

TESIS DEFENDIDA POR

Miguel Angel Vázquez Olguín

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director del Comité

Dr. Roberto Conte Galván

Miembro del Comité

Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez

Miembro del Comité

Dr. David Salazar Miranda

Miembro del Comité

Dra. María del Carmen Maya Sánchez

*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y telecomunicaciones*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

14 de Agosto de 2009

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**ESTIMACIÓN DE LA POSICIÓN DE MÚLTIPLES FUENTES CON
MOVILIDAD, EMPLEANDO ALGORITMO RECURSIVO EM**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

MIGUEL ANGEL VÁZQUEZ OLGUÍN

Ensenada, Baja California, México, Agosto de 2009

RESUMEN de la tesis de **MIGUEL ANGEL VÁZQUEZ OLGUÍN**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California, Agosto de 2009.

ESTIMACIÓN DE LA POSICIÓN DE MÚLTIPLES FUENTES CON MOVILIDAD, EMPLEANDO ALGORITMO RECURSIVO EM

Resumen aprobado por:

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Tesis

La estimación de la posición de los móviles celulares representa un problema importante para la aplicación de un sistema de antenas inteligentes, ya que de esta forma, se podrá enfocar la mayor cantidad de energía de la agrupación de antenas hacia el usuario de interés.

Dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas se han hecho contribuciones importantes al estado del arte de la estimación de la dirección de arribo. Parte de estas contribuciones consiste en la aplicación de la herramienta de máxima-verosimilitud, para la estimación de la dirección de arribo, demostrando una gran exactitud y robustez ante escenarios adversos, sin embargo, el tiempo de convergencia es demasiado alto lo cual imposibilita el uso de esta técnica para estimar la trayectoria de fuentes móviles.

En esta tesis, se presenta un nuevo algoritmo iterativo del tipo recursivo esperanza-maximización para encontrar estimaciones de máxima-verosimilitud, aplicado a la estimación del ángulo de arribo de señales emitidas por móviles celulares. Este nuevo método permitirá disminuir en gran medida el tiempo de convergencia de estimaciones de máxima-verosimilitud, de tal forma que será posible la estimación de la posición y además, poder realizar un rastreo de los móviles en escenarios de muy alta movilidad de fuentes. Este método permitirá conservar las enormes ventajas de los algoritmos óptimos como son: robustez en contra de entornos adversos de baja relación SNR, bajo número de muestras, alto número de fuentes y bajo número de elementos de la agrupación.

Palabras Clave: Ángulo de arribo, esperanza-maximización, máxima-verosimilitud.

ABSTRACT of the thesis presented by **MIGUEL ANGEL VÁZQUEZ OLGUÍN**, in partial fulfillment of the requirements of MASTER IN SCIENCES degree in ELECTRONICS AND TELECOMUNICATIONS with orientation in TELECOMUNICATIONS. Ensenada, Baja California, August 2009.

MULTIPLE MOBILE SOURCES, LOCATION ESTIMATION, USING RECURSIVE EM ALGORITHM

The estimation of the direction of arrival of multiple mobile sources represent an important issue in the application of smart antennas. By knowing the location of the sources, the maximum amount of energy can be directed to the user of interest.

The wireless communications group has made important contributions to the state of art in the estimation of the direction of arrival. Part of these contributions consist on the application of maximum likelihood methods to determine the direction of arrival of signals, showing great accuracy and a solid performance on adverse conditions, however, the amount of time required for convergence is too high, making it impossible to apply these methods to estimate the trajectory of mobile sources.

In this thesis a novel recursive algorithm is presented that will allow to find Maximum-likelihood estimations of the direction of arrival of multiple sources. This method will decrease the amount of time needed for the expectation maximization algorithm to find the location of multiple mobile sources, hence the tracking of high mobility sources will be also possible. This method will maintain the great advantages of the optimum algorithms like: solid performance under poor SNR, small number of samples, high number of sources, small number of sensors in the array.

Keywords: DoA, maximum-likelihood, recursive expectation-maximization.

*A mis padres y her-
manos, por su amor y su
apoyo incondicional.*

*A Norma, por su pacien-
cia y cariño.*

Agradecimientos

A Dios, por darme la fortaleza y paciencia para salir adelante. Por esos momentos de inspiración que me permitieron realizar este proyecto.

A mis padres *María de la Luz Olguín Pérez* y *Angel Vázquez Ruiz* por su apoyo, paciencia y amor. A mis hermanos *David* y *Luz Alejandra* por su preocupación y por brindarme ánimos en los malos momentos.

A *Norma*, por haberme brindado su amor y cariño, por haber estado conmigo cuando más la necesité y por haber tenido la paciencia para soportar estos dos largos años.

A mi primo *Sergio*, por estar siempre pendiente de mí.

A *Omar* y *Doris*, por su ayuda y amistad.

Al Doctor *David H. Covarrubias Rosales*, por su guía, apoyo y consejos que permitieron llevar a buen término este proyecto de investigación.

A los miembros del comité de tesis *Dr. David Salazar Miranda*, *Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez* y en especial al doctor *Roberto Conte Galván* por sus consejos y apoyo a lo largo de estos dos años.

A mis compañeros del grupo de comunicaciones inalámbricas *Juán Carlos* y *Jacobo* por su ayuda, comentarios y apoyo. También a mis compañeros de generación *Daniel García*, *Israel*, *Daniel Escobedo*, *Paulino*, *Jaquelin*, *Cecilia*, *Jesus*, *Adán*, *Alejandro*, *Iván*, *Eduardo* y *Naihvy* por todos los momentos que compartimos.

A todo el personal del CICESE por brindarme la oportunidad para superarme y al CONACyT Por el apoyo económico brindado en estos dos años.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tablas	x
I. Introducción	1
I.1. Introducción	1
I.1.1. Modelos espaciales de canal radio	2
I.1.2. Agrupación de antenas	3
I.1.3. Inteligencia de la antena	4
I.2. Planteamiento del problema	5
I.3. Objetivo de la tesis	6
I.4. Organización del trabajo	7
II. Métodos de estimación de la dirección de arribo	9
II.1. Introducción	9
II.2. Agrupación lineal uniforme de elementos de antena	10
II.2.1. Vector de direccionamiento	11
II.2.2. Modelo de la señal	12
II.3. Estimación del DoA	13
II.3.1. Métodos convencionales	15
II.3.2. Métodos basados en subespacios	15
II.3.3. Métodos de máxima-verosimilitud	17
II.3.4. Métodos integrados	18
II.4. Alcances y limitaciones	18
II.5. Conclusiones	20
III. Algoritmo esperanza-maximización recursivo	21
III.1. Introducción	21
III.2. Teoría de la estimación	22

Contenido (continuación)

	Página
III.3. Propiedades de los estimadores	23
III.4. Algoritmo de máxima-verosimilitud	26
III.4.1. Función de verosimilitud	26
III.4.2. Algoritmo esperanza-maximización	28
III.4.3. Algoritmo esperanza-maximización recursivo	33
III.4.4. Algoritmo REMI	37
III.4.5. Algoritmo REMII	39
III.5. Conclusiones	39
IV. Simulación y análisis de resultados	41
IV.1. Introducción	41
IV.2. Vector de resultados y matriz de información aumentada	42
IV.2.1. Vector de resultados.	43
IV.2.2. Matriz de información aumentada	44
IV.3. Algoritmo REMI	45
IV.3.1. Fuentes estáticas	46
IV.3.2. Algoritmo REMI con movilidad	47
IV.4. Algoritmo REMII	50
IV.4.1. REMII. Baja movilidad	50
IV.4.2. REMII. Mediana movilidad	52
IV.4.3. REMII. Baja diferencia entre velocidades	54
IV.4.4. Separación entre fuentes con la misma velocidad	57
IV.4.5. REMII. Múltiples fuentes móviles	58
IV.4.6. REMII. Alta movilidad	59
IV.5. Conclusiones	61
V. Conclusiones	64
V.1. En cuanto al modelado de la señal	64
V.2. En cuanto a los métodos de estimación del DoA	65
V.3. En cuanto al algoritmo REM	66
V.4. En cuanto a los resultados	67
V.5. Trabajo a futuro	71
REFERENCIAS	72

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Sistema de comunicaciones inalámbricas.	2
2	Diversas geometrías de agrupaciones de antenas.	3
3	Estructura de la tesis.	7
4	Agrupación lineal uniforme.	10
5	Función de distribución de probabilidad Binomial para 10 pruebas con probabilidad de éxito $\theta = 0.7$	27
6	Función de verosimilitud Binomial para 10 pruebas, $y = 7$ y probabilidad de éxito θ desconocida.	28
7	Las señales muestreadas por los N sensores son el resultado de la suma de las señales de todas las fuentes.	30
8	Diagrama de flujo del algoritmo esperanza-maximización.	32
9	Diagrama de flujo del algoritmo esperanza-maximización recursivo.	36
10	Vector de resultados para $SNR = 80$, $N = 15$, $\theta = 10^\circ$	44
11	Matriz de información aumentada para $SNR = 80$, $N = 15$, $\theta = 10$	45
12	Estimación de la posición de tres fuentes estáticas ubicadas en $\theta = 50$, 60 y 65 grados.	46
13	Error cuadrático medio para la estimación de fuentes estáticas ubicadas en $\theta = 50^\circ$, 60° y 65°	47
14	Estimación de múltiples fuentes móviles con el algoritmo REMI.	48
15	Estimación de múltiples fuentes móviles con el algoritmo REMI.	49
16	Estimación de múltiples fuentes con baja movilidad.	51
17	Error en la estimación de múltiples fuentes con baja movilidad.	51
18	Estimación de múltiples fuentes con mediana movilidad.	53
19	Error en la estimación de múltiples fuentes con mediana movilidad.	53
20	Estimador LPA para la estimación de la posición y velocidad de las fuentes.	54

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
21	Estimación de la trayectoria de dos fuentes con una diferencia pequeña entre sus velocidades.	55
22	Error en la estimación de la trayectoria de dos fuentes con una diferencia pequeña entre sus velocidades.	56
23	Estimador LPA para la estimación de la posición y velocidad de las fuentes.	56
24	Estimación de la trayectoria de fuentes con misma velocidad, separadas por 2 grados.	58
25	Estimación de la trayectoria de fuentes con misma velocidad, separadas por 5 grados.	58
26	Estimación de la trayectoria de 9 fuentes con la misma velocidad.	59
27	Estimación de la trayectoria de fuentes con alta movilidad.	60
28	Error en la estimación de fuentes con alta movilidad.	61

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Variables e índices de las matrices utilizadas en el modelado del sistema.	22
II	Características del equipo utilizado en la simulación.	42
III	Parámetros de las fuentes móviles.	48
IV	Parámetros de las fuentes móviles.	49
V	Parámetros de las fuentes móviles.	50
VI	Parámetros de las fuentes móviles.	52
VII	Parámetros de las fuentes móviles.	55
VIII	Parámetros de las fuentes móviles.	57

Capítulo I

Introducción

I.1. Introducción

En la actualidad cada vez se demanda más capacidad y servicios a los sistemas móviles celulares en términos de optimización de ancho de banda y calidad de servicio. Por esta razón, recientemente se ha propuesto el uso de antenas inteligentes para los sistemas de cuarta generación, ya que la implementación de esta tecnología permite las siguientes ventajas [Covarrubias Rosales, 2008]:

- Controles de potencia más eficientes.
- Traspasos Inteligentes.
- Soporte de servicios de valor agregado.
- Mayor área de cobertura.
- Aumento en la capacidad del sistema.
- Reducción del nivel de interferencia.
- Mejora de la seguridad.

Un sistema de antenas inteligentes está formado por tres áreas, las cuales se han trabajado dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas y en cada una de ellas se han realizado importantes aportaciones al estado del arte. En la figura 1 se puede apreciar dichas áreas. Posteriormente se analizarán brevemente cada una de ellas.



Figura 1. Sistema de comunicaciones inalámbricas.

I.1.1. Modelos espaciales de canal radio

Los modelos espaciales de canal radio permiten analizar parámetros del entorno tales como desvanecimientos, desfaseamiento de las señales, etc. Podemos diferenciar dos escenarios para nuestros modelos: el entorno microcelular, el cual se caracteriza por contemplar dispersores alrededor de las estaciones base, además de que el área de cobertura es pequeña. El otro esquema es el entorno macrocelular, en el cual se considera a los dispersores alejados de la estación base.

El objetivo de los modelos espaciales de canal radio es determinar el número y localización de objetos dispersivos [Covarrubias Rosales, 2008] al analizar el ángulo (AoA) y el tiempo (ToA) con el que arriban los frentes de onda.

I.1.2. Agrupación de antenas

Frecuentemente es necesario emplear antenas capaces de generar diagramas de radiación cuyo lóbulo principal sea estrecho con el fin de aumentar la distancia entre la estación base y el receptor. Esto se logra al incrementar las dimensiones de una antena [Balanis, 2005]. Existen dos formas de lograr este objetivo: aumentando las dimensiones físicas de la antena o utilizar una agrupación de elementos radiantes cuya distribución geométrica y eléctrica permita la generación de diagramas de radiación deseados debido a la interferencia constructiva y destructiva entre los campos electromagnéticos de cada elemento.

Las configuraciones geométricas más comunes que se pueden observar en las agrupaciones de antenas son: lineal, circular, planar, elíptico y conformado. En la figura 2 se aprecian estas geometrías.

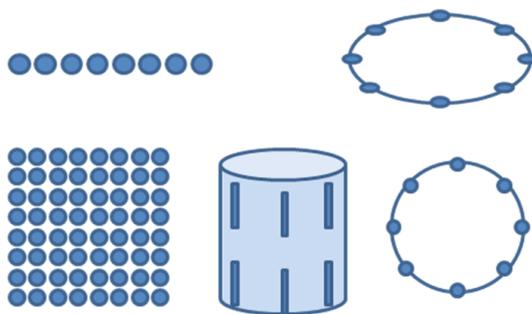


Figura 2. Diversas geometrías de agrupaciones de antenas.

Un aspecto muy importante a considerar en la geometría de la agrupación es el espaciamiento entre elementos de antena, el cual está medido en términos de longitud de onda; de esta manera se logra la diversidad espacial, la cual mitiga el efecto de las multitrayectorias y permite obtener una muestra representativa de las señales del

entorno espacial [Covarrubias Rosales, 2008].

Para este proyecto de investigación se trabajó con una agrupación lineal uniforme, es decir, que sus elementos se encuentran equiespaciados. Se escogió esta geometría debido a la sencillez que plantea, así como la facilidad de transportar las simulaciones hacia geometrías más complejas, como es el caso, de la agrupación en el plano.

I.1.3. Inteligencia de la antena

La inteligencia de la antena se divide en dos partes: la conformación digital de haz y la estimación de la posición de la fuentes ¹: dirección de arribo (DoA por sus siglas en inglés Direction of arrival). La primera se encarga de realizar un filtraje espacial con el fin de dirigir el lóbulo principal hacia el usuario de interés y dirigir los nulos hacia aquellos usuarios que se deseen cancelar. Para que estos objetivos se cumplan, es de vital importancia determinar la posición de las fuentes, y por esta razón, en los últimos años dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas se ha venido trabajando en nuevas técnicas que permitan una estimación de la posición precisa y con la posibilidad de rastrear o seguir fuentes móviles.

La originalidad de este trabajo radica en contar con un método de estimación que permita encontrar una aproximación de la posición de las fuentes de manera rápida y precisa. Actualmente, existen métodos capaces de estimar la posición de las fuentes con gran precisión, sin embargo el tiempo de cómputo necesario es demasiado grande. Por esta razón, se están llevando a cabo proyectos de investigación que permitan encontrar

¹Se entienden como fuentes a todos aquellos móviles cuya posición angular es desconocida.

métodos con un menor tiempo de convergencia y una mayor precisión.

I.2. Planteamiento del problema

El problema que impulsa el desarrollo de este proyecto de investigación consiste en determinar la dirección de arribo de señales provenientes de múltiples fuentes, es decir, las señales incidentes en la agrupación de antenas estarán mezcladas entre sí, además del ruido blanco gaussiano; por lo tanto, el algoritmo de estimación de la posición espacial de las fuentes deberá ser capaz de distinguir entre el DoA de cada señal. Estas señales se verán afectadas por los efectos intrínsecos del canal radio como son: desvanecimientos, multitrayectorias, ruido térmico, interferencia co-canal, entre otros.

El problema aquí planteado se complica aún más al considerar la movilidad de las fuentes, ya que ahora el algoritmo deberá ser capaz no sólo de detectarlas, sino también de rastrearlas y distinguir cada fuente en el momento en que dos de ellas ocupen la misma posición angular.

Es importante recalcar que la determinación del parámetro DoA es una estimación, por lo que se deberá definir los parámetros que permitirán medir las prestaciones del método de estimación propuesto en esta tesis.

- Relación señal a ruido.
- Número de fuentes.
- Número de elementos de antena.

- Separación entre fuentes.
- Número de muestras.
- Tiempo de convergencia.
- Movilidad.

En el capítulo siguiente se analizarán varios métodos de estimación del DoA y se compararán sus prestaciones en términos de los parámetros arriba mencionados. Cabe mencionar que el método que ha demostrado tener un desempeño superior ante dichos parámetros es máxima-verosimilitud, sin embargo, presenta la gran desventaja de tener un gran tiempo de convergencia, lo que imposibilita su utilización en el rastreo de fuentes [Bonilla Hernández, 2005]. Se busca subsanar esta desventaja al incluir un algoritmo recursivo, lo cual nos lleva a definir el objetivo de esta tesis.

I.3. Objetivo de la tesis

Utilizar el algoritmo recursivo de esperanza-maximización aplicado al método de máxima-verosimilitud para la estimación de múltiples fuentes con movilidad y comparar las prestaciones REM con MLE convencional y el método de aproximación de polinomio local.

I.4. Organización del trabajo

Este trabajo está organizado en cinco capítulos, tal y como se aprecia en la figura 3.

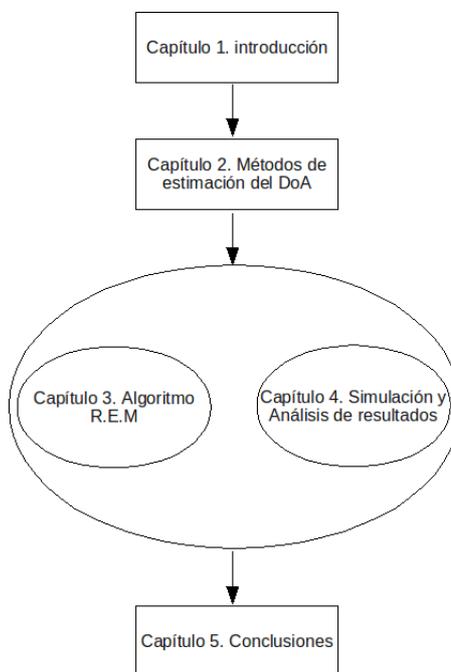


Figura 3. Estructura de la tesis.

En el capítulo 2 se hará un análisis del estado del arte en cuanto a la estimación del DoA. Se abordan las distintas técnicas que existen y se hace énfasis en las aportaciones realizadas por el grupo de comunicaciones inalámbricas. Se contemplan las fortalezas y debilidades de cada uno de los métodos. En este capítulo también se abordarán los alcances y limitaciones del presente trabajo.

En el tercer capítulo se abordará la modelación matemática del método recursivo esperanza maximización para la estimación del DoA, así como el modelado del sistema que se utilizará para las simulaciones. Se explicarán conceptos básicos y se definirá el entorno físico en el que se llevarán a cabo las simulaciones.

En el capítulo 4 se llevará la herramienta descrita en el capítulo anterior a la aplicación de interés, la estimación de la dirección de arribo de las señales de la fuente. Se realizará un profundo análisis de las simulaciones para encontrar sus fortalezas y debilidades ante distintos escenarios de simulación. Por último, en el capítulo 5 se darán a conocer las conclusiones derivadas del análisis realizado en el capítulo anterior así como el trabajo a futuro.

La importancia de la determinación de la posición de la fuente es fundamental en el futuro de las comunicaciones de inalámbricas, ya que permitirá diferenciar fuentes por su posición espacial y poder dirigir la mayor cantidad de energía al usuario que requiera servicio. Debido a esta importancia, han surgido muchas técnicas encargadas de solucionar este problema. En el capítulo siguiente se analizarán las fortalezas y debilidades de diversas técnicas lo que a su vez nos permitirá definir los alcances y limitaciones de este trabajo.

Capítulo II

Métodos de estimación de la dirección de arribo

II.1. Introducción

En este capítulo se mencionarán conceptos básicos de la agrupación lineal uniforme de elementos de antena (ALU) así como de las principales técnicas de estimación del parámetro DoA de las señales multitrayectoria. De dichas técnicas se analizarán sus fortalezas y debilidades, lo cual permitirá reafirmar la importancia de este trabajo de investigación y fijar los alcances y limitaciones del mismo.

Todos los métodos de estimación del DoA que se mencionarán en esta sección, se basan en el principio inherente de una agrupación de elementos, para determinar la posición de fuentes a través de una variación de fase en cada uno de sus elementos. La agrupación de elementos de antena puede ser utilizada en aplicaciones de radar, sonar, comunicaciones, procesamiento de datos sísmicos, etc. En este trabajo se plantea el uso de esta capacidad de la agrupación de antena para detectar múltiples móviles activos en entornos celulares.

II.2. Agrupación lineal uniforme de elementos de antena

Una agrupación lineal uniforme de elementos de antena está compuesta por N elementos sensores separados por una distancia d . Para este trabajo se utilizará una distancia $d = \lambda/2$ y se asumirá que las fuentes se encuentran en campo lejano. Esto implica que en la agrupación estará incidiendo un frente de onda plano.

En la figura 4 se muestran los elementos de antena separados por la distancia d . En dicha figura también se puede apreciar la distancia del elemento de antena al frente de onda. Si se observan dos elementos de antena contiguos, se aprecia el triángulo formado por la distancia d , la distancia de la agrupación a la fuente r_1 y el frente de onda incidente que es normal a la distancia r_1 . También se observa que la distancia correspondiente a la separación entre el frente de onda y el elemento de antena es $d \cos(\theta)$. De esta forma, una onda incidente en el elemento 3, tendrá que recorrer una distancia $2d \cos(\theta)$. Así mismo, una onda que incida en el elemento N recorrerá una distancia $(N - 1)d \cos(\theta)$ para llegar al elemento de referencia.

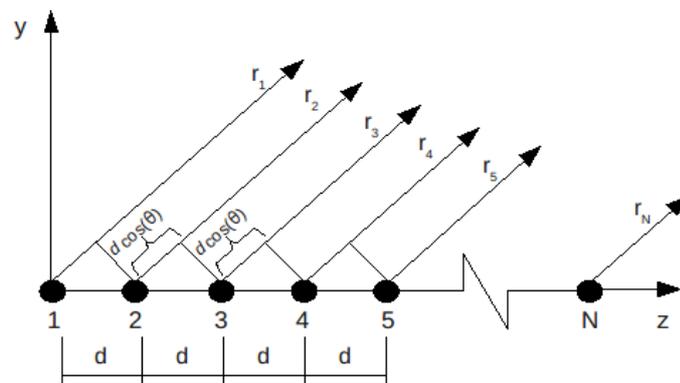


Figura 4. Agrupación lineal uniforme.

La agrupación de elementos de antena está formada por elementos omnidireccionales idénticos, con el fin de que sea el tiempo el único efecto a tomar en cuenta en la propagación de la señal de la fuente.

El tiempo de propagación de una onda plana que incide en el n -ésimo elemento está dado por la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{d}{c} (n - 1) \cos(\theta_m) \quad (1)$$

donde n representa al n -ésimo elemento, θ_m representa la posición angular de la m -ésima fuente y c es la velocidad de la luz.

El análisis de una ALU es muy interesante y extenso, de tal manera que se saldría del objetivo de esta tesis el abordar todos los aspectos importantes con el rigor necesario, sin embargo es preciso mencionar dos aspectos importantes de un ALU: el vector de direccionamiento, y el modelo de la señal. Estos aspectos se abordarán a continuación en los apartados II.2.1. y II.2.2. respectivamente.

II.2.1. Vector de direccionamiento

El desfaseamiento de los frentes de onda incidentes en cada uno de los sensores de un ALU, será evaluado tomando como referencia al primer elemento de la agrupación. De esta forma, el frente de onda plano que incida en el último elemento de antena tendrá que recorrer una distancia $(N - 1) d \cos(\theta)$ y le tomará un tiempo τ , descrito por la ecuación 1.

Es posible definir el desfase existente entre cada uno de los elementos con la expresión:

$$\psi = 2\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \cos(\theta) \quad (2)$$

en donde λ es la longitud de onda de la señal. Utilizando la expresión 2, se puede definir el desfase de las señales en cada sensor respecto al sensor de referencia a través de fasores [Covarrubias Rosales, 2008] con la expresión:

$$\bar{v} = \left[1, e^{j2\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \cos(\theta)}, e^{j4\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \cos(\theta)}, \dots, e^{j(N-1)\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \cos(\theta)} \right] \quad (3)$$

donde \bar{v} se denomina vector de dirección.

II.2.2. Modelo de la señal

Para este trabajo se considerará un ALU de N sensores recibiendo M señales en campo lejano cuyas posiciones $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_M(t)]$ son desconocidas. La salida de la agrupación $x(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ estará dada por la siguiente expresión:

$$x(k) = H(\theta(k)) s(k) + u(k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

en donde la matriz de vectores de dirección $H(\theta(k)) \in \mathbb{C}^{N \times M}$. El vector de dirección está dado por la ecuación 3 y el proceso de ruido $u(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ es independiente e idénticamente distribuido con matriz de covarianza vI , en donde v representa la potencia del ruido e I es la matriz identidad.

El vector de señales $s(k) = [s_1(k), \dots, s_m(k)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ que incidirá en los elementos de antena se considera desconocido y determinístico. Para fines de simulación estas señales están modeladas con la ecuación 5.

$$s_m(k) = A_m(k)e^{j2\pi ft} \quad (5)$$

en donde A_m representa la función de modulación compleja de la m -ésima fuente y f la frecuencia portadora [Félix Baldenegro, 2008].

II.3. Estimación del DoA

Existen diversos métodos para la determinación del DoA, los cuales podemos clasificar en dos grupos:

Técnicas no paramétricas

Una estimación no paramétrica se realiza bajo conceptos de una rama de la estadística que lleva el mismo nombre. El rasgo principal que caracteriza a este tipo de herramientas es asumir que los datos obtenidos de las muestras no se ajustan a ningún tipo de distribución de probabilidad. La utilización de estos métodos es recomendable cuando no se puede determinar a priori a que distribución de probabilidad se ajustan los datos obtenidos de las muestras.

Existe una gran cantidad de técnicas no paramétricas, sin embargo, dentro del grupo se ha desarrollado una tesis de maestría [Félix Baldenegro, 2008] para la estimación del DoA empleando el algoritmo LPA (local polynomial approximation). El trabajo ante-

riormente mencionado utilizó una expansión truncada de Taylor con la intención de aproximar DoAs variantes en el tiempo, es decir, el algoritmo LPA fue utilizado para la estimación y rastreo de la dirección de arribo de señales emitidas por fuentes móviles. Es importante mencionar que, hasta este punto, la movilidad de las fuentes no se había tomado como una consideración importante en trabajos anteriores.

Los resultados derivados de la tesis arriba mencionada son amplios e interesantes y cabe destacar que el algoritmo fue capaz de rastrear fuentes con velocidades angulares de 5 grados/segundo con errores del orden de 0.26 grados.

Técnicas paramétricas

Estas técnicas se enfocan a determinar parámetros específicos, en nuestro caso, el ángulo con el que inciden las señales de las fuentes en la agrupación de antenas. Podemos categorizar estos métodos en cuatro grandes grupos [Liberti y Rappaport, 1999]:

- Métodos convencionales.
- Métodos basados en subespacios.
- Métodos de máxima-verosimilitud.
- Métodos integrados.

Estos métodos presentan ventajas y desventajas que serán brevemente analizadas a continuación.

II.3.1. Métodos convencionales

Consisten en realizar un barrido con el lóbulo principal con el fin de detectar un incremento en la potencia de la señal. En donde exista este incremento se asume que se encuentra una fuente. Estos métodos son relativamente fáciles de implementar pero necesitan de una gran cantidad de elementos de antena para mejorar su eficiencia, ya que mientras más ancho sea el lóbulo principal, es más difícil distinguir entre fuentes cercanas. También presentan una gran dependencia ante el SNR y no explotan la naturaleza del modelo estadístico de las señales. Otra gran desventaja de estos métodos es que no contemplan movilidad y que su tiempo de convergencia dependerá de la capacidad del dispositivo de realizar el rastreo [Arceo Olague, 1999].

II.3.2. Métodos basados en subespacios

Los métodos basados en subespacios siguen las siguientes propiedades [Bonilla Hernández, 2005]:

- Los eigen-vectores obtenidos de la matriz de correlación de las muestras pueden ser particionados en dos subespacios: El subespacio de señal y el subespacio de ruido.
- Los vectores de dirección correspondientes a las fuentes son ortogonales al subespacio de ruido.

Estos métodos hacen una búsqueda de las posiciones angulares en las cuales las señales recibidas son ortogonales al subespacio de ruido y, por ende, están contenidas

en el subespacio de señal [Mendoza Montoya, 2006]. Dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas podemos destacar las aportaciones realizadas a los métodos de MUSIC (MUltiple Signal Clasification), Root MUSIC y ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique).

A diferencia de los métodos convencionales, el número de elementos de antena necesario para una buena resolución disminuye notablemente, así como el tiempo de convergencia. Sin embargo, sufren la desventaja de la reducción de su exactitud al incrementarse el número de fuentes y al disminuir la separación entre ellas [Arceo Olague, 1999].

La relación señal a ruido (SNR) es un factor determinante en el comportamiento de estos métodos ya que, ante condiciones desfavorables, la exactitud en la estimación disminuye considerablemente. Otra gran desventaja es que por si mismos no son capaces de rastrear fuentes móviles, para esto es necesario utilizar algoritmos auxiliares [Mendoza Montoya, 2006].

Dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas podemos destacar el rastreo de fuentes con movilidad de $0.1^\circ/\text{s}$ haciendo uso de los algoritmos PAST (Projection Approximation Sub-space Tracking) y Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Descomposition) [Mendoza Montoya, 2006]. Sin embargo, esta velocidad representa relativa baja movilidad.

II.3.3. Métodos de máxima-verosimilitud

A los métodos de máxima-verosimilitud se les conoce también como métodos óptimos, ya que su exactitud no se ve disminuida ante una baja relación señal a ruido, bajo número de elementos de antena, alto número de fuentes y poca separación entre las mismas. No solo su exactitud no se ve afectada, si no que su precisión es la mejor de todos los métodos anteriores.

La gran desventaja de estos métodos es su tiempo de convergencia. Se han reportado tiempos de hasta 60 horas [Bonilla Hernández, 2005]. Esta desventaja hace imposible la utilización de estos métodos en aplicaciones de tiempo real y en el rastreo de fuentes. El presente proyecto de investigación busca subsanar esta deficiencia al implementar un algoritmo recursivo, que permita disminuir el tiempo de convergencia lo suficiente para poder rastrear fuentes.

Los métodos de máxima-verosimilitud plantean un problema de optimización no lineal el cual puede ser resuelto mediante técnicas iterativas como: Newton-Rapson, descenso de gradiente, proyección alternada y esperanza maximización.

La técnica iterativa que se ha estado trabajando dentro del grupo es esperanza-maximización [Dempster *et al.*, 1977], ya que permite la estimación de parámetros a partir de datos incompletos; situación que está presente en la estimación del DoA de múltiples fuentes.

Dentro de este esquema surge una nueva propuesta, la cual consiste en utilizar

una aproximación recursiva al método esperanza-maximización. Este nuevo método se conoce como algoritmo esperanza-maximización recursivo (REM) el cual fue propuesto por Titterington [Titterington, 1984]. Éste utiliza un enfoque similar al encontrado en técnicas de control, en donde los datos se procesan en el momento en que se reciben, a diferencia de los métodos de rastreo de subespacio y MLE en donde el procesamiento se lleva a cabo una vez que la recolección de datos ha terminado.

II.3.4. Métodos integrados

Los métodos integrados son métodos híbridos que se basan en características de los métodos basados en subespacios junto con métodos de restauración. Estos métodos determinan el DoA a partir de las características espaciales de las señales incidentes en la agrupación de antenas. Si una señal tuviese solamente una componente, su representación espacial sería idéntica al vector de dirección correspondiente a su DoA. De esta forma, si se tiene una estimación de la representación espacial de una señal con una sola componente, se puede determinar su DoA buscando entre todos los vectores de dirección posibles y seleccionando aquel cuya norma sea la más próxima a la representación espacial obtenida [Covarrubias Rosales, 2008].

II.4. Alcances y limitaciones

De los métodos mencionados anteriormente, queda claro que el algoritmo de máxima-verosimilitud (MLE) tiene un mejor comportamiento en términos de la precisión en entornos adversos de SNR, número de fuentes, distancia entre fuentes y número de

elementos de la agrupación. Sin embargo, debido a su alto tiempo de convergencia, es imposible su implementación en escenarios en donde las fuentes posean movilidad. Más aún, debido a que el tiempo de convergencia guarda una relación directa con el número de fuentes [Bonilla Hernández, 2005], la implementación para múltiples fuentes presentaría grandes complicaciones. Es por esta razón, que se necesita de un método capaz de disminuir el tiempo de procesamiento para que la estimación y rastreo de la posición múltiples fuentes móviles pueda llevarse a cabo.

En este proyecto de investigación se propone la implementación de un algoritmo de esperanza-maximización recursivo, con el fin de poder obtener la propiedad de rastreo para los estimadores MLE. Este trabajo plantea retos que no han sido abordados por proyectos anteriores dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas, por lo que se busca que el panorama de simulación se simplifique lo más posible, es decir, se considerarán fuentes en campo lejano, el número de fuentes será conocido, se contará con una buena estimación inicial del DoA, la señal se verá afectada únicamente por ruido blanco gaussiano, se considerará un esquema determinista y, por último, se utilizará un esquema de movilidad sencillo el cual permita despreocuparse del efecto Doppler.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se propone como alcance de este proyecto el demostrar que es posible la implementación de un estimador MLE para múltiples fuentes móviles.

II.5. Conclusiones

En este capítulo se mencionaron conceptos fundamentales que serán de gran importancia para los capítulos subsecuentes tales como: el modelo de señal a utilizar, la justificación del por qué mejorar el estimador de máxima-verosimilitud y los alcances de este proyecto de investigación.

También se abordaron las principales técnicas no paramétricas trabajadas dentro del grupo y se pudo analizar como en todas ellas la movilidad queda en segundo plano, esto debido al alto costo computacional de los algoritmos. Sin embargo, la movilidad es un aspecto importante en las comunicaciones de hoy en día, por lo que resulta imperativo la implementación de un algoritmo que permita obtener la eficiencia y robustez de máxima-verosimilitud pero en un entorno con múltiples fuentes móviles. Para que esto se lleve a cabo, es necesaria una técnica que permita disminuir el tiempo de procesamiento lo suficiente para poder realizar el rastreo de las fuentes. Es aquí en donde entra la propuesta del algoritmo recursivo esperanza-maximización y por lo que el siguiente capítulo estará completamente dedicado a la modelación matemática de dicho algoritmo.

Capítulo III

Algoritmo esperanza-maximización recursivo

III.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es sentar las bases matemáticas y definir las ecuaciones propias del algoritmo esperanza-maximización recursivo, de tal manera que se abordará la definición de las herramientas matemáticas llamadas estimadores, así como conceptos importantes de los mismos. También se describirá cualitativamente el concepto de la herramienta ML^2 y se justificará la utilización del método esperanza-maximización (EM) para ser aplicado en estimaciones ML. A su vez, se hará énfasis en la gran desventaja de dicho algoritmo, el tiempo de convergencia, para después pasar a la modelación matemática de la mejora de dicho algoritmo, es decir, el algoritmo EM recursivo.

Es importante mencionar que en este capítulo se utilizarán diversas variables e índices mencionados previamente en el capítulo II. Por tal motivo, se consideró conveniente presentar en la tabla I dichas variables.

²Del término en inglés Maximum-Likelyhood (Máxima-verosimilitud).

Tabla I. Variables e índices de las matrices utilizadas en el modelado del sistema.

Variable	Significado
N	Número de elementos
M	Número de fuentes
d	Separación entre elementos de antena
K	Número de observaciones
n	Índice de elementos de antena
m	Índice de fuentes

III.2. Teoría de la estimación

La teoría de la estimación, es una herramienta de procesamiento de señales que permite la obtención de información a partir de muestras de señales. Esta información usualmente es el valor de algún parámetro desconocido. Algunos ejemplos de aplicación de esta teoría son: Radar, sonar, y por supuesto, la dirección de arribo (DoA). Estos tres ejemplos tienen en común la necesidad de estimar valores de un grupo de parámetros. En aplicaciones de radar se busca obtener la posición de una aeronave, en sonar se desea obtener la posición de un submarino y en comunicaciones móviles celulares mediante el DoA, estimar la posición espacial del móvil.

Dentro de la teoría de estimación existen herramientas matemáticas llamadas *estimadores*. Estos estimadores son medidas estadísticas que especifican como utilizar los datos provenientes de una muestra para encontrar un parámetro desconocido de una población [Covarrubias Rosales, 2008]. Es importante comenzar a introducir la nomenclatura que se utilizará a lo largo del desarrollo de esta tesis. Se denotará como θ al

parámetro a estimar, $\hat{\theta}$ a la estimación y $\hat{\Theta}$ al estimador.

III.3. Propiedades de los estimadores

Como se mencionó en la sección anterior, un estimador es una herramienta matemática que permitirá inferir un parámetro deseado a partir de una serie de muestras. Como cualquier estimación, se tiene una incertidumbre de cuan acertado es el resultado del estimador. Por tal motivo, es necesario que el estimador cuente con ciertas características que permitan saber qué tan bueno es. Estas características son: consistencia, varianza, sesgo y eficiencia. A continuación se define brevemente cada una de estas propiedades [Arceo Olague, 1999].

1. Consistencia

Se dice que un estimador es consistente si, al aumentar el número de observaciones, el valor estimado tiende a converger al valor real del parámetro. Expresado de forma matemática, un estimador es consistente si:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad (6)$$

en donde P denota la probabilidad de que el error entre la estimación y el valor real sea igual a cero.

2. Sesgo y varianza

Se conoce como sesgo a la diferencia entre el valor esperado del estimador y el

valor real. De este modo, un estimador insesgado es aquel cuya diferencia entre el valor estimado del parámetro y el valor real es cero. La expresión matemática del sesgo se muestra a continuación:

$$Sesgo(\theta) = E[\hat{\theta}] - \theta \quad (7)$$

en donde $E[.]$ indica el valor esperado.

La varianza de un estimador, es el segundo momento con respecto a la media del estimador y permite conocer la exactitud con la que se realizan las estimaciones.

La expresión matemática de la varianza es:

$$\sigma_{\hat{\Theta}}^2 = E\left\{\left(\hat{\Theta} - \mu_{\hat{\Theta}}\right)^2\right\} \quad (8)$$

Una vez definidas las propiedades de sesgo y varianza, es posible definir el error cuadrático medio MSE³, el cual permitirá evaluar cualitativamente al estimador y se define con la siguiente ecuación:

$$MSE = E\left\{\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right\} \quad (9)$$

La ecuación (9) puede reescribirse en términos de la varianza y del sesgo.

$$MSE = E\left\{\left(\hat{\Theta} - \mu_{\hat{\Theta}}\right)^2\right\} + \left(E[\hat{\theta}] - \theta\right) \quad (10)$$

Es importante notar que un estimador insesgado disminuye el MSE ya que si el sesgo es cero, la parte derecha de la ecuación (10) es eliminada y el MSE quedará definido únicamente por la varianza del estimador.

³Por sus siglas en inglés: Mean Square Error

3. Cota de Cramer Rao y eficiencia

Para inferir el valor de un parámetro, se puede tener una gran cantidad estimadores diferentes, cada uno con su propio MSE. Lo que se pretende al buscar un estimador es obtener el mejor de todos, es decir, aquel cuyo MSE sea el menor. Para lograr esto, se tendría que analizar y comparar todos los estimadores existentes, cosa que resulta imposible. La solución a este problema, radica en enfocarse en encontrar el estimador cuya varianza sea la menor posible. Ésto se logra haciendo uso de la cota de Cramer Rao, cuya expresión matemática se observa a continuación:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)^2\right]} \quad (11)$$

en donde $f(x;\theta)$ es una función de distribución de probabilidad de x que depende del parámetro θ .

La cota de Cramer Rao indica que la varianza del estimador nunca será menor que cierto valor, de esta forma, se busca obtener aquel estimador cuya varianza que sea la más cercana a dicho valor. En dado caso que la varianza del estimador sea igual, entonces se dice que el estimador es **eficiente** ya que no habrá ningún otro mejor que el.

Otra forma de expresar la cota de Cramer Rao sería en términos de la matriz de información de Fisher [Kay, 1993], cuya dimensión será de $M \times M$.

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln P(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \ln P(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right] \quad (12)$$

Utilizando la igualdad (12), es posible reescribir la cota de Cramer Rao como:

$$Var(\hat{\Theta}) = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln P(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right]} \quad (13)$$

Gracias a la cota de Cramer Rao, es posible encontrar aquel estimador que tenga la varianza más cercana a dicha cota, pero si se logra encontrar un estimador cuya varianza sea idéntica al inverso de la matriz de información de Fisher, entonces se dice que dicho estimador es eficiente.

III.4. Algoritmo de máxima-verosimilitud

Es importante mencionar que el estimador que desarrollará a lo largo de este proyecto es un estimador determinista [van Trees, 2005]. Por primera vez dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas se utilizará un estimador con este enfoque, en el cual las señales se consideran deterministas pero desconocidas.

En las siguientes secciones se analizarán conceptos básicos del algoritmo de máxima-verosimilitud. Se analizará conceptualmente a la función de verosimilitud y también se abordará de manera breve el algoritmo de esperanza-maximización, el cual servirá de preámbulo para el modelado matemático de su complemento, el algoritmo recursivo de esperanza-maximización (REM).

III.4.1. Función de verosimilitud

En la teoría de probabilidad, la función de distribución de probabilidad (pdf por sus siglas en inglés: probability distribution function) describe el rango de posibles valores que una variable aleatoria puede obtener para determinados parámetros. Como ejemplo

considérese el caso más sencillo [Jae, 2003]: una variable y y una muestra. Supóngase que la variable y representa el número de éxitos en una secuencia de 10 pruebas tipo Bernoulli y que la probabilidad de éxito está representada por $\theta = 0.7$. La ecuación que describe una prueba de tipo Bernoulli con los parámetros especificados es:

$$f(y; n, \theta) = \frac{10!}{y!(10-y)!} (0.7)^y (0.3)^{10-y} \quad y = 1, 2, \dots, 10$$

Si se grafica la forma de la pdf mencionada, se obtiene la figura 5.

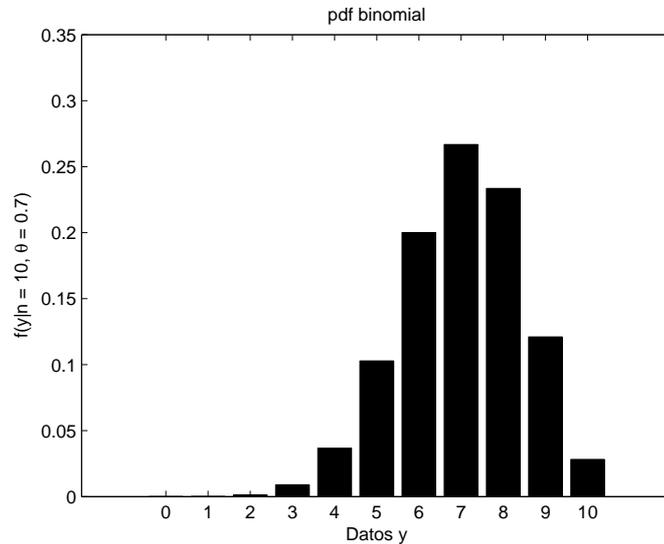


Figura 5. Función de distribución de probabilidad Binomial para 10 pruebas con probabilidad de éxito $\theta = 0.7$.

En la figura 5 se puede observar como el valor de y que presenta una mayor probabilidad de ocurrir es $y = 7$.

Supóngase que existe un sistema que se comporta de acuerdo a la pdf mencionada. La media de los valores arrojados por dicho sistema es 7. Ahora, supóngase que se tiene

acceso a las muestras del sistema, a la pdf que generó dichas muestras y al número de eventos, pero se desconoce el parámetro θ y se desea encontrarlo. Para resolver este problema es necesario recurrir a la función de verosimilitud, la cual se obtiene al invertir los papeles entre la variable aleatoria y y el parámetro θ , es decir, se debe mantener fija la variable aleatoria y variar el parámetro deseado para cada posible valor del mismo. La figura 6 muestra los valores de *verosimilitud* para cada posible valor de θ .

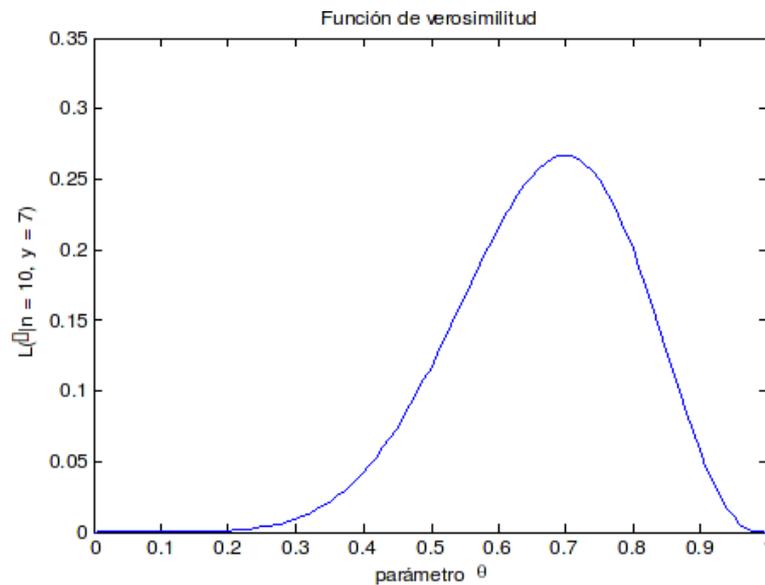


Figura 6. Función de verosimilitud Binomial para 10 pruebas, $y = 7$ y probabilidad de éxito θ desconocida.

En la figura 6 se puede apreciar como el valor de θ con mayor probabilidad de haber generado el valor $y = 7$ es $\theta = 0.7$. A este proceso se le conoce como maximización de la función de verosimilitud.

III.4.2. Algoritmo esperanza-maximización

Cuando la función de verosimilitud es sencilla como en el ejemplo anterior, basta con derivar y encontrar el máximo de dicha función. Sin embargo, en muchas ocasiones

la función de verosimilitud no es fácil de derivar, tal es el caso de la estimación del parámetro DoA.

Cuando se tienen observaciones i.i.d⁴, la función de verosimilitud queda expresada como la multiplicatoria de la función de verosimilitud de cada una de las observaciones, tal y como se indica en la ecuación (14). Una forma de minimizar la complejidad de la función de verosimilitud es utilizar el logaritmo de la misma. De esta forma la multiplicatoria se convierte en una sumatoria, la cual es mucho más fácil de maximizar (15) [Bonilla Hernández, 2005].

$$L(\theta; y) = l_1(\theta; y_1) * l_2(\theta; y_2) * \dots * l_k(\theta; y_k) = \prod_{k=1}^K l(\theta; y_k) \quad (14)$$

$$\log L(\theta; y) = \log l_1(\theta; y_1) + \log l_2(\theta; y_2) + \dots + \log l_k(\theta; y_k) = \sum_{k=1}^K \log l(\theta; y_k) \quad (15)$$

Sin embargo, la maximización de la función logarítmica de verosimilitud aún sería demasiado compleja para maximizar con métodos analíticos. Por esta razón, usualmente se recurre a métodos iterativos como [Bonilla Hernández, 2005]:

- Iteración Newton-Raphson.
- Iteración por métodos cuadrados.
- Proyección alternativa.
- Algoritmo esperanza-maximización.

De los métodos anteriormente mencionados el que se ha trabajado ampliamente dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas es esperanza-maximización (EM). Esto

⁴Observaciones independientes e idénticamente distribuidas.

debido a que el algoritmo EM fue diseñado para trabajar en situaciones donde existen datos incompletos [Dempster *et al.*, 1977], como en el caso del DoA.

La obtención de datos incompletos son el resultado del muestreo de señales emitidas por diversas fuentes. La muestra que se obtiene es el resultado de la contribución de cada una de las señales tal y como se observa en la figura 7.

$$\begin{array}{cccc}
 x_1 e^{0\Psi_0} & x_1 e^{1\Psi_0} & \dots & x_1 e^{(N-1)\Psi_0} \\
 x_2 e^{0\Psi_1} & x_2 e^{1\Psi_1} & \dots & x_2 e^{(N-1)\Psi_1} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 x_m e^{0\Psi_m} & x_m e^{1\Psi_m} & \dots & x_m e^{(N-1)\Psi_m}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{cccc}
 x_1 e^{0\Psi_0} & x_1 e^{1\Psi_0} & \dots & x_1 e^{(N-1)\Psi_0} \\
 x_2 e^{0\Psi_1} & x_2 e^{1\Psi_1} & \dots & x_2 e^{(N-1)\Psi_1} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 x_m e^{0\Psi_m} & x_m e^{1\Psi_m} & \dots & x_m e^{(N-1)\Psi_m}
 \end{array}} \right\} Y_N = \sum_{m=1}^M x_m e^{(N-1)\Psi_m}$$

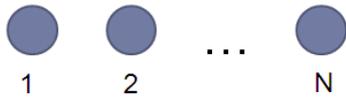


Figura 7. Las señales muestreadas por los N sensores son el resultado de la suma de las señales de todas las fuentes.

En la figura 7 se pueden apreciar dos conjuntos de datos, los datos completos desconocidos y los datos incompletos conocidos los cuales están relacionados con la ecuación (16).

$$Y_N = \sum_{m=1}^M x_m e^{(N-1)\psi_m} \quad (16)$$

Esta ecuación representa una proyección de muchos a uno [Miller y Fuhrmann, 1990], en donde Y representa los datos incompletos observados y x cada uno de los datos completos desconocidos. Si de alguna forma, se pudiese tomar los datos muestreados y separarlos en cada una de las señales, el proceso de la estimación del DoA sería directo [Miller y Fuhrmann, 1990]. Es por esta razón que se necesita un método iterativo que permita estimar la contribución de cada una de las fuentes. El algoritmo capaz de hacer

esta labor es esperanza-maximización [Cekli y Cirpan, 2001].

La forma en que el algoritmo EM resuelve este problema es, como su nombre lo indica, a través de la continua interacción de dos pasos: el paso de la esperanza y el paso de la maximización.

Paso de la esperanza. La función de verosimilitud presenta un grado mayor de complejidad por el hecho de estar incompleta. Por este motivo, el algoritmo EM busca completar la función de verosimilitud durante el paso de la esperanza, sin embargo, para que esto se lleve a cabo, es necesario que el algoritmo cuente con una buena estimación inicial del parámetro a encontrar; es decir, el DoA. El paso de la esperanza se resume con la ecuación (17)

$$Q(\theta|\hat{\theta}^k) = E[\log f(y|\theta) | Y, \hat{\theta}^k] \quad (17)$$

en donde k es el número de iteración, $\hat{\theta}$ representa el parámetro estimado y $\log f(y|\theta)$, la función de verosimilitud logarítmica. Con el paso de la esperanza, la función de verosimilitud se completará y se podrá realizar el paso de maximización.

Maximización de la esperanza. Este proceso es idéntico al mostrado en el ejemplo de la sección III.4.1., en donde se requiere maximizar la función de verosimilitud obtenida del paso de la esperanza, con el fin de encontrar un nuevo valor del parámetro $\hat{\theta}$. Este nuevo valor se utilizará para realizar una vez más el paso de la esperanza. Este ciclo se repetirá hasta que se cumpla una condición de paro.

A continuación muestra un diagrama de flujo de como funciona el algoritmo EM.

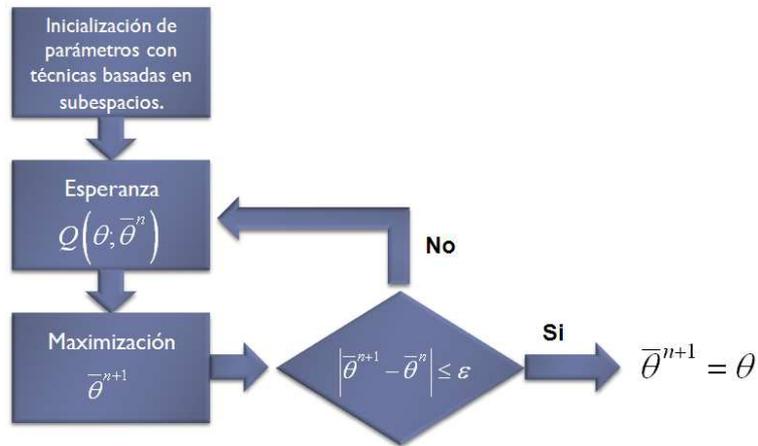


Figura 8. Diagrama de flujo del algoritmo esperanza-maximización.

En la figura 8 se puede apreciar el proceso que sigue el algoritmo EM para determinar el DoA. El primer paso consiste en la inicialización del parámetro DoA, el cual puede llevarse a cabo utilizando técnicas espectrales como MUSIC [Bonilla Hernández, 2005].

El segundo paso consiste en el cálculo de la esperanza de la función de verosimilitud, utilizando el valor del DoA inicial. Una vez realizado esto, se procede al paso de maximización, el cual arrojará un nuevo valor del DoA.

Una vez obtenida la nueva estimación del DoA, se procede a determinar si la estimación es adecuada. Debido a que no se tiene acceso al valor real del parámetro, el nuevo valor se compara con un valor anterior; si el valor absoluto de la diferencia entre estos dos valores es menor a un umbral definido por el usuario, entonces el algoritmo se detiene arrojando el valor actual de $\hat{\theta}^{n+1}$. Si la condición anterior no se cumple, entonces es necesario volver a repetir el ciclo una vez más.

El tiempo necesario, tanto en la parte de la esperanza como en la maximización, es considerablemente alto y más aún si la condición de paro es demasiado estricta. Por esta razón, es que se ha reportado un tiempo de convergencia de 60 horas [Bonilla Hernández, 2005, Arceo Olague, 1999].

Como se mencionó en el capítulo II, el elevado tiempo de convergencia imposibilita al algoritmo para estimar la trayectoria de fuentes móviles, por lo que se propone la implementación del algoritmo esperanza-maximización recursivo que a continuación se describe.

III.4.3. Algoritmo esperanza-maximización recursivo

El algoritmo esperanza-maximización recursivo (REM) es un procedimiento de aproximación estocástica para encontrar estimaciones de máxima-verosimilitud. Propuesto por Titterington [Titterington, 1984], REM puede verse como una aproximación secuencial del algoritmo EM [Chung *et al.*, 2005].

Utilizando una expansión de Taylor, Titterington mostró que, aproximadamente, REM es capaz de maximizar la función de verosimilitud de manera secuencial, es decir, los datos son procesados en el momento en que se reciben y la maximización se realiza secuencialmente con cada nuevo dato. Gracias a este enfoque, el algoritmo REM permite la implementación de estimaciones ML en aplicaciones de tiempo de real, ya que no necesita de almacenar una gran cantidad de datos para posteriormente analizarlos, como en el caso de ML convencional.

La ecuación del algoritmo EM propuesta por Titterington se muestra a continuación:

$$\hat{\theta}^{k+1} = \hat{\theta}^k + \left\{ \varepsilon I(\hat{\theta}_k) \right\}^{-1} S(y_{k+1}, \hat{\theta}_k) \quad (18)$$

en donde $\hat{\theta}^k + 1$ representa la nueva estimación, $\hat{\theta}^k$ la estimación actual, ε es una constante llamada tamaño de paso y

$$\begin{aligned} I(\hat{\theta}_k) &= -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x; \hat{\theta}_k) \right] \\ S(y_{k+1}, \hat{\theta}_k) &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\log f(x; \hat{\theta}_k)) \end{aligned} \quad (19)$$

en donde $I(\hat{\theta}_k)$ es la matriz de información de Fisher y $S(y_{k+1}, \hat{\theta}_k)$ se conoce como el vector de resultados.

Para el análisis cualitativo de (18) se puede referir a la ecuación de aproximación de mínimos cuadrados [Zacks, 1981]:

$$\hat{\theta}^{k+1} = \hat{\theta}^k + \varepsilon (\theta - \hat{\theta}^k) \quad (20)$$

En esta ecuación se observa como el nuevo valor de la estimación $\hat{\theta}^{k+1}$ depende del valor estimado anteriormente $\hat{\theta}^k$, al cual se le añade una contribución producida por una diferencia entre el valor real y el valor estimado actual, multiplicado por el tamaño de paso. De esta manera, el algoritmo llegará a converger en el momento en que el error sea igual a cero y el tamaño de paso se encargará de que la contribución de dicho error sea cada vez más pequeña.

La similitud entre las ecuaciones (18) y (20) es evidente. El papel que desempeña el vector de resultados es el de determinar tanto el signo de la contribución como la condición de paro del algoritmo. Esto debido a la derivada de la función de verosimilitud, ya

que un valor de cero indicará que la función de verosimilitud se ha maximizado. De la misma manera, la información de Fisher se encargará de controlar la contribución de la derivada al nuevo valor estimado.

Al tomar en cuenta el entorno descrito en el capítulo II, la ecuación (18) puede reescribirse como:

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \varepsilon \ell_{EM}(\theta^k)^{-1} \gamma(x(t), \theta^k) \quad (21)$$

de la misma forma, tanto la matriz de información como el vector de resultados quedan expresados como:

$$\ell_{EM}(\theta^k) = E \left[-\nabla_{\theta} \nabla_{\theta}^T \log f(y; \theta | x(k), \theta^k) \right] |_{\theta=\theta^k} \quad (22)$$

$$\gamma(x(t), \theta^k) = \nabla_{\theta} \log f(x(k); \theta) |_{\theta=\theta^k} \quad (23)$$

En donde ∇_{θ} es un operador gradiente columna con respecto de θ , $\ell_{EM}(\theta^k)$ representa la matriz de información aumentada y $\gamma(x(t), \theta^k)$ permanece como el vector de resultados [Chung *et al.*, 2005].

Es importante notar que en la ecuación (21) se utiliza a la matriz de información aumentada en lugar de la matriz de información de Fisher. La diferencia entre una y otra es que la primera se obtiene a partir de los datos aumentados estimados, y la segunda, de las muestras obtenidas por los sensores. El utilizar la matriz de información aumentada lleva a encontrar un estimador que no es eficiente en el sentido de la cota de Cramer Rao, sin embargo, se justifica en la poca carga computacional que representa [Chung *et al.*, 2005]. El diagrama de flujo del algoritmo REM se muestra en la figura

9.

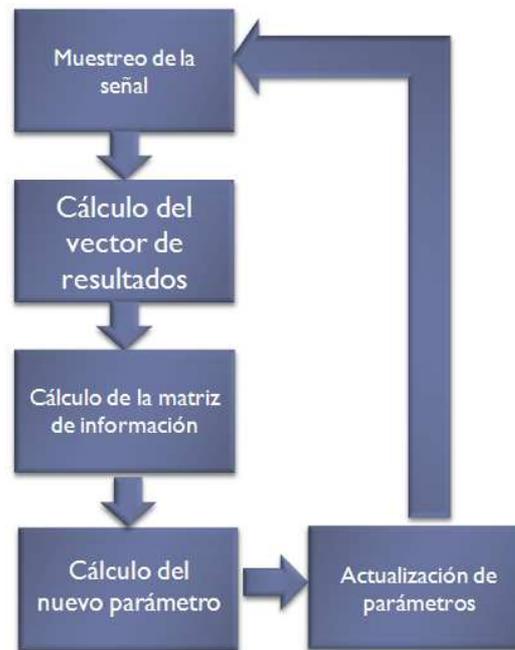


Figura 9. Diagrama de flujo del algoritmo esperanza-maximización recursivo.

Como se observa en la figura 9, el dato muestreado se utiliza para calcular el vector de resultados, el cual indicará el signo de la contribución, así como el momento en que el algoritmo maximice a la función de verosimilitud. El tamaño de la contribución estará dictaminado por la matriz de información aumentada, así como del tamaño de paso. La elección del tamaño de paso se realizará en base a la experiencia; un valor grande de este parámetro disminuye el sesgo, pero incrementa la varianza y viceversa.

En la figura 9 se puede observar que la condición de paro se ha eliminado. Esto debido a que las fuentes móviles continuamente estarán enviando información que permita estimar su nueva posición y, por lo tanto, el algoritmo procesará datos de manera continua.

En las siguientes secciones, se desarrollarán dos modelos matemáticos del algoritmo esperanza-maximización recursivo. El primer algoritmo, llamado REMI, se desarrollará utilizando un enfoque en el que se desconoce por completo la movilidad de las fuentes. Para el segundo algoritmo, REMII, se asume que las fuentes tienen una movilidad que sigue un modelo lineal.

III.4.4. Algoritmo REMI

A lo largo del capítulo se ha hecho referencia a la función de verosimilitud de manera general. En este apartado, se plantea el modelo matemático para la estimación del parámetro DoA a partir de señales deterministas.

Las señales muestreadas $x(k)$ son complejas normalmente distribuidas, con la siguiente función de verosimilitud [Chung *et al.*, 2005]:

$$\begin{aligned} \log f(x(t); \theta) = & -[N \log \pi + N \log v \\ & + \frac{1}{v} (x(t) - H(\theta(t))s(t))^H (x(t) - H(\theta(t))s(t))] \end{aligned} \quad (24)$$

Bajo este modelo, se asume que tanto la señal, la potencia de ruido y el parámetro DoA son desconocidos, por lo tanto, será necesario determinar $s(k)$ y v una vez que se tenga un estimado de θ , o en la primera iteración, haciendo uso del valor inicial de θ .

Las ecuaciones que permitirán determinar $s(k)$ y v son:

$$\begin{aligned} s^{k+1} &= H(\theta^{k+1})^\# x(k) \\ v^{k+1} &= \frac{1}{N} \text{tr} \left[P(\theta^{k+1})^\perp \hat{C}_x(k) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

en donde $H(\theta^{k+1})^\# = \left(H(\theta^{k+1})^H H(\theta^{k+1}) \right)^{-1} H(\theta^{k+1})^H$, $P(\theta^{k+1})^\perp = I - P(\theta^{k+1})$ es el complemento ortogonal de la matriz de proyección $P(\theta^{k+1}) = H(\theta^{k+1}) H(\theta^{k+1})^\#$

y $\hat{C}_x(k) = x(k) x(k)^H$.

Una vez que se ha llevado a cabo la estimación de los parámetros anteriores, es posible realizar la estimación del parámetro DoA con la ecuación (21). Para esto, es necesario expresar el vector de resultados en términos del modelo de señal, con lo cual se obtiene la ecuación (26).

$$\left[\gamma(x(k), \theta^k) \right]_m = \frac{2}{v^k} \text{Re} \left[\left(x(k) - H(\theta^k) s^k \right)^H \left(d'(\theta_m^k) s_m^k \right) \right] \quad (26)$$

Para determinar la matriz de información aumentada, es necesario descomponer la señal muestreada en cada una de sus partes asociada con la m -ésima fuente. La función de verosimilitud para los datos aumentados se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \log f(y(t); \theta) &= - \sum_{m=1}^M \left[N \log \pi + N \log \left(\frac{v}{M} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{v} (y_m(k) - d(\theta_m) s_m(k))^H \right. \\ &\quad \left. + (y_m(k) - d(\theta_m) s_m(k)) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

utilizando las ecuaciones (27) y (22) se obtiene la siguiente matriz diagonal de tamaño $M \times M$:

$$\left[\ell_{EM}(\theta^k) \right]_{mm} = \frac{2}{v^k} \text{Re} \left[- \left(d''(\theta_m^k) s_m^k \right)^H \left(x(k) - H(\theta^k) s^k \right) + M \left\| d'(\theta_m^k) s_m^k \right\|^2 \right] \quad (28)$$

Una vez descritas las ecuaciones anteriores, es posible llevar a cabo el algoritmo para la estimación del parámetro DoA. El primer paso consiste en estimar los parámetros s^k, v^k haciendo uso del valor inicial de θ en las ecuaciones (25). El siguiente paso consiste en determinar el vector de resultados con (26) y la matriz de información aumentada con (28), y actualizar el valor del DoA con la expresión (21). Con cada iteración, el parámetro DoA se aproximará cada vez más al valor real.

III.4.5. Algoritmo REMII

Como se mencionó en el capítulo II, el esquema de movilidad de las fuentes será lo más sencillo posible. Este esquema consistirá en un movimiento circular en torno a la estación base descrito por la ecuación (29).

$$\theta = \theta_0 + k\theta_1 \quad (29)$$

en donde θ_0 representa la posición angular inicial y θ_1 la velocidad angular inicial. De esta manera, al poder determinar estos parámetros será posible determinar la posición exacta de la fuente en todo momento.

Para que el algoritmo sea capaz de estimar de manera adecuada la posición y velocidad, es necesario contar con buenas estimaciones iniciales de estos parámetros. A continuación se presentan las ecuaciones que se utilizarán bajo este esquema de movilidad.

$$\begin{aligned} \gamma(x(t); \theta_{0m}^2) &= \frac{2}{v^t} \text{Re} \left[\left(x(t) - H(\Theta^k) s^k \right)^H \left(d'(\Theta_m^k) s_m^k \right) \right] \\ \gamma(x(t); \theta_{1m}) &= \frac{2k}{v^t} \text{Re} \left[\left(x(t) - H(\Theta^k) s^k \right)^H \left(d'(\Theta_m^k) s_m^k \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} [\ell_{EM}(\theta_{0m}^k)]_{mm} &= \frac{2}{v^k} \text{Re} \left[\left(-d''(\Theta_m^k) s_m^k \right)^H \left(x(k) - H(\Theta_m^k) s_m^k \right) + M \|d'(\Theta_m^k) s_m^k\|^2 \right] \\ [\ell_{EM}(\theta_{1m}^k)]_{mm} &= \frac{2k^2}{v^k} \text{Re} \left[\left(-d''(\Theta_m^k) s_m^k \right)^H \left(x(k) - H(\Theta_m^k) s_m^k \right) + M \|d'(\Theta_m^k) s_m^k\|^2 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

en donde $d'(\Theta_m^k) = \partial d(\theta_m) / \partial \theta_m |_{\theta_m = \theta_{0m}^k + k\theta_{1m}^k}$.

III.5. Conclusiones

El algoritmo REM promete llevar la estimación de ML a escenarios cuyas fuentes presenten movilidad, gracias a los datos son procesados en el momento en que llegan al

sistema. Aunado a esto, está el uso de la matriz de información aumentada en lugar de la matriz de información de Fisher, lo cual representa una menor carga computacional. Es importante recalcar que, según los conceptos de eficiencia mostrados en este capítulo, el algoritmo REM no es un estimador eficiente, ya que no se está utilizando la matriz de información de Fisher en la estimación del parámetro. Las consecuencias de esta implementación en términos del error de estimación se analizarán a detalle en el capítulo siguiente.

En este capítulo también se plantearon las ecuaciones necesarias para la implementación del algoritmo REM. Se plantean dos grupos de ecuaciones. Un grupo no asume ningún tipo de conocimiento de la movilidad de la fuente; es decir, en base a las muestras que recibe, el algoritmo intentará llevar a cabo el rastreo del móvil. Para el segundo grupo de ecuaciones, se asume que las fuentes presentan un movimiento circular alrededor de la estación base, de tal forma que, si se conoce la posición angular inicial y la velocidad angular, la posición de la fuente podría ser calculada en cualquier instante de tiempo. Bajo este enfoque, el segundo grupo de ecuaciones busca estimar tanto la posición angular inicial como la velocidad angular. El comportamiento de cada uno de los estimadores se mostrará en el siguiente capítulo: Simulación y análisis de resultados.

Capítulo IV

Simulación y análisis de resultados

IV.1. Introducción

En este capítulo se mostrarán y analizarán resultados de simulaciones obtenidas a partir del modelo del sistema planteado en la sección II y la modelación matemática descrita en la sección III. A su vez, se realizarán simulaciones a fin de comprender mejor el papel que desempeñan los componentes principales del algoritmo REM: el vector de resultados y la matriz de información aumentada.

Se plantearán diversos escenarios en los cuales se mostrará el comportamiento de los algoritmos REMI y REMII. El primero se aplicará en un escenario en el que las fuentes son estáticas, para después analizar su desempeño ante fuentes móviles. Para el segundo algoritmo se realizarán pruebas que involucren únicamente fuentes móviles, esto debido al planteamiento utilizado para la obtención de sus ecuaciones. Se analizará su comportamiento ante baja, media y alta movilidad, así como múltiples fuentes y separación entre las mismas.

Las simulaciones presentadas en este capítulo se realizaron con las características

mostradas en la tabla II:

Tabla II. Características del equipo utilizado en la simulación.

Plataforma de simulación	matlab
Sistema operativo	Linux ubuntu 8.10
Memoria RAM	2 GB
Procesador	Intel core 2 Duo @ 1.66 GHz

IV.2. Vector de resultados y matriz de información aumentada

Las partes medulares del algoritmo REM las componen el vector de resultados y la matriz de información aumentada. Por esta razón, en esta sección se analizará el comportamiento de ambas partes para tener un mejor conocimiento del papel que desempeñan. A continuación se presentan los parámetros y consideraciones de simulación que se utilizaron para obtener los resultados mostrados.

- Frente de onda plano.
- $N=15$.
- $d=\lambda/2$
- El número y la posición de las fuentes son conocidos.

- El ruido se considera un proceso Gaussiano con media 0 y matriz de covarianza vI .
- Observaciones i.i.d

IV.2.1. Vector de resultados.

Como se mencionó en el capítulo III, el vector de resultados se encarga de determinar el signo de la contribución así como el momento en que la función de verosimilitud ha sido maximizada. Para obtener los siguientes resultados, se realiza un barrido del parámetro DoA en la ecuación 26 considerando que la posición de la fuente es fija. De esta forma, se podrá observar el comportamiento del vector de resultados a medida que se acerca al valor real.

En la figura 10 se puede observar el comportamiento del vector de resultados cuando la posición de la fuente es $\theta = 10^\circ$ y la relación señal a ruido es de 80 dB. Se puede apreciar como en $\theta = 10^\circ$, el vector de resultados arroja un valor muy pequeño, casi cero, lo cual indica al algoritmo que la función de verosimilitud ha sido maximizada y por lo tanto, la contribución realizada será mínima. En esta figura en particular, se puede apreciar como para $\theta = 9.99^\circ$ el valor del vector de resultados es superior a 0 con signo positivo, de tal forma que la contribución al nuevo valor de θ será positiva. Otro aspecto que es importante notar, es la escala del eje de las abscisas. Esto indica que una pequeña variación en θ produciría un valor alto en el vector de resultados, lo que podría llevar a un error muy grande en la estimación.

Para solucionar el problema de la sensibilidad del vector de resultados, se necesita

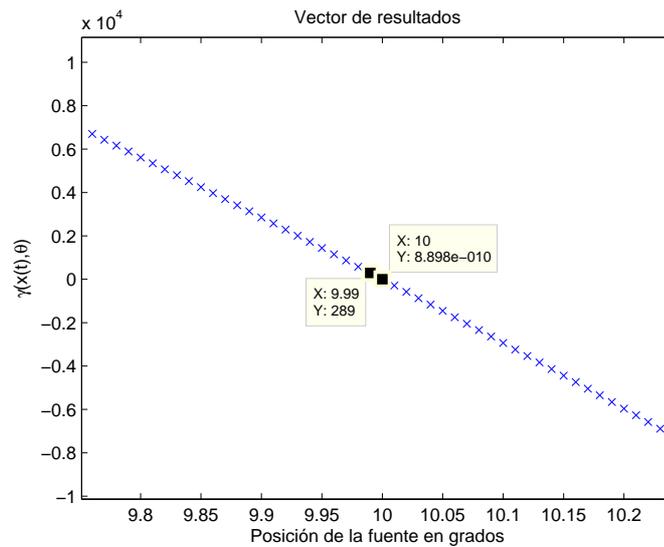


Figura 10. Vector de resultados para $SNR = 80$, $N = 15$, $\theta = 10^\circ$.

una herramienta capaz de limitar el tamaño de la contribución. Esto se logra con la acción conjunta del tamaño de paso y la matriz de información aumentada, los cuales se analizarán a continuación.

IV.2.2. Matriz de información aumentada

La matriz de información aumentada, junto con el tamaño de paso, determinará el tamaño del incremento para estimar el nuevo valor de θ . En la figura 11 se observa el valor obtenido de evaluar $[\ell_{EM}(\theta^k)]^{-1}$. Se puede apreciar como a medida que se aproxima al valor de $\theta = 10^\circ$, el resultado de la matriz de información aumentada es menor, por ende, el incremento será menor. Es importante observar que en todo momento el valor obtenido de $[\ell_{EM}(\theta^k)]^{-1}$ es positivo.

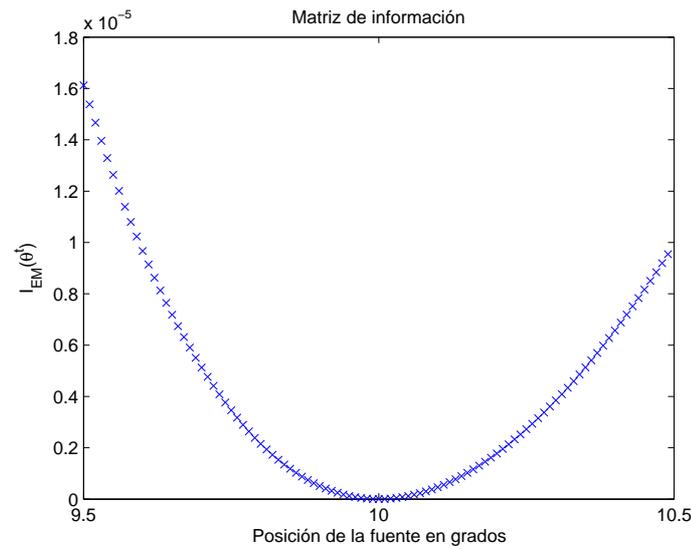


Figura 11. Matriz de información aumentada para $SNR = 80$, $N = 15$, $\theta = 10$.

IV.3. Algoritmo REMI

En esta sección se realizarán las simulaciones convenientes para observar el comportamiento del algoritmo REM. En primer lugar se simularán fuentes estáticas para comparar su desempeño con el algoritmo esperanza-maximización convencional, para después simular un escenario con múltiples fuentes móviles. Los parámetros de simulación se muestran a continuación.

- Frente de onda plano.
- $N=15$.
- $SNR=10dB$.
- $d=\lambda/2$.
- El número de las fuentes es conocido.

- Se cuenta con una buena estimación inicial al inicio del algoritmo.
- El ruido se considera un proceso Gaussiano con media 0 y matriz de covarianza vI .
- Observaciones i.i.d.

IV.3.1. Fuentes estáticas

El primer escenario consiste en estimar la posición de tres fuentes estáticas ubicadas en 50° , 60° y 65° con un valor de $\text{SNR} = 10\text{dB}$. Las posiciones iniciales se tomaron como 50.5° , 59.5° y 68.5° . El tamaño de paso se considerará variable con $\varepsilon = 3k^{-0.6}$ [Chung *et al.*, 2005]. La figura 12 muestra la estimación de estas señales.

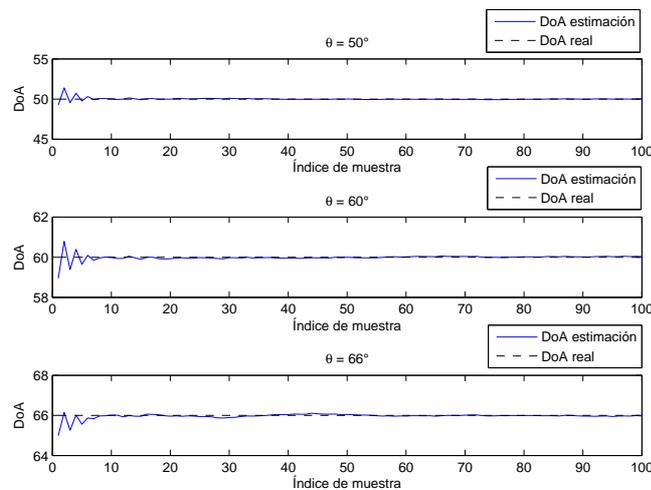


Figura 12. Estimación de la posición de tres fuentes estáticas ubicadas en $\theta = 50, 60$ y 65 grados.

Se puede observar como el estimador comienza a realizar pequeñas oscilaciones en torno al valor real del parámetro DoA, sin embargo, a partir de la décima muestra, la estimación tiende a estabilizarse; es decir, el error disminuye. Esto se puede apreciar en

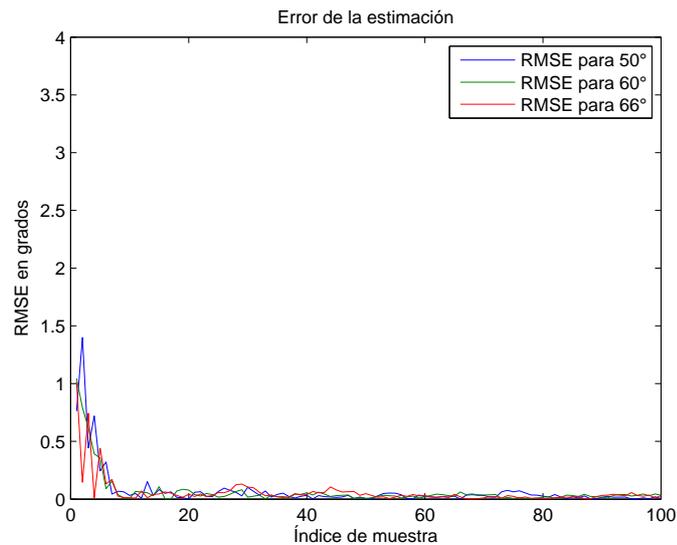


Figura 13. Error cuadrático medio para la estimación de fuentes estáticas ubicadas en $\theta = 50^\circ, 60^\circ$ y 65° .

la figura 13. En esta figura, se observa como el RMSE disminuye considerablemente a partir de la décima muestra para las tres estimaciones manteniéndose muy por debajo de 1° para las muestras siguientes. Es importante mencionar que el tiempo de ejecución del algoritmo fue de tan solo 12.31 s. Este tiempo representa un gran avance en cuanto al algoritmo ML convencional, ya que para tan solo 2 fuentes, el algoritmo tardó al rededor de 60 horas [Bonilla Hernández, 2005].

Con estos resultados, se demuestra que REM es superior en cuanto a tiempo de convergencia a ML convencional. Este tiempo bajo de convergencia permite llevar la estimación a un escenario con fuentes móviles, el cual se trata a continuación.

IV.3.2. Algoritmo REMI con movilidad

Para probar el comportamiento del algoritmo REMI bajo un esquema cuyas fuentes presentan movilidad, se plantea un escenario con tres fuentes móviles cuyos parámetros

se muestran en la tabla III.

Tabla III. Parámetros de las fuentes móviles.

Posición inicial	Estimación inicial	Velocidad
30°	30.1°	0.06°/muestra
50°	50.8°	-0.1°/muestra
62°	60.9°	0.05°/muestra

En la figura 14 se muestra el comportamiento del algoritmo REMI ante fuentes móviles. Se puede apreciar que para aquellas trayectorias en donde no existe un cruce de las fuentes, la estimación se lleva a cabo sin ningún problema. Sin embargo, para aquellas trayectorias que presentan una intersección, el algoritmo pierde la noción de la fuente que rastrea en un inicio. El rastreo se sigue llevando a cabo, pero con las fuentes equivocadas. El problema se incrementa aún más cuando se aumenta la ve-

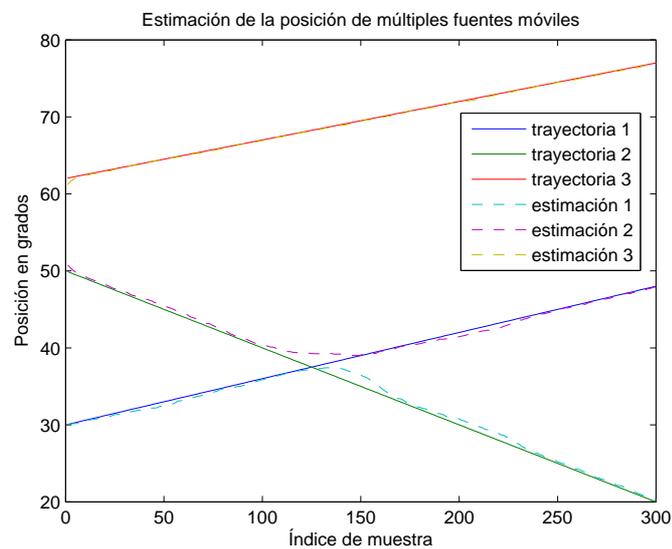


Figura 14. Estimación de múltiples fuentes móviles con el algoritmo REMI.

locidad de las fuentes. Para la siguiente simulación, los parámetros de las fuentes son

mostrados en la tabla IV.

Tabla IV. Parámetros de las fuentes móviles.

Posición inicial	Estimación inicial	Velocidad
10°	10.5°	0.6°/muestra
60°	59.5°	-1.0°/muestra
66°	68.5°	0.4°/muestra

La figura 15 muestra como la trayectoria sin cruce es estimada de forma adecuada, mientras que la estimación de las trayectorias en donde existe un cruce empeoró. Con esta información es posible concluir que el algoritmo REMI no presenta un buen desempeño ante fuentes que, en algún momento, puedan ocupar la misma posición angular.

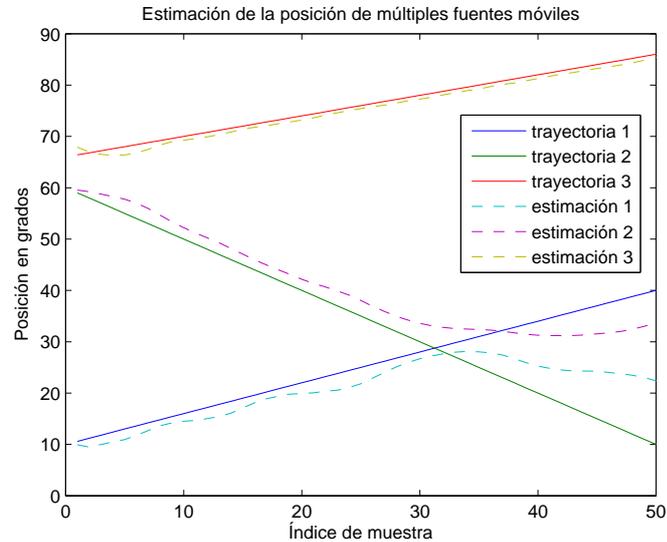


Figura 15. Estimación de múltiples fuentes móviles con el algoritmo REMI.

IV.4. Algoritmo REMII

Debido a las deficiencias anteriores, el desarrollo del modelo matemático basado en la suposición de conocer el modelo de movilidad de las fuentes fue lo que llevó a la obtención de las ecuaciones mostradas en la sección III.4.5. Es importante recordar que el algoritmo requerirá de dos buenas estimaciones iniciales, ya que se estarán estimando, simultáneamente, dos parámetros: la posición inicial y la velocidad.

Las pruebas realizadas a este algoritmo consisten en 6 escenarios, con lo cual se busca determinar la robustez del algoritmo. Estos escenarios son: baja movilidad, media movilidad, alta movilidad, separación entre fuentes con la misma velocidad, pequeña diferencia entre velocidades y alto número de fuentes. Los parámetros de simulación son los mismos mencionados en la sección IV.3.

IV.4.1. REMII. Baja movilidad

Para esta simulación se utilizarán los parámetros mostrados en la tabla V

Tabla V. Parámetros de las fuentes móviles.

Posición inicial	Estimación inicial de la posición	Velocidad	Estimación inicial de la velocidad
30°	30.1°	0.06°/muestra	0°/muestra
50°	50.8°	-0.1°/muestra	0°/muestra
62°	60.9°	0.05°/muestra	0°/muestra

El resultado de esta simulación se muestra en la figura 16. Se observa como en todas

las trayectorias el algoritmo es capaz de rastrear perfectamente a las fuentes, incluso en aquellas en las que se presenta un cruce.

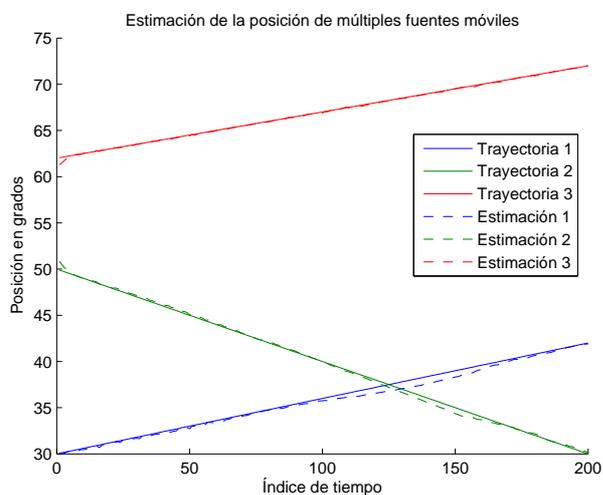


Figura 16. Estimación de múltiples fuentes con baja movilidad.

En la figura 17 se aprecia como el error de estimación es menor a un grado en todo momento, presentándose un incremento en el momento del cruce.

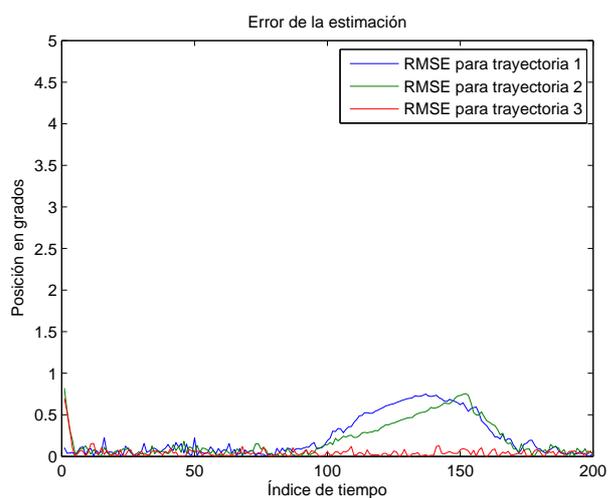


Figura 17. Error en la estimación de múltiples fuentes con baja movilidad.

Es importante notar como la estimación inicial de la velocidad para las fuentes es 0. Esto es posible debido a la pequeña velocidad con la que las fuentes se desplazan. Sin embargo, cuando este valor se incrementa, se requiere de una mejor estimación inicial.

IV.4.2. REMII. Mediana movilidad

Para este escenario se utilizaron los parámetros mostrados en la tabla VI que se muestra a continuación:

Tabla VI. Parámetros de las fuentes móviles.

Posición inicial	Estimación inicial de la posición	Velocidad	Estimación inicial de la velocidad
10°	10.5°	0.6°/muestra	0.58°/muestra
60°	59.5°	-1.0°/muestra	-0.99°/muestra
66°	68.5°	0.4°/muestra	0.38°/muestra

Los resultados de la simulación se muestran en la figura 18. Se puede apreciar como incluso a una mayor velocidad de las fuentes, el algoritmo es capaz de estimar perfectamente las trayectoria de las mismas.

El error mostrado en la figura 19, al igual que en el caso anterior, aumenta en el momento del cruce, pero tiende a disminuir. De la misma forma, se puede apreciar que el error en la estimación de la trayectoria en que no hay cruce se mantiene muy por debajo de 1°.

En esta sección se pensó conveniente realizar una comparación con el algoritmo de

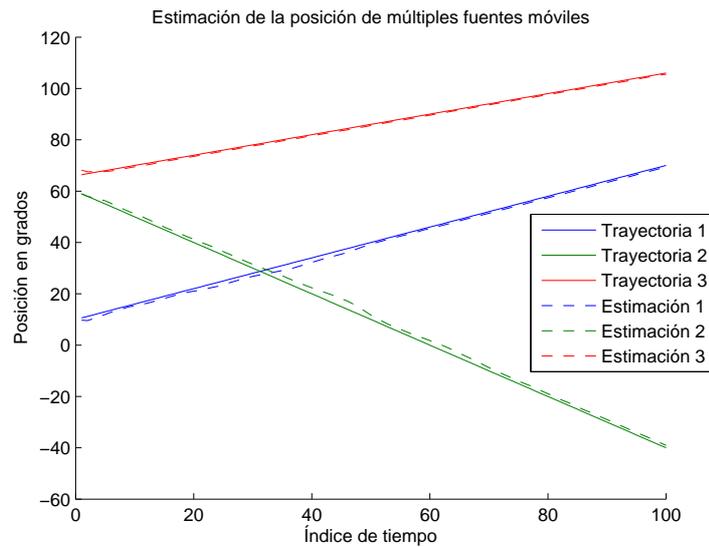


Figura 18. Estimación de múltiples fuentes con mediana movilidad.

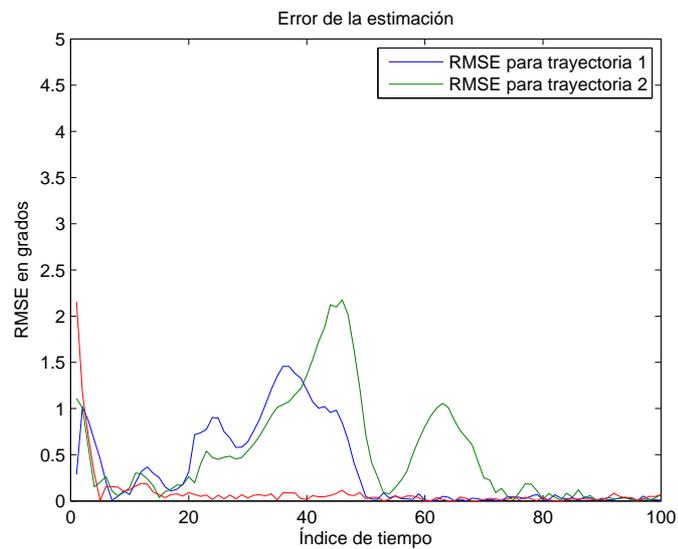


Figura 19. Error en la estimación de múltiples fuentes con mediana movilidad.

aproximación de polinomio local (LPA) a fin de mostrar la ventaja que tiene REM en cuanto al tiempo de procesamiento. Como se puede apreciar en la figura 20 el algoritmo LPA, al igual que REM es capaz de estimar la velocidad y la posición de las fuentes con gran precisión, sin embargo, para LPA el tiempo de cómputo fue de alrededor de 90 segundos.

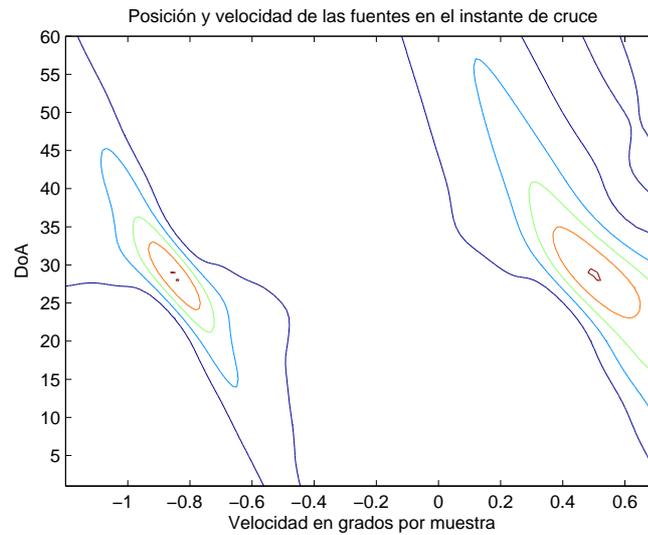


Figura 20. Estimador LPA para la estimación de la posición y velocidad de las fuentes.

La diferencia entre tiempos de convergencia entre REM y LPA se debe principalmente a que el segundo necesita realizar correlaciones con cada combinación posible de los parámetros velocidad y posición para poder obtener la figura de contornos que indica la posición y velocidad de cada fuente. Esta carga computacional hace que LPA sea superado en el aspecto de tiempo de computo por REM.

IV.4.3. REMII. Baja diferencia entre velocidades

En esta sección se analizará el desempeño del algoritmo REMII cuando la diferencia entre las velocidades de dos fuentes es muy pequeña. Para este escenario de simulación, los parámetros utilizados se muestran en la tabla VII.

La figura 21 presenta los resultados obtenidos de esta simulación. Se puede apreciar como durante las primeras muestras, el algoritmo presenta una diferencia entre la

Tabla VII. Parámetros de las fuentes móviles.

Posición inicial	Estimación inicial de la posición	Velocidad	Estimación inicial de la velocidad
10°	10.5°	0.6°/muestra	0.65°/muestra
6°	6.5°	0.7°/muestra	0.75°/muestra

trayectoria real y la estimación, sin embargo, no se pierde la capacidad de distinción entre las trayectorias.

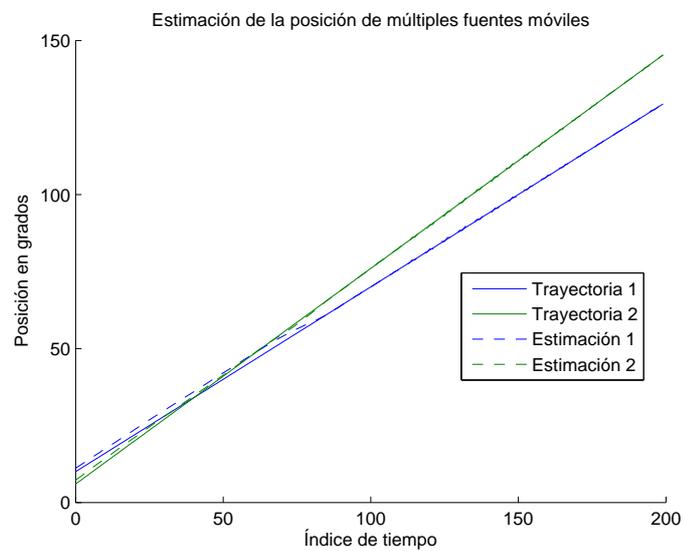


Figura 21. Estimación de la trayectoria de dos fuentes con una diferencia pequeña entre sus velocidades.

De tal manera que, después del cruce de las fuentes, la estimación de la trayectoria tiende a aproximarse a la trayectoria real. Esto se puede apreciar también en la figura 22. Se observa la tendencia del error a disminuir conforme las fuentes se separan la una de la otra.

Al utilizar los valores mostrados en la tabla VII para generar una gráfica de contornos similar a la figura 20 se obtiene la figura 23. Al comparar el comportamiento de REMII

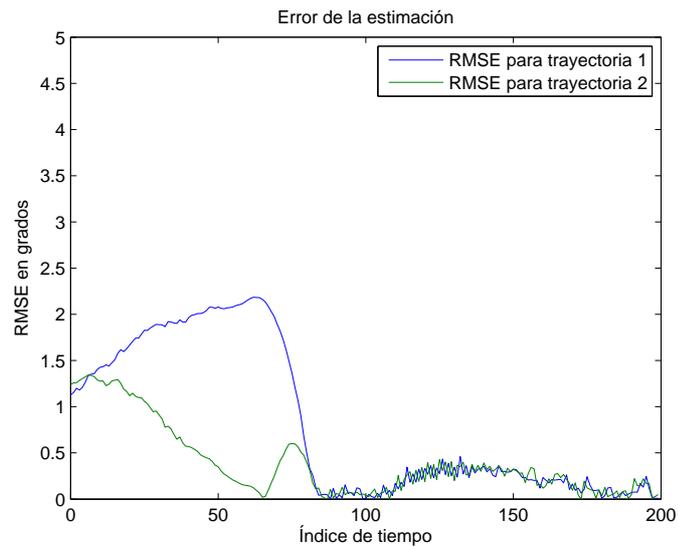


Figura 22. Error en la estimación de la trayectoria de dos fuentes con una diferencia pequeña entre sus velocidades.

con LPA, se puede observar como LPA pierde por completo la capacidad de distinguir entre fuentes. En este aspecto, REM muestra un mejor desempeño que LPA. Otro aspecto importante es que para obtener la figura 23, fue necesario un tiempo de cómputo de 90 segundos, mientras que a REMII le tomó tan solo 12.7 segundos.

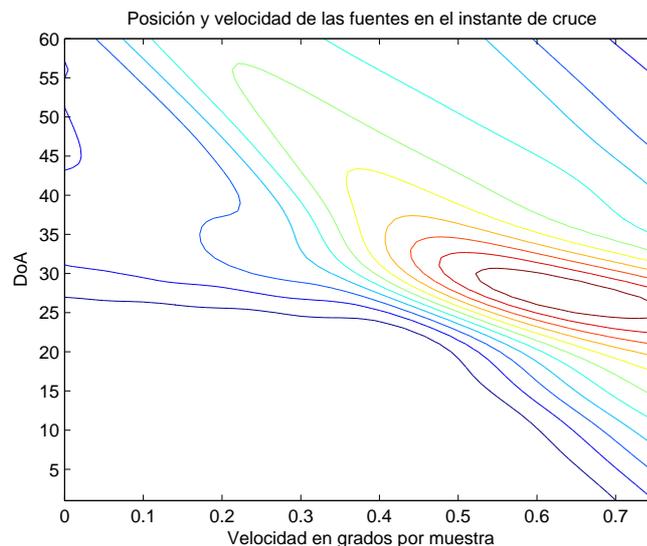


Figura 23. Estimador LPA para la estimación de la posición y velocidad de las fuentes.

IV.4.4. Separación entre fuentes con la misma velocidad

El siguiente aspecto a probar en el comportamiento del algoritmo REM es cuando dos fuentes viajen paralelas entre si, es decir, cuando tengan la misma velocidad. Esta prueba es importante porque permitirá conocer la distancia mínima entre fuentes, para que el algoritmo sea capaz de distinguirlos. Los parámetros considerados para esta simulación se muestran en la tabla VIII.

Tabla VIII. Parámetros de las fuentes móviles.

Posición inicial	Estimación inicial de la posición	Velocidad	Estimación inicial de la velocidad
20°	20.5°	0.6°/muestra	0.58°/muestra
22°	22.5°	0.6°/muestra	0.62°/muestra

En la figura 24 se puede observar como la estimación se realiza de manera adecuada cuando la diferencia entre las posiciones iniciales es de tan solo 2°. Ante un a distancia menor, el algoritmo confunde las trayectorias ocasionando una estimación errónea. Es necesario enfatizar mencionar que la estimación inicial de las posiciones debe ser muy próxima al valor real para que el algoritmo pueda realizar una buena estimación.

Cuando la velocidad de las fuentes aumenta, la distancia mínima requerida entre fuentes también lo hace. En la figura 25 se aprecia que, para velocidades de 2°/muestra, la estimación es correcta siempre y cuando exista una diferencia en las posiciones iniciales de al menos 5 grados. Es importante mencionar que el tiempo de procesamiento para estas simulaciones fue de alrededor de 10 segundos.

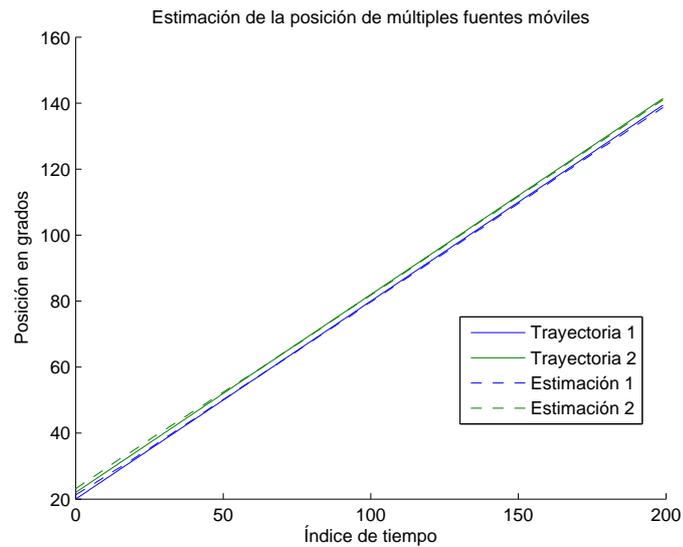


Figura 24. Estimación de la trayectoria de fuentes con misma velocidad, separadas por 2 grados.

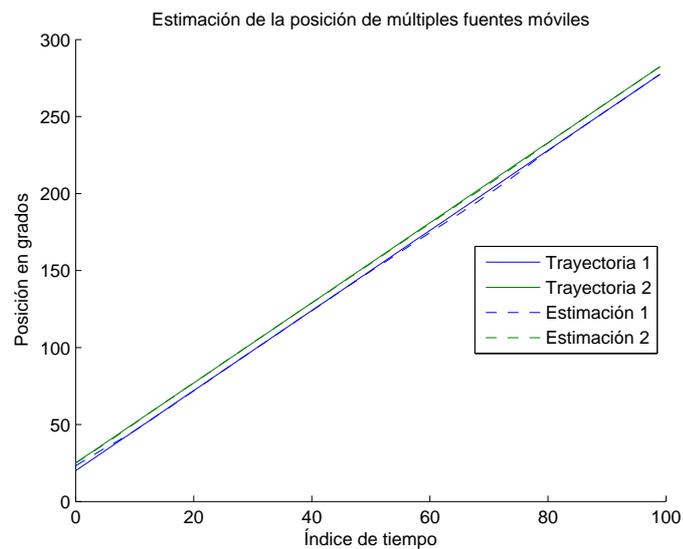


Figura 25. Estimación de la trayectoria de fuentes con misma velocidad, separadas por 5 grados.

IV.4.5. REMII. Múltiples fuentes móviles

La exactitud del estimador se ve afectada en un escenario en el que existen múltiples fuentes móviles. La figura 26 muestra el resultado de la simulación con 9 fuentes, las cuales tienen la misma velocidad de 0.6 grados por muestra. Se puede observar como la

estimación se lleva de manera adecuada en las primeras 80 muestras; sin embargo, para aquellas fuentes cuya separación es pequeña, la estimación tiende a separarse del valor real. Con esto se puede concluir que, para el correcto funcionamiento del algoritmo en un escenario con múltiples fuentes, la mínima separación entre fuentes debe aumentar a por lo menos 10 grados.

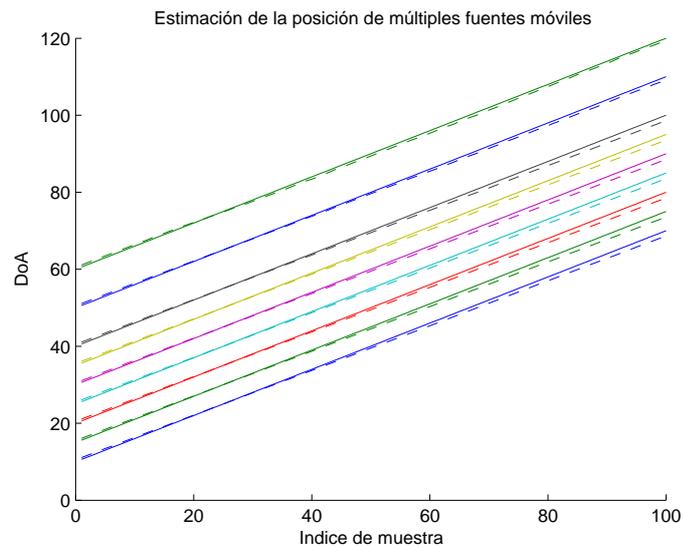


Figura 26. Estimación de la trayectoria de 9 fuentes con la misma velocidad.

IV.4.6. REMII. Alta movilidad

Dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas, se desarrolló otro proyecto de investigación que permitió una buena estimación de fuentes móviles empleado el algoritmo LPA [Félix Baldenegro, 2008]. Con dicho algoritmo, se pudieron obtener buenos resultados ante un escenario en donde las fuentes presentaban velocidades de hasta 5 grados por muestra. En la figura 27 se presenta el comportamiento del algoritmo REM ante fuentes con velocidades de 5.7 y 8.7 grados/muestra.

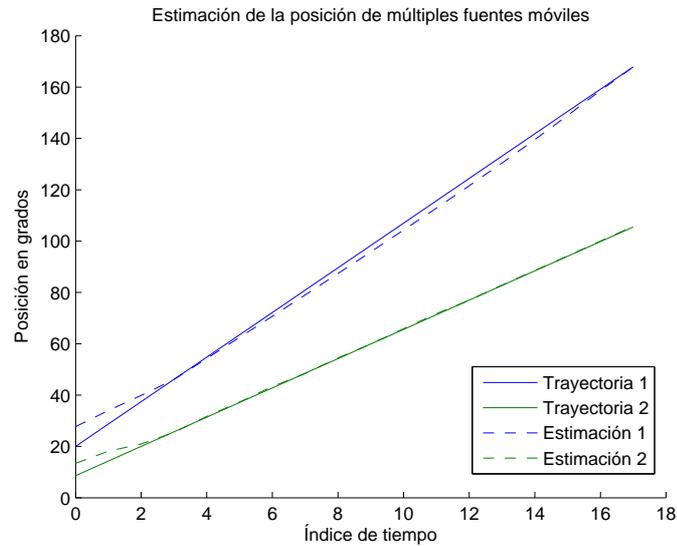


Figura 27. Estimación de la trayectoria de fuentes con alta movilidad.

Se puede apreciar como a partir de la cuarta muestra, el algoritmo es capaz de rastrear perfectamente a las fuentes, sin embargo, para que esto sea posible, las estimaciones iniciales deben ser muy cercanas al valor real. Esto debido en gran medida se tienen muy pocas muestras para estabilizar la estimación. Debido a la alta velocidad, la fuente se mueve una gran cantidad de grados en pocas muestras, de tal manera que en 18 muestras la fuente con velocidad de 8.7 grados/muestra recorre casi 180° .

El error a lo largo de la estimación se muestra en la figura 28. A diferencia de los escenarios anteriores, el error en la estimación de la fuente de mayor velocidad es relativamente alto, sin embargo tiende a disminuir.

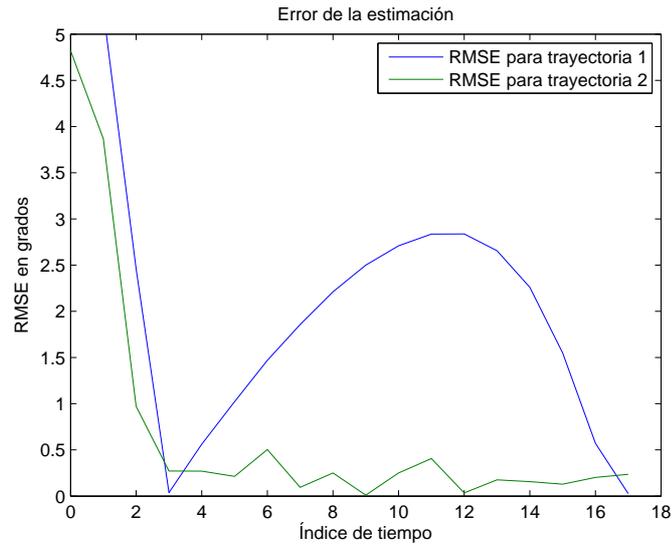


Figura 28. Error en la estimación de fuentes con alta movilidad.

IV.5. Conclusiones

En este capítulo se obtuvieron resultados que permitieron comprobar el desempeño del algoritmo REM, cumpliendo al 100% el objetivo planteado, el cual consistía en disminuir el tiempo de convergencia de un estimador de máxima-verosimilitud a tal grado que permitiese la utilización de estos estimadores en un escenario en donde las fuentes presentasen movilidad. Además se realizó una comparación con el algoritmo de aproximación de polinomio local y se demostró como el tiempo de convergencia del algoritmo REM fue en todo momento, menor al del algoritmo LPA.

Se observó que, ante fuentes estáticas, este algoritmo permite una buena estimación en un tiempo mucho menor al que utiliza ML convencional; incluso fue posible la estimación de la posición de una fuente más a las reportadas por Bonilla [Bonilla Hernández, 2005], demostrando que REM representa una mejora considerable a estimaciones de máxima-verosimilitud.

Ante escenarios con fuentes móviles, el algoritmo REMI tienen un buen comportamiento al seguir fuentes con una baja movilidad, pero falla notablemente cuando dos fuentes ocupan la misma posición angular. Para solucionar este problema, se utiliza el algoritmo REMII, el cual permite una muy buena estimación de las trayectorias aun cuando existe un cruce en las mismas. Este algoritmo mostró un buen comportamiento ante los diferentes escenarios mostrados anteriormente; sin embargo, es necesario mencionar que, a mayor complejidad de la estimación, se requiere de una mejor estimación inicial. Esto se ve claramente en las simulación ante fuentes con baja y media movilidad. En el primer caso, la estimación inicial de la velocidad fue 0, sin embargo, ante fuentes con mayor movilidad, la estimación inicial debe ser más cercana al valor real.

El estimador REMII mostró que, ante fuentes que ocupan la misma posición angular y cuya diferencia entre sus velocidades es muy pequeña, se obtienen muy buenas estimaciones del parámetro DoA, a diferencia de LPA el cual falla en distinguir a las fuentes. El tiempo de convergencia es otro aspecto que en el que REM supera a LPA ya que, como se mencionó anteriormente, LPA requirió de 90 segundos para obtener la figura 23, mientras que a REMII le tomó tan solo 12.7 segundos.

Un aspecto importante del estimador REMII es que permite una buena estimación de trayectorias cuando las fuentes presentan la misma velocidad siempre y cuando existe una distancia mínima entre ellas de al menos dos grados. Cuando la velocidad aumenta, esta distancia también debe aumentar para poder estimar de manera adecuada una trayectoria. Esta distancia mínima entre fuentes también se ve afectada por el número de fuentes a estimar, ya que, para nueve fuentes, fue necesario aumentar la

mínima distancia en al menos 10 grados.

Por último, se analizó el comportamiento de REMII ante fuentes con alta movilidad. En este escenario, REM también superó a LPA, sin embargo, para que la estimación sea adecuada, es necesaria una muy buen estimación inicial tanto de la velocidad como de la posición.

Con las simulaciones realizadas en este capítulo, se demuestra la robustez, eficiencia y rapidez de convergencia del algoritmo REM ante escenarios adversos, lo cual permite concluir que REM es una herramienta que promete realizar la estimación del DoA de múltiples fuente móviles en escenarios reales.

Es necesario recordar que el algoritmo REM no es un estimador eficiente, debido a que no utiliza la matriz de información de Fisher en el cálculo del parámetro, mas el error producido en cada uno de los escenarios mostrados es bastante aceptable.

Capítulo V

Conclusiones

En base al objetivo de este proyecto de investigación y tomando en cuenta la metodología establecida y el planteamiento del problema, se presentan a continuación las principales conclusiones y aportaciones a este trabajo.

V.1. En cuanto al modelado de la señal

En el capítulo II se hizo mención del modelo de señal que se utilizaría para este proyecto. Se estableció que para este proyecto de investigación se utilizarán señales de banda estrecha provenientes de múltiples fuentes ubicadas en campo lejano. Se optó por la utilización de un frente de onda plano, debido a la simplicidad que se reflejaría en la modelación matemática, ya que por primera vez dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas se trabajará un algoritmo basado en máxima-verosimilitud capaz de estimar fuentes con alta movilidad.

V.2. En cuanto a los métodos de estimación del DoA

En esta tesis se hizo mención de los diferentes métodos de estimación de fuentes trabajados dentro del Grupo de comunicaciones inalámbricas. Los principales son: métodos espectrales, métodos de máxima-verosimilitud y técnicas no paramétricas. a continuación se describirán las ventajas y desventajas que presentan cada uno de ellos.

- **Métodos espectrales.** Dentro de estos métodos se pueden mencionar como los más importantes a los métodos MUSIC, Root MUSIC y ESPRIT. Estos métodos presentan un buen desempeño ante condiciones favorables, pero fallan en entornos en donde la relación señal a ruido es baja. También su desempeño se ve afectado por la separación entre fuentes y por la cantidad de las mismas, llegando a ser imposible determinar la posición correcta de cada una de las fuentes. Por estas razones, se considera a los métodos espectrales métodos sub-óptimos.

Aunado a las desventajas anteriormente mencionadas, los métodos espectrales no permiten estimar la posición de fuente móviles a menos que se utilicen paralelamente otros algoritmos; sin embargo, la movilidad que se obtiene es del orden de 0.01 grado por muestra lo cual, para los resultados actuales es demasiado baja.

- **Métodos de máxima-verosimilitud.** A diferencia de los métodos espectrales, los métodos basados en máxima-verosimilitud son considerados métodos óptimos. Esto es debido a que la exactitud en la estimación de la posición de fuentes no se ve afectada por la relación señal a ruido, número de elementos de antena, número de fuentes y separación entre las mismas. Sin embargo, esta exactitud en la esti-

mación requiere de un gran costo computacional el cual imposibilita la estimación de más de dos fuentes estáticas. Este elevado tiempo de convergencia hace también imposible la estimación de múltiples fuentes móviles.

- **Técnicas no paramétricas.** Dentro del grupo de comunicaciones inalámbricas se ha trabajado con el algoritmo LPA el cual permite la estimación de la posición de fuentes móviles cuando no se conoce a priori a que distribución de probabilidad se ajustan los datos obtenidos. Con esta técnica se obtuvieron estimaciones de las posiciones de fuentes móviles con altas velocidades (5 grados por muestra) y una muy buena precisión con errores de 0.26 grados.

V.3. En cuanto al algoritmo REM

Los métodos basados en máxima-verosimilitud permiten obtener una muy buena estimación del parámetro DoA de múltiples fuentes, sin embargo su alto costo computacional hace imposible la utilización de estos métodos en entornos donde existe movilidad en las fuentes. Es por esta razón que surge el algoritmo esperanza-maximización recursivo, el cual utiliza un enfoque similar a muchos procesos de control en donde los datos son procesados en el momento en que son obtenidos. Este enfoque permite la aplicación en tiempo real para la estimación del parámetro DoA, a diferencia de los métodos mencionados en el capítulo II, en donde primeramente es necesario almacenar una cantidad suficiente de datos los cuales, posteriormente, deben ser procesados para poder estimar la posición de las fuentes.

El algoritmo está compuesto por dos partes principales, la matriz de información

aumentada y el vector de resultados. Como se mencionó en el capítulo III, para la modelación matemática del algoritmo REM se utilizó la matriz de información aumentada en lugar de la matriz de información de Fisher. Esto ocasionará que el estimador a utilizar no será considerado un estimador eficiente; es decir, existirá otro estimador que tenga una varianza menor. Sin embargo, la ventaja en utilizar la información aumentada de Fisher es la baja carga computacional, algo que repercutirá en el tiempo de procesamiento.

En la modelación matemática del algoritmo REM se desarrollaron dos conjuntos de ecuaciones. En el primero (algoritmo REMI), se considera completamente desconocido el modelo de movilidad de las fuentes, de tal forma que el algoritmo deberá estimar la posición en cada instante de tiempo. Para el segundo conjunto de ecuaciones (algoritmo REMII), se considera conocido el modelo de movilidad de las fuentes, en el cual éstas presentan un movimiento circular uniforme alrededor de la estación base.

Asumiendo que el esquema de movilidad es conocido, el algoritmo REMII deberá estimar la posición inicial de la fuente, así como su velocidad. Esto presenta la inmediata desventaja de que el algoritmo necesitará de dos buenas estimaciones iniciales, por lo que los métodos espectrales, que solo indican posición quedan descartados, siendo la única opción viable el método de LPA.

V.4. En cuanto a los resultados

En el capítulo IV se mostraron varios escenarios de simulación para determinar la robustez y el desempeño en general de los algoritmos REMI y REMII.

Se pudo comprobar como REMI es capaz de estimar con gran exactitud la posición de fuentes estáticas en un tiempo de 12.6 segundos, el cual es considerablemente menor a las 60 horas que requirió el algoritmo de esperanza-maximización convencional. También se puede observar como el error disminuye notablemente en una poca cantidad de muestras, de tal manera que a partir de la décima muestra el error de estimación para cada posición se ubica por debajo de 0.2 grados.

En un entorno cuyas fuentes presentan movilidad, REMI es capaz de rastrear fuentes de manera adecuada. sin embargo, cuando dos fuentes llegan a ocupar la misma posición espacial, el algoritmo es incapaz de distinguir entre ellas y por lo tanto el error en la estimación aumenta.

Cuando se utiliza el algoritmo REMII en escenarios con movilidad, se pudo apreciar que en todo momento la trayectoria de las fuentes se estimó de manera adecuada. A continuación se mencionan los aspectos más importantes en cada escenario de simulación:

- **Baja movilidad.** Considerando velocidades de 0.06, -0.1 y 0.05 grados por muestra, el algoritmo REMII fue capaz de rastrear perfectamente a las fuentes aún cuando la estimación inicial de la posición es cero. La estimación se realiza de manera adecuada incluso cuando existe un cruce en las trayectorias de las fuentes.
- **Media movilidad.** Para un escenario en donde la movilidad de las fuentes es mayor (0.6, -1 y 0.4 grados por muestra) el algoritmo REMII fue capaz de es-

timar adecuadamente la trayectoria de cada fuente, sin embargo, el uso de una estimación inicial para la velocidad es necesaria.

- **Pequeña diferencia en velocidad.** Cuando la diferencia entre las velocidades de dos fuentes es pequeña, el estimador REMII pudo estimar correctamente la trayectoria de las fuentes y discernir entre cada una de ellas. Se realizó una comparación con el algoritmo LPA en este aspecto demostrando que LPA perdía por completo su capacidad de distinción. Otro aspecto en el que REMII fue superior a LPA fue el tiempo de convergencia, la gráfica de contorno de LPA tomó 90 segundos en generarse, mientras que la estimación de la trayectoria para REMII tomó tan solo 12.7 segundos.
- **Múltiples fuentes con igual velocidad.** Es importante determinar la distancia mínima entre dos fuentes con igual velocidad, a la cual el algoritmo puede realizar una estimación precisa. Esta distancia resulta ser de 2 grados para velocidades relativamente pequeñas. Cuando la velocidad aumentó a 5 grados por muestra, la distancia mínima requerida también se incrementó a 5 grados.
- **Múltiples fuentes móviles.** Ante un escenario que involucra la estimación de la posición de múltiples fuentes móviles con velocidad de 0.6 grados por muestra, la distancia mínima para una correcta estimación se incrementó a 10 grados. Una distancia menor, llevaría a una estimación correcta durante las primeras muestras, pero la tendencia del error a aumentar es constante, de tal manera que llegará el punto en el que el algoritmo no sea capaz de distinguir entre las fuentes.

- **Alta movilidad.** El último escenario de simulación consiste en fuentes cuya movilidad es relativamente alta. El algoritmo LPA permitió una correcta estimación ante fuentes con velocidades de 5 grados por muestra. REMII fue capaz de desempeñarse adecuadamente ante velocidades de 5.7 y 8.7 grados por muestra, superando en este aspecto al algoritmo LPA. Sin embargo, para que esta estimación y rastreo fuesen correctos, las estimaciones iniciales de velocidad y posición deben ser muy cercanas al valor real, de otro modo, el algoritmo no podría realizar un rastreo adecuado de la trayectoria de las fuentes.

Ante los escenarios descritos anteriormente, REM fue capaz de realizar estimaciones de las posiciones con un mínimo error, sin embargo, algo que es importante mencionar es que a medida que el algoritmo enfrenta situaciones más exigentes en los términos arriba mencionados, la necesidad de estimaciones iniciales más cercanas al valor real se vuelve indispensable.

Con las estadísticas mostradas y el análisis realizado, este proyecto de investigación cumple de manera satisfactoria con los objetivos planteados. En un esfuerzo por obtener información que permitiese ir más allá de dichos objetivos, se presentan estadísticas que permiten comprobar el comportamiento del algoritmo REM en escenarios adversos, como el caso de alta movilidad, alto número de fuentes y separación entre fuentes.

V.5. Trabajo a futuro

El bajo tiempo de convergencia del algoritmo REM permite llevar la estimación de la posición de fuentes ante escenarios en donde existe movilidad de estas. En este proyecto de investigación, por ser la primera vez que se analiza este algoritmo dentro del grupo, el escenario de simulación se simplificó lo más posible, sin embargo, fue posible generar estadísticas que permitieron comparar el método REM con LPA y poder precisar la superioridad del primero.

Las estadísticas mostradas en este proyecto permiten definir las limitaciones del algoritmo REM, las cuales pueden ser trabajadas en proyectos a futuro. La principal limitación consiste en la dependencia de las condiciones iniciales. Una buena aportación a este algoritmo sería modificarlo para que no sea tan susceptible a dichas estimaciones iniciales.

Como se mencionó anteriormente, el escenario de simulación se simplificó lo más posible de tal forma que, para llevar este trabajo a un escenario más real, se necesitaría trabajar con fuentes en campo cercano, utilizando señales no determinísticas y modificar el esquema de movilidad para incluir aceleraciones en las velocidades de las fuentes.

Referencias

- Arceo, J. G., Covarrubias, D. H., y Luna, J. (2006). Efficiency evaluation of the unconditional maximum likelihood estimator for near-field source doa estimation. *ETRI*, **28**(6): 761–769.
- Arceo Olague, J. G. (1999). *Desarrollo de algoritmos para la síntesis del diagrama de radiación en comunicaciones móviles celulares basadas en antenas inteligentes*. Tesis de doctorado, Instituto Politécnico Nacional, Escuela superior de ingeniería mecánica y eléctrica unidad Culhuacan, D.F., México. 96 pp.
- Balanis, C. A. (2005). *Antenna theory: Analysis and design*. John Wiley and Sons Inc, New Jersey, tercera edición. 1045 pp.
- Bonilla, D., Covarrubias, D. H., y Arceo, J. G. (2006). Mejora de la resolución de fuentes en campo cercano por medio del estimador uml. *IEEE Latin America Transactions*, **4**(6): 1–6.
- Bonilla Hernández, D. (2005). *Modelado y simulación de la aproximación de máxima verosimilitud (ML) incondicional en la determinación del DoA en campo cercano*. Tesis de maestría, CICESE, Ensenada, B.C, México. 103 pp.
- Cekli, E. y Cirpan, H. A. (2001). Deterministic maximum likelihood method for the localization of near-field sources: algorithm and performance analysis. *Electronics, Circuits and Systems*, **2**(2001): 1077–1080.
- Chen, H. F. (2003). *Stochastic Approximation and its applications*. Kluwer academic publishers, New York, primera edición. 359 pp.
- Chung, P.-J. y Böhme, J. F. (2001). Recursive em and sage algorithms. *Phys. Rev. Lett.*, **1**: 2–4.
- Chung, P. J. y Böhme, J. F. (2002). Doa estimation of multiple moving sources using recursive em algorithms. *Proc. IEEE Sensor array and multichannel signal processing workshop*, páginas 323–326. Washington, DC, EUA, Agosto 2002.
- Chung, P.-J., Böhme, J. F., y Hero, A. O. (2005). Tracking of multiple moving sources using recursive em algorithm. *Journal on applied signal processing*, **1**: 50–60.
- Covarrubias Rosales, D. H. (2008). *Antenas inteligentes para comunicaciones móviles celulares*. Apuntes de la asignatura Antenas inteligentes, Grupo de comunicaciones inalámbricas. CICESE, Ensenada, B.C, México.

- Dempster, A. P., Laird, H. M., y Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the e m algorithm. *Journal of the royal statistical society*, **39**: 1–38.
- Feder, M. y Weinstein, E. (1988). Parameter estimation of superimposed signals using the em algorithm. *Transactions on acoustics, speech and singal processing*, **36**(4): 477–489.
- Frenkel, L. y Feder, M. (1999). Recursive expectation-maximization (em) algorithms for time-varying parameters with applications to multiple target tracking. *IEEE transactions on signal processing*, **47**(3): 306–320.
- Félix Baldenegro, J. (2008). *Análisis de prestaciones de un sistema móvil CDMA empleando aproximación LPA en antenas inteligentes*. Tesis de maestría, CICESE, Ensenada, B.C, México. 87 pp.
- Jae, M. (2003). Tutorial on maximum likelyhood estimation. *Journal of Mathematical Psycology*, **47**: 90–100.
- Kay, S. M. (1993). *Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory*. Prentice Hall, New Jersey, primera edición. 581 pp.
- Liberti, J. C. y Rappaport, T. S. (1999). *Smart antennas for wireless communications*. Prentice Hall, New Jersey, primera edición. 376 pp.
- Mendoza, J. F., Covarrubias, D. H., y López, C. A. (2008). Localización espacial de fuentes en comunicaciones móviles empleando actualización sucesiva de subespacio. *IEEE Latin America transactions*, **6**(2): 123–129.
- Mendoza Montoya, J. F. (2006). *Estimación del DoA empleando métodos de rastreo de subespacio aplicados a music y esprit*. Tesis de maestría, CICESE, Ensenada, B.C, México. 68 pp.
- Miller, M. I. y Fuhrmann, D. R. (1990). Maximum-likelihood narrowband direction finding and the em algorithm. *Transactions on acoustics, speech and singal processing*, **38**(9): 1560–1566.
- Moon, T. K. (1996). The expectation-maximization algorithm. *IEEE signal processing magazine*, **13**(6): 47–60.
- Titterington, D. M. (1984). Recursive parameter estimation using incomplete data. *Journal of the royal statistical society*, **46**: 257–267.
- van Trees, H. L. (2005). *Optimum array processing. Part IV: detection, estimation and modulation theory*. John Wiley and Sons Inc, New York, primera edición. 1443 pp.
- Zacks, S. (1981). *Parametric statistical inference: basic theory and modern aproaches*. Pergamon, Oxford, primera edición. 387 pp.