así como todas las condiciones iniciales para las velocidades se fijaron en $\dot{\theta}(0) = 0.1$.

En nuestro estudio numérico, las ganancias del controlador (126) fueron fijadas en $h=0$, $p=0$, $\alpha=6 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\beta = 4 \text{ N} \cdot \text{m}$, las ganancias del observador se fijaron en $w=1$, $w_1 = 35$, así como los parámetros de referencia fueron sintonizados en $\varepsilon=20 \text{ [rad]}^{-2}\text{s}^{-1}$, $\rho = 2 \text{ rad}$, $\mu=2 \text{ s}^{-1}$.

En las figuras 42, 43, 44 se muestra la estabilización orbital del péndulo cuando no se tienen perturbaciones. Para mostrar la eficiencia del observador no lineal (122) se introducen perturbaciones paramétricas cambiando el nivel de fricción de Coulomb a $\psi_c = 0.07$ y se añade un término de perturbación externa $\omega = 0.05$. Como se puede ver en las figuras 45, 46 y 47, se alcanza el objetivo de control a pesar de perturbaciones paramétricas.

La primer y segunda gráfica muestra el error de seguimiento de posición $y = \theta + z$ y el error de seguimiento de velocidad angular $y_2 = \hat{\theta}_2 + z_2$, respectivamente; la segunda y tercer figura muestra el error de estimación del péndulo simple $\eta_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ y el error de estimación $\eta_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$; y la última figura presenta el torque aplicado al sistema (126).

V.3.1 Modelo de LuGre para el fenómeno de fricción.

Para mostrar la capacidad del observador no lineal se utiliza el modelo de LuGre (11) para describir el fenómeno de fricción. Para mostrar la eficiencia del observador no

lineal se utiliza esta representación para modelar el fenómeno de fricción del péndulo simple (ver Figuras 48, 50 y 49). Como se puede ver, se alcanza el objetivo de control usando el modelo de LuGre para la fricción con retroalimentación de posición. En la primera figura se muestra el error entre la posición angular del péndulo y la salida del oscilador de Van der Pol , *i.e.* $\theta(t) = -z(t)$; en la segunda figura se muestra el error de seguimiento y_2 ; en la tercera y cuarta figura se muestran el error de estimación η_1 y η_2 , respectivamente; y la última figura muestra el torque aplicado al sistema en lazo cerrado. En este estudio numérico las ganancias del observador se fijaron en $w=50$, $w_1=600$, mientras que para el controlador en SOSM se utilizaron las mismas ganancias que en la sección anterior.

Tabla VIII: Parámetros del modelo de LuGre.

| Notación | Valor | Unidades |
|------------|---------|-------------------------|
| σ_0 | 3000 | N/rad |
| σ_1 | 50 | $N \cdot s/rad$ |
| σ_2 | 0.00053 | $N \cdot m \cdot s/rad$ |
| F_s | 0.1 | N |
| v_0 | 10 | rad/s |

V.4 Resultados experimentales.

En esta sección se muestra el desempeño de la síntesis cuasihomogénea usando retroalimentación de posición mediante experimentos, usando el programa de MATLAB. El péndulo tiene una masa de $m_p=0.5234 \text{ kg}$, centrada en $l=0.108 \text{ m}$, con una inercia de $J=0.006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ con respecto al centro de masa. Estos parámetros fueron tomados de un péndulo real del laboratorio de CICESE. La fricción en el motor se identificó con los

siguientes parámetros $\psi_v = 0.00053 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$ y $\psi_c = 0.05492 \text{ N} \cdot \text{m}$. La posición inicial del péndulo y del oscilador modificado de van der Pol fueron fijados en $\theta(0) = -\pi \text{ rad}$ y $z(0) = 0.49 \text{ rad}$, así como todas las condiciones iniciales para las velocidades se fijaron en cero.

En nuestro estudio experimental, las ganancias del controlador (126) fueron fijadas en $h=0$, $p=0$, $\alpha=7 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\beta=5 \text{ N} \cdot \text{m}$, las ganancias del observador se fijaron en $w=500$, $w_1 = 250$, así como los parámetros de referencia fueron sintonizados en $\varepsilon=20 \text{ [rad]}^{-2}\text{s}^{-1}$, $\rho=0.4 \text{ rad}$, $\mu = 3 \text{ s}^{-1}$.

En las figuras 51, 52 y 53 se muestra la estabilización orbital del péndulo cuando no se tienen perturbaciones.

La primer gráfica muestra el error de posición $y = \theta + z$, la segunda figura muestra la posición del péndulo simple q_1 y salida del oscilador modificado de Van der Pol z y la última figura presenta el torque u aplicado al sistema (126).

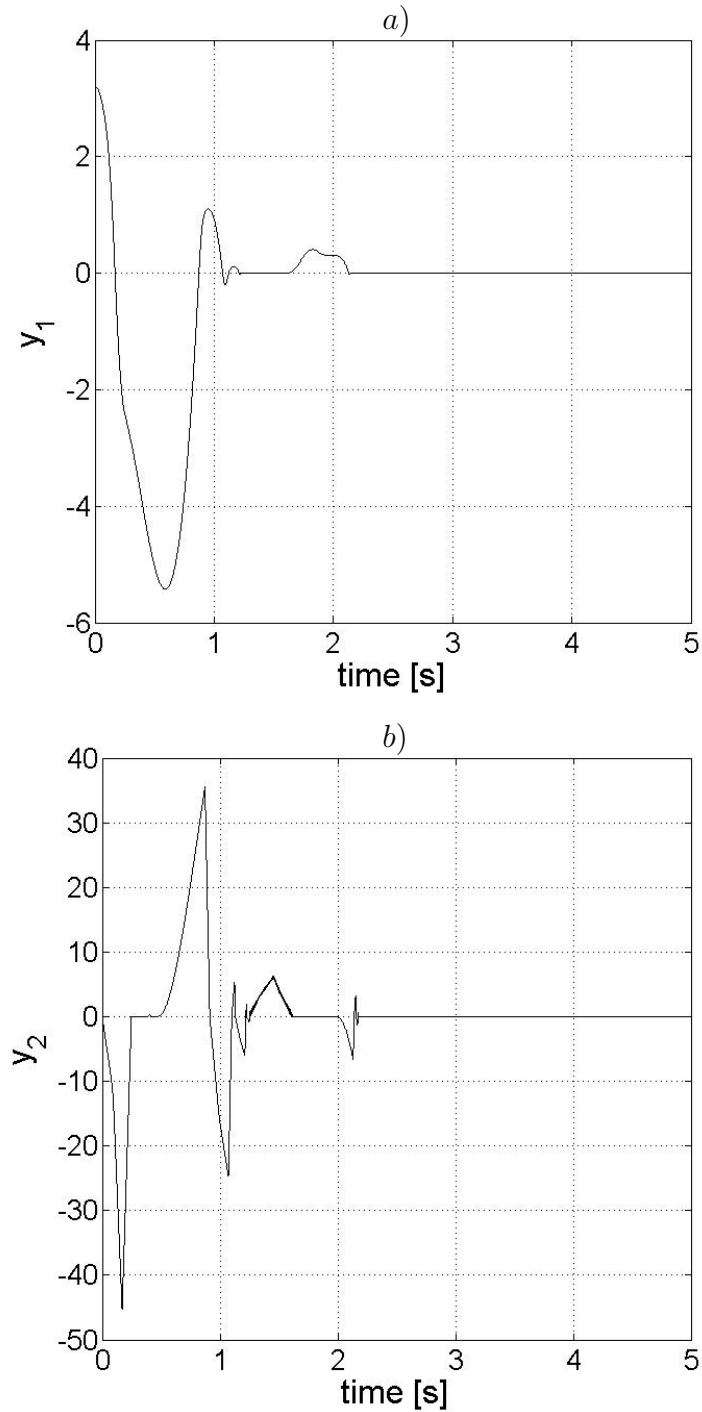


Figura 42: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso sin perturbaciones. *a)* Error de seguimiento de posición y *b)* Error de seguimiento de velocidad.

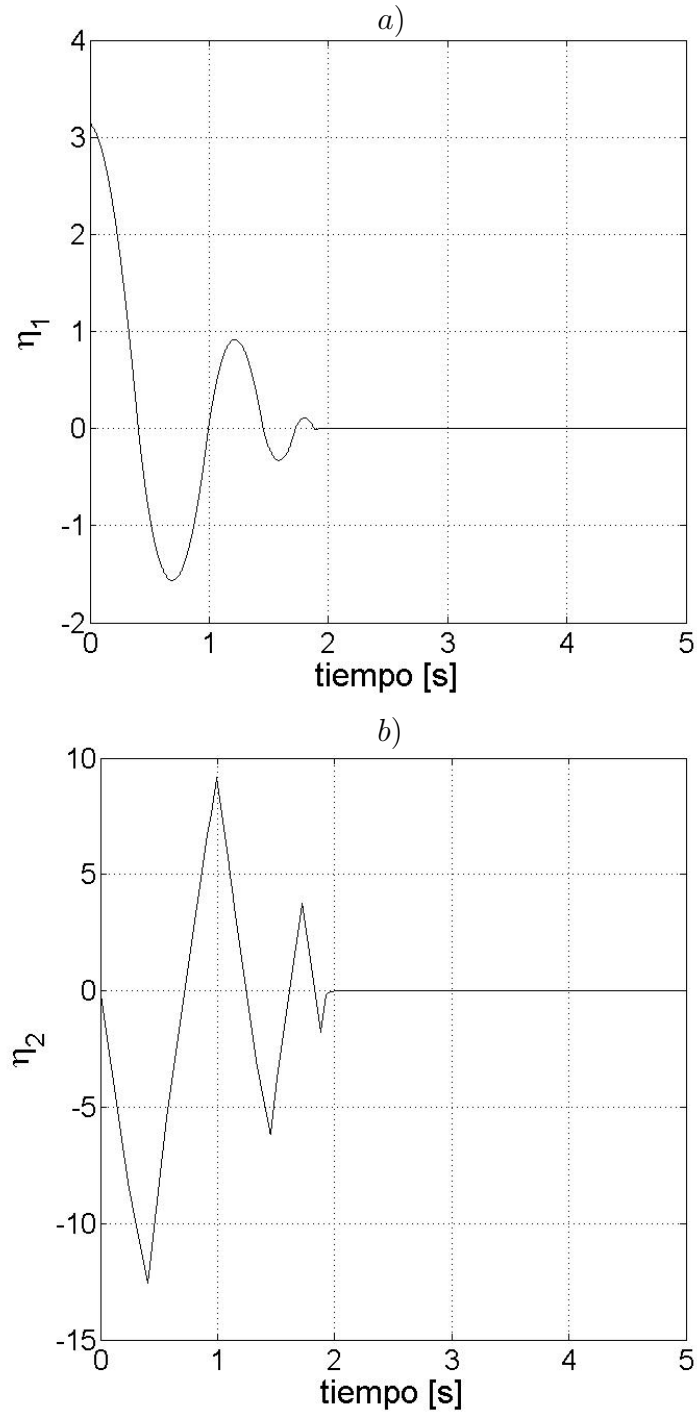


Figura 43: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso sin perturbaciones. *a)* Error de estimación de posición y *b)* Error de estimación de velocidad.

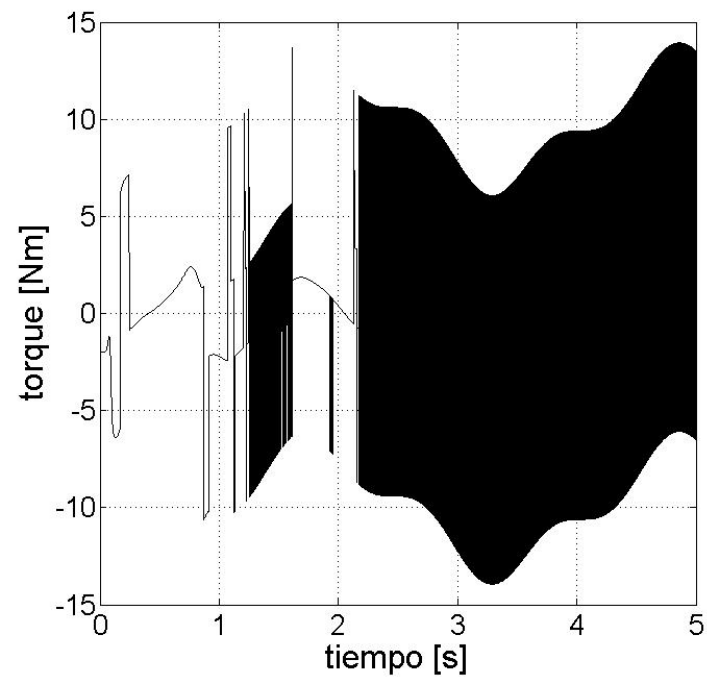


Figura 44: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso sin perturbaciones. Torque aplicado.

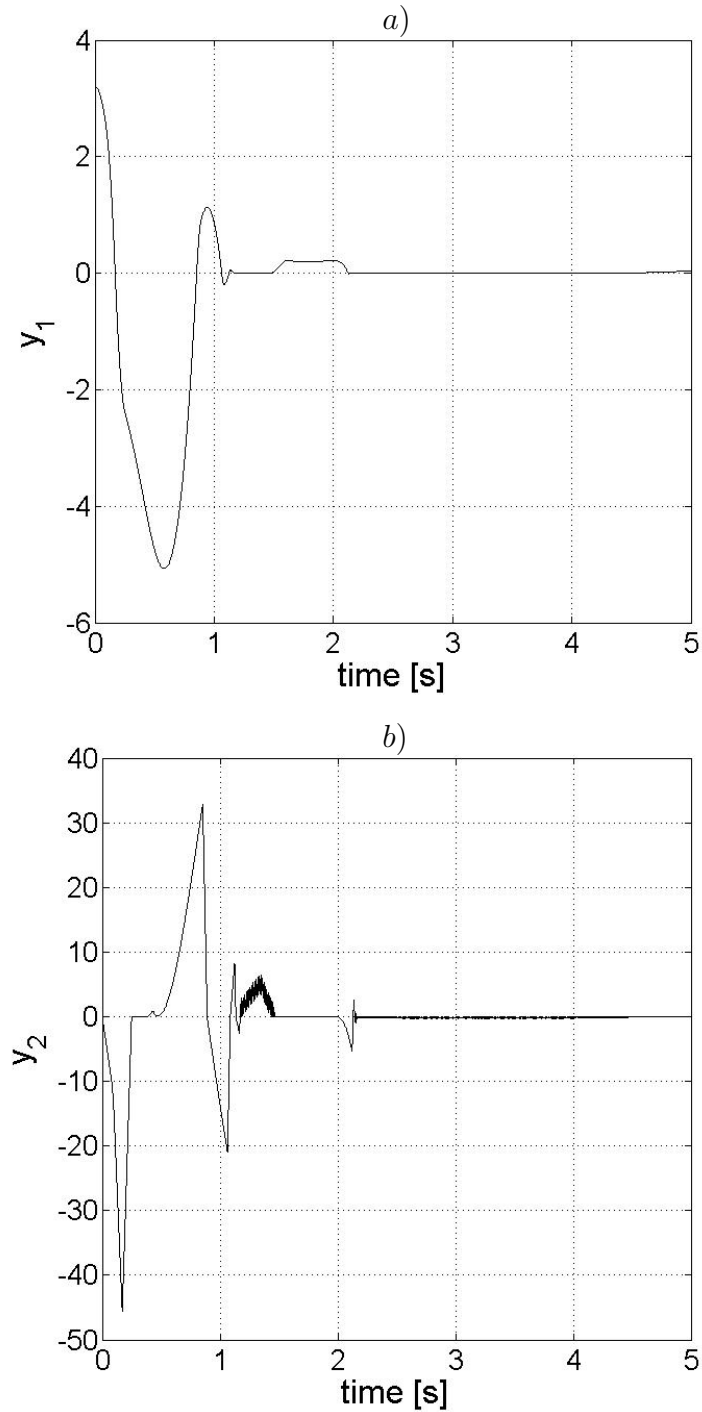


Figura 45: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso con variaciones paramétricas. *a)* Error de seguimiento de posición y *b)* Error de seguimiento de velocidad.

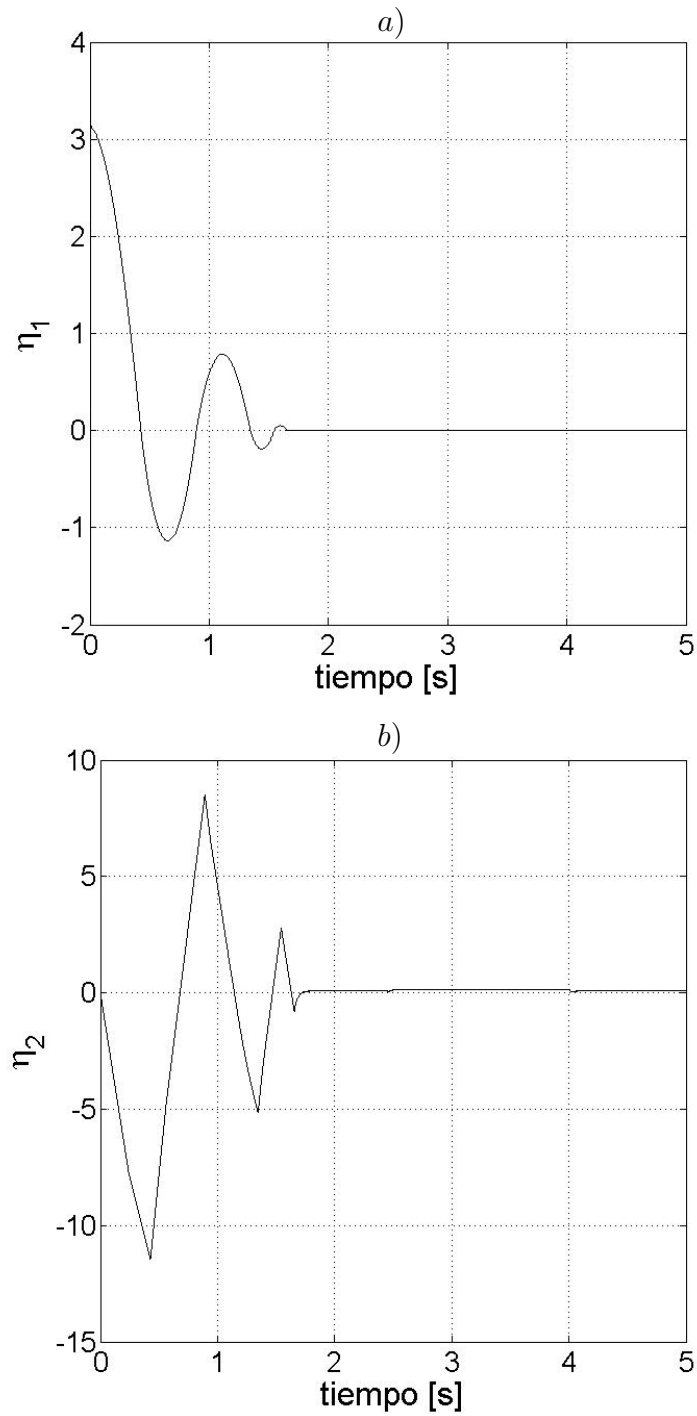


Figura 46: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso con variaciones paramétricas. *a)* Error de estimación de posición y *b)* Error de estimación de velocidad.

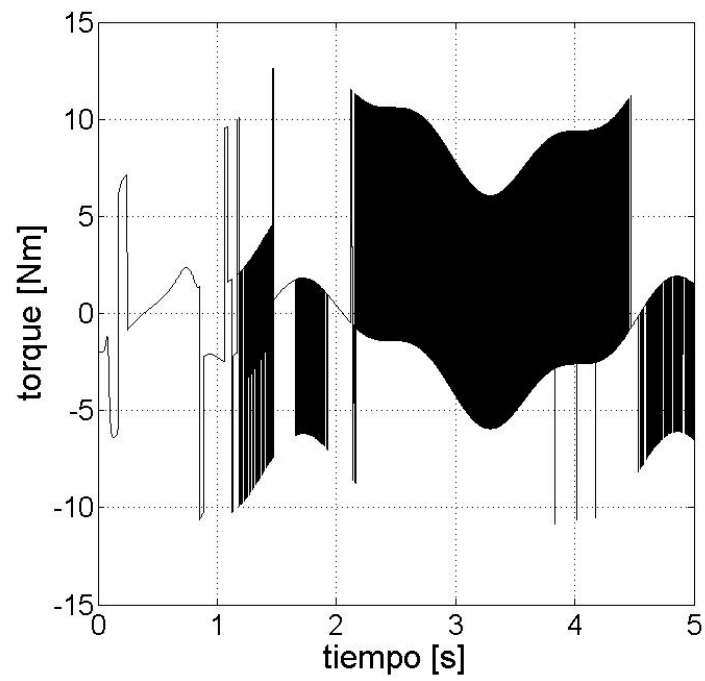


Figura 47: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal para el caso con variaciones paramétricas. Torque aplicado.

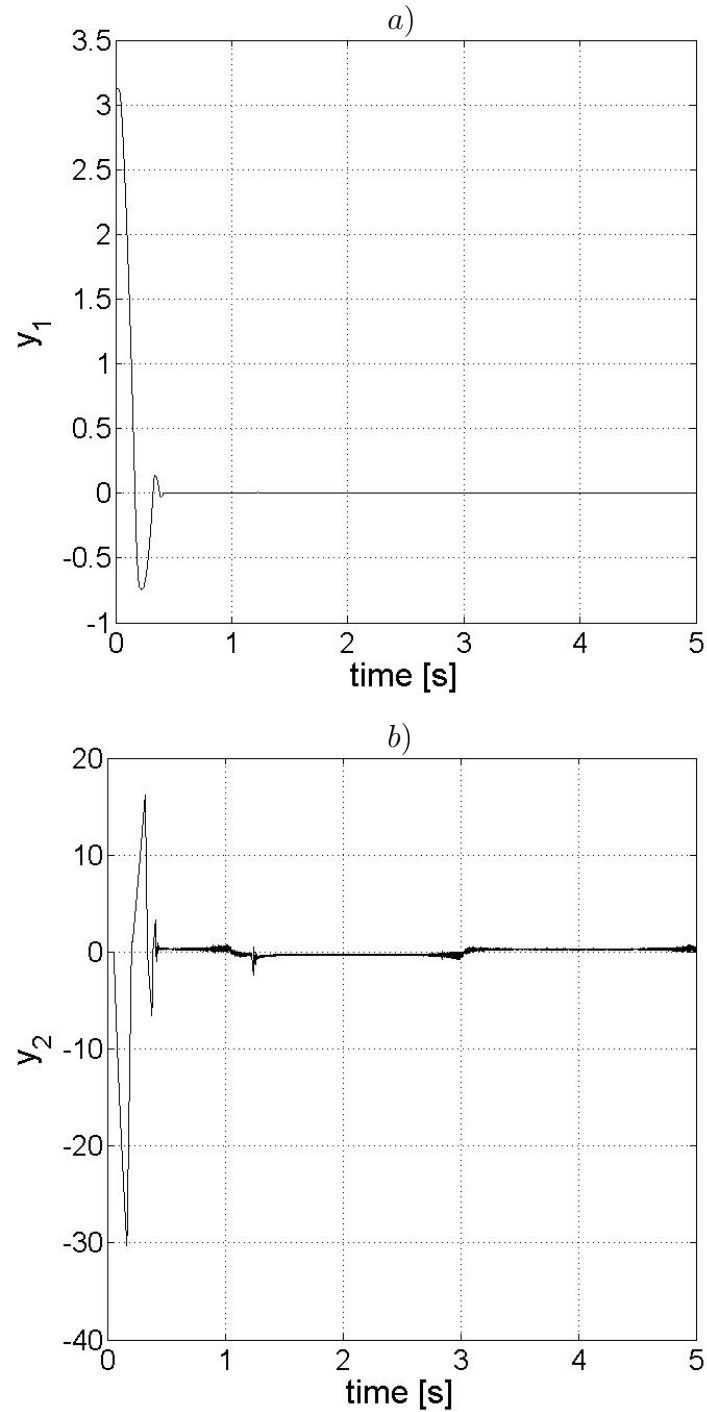


Figura 48: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal y el modelo de LuGre para el fenómeno de fricción. *a)* Error de seguimiento de posición y *b)* Error de seguimiento de velocidad.

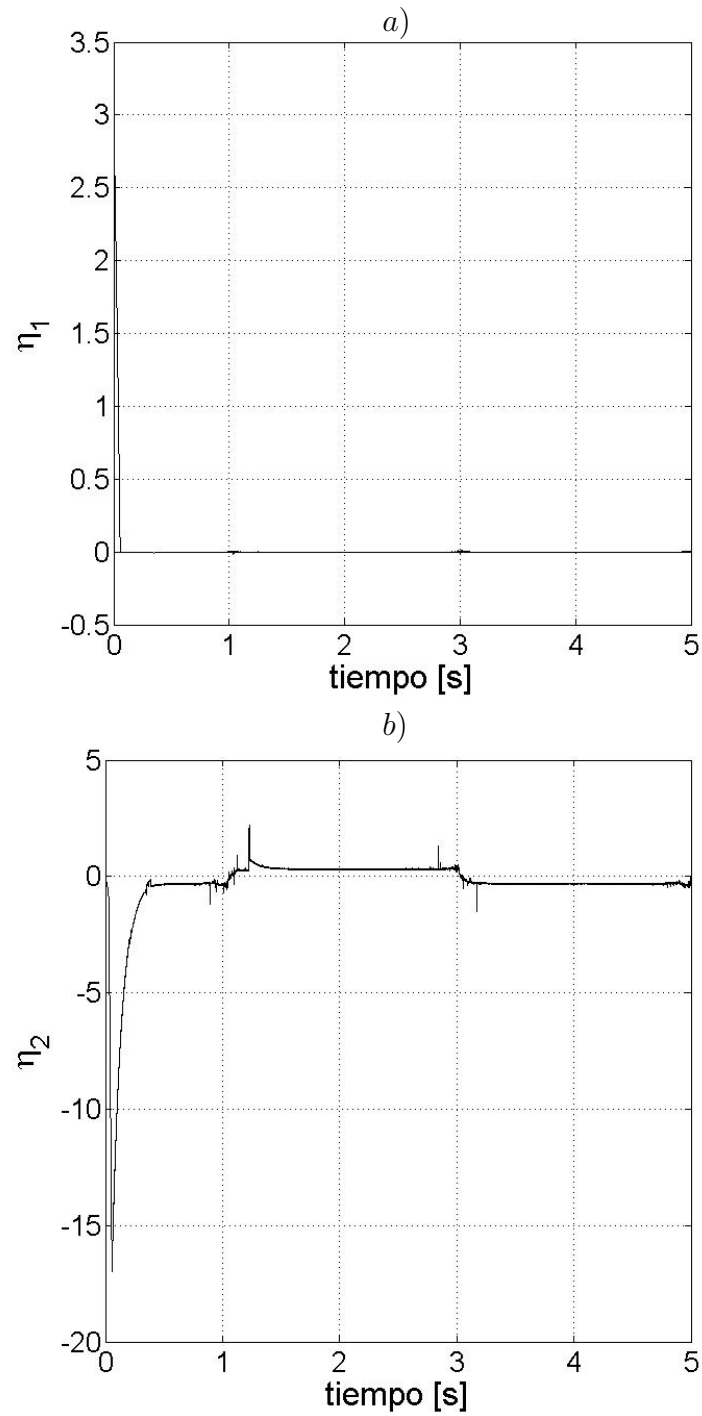


Figura 49: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal y el modelo de LuGre para el fenómeno de fricción. *a)* Error de estimación de posición y *b)* Error de estimación de velocidad.

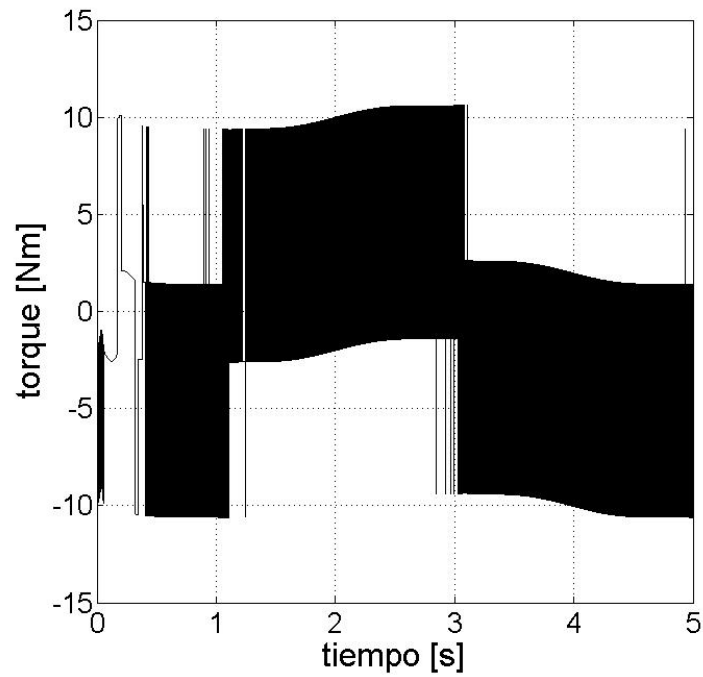


Figura 50: Estabilización orbital del péndulo usando el observador no lineal y el modelo de LuGre para el fenómeno de fricción. Torque aplicado al sistema en lazo cerrado.

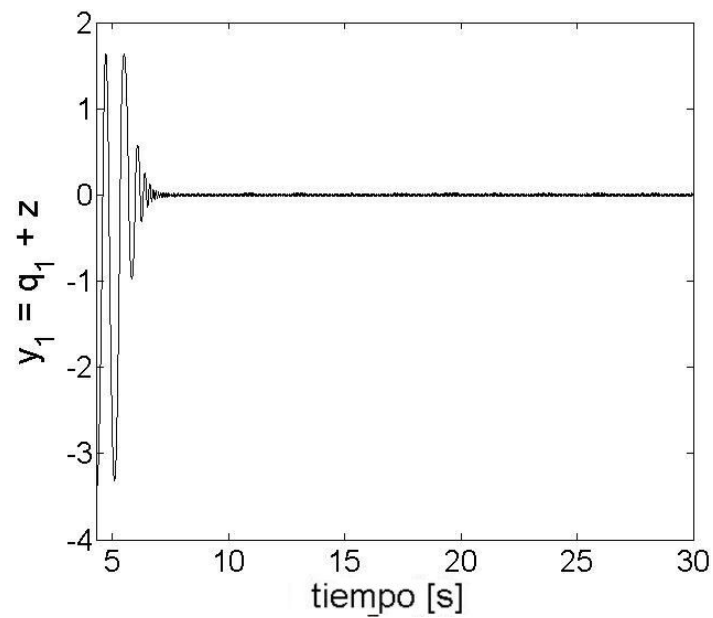


Figura 51: Estabilización orbital del péndulo de laboratorio usando el observador no lineal. Error de seguimiento del sistema (118) para el caso sin perturbaciones.

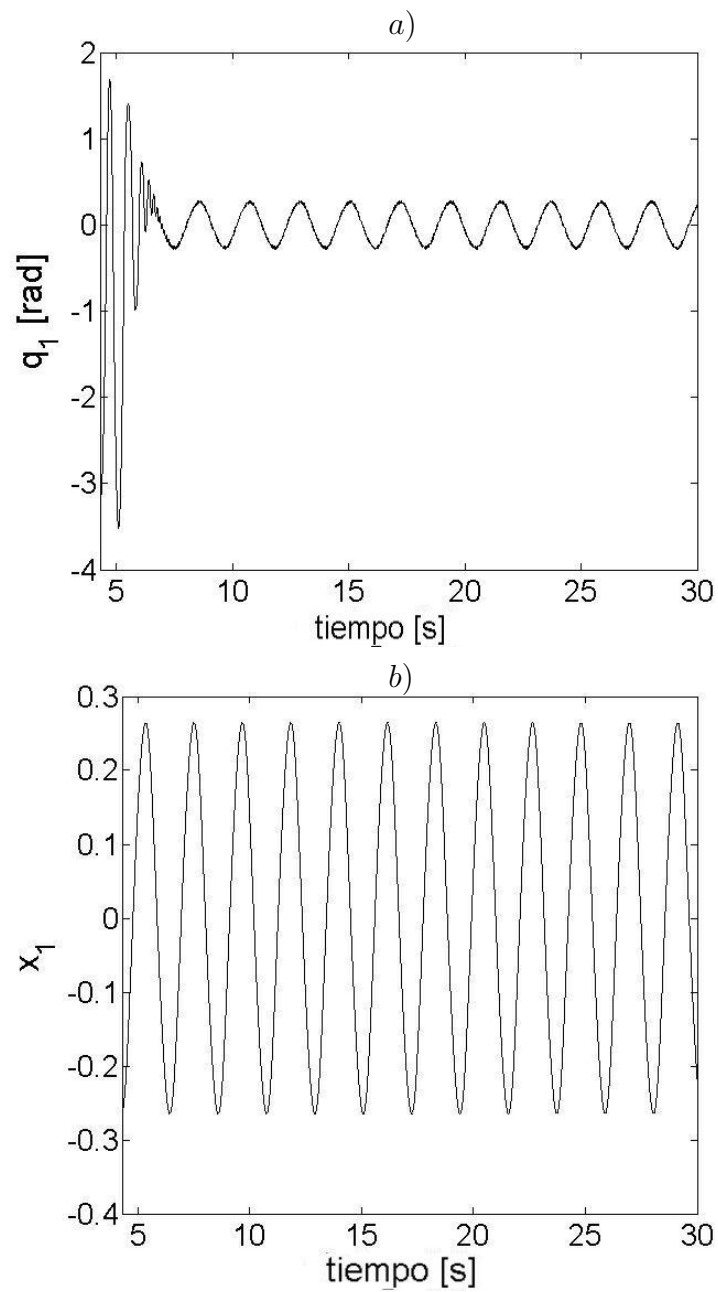


Figura 52: Estabilización orbital del péndulo de laboratorio usando el observador no lineal. *a)* Posición del sistema sin perturbaciones y *b)* Salida del oscilador modificado de Van der Pol.

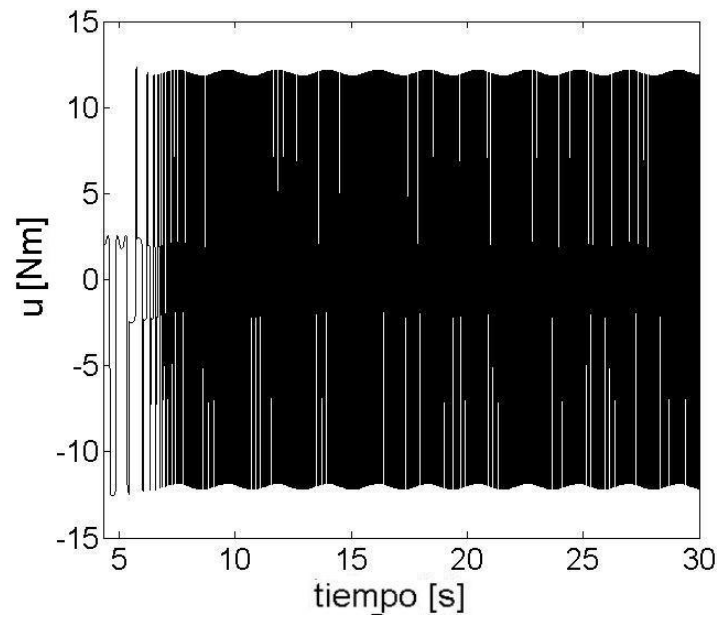


Figura 53: Estabilización orbital del péndulo de laboratorio usando el observador no lineal. Torque aplicado al sistema para el caso sin perturbaciones.

Capítulo VI

Estabilización de oscilador de un grado de libertad con control impulsivo.

VI.1 Introducción.

La fricción es un fenómeno no lineal que produce movimientos de estancamiento y deslizamiento, por lo que se tiene errores de estado estable. Para analizar dicho fenómeno se han desarrollado modelos que describen la fricción de manera más exacta, como en Canudas-de-Wit *et. al.* (1995). Al mismo tiempo, se han desarrollado algoritmos de control, robustos ante perturbaciones debido al modelo de fricción, en modos deslizantes de segundo orden (ver Orlov (2005a)).

En este capítulo se desarrollará una técnica de control para contrarrestar los efectos del fenómeno de fricción. La técnica propuesta está basada en impactos cuando el sistema queda "atascado" debido a la presencia de fricción seca. El sistema masa-resorte sirve como ejemplo para mostrar dicha técnica. Un estudio de la estabilización del sistema se muestra en las siguientes secciones, así como las características del algoritmo desarrollado, es decir, se muestra que la técnica propuesta es robusta ante variaciones paramétricas y perturbaciones externas. A diferencia de los métodos de compensación de fricción y de la síntesis en modos deslizantes, la retroalimentación de posición se construye tal que nos da la información cuando el sistema está en estado estable.

VI.2 Control impulsivo: aplicación a sistema masa-resorte.

El sistema masa-resorte (ver figura 54), afectado por fricción de Coulomb, está gobernado por la ecuación diferencial

$$m_r \ddot{x} = -kx - \psi_r \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \omega + u \quad (142)$$

donde x es el desplazamiento, \dot{x} es la velocidad, $m_r > 0$ es la masa del sistema, $\psi_r > 0$ es el nivel de fricción de Coulomb, $k > 0$ es el coeficiente de rigidez, u denota la entrada de control y ω describe la perturbación externa. Como la ecuación (142) aparece con el lado derecho discontinuo, su solución se define en el sentido de Filippov (ver Filippov (1988)).

El modelo clásico para la fricción, tomando en cuenta solo el fenómeno de fricción seca, se utiliza en este estudio. Aunque considerar la fricción viscosa es importante desde un punto de vista práctico, se prefiere no hacer esa extensión ya que sería más bien técnica. En cambio, se desea facilitar la exposición de la técnica propuesta y enfocarse a características esenciales del procedimiento en general.

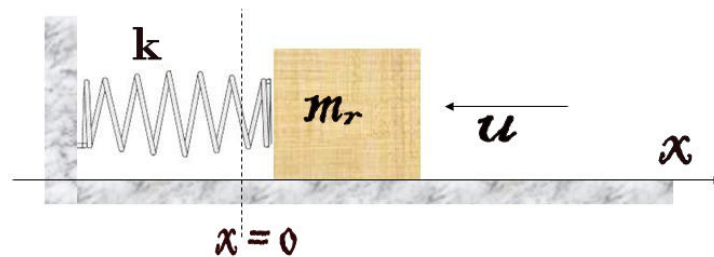


Figura 54: Sistema masa-resorte.

Para tomar en cuenta la inexactitud del modelo, se considera una perturbación

externa desconocida $\omega(t)$ en el modelo. A lo largo del estudio, se supone que la amplitud de la perturbación es más pequeña que la mitad del nivel de Coulomb ψ_r , i.e.,

$$|\omega(t)| \leq \alpha_0 < \frac{1}{2}\psi_r \quad (143)$$

para todo t y una constante $\alpha_0 > 0$. La consideración (143) se hace por razones técnicas que se verán claras conforme se desarrolla el controlador impulsivo.

El sistema (142) se lleva a la representación de espacio de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_r} [-kx_1 - \psi_r \operatorname{sgn}(x_2) + \omega + u] \end{aligned} \quad (144)$$

donde $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

Ya que el sistema no forzado (144) es disipativo y dicha disipación está acotada por la constante positiva $\alpha - \alpha_0$, sistema (144) bajo $u = 0$ queda estancado en tiempo finito en una zona dependiente de la perturbación (ver figura VI.2)

$$S_w \subset S = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq \frac{\psi_r + \alpha_0}{k}, x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (145)$$

Asumiendo que el sistema está siendo forzado por un actuador impulsivo

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} r(x_1) \delta(t - t_i) \quad (146)$$

utilizando una retroalimentación de posición continua $r(x_1)$ y se aplica a un instante de tiempo, dependiente de los estados, $t_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2, \dots$, el sistema en lazo cerrado

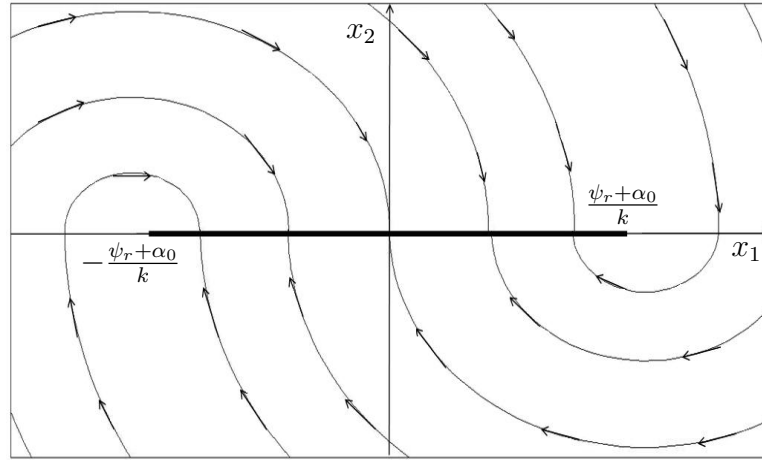


Figura 55: Retrato de fase para el sistema masa-resorte no forzado (144).

exhibe una dinámica discreta-continua

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m_r} (-kx - \psi_r \operatorname{sgn}(x_2) + \omega), \quad t \neq t_i, \quad (147)$$

$$x_1(t_i+) = x_1(t_i-), \quad x_2(t_i+) = x_2(t_i-) + r(x_1(t_i)),$$

$$i = 1, 2, \dots \quad (148)$$

Es claro que al usar una retroalimentación de posición $r(x_1)$ nos lleva a una regla de restitución (148) ya que la entrada impulsiva (146) resulta en un cambio instantáneo de la velocidad mientras que la dinámica de la posición se mantiene, entonces, la retroalimentación de posición $r(x_1(t))$ permanece continua en el tiempo. Es importante hacer notar que al aplicar una retroalimentación de estado $r(x_1, x_2)$ podría imponer una cierta regla de restitución no lineal, causada por el producto, mal definido, de la función de Dirac $\delta(t - \tau)$, localizado en el instante de tiempo τ , y la función $r(x_1(t), x_2(t))$, discontinua en $t = \tau$ (ver por ejemplo Orlov (2000) para los detalles en la respuesta no

lineal del impulso).

Nuestro objetivo es diseñar un controlador impulsivo (146) tal que el sistema en lazo cerrado (148) es asintóticamente estable alrededor del origen, a pesar de las perturbaciones externas (143) que afectan al sistema. Se supone que la posición actual $x_1(t)$ está disponible para mediciones, así como la única información disponible de la velocidad $x_2(t)$ es el conocimiento si es cero o no.

VI.3 Diseño de control impulsivo.

Sea el controlador impulsivo (146) especificado por

$$r(x_1) = -\sqrt{\frac{2\psi_r|x_1| - kx_1^2}{m_r}} \operatorname{sgn}(x_1) \quad (149)$$

y sea aplicado al sistema (144) en instantes de tiempo $t_i, i = 1, 2, \dots$ tal que

$$|x_1(t_i)| \leq \frac{\psi_r + \alpha_0}{k}, \quad x_2(t_i^-) = 0. \quad (150)$$

La dinámica del sistema en lazo cerrado (146)–(150) se describe como sigue. Una vez que el sistema principal (144) llega a la zona de estancamiento (145), es forzado por el controlador impulsivo (146) que cambia la velocidad del sistema en un instante (ver figura VI.3). La amplitud del controlador (149) se ha fijado de tal forma que el sistema masa-resorte (144) que, desde la zona de estancamiento (145) a la trayectoria de fase, sin ser perturbado, llega al origen sin oscilaciones. Se mostrará que, se alcanza la estabilización asintótica no sólo para el sistema sin perturbaciones (144) con $\psi_r = 0$ pero también para la versión perturbada de este, a condición de que la perturbación, que afecta al sistema, este sujeta a la cota superior (143).

El siguiente resultado se obtuvo.

Teorema 4. *Sea el oscilador con fricción (144) controlado por la síntesis propuesta (146), con las especificaciones (149), (150). Entonces el sistema en lazo cerrado (146)–(150) es global asintóticamente estable a condición de que la norma de la cota superior*

(143) sea satisfecha por la perturbación externa que afecta al sistema.

Prueba. Se ha mencionado que el sistema no forzado (144) posee conjunto invariante y globalmente estable en tiempo finito S_w , localizado acorde a (145) dentro de la zona estimada de estancamiento S . Una vez que el sistema en lazo cerrado (146)–(150) alcanza S , en $x_1(t_1) = \xi_1$ tal que $|\xi_1| \leq \frac{\psi_r + \alpha_0}{k}$, el controlador impulsivo (146), (149), (150) se aplica en el instante de tiempo t_1 .

La regla de resititución (148) está dada por

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= \xi_1, \\ x_2(t_1+) &= -\sqrt{\frac{2\psi_r|\xi_1| - k(\xi_1)^2}{m_r}} \operatorname{sgn}(\xi_1). \end{aligned} \quad (151)$$

Si el sistema en lazo cerrado está libre de perturbaciones, la trayectoria de estado, con reinicio en (151), llevaría, en una sola dirección, al origen en tiempo finito (ver figura VI.3). Como sea, si se tiene una perturbación acotada (143) afectando al sistema en lazo cerrado, la trayectoria de estado golpeará la zona de estancamiento en $x_1(t_2) = \xi_2 \neq 0$ condicionado a $x_2(t_2-) = 0$.

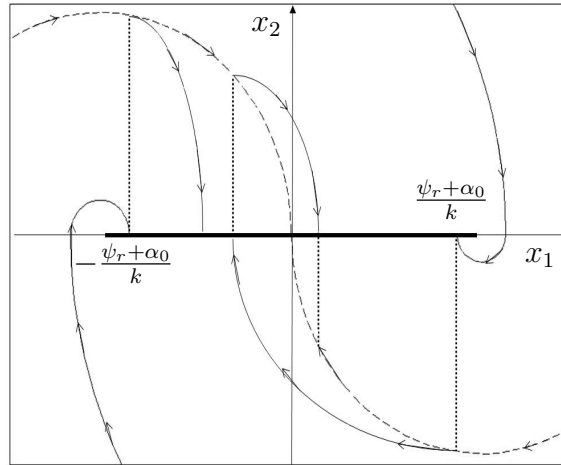


Figura 56: Retrato de fase del sistema impulsivo en lazo cerrado (146)–(150): las líneas punteadas son para los saltos en la velocidad, las líneas solidas son para las trayectorias perturbadas y la línea segmentada es para la trayectoria libre de perturbaciones.

Nuestro objetivo es demostrar que, aún el peor caso, donde $\omega = \alpha_0$ o $\omega = -\alpha_0$, la

siguiente desigualdad se satisface

$$|\xi_2| \leq \frac{2\alpha_0}{\psi_r} |\xi_1|. \quad (152)$$

Entonces de la iteración en i , se pueden obtener relaciones similares

$$|\xi_{i+1}| \leq \frac{2\alpha_0}{\psi_r} |\xi_i|, \quad i = 1, 2, \dots \quad (153)$$

para las posiciones $\xi_i = x_1(t_i)$ en los instantes de tiempo t_i , $i = 1, 2, \dots$ en donde se alcanza la zona de estancamiento (145). Desde que $q = \frac{2\alpha_0}{\psi_r} < 1$ por suposición, se puede ver que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |x_1(t_i)| = \lim_{i \rightarrow \infty} q^{i-1} |\xi_1| = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |x_2(t_i+)| = 0 \quad (154)$$

donde las relaciones $x_2(t_i+) = -\sqrt{\frac{2\psi_r|\xi_i| - k(\xi_i)^2}{m_r}} \text{sgn}(\xi_i)$, $i = 1, 2, \dots$, similar a (151), se han tomado en cuenta.

Para el propósito de validar (152), se calcula el valor de ξ_2 como una función de ξ_1 , asumiendo con certeza, que $\xi_1 < 0$, y realizando cálculos similares, para caso contrario.

Para este caso en donde $\psi_r = \alpha_0$ la dinámica del sistema, entre los impactos sucesivos, está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_r} (-kx_1 - \psi_r + \alpha_0), \quad t \in (t_1, t_2). \end{aligned} \quad (155)$$

Con inicio en (151), la solución del sistema perturbado (155) está dado por

$$\frac{1}{m_r} (-k \frac{x_1^2}{2} - \psi_r x_1 + \alpha_0 x_1) = \frac{\alpha_0 \xi_1}{m_r} + \frac{x_2^2}{2}. \quad (156)$$

Restringiendo al instante de tiempo t_2 cuando $x_2(t_2-) = 0$, la relación anterior nos da como resultado

$$kx_1^2(t_2) + 2(\psi_r - \alpha_0)x_1(t_2) + 2\alpha_0\xi_1 = 0. \quad (157)$$

Fijando $\xi_2 = x_1(t_2)$ y tomando en cuenta que para este caso, $\xi_1 < 0$ y se sigue que

$$\xi_2 = -\frac{\psi_r - \alpha_0}{k} + \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \psi_r)^2}{k^2} + \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}}. \quad (158)$$

Substituyendo (158) en (152) para ξ_2 , se llega a la desigualdad

$$-\frac{\psi_r - \alpha_0}{k} + \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \psi_r)^2}{k^2} + \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}} \leq \frac{2\alpha_0}{\alpha} |\xi_1| \quad (159)$$

a verificar. Para validar (159) es suficiente representarlo en la forma

$$\frac{(\alpha_0 - \alpha)^2}{k^2} + \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k} \leq \left[\frac{2\alpha_0}{\psi_r}|\xi_1| + \frac{\psi_r - \alpha_0}{k} \right]^2, \quad (160)$$

y observar que (160) es equivalente a la desigualdad

$$\frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k} \leq \frac{4(\alpha_0)^2}{\psi_r^2}|\xi_1|^2 + \frac{4\alpha_0(\psi_r - \alpha_0)}{\psi_r k}|\xi_1| \quad (161)$$

cuya validación se reduce a la desigualdad

$$1 \leq \frac{2(\psi_r - \alpha_0)}{\psi_r}, \quad (162)$$

que resulta de (143). Entonces, la desigualdad (152) se verifica en el caso cuando $\omega = 1$.

Sólo falta verificar la desigualdad (152) en el caso en que $\omega = -1$ con la dinámica del sistema, entre los impactos sucesivos, está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_r}(-kx_1 - \psi_r - \alpha_0), \quad t \in (t_1, t_2). \end{aligned} \quad (163)$$

La solución del sistema anterior, con condiciones iniciales en (151), está dado por

$$\frac{1}{m_r}(-k\frac{x_1^2}{2} - \psi_r x_1 - \alpha_0 x_1) = -\frac{\alpha_0 \xi_1}{m_r} + \frac{x_2^2}{2}. \quad (164)$$

Al siguiente instante de tiempo t_2 cuando $x_2(t_2^-) = 0$, la relación (164) nos da el resultado

$$kx_1^2(t_2) + 2(\psi_r + \alpha_0)x_1(t_2) - 2\alpha_0\xi_1 = 0. \quad (165)$$

Fijando $\xi_2 = x_1(t_2)$, se sigue que

$$\xi_2 = -\frac{\alpha_0 + \psi_r}{k} + \sqrt{\frac{(\alpha_0 + \psi_r)^2}{k^2} - \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}} \quad (166)$$

a condición de que $\xi_1 < 0$, es el caso que se está estudiando.

Substituyendo (166) en (152) para ξ_2 , se llega a la desigualdad

$$\frac{\alpha_0 + \psi_r}{k} - \sqrt{\frac{(\alpha_0 + \psi_r)^2}{k^2} - \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}} \leq \frac{2\alpha_0}{\psi_r}|\xi_1| \quad (167)$$

a verificar. Para validar (167) es suficiente representarlo en la siguiente forma

$$\left[\frac{\psi_r + \alpha_0}{k} - \frac{2\alpha_0}{\psi_r} |\xi_1| \right]^2 \leq \frac{(\alpha_0 + \psi_r)^2}{k^2} - \frac{2\alpha_0 |\xi_1|}{k}, \quad (168)$$

y se puede ver que (168) es equivalente a la desigualdad

$$\frac{2\alpha_0 |\xi_1|}{k} + \frac{4(\alpha_0)^2}{\psi_r^2} |\xi_1|^2 \leq \frac{4\alpha_0(\psi_r + \alpha_0)}{\psi_r k} |\xi_1|. \quad (169)$$

Desde que ξ_1 está dentro de la zona estimada de estancamiento (145), *i.e.*, $|\xi_1| \leq \frac{\psi_r + \alpha_0}{k}$, la validación de (169) se reduce a la desigualdad

$$1 + \frac{2\alpha_0(\psi_r + \alpha_0)}{\psi_r^2} \leq \frac{2(\psi_r + \alpha_0)}{\psi_r}, \quad (170)$$

se puede ver fácilmente que resulta de (143). Entonces, la desigualdad (152) se verifica en el caso de $\omega = -1$ también. Esto completa la demostración del teorema ya que la desigualdad (152) nos lleva a la estabilidad global asintótica del sistema en lazo cerrado (146)–(150). \square

VI.4 Resultados numéricos.

Se verifica el desempeño y las propiedades de ser robusto del control impulsivo propuesto en experimentos numéricos. En las simulaciones, hechas con el programa MATLAB, el modelo masa-resorte sin dimensión (142) se estudia, usando los parámetros $m = 1$, $k = 1$, y $\psi_r = 1$. La posición inicial y la velocidad inicial se fijan en $x_1(0)=3.5$ y $x_2(0)=-4$, respectivamente.

El control impulsivo (146), (149), (150) se aplica primero al sistema libre de perturbaciones. En las figuras 57 y 58 se muestra la estabilización del sistema masa-resorte no afectado por perturbaciones. Para mostrar las propiedades de robustez del controlador, se añade al sistema, en lazo cerrado, una perturbación del tipo $\omega = 0.7 \sin t$. De las figuras 59 y 60 se puede ver que el controlador tiene buen desempeño y es robusto ante el fenómeno de fricción de Coulomb y perturbaciones externas.

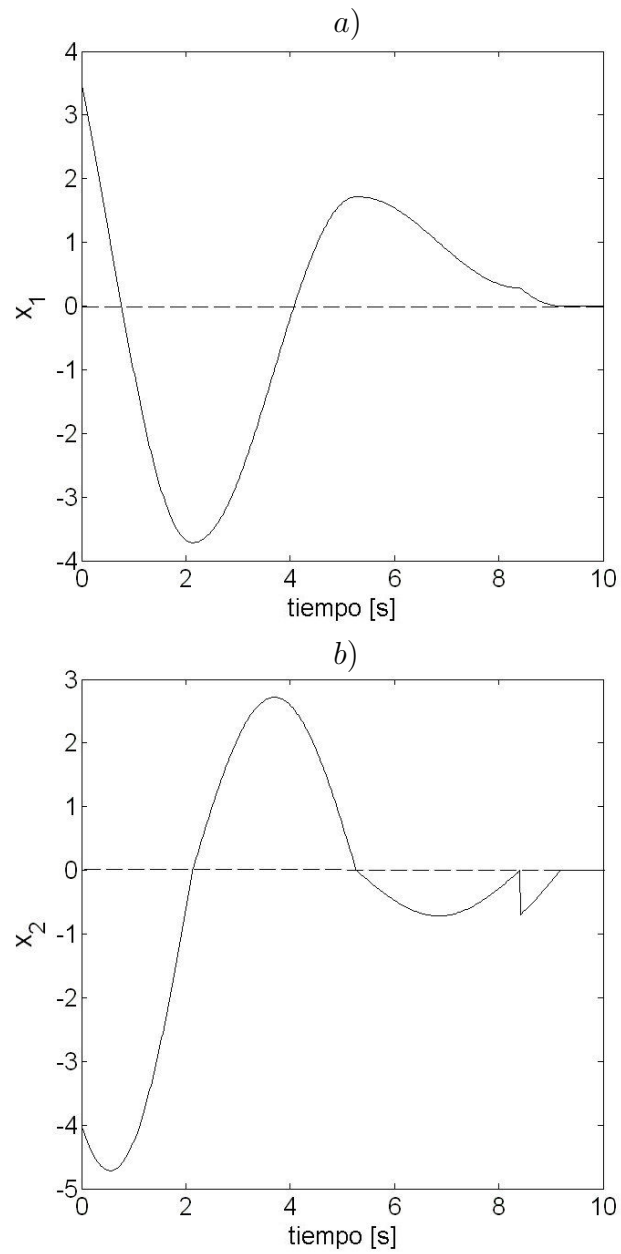


Figura 57: Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso sin perturbaciones. *a)* Posición y *b)* Velocidad.

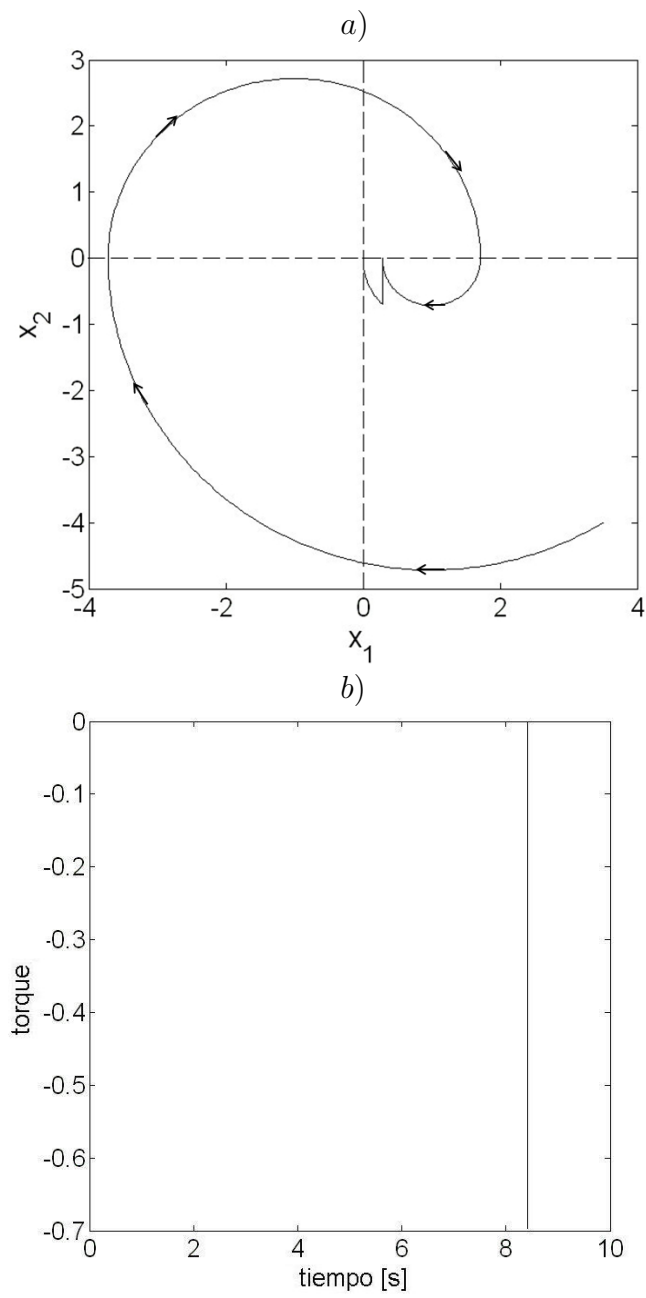


Figura 58: Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso sin perturbaciones. *a)* Retrato de fase y *b)* Entrada de control.

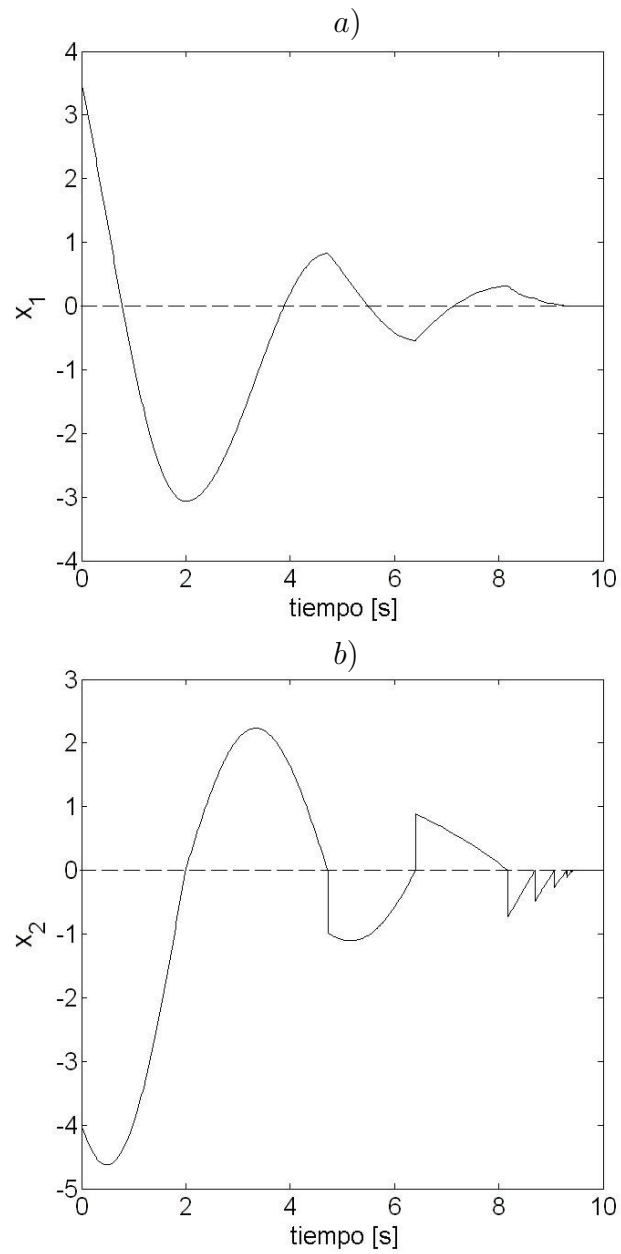


Figura 59: Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso con perturbaciones. *a)* Posición y *b)* Velocidad.

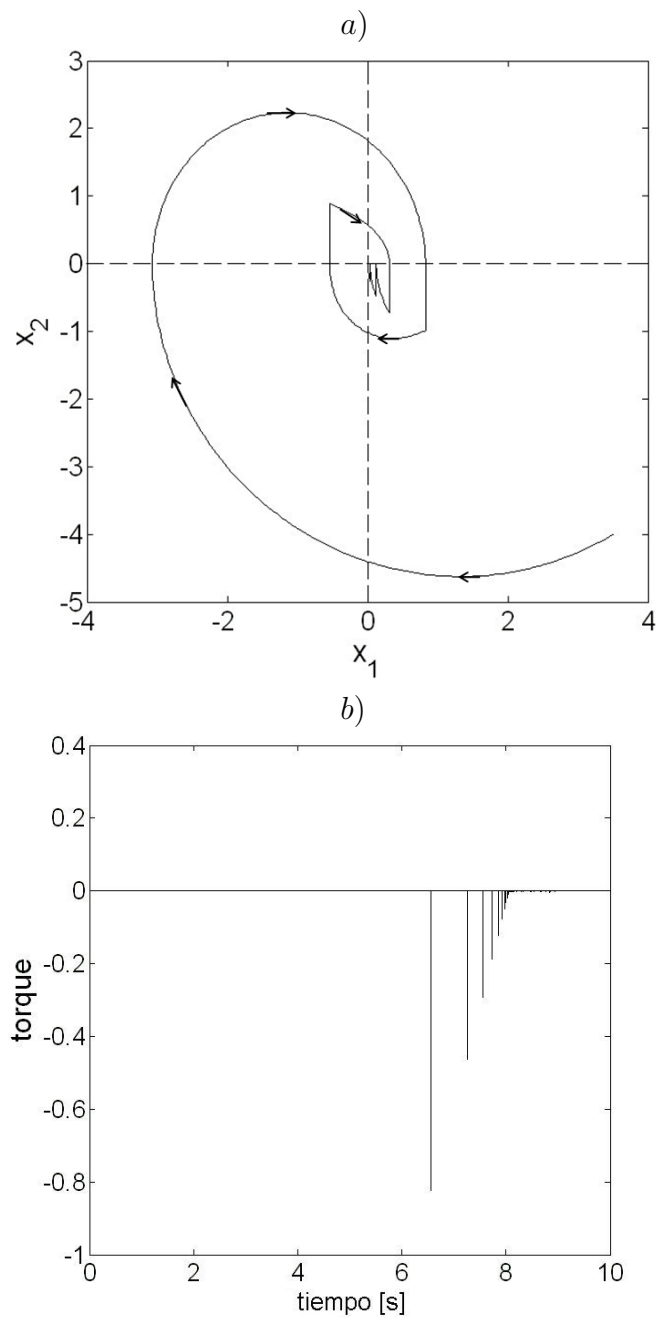


Figura 60: Estabilización impulsiva en el origen del sistema masa-resorte para el caso con perturbaciones. a) Retrato de fase y b) Entrada de control.

Capítulo VII

Conclusiones

En esta tesis se propusieron algoritmos para resolver problemas de estabilizar en el punto deseado osciladores con fricción de Coulomb. En el caso carro-péndulo, se probaron dos algoritmos para resolver el problema de estabilización local en el punto de equilibrio inestable: modos deslizantes y control H_∞ . Ambos algoritmos se compararon y se concluyó que el controlador SOSM es más robusto ante el fenómeno de fricción de Coulomb y perturbaciones externas.

Las capacidades del método de control cuasihomogéneo ante fuerzas de fricción y perturbaciones externas se muestran en un estudio numérico y experimental del problema de control de balanceo, en el carro-péndulo, para mover al péndulo de su posición baja estable a la posición invertida inestable y estabilizar sobre la vertical. Concluyendo la estabilidad asintótica del sistema carro-péndulo en lazo cerrado, a pesar de que el sistema carro-péndulo está afectado por el fenómeno de fricción y perturbaciones externas acotadas.

Para eliminar el problema conocido como chattering se diseña el controlador H_∞ para usarse en la síntesis cuasihomogénea, y así resolver el problema de compensar tanto fricción como perturbaciones externas acotadas. Se concluye que dicho problema se resuelve satisfactoriamente por este controlador local, lo cual se muestra a través de simulaciones numéricas.

La síntesis cuasihomogénea se utiliza en el diseño de un controlador de estructura variable, basado en un observador conmutado, que lleva al péndulo a una órbita, la cual es salida del oscilador modificado de Van der Pol, en tiempo finito. La motivación

para usar este oscilador armónico es que posee un ciclo límite estable y se pueden modificar los parámetros frecuencia, amplitud y velocidad de convergencia del oscilador armónico, en línea. El sistema resultante, carro-péndulo en lazo cerrado, es capaz de seguir la salida del oscilador modificado de Van der Pol en modo deslizante de segundo orden, aún a pesar de la presencia del fenómeno de fricción y perturbaciones externas, con cota conocida. La efectividad del algoritmo se muestra en resultados experimentales. Concluyendo la estabilidad asintótica del sistema carro-péndulo en lazo cerrado utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Se desarrolla una nueva técnica para contrarrestar los efectos de la fricción de Coulomb en un sistema mecánico de un grado de libertad, el sistema masa-resorte. Esta técnica se basa en acciones impulsivas mientras el sistema masa-resorte queda dentro de su zona de estancamiento, debido a los efectos de la fricción de Coulomb. Se muestra la estabilidad global asintótica del sistema masa-resorte en lazo cerrado y se muestra lo robusto del sistema, cuando es afectado por perturbaciones externas acotadas. Se realizan estudios numéricos para apoyar la teoría desarrollada anteriormente. Se concluye que el sistema masa-resorte bajo la ley de control impulsivo que se propone es robusta ante fricción seca y perturbaciones acotadas, cumpliendo satisfactoriamente el objetivo de control.

Los resultados principales de ésta tesis fueron publicados en revistas y congresos reconocidos, y se muestran a continuación:

- I. Santiesteban R., Floquet T., Orlov Y., Riachy S., y Jean-Pierre Richard. (2008). Second Order Sliding Mode Control of Underactuated Mechanical Systems II: Orbital Stabilization with Application to Swing Up/Balancing Control of an Inverted Pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. **18**. 544-556.

- II. Riachy S., Orlov Y., Floquet T., Santiesteban R., y Jean-Pierre Richard. (2008). Second Order Sliding Mode Control of Underactuated Mechanical Systems I: Local Stabilization with Application to an Inverted Pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. **18**. 529 - 543.
- III. Santiesteban R., Riachy, S., Floquet T., Orlov Y y Jean-Pierre Richard. (2007). Swing-Up Controller Synthesis of the Cart-Pendulum System Using Second Order Sliding Modes. *European Control Conference 2007*, Grecia.
- IV. Santiesteban R., Orlov Y.. (2006). Control en modo deslizante de segundo orden de Sistemas Mecánicos Subactuados: Estabilización en órbita del péndulo invertido con Aplicación al Control de Elevación/Balanceo. *Congreso de AMCA 2006*.
- V. Y. Orlov, R. Santiesteban, L. T. Aguilar, L. Acho. (2008). Second Order Sliding Mode (SOSM) Approach to Orbital Stabilization of Friction Pendulum via Position Feedback. *Proc. 17th IFAC World Congress*.

VII.1 Trabajo a futuro.

Como trabajo a futuro se pueden considerar los siguientes puntos:

- I. En este trabajo se consideran problemas de control de sistemas mecánicos de uno y dos grados de libertad, entonces se puede hacer la generalización para un sistema mecánico de n grados de libertad.
- II. Se puede considerar el fenómeno de backlash en el modelo dinámico de los sistemas mecánicos, además de considerar la fricción seca y perturbaciones externas.
- II. En cuanto al problema de estabilización impulsiva del sistema masa-resorte, sólo se tienen ejercicios numéricos por lo que se puede considerar realizar experimentos.

Bibliografía

- Alvarez J., Orlov Y. y Acho L., [2000]. An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a Coulomb friction oscillator. *Int. J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **122**: 687-690.
- Acho L., Orlov Y. y Solis, V., (2001). Nonlinear measurement feedback H_∞ control of time-periodic systems with application to tracking control of robot manipulator. *International Journal on Control*, **74**: 190–198.
- Astrom K. J. y Furuta K., (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, **36**: 287-295.
- Armstrong-Hélouvry B., Dupont P. y Canudas de Wit C., (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*. **30**: 1083-1138.
- Bartolini G., Ferrara A. y Usai E., (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**: 241-246.
- Bartolini G., Pisano A. y Usai E., (2002). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *Automatica*, **38**: 1783-1790.
- Basar T. y Bernhard P., (1990). H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design problems: A Dynamic Game Approach (Boston: Birkhauser).
- Berkemeier M. D. y Fearing R. S., (1999). Tracking Fast Inverted Trajectories of the Underactuated Acrobot. *IEEE Trans. Robotics and Aut.*, **15(4)**: 740-750.
- P. Borne, M. Dambrine, W. Perruquetti y J.P. Richard., (2003). Vector Lyapunov functions nonlinear, time-varying, ordinary and functional differential equations. A. A. Martynyuk. In *Advances in Stability Theory at the End of the 20th Century*. Taylor & Francis.

- Branicky M. S., (1998). Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43(4)**: 475-482.
- Brogliato B., (1996). Nonsmooth Impact Mechanics. Springer-Verlag. London.
- Byrnes C. I. y Isidori A., (1991). Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**: 1122-1137.
- Canudas-de-Wit C., Espiau B. y Urrea C., (2002). Orbital Stabilization of Under-actuated Mechanical Systems. *15th Triennial World Congress, IFAC*, España.
- Canudas de Wit C., Olsson H., Astrom K. J. y Lischinsky P., (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40(3)**: 419-425.
- Chevallereau C., Abba G., Aoustin Y., Plestan F., Westervelt E., Canudas-de-Wit C. y Grizzle J.W., (2003). Rabbit: A testbed for advance control theory. *IEEE Control Systems Magazine*, **23(5)**: 57-79.
- Dahl P., (1968). A solid friction model. TOR-0158. (3107-18)-1. Aerospace Corp.. El Segundo, CA, Tech. Rep..
- Rosas D., Alvarez J. y Fridman L., (2006). Robust Observation and Identification of n -DOF Lagrangian Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **17**: 842-861.
- Davila J., Fridman L., y Levant A., (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**: 1785-1789.
- Fantoni I., Lozano R. y Spong M., (2000). Energy Based Control of the Pendubot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45(4)**: 725-729.
- Filippov A. F., (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

- Fridman L. y Levant A., (1996). Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory, in *Robust Control via variable structure and Lyapunov techniques*, Garafalo and Glielmo (eds.), Lecture notes in control and information science, Berlin, Springer, **217**: 107-133.
- Fridman L. y Levant A., (2002). Higher order sliding modes, in *Sliding mode control in engineering*, W. Perruquetti and J.-P. Barbot (eds.), New York: Marcel Dekker, 53-102.
- Grujić Lj., Gentina J.C. y Borne P., (1976). General aggregation of large-scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms. *International Journal of Control*, **24**: 529-550.
- Guckenheimer J. y Holmes P., (1983). Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields (Applied Mathematical Sciences Vol. 42), Springer, Verlag.
- Hill D. y Moylan P., (1976). The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**: 708-711.
- Hirschorn R., (2006) Generalized sliding mode control for multi-input nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* (por ser publicado).
- Isidori A., (1999). *Nonlinear Control Systems II*, London: Springer Verlag.
- Isidori A. y Astolfi A., (1992). Disturbance attenuation and H_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **37**: 1283–1293.
- Khalil H., (2002). *Nonlinear systems, third edition*, New Jersey: Prentice Hall.
- Lee S.-H., Kim T.-H. y Lim J.-T., (1999). A new stability analysis of switched systems. *Automatica*, **36**: 917-922.
- Levant A., (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal on Control*, **58**: 1247-1263.

- Liberzon D., Morse S., y Sontag E., (2002). Output-input stability and minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**: 422-436.
- Liberzon D., (2003). Switching in systems y control. Birkhauser, Boston.
- Lozano R., Fantoni I. y Block D.J., (2000). Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Systems and Control Letters*, **40**: 197-204.
- Lu X.Y. y Spurgeon S.K., (1997). Robust sliding mode control of uncertain nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, **32**: 75-90.
- Lygeros J., Johansson K.H., Simic S. N., Zhang J., y Sastry S. S., (2003). Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**: 2-17.
- Olsson H., Astrom K., Canudas de Wit C., Gafvert M., y Lischinsky P., (1998). Friction models and friction compensation. *Eur. J. Contr.*, **4**: 176-195.
- Orlov Y., (2000). Instantaneous impulse response of nonlinear systems, *IEEE Transactions Automatic Control*, **45(5)**: 999-1001.
- Orlov Y. y Acho L., (2001). Nonlinear H_∞ control of time varying systems: A unified distribution-based formalism for continuous and sample-data measurement feedback design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**: 638-643.
- Orlov Y., (2002). Schwartz' distributions in nonlinear setting: applications to differential, filtering and optimal control. *Mathematical Problems in Engineering*, **8**: 367-387.
- Orlov Y., (2003). Extended invariance principle for nonautonomous switched systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, **48**: 1448-1452.
- Orlov Y., Aguilar L., y Cadiou J., (2003a). Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors. *International Journal on Control*, **76**: 959-967.
- Orlov Y., Alvarez J., Acho L. y Aguilar L., (2003b). Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control. *International Journal on Control*, **76**: 1446-1452.

- Orlov Y., Aho L. y Aguilar L., (2004). Quasihomogeneity approach to the pendubot stabilization around periodic orbits. *Proc. 2nd IFAC Symposium on Systems, Structure and Control*, Oaxaca, México.
- Orlov Y. y Aguilar L., (2004). Nonsmooth H_∞ Position Control of mechanical manipulators with frictional joints. *International Journal of Control*, **77(11)**: 1062-1069.
- Orlov Y., Aguilar L., y Aho L., (2005). Zeno mode control of underactuated mechanical systems with application to the Pendubot stabilization around the upright position . *Proc. 16th IFAC World Congress*, Praga, República Checa.
- Orlov Y., (2005a). Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **43**: 1253-1271.
- Orlov Y., (2005b). Finite time stability and quasihomogeneous control synthesis of uncertain switched systems with application to underactuated manipulators. *Proc. of the 44th Conference on Decision and Control*, Sevilla, España.
- Orlov Y., Aguilar L. y Aho L., (2005). Model orbit robust stabilization (MORS) of Pendubot with application to swing up control. *Proc. of the 44th Conference on Decision and Control/European Control Conference*, Sevilla, España.
- Orlov Y., Aguilar L., Aho L. y Ortiz A., (2007). Asymptotic harmonic generator and its application to finite time orbital stabilization of a friction pendulum with experimental verification. *International Journal on Control*, **81(2)**: 227-234 .
- Ortega R., Loria A., Niklasson P. J. y Sira-Ramirez H., (1998). Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems, Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications. Springer-Verlag. Berlín.
- Ortega R., Gomez-Estern F. y Blankenstein G., (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions Automatic Control.*, **47**:1218-1233.

- Peleties P. y DeCarlo R., (1992). Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. *Proceedings of the American control conference*, **4**: 3438 - 3439.
- Riachy S., Orlov Y., Floquet T., Santiesteban R., y Jean-Pierre R., (2008). Second Order Sliding Mode Control of Underactuated Mechanical Systems I: Local Stabilization with Application to an Inverted Pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. **18**: 529-543.
- Roup A.V. and Bernstein D.S., (2002). Adaptive stabilization of a class nonlinear systems with nonparametric uncertainty. *IEEE Transactions Automatic Control*., **46(11)**: 1821-1825.
- Santiesteban R., Floquet T., Orlov Y., Riachy S., y Jean-Pierre R., (2008). Second Order Sliding Mode Control of Underactuated Mechanical Systems II: Orbital Stabilization with Application to Swing Up/Balancing Control of an Inverted Pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. **18**: 544-556.
- Shevitz D. y Paden B., (1994). Lyapunov Stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39(9)**:1910 - 1914.
- Shiriaev A., Perram J.W., and Canudas-de-Wit C., (2005). Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach. *IEEE Transactions Automatic Control*., **50**: 1164-1176.
- Sira-Ramirez H., (1987). Harmonic response of variable-structure-controlled Van der Pol oscillators. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **34**: 103-106.
- Slotine J.-J. y Li W., (1991). *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- Spong M.W., (1995). The Swing Up Control Problem for the Acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, **15(2)**: 49-55.
- Sussman H.J. y Kokotovic P.V., (1991). The peaking phenomenon and the global

stabilization of nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**: 424-440.

Utkin V.I., Guldner J. y Shi J., (1999). *Sliding modes in Electromechanical Systems*. London: Taylor and Francis.

Utkin V. I., (1992). *Sliding Modes in control and optimization*. Springer-Verlag, Berlin.

Van Der Shaft A. J., (1992). L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**: 770–784.

Wang H.-H. y Krstic M., (2000). Extremum Seeking for Limit Cycle Minimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45(12)**: 2432-2437.

Yang T., (2001). *Impulsive Control Theory*. Springer-Verlag. Berlin.

Zhang M. y Tarn T. J., (2002). Hybrid control of the Pendubot. *IEEE Trans. Mechatronics*, **7**: 79-86.