

**Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada**



**ESTUDIO DEL ACOPLAMIENTO
ELECTROMAGNETICO A TRAVES DE UNA
APERTURA CIRCULAR NANOMETRICA EN EL
EXTREMO DE UNA FIBRA OPTICA RECUBIERTA
DE METAL**

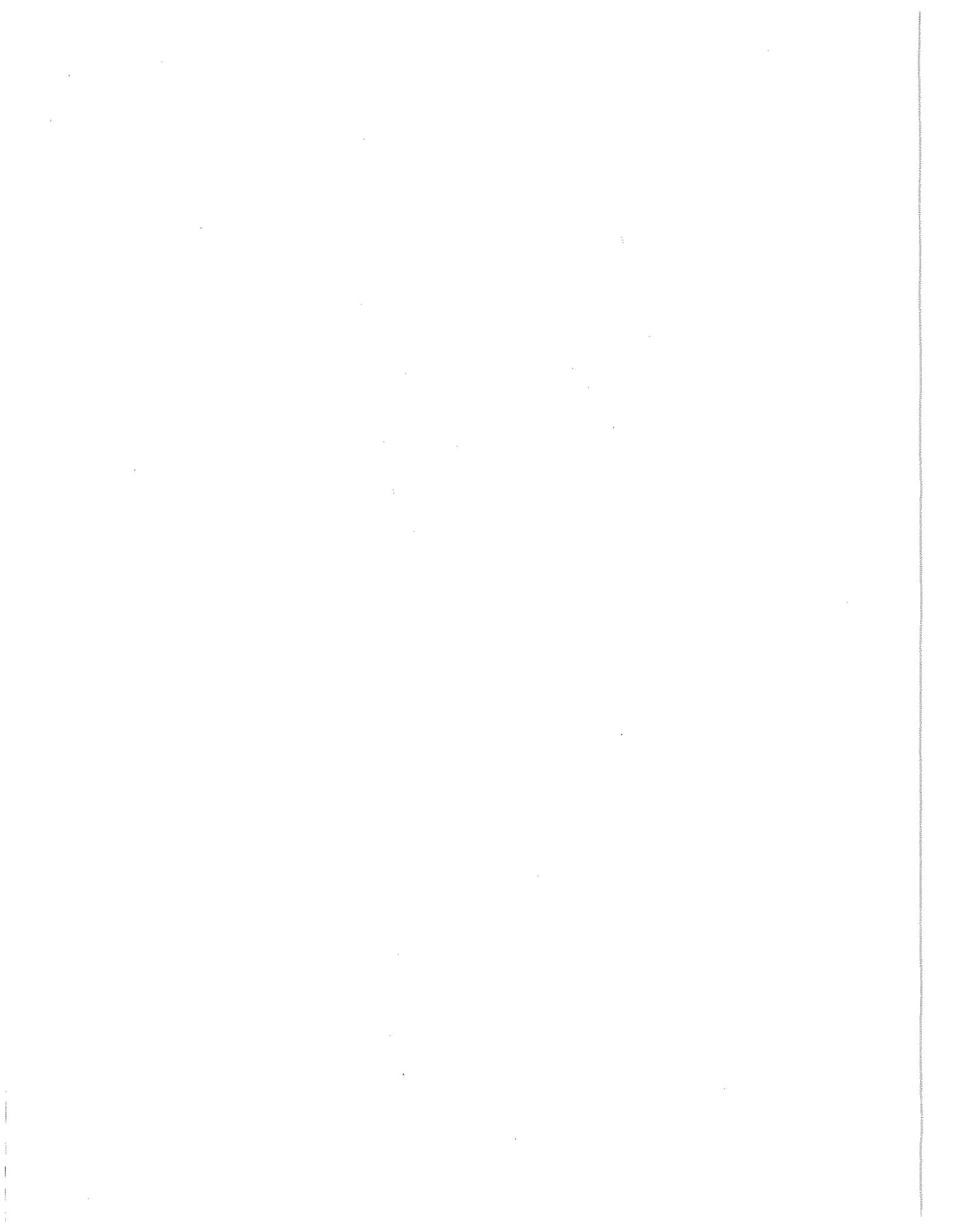
TESIS

DOCTORADO EN CIENCIAS

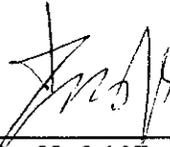
GUADALUPE LYDIA ALVAREZ CAMACHO

ENSENADA, B. C., ENERO DEL 2001.



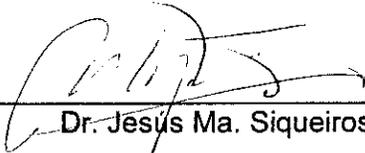


TESIS DEFENDIDA POR
GUADALUPE LYDIA ALVAREZ CAMACHO
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



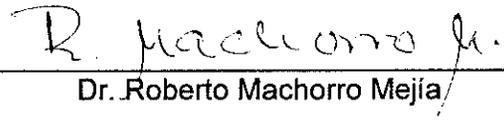
Dr. Mufei Xiao Wu

Director del Comité



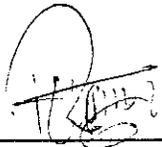
Dr. Jesús Ma. Siqueiros Beltrones

Miembro del Comité



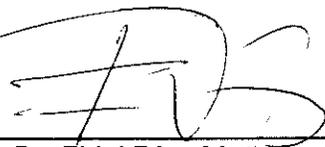
Dr. Roberto Machorro Mejía

Miembro del Comité



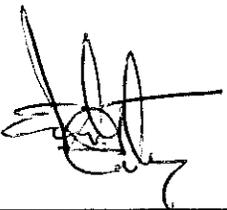
Dr. Ricardo Villagómez Tamez

Miembro del Comité



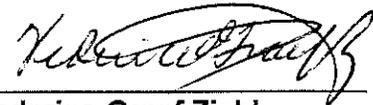
Dr. Fidel Díaz Muñoz

Miembro del Comité



Dr. Leonel S. Cota Araiza

*Jefe del Departamento de
Física de Materiales*



Dr. Federico Graef Ziehl

Director de Estudios de Posgrado

31 de enero del 2001

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE MATERIALES

**ESTUDIO DEL ACOPLAMIENTO ELECTROMAGNÉTICO A TRAVÉS DE
UNA APERTURA CIRCULAR NANOMÉTRICA EN EL EXTREMO DE UNA
FIBRA ÓPTICA RECUBIERTA DE METAL**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

GUADALUPE LYDIA ALVAREZ CAMACHO

Ensenada, Baja California, México. Enero de 2001

RESUMEN de la tesis de **GUADALUPE LYDIA ALVAREZ CAMACHO**, presentada como requisito parcial, para la obtención del grado de **DOCTOR EN CIENCIAS** en **FÍSICA DE MATERIALES**. Ensenada, Baja California, México. Enero de 2001

ESTUDIO DEL ACOPLAMIENTO ELECTROMAGNÉTICO A TRAVÉS DE UNA APERTURA CIRCULAR NANOMÉTRICA EN EL EXTREMO DE UNA FIBRA ÓPTICA RECUBIERTA DE METAL

Resumen aprobado por:



Dr. Mufei Xiao Wu
Director de tesis

RESUMEN

El propósito de este trabajo es desarrollar un modelo para puntas de fibra óptica recubiertas de metal que se usan como sonda en Microscopía Óptica de Campo Cercano (MOBCC). El modelo toma como base el desarrollado por Ann Roberts (1987) para difracción a través de pequeñas aperturas utilizando el Método de Momentos Directo (MMD). La novedad de este trabajo consiste en incluir la geometría de la fibra óptica y en calcular la transmisión de la energía tomando en cuenta solamente los modos guiados. Para conseguir esto, es necesario disponer de expresiones exactas de un conjunto ortonormal completo de modos para la fibra óptica.

Palabras clave: Pequeña apertura, Fibra óptica, Microscopía Óptica de Barrido de Campo Cercano.

ABSTRACT of the thesis of **GUADALUPE LYDIA ALVAREZ CAMACHO**, presented as partial requirement to obtain the **DOCTOR IN SCIENCES** grade in **PHYSICS OF THE MATERIALS**. Ensenada, Baja California, México. January 2001

**ELECTROMAGNETIC COUPLING THROUGH A NANOMETRIC
CIRCULAR APERTURE ON TOP OF A METAL COATED OPTICAL FIBER
TIP**

ABSTRACT

The purpose of this work is to develop a model for metal coated fiber tips, used extensively in Near-field Scanning Optical Microscopy. The proposed model is based in that developed by Ann Roberts (1987) for diffraction through small apertures, using the Direct Moment Method (DMM). The novelty of this work is the inclusion of the optical fiber geometry and the use of only the guided modes to calculate the transmission coefficient. To achieve this, it is necessary to develop exact expressions for a full orthonormal set of modes of the optical fiber.

Keywords: Small apertures, Optical fiber, Near-field Scanning Optical Microscopy.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a

ANTONIO LÓPEZ NAVARRO

y a todos los jóvenes brillantes que como él, abandonan sus estudios por causa de la miopía de nuestro sistema educativo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi comité de tesis, a mi asesor, al personal del **CCMC**, a mi familia y a mis amigos por todo el apoyo con el que he contado.

Quiero agradecer especialmente a aquellos **MAESTROS** que tuvieron una aportación significativa en mi formación académica y/o personal

JESÚS CATALÁN MORENO

EDUARDO SALCEDO GONZÁLEZ (q. e. p. d.)

VICTORIA DE UÑA

VERÓNICA CETTO KRAMIS

JOSÉ FIERRO QUIROZ

ANA MARÍA HERNÁNDEZ

FIDEL DÍAZ MUÑOZ

JOSÉ FRANCISCO MONTAÑO

LEONEL COTA ARAIZA

JESÚS SIQUEIROS BELTRONES

Agradezco también al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** la beca **#112187**, gracias a la cual pude realizar mis estudios de posgrado.

CONTENIDO

I. INTRODUCCIÓN	1
I.1 Planteamiento del problema	1
I.1.1 Antecedentes	1
I.1.2 Hipótesis	3
I.1.3 Perspectiva general	4
I.2 Microscopía óptica de barrido de campo cercano	6
I.2.1 Antecedentes históricos	6
I.2.2 Funcionamiento básico de un MOBCC	15
I.3 La punta de fibra óptica	21
I.3.1 Fibras ópticas	21
I.3.2 Puntas de fibra óptica	25
I.4 Modelos de detección	33
I.4.1 Modelos teóricos para MOBCC	33
I.4.2 Modelos de detección para puntas desnudas	35
I.4.3 Modelos de detección para puntas recubiertas de metal	41
II. MATERIALES Y MÉTODOS	49
II.1 Tratamiento modal de los campos electromagnéticos	49
II.1.1 Introducción	49
II.1.2 Expansión en ondas planas	56
II.1.2.1 Ejemplo: Representación de una onda plana simple	58
II.1.3 Los modos de la guía de onda cilíndrica de paredes conductoras	60
II.1.4 El conjunto ortogonal completo de modos de la fibra óptica	66
II.1.4.1 Introducción	66
II.1.4.2 Modos guiados	70
II.1.4.3 Modos radiativos	76
II.1.5 Productos interiores entre modos de distintos conjuntos	82
II.1.5.1 Modos de la apertura y modos de Rayleigh	82
II.1.5.2 Modos de la apertura y modos de la fibra óptica	84
II.2 El método de momentos	89
II.2.1 Introducción	89
II.2.2 El método de momentos con dos incógnitas	94
II.2.3 Onda electromagnética que incide en la interfaz entre dos medios	97
II.2.4 Onda electromagnética en un sistema con tres medios diferentes	101
II.2.5 Transmisión a través de una apertura circular	108
III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	114
III.1 Desarrollo del modelo	114
III.1.1 Procedimiento analítico	114
III.1.2 Procedimiento numérico	119
III.2 Cálculos numéricos	125

III.2.1	Corcordancia con modelos anteriores	125
III.2.2	Diferencias entre los coeficientes de transmisión de la apertura y de la fibra	130
III.2.3	Transmisión de la fibra con respecto al número de modos disponibles y a la altura del perfil	136
III.2.4	Dependencia de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia	142
IV.	CONCLUSIONES	150
	LITERATURA CITADA	155

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Un microscopio óptico convencional. Los lentes se representan sin referencia a su naturaleza física específica, como planos de redirección de los rayos.	7
2	MBT funcionando en modo de corriente constante. La señal de la imagen se obtiene de los valores almacenados de V_z, el voltaje aplicado al tubo piezoeléctrico. (Figura cortesía de José Valenzuela).	10
3	MOBCC de transmisión. Al reemplazar la fibra óptica por una barra pulida de cuarzo, se obtiene el diseño original de Pohl.	12
4	Microscopio Aurora de Topometrix. (Foto cortesía de Thermomicroscopes).	14
5	MOBCC de campo oscuro, también conocido como Microscopio de Barrido por Tunelaje de Fotones.	16
6	Seis configuraciones comunes para MOBCC. Los diagramas muestran los modos de (a) detección, (b) iluminación, (c) detección-iluminación, (d) detección oblicua, (e) iluminación oblicua y (f) campo oscuro. (Tomado de Near Field Optics, Paesler & Moyer, John Wiley).	17
7	Componentes de una fibra óptica. Las propiedades ópticas de la fibra dependen de las propiedades del núcleo y la cubierta, mientras que el forro sirve como protección.	21
8	Perfil de índices de refracción de una fibra óptica comercial. (Cortesía de 3M Telecom Systems Division).	22
9	Descripción geométrica del acoplamiento de luz en una fibra óptica. (a) Un modo radiativo. (b) Un modo guiado.	23
10	Representación esquemática de dos puntas de fibra óptica. (a) Fabricada por estiramiento. (b) Fabricada por ataque químico.	26
11	Esquema básico de un instrumento para fabricar puntas de fibra óptica por estiramiento. La formación de la punta se debe a calentamientos y estiramientos sucesivos, controlados electrónicamente.	27

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
12	Método de Turner. La fibra óptica se sumerge en una solución de HF diluida a la cual se le ha añadido una capa protectora de solvente orgánico. El solvente orgánico evita que la porción de la punta ya formada sufra de ataque posterior.	29
13	Cuatro tipos de puntas que pueden obtenerse por el método de Ohtsu. (a) Punta Ohtsu simple: ataque de un paso. (b) Punta Ohtsu con la región plana reducida: ataque de dos pasos. (c) Punta en forma de lápiz. (d) Punta de ápice plano.	31
14	Modelo electromagnético. Para obtener la señal detectada se integra el vector de Poynting sobre toda la superficie de la punta.	35
15	Modelo de esparcimiento. La punta se divide en tres zonas: el ápice es un centro de esparcimiento, el filo es la zona de detección y el cuerpo de la fibra es la zona de guiado.	37
16	Modelo de esparcimiento para puntas fabricadas por estiramiento. Los lóbulos indican las intensidades de distribución del esparcimiento de Rayleigh para ondas evanescentes y homogéneas.	38
17	Tratamiento modal del acoplamiento electromagnético en una punta de fibra óptica fabricada por estiramiento. El ápice se considera un sistema de fibra óptica donde la cubierta juega el papel de núcleo y el aire juega el papel de cubierta.	39
18	Difracción a través de una apertura circular. La pantalla metálica se considera de extensión infinita, mientras que su grosor se supone despreciable. (a) Geometría del obstáculo. (b) Sección transversal.	41
19	Difracción a través de una apertura circular gruesa. Se hacen las mismas suposiciones de la figura anterior, pero se toma en cuenta el grosor finito de la pantalla metálica. (a) Geometría del obstáculo. (b) Sección transversal.	43
20	Representación esquemática del modelo de Roberts. El espacio se divide en tres zonas. Zona 1: aire. Zona 2: una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras. Zona 3: aire.	44

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
21	Acoplamiento de luz en una punta de fibra óptica en forma de lápiz recubierta de metal. (a) Acoplamiento de un modo guiado. (b) Un modo radiativo no se transmite a través del cuerpo de la fibra.	46
22	Punta de ápice plano fabricada por el método de Ohtsu. (a) La punta real. (b) Su aproximación teórica.	47
23	Modelo presentado en este trabajo. El esquema es similar al de Roberts, con la diferencia de que la zona 3 representa ahora una fibra óptica.	48
24	(a) Una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras. (b) Vista frontal de la apertura de la guía.	60
25	Los modos se distinguen en horizontales y verticales de acuerdo a las características del campo eléctrico en el eje definido por $\phi=0$ y $\phi=\pi$. En la figura se muestran las direcciones de los campos eléctricos asociados con tres puntos A, B y C en ese eje. (a) En un modo horizontal el campo eléctrico en el eje no tiene componente azimutal. (b) En un modo vertical el campo eléctrico no tiene componente radial.	61
26	Representación de una fibra óptica que muestra los parámetros utilizados en la descripción de los modos. (a) Fibra óptica. (b) Vista frontal.	65
27	Componentes del vector de propagación de un modo de la fibra óptica. Compárese con la figura 9a.	67
28	Espectro de modos en una fibra óptica. Existe un cierto número de modos guiados y dos conjuntos continuos de modos radiativos. Los modos radiativos pueden ser propagantes o evanescentes.	68
29	Representación del problema de una onda que incide en la interfaz entre dos medios.	97
30	Una onda electromagnética en un sistema en que el espacio se divide en tres regiones	101

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
31	Sección transversal de la geometría del modelo de A. Roberts para la transmisión a través de una apertura circular perforada en una pantalla conductora gruesa.	108
32	Sección transversal de la geometría del modelo propuesto.	114
33	Estructura general del programa en Fortran que encuentra los coeficientes de transmisión t^a y t^g utilizando las ecuaciones (202) y (217). En azul están los datos que el programa lee y en rojo los que entrega.	121
34	Cálculos para el coeficiente de transmisión t^a de acuerdo al modelo de Roberts. Este modelo se implementó por medio de un programa similar al descrito en la figura 33.	125
35	Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0a=10$ y $n_{cu}=1$. Este caso idealizado se utiliza para hacer la comparación con el modelo de Roberts. Los diferentes valores de Δ tienen 15, 7, 4 y 0 modos guiados disponibles.	126
36	Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0a=5$ y $n_{cu}=1$. Este caso idealizado se utiliza para hacer la comparación con el modelo de Roberts. Los diferentes valores de Δ tienen 4, 3, 1 y 0 modos guiados disponibles.	128
37	Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0a=10$ y $n_{cu}=\sqrt{2}$. La gráfica marcada con negro muestra los resultados que se obtendrían si toda la zona 3 se llena con un vidrio con índice de refracción igual a n_{cu} . Los diferentes valores de Δ tienen 29, 15, 4 y 0 modos guiados disponibles.	130
38	Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0a=5$ y $n_{cu}=\sqrt{2}$. La gráfica marcada con negro muestra los resultados que se obtendrían si toda la zona 3 se llena con un vidrio con índice de refracción igual a n_{cu} . Los diferentes valores de Δ tienen 7, 4, 4 y 0 modos guiados disponibles.	132
39	Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0a=10$ y $n_{cu}=\sqrt{2}$, para valores pequeños de Δ . Los diferentes valores de Δ tienen 4, 4, 1 y 1 modo guiado disponible.	133

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
40	Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=5$ (7 modos guiados). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^{e} siempre es mayor para valores mayores de Δ .	136
41	Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=3.535$ (4 modos guiados). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^{e} siempre es mayor para valores mayores de Δ .	137
42	Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=2.5$ (4 modos guiados). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^{e} siempre es mayor para valores mayores de Δ .	139
43	Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=1.768$ (1 modo guiado). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^{e} siempre es mayor para valores mayores de Δ .	140
44	Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0a=10$ y $\Delta=0.167$ ($V=10$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.	142
45	Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0a=10$ y $\Delta=0.1$ ($V=7.07$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.	144
46	Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0a=10$ y $\Delta=0.055$ ($V=5$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.	146
47	Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0a=5$ y $\Delta=0.167$ ($V=5$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.	147
48	Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0a=5$ y $\Delta=0.1$ ($V=3.54$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.	148
49	Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0a=5$ y $\Delta=0.055$ ($V=1.77$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.	149

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
50	Sección transversal de la geometría de una versión avanzada del modelo que incluye la conicidad de las puntas reales. En este caso el espacio se divide en cinco o más zonas. Aunque esta versión requiere de cálculos algebraicos adicionales y es más pesada numéricamente, no es teóricamente más complicada que el modelo que se ha expuesto en este trabajo.	152

I. INTRODUCCIÓN

I.1. Planteamiento del problema

I.1.1 Antecedentes

En años recientes, se han desarrollado nuevas técnicas de microscopía que funcionan de forma diferente a la tradicional. Estos nuevos microscopios se conocen como Microscopios de Sonda de Barrido (MSB). Entre estos microscopios, el **Microscopio de Barrido de Campo Cercano (MOBCC)** destaca por utilizar la misma fuente de iluminación que los microscopios convencionales, esto es, la luz visible.

La configuración más conocida para el MOBCC utiliza una fibra óptica afilada que puede estar recubierta o no de metal. Esta **punta de fibra óptica** se utiliza para recorrer o *barrer* una muestra detectando a su paso la luz evanescente emitida por ésta. La información recolectada por esta sonda se utiliza para construir una imagen de la muestra.

Para poder construir correctamente esta imagen, es necesario conocer con precisión los detalles de la interacción muestra-luz-punta. Este es un problema electromagnético muy complejo, que no puede resolverse exactamente. Sin embargo, se han desarrollado algunas aproximaciones que han resultado útiles. Una de éstas consiste en separar el problema en dos: estudiar por una parte la interacción muestra-luz, y por otra la interacción luz-punta.

Ya que la forma de la muestra es por definición, desconocida, la atención se centra en ocasiones en estudiar la interacción luz-punta. Para esto se han utilizado muchos diferentes modelos, dependiendo de si la punta tiene o no recubrimiento metálico. Para puntas con recubrimiento metálico, la forma más sencilla de estudiarlas es utilizando las teorías de difracción a través de **pequeñas aperturas** circulares.

Se habla de una pequeña apertura, cuando las dimensiones de ésta son menores que la longitud de onda de la luz utilizada. En estos casos las teorías de difracción tradicionales, como la de Fraunhofer y la de Fresnel-Kirchhoff (Klein & Furtak, 1986) no pueden dar resultados válidos. Una teoría útil para aperturas de estas dimensiones es la de Bethe-Bouwkamp, (Bouwkamp, 1950) que se desarrolló para estudiar la difracción por orificios en las cavidades resonantes de los dispositivos de microondas.

La teoría de Bethe-Bouwkamp considera que el orificio se ha perforado en una pantalla conductora de extensión infinita, infinitamente delgada y con conductividad infinita. Existen otras teorías que utilizan otras suposiciones. En particular, el **modelo de Roberts** permite que la pantalla pueda tener un grosor finito. En este modelo, el espacio se divide en tres zonas. En las zonas I y III, que corresponden a espacio libre los campos se expanden en un conjunto ortonormal completo de modos de Rayleigh, mientras que en la zona II, que es el interior de la apertura se expanden en el conjunto discreto de modos de la guía de onda cilíndrica de paredes conductoras.

Los modelos de difracción a través de pequeñas aperturas son muy sencillos, sin embargo, no toman en cuenta el hecho de que en una punta real, el acoplamiento de luz no ocurrirá sólo al atravesar el recubrimiento metálico. La luz que atraviesa éste y llega hasta la punta de la fibra puede excitar ya sea **modos guiados** o modos radiativos. Sólo los modos guiados serán transportados a través de la fibra hasta el otro extremo y podrán ser detectados por el MOBCC. Para estudiar mejor el acoplamiento de luz en puntas de fibra óptica, sería deseable tomar en cuenta este efecto.

La modificación que se propone aquí para el modelo de Roberts consiste en reemplazar el espacio libre de la zona III por una guía de onda dieléctrica idealizada, que representará una fibra óptica. Ya que se pueden obtener los campos en la zona III como expansiones del conjunto ortonormal completo de modos de la fibra óptica, será posible separar la parte de la luz que al atravesar la apertura se acopla en modos radiativos de la que se acopla en modos guiados. Tomando en cuenta el hecho de que sólo los modos guiados podrán detectarse, puede calcularse la eficiencia del acoplamiento en una forma más precisa que en el modelo de Roberts, y todos los demás modelos basados en la difracción a través de pequeñas aperturas.

I.1.2 Hipótesis

“Si se dispone de un modelo que describa la estructura de los campos dentro de una fibra óptica y pueda separarlos en modos radiativos y guiados y si además se dispone de un modelo de difracción a través una pequeña apertura

circular, entonces es posible realizar un nuevo modelo en donde los campos que atraviesan la pequeña apertura se encuentren inmediatamente después con la fibra óptica y calcular entonces la proporción de la energía que después de atravesar la apertura se acopla en forma de modos guiados y utilizar este modelo para representar una punta de fibra óptica recubierta de metal, en una forma mejor que si se utilizara solamente el modelo de pequeña apertura.”

I.1.3. Perspectiva general

En el resto del **Capítulo I** se desarrollarán con más detalle todas estas ideas. En particular, la sección **I.2** está dedicada a la Microscopía Óptica de Campo Cercano, su historia y su funcionamiento básico. La sección **I.3** está dedicada a las puntas de fibra óptica, donde se discuten las propiedades de las fibras ópticas relevantes para el funcionamiento de una punta y así como las diferentes formas de fabricarlas, discutiendo las diferencias en sus propiedades. La sección **I.4** describe diferentes modelos que se han utilizado para las puntas de fibra óptica, y ubica al modelo aquí propuesto entre aquéllos basados en la difracción a través de pequeñas aperturas.

En el **Capítulo II** se desarrollarán las bases teóricas que se utilizan en el nuevo modelo. La sección **II.1** discute el tratamiento modal de los campos electromagnéticos. En particular, todos los conjuntos ortonormales completos necesarios para implementar tanto el modelo propuesto, como el modelo de Roberts pueden encontrarse aquí, así como los productos interiores entre modos de los diferentes conjuntos. Las expresiones encontradas en **II.1.4.3** y **II.1.5.2** fueron

desarrolladas especialmente para este trabajo. La sección II.2 discute el método de momentos, poniendo énfasis en conectar la explicación básica de la teoría (Wang, 1991) con la aplicación específica en el modelo de Roberts (1987). Los desarrollos encontrados en las subsecciones II.2.2, II.2.3 y II.2.4, se realizaron con este propósito. Finalmente la sección II.3 explica detalladamente el modelo de Roberts.

El **Capítulo III** está dedicado a plantear nuevo modelo en sí. La sección III.1 está dedicada a explicar en detalle en qué consiste este modelo. En la sección III.1-1 se aplican los materiales expuestos en el capítulo anterior para explicar el procedimiento teórico que conduce a los nuevos resultados. En la sección III.1-2 se explica brevemente el procedimiento que se realiza para obtener resultados numéricos. La sección III.2 está dedicada a presentar y discutir resultados numéricos obtenidos por medio de este modelo. La sección III.2-1 está dedicada a establecer la concordancia con el modelo con el de Roberts. En la sección III.2-2 se discutirán las principales diferencias encontradas entre la transmisión a través de modos guiados y la transmisión total a través de la apertura. En las secciones III.2-3 y III.2-4 se discute como varía la transmisión a través de modos guiados con respecto a parámetros materiales de la fibra y al ángulo de la luz incidente, respectivamente.

En el **Capítulo IV** se discutirán las conclusiones del trabajo junto con una propuesta de cómo mejorarlo. Al final se encontrará una lista alfabética de la bibliografía utilizada.

I.2 Microscopia óptica de barrido de campo cercano

I.2.1 Antecedentes históricos

Un microscopio es un instrumento que nos permite conocer detalles de la estructura de un objeto que no pueden percibirse a simple vista. Para cuantificar qué tan bien realiza esto un microscopio, se utiliza un parámetro llamado resolución. La resolución se define como la mínima distancia en que dos objetos puntuales pueden percibirse como separados.

Existen algunas referencias oscuras del mundo grecorromano sobre el uso de lentes para amplificar. Su redescubrimiento en el mundo moderno se puede situar a finales del siglo XIII, en Florencia, donde el uso de anteojos se popularizó rápidamente, extendiéndose después al resto de Europa.

La fabricación del primer microscopio compuesto (de dos lentes) se atribuye a Zacharias Jansen en Holanda, a finales del siglo XVI. Es durante el siglo XVII cuando se desarrolla el sistema de tres lentes, que sigue siendo típico en la actualidad (Slayter & Slayter, 1992). En la figura 1, se pueden observar los elementos fundamentales de un microscopio óptico convencional. La estructura básica ha cambiado poco desde el siglo XVII hasta la fecha, aunque lo que hoy en día se conoce como “lente” consiste en realidad en una combinación de lentes. A partir de entonces y hasta finales del siglo XIX, se realizaron avances que llevaron a obtener mejoras notables en la resolución.

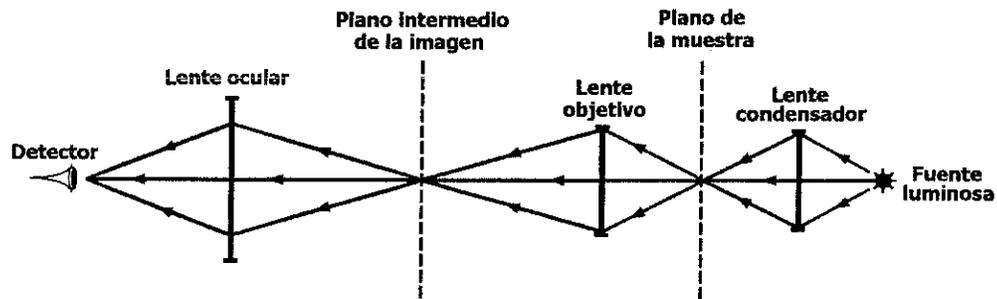


Figura 1: Un microscopio óptico convencional. Los lentes se representan sin referencia a su naturaleza física específica, como planos de redirección de los rayos.

Sin embargo, existe un límite a la resolución que puede obtenerse con un microscopio óptico convencional. En 1873, Abbe (y más tarde Rayleigh) explicó que esto ocurre a causa de la difracción de la luz a través del lente objetivo. La máxima resolución que puede obtenerse es del orden de la mitad de la longitud de onda de la luz utilizada, lo que equivale a $\sim 200\text{nm}$, para luz violeta (Born & Wolf, 1959).

A principios del siglo XX, se ideó utilizar luz ultravioleta para poder obtener resoluciones de $\sim 100\text{nm}$. Ya que la radiación ultravioleta no puede observarse directamente, debe grabarse en una emulsión fotográfica. Además, para enfocar los rayos ultravioleta, son necesarios lentes especiales, fabricados de cuarzo. Las dificultades eran tantas y el incremento en la resolución tan pequeño, que la técnica no fue muy popular en ese entonces. Actualmente, están disponibles lentes de cuarzo de más calidad que en ese entonces, mientras que la imagen puede desplegarse en un monitor de computadora.

Después del descubrimiento de las propiedades ondulatorias de las partículas se planteó la posibilidad de utilizar electrones acelerados para realizar microscopía.

En 1932 se construyó el primer prototipo de microscopio electrónico convencional o Microscopio Electrónico de Transmisión (MET). Este microscopio, utiliza voltajes del orden de kV para acelerar electrones, de modo que adquieran longitudes de onda muy pequeñas. Las lentes electrónicas son bobinas que al generar campos magnéticos pueden dirigir el haz electrónico. Pocos años después, el límite de resolución del microscopio óptico había sido sobrepasado. En la actualidad, se han alcanzado resoluciones de $\sim 0.1\text{nm}$. Sin embargo, el haz de electrones es demasiado agresivo con las muestras, además de que se requiere ubicar todo el sistema en vacío para evitar que los electrones acelerados pierdan su energía al chocar contra las partículas de aire.

Aproximadamente en el mismo orden de magnitud de la longitud de onda de los electrones acelerados, están los rayos X. En un principio, se descartaron como posibilidad para realizar microscopía, puesto que al no existir materiales que puedan refractarlos, no era posible construir lentes que pudieran enfocarlos. Sin embargo, en años muy recientes se han desarrollado sistemas tales como los discos zonales, y los lentes de reflexión con los que esto se ha hecho posible. Sin embargo, la microscopía de rayos X sigue a nivel experimental y la resolución obtenida hasta la fecha se encuentra todavía muy lejos del límite teórico. Además, los rayos X son casi tan agresivos con la muestra como el haz de electrones en un microscopio electrónico.

El uso de luz ultravioleta, rayos X o electrones acelerados puede incrementar la resolución de un microscopio, sin por ello sobrepasar el límite de Abbe-Rayleigh.

Durante mucho tiempo la idea más difundida era que este límite era fundamental y que sería imposible sobrepasarlo sin importar el nivel de desarrollo de la microscopía.

Sin embargo, en 1928 Syngge propuso una forma de sobrepasar el límite teórico a la resolución, es decir, de obtener superresolución. Su propuesta consistía en que si se consigue acercarse a una corta distancia de una muestra, una pequeña apertura (de dimensiones menores que la longitud de onda de la luz utilizada) se podría captar la información contenida en las ondas evanescentes. Los campos de las ondas evanescentes sólo son apreciables en las proximidades de la muestra, por lo que no son accesibles a la microscopía convencional. En 1956, en forma independiente, O'Keefe hizo la misma propuesta.

La implementación de las ideas de Syngge y O'Keefe con luz visible implicaba dificultades tecnológicas serias, por lo que los primeros intentos se realizaron con otro tipo de radiación. En el mismo 1956, Báez trató de obtener superresolución utilizando ondas acústicas. En 1972 Ash y Nichols demostraron completamente que la superresolución era posible. Utilizando microondas de $\lambda=30\text{mm}$, lograron una resolución de 0.5mm, que se encuentra muy por debajo del límite de Abbe-Rayleigh (Pohl, 1993; Paesler & Moyer, 1996).

El año de 1982 Binnig y su equipo construyeron el primer Microscopio de Barrido por Tunelaje (MBT). En la figura 2 puede verse la estructura básica de un MBT trabajando en modo de corriente constante. En este tipo de microscopio una punta metálica se aproxima a una distancia nanométrica de una muestra conductora mientras se aplica un pequeño voltaje entre las dos. La separación entre punta y

muestra es tan poca que la probabilidad de que los electrones de la muestra se transfieran por tunelaje cuántico a la punta es muy alta. Los electrones así transferidos generan la corriente I que depende fuertemente de la separación punta-muestra. En el modo de corriente constante, la corriente I se compara con un valor de referencia para obtener un voltaje de error V_z . Este voltaje se aplica al tubo piezoeléctrico, de modo que altere la distancia punta-muestra, provocando que la corriente I vuelva a tomar el valor de referencia. La trayectoria seguida por la punta, que queda registrada en los sucesivos valores de V_z sigue, en primera aproximación, la topografía de la muestra.

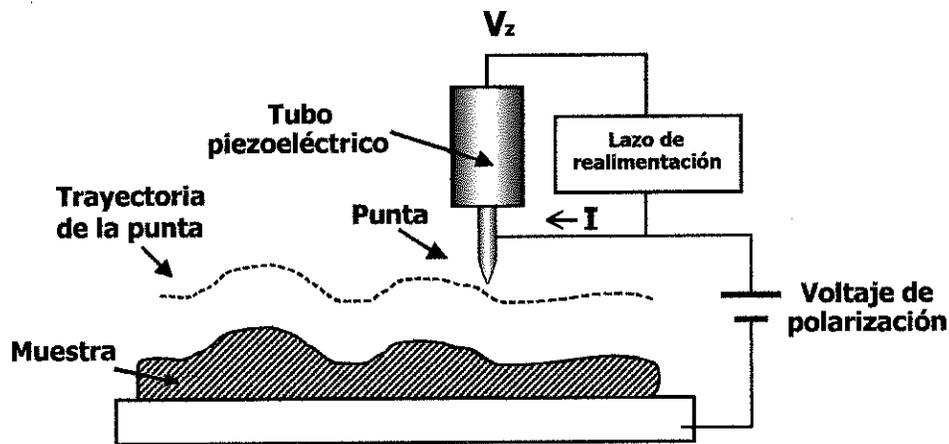


Figura 2: MBT funcionando en modo de corriente-constante. La señal de la imagen se obtiene de los valores almacenados de V_z , el voltaje aplicado al tubo piezoeléctrico. (Figura cortesía de José Valenzuela)

El MBT alcanza una resolución de ~ 0.1 nm, similar al MET, aunque ocupa menos espacio y no requiere de vacío para su funcionamiento, además de que también obtiene una resolución vertical de $\sim 0.1 \text{ \AA}$. Desafortunadamente, a pesar de que el MBT no utiliza un haz de electrones de alta energía, como el MET, el posible daño a las muestras sigue presente. Esto es debido a que al aplicar ~ 1 V entre punta y

muestra, cuando éstas se encuentran separadas por una distancia de $\sim 1\text{nm}$, se originan campos eléctricos de $\sim 100\text{kV/m}$. Otra desventaja consiste en que sólo se pueden analizar muestras conductoras.

La tecnología que permite el correcto funcionamiento de un MBT, consiste fundamentalmente en los dispositivos de control de posición fabricados a base de materiales piezo-eléctricos. Estos nuevos dispositivos permitieron que naciera una nueva familia de microscopios de funcionamiento muy similar al MBT. A estos microscopios se les conoce como Microscopios de Sonda de Barrido (MSB). Entre los MSB más destacados se encuentra el Microscopio de Fuerza Atómica (MFA) que registra la fuerzas de atracción entre una sonda flexible y la muestra, para generar una imagen de esta última. Otro miembro de la familia es el Microscopio Óptico de Barrido de Campo Cercano (MOBCC).

Uniendo la propuesta de Synge (1928) con la nueva tecnología del MBT, en 1984, Pohl y su equipo construyeron la primera configuración manejable de MOBCC al que llamaron “Estetoscopio Óptico” (Pohl *et al.*, 1984). En 1986 presentaron un arreglo mejorado, al que ya se le dio el nombre de Microscopio Óptico de Barrido de Campo Cercano (Dürig *et al.*, 1986). En la figura 3, se muestra un MOBCC de transmisión, muy semejante en estructura al diseñado por Pohl.

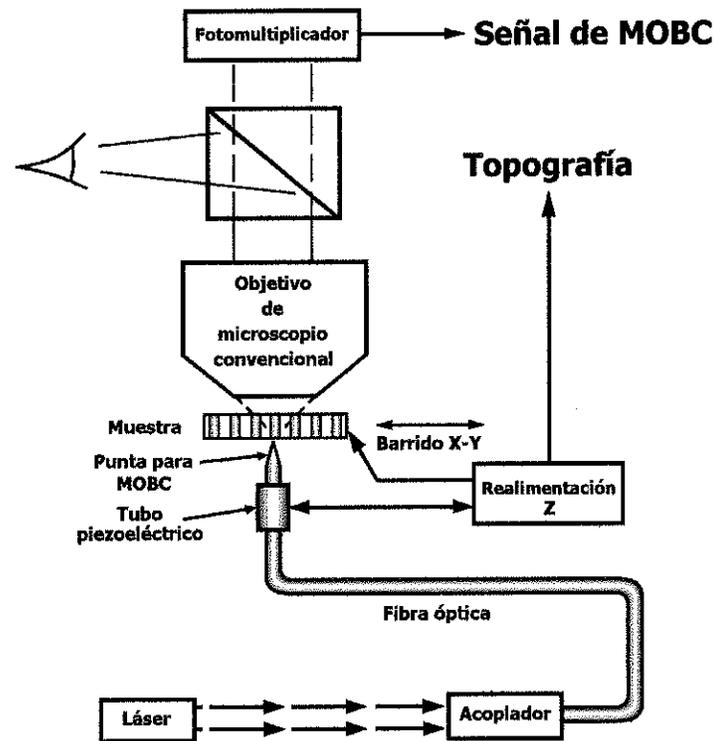


Figura 3: MOBCC de transmisión. Al reemplazar la fibra óptica por una barra pulida de cuarzo, se obtiene el diseño original de Pohl.

El núcleo del funcionamiento de un MOBCC es la punta de fibra óptica. Para crear esta punta, uno de los extremos de la fibra óptica se afila por medios mecánicos o químicos y se recubre posteriormente de metal, dejando sólo descubierta una pequeña apertura en su ápice. Un láser se acopla al interior de la fibra, y sale a través de la punta. Debido a las dimensiones por debajo de la longitud de onda de la pequeña apertura, la luz que sale por la punta está compuesta principalmente de campos evanescentes. Al iluminar la muestra con estos campos evanescentes, la interacción ocurrida, produce una combinación de campos evanescentes y propagantes al otro lado de ésta. La porción propagante de estos campos, se enfoca

por medio del objetivo de un microscopio convencional y se envía al fotomultiplicador. El diseño original de Pohl mantenía constante la distancia entre punta y muestra manteniendo constante una corriente de tunelaje entre el recubrimiento metálico de la punta y la muestra, que se espolvoreaba de metal para este efecto. Cuando esto se hace así, son las variaciones en la intensidad de la luz detectada por el fotomultiplicador en cada punto las que se utilizan para construir la imagen de la muestra.

Al explicar el funcionamiento del MBT se comentó que el voltaje V_z dependía, en primera aproximación de la topografía de la muestra. Esto es porque, si la muestra no es homogénea (como generalmente es el caso), el voltaje V_z también contiene información acerca de la variación de las propiedades electrónicas de la muestra. Del mismo modo, en un MOBCC, la intensidad detectada por el fotomultiplicador contiene información acerca de la variación en las propiedades ópticas de la muestra. Lo mismo ocurre con cualquiera de los microscopios de esta familia. Es por esto que, en muchas ocasiones, para tener certeza de la estructura topográfica de una muestra es necesario combinar varias técnicas.

La resolución que alcanza, hoy en día un MOBCC (~50nm), no es superior a la obtenida con un MBT, aunque con la ventaja de que el MOBCC puede analizar muestras no conductoras. Es cierto que el MFA obtiene resoluciones mejores y también puede analizar muestras no conductoras. Sin embargo, el hecho de que un MOBCC sea altamente sensible a las propiedades ópticas de una muestra, aunque puede ser una desventaja en ciertas situaciones, puede ser una ventaja en otras. A

pesar de que la resolución del MOBCC no es tan buena como la de sus compañeros, no existe otro instrumento que nos permita estudiar las variaciones microscópicas de las propiedades ópticas de un material. Esto abre el camino para el estudio de muchos fenómenos ópticos nuevos y también para aplicaciones tecnológicas novedosas.



Figura 4: Microscopio Aurora de Topometrix. (Foto cortesía de ThermoMicroscopes).

En la década de los 90, en la empresa Topometrix, bajo la dirección de Patrick J. Moyer, se diseñó el primer MOBCC disponible comercialmente (Paesler & Moyer, 1996). Hoy en día existen diferentes opciones en el mercado. En la figura 4, podemos apreciar el microscopio Aurora, de Topometrix. Este microscopio puede utilizarse tanto para propósitos de formación de imágenes como para caracterización de propiedades ópticas de los materiales.

I.2.2 Funcionamiento básico de un MOBCC

En cualquier MSB, una sonda o punta se acerca a una muestra a distancias nanométricas, para obtener una medida de la interacción entre ambas. La sonda debe trasladarse a distintos puntos de la muestra y realizar un recorrido (o barrido) sobre la superficie de ésta. Las medidas obtenidas en cada punto se almacenan y se utilizan para construir una imagen de la muestra. En general, en esta imagen hay información sobre la topografía de la muestra, mezclada en mayor o menor medida con información sobre las variaciones locales de alguna propiedad en la muestra.

En el caso de la MOBCC, puede obtenerse interacción óptica entre la punta y la muestra, en formas muy diversas. Estas variaciones dan lugar a diferentes configuraciones para los arreglos de MOBCC. Para explicar el funcionamiento básico de un MOBCC, se recurrirá a una de las configuraciones más típicas, que funciona en forma muy similar al MBT. Esta configuración fue desarrollada en 1988 por Courjon y Reddick, en forma casi simultánea, y se le conoce a veces como MOBCC de campo oscuro (Courjon *et al.*, 1989; Reddick *et al.*, 1989).

En la figura 5, podemos ver un MOBCC de *campo oscuro* tal como el implementado por Courjon. Un láser se acopla a través de un prisma al interior de una muestra transparente, a un ángulo tal que garantice que ocurra la reflexión total. Los campos evanescentes propios de la reflexión total, se encontrarán modulados por las irregularidades de la muestra. Cuando la sonda o punta de fibra óptica se acerca a un cierto punto de la muestra, los campos evanescentes se convierten en propagantes por medio de un proceso conocido como reflexión total frustrada. Los campos

propagantes se transmiten a través de la fibra óptica hasta llegar al detector (fotomultiplicador). La señal recibida en el detector se compara con un valor de referencia de modo que se genere una señal de error que se envía al tubo piezoeléctrico para que modifique la distancia sonda-muestra de modo que la señal recibida vuelva a tomar el valor de referencia. La señal de error que se utiliza en cada punto, se almacena y se utiliza posteriormente para construir la imagen de la muestra.

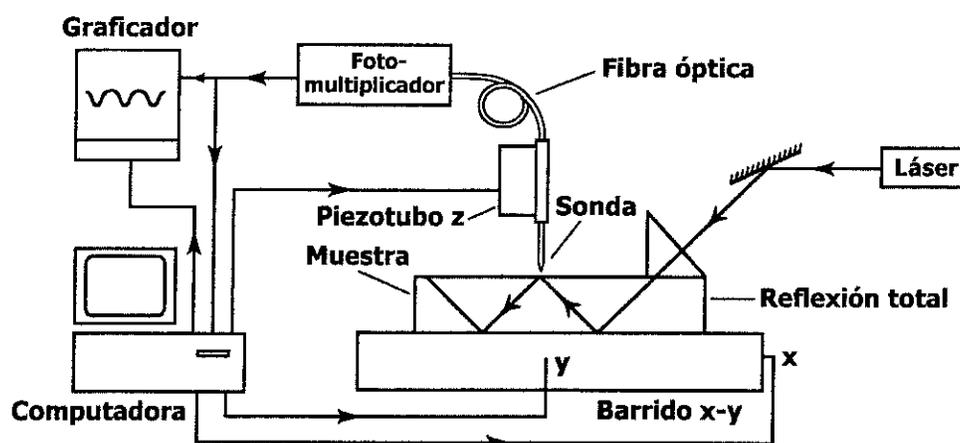


Figura 5: MOBCC de campo oscuro, también conocido como Microscopio de Barrido por Tunelaje de Fotones.

Puede notarse la gran similitud en el funcionamiento del MOBCC de campo oscuro y el MBT. La analogía puede aún llevarse más lejos considerando a los campos evanescentes como expresiones de las funciones de onda de los fotones confinados en la superficie de la muestra. Cuando la punta de fibra óptica se acerca a la muestra, penetra en la región en que estas funciones de probabilidad tienen un valor apreciable, por lo que se establece una corriente de fotones. Debido a estas

similitudes, el MOBCC de campo oscuro se conoce más familiarmente como 'Microscopio de Barrido por Tunelaje de Fotones (MBTF).

Si bien todas las configuraciones de MOBCC utilizan la tecnología desarrollada para el MBT, no en todas el funcionamiento es tan similar. El funcionamiento del MOBCC de transmisión presentado en la subsección anterior representa uno de estos casos. En esa configuración, la punta de fibra óptica no funciona como sonda sino como sistema de iluminación, mientras que la detección de la señal se realiza por medios convencionales.

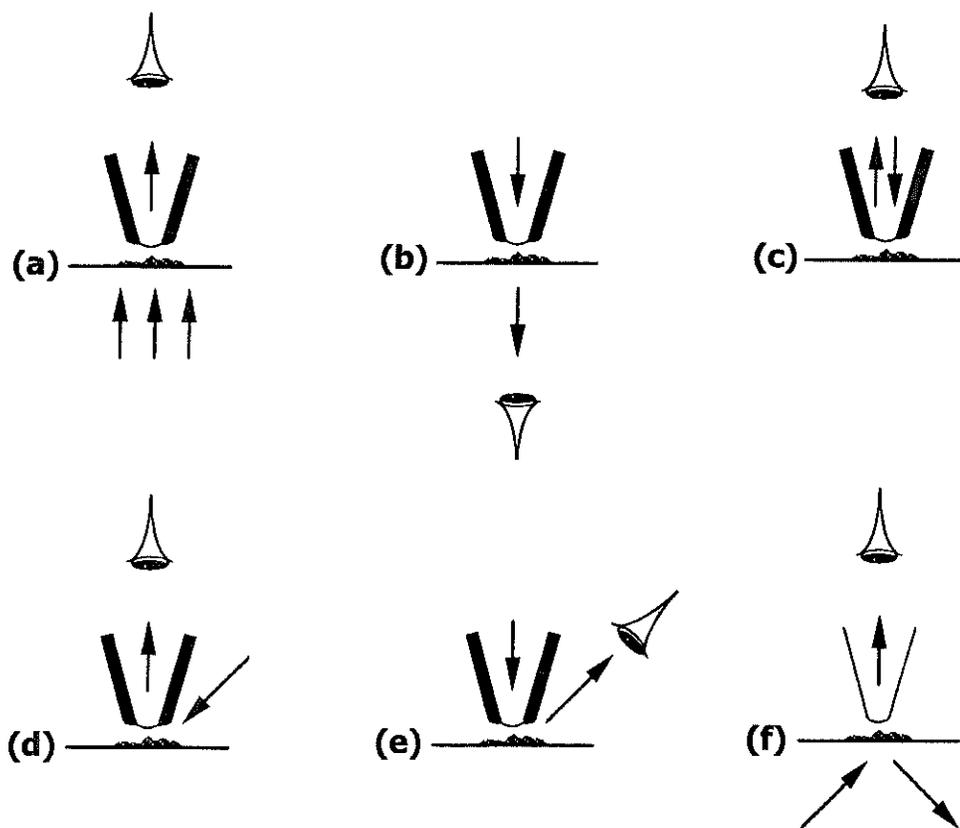


Figura 6: Seis configuraciones comunes para MOBCC. Los diagramas muestran los modos de (a) detección, (b) iluminación, (c) detección-iluminación, (d) detección oblicua, (e) iluminación oblicua y (f) campo oscuro. (Tomado de Near Field Optics, Paesler & Moyer, Jhon Wiley and sons)

Las diferentes formas en que la MOBCC se puede implementar dependen fundamentalmente de la forma de interacción entre punta y muestra. En la figura 6 se describen las seis configuraciones más típicas (Paesler & Moyer, 1996). En el *modo de detección* (a) la iluminación se realiza por medios convencionales y la punta se utiliza como detector. En el *modo de iluminación* (b, el caso del microscopio de Pohl) la punta se utiliza para iluminar y la detección se realiza en forma convencional. En el *modo de detección-iluminación* (c), la punta tiene las dos funciones. En *modo de detección oblicua* (d), la iluminación convencional incide sobre la muestra a un cierto ángulo, de forma que la punta pueda detectar la luz reflejada por la muestra en dirección normal. El *modo de iluminación oblicua* (e) la punta es la que ilumina, y se detecta la luz reflejada por la muestra, a un cierto ángulo. En el *modo de campo oscuro* (f, el MBTF) se ilumina la muestra de forma que ocurra la reflexión total, y la punta se aproxima para que pueda convertir las ondas evanescentes en propagantes y así obtener una señal.

Existen otras formas de clasificar las configuraciones. Por ejemplo, si atendemos a la trayectoria que sigue la iluminación con respecto a la muestra, podemos hablar de MOBCC de transmisión y MOBCC de reflexión. En la *MOBCC de transmisión* (figuras 1a, y 1b) la sonda detecta la luz que atraviesa la muestra. Otra forma común definir esto es mencionar que la iluminación y la detección se realizan en lados opuestos de la muestra. En la *MOBCC de reflexión* (figuras 1c, 1d y 1e) la punta detecta la luz reflejada por la muestra. Una forma alternativa de definición menciona que la iluminación y la detección ocurren del mismo lado de la muestra.

Estrictamente hablando, la configuración 1f corresponde a un MOBCC de transmisión. Sin embargo, es más común encontrar el término más confuso de “MOBCC de reflexión interna”, para referirse a ésta.

Una característica importante para la MOBCC es la forma en que se realiza la retroalimentación. En el MOBCC de campo oscuro de la figura 5, la realimentación consigue que la intensidad detectada por el fotomultiplicador se mantenga constante, mientras que la señal de error se utiliza para construir la imagen. En este caso hablamos de un *modo de intensidad constante*. (En el caso del MBT, al modo de operación análogo se le conoce como modo de corriente constante). En el MOBCC de transmisión de la figura 3, la distancia se mantiene constante por medio de un sistema de realimentación independiente y es la intensidad de luz detectada por el fotomultiplicador en cada punto, la que se utiliza para construir la imagen. En este otro caso hablamos de *modo de distancia constante*.

Cuando se trabaja en modo de distancia constante, la elección de un sistema adicional de control de distancia es fundamental. El MOBCC de la figura 3, utilizaba un control de distancia por corriente de tunelaje. Para que este control funcione, es necesario que tanto la punta como la muestra sean conductoras, lo que constituye una seria limitación. Un método más popular es el control de distancia por fuerzas cortantes. En este método, la punta se pone a vibrar a una de sus frecuencias resonantes. La vibración debe darse en dirección paralela a la superficie de la muestra, mientras la punta se acerca perpendicularmente a ésta. Cuando la punta se acerca a una cierta distancia específica, de $\sim 10\text{nm}$, la vibración se reduce

bruscamente. La razón de que esto ocurra no se conoce con certeza. En esta región, la amplitud de vibración de la punta depende fuertemente de la distancia punta-muestra. De este modo, si se consigue mantener constante la amplitud de vibración, la separación punta-muestra se mantendrá constante.

Ya se ha mencionado que en la señal utilizada para construir la imagen en un MOBCC, existe información mezclada sobre la topografía y las propiedades ópticas de la muestra. Cuando se trabaja en modo de intensidad constante, la separación de estas dos informaciones es difícil y requiere conocimiento previo de la muestra. Sin embargo, cuando trabajamos en modo de distancia constante, la señal de error utilizada en el método de control de distancia contiene mayoritariamente información topográfica. Esto es particularmente cierto cuando se utiliza control de distancia por fuerzas cortantes. De este modo, si se considera conocida la topografía de la muestra, pueden distinguirse fácilmente las variaciones de la intensidad en el fotomultiplicador debidas a la topografía por una parte, y a las propiedades ópticas de la muestra por el otro.

I.3 La punta de fibra óptica

I.3.1 Fibras ópticas

Una fibra óptica es una estructura dieléctrica que se utiliza para transportar energía en el intervalo visible del espectro electromagnético. En la práctica, una fibra óptica se aprecia como un cable casi transparente, de dimensiones similares a un cabello humano. En la figura 7 se pueden observar los tres componentes fundamentales de una fibra óptica: el núcleo, la cubierta y el forro. El núcleo y la cubierta, que se fabrican de vidrio, son los responsables del comportamiento de guía de onda de la fibra, mientras que el forro, fabricado de algún tipo de plástico, sirve para protección (Snyder & Love, 1983).



Figura 7: Componentes de una fibra óptica. Las propiedades ópticas de la fibra dependen de las propiedades del núcleo y la cubierta, mientras que el forro sirve como protección.

Para que una fibra óptica pueda transportar energía, es necesario que el índice de refracción del núcleo sea mayor que el de la cubierta. En la figura 8 se pueden apreciar los perfiles de índices de refracción de dos fibras ópticas comerciales, las FS-

SN-3224 y FS-VS-2614 de 3M. Puede observarse que en este caso, aparece una capa adicional a la que se le llama “cubierta exterior”. Sin embargo, es la interfaz núcleo-cubierta, la que determina las propiedades de la fibra. Ya que el índice de refracción en el núcleo es constante, se dice que estas dos fibras tienen *índice en escalón*. Existe otro tipo de fibras, en que el índice de refracción del núcleo varía en dirección radial, que se conocen como de *índice en gradiente*.

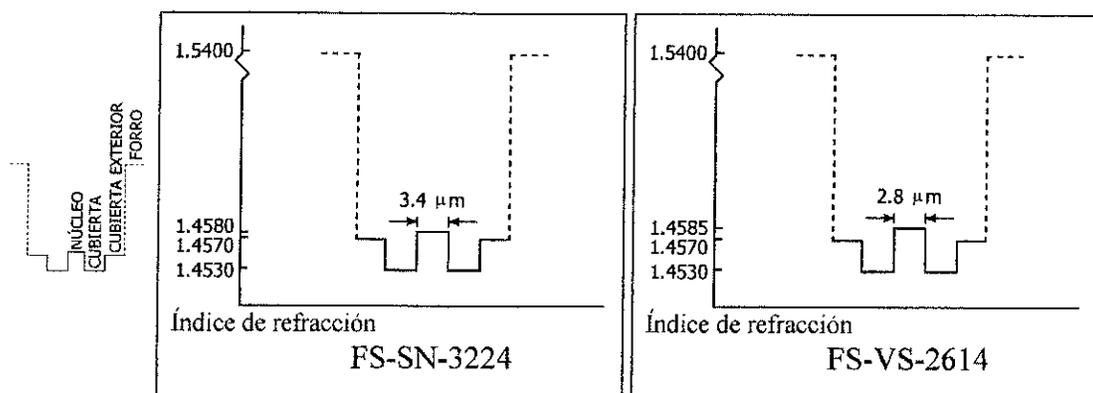


Figura 8: Perfil de índices de refracción de una fibra óptica comercial. (Cortesía de 3M Telecom Systems Division)

En la figura 9 se puede observar un esquema del mecanismo de transporte de energía dentro de una fibra óptica. Los ángulos θ_z y θ_t que forman el rayo incidente y el rayo refractado respectivamente, con el eje z , deben satisfacer la ley de Snell

$$n_{nu} \cos \theta_z = n_{cu} \cos \theta_t, \quad (1)$$

donde n_{nu} y n_{cu} son los índices de refracción del núcleo y la cubierta respectivamente.

El ángulo del rayo refractado, puede encontrarse a partir de

$$\theta_t = \cos^{-1} \left(\frac{n_{nu} \cos \theta_z}{n_{cu}} \right). \quad (2)$$

Cuando θ_t tiene un valor real, tenemos el caso de (a), en donde la energía se propaga fuera del núcleo en cada reflexión. Si el valor de θ_t no es un número real (b), no existe propagación neta de energía en dirección radial y se dice que ocurre reflexión total. Esto sucede siempre que $\theta_z < \theta_c$, donde

$$\theta_c = \cos^{-1} \left\{ \frac{n_{cu}}{n_{nu}} \right\}. \quad (3)$$

Como la onda no pierde energía al reflejarse, puede transmitirse dentro del núcleo por medio de reflexiones sucesivas, a través de grandes distancias.

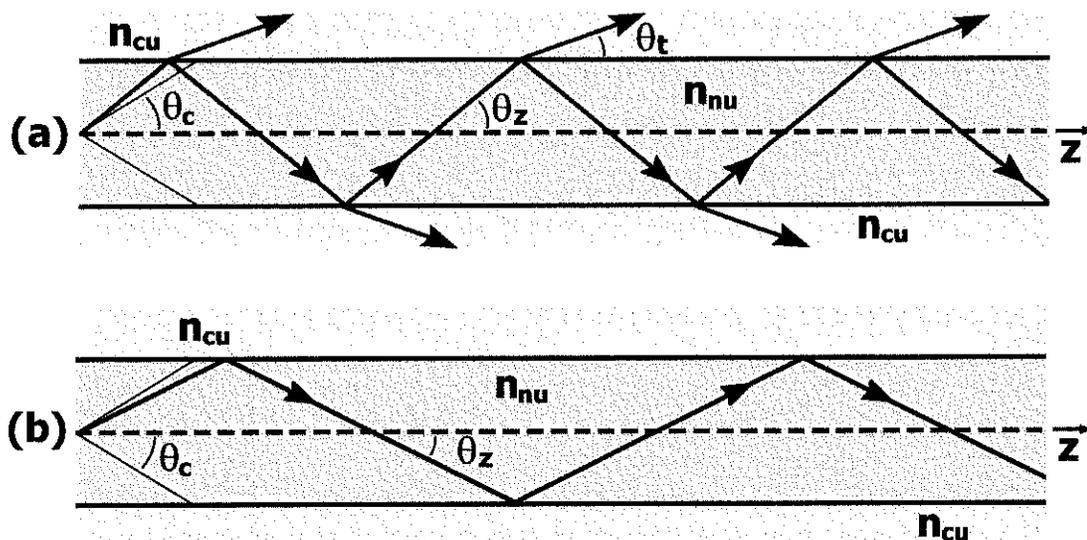


Figura 9: Descripción geométrica del acoplamiento de luz en una fibra óptica. (a) Un modo radiativo. (b) Un modo guiado.

Desde el punto de vista electromagnético resulta que al resolver las ecuaciones de Maxwell para las condiciones de frontera en una fibra óptica, se obtienen dos tipos de soluciones. Las soluciones que tienen un comportamiento como

en la figura 9a, se conocen como modos radiativos, mientras que el caso ilustrado en (b) corresponde a un modo guiado. Para toda fibra óptica existe un conjunto discreto (y finito) de modos guiados y dos conjuntos continuos de modos radiativos. La suma de los modos guiados más los radiativos pueden formar un conjunto ortogonal completo.

Un parámetro utilizado frecuentemente para describir las propiedades de una fibra óptica es la *altura de perfil* Δ , que se define como

$$\Delta = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{n_{cu}^2}{n_{nu}^2} \right\}. \quad (4)$$

Si Δ es mucho menor que uno, se dice que la fibra cumple la condición de *guiado débil*. Otro parámetro también importante es el *parámetro de la fibra* V que se define como

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} (n_{nu}^2 - n_{cu}^2)^{1/2} = k_{nu} a \sqrt{2\Delta} = k_{cu} a \sqrt{\frac{2\Delta}{1-2\Delta}}, \quad (5)$$

donde a es el radio del núcleo, λ es la longitud de onda de la luz utilizada y

$$k_{nu} = \frac{2\pi}{\lambda} n_{nu} \quad \text{y} \quad k_{cu} = \frac{2\pi}{\lambda} n_{cu} \quad (6)$$

son las constantes de propagación en el núcleo y en la cubierta respectivamente.

La cantidad de modos guiados que puede transmitir una fibra óptica está determinada por V . Para toda fibra óptica puede existir siempre al menos un modo (que existe en dos diferentes polarizaciones). A este único modo, que puede guiarse sin importar que tan pequeño sea el valor de V se le conoce como *modo fundamental*. Toda fibra de índice en escalón para la que $V < 2.405$ sólo puede guiar este modo

fundamental por lo que se clasifica como *unimodo*. Mientras mayor sea el valor de V existirán más modos que la fibra podrá guiar. Toda fibra para la que $V > 2.405$ puede guiar al menos dos modos. Cuando esto es así, la fibra se clasifica como *multimodo*.

Al utilizar los datos de la figura 8 se puede encontrar que la altura del perfil de la fibra FS-SN-3224 es $\Delta = 3.4 \times 10^{-3}$ mientras que la de la fibra FS-VS-2614 es $\Delta = 3.8 \times 10^{-3}$. Esto quiere decir que ambas cumplen la condición de guiado débil. Además también puede comprobarse que la primera fibra será unimodo para $\lambda > 532$ nm, mientras que la segunda deberá serlo para $\lambda > 438$ nm.

1.3.2 Puntas de fibra óptica

El elemento más importante de todo microscopio de barrido por sonda, es el elemento que tiene que interactuar con la muestra, es decir, la sonda misma. En los primeros arreglos de MOBC, se utilizaron gran variedad de sondas, desde barras pulidas de cuarzo, hasta los huecos en una película de aluminio. Sin embargo, la punta de fibra óptica es el tipo de sonda que más se usa en la actualidad. En esta sonda, además de que se cuenta con el elemento de interacción (la punta propiamente dicha), el cuerpo de la fibra sirve para guiar la señal detectada, resultado de la interacción, hasta el equipo de detección. En la figura 10 se pueden apreciar esquemáticamente dos diferentes puntas de fibra óptica. Sus diferentes configuraciones se deben a diferencias en el método de fabricación.

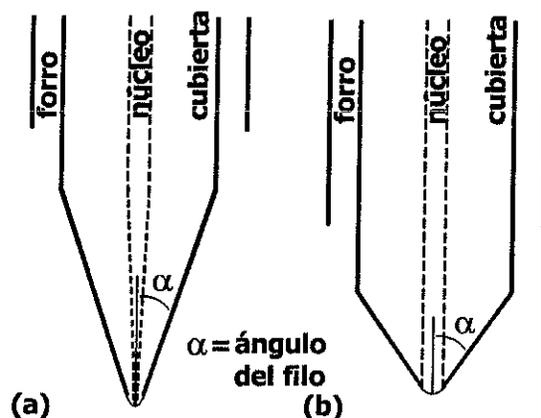


Figura 10: Representación esquemática de dos puntas de fibra óptica. (a) Fabricada por estiramiento. (b) Fabricada por ataque químico.

En muchos casos, la punta se recubre de metal en toda la región cónica, dejando solamente descubierta una pequeña sección en su ápice, de tal forma que funciona como la pequeña apertura propuesta por Synge. La zona descubierta de la fibra interacciona con la muestra, y la luz resultante de esta interacción se propagará a través de la región cónica, hasta el cuerpo de la fibra. La calidad de la punta de fibra óptica depende de muchos factores como su geometría, los índices de refracción de los materiales, el esparcimiento debido a irregularidades en la superficie y la absorción de luz en el recubrimiento metálico (Hoffman *et al.*, 1995). Es en el trayecto del ápice al cuerpo de la fibra (a través del filo) que ocurren la mayor parte de las pérdidas de energía capturada.

En la figura 11 se describe un método para fabricar puntas de fibra óptica. La fibra se sujeta de ambos extremos, de modo que pueda ejercerse una fuerza de estiramiento. La luz de un láser de CO_2 se enfoca en el centro de la fibra, de modo que pueda calentarse una pequeña región. Al mismo tiempo que se enciende el láser

se aplica sobre la fibra una fuerza relativamente débil. Cuando la fibra alcanza una velocidad prefijada, se apaga el láser y se aplica sobre la fibra una fuerza más intensa. Este proceso se repite hasta que los dos extremos de la fibra se separan y una punta se ha formado en cada uno de ellos. Ya que el nivel de calentamiento, la velocidad prefijada y las intensidades de las dos fuerzas pueden controlarse en cada ciclo, una selección apropiada puede servir para controlar la longitud de la punta, el ángulo del filo y el tamaño del ápice (Valaskovic *et al.*, 1995; Xiao *et al.*, 1997)

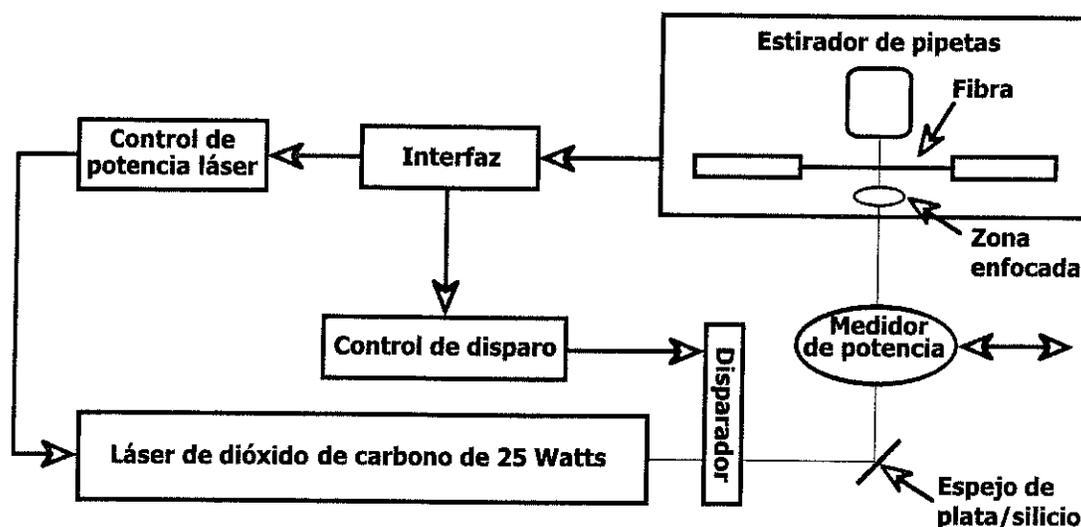


Figura 11: Esquema básico de un instrumento para fabricar puntas de fibra óptica por estiramiento. La formación de la punta se debe a calentamientos y estiramientos sucesivos, controlados electrónicamente.

El método descrito anteriormente se llama de estiramiento. En la figura 10a puede verse una punta fabricada por este método. Puede notarse que cuando ángulo del filo α es pequeño el ápice se encuentra muy alejado del cuerpo de la fibra, lo que produce bastantes pérdidas en el trayecto. Debido al estiramiento, el diámetro del

núcleo decrece junto con el diámetro de la fibra. Esto provoca que las características de guía de onda de la fibra óptica en el ápice, sean diferentes de las propiedades nominales de la fibra óptica.

Los métodos de ataque químico se basan fundamentalmente en sumergir un extremo de la fibra óptica en una solución ácida, de modo que se forme un cono debido a las reacciones químicas y la gravedad. Debido a que las fibras ópticas se fabrican generalmente de vidrio, es necesario utilizar ácido hidrofúorhídrico (HF), puesto que es el único ácido que puede atacarlo. Sumergir simplemente una fibra en una solución de HF al 49% produce efectivamente una punta. Sin embargo, las puntas obtenidas por este método resultan ser frágiles, por lo que se prefieren otros métodos más sofisticados.

Uno de los métodos más antiguos es el método de Turner del cual se presenta un esquema en la figura 12 (Turner, 1983). En este método, una solución diluida de HF se cubre con una capa protectora de solvente orgánico. El extremo de la fibra se sumerge dentro del ácido, de modo que la fibra empiece a cambiar de forma. Mientras la forma de la fibra va cambiando, el menisco formado entre la solución de HF y el solvente orgánico va cambiando también, de modo que la porción ya formada de la punta queda protegida de posterior ataque. Cuando la punta está completa, el menisco desaparece y la punta queda totalmente sumergida dentro de la solución protectora. Existe una variación de este método, donde la fibra se introduce al ácido por debajo, de modo que puedan utilizarse solventes orgánicos con densidades menores que las

del HF. El ángulo del filo de la punta obtenida depende del solvente orgánico utilizado.

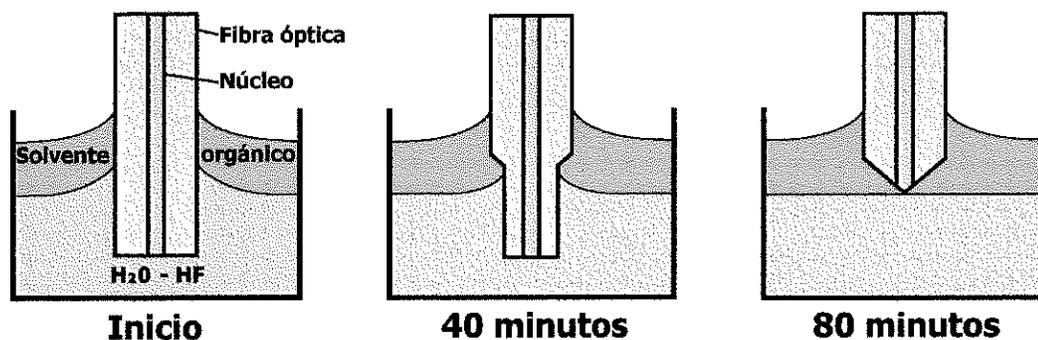


Figura 12 : Método de Turner. La fibra óptica se sumerge en una solución de HF diluída a la cual se le ha añadido una capa protectora de solvente orgánico. El solvente orgánico evita que la porción de la punta ya formada sufra de ataque posterior.

Una variación más reciente, con la que se han conseguido muy buenos resultados es el método de *ataque en tubo* que consiste en dejar el forro de la fibra, mientras se realiza el ataque (Lambelet *et al.*, 1998; Stöckle *et al.*, 1999). De este manera se producen puntas con una superficie más lisa, lo que facilita el recubrimiento metálico posterior. Una desventaja de todos los métodos basados en el de Turner, es que la forma final de la punta (particularmente su ángulo de filo) no es fácilmente controlable.

Otro método más versátil, desarrollado por Ohtsu, utiliza fibras con el núcleo contaminado, para las cuales una solución de HF atacará a velocidades diferentes al núcleo y la cubierta (Ohtsu, 1995). Para una fibra cuyo núcleo está contaminado con 0.22 fracción mol de GeO₂, el tiempo de ataque por HF del núcleo es mucho mayor que el tiempo de ataque de la cubierta. En este caso, la relación entre tiempos de

ataque de núcleo y cubierta, pueden controlarse por medio de una *solución amortiguadora*. Esta solución se prepara agregando una porción determinada en volumen (X partes) de una solución 40% en peso de NH_3F , a una parte de HF al 50% y una parte de agua. Para la fibra del ejemplo, una solución amortiguadora con $X=1.7$ atacará al núcleo y a la cubierta con la misma velocidad, mientras que soluciones con valores mayores de X atacarán más rápidamente a la cubierta.

Con el método de Ohtsu se pueden obtener puntas de formas muy diversas. Cuatro distintas formas pueden apreciarse en la figura 13. La punta de Ohtsu básica se obtiene por medio del ataque de un paso, que consiste en sumergir la fibra en una solución amortiguadora con $X>1.7$. Para valores tales de X , la cubierta se elimina rápidamente, mientras que el núcleo adquiere una forma cónica casi perfecta con ángulos de filo pequeños, como se muestra en la figura 13a.

La gran región plana en una punta Ohtsu puede dificultar la detección de los campos de una muestra. Por esto, resulta deseable reducir la extensión de esta superficie. Esto lo logramos por medio del ataque de dos pasos. El primer paso consiste en sumergir la fibra en una solución con $X=1.7$. Esto causará que el diámetro del extremo de la fibra se reduzca. El segundo paso consiste en sumergir la fibra en una solución con $X>1.7$, (es decir, realizar el método de un paso). La punta resultante se muestra en la figura 13b.

Las puntas en forma de lápiz y de ápice plano que se muestran en la figuras 13c y 13d, se obtienen por medio de métodos más elaborados. Para obtener la punta en forma de lápiz, Ohtsu desarrolló un método de ataque de cuatro pasos, mientras

que para obtener la punta de ápice plano, el método consta de tres pasos. Para obtener puntas de otras formas deseables, pueden implementarse otros métodos combinando etapas y diferentes valores de X .

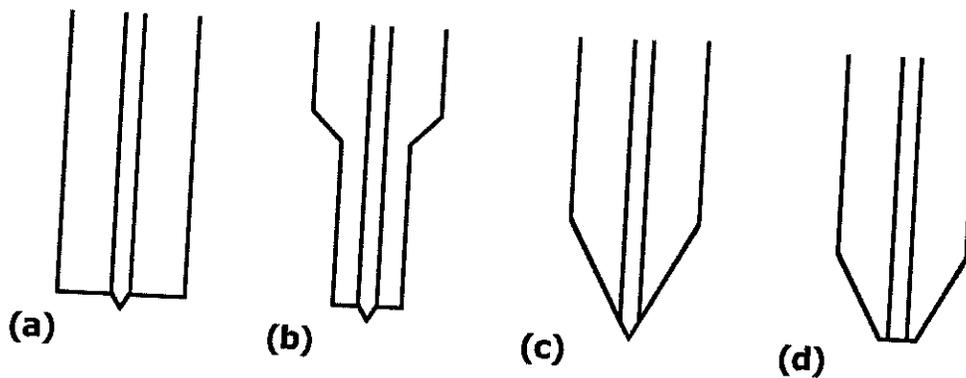


Figura 13: Cuatro tipos de puntas que pueden obtenerse por el método de Ohtsu. (a) Punta Ohtsu simple: ataque de un paso. (b) Punta Ohtsu con la región plana reducida: ataque de dos pasos (c) Punta en forma de lápiz. (d) Punta de ápice plano.

En una punta de fibra óptica, la región del filo es una región de pérdidas. Por esta razón, las puntas fabricadas por ataque químico transmiten más eficientemente la luz, que aquellas fabricadas por estiramiento lo que puede ser una ventaja en muchas ocasiones. Sin embargo, el diámetro del ápice de una punta fabricada por estiramiento es generalmente menor, lo que puede ser una ventaja en otras (Hoffman *et al.*, 1995).

Una diferencia cualitativa entre los dos tipos de puntas es que en una punta fabricada por el método de estiramiento, debido al estrechamiento del diámetro del núcleo, el parámetro V de la fibra óptica original se reduce en el ápice, llevando a una estructura modal diferente de la de la fibra original: una fibra multimodo probablemente tendrá un ápice unimodo.

En las puntas fabricadas por cualquiera de los dos métodos, existen diferencias si la punta se recubre o no de metal. El recubrimiento metálico en una punta provoca también cambios en la estructura modal de la sonda. En vez de tener un sistema de fibra óptica en el ápice, se tiene una pequeña guía de onda de paredes conductoras. Cuando el diámetro de la apertura en el recubrimiento metálico es demasiado pequeño, la guía de onda no puede transmitir ningún modo guiado, a diferencia de un sistema dieléctrico en el que siempre se puede transmitir al menos un modo.

I.4 Modelos de detección

I.4.1 Modelos teóricos para MOBCC

Un modelo teórico riguroso sobre la microscopía óptica de campo cercano es difícil de implementar. Implicaría resolver las ecuaciones de Maxwell en la muestra, el vacío, la punta y la fibra óptica. Un problema tal, que no cuenta con ninguna simetría, resulta una tarea muy complicada. Por esta razón se recurre a diversas aproximaciones.

Existen tantos diferentes enfoques para estudiar la MOBCC que es útil disponer de algún sistema de clasificación (Van Labeke, 1993). Cuando una teoría trata de estudiar al sistema punta-muestra como un todo, se dice que se trata de una teoría global. En otras ocasiones, el problema se divide en dos partes: primero se estudia la respuesta de la muestra a la iluminación y segundo, se estudia como detecta la sonda la luz difractada por la muestra. En este caso, se dice que se trata de una teoría no-global.

En un interesante ejemplo de teoría global, la simetría del sistema punta-muestra se aproxima por medio de un hiperboloide separado una corta distancia de un plano. Al utilizar coordenadas esferoidales prolatas, puede utilizarse el método de separación de variables para obtener soluciones exactas para el caso no-retardado (Denk & Pohl, 1991). En un ejemplo de teoría no-global, se calcula la respuesta de la muestra a la iluminación utilizando las ecuaciones de Maxwell, y después se modela la detección de la sonda con dos métodos distintos (Barchiesi & Van Labeke, 1993).

Los modelos teóricos también pueden clasificarse de acuerdo a otras características. Si en el modelo se hace uso de la estructura atómica de los materiales se dice que se tiene una teoría microscópica. Si por otra parte, se hace uso de parámetros macroscópicos, tales como la constante dieléctrica, se dice que se tiene una teoría macroscópica.

Los ejemplos arriba mencionados, corresponden a teorías macroscópicas. En un ejemplo de teoría microscópica, la punta y la muestra se consideran un conjunto discreto de centros de esparcimiento dipolares caracterizados cada uno por su polarizabilidad. El campo en cualquier punto debe ser igual al campo incidente más la suma de todos los campos esparcidos por cada uno de esos centros. Este planteamiento nos lleva a una ecuación auto-consistente que, al resolverse, proporciona la distribución de los campos en el sistema completo (Girard & Courjon, 1990). Ya que la punta y la muestra se consideran un solo sistema, este es también un ejemplo de teoría global.

Ya se explicó que en un modelo no-global, el problema total debe dividirse en dos partes. A la segunda parte del problema, que involucra la forma en que la sonda detecta la luz emitida por la muestra, se le llama *modelo de detección*. En un microscopio real, el perfil de la muestra no se conoce. Ya que, por otra parte, la estructura de la sonda es fundamentalmente conocida, un buen modelo de detección es un paso importante hacia la comprensión del funcionamiento de un MOBCC.

Como la mayoría de las sondas para MOBCC son puntas de fibra óptica, se han desarrollado muchos modelos de detección para éstas. Los modelos para puntas

desnudas y puntas recubiertas de metal son muy diferentes en su planteamiento. Cuando se tiene una punta desnuda, lo más común es considerar a su ápice como un centro de esparcimiento. En cambio para el caso de una punta recubierta de metal, los modelos de difracción a través de pequeñas aperturas son la mejor elección.

En algunas ocasiones, resulta útil analizar la detección en una punta, recubierta o no de metal, por medio de un tratamiento modal. En este caso, se considera que los campos acoplados dentro de la fibra sólo pueden existir en un determinado número de modos. Las expresiones para estos modos se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell, utilizando las condiciones de frontera apropiadas.

1.4.2 Modelos de detección para puntas desnudas

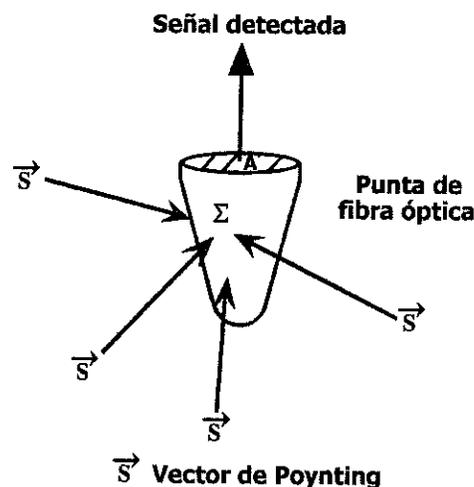


Figura 14: Modelo electromagnético. Para obtener la señal detectada se integra el vector de Poynting sobre toda la superficie de la punta.

El modelo de detección más evidente para una punta desnuda se conoce como modelo electromagnético y se muestra en la figura 14. Este modelo se supone que la

punta está formada por un dieléctrico no absorbente y que por tanto, el flujo de energía a través del área A , es igual al flujo de energía que incide sobre la superficie lateral de la punta Σ .

La densidad de flujo de energía de una onda electromagnética, en la dirección de propagación, se representa por medio del vector de Poynting de la onda, que está definido por

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (7)$$

donde \vec{E} y \vec{H} son el campo eléctrico y el magnético respectivamente. Para el caso específico de una onda plana monocromática y homogénea, la densidad de flujo de energía promediada en el tiempo es igual a

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2Z_0} E^2 \vec{s} \quad (8)$$

donde E es la magnitud del campo eléctrico, \vec{s} es un vector unitario en la dirección de propagación y Z_0 es la impedancia del espacio libre, definida por

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (9)$$

donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y la permeabilidad del espacio libre.

El flujo de energía total que atraviesa el área A puede calcularse integrando el vector de Poynting promedio sobre toda la superficie Σ . Algunos modelos integran E^2 en vez de $\langle \vec{S} \rangle$, lo que es inexacto puesto que la ecuación (7) no es válida para una onda electromagnética general (Van Labeke, 1993).

En la figura 15 puede apreciarse un esquema del modelo de esparcimiento, en que la sonda se divide en tres secciones. El ápice de la punta se considera un centro de esparcimiento, representado por una pequeña esfera, esto es, una esfera cuyo diámetro es menor que la longitud de onda de la luz utilizada. La parte cónica de la fibra se considera la zona de detección que recibe todos los campos esparcidos con ángulos menores que un cierto ángulo crítico. Por último, el cuerpo de la fibra se considera la zona de guiado, que transporta todos los campos que entraron a la fibra en la zona de detección. El campo difractado por el ápice puede calcularse utilizando el modelo de esparcimiento de Mie. Este modelo está basado en una expansión multipolar de ondas planas en ondas esféricas (Van Labeke, 1993).

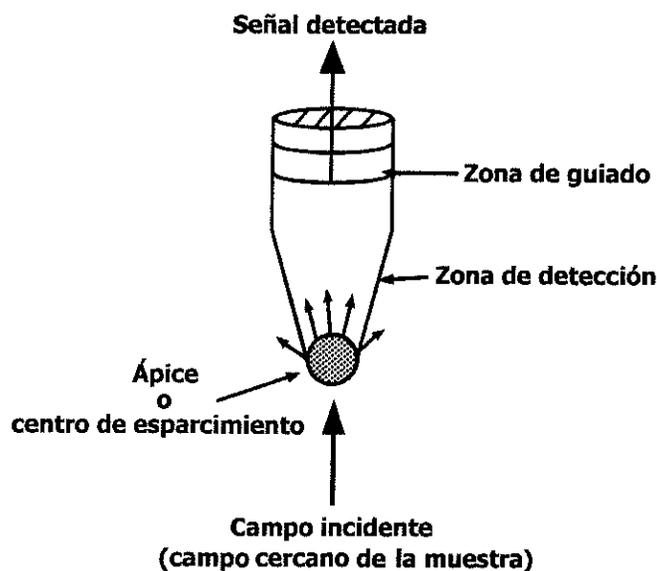


Figura 15: Modelo de esparcimiento. La punta se divide en tres zonas: el ápice es un centro de esparcimiento, el filo es la zona de detección y el cuerpo de la fibra es la zona de guiado.

El suponer al ápice como una pequeña esfera resulta conveniente cuando se está modelando una punta fabricada por el método de ataque químico. Para puntas

fabricadas por estiramiento, es mejor considerar al ápice como una región en que ocurre el esparcimiento de Rayleigh. El esparcimiento de Rayleigh ocurre en sustancias no cristalinas (tales como el vidrio, del cual se fabrican las fibras ópticas), debido a las variaciones locales en la permitividad que llevan a la creación de dipolos locales (Kittel, 1996).

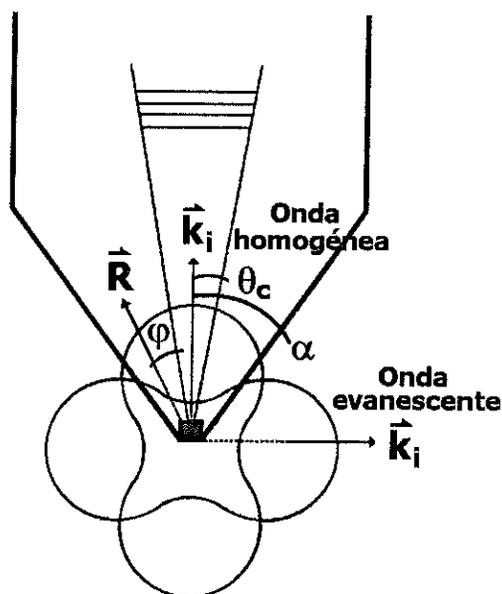


Figura 16: Modelo de esparcimiento para puntas fabricadas por estiramiento. Los lóbulos indican las intensidades de distribución del esparcimiento de Rayleigh para ondas evanescentes y homogéneas.

En la figura 16 puede apreciarse un esquema de esta variación del modelo de esparcimiento. La región sombreada se considera el centro de esparcimiento de Rayleigh. Los lóbulos muestran las distribuciones de intensidad del esparcimiento para una onda evanescente (cuyo vector de propagación es paralelo a la superficie) y para una onda homogénea. El rayo esparcido en dirección \vec{R} hace un ángulo ϕ con el

eje de la fibra sólo se acoplará si se cumple que $\varphi < \theta_c$, donde θ_c es el ángulo crítico (Buckland *et al.*, 1993).

En cualquier tipo de punta existe una competencia entre el acoplamiento por esparcimiento como el utilizado en este último modelo (causado por irregularidades en la superficie de la punta) y el acoplamiento a través de los modos (que representan oscilaciones coherentes de la estructura molecular de la misma). En una punta desnuda el efecto de esparcimiento es el dominante. Por esta razón si se estudia la detección de la sonda a través del acoplamiento de modos, no se debe esperar que el modelo sea más preciso que aquél basado en el esparcimiento.

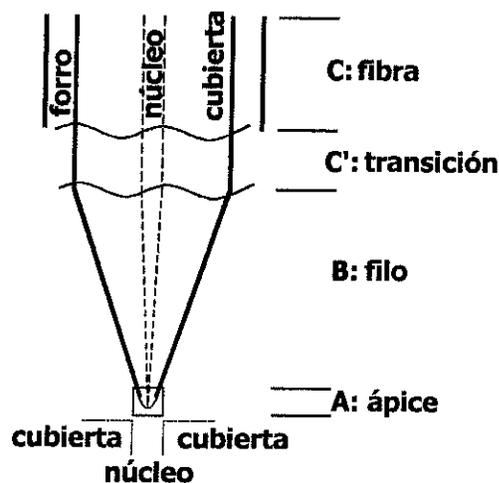


Figura 17: Tratamiento modal del acoplamiento electromagnético en una punta de fibra óptica fabricada por estiramiento. El ápice se considera un sistema de fibra óptica donde la cubierta juega el papel de núcleo y el aire juega el papel de cubierta.

Sin embargo, un tratamiento modal puede tener aplicaciones interesantes. En la figura 17 se esquematiza un modelo para una punta fabricada por estiramiento, donde el ápice de la punta se considera un sistema de fibra óptica donde la cubierta

juega el papel de núcleo y el aire juega el papel de cubierta. Las dimensiones del ápice son tan pequeñas que el parámetro de la fibra cumple en cualquier caso con $V < 2.405$, por lo que sólo un modo puede acoplarse al interior de la fibra.

En este modelo se utiliza el hecho de que los campos eléctrico y magnético $\vec{\mathbf{E}}_s$ y $\vec{\mathbf{H}}_s$ alrededor de la punta se representan siempre como una suma discreta de modos guiados más la suma de dos distintos conjuntos continuos de modos radiativos, esto es

$$\vec{\mathbf{E}}_s = \sum c_i \vec{\mathbf{E}}_{Gi} + \sum_{\eta} \int c(\eta) \vec{\mathbf{E}}_R(\eta) d\eta \quad (10)$$

y

$$\vec{\mathbf{H}}_s = \sum c_i \vec{\mathbf{H}}_{Gi} + \sum_{\eta} \int c(\eta) \vec{\mathbf{H}}_R(\eta) d\eta. \quad (11)$$

Ya que el parámetro V es muy pequeño, el sistema sólo transmitirá el modo fundamental y por tanto, la primer sumatoria sólo consistirá de un término. En cuanto a los modos radiativos, como no se propagan a través de la fibra no pueden contribuir a la señal detectada. Entonces, si se puede encontrar el coeficiente de acoplamiento del primer modo guiado, c_1 , es posible calcular la proporción de potencia efectivamente acoplada en la sonda.

Suponiendo que la señal a detectarse es un arreglo periódico de deltas de Dirac y estudiando el perfil del campo detectado en la punta (esto es, el perfil del modo fundamental), Buckland (Buckland *et al.*, 1993) encuentra la resolución máxima que puede obtenerse con un sistema de MOBCC para una sonda determinada.

I.4.3 Modelos de detección para puntas recubiertas de metal

Una forma simple de estudiar la detección en una punta recubierta de metal consiste en resolver el problema más sencillo de la difracción a través de una pequeña apertura circular, esquematizada en la figura 18. La difracción a través de aperturas de cualquier forma se ha estudiado desde hace mucho tiempo a través de teorías escalares tales como la de Fraunhofer y la de Fresnel-Kirchhoff (Klein & Furtak, 1986). Sin embargo, ya que estas teorías presuponen que las dimensiones de la apertura son muy superiores a la longitud de onda y que sólo nos interesan los campos difractados que se encuentran lejos del obstáculo, sus resultados no son útiles para el propósito que nos ocupa (Silver, 1962).

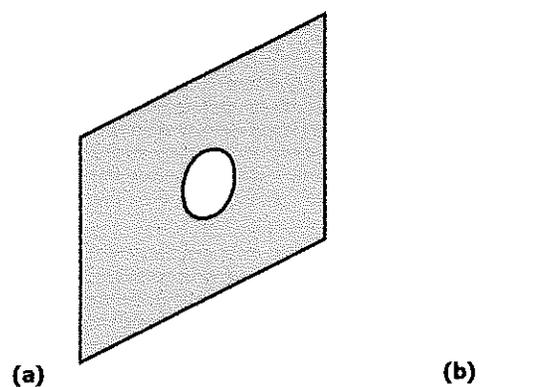


Figura 18: Difracción a través de una apertura circular. La pantalla metálica se considera de extensión infinita, mientras que su grosor se supone despreciable. (a) Geometría del obstáculo. (b) Sección transversal.

En la primera mitad de este siglo H. A. Bethe (1944) motivado por el estudio de los orificios que comunican dos cavidades resonantes de microondas, estudió la difracción a través de una apertura circular de dimensiones menores que la longitud

de onda. Aunque su modelo funcionaba bien para la aplicación mencionada, Bouwkamp (1950) encontró que el modelo de Bethe daba valores incorrectos para los campos en la vecindad del obstáculo. Bouwkamp corrigió el error y desarrolló un modelo con que se puede obtener la difracción tanto en campo cercano como en campo lejano. Tanto el modelo de Bethe-Bouwkamp, como otros modelos desarrollados después (Nomura & Katsura, 1955) comparten con las teorías escalares la suposición de una pantalla conductora de extensión infinita, infinitamente delgada y con conductividad también infinita.

Un parámetro que se utiliza con frecuencia para el estudio de pequeñas aperturas es el coeficiente de transmisión. Este coeficiente se define como

$$t = \frac{W_t}{W_i} \quad (12)$$

donde W_i es el flujo de energía que incide sobre la apertura y W_t es el flujo de energía que la atraviesa. Para aperturas grandes, el coeficiente de transmisión debe aproximarse a uno. Una vez que la onda atraviesa la apertura, los campos empiezan a radiarse por lo que la densidad de flujo de energía decrece con la distancia. Una de las conclusiones más citadas del modelo de Bethe-Bouwkamp es que este decrecimiento es proporcional a r^6 y no a r^2 como predice el modelo de Fresnel-Kirchhoff. Sin embargo, aunque experimentalmente se ha demostrado que la radiación que sale de una apertura de dimensiones por debajo de la longitud de onda decrece en una proporción mayor que r^2 , no hay evidencia de que la proporción exacta sea r^6 ; en realidad la proporción parece ser r^4 (Paesler & Moyer, 1996).

Las discrepancias entre estos modelos y los resultados experimentales se deben a las suposiciones en que están basados. En realidad, el recubrimiento metálico tiene una conductividad finita, y la longitud de penetración generalmente tiene el mismo orden de magnitud que las dimensiones de la apertura. Incluir la conductividad finita en un modelo de difracción es una tarea difícil. Resulta más sencillo considerar que la apertura tiene un diámetro efectivo mayor que su diámetro geométrico. Este proceso se ha discutido en relación con el límite a la resolución que puede obtenerse con una punta recubierta de metal (Dürig *et al.*, 1986).

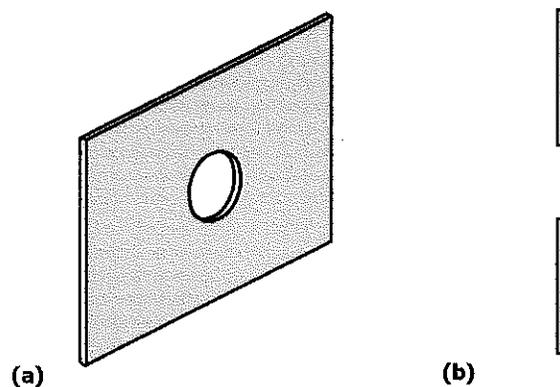


Figura 19: Difracción a través de una pequeña apertura circular gruesa. Se hacen las mismas suposiciones de la figura anterior, pero se toma en cuenta el grosor finito de la pantalla metálica. (a) Geometría del obstáculo. (b) Sección transversal.

La suposición de que la pantalla tiene un grosor cero tampoco es realista, puesto que para las pequeñas dimensiones de la apertura, el grosor del recubrimiento metálico tiene un valor apreciable. Sin embargo, existen teorías que han eliminado esta suposición, lo que se esquematiza en la figura 19. En particular, Roberts desarrolló un modelo riguroso de difracción a través de una apertura circular

perforada en una pantalla conductora gruesa que utiliza el método de momentos para obtener resultados numéricos (Roberts, 1987).

En la figura 20 se muestra una representación esquemática del modelo de Roberts. El espacio se divide en tres zonas. Las zonas 1 y 2 son aire o vacío. Los campos electromagnéticos en estas dos zonas se expanden como un espectro continuo de ondas planas o modos de Rayleigh. Los campos en la zona 2 se expanden como el espectro discreto de modos en una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras. Se aplican las condiciones de frontera de los campos transversales tanto en la entrada como en la salida de la apertura. Aplicando las condiciones de ortonormalidad, es posible reducir el problema a dos ecuaciones matriciales, de las cuales pueden obtenerse los campos en la zona 2. A partir de éstos se obtiene un coeficiente de transmisión que se define como el flujo de energía transmitido, dividido entre el flujo incidente sobre la apertura. Los campos en las zonas 1 y 3 pueden obtenerse también, una vez que se conocen los de la zona 2, utilizando las condiciones de frontera.

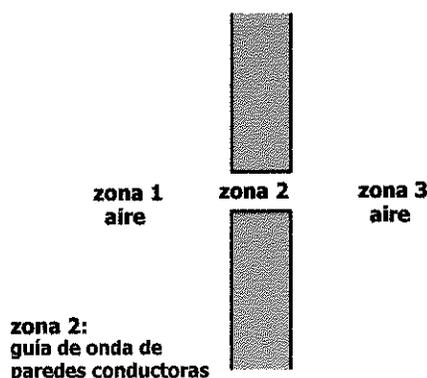


Figura 20: Representación esquemática del modelo de Roberts. El espacio se divide en tres zonas. Zona 1: aire. Zona 2: una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras. Zona 3: aire.

Si se utiliza el mismo tratamiento modal que se aplicó en la subsección anterior para puntas desnudas, puede calcularse el acoplamiento de potencia para una punta recubierta de metal, reemplazando el modo fundamental de la fibra óptica por el modo fundamental de la guía de onda de paredes conductoras (Buckland *et al.*, 1993). Este modelo puede considerarse una primera aproximación al modelo de Roberts. En las puntas recubiertas de metal, el acoplamiento por modos domina al acoplamiento por esparcimiento, por lo que un tratamiento modal resulta ser más efectivo en este caso, de lo que lo es para estudiar puntas desnudas.

La principal desventaja de los modelos de difracción a través de pequeñas aperturas consiste en que la geometría real de la punta no se toma en cuenta. Los modelos no pueden explicar cambios en la eficiencia de puntas con distintos ángulos de filo, puesto que la conicidad no se incluye en el modelo. Si se requiere estudiar estas características, es necesario recurrir a modelos de otro tipo. Un ejemplo es otro modelo de Roberts, para una punta en forma de lápiz recubierta de metal, en el que utiliza los modos de la guía de onda cónica. Como la geometría no favorece la aplicación rigurosa de las condiciones de frontera, se deben hacer algunas aproximaciones, por ejemplo, que el ápice es plano y que el ángulo de filo es pequeño (Roberts, 1991).

Otro problema que tienen estos modelos es que suponen que toda la luz que atraviesa la pequeña apertura, se convierte en señal detectada por la sonda. En realidad esto no es así, puesto que los campos electromagnéticos dentro de la fibra óptica se componen de una combinación de modos guiados y modos radiativos, como

se expresa en la ecuación 9. Los modos radiativos no quedan atrapados en el núcleo de la fibra óptica y por tanto, no pueden llegar al detector.

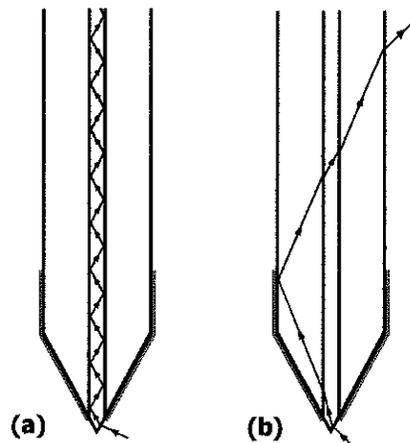


Figura 21: Acoplamiento de luz en una punta de fibra óptica en forma de lápiz recubierta de metal. (a) Acoplamiento de un modo guiado. (b) Un modo radiativo no se transmite a través del cuerpo de la fibra.

Sería deseable disponer de un modelo de detección que pueda discriminar entre los modos radiativos y los modos guiados, de forma que se pueda utilizar sólo estos últimos para calcular el acoplamiento efectivo de potencia. Para realizar esto, es necesario tomar en cuenta la estructura de la fibra óptica. Esto necesariamente añadirá complicaciones, por lo que realizar un modelo que incluya la conicidad de una punta y además la geometría de la fibra óptica podría ser muy difícil.

Sin embargo, puede realizarse un modelo donde se tome en cuenta la geometría de la fibra óptica si se regresa a la pantalla conductora plana que se utiliza en los modelos de difracción a través de pequeñas aperturas. Al realizar esto se pierde la ventaja de considerar la conicidad, pero la implementación del modelo se simplifica. Además, existen algunas puntas cuya geometría no es tan diferente de una

pequeña apertura. Como ejemplo tenemos las puntas de ápice plano fabricadas por el método de Ohtsu de ataque químico en tres pasos. En la figura 22 se compara la geometría real de una de estas puntas y con una versión idealizada, apropiada para estudiarse teóricamente.

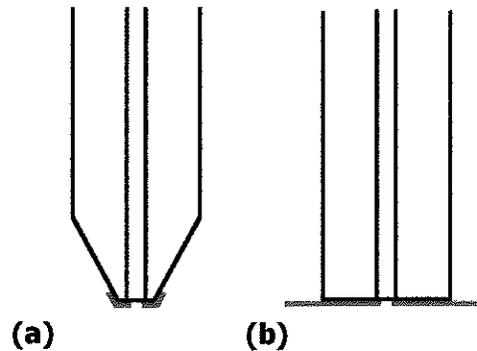


Figura 22: Punta de ápice plano fabricada por el método de Ohtsu. (a) La punta real. (b) Su aproximación teórica.

En este trabajo se propone un modelo que utiliza la geometría mostrada en la figura 22b. Un esquema más preciso se muestra en la figura 23. Como ya se mencionó, este modelo está basado en el de Roberts, lo que puede verificarse comparando las figuras 20 y 23. La diferencia básica entre ambos modelos consiste en que en que la zona 3, que representa aire o vacío en la figura 20 se reemplaza en la figura 23 por una fibra óptica idealizada. Los campos en esta nueva zona 3 se expanden en un conjunto ortonormal completo de modos de una fibra óptica. En cuanto a lo demás, el procedimiento es casi completamente análogo al seguido por Roberts.

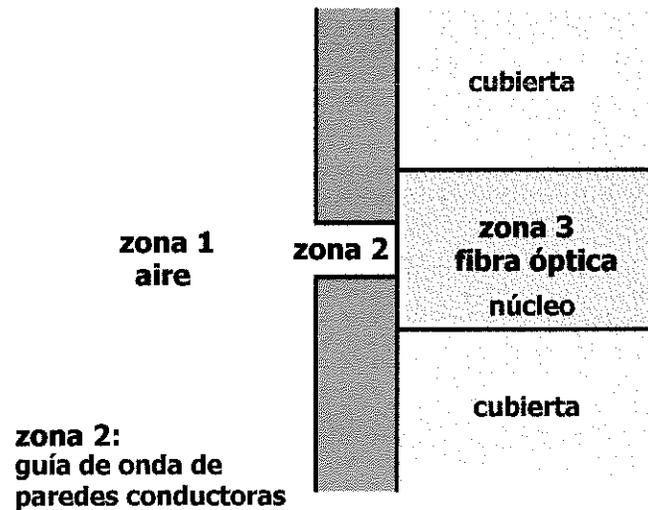


Figura 23: Modelo presentado en este trabajo. El esquema es similar al de Roberts, con la diferencia de que la zona 3 representa ahora una fibra óptica.

Al igual que en el modelo de Roberts, en el nuevo modelo se calculan directamente los campos en la zona 2. La razón es que como el conjunto es discreto, el procedimiento de computación se facilita de esta manera. El hecho de poder disponer de los campos en la zona 3 en función de un conjunto ortonormal completo convierte en trivial la tarea de separar los campos que existen en forma de modos radiativos de aquéllos que existen en forma de modos guiados. De esta manera puede calcularse un coeficiente de transmisión efectivo, que calcule la proporción de energía que incidiendo sobre la zona 1, acopla en modos guiados en la zona 3.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

II.1 Tratamiento modal de los campos electromagnéticos

II.1.1 Introducción

Se ha mencionado en secciones previas que a los campos electromagnéticos se les puede dar un tratamiento modal. Esta sección se dedicará a explicar esto con más detenimiento. Existen dos formas generales para resolver las ecuaciones de Maxwell, una de ellas está basada en la función de Green y la otra utiliza eigenfunciones, es decir *modos* (Snyder & Love, 1983). En sistemas donde las condiciones de frontera son independientes de uno de los ejes, tal como sucede en las guías de onda, el tratamiento modal ha demostrado ser el método más apropiado.

El conjunto de modos de un sistema electromagnético debe cumplir dos requisitos básicos. El primero es que cada modo por sí mismo debe ser una solución de las ecuaciones de Maxwell y por tanto, corresponder a campos que puedan existir en el sistema bajo estudio. El segundo requisito es que el conjunto completo de modos forme un *conjunto ortogonal completo*. El significado físico de esta ortogonalidad es que no puede haber flujo de energía electromagnética que se deba a interacciones entre los campos de dos modos diferentes.

La densidad de flujo de energía está dada por el vector de Poynting (ecuación 7), por lo que la condición de ortogonalidad puede representarse por

$$\int_{A_\infty} (\vec{\mathbf{E}}_j \times \vec{\mathbf{H}}_k^*) \cdot d\mathbf{S} = \int_{A_\infty} (\vec{\mathbf{H}}_j \times \vec{\mathbf{E}}_k^*) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{si } j \neq k \quad (13)$$

o bien

$$\int_{A_\infty} \vec{\mathbf{E}}_j \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{H}}_k^*) \cdot d\mathbf{S} = \int_{A_\infty} \vec{\mathbf{H}}_j \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{E}}_k^*) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{si } j \neq k \quad (14)$$

donde los subíndices j y k corresponden a modos diferentes y la integral se realiza sobre toda el área de una superficie plana normal a la dirección de propagación. Es importante notar que la condición no establece que el flujo promedio de energía deba ser cero sino que en realidad, el flujo de energía debido a la interacción de dos modos diferentes en cualquier instante debe ser cero.

En la solución de las ecuaciones de Maxwell, siempre se obtiene una constante arbitraria. Es conveniente elegirla de modo que se satisfaga alguna condición de normalización. La forma más evidente de realizar esto es utilizando

$$\int_{A_\infty} \vec{\mathbf{E}}_j \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{H}}_k^*) \cdot d\mathbf{S} = \delta_{j,k} \quad (15)$$

para modos que pertenecen a un conjunto discreto y

$$\int_{A_\infty} \vec{\mathbf{E}}(\eta) \cdot [\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{H}}(\eta')^*] \cdot d\mathbf{S} = \delta(\eta - \eta') \quad (16)$$

para modos que pertenecen a un conjunto continuo. Sin embargo, esta forma no puede utilizarse nunca para modos evanescentes. La razón es que para estos modos, la componente z del vector de Poynting (la expresión dentro de la integral) es imaginaria. Más adelante se propondrá una condición que no tenga este problema.

El procedimiento general para obtener los modos de un sistema determinado, se delinea en cualquier texto dedicado a la teoría sobre guías de onda. Como ya se mencionó, el punto de partida siempre son las ecuaciones de Maxwell en ausencia de campos que, para materiales no magnéticos se expresan como

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad & \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \\
 \text{II} \quad & \nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0 \\
 \text{III} \quad & \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \\
 \text{IV} \quad & \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = n_{mat}^2 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{17}$$

donde n_{mat} es el índice de refracción del material donde ocurre la propagación.

El siguiente paso consiste en considerar que la onda se propaga en dirección $\pm z$ y que las componentes de los campos tienen la forma

$$\begin{aligned}
 E(\vec{\mathbf{r}}, t) &= E(u, v) \exp[\pm i k_{mat} \gamma z - i \omega t] \\
 H(\vec{\mathbf{r}}, t) &= H(u, v) \exp[\pm i k_{mat} \gamma z - i \omega t]
 \end{aligned} \tag{18}$$

donde u, v son las coordenadas transversales apropiadas; ω es la frecuencia de la onda; γ es el coseno director en la dirección z del vector de propagación y k_{mat} es la constante de propagación en el material.

A partir de las propiedades de la función exponencial, puede demostrarse que basta con que $E'(u, v)$ $E''(u, v)$ y $H'(u, v)$ satisfagan la condición de ortonormalidad para que $E(\vec{\mathbf{r}}, t)$ y $H(\vec{\mathbf{r}}, t)$ la cumplan automáticamente.

El paso siguiente consiste en expresar las componentes transversales de los campos (E_u, H_u, E_v, H_v) en función de las componentes longitudinales (E_z, H_z) . Por

medio de sustituciones se puede encontrar una ecuación diferencial que describa el comportamiento de E_z cuando $H_z = 0$ y de H_z cuando $E_z = 0$. Se resuelven estas ecuaciones de acuerdo a las condiciones de frontera apropiadas, y se encuentran finalmente las componentes transversales con ayuda del principio de superposición.

Las guías de onda se clasifican de manera general en dos tipos: cerradas y abiertas. Una guía de onda cerrada es aquella donde los campos quedan confinados en una región finita del espacio. Cualquier guía de onda con paredes metálicas es una guía de onda cerrada. En una guía de onda abierta, en cambio, los campos se extienden por todo el espacio. Una fibra óptica es una guía de onda abierta.

Es característica de los modos de una guía de onda cerrada que puedan separarse en dos conjuntos mutuamente ortogonales de *modos transversales*. Un modo transversal es aquél en que, de las componentes longitudinales del campo eléctrico y el magnético, sólo una de ellas es distinta de cero. Cuando $E_z = 0$ y $H_z \neq 0$ se dice que se tiene un modo transversal eléctrico (TE), puesto que es el campo eléctrico el que es puramente transversal. De acuerdo a otra nomenclatura más antigua, a este caso se le conoce como modo H, puesto que la componente longitudinal que es distinta de cero es la del campo magnético. El caso en que $E_z \neq 0$ y $H_z = 0$ se conoce como modo TM o modo E, con una explicación análoga.

Los campos transversales de un modo transversal pueden representarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_j(u, v, z) &= c_j \vec{\Lambda}_j(u, v) \exp[\pm ik_{mat} \gamma_j z] \\ \hat{z} \times \vec{H}_j(u, v, z) &= c_j Y_j \vec{\Lambda}_j(u, v) \exp[\pm ik_{mat} \gamma_j z]\end{aligned}\tag{19}$$

donde Y_j es la admitancia transversal y γ_j el coseno director del vector de propagación para el j -ésimo modo mientras que c_j es una constante de normalización. Nótese que en un modo transversal el campo eléctrico y el magnético pueden especificarse utilizando la misma expresión matemática de $\hat{\Lambda}_j(u, v)$.

En una guía de onda abierta por lo general, la separación en dos conjuntos de modos transversales no puede hacerse. La mayor parte de los modos de una guía de onda abierta son híbridos. Un *modo híbrido* representa el caso general en que ninguno de los dos campos longitudinales es igual a cero. Sin embargo, los modos sí se pueden separar en dos conjuntos mutuamente ortogonales, en donde en ciertos casos, una componente longitudinal predomina sobre la otra. Si se tiene un modo en que $H_z > E_z$ se le llamará modo HE, mientras que si $E_z > H_z$ se le llamará modo EH. De acuerdo a esta definición, los modos transversales H y E, son casos especiales de los modos HE y EH respectivamente.

En el caso de los modos guiados de la fibra óptica, la nomenclatura HE y EH no sigue en todos los casos las condiciones de la anterior explicación. Sin embargo, por convención, el modo fundamental se llama HE_{11} . Así, si se dividen los modos guiados en dos subconjuntos de acuerdo a las propiedades de las soluciones, aquel subconjunto que incluya al modo fundamental se rotulará como conjunto de modos HE, mientras que al otro le corresponderá el rótulo de conjunto de modos EH.

Los campos transversales de un modo híbrido pueden representarse como

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_j(u, v, z) &= c_j \hat{\Lambda}_j^E(u, v) \exp[\pm ik_{mat} \gamma_j z] \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}_j(u, v, z) &= c_j Y_j \hat{\Lambda}_j^H(u, v) \exp[\pm ik_{mat} \gamma_j z]\end{aligned}\tag{20}$$

donde los superíndices sirven para distinguir entre las dos expresiones matemáticas usadas para describir el campo eléctrico y el magnético respectivamente. Nótese que Y_j ya no representa una impedancia transversal. El parámetro Y_j es muy importante, porque al igual que γ_j cambia de real a imaginario en la transición de modos propagantes a evanescentes. Además, permite que exista una continuidad entre la representación de modos híbridos y modos transversales. Esto es, la ecuación (19) puede considerarse un caso límite de la ecuación (20) en el cual se cumple que

$$\hat{\Lambda}_j^E = \hat{\Lambda}_j^H .$$

Sean las condiciones de normalización

$$\int_{A_\infty} \hat{\Lambda}_j^E(u, v) \cdot \hat{\Lambda}_k^{H*}(u, v) \cdot dS = \delta_{j,k} \quad (21)$$

para conjuntos discretos y

$$\int_{A_\infty} \hat{\Lambda}^E(\eta, u, v) \cdot \hat{\Lambda}^{H*}(\eta', u, v) dS = \delta(\eta - \eta') \quad (22)$$

para conjuntos continuos. Si se comparan las ecuaciones (15) y (16) con (21) y (22) puede notarse que la única diferencia consiste en que las segundas no tienen el parámetro Y_j dentro de la integral. Por esta razón, el integrando siempre es real, sin importar si el modo es propagante o evanescente.

Sea $\hat{\Pi}_j^E$ y $\hat{\Pi}_j^H$ un segundo conjunto ortogonal completo de modos para describir los mismos campos electromagnéticos, el producto interior entre modos de los dos diferentes conjuntos se define como

$$\int_{A_\infty} \hat{\Lambda}_j^E(u, v) \cdot \hat{\Pi}_k^{H^*}(u, v) dS = \int_{A_\infty} \hat{\Pi}_j^E(u, v) \cdot \hat{\Lambda}_k^{H^*}(u, v) dS \quad (23)$$

y de forma análoga a (22) para el caso continuo.

En las siguientes secciones, se describirán expresiones apropiadas para describir los modos en tres diferentes sistemas: el espacio libre, una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras y una fibra óptica.

II.1.2 Expansión en ondas planas

El espacio libre puede considerarse una guía de onda abierta. Este es uno de los casos especiales en que la separación en dos conjuntos de modos transversales sí puede hacerse. Las eigenfunciones obtenidas al resolver las ecuaciones de Maxwell para un medio sin fronteras se conocen como ondas planas o modos de Rayleigh. Para un medio dieléctrico arbitrario un modo de Rayleigh TE se representa por

$$\bar{\Phi}_1(x, y, \alpha, \beta) = \frac{k_{mat}}{2\pi} \exp[ik_{mat}(\alpha x + \beta y)] \frac{\beta \hat{x} - \alpha \hat{y}}{\xi} \quad (24)$$

mientras que uno TM se expresa como

$$\bar{\Phi}_2(x, y, \alpha, \beta) = \frac{k_{mat}}{2\pi} \exp[ik_{mat}(\alpha x + \beta y)] \frac{\alpha \hat{x} + \beta \hat{y}}{\xi} ; \quad (25)$$

donde

$$\xi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (26)$$

y

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} & \text{si } \xi \leq 1 \\ i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} & \text{si } \xi > 1 \end{cases} . \quad (27)$$

Si se examinan (18), (24) y (25) puede observarse que los campos electromagnéticos tienen una dependencia espacial de forma

$$\exp[ik_{mat}(\alpha x + \beta y + \gamma z)] \quad (28)$$

de donde es evidente que el vector de propagación de un modo determinado puede representarse por

$$\bar{\mathbf{k}} = k_{mat}(\alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}}) , \quad (29)$$

y que por tanto, α , β , γ son los cosenos directores del mencionado vector. De (27) y (28) puede verse que para $\xi > 1$, los campos se atenuarán exponencialmente en dirección z , por lo que no habrá propagación de energía en esta dirección. En este caso, el modo de Rayleigh es evanescente.

Un modo TE y uno TM, cada uno de ellos con los mismos valores de α , β son siempre ortogonales entre sí; es decir, forman un conjunto discreto que satisface la condición (15). El conjunto de todos los modos TE por una parte, y el conjunto de todos los modos TM, por el otro, son dos conjuntos continuos que satisfacen cada uno la condición (16). La expresión $k_{mat}/2\pi$ en (24) y (25) es una constante de normalización. Los modos de Rayleigh satisfacen entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_r(x, y, \alpha, \beta) \cdot \bar{\Phi}_R(x, y, \alpha', \beta') dx dy = \delta_{r,R} \delta(\alpha - \alpha') \delta(\beta - \beta'); \quad (30)$$

que es una condición de ortonormalización más general.

Los campos transversales de una onda electromagnética general pueden representarse como una superposición de modos de Rayleigh de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_t(x, y) &= \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_r(\alpha, \beta) \bar{\Phi}_r(x, y, \alpha, \beta) dx dy \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}_t(x, y) &= \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r(\alpha, \beta) \bar{\Phi}_r(x, y, \alpha, \beta) d\alpha d\beta\end{aligned}\quad (31)$$

donde $Y_r(\alpha, \beta)$ es la admitancia transversal definida por

$$\begin{aligned}Y_1(\alpha, \beta) &= \frac{\gamma(\alpha, \beta)}{Z_{mat}} \\ Y_2(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\gamma(\alpha, \beta)Z_{mat}}\end{aligned}\quad (32)$$

donde

$$Z_{mat} = \frac{Z_0}{n_{mat}}\quad (33)$$

es la impedancia intrínseca del medio.

II.1.2.1 Ejemplo: Representación de una onda plana simple

Para representar una simple onda plana monocromática TE, debe hacerse

$$\begin{aligned}E_1(\alpha, \beta) &= -\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta) \\ E_2(\alpha, \beta) &= 0\end{aligned}\quad (34)$$

y si se quiere representar una TM, debe hacerse

$$\begin{aligned}E_1(\alpha, \beta) &= 0 \\ E_2(\alpha, \beta) &= \gamma_0\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\beta)\end{aligned}\quad (35)$$

donde $\alpha_0 = \sin\phi$ y $\gamma_0 = \cos\phi$. Al sustituir (34) y (35) en (31) se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}(x, z) &= \frac{k_{mat}}{2\pi} \exp[ik_{mat}(\alpha_0 x - \gamma_0 z)] \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}(x, z) &= \frac{\gamma_0}{Z_{mat}} \frac{k_{mat}}{2\pi} \exp[ik_{mat}(\alpha_0 x - \gamma_0 z)] \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}\quad (36)$$

para la onda TE y,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}^i(x, z) &= \gamma_0 \frac{k_{mat}}{2\pi} \exp[ik_{mat}(\alpha_0 x - \gamma_0 z)] \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}^i(x, z) &= \frac{1}{Z_{mat}} \frac{k_{mat}}{2\pi} \exp[ik_{mat}(\alpha_0 x - \gamma_0 z)] \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}\quad (37)$$

para la onda TM. La densidad de flujo de energía que llevan estas ondas es igual a

$$\frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}^i \cdot \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}^i = \frac{k_{mat}^2 \gamma_0}{8\pi^2 Z_0} . \quad (38)$$

II.1.3 Los modos de la guía de onda cilíndrica de paredes conductoras

Una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras es un cilindro metálico hueco en su interior o bien relleno de algún material dieléctrico. El cilindro se supone formado por un conductor perfecto. La ecuación (17) en este caso se expresa como

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &= E(\rho, \phi) \exp[ik_{mat} \gamma z - i\omega t] \\ H(\vec{r}, t) &= H(\rho, \phi) \exp[ik_{mat} \gamma z - i\omega t] \end{aligned} \quad (39)$$

donde ρ, ϕ, z son coordenadas cilíndricas.

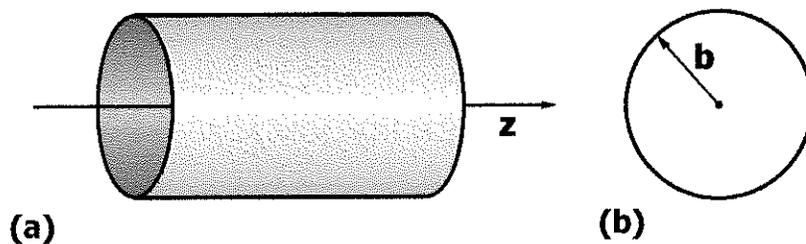


Figura 24: (a) Una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras. (b) Vista frontal de la apertura de la guía.

Para este sistema, deben resolverse las ecuaciones de Maxwell con la condición de que las componentes del campo eléctrico tangenciales a las paredes de la guía deben ser cero cuando $\rho = b$. La dependencia radial y la angular se resuelven separadamente utilizando el método de separación de variables.

Existen dos soluciones diferentes para la parte radial, que corresponden respectivamente a modos TE y modos TM. Cuando se encuentra la expresión de un modo TE, ya se tiene la condición de que $E_z = 0$ en todas partes, por lo que las

soluciones se buscan estableciendo que $E_\phi = 0$ en la frontera. Cuando se buscan las expresiones para los modos TM, se puede establecer que una de las dos componentes tangenciales E_z ó E_ϕ se desvanece en la frontera. Al hacer esto, la condición que no se utilizó se satisfará automáticamente.

La solución para la parte angular tiene dos formas mutuamente ortogonales. Para distinguirlas, se clasifican de acuerdo a la orientación del campo eléctrico con respecto al diámetro del cilindro definido por $\phi = 0$ y $\phi = \pi$. Cuando su componente azimutal a lo largo de ese diámetro es igual a cero, el vector del campo eléctrico se encuentra sobre el diámetro y nos referimos a este caso como un modo horizontal. Cuando es la componente radial a través del diámetro la que es igual a cero, el vector del campo eléctrico es ortogonal al diámetro, lo que se conoce como un modo vertical.

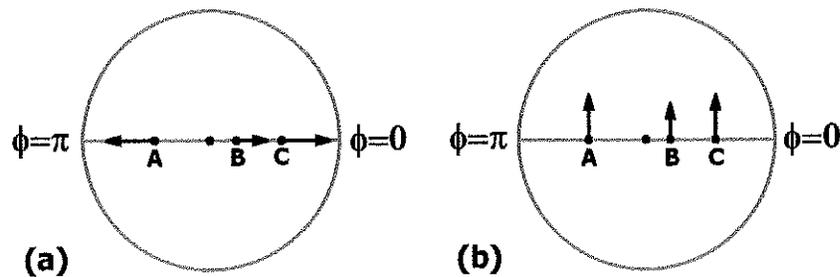


Figura 25: Los modos se distinguen en horizontales y verticales de acuerdo a las características del campo eléctrico en el eje definido por $\phi=0$ y $\phi=\pi$. En la figura se muestran las direcciones de los campos eléctricos asociados con tres puntos **A**, **B** y **C** en ese eje. (a) En un modo horizontal el campo eléctrico en el eje no tiene componente azimutal. (b) En un modo vertical el campo eléctrico no tiene componente radial.

Las expresiones de los modos se presentan a continuación. Los modos TE se pueden representar por

$$\hat{\Psi}_{\lambda_{nml}}(\rho, \phi) = \begin{cases} g_{nm} \left[\frac{nb}{\chi'_{nm}\rho} J_n \left(\frac{\chi'_{nm}\rho}{b} \right) \begin{cases} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{cases} \right] \hat{\rho} \mp J_n \left(\frac{\chi'_{nm}\rho}{b} \right) \begin{cases} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{cases} \hat{\phi} & \text{si } \rho < b ; \\ 0 & \text{si } \rho > b \end{cases} \quad (40)$$

mientras que los modos TM se representan por

$$\hat{\Psi}_{\lambda_{nml}}(\rho, \phi) = \begin{cases} h_{nm} \left[J_n \left(\frac{\chi_{nm}\rho}{b} \right) \begin{cases} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{cases} \right] \hat{\rho} \mp \frac{nb}{\chi_{nm}\rho} J_n \left(\frac{\chi_{nm}\rho}{b} \right) \begin{cases} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{cases} \hat{\phi} & \text{si } \rho < b \\ 0 & \text{si } \rho > b \end{cases} \quad (41)$$

El subíndice l indica si el modo es horizontal o vertical. Para modos horizontales $l = 1$ deben escogerse tanto el signo como las funciones trigonométricas superiores, mientras que para modos verticales deben escogerse el signo y las funciones inferiores. Los parámetros χ_{nm} y χ'_{nm} son las raíces m -ésimas de la función de Bessel de orden n y de su derivada; es decir las soluciones de las ecuaciones $J_n(\chi_{nm}) = 0$ y $J'_n(\chi'_{nm}) = 0$. Las constantes de normalización g_{nm} y h_{nm} están dadas por

$$g_{nm} = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \frac{\chi'_{nm}}{b J_n(\chi'_{nm}) \sqrt{\chi'^2_{nm} - n^2}} \quad (42)$$

y

$$h_{nm} = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \frac{1}{b J_{n-1}(\chi_{nm})} \quad ; \quad (43)$$

donde

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (44)$$

Estos modos satisfacen la condición de ortonormalidad

$$\int_0^b \int_0^{2\pi} \hat{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \cdot \hat{\Psi}_{SNML}(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi = \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \quad (45)$$

Los campos electromagnéticos dentro de una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras se componen de una onda que se propaga a la izquierda, más otra que se propaga a la derecha. Esto puede representarse con ayuda de los modos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \vec{E}(\rho, \phi, z) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^2 [a_{snml} \exp[ik_{mat} v_{snm} z] + b_{snml} \exp[-ik_{mat} v_{snm} z]] \hat{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \\ \hat{z} \times \vec{H}(\rho, \phi, z) &= \sum_{snml} Y_{snm} [a_{snml} \exp[ik_{mat} v_{snm} z] - b_{snml} \exp[-ik_{mat} v_{snm} z]] \hat{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \end{aligned} \quad (46)$$

en donde a_{snml} y b_{snml} son constantes complejas y el coseno director γ de (29) sólo puede tomar el conjunto discreto de valores v_{snm} tales que cumplan con

$$v_{1nm} = \sqrt{1 - \left(\frac{\chi'_{nm}}{k_{mat} b} \right)^2} \quad (47)$$

para modos TE y

$$v_{2nm} = \sqrt{1 - \left(\frac{\chi_{nm}}{k_{mat} b} \right)^2} \quad (48)$$

para modos TM. Debe aclararse que, ya que el campo magnético tangente a un conductor perfecto es distinto de cero, la segunda ecuación en (46) sólo es válida para $\rho < b$. En cambio, la ecuación para el campo eléctrico es válida en todo el espacio.

La admitancia transversal Y_{snm} se define en forma similar a $Y(\alpha, \beta)$ en (32) como

$$\begin{aligned} Y_{1nm} &= \frac{v_{1nm}}{Z_0} \\ Y_{2nm} &= \frac{1}{v_{2nm} Z_0} \end{aligned} \quad (49)$$

Puede resultar conveniente, utilizar funciones reales en vez de complejas para representar la dependencia con z de los campos. Para lograr esto, se utiliza la identidad de Euler. Esto convierte a (46) en

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(\rho, \phi, z) &= \sum_{snml} [(a_{snml} + b_{snml}) \cos[k_{mat} v_{snm} z] + i(a_{snml} - b_{snml}) \sin[k_{mat} v_{snm} z]] \vec{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \\ \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{H}}(\rho, \phi, z) &= \\ &= -i \sum_{snml} Y_{snm} [i(a_{snml} - b_{snml}) \cos[k_{mat} v_{snm} z] - (a_{snml} + b_{snml}) \sin[k_{mat} v_{snm} z]] \vec{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \end{aligned} \quad (50)$$

lo que al definir nuevas constantes complejas

$$\begin{aligned} a'_{snml} &= i(a_{snml} - b_{snml}) \\ b'_{snml} &= (a_{snml} + b_{snml}) \end{aligned} \quad (51)$$

queda finalmente como

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}(\rho, \phi, z) &= \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_{mat} v_{snm} z] + b_{snml} \cos[k_{mat} v_{snm} z]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}(\rho, \phi, z) &= -i \sum_{snml} Y_{snm} [a_{snml} \cos[k_{mat} v_{snm} z] - b_{snml} \sin[k_{mat} v_{snm} z]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) ;\end{aligned}\tag{52}$$

donde se han omitido las primas de las constantes complejas.

En las ecuaciones (46), las constantes a_{snml} y b_{snml} representan explícitamente las intensidades espectrales de los modos que se propagan en dirección $-z$ y en dirección z respectivamente. En las ecuaciones (52) esto ya no es verdad, aunque las constantes siguen conteniendo implícitamente la misma información.

Si escribimos en notación compleja

$$\begin{aligned}a_{snml} &= |a_{snml}| \exp[\psi_a] \\ b_{snml} &= |b_{snml}| \exp[\psi_b]\end{aligned}\tag{53}$$

el flujo transmitido por cada modo puede calcularse a partir de

$$F_{snml} = \begin{cases} \frac{1}{2} \{ Y_{snm} |a_{snml}| |b_{snml}| \sin(\psi_a - \psi_b) \} & \text{si } Y_{snm} \text{ es real} \\ \frac{1}{2} \{ i Y_{snm} |a_{snml}| |b_{snml}| \cos(\psi_a - \psi_b) \} & \text{si } Y_{snm} \text{ es imaginario} \end{cases} .\tag{54}$$

II.1.4 El conjunto ortogonal completo de modos de la fibra óptica

II.1.4.1 Introducción

En la figura 26 se pueden apreciar los parámetros que se utilizan para resolver las ecuaciones de Maxwell. El núcleo se representa como un cilindro de radio a , mientras se supone que la cubierta tiene radio infinito.

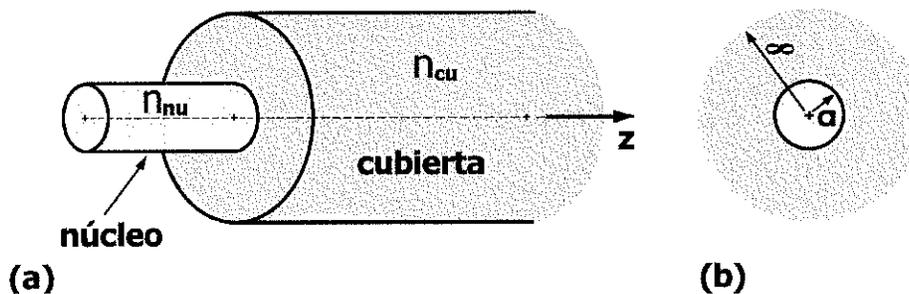


Figura 26: Representación de una fibra óptica que muestra los parámetros utilizados en la descripción de los modos. (a) Fibra óptica. (b) Vista frontal.

Es posible representar el vector de propagación, cuyas componentes se muestran en la figura 27 como

$$\vec{q} = \begin{cases} k_{cu} \zeta(\xi) \hat{\rho} + k_{cu} \gamma(\xi) \hat{z} & \text{para } \rho \leq a \\ k_{cu} \xi \hat{\rho} + k_{cu} \gamma(\xi) \hat{z} & \text{para } \rho > a \end{cases} \quad (55)$$

donde

$$\zeta(\xi) = \sqrt{\frac{2\Delta}{1-2\Delta} + \xi^2} \quad (56)$$

y

$$\gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (57)$$

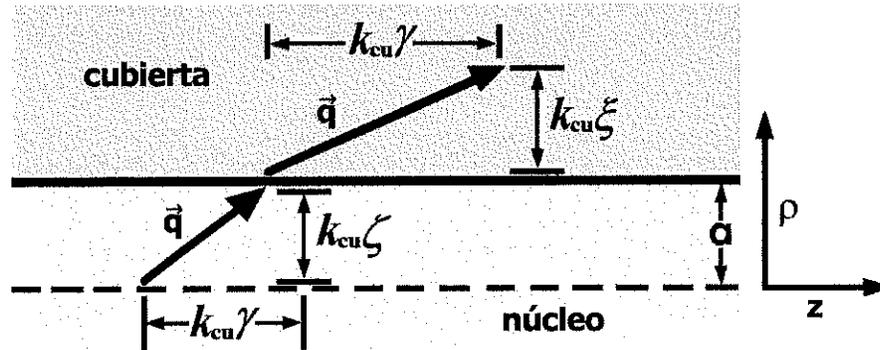


Figura 27: Componentes del vector de propagación de un modo de la fibra óptica. Compárese con la Figura 9a.

En un primer caso, se hace la suposición de que ξ toma algún valor imaginario $\xi = i\bar{\xi}$. Cuando esto es así, la solución en la cubierta se expresa en términos de la función modificada de Bessel, función que decrece rápidamente para valores de $\rho > a$. Esto indica que no existe propagación en dirección radial y que los campos quedan confinados casi por completo en el interior del núcleo. Las soluciones así obtenidas son un conjunto discreto de *modos guiados*, que se concentran en el interior del núcleo y propagan energía a lo largo de éste.

En un segundo caso, se supone que ξ toma valores reales. Cuando esto es así la propagación en dirección radial sí existe y la dependencia de los campos con el radio sigue un comportamiento oscilatorio en todo el espacio, gobernado por las funciones de Bessel y de Newman. Las soluciones así obtenidas corresponden a dos conjuntos mutuamente ortogonales de *modos radiativos*. La energía de un modo

radiativo se propaga hacia el espacio, en vez de hacerlo a través del interior de la fibra, como lo hace un modo guiado.

Aunque para todos los valores reales de ξ se obtiene la misma expresión matemática, existen dos casos que son físicamente diferentes. A partir de la ecuación (57) puede analizarse la transición entre valores reales de γ y valores imaginarios. Cuando $\xi < 1$, γ tiene un valor real, lo que de acuerdo a (18) significa que hay propagación neta de energía en dirección z . Este caso corresponde a un *modo radiativo propagante*. Cuando $\xi > 1$, la ecuación (18) predice que los campos se atenuarán exponencialmente en dirección z , por lo que no existirá propagación neta de energía en esta dirección. Este es el caso de un *modo radiativo evanescente*. Los distintos tipos de modos y su relación con el valor de ξ se esquematizan en la figura 28.

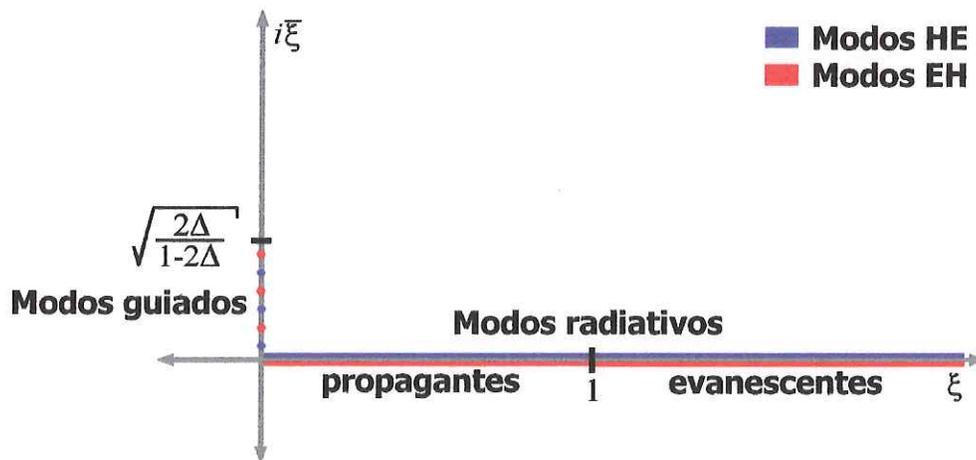


Figura 28: Espectro de modos en una fibra óptica. Existe un cierto número de modos guiados y dos conjuntos continuos de modos radiativos. Los modos radiativos pueden ser propagantes o evanescentes.

Las expresiones exactas para los modos guiados de una fibra óptica fueron calculados por Snitzer (1961) mucho tiempo atrás. Tiempo después Gloge (1971) encontró expresiones para estos modos en aproximación de guiado débil. La aproximación de Gloge se utiliza extensivamente con bastante éxito en la mayoría de las aplicaciones prácticas de las fibras ópticas comerciales.

Como ya se mencionó antes, los modos radiativos se presentan en dos conjuntos continuos diferentes, ortogonales uno con el otro. El hecho de que pertenezcan a conjuntos continuos, provoca que la obtención de sus constantes de normalización presente algunas dificultades. Dos conjuntos de modos radiativos propagantes en aproximación de guiado débil fueron presentados por Marcuse (1974). Sin utilizar aproximación, Snyder (1971) presenta dos conjuntos de modos radiativos a los que llama modos ITE e ITM. En su libro explica el procedimiento que debe utilizarse para obtenerlos (Snyder, 1983). Morita, señala que no existe una única forma de separar los modos en dos conjuntos y presenta cuatro opciones posibles, una de ellas equivalente a los conjuntos de Snyder. Morita (1988) también aporta un método sencillo que puede utilizarse para normalizar los modos radiativos.

A continuación se presentan las expresiones exactas para un conjunto ortogonal completo de modos de una fibra óptica. El método utilizado es el descrito por Snyder, complementado por el procedimiento de normalización de Morita. Las dos formas de separar los dos conjuntos de modos radiativos presentadas aquí, corresponden a dos de las opciones propuestas por este último.

II.1.4.2 Modos guiados

Se comenzará con los modos guiados. Ya se mencionó que existe un cierto número discreto de valores de $\bar{\xi} = -i\xi$ que pueden satisfacer las condiciones de frontera. Estos valores son las soluciones de la ecuación característica

$$[\eta_{1p} + \eta_{2p} \left[\frac{1}{1-2\Delta} \eta_{1p} + \eta_{2p} \right]] = \left(\frac{2\Delta}{1-2\Delta} \right)^2 \frac{p^2 \gamma^2}{k_{cu}^4 \zeta^4 \bar{\xi}^4 a^4} \quad (58)$$

donde

$$\eta_{1p} = \frac{J'_p(k_{cu} \zeta a)}{k_{cu} \zeta a J_p(k_{cu} \zeta a)} \quad \eta_{2p} = \frac{K'_p(k_{cu} \bar{\xi} a)}{k_{cu} \bar{\xi} a K_p(k_{cu} \bar{\xi} a)} \quad (59)$$

Cuando $p = 0$, los modos guiados son transversales. Si resolvemos

$$[\eta_{1p} + \eta_{2p}] = 0 \quad (60)$$

encontramos valores de $\bar{\xi}$ correspondientes a modos TE, mientras que si resolvemos

$$\left[\frac{1}{1-2\Delta} \eta_{1p} + \eta_{2p} \right] = 0 \quad (61)$$

los encontramos correspondientes a modos TM.

Cuando $p \neq 0$, las soluciones se dividen en aquellas para las que

$$\left[\frac{1}{1-2\Delta} \eta_{1p} + \eta_{2p} \right] < 0 \quad (62)$$

lo que corresponde a un modo híbrido HE y aquellas para las que

$$\left[\frac{1}{1-2\Delta} \eta_{1p} + \eta_{2p} \right] > 0 \quad (63)$$

las que corresponden a modos híbridos EH.

Cada solución de la ecuación característica se identificará como $\bar{\xi}_{rpq}$. Los valores de ζ_{rpq} y de γ_{rpq} quedan automáticamente determinados por las ecuaciones (56) y (57). En esta nomenclatura $r=1$ identifica a un modo HE y $r=2$ a un modo EH. El subíndice p representa el orden de la función de Bessel en la ecuación característica, mientras que q sirve para distinguir entre distintos valores que satisfacen la ecuación para un mismo valor de p . Todos los valores se encuentran siempre en el intervalo $\left(0, \sqrt{\frac{2\Delta}{1-2\Delta}}\right)$ como se muestra en la figura 28. Para fibras unimodo donde el parámetro de la fibra V es pequeño, sólo existe una solución de la ecuación característica representada por $\bar{\xi}_{111}$. Los modos de la fibra óptica también pueden clasificarse en horizontales y verticales, de acuerdo a la explicación del pie de la figura 25. Se utilizará un subíndice adicional t para representar esta distinción. De acuerdo a esto $t=1$ corresponderá a un modo horizontal y $t=2$ a un modo vertical.

Los modos HE pueden entonces representarse como

$$\hat{\xi}_{1pq}^E(\rho, \phi) = \begin{cases} \frac{g_{1pq}}{\tilde{J}_{1pq}} \left[\begin{aligned} & \left[\gamma_{1pq}^2 J'_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) X_{1pq} + \frac{p}{k_{cu} \zeta_{1pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ & \mp \left[\frac{p \gamma_{1pq}^2}{k_{cu} \zeta_{1pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) X_{1pq} + J'_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{aligned} \right] & si \ \rho \leq a \\ \\ \frac{g_{1pq}}{\tilde{K}_{1pq}} \left[\begin{aligned} & \left[\gamma_{1pq}^2 K'_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) X_{1pq} + \frac{p}{k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ & \mp \left[\frac{p \gamma_{1pq}^2}{k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) X_{1pq} + K'_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{aligned} \right] & si \ \rho > a \end{cases} \quad (64)$$

$$\hat{\xi}_{1pq}^H(\rho, \phi) = \begin{cases} \frac{g_{1pq}}{\tilde{J}_{1pq}} \left[\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1-2\Delta} J'_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) X_{1pq} + \frac{p}{k_{cu} \zeta_{1pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ & \mp \left[\frac{1}{1-2\Delta} \frac{p}{k_{cu} \zeta_{1pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) X_{1pq} + J'_p(k_{cu} \zeta_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{aligned} \right] & si \ \rho \leq a \\ \\ \frac{g_{1pq}}{\tilde{K}_{1pq}} \left[\begin{aligned} & \left[K'_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) X_{1pq} + \frac{p}{k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ & \mp \left[\frac{p}{k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) X_{1pq} + K'_p(k_{cu} \bar{\zeta}_{1pq} \rho) \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{aligned} \right] & si \ \rho > a \end{cases} \quad ;(65)$$

mientras que los modos EH se representan por medio de

$$\hat{\zeta}_{2pq}^E(\rho, \phi) = \begin{cases} \frac{g_{2pq}}{\tilde{J}_{2pq}} \left[\begin{array}{l} \left[J'_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) + \frac{p}{k_{cu} \zeta_{2pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \left[\frac{p}{k_{cu} \zeta_{2pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) + J'_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho \leq a \\ \frac{g_{2pq}}{\tilde{K}_{2pq}} \left[\begin{array}{l} \left[K'_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) + \frac{p}{k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \left[\frac{p}{k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) + K'_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (66)$$

$$\hat{\zeta}_{2pq}^H(\rho, \phi) = \begin{cases} \frac{g_{2pq}}{\tilde{J}_{2pq}} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{1}{1-2\Delta} J'_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) + \frac{p\gamma_{2pq}^2}{k_{cu} \zeta_{2pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \left[\frac{1}{1-2\Delta} \frac{p}{k_{cu} \zeta_{2pq} \rho} J_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) + \gamma_{2pq}^2 J'_p(k_{cu} \zeta_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho \leq a \\ \frac{g_{2pq}}{\tilde{K}_{2pq}} \left[\begin{array}{l} \left[K'_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) + \frac{p\gamma_{2pq}^2}{k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \left[\frac{p}{k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho} K_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) + \gamma_{2pq}^2 K'_p(k_{cu} \bar{\xi}_{2pq} \rho) X_{2pq} \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (67)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{rpq} &= \zeta_{rpq} J_p(k_{cu} \zeta_{rpq} a) \\ \tilde{K}_{rpq} &= \xi_{rpq} K_p(k_{cu} \xi_{rpq} a) \end{aligned} \quad (68)$$

$$X_{1pq} = -\frac{1}{\gamma_{1pq}} \left[\frac{[\eta_{1p} + \eta_{2p}]}{\left[\frac{1}{1-2\Delta} \eta_{1p} + \eta_{2p} \right]} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad X_{2pq} = \frac{1}{\gamma_{2pq}} \left[\frac{\left[\frac{1}{1-2\Delta} \eta_{1p} + \eta_{2p} \right]}{[\eta_{1p} + \eta_{2p}]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (69)$$

$$g_{1pq} = \left(\frac{\epsilon_p}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{J}_{1pq}}{a[\Omega_{1pq}]^{\frac{1}{2}}}, \quad g_{2pq} = \left(\frac{\epsilon_p}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{J}_{2pq}}{a[\Omega_{2pq}]^{\frac{1}{2}}} \quad (70)$$

$$\Omega_{1pq} = \tilde{J}_{1pq}^2 \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\zeta_{1pq}^2} (\gamma_{1pq}^2 \frac{1}{1-2\Delta} X_{1pq}^2 + 1) \left\{ \left[\frac{J'_p(k_{cu} \zeta_{1pq} a)}{J_p(k_{cu} \zeta_{1pq} a)} \right]^2 - \frac{p^2 - k_{cu}^2 \zeta_{1pq}^2 a^2}{k_{cu}^2 \zeta_{1pq}^2 a^2} + \frac{2J'_p(k_{cu} \zeta_{1pq} a)}{k_{cu} \zeta_{1pq} a J_p(k_{cu} \zeta_{1pq} a)} \right\} \\ & - \frac{1}{\bar{\xi}_{1pq}^2} (\gamma_{1pq}^2 X_{1pq}^2 + 1) \left[\left[\frac{K'_p(k_{cu} \bar{\xi}_{1pq} a)}{K_p(k_{cu} \bar{\xi}_{1pq} a)} \right]^2 - \frac{p^2 + k_{cu}^2 \bar{\xi}_{1pq}^2 a^2}{k_{cu}^2 \bar{\xi}_{1pq}^2 a^2} + \frac{2K'_p(k_{cu} \bar{\xi}_{1pq} a)}{k_{cu} \bar{\xi}_{1pq} a K_p(k_{cu} \bar{\xi}_{1pq} a)} \right] \\ & + 2pX_{1pq} \left[\frac{\left(\gamma_{1pq}^2 + \frac{1}{1-2\Delta} \right)}{k_{cu}^2 \zeta_{1pq}^4 a^2} - \frac{(\gamma_{1pq}^2 + 1)}{k_{cu}^2 \bar{\xi}_{1pq}^4 a^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$$\Omega_{2pq} = \tilde{J}_{2pq}^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\zeta_{2pq}^2} \left(\frac{1}{1-2\Delta} + \gamma_{2pq}^2 X_{2pq}^2 \right) \left[\frac{J'_p(k_{cu}\zeta_{2pq}a)}{J_p(k_{cu}\zeta_{2pq}a)} \right]^2 - \frac{p^2 - k_{cu}^2 \zeta_{2pq}^2 a^2}{k_{cu}^2 \zeta_{2pq}^2 a^2} + \frac{2J'_p(k_{cu}\zeta_{2pq}a)}{k_{cu}\zeta_{2pq}a J_p(k_{cu}\zeta_{2pq}a)} \\ & - \frac{1}{\bar{\xi}_{2pq}^2} (1 + \gamma_{2pq}^2 X_{2pq}^2) \left[\frac{K'_n(k_{cu}\bar{\xi}_{2pq}a)}{K_n(k_{cu}\bar{\xi}_{2pq}a)} \right]^2 - \frac{p^2 + k_{cu}^2 \bar{\xi}_{2pq}^2 a^2}{k_{cu}^2 \bar{\xi}_{2pq}^2 a^2} + \frac{2K'_p(k_{cu}\bar{\xi}_{2pq}a)}{k_{cu}\bar{\xi}_{2pq}a K_p(k_{cu}\bar{\xi}_{2pq}a)} \\ & + 2pX_{2pq} \left[\frac{\left(\gamma_{2pq}^2 + \frac{1}{1-2\Delta} \right)}{k_{cu}^2 \zeta_{2pq}^4 a^2} - \frac{(\gamma_{2pq}^2 + 1)}{k_{cu}^2 \bar{\xi}_{2pq}^4 a^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Estos modos satisfacen la condición de ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{\xi}_{rpqt}^E(\rho, \phi) \cdot \hat{\xi}_{RPQT}^H(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi = \delta_{r,R} \delta_{p,P} \delta_{q,Q} \delta_{t,T} \quad (73)$$

Los campos totales debidos a modos guiados dentro de una fibra óptica pueden representarse entonces como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}^g(\rho, \phi, z, t) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=1}^{q_{\max}} \sum_{t=1}^2 A_{rpqt}^g \hat{\xi}_{rpqt}^E(\rho, \phi) \exp[\pm i k_{cu} \gamma_{rpq} z - i \omega t] \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}^g(\rho, \phi, z, t) &= \sum_{rpqt} A_{rpqt}^g Y_{rpq} \hat{\xi}_{rpqt}^H(\rho, \phi) \exp[\pm i k_{cu} \gamma_{rpq} z - i \omega t] \end{aligned} \quad (74)$$

donde

$$\begin{aligned} Y_{1pq} &= \frac{\gamma_{1pq}}{Z_{cu}} \\ Y_{2pq} &= \frac{1}{\gamma_{2pq} Z_{cu}} \end{aligned} \quad (75)$$

II.1.4.3 Modos radiativos

Para los modos radiativos, iniciaremos estableciendo dos conjuntos de modos no ortogonales entre sí, que se utilizarán como bloques de construcción para formar dos conjuntos de modos que sí lo sean. Estos modos-bloques de construcción que tienen la propiedad de ser transversales en la región interior del núcleo, se expresan como

$$\bar{\mathbf{P}}_{pt}^E(\xi, \rho, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta(\xi)} \left[\begin{array}{l} \frac{p}{k_{cu}\zeta(\xi)\rho} J_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp J'_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho \leq a \\ \frac{1}{\xi} \left[\begin{array}{l} \left[\gamma^2 C'_{3p}[k_{cu}\xi\rho] + \frac{p}{k_{cu}\xi\rho} C_{2p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \left[\frac{p\gamma^2}{k_{cu}\xi\rho} C_{3p}[k_{cu}\xi\rho] + C'_{2p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (76)$$

y

$$\bar{\mathbf{P}}_{pt}^H(\xi, \rho, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta(\xi)} \left[\begin{array}{l} \frac{p}{k_{cu}\zeta(\xi)\rho} J_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp J'_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho \leq a \\ \frac{1}{\xi} \left[\begin{array}{l} \left[C'_{3p}[k_{cu}\xi\rho] + \frac{p}{k_{cu}\xi\rho} C_{2p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \left[\frac{p}{k_{cu}\xi\rho} C_{3p}[k_{cu}\xi\rho] + C'_{2p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{array} \right] & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (77)$$

y

$$\bar{Q}_{pt}^E(\xi, \rho, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta(\xi)} \begin{bmatrix} J'_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \frac{p}{k_{cu}\zeta(\xi)\rho} J_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{bmatrix} & \text{si } \rho \leq a \\ \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} \left[C'_{1p}[k_{cu}\xi\rho] + \frac{p}{k_{cu}\xi\rho} C_{3p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \left[\frac{p}{k_{cu}\xi\rho} C_{1p}[k_{cu}\xi\rho] + C'_{3p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{bmatrix} & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (78)$$

y

$$\bar{Q}_{pt}^H(\xi, \rho, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{(1-2\Delta)\zeta(\xi)} \begin{bmatrix} J'_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \mp \frac{p}{k_{cu}\zeta(\xi)\rho} J_p[k_{cu}\zeta(\xi)\rho] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{bmatrix} & \text{si } \rho \leq a \\ \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} \left[C'_{1p}[k_{cu}\xi\rho] + \frac{p\gamma^2}{k_{cu}\xi\rho} C_{3p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \cos(p\phi) \\ \sin(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\rho} \\ \pm \left[\frac{p}{k_{cu}\xi\rho} C_{1p}[k_{cu}\xi\rho] + \gamma^2 C'_{3p}[k_{cu}\xi\rho] \right] \begin{Bmatrix} \sin(p\phi) \\ \cos(p\phi) \end{Bmatrix} \hat{\phi} \end{bmatrix} & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (79)$$

donde el símbolo C_{jp} representa una función cilíndrica en ρ , dada por

$$C_{jp}(k_{cu}\xi\rho) = c_{jp}(\xi)J_p[k_{cu}\xi\rho] + d_{jp}(\xi)Y_p[k_{cu}\xi\rho], \quad (80)$$

$$\begin{aligned} c_{1p}(\xi) &= -k_{cu}\xi \frac{\pi a}{2} \left[\frac{\xi}{\zeta(\xi)(1-2\Delta)} J'_p[k_{cu}\zeta(\xi)a] Y_p[k_{cu}\xi a] - J_p[k_{cu}\zeta(\xi)a] Y'_p[k_{cu}\xi a] \right] \\ d_{1p}(\xi) &= k_{cu}\xi \frac{\pi a}{2} \left[\frac{\xi}{\zeta(\xi)(1-2\Delta)} J'_p[k_{cu}\zeta(\xi)a] J_p[k_{cu}\xi a] - J_p[k_{cu}\zeta(\xi)a] J'_p[k_{cu}\xi a] \right] \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned}
c_{2p}(\xi) &= -k_{cu} \xi \frac{\pi a}{2} \left[\frac{\xi}{\zeta(\xi)} J'_p[k_{cu} \zeta(\xi) a] Y_p[k_{cu} \xi a] - J_p[k_{cu} \zeta(\xi) a] Y'_p[k_{cu} \xi a] \right] \\
d_{2p}(\xi) &= k_{cu} \xi \frac{\pi a}{2} \left[\frac{\xi}{\zeta(\xi)} J'_p[k_{cu} \zeta(\xi) a] J_p[k_{cu} \xi a] - J_p[k_{cu} \zeta(\xi) a] J'_p[k_{cu} \xi a] \right]
\end{aligned} \tag{82}$$

y

$$\begin{aligned}
c_{3p}(\xi) &= \frac{\pi \Delta}{1-2\Delta} \left[\frac{p}{\zeta(\xi)^2} J_p[k_{cu} \zeta(\xi) a] Y_p[k_{cu} \xi a] \right] \\
d_{3p}(\xi) &= -\frac{\pi \Delta}{1-2\Delta} \left[\frac{p}{\zeta(\xi)^2} J_p[k_{cu} \zeta(\xi) a] J_p[k_{cu} \xi a] \right]
\end{aligned} \tag{83}$$

Cuando $\Delta \rightarrow 0$ tenemos que $\zeta(\xi) \rightarrow \xi$ así que

$$\begin{aligned}
c_{1p}(\xi) &\rightarrow 1, c_{2p}(\xi) \rightarrow 1, c_{3p}(\xi) \rightarrow 0, \\
d_{1p}(\xi) &\rightarrow 1, d_{2p}(\xi) \rightarrow 1, d_{3p}(\xi) \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{84}$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned}
C_{1p}(k_{cu} \xi \rho) &\rightarrow J_p(k_{cu} \xi \rho) \\
C_{2p}(k_{cu} \xi \rho) &\rightarrow J_p(k_{cu} \xi \rho) \\
&y \\
C_{3p}(k_{cu} \xi \rho) &\rightarrow 0
\end{aligned} \tag{85}$$

En este caso límite los modos \vec{P}_{pt} y \vec{Q}_{pt} son ortogonales entre sí. Es en esta propiedad en que se basa la aproximación de guiado débil para definir modos casi-transversales. En el caso general, los dos conjuntos ortogonales se forman como una combinación de los modos \vec{P}_{pt} y \vec{Q}_{pt} , como se hace a continuación.

Para modos HE

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{1p}^E(\xi, \rho, \phi) &= f_{1p}(\xi) \left\{ P_{p1}^E(\xi, \rho, \phi) + \gamma^2 Q_{p1}^E(\xi, \rho, \phi) X_{1p}(\xi) \right\} \\ \hat{\xi}_{1p}^H(\xi, \rho, \phi) &= f_{1p}(\xi) \left\{ P_{p1}^H(\xi, \rho, \phi) + Q_{p1}^H(\xi, \rho, \phi) X_{1p}(\xi) \right\}\end{aligned}\quad (86)$$

Para modos EH

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{2p}^E(\xi, \rho, \phi) &= f_{2p}(\xi) \left\{ Q_{p1}^E(\xi, \rho, \phi) + P_{p1}^E(\xi, \rho, \phi) X_{2p}(\xi) \right\} \\ \hat{\xi}_{2p}^H(\xi, \rho, \phi) &= f_{2p}(\xi) \left\{ Q_{p1}^H(\xi, \rho, \phi) + \gamma^2 P_{p1}^H(\xi, \rho, \phi) X_{2p}(\xi) \right\}\end{aligned}\quad (87)$$

Se pueden elegir $X_{1p}(\xi)$ y $X_{2p}(\xi)$ en cualquier forma mientras ésta satisfaga la condición de ortogonalidad. Las opciones más sencillas son

$$\begin{aligned}X_{1p}(\xi) &= 0 \\ X_{2p}(\xi) &= \frac{\left[c_{1p}(\xi)c_{3p}(\xi) + d_{1p}(\xi)d_{3p}(\xi) \right] + \left[c_{3p}(\xi)c_{2p}(\xi) + d_{3p}(\xi)d_{2p}(\xi) \right]}{\left[c_{2p}(\xi)^2 + d_{2p}(\xi)^2 \right] + \gamma^2 \left[c_{3p}(\xi)^2 + d_{3p}(\xi)^2 \right]}\end{aligned}\quad (88)$$

(caso II de Morita), o bien

$$\begin{aligned}X_{1p}(\xi) &= \frac{\left[c_{1p}(\xi)c_{3p}(\xi) + d_{1p}(\xi)d_{3p}(\xi) \right] + \left[c_{3p}(\xi)c_{2p}(\xi) + d_{3p}(\xi)d_{2p}(\xi) \right]}{\left[c_{1p}(\xi)^2 + d_{1p}(\xi)^2 \right] + \gamma^2 \left[c_{3p}(\xi)^2 + d_{3p}(\xi)^2 \right]} \\ X_{2p}(\xi) &= 0\end{aligned}\quad (89)$$

(caso III de Morita); donde las funciones de normalización se expresan por

$$\begin{aligned}f_{1p}(\xi) &= k_{cu} \xi \left(\frac{\epsilon_p}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\Omega_{1p}(\xi) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ f_{2p}(\xi) &= k_{cu} \xi \left(\frac{\epsilon_p}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\Omega_{2p}(\xi) \right]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad ; \quad (90)$$

y

$$\begin{aligned} \Omega_{1p}(\xi) &= \left[\begin{array}{l} \{c_{2p}(\xi)^2 + d_{2p}(\xi)^2\} + \gamma^2 \{c_{3p}(\xi)^2 + d_{3p}(\xi)^2\} \\ -\gamma^2 X_{1p}(\xi) \{c_{3p}(\xi)[c_{1p}(\xi) + c_{2p}(\xi)] + d_{3p}(\xi)[d_{1p}(\xi) + d_{2p}(\xi)]\} \end{array} \right] \\ \Omega_{2p}(\xi) &= \left[\begin{array}{l} \{c_{1p}(\xi)^2 + d_{1p}(\xi)^2\} + \gamma^2 \{c_{3p}(\xi)^2 + d_{3p}(\xi)^2\} \\ -\gamma^2 X_{2p}(\xi) \{c_{3p}(\xi)[c_{1p}(\xi) + c_{2p}(\xi)] + d_{3p}(\xi)[d_{1p}(\xi) + d_{2p}(\xi)]\} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (91)$$

Cuando $\Delta \rightarrow 0$, $X_{1p}(\xi) \rightarrow 0$ y $X_{2p}(\xi) \rightarrow 0$ por lo que los modos se aproximan a ser transversales. También puede demostrarse que en este límite $\Omega_{1p}(\xi) \rightarrow 1$ y $\Omega_{2p}(\xi) \rightarrow 1$.

Estos modos radiativos satisfacen la condición de ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{\xi}_{rpt}^E(\xi, \rho, \phi) \cdot \hat{\xi}_{RPT}^H(\xi', \rho, \phi) \rho d\rho d\phi = \delta_{r,R} \delta_{p,P} \delta_{t,T} \delta(\xi - \xi') \quad (92)$$

Los campos totales debidos a modos radiativos (propagantes y evanescentes) pueden expresarse entonces por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}(\rho, \phi, z, t) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{t=1}^2 \int_0^{\infty} A_{rpt}(\xi) \hat{\xi}_{rpt}(\xi, \rho, \phi)^E d\xi \cdot \exp[\pm ik_0 \gamma(\xi) z - i \omega t] \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}(\rho, \phi, z, t) &= \sum_{rpt} \int_0^{\infty} A_{rpt}(\xi) Y_{rpt}(\xi) \hat{\xi}_{rpt}(\xi, \rho, \phi)^H d\xi \cdot \exp[\pm ik_0 \gamma(\xi) z - i \omega t] \end{aligned} \quad (93)$$

donde

$$\begin{aligned} Y_{1pt}(\xi) &= \frac{\gamma(\xi)}{Z_{cu}} \\ Y_{2pt}(\xi) &= \frac{1}{\gamma(\xi) Z_{cu}} \end{aligned} \quad (94)$$

Por lo tanto, los campos totales que existen dentro de una fibra óptica pueden expresarse como la suma de las ecuaciones (74) y (93). Las condiciones de ortogonalidad de estos modos están dadas por las ecuaciones (73) y (92) y por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{\xi}_{r_{pq}l}^E(\rho, \phi) \cdot \hat{\xi}_{RPT}^H(\xi, \rho, \phi) \rho d\rho d\phi = 0 . \quad (95)$$

Esta última ecuación expresa el hecho de que un modo guiado y un modo radiativo son siempre ortogonales entre sí.

II.1.5 Productos interiores entre modos de distintos conjuntos

II.1.5.1 Productos interiores entre modos de la apertura y modos de Rayleigh

Los productos interiores entre modos de Rayleigh y modos de la guía de onda cilíndrica de paredes conductoras están definidos por

$$I_{snmlr}(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \cdot \hat{\Phi}_r^*(\alpha, \beta, \rho, \phi) \rho d\rho d\phi \quad (96)$$

y se expresan por

$$I_{1nm1}(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \times \frac{(-i)^{n-1} k_{mat} b J'_n[k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)]}{\sqrt{\chi'_{nm}{}^2 - n^2} \left\{ 1 - \left[\frac{k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)}{\chi'_{nm}} \right]^2 \right\}} \sin[n\theta(\alpha, \beta)] \quad (97)$$

$$I_{1nm21}(\alpha, \beta) = -\sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \times \frac{(-i)^{n-1} k_{mat} b J'_n[k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)]}{\sqrt{\chi'_{nm}{}^2 - n^2} \left\{ 1 - \left[\frac{k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)}{\chi'_{nm}} \right]^2 \right\}} \cos[n\theta(\alpha, \beta)] \quad (98)$$

$$I_{1nm12}(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \times (-i)^{n-1} \frac{n J_n[k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)]}{\sqrt{\chi'_{nm}{}^2 - n^2} \cdot \xi(\alpha, \beta)} \cos[n\theta(\alpha, \beta)] \quad (99)$$

$$I_{1nm22}(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \times (-i)^{n-1} \frac{n J_n[k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)]}{\sqrt{\chi'_{nm}{}^2 - n^2} \cdot \xi(\alpha, \beta)} \sin[n\theta(\alpha, \beta)] \quad (100)$$

$$I_{2nm11} = 0 \quad (101)$$

$$I_{2nm21} = 0 \quad (102)$$

$$I_{2nm12} = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \times (-i)^{n-1} \frac{\xi(\alpha, \beta) J_n [k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)]}{(\xi(\alpha, \beta))^2 - \left(\frac{\chi_{nm}}{k_{mat} b}\right)^2} \cos[n\theta(\alpha, \beta)] \quad (103)$$

$$I_{2nm12} = \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\pi}} \times (-i)^{n-1} \frac{\xi(\alpha, \beta) J_n [k_{mat} b \xi(\alpha, \beta)]}{(\xi(\alpha, \beta))^2 - \left(\frac{\chi_{nm}}{k_{mat} b}\right)^2} \sin[n\theta(\alpha, \beta)] \quad (104)$$

donde

$$\xi(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (105)$$

$$\theta(\alpha, \beta) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (106)$$

En secciones subsecuentes será necesario evaluar integrales del tipo

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snmlr}(\alpha, \beta) I_{SNMLr}^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (107)$$

Esta integral en coordenadas cilíndricas queda como

$$\int_0^{2\pi\infty} \int_0^{\infty} Y_r(\xi) I_{snmlr}(\xi, \theta) I_{SNMLr}^*(\xi, \theta) \xi d\xi d\theta. \quad (108)$$

La integral con respecto al ángulo se puede realizar analíticamente, llevando a

$$\int_0^{2\pi\infty} \int_0^{\infty} Y_1(\xi) I_{1nml1}(\xi, \theta) I_{1NML1}^*(\xi, \theta) \xi d\xi d\theta = \frac{2(k_{mat} b)^2}{\sqrt{\chi'_{nm}{}^2 - n^2} \cdot \sqrt{\chi'_{nM}{}^2 - n^2}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sqrt{1-\xi^2} [J'_n(k_{mat} b \xi)]^2}{\left[1 - \left(\frac{k_{mat} b \xi}{\chi'_{nm}}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{k_{mat} b \xi}{\chi'_{nM}}\right)^2\right]} d\xi \delta_{n,N} \delta_{1,L}. \quad (109)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty Y_2(\xi) I_{1nml2}(\xi, \theta) I_{1NML2}^*(\xi, \theta) \xi d\xi d\theta = \frac{2n^2}{\sqrt{\chi_{nm}'^2 - n^2} \cdot \sqrt{\chi_{nM}'^2 - n^2}} \int_0^\infty \frac{[J_n(k_{mat} b \xi)]^2}{\xi \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \delta_{n,N} \delta_{l,L} \quad (110)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty Y_2(\xi) I_{1nml2}(\xi, \theta) I_{2NML2}^*(\xi, \theta) \xi d\xi d\theta = \frac{2(k_{mat} b)^2 n}{\sqrt{\chi_{nm}'^2 - n^2} \cdot \int_0^\infty \frac{\xi [J_n(k_{mat} b \xi)]^2}{\sqrt{1 - \xi^2} [(k_{mat} b \xi)^2 - \chi_{nM}'^2]} d\xi} d\xi \delta_{n,N} \delta_{l,L} \quad (111)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty Y_2(\xi) I_{2nml2}(\xi, \theta) I_{2NML2}^*(\xi, \theta) \xi d\xi d\theta = 2(k_{mat} b)^4 \int_0^\infty \frac{\xi^3 [J_n(k_{mat} b \xi)]^2}{\sqrt{1 - \xi^2} [(k_{mat} b \xi)^2 - \chi_{nm}'^2] [(k_{mat} b \xi)^2 - \chi_{nM}'^2]} d\xi \delta_{n,N} \delta_{l,L} \quad (112)$$

Las integrales simples así obtenidas, se deben resolver numéricamente.

II.1.5.2 Productos interiores entre modos de la guía de onda cilíndrica de paredes conductoras y modos de la fibra óptica.

Los productos interiores entre modos de la guía de onda cilíndrica de paredes conductoras y los modos radiativos de la fibra óptica, se representan por

$$J_{smrlpl}(\xi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{\Psi}_{smrl}(\rho, \phi) \cdot \hat{\xi}_{rpl}^{H^*}(\xi, \rho, \phi) \rho d\rho d\phi \quad (113)$$

y se expresan por

$$J_{1nml1pl}(\xi) = \sqrt{2\xi} \frac{\xi}{\zeta(\xi)} \frac{1}{\sqrt{\chi_{nm}'^2 - n^2} \cdot \sqrt{\Omega_{1n}(\xi)}} \left[\frac{n}{1 - 2\Delta} X_{1n}(\xi) \frac{J_n[k_{cu} b \zeta(\xi)]}{\zeta(\xi)} - k_{cu} b \frac{\chi_{nm}'^2 J_n[k_{cu} b \zeta(\xi)]}{[k_{cu} b \zeta(\xi)]^2 - \chi_{nm}'^2} \right] \delta_{n,p} \delta_{l,l} \quad (114)$$

$$J_{1nml2pt}(\xi) = \sqrt{2\xi} \frac{\xi}{\zeta(\xi)} \frac{1}{\sqrt{\chi_{nm}'^2 - n^2} \cdot \sqrt{\Omega_{2n}(\xi)}} \times$$

$$\left[\frac{n}{1-2\Delta} \frac{J_n[k_{cu}b\zeta(\xi)]}{\zeta(\xi)} - \gamma(\xi)^2 k_{cu} b X_{2n}(\xi) \frac{\chi_{nm}'^2 J_n'[k_{cu}b\zeta(\xi)]}{[k_{cu}b\zeta(\xi)]^2 - \chi_{nm}'^2} \right] \delta_{n,p} \delta_{l,t} \quad (115)$$

$$J_{2nml1pt}(\xi) = \frac{\sqrt{2\xi}}{\sqrt{\Omega_{1n}(\xi)}} \xi \left[\frac{1}{1-2\Delta} X_{1n}(\xi) \frac{k_{cu}^2 b^2 J_n[k_{cu}b\zeta(\xi)]}{[k_{cu}b\zeta(\xi)]^2 - \chi_{nm}'^2} \right] \delta_{n,p} \delta_{l,t} \quad (116)$$

$$J_{2nml2pt}(\xi) = \frac{\sqrt{2\xi}}{\sqrt{\Omega_{2n}(\xi)}} \xi \left[\frac{1}{1-2\Delta} \frac{k_{cu}^2 b^2 J_n[k_{cu}b\zeta(\xi)]}{[k_{cu}b\zeta(\xi)]^2 - \chi_{nm}'^2} \right] \delta_{n,p} \delta_{l,t} \quad (117)$$

Puede notarse que el hacer $X_{1n}(\xi)=0$ como en (88), proporciona unas expresiones ligeramente más sencillas que si se hace $X_{2n}(\xi)=0$ como en (89). En el desarrollo del modelo propuesto en este trabajo, será necesario evaluar integrales del tipo

$$\int_0^{\infty} Y_r(\xi) J_{snmlrpt}(\xi) J_{SNMLrpt}^*(\xi) \xi d\xi \quad (118)$$

lo que se realizará numéricamente. Se puede verificar que al hacer $\Delta=0$ las expresiones (118) se vuelven idénticas a las expresiones (109-112).

Por otra parte, los productos interiores equivalentes para los modos guiados de la fibra óptica se representan por

$$K_{snmlr pqt} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \cdot \hat{\zeta}_{r pqt}^{H*}(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi \quad (119)$$

y se describen por

$$K_{1nml1pqt} = \frac{2}{\sqrt{\chi'_{nm}{}^2 - n^2} \cdot \sqrt{\Omega_{2nq}}} \times \left\{ \frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{nq}} X_{1nq} J_p(k_{cu} b \zeta_{nq}) - \frac{b}{a} \frac{\chi'_{nm}{}^2}{k_{cu}{}^2 b^2 \zeta_{nq}{}^2 - \chi'_{nm}{}^2} J'_n(k_{cu} b \zeta_{nq}) \right\} \delta_{n,p} \delta_{l,t} \quad (120)$$

$$K_{1nml2pqt} = \frac{2}{\sqrt{n^2 - \chi'_{nm}{}^2} \cdot \sqrt{\Omega_{2nq}}} \times \left\{ \frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{nq}} J_p(k_{cu} b \zeta_{nq}) - \frac{b}{a} \frac{\gamma_{nq}{}^2 \chi'_{nm}{}^2}{k_{cu}{}^2 b^2 \zeta_{nq}{}^2 - \chi'_{nm}{}^2} X_{2nq} J'_n(k_{cu} b \zeta_{nq}) \right\} \delta_{n,p} \delta_{l,t} \quad (121)$$

$$K_{2nml1pqt} = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{1nq}}} \left[\frac{1}{1-2\Delta} X_{1nq} \frac{b k_{cu} b \zeta_{nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{nq})}{a k_{cu}{}^2 b^2 \zeta_{nq}{}^2 - \chi_{nm}{}^2} \right] \delta_{n,p} \delta_{l,t} \quad (122)$$

$$K_{2nml2pqt} = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{2nq}}} \left[\frac{1}{1-2\Delta} \frac{b k_{cu} b \zeta_{nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{nq})}{a k_{cu}{}^2 b^2 \zeta_{nq}{}^2 - \chi_{nm}{}^2} \right] \delta_{n,p} \delta_{l,t} \quad (123)$$

Será necesario calcular sumatorias de la forma

$$\sum_{r=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\max} \sum_{t=1}^2 Y_{rpq} K_{snmlrpqt} K_{SNMLrpqt}^* \quad (124)$$

que para facilidad se expresarán como

$$\sum_{r=1}^2 \sum_{pqt} Y_{rpq} K_{snmlrpqt} K_{SNMLrpqt}^* \quad (125)$$

donde

$$\sum_{pqt} Y_{1pq} K_{1nm11pqt} K_{1NML1pqt}^* = \frac{4\gamma_{1nq}}{\sqrt{n^2 - \chi_{nm}'^2} \cdot \sqrt{n^2 - \chi_{nM}'^2} \cdot \Omega_{1nq}} \times$$

$$\sum_q \left[\left\{ \frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{1nq}} X_{1nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{1nq}) - \frac{b}{a} \frac{\chi_{nm}'^2}{k_{cu}^2 b^2 \zeta_{1nq}^2 - \chi_{nm}'^2} J_n'(k_{cu} b \zeta_{1nq}) \right\} \times \delta_{n,N} \delta_{l,L} \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{1nq}} X_{1nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{1nq} b) - \frac{b}{a} \frac{\chi_{nM}'^2}{k_{cu}^2 b^2 \zeta_{1nq}^2 - \chi_{nM}'^2} J_n'(k_{cu} b \zeta_{1nq}) \right\} \right]$$

(126)

$$\sum_{pqt} Y_{2pq} K_{1nm2pqt} K_{1NML2pqt}^* = \frac{4}{\gamma_{2nt} \sqrt{n^2 - \chi_{nm}'^2} \cdot \sqrt{n^2 - \chi_{nM}'^2} \cdot \Omega_{2nq}} \times$$

$$\sum_q \left[\left\{ \frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{2nq}} J_n(k_{cu} b \zeta_{2nq}) - \frac{b}{a} \frac{\gamma_{2nq}^2 \chi_{nm}'^2}{k_{cu}^2 b^2 \zeta_{2nq}^2 b^2 - \chi_{nm}'^2} X_{2nq} J_n'(k_{cu} b \zeta_{2nq}) \right\} \times \delta_{n,N} \delta_{l,L} \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{2nq}} J_n(k_{cu} b \zeta_{2nq}) - \frac{b}{a} \frac{\gamma_{2nq}^2 \chi_{nM}'^2}{k_{cu}^2 b^2 \zeta_{2nq}^2 - \chi_{nM}'^2} X_{2nq} J_n'(k_{cu} b \zeta_{2nq}) \right\} \right]$$

(127)

$$\sum_{pqt} Y_{1pq} K_{2nm11pqt} K_{2NML1pqt}^* =$$

$$\sum_q \frac{4\gamma_{1nq}}{\Omega_{1nq} (k_{cu}^2 b^2 \zeta_{1nq}^2 - \chi_{nm}'^2) (k_{cu}^2 b^2 \zeta_{1nq}^2 - \chi_{nM}'^2)} \left[\frac{1}{1-2\Delta} X_{1nq} \frac{b}{a} k_{cu} b \zeta_{1nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{1nq}) \right]^2 \delta_{n,N} \delta_{l,L}$$

(128)

$$\sum_{pqt} Y_{2pq} K_{2nm2pqt} K_{2NML2pqt}^* =$$

$$\sum_q \frac{4}{\gamma_{2nq} \Omega_{2nq} (k_{cu}^2 b^2 \zeta_{2nq}^2 - \chi_{nm}'^2) (k_{cu}^2 b^2 \zeta_{2nq}^2 - \chi_{nM}'^2)} \left[\frac{1}{1-2\Delta} \frac{b}{a} k_{cu} b \zeta_{2nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{2nq}) \right]^2 \delta_{n,N} \delta_{l,L}$$

(129)

$$\sum_{pqt} Y_{1pq} K_{2nm1pqt} K_{1NML1pqt}^* =$$

$$\sum_q \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{4\gamma_{1nq}}{\sqrt{n^2 - \chi'_{nM}{}^2} \cdot \Omega_{1nq}} \frac{1}{1-2\Delta} X_{1nq} \frac{b k_{cu} b \zeta_{1nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{1nq})}{a k_{cu}^2 b^2 \zeta_{1nq}^2 - \chi_{nm}^2} \times \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{1nq}} X_{1nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{1nq}) - \frac{b}{a} \frac{\chi'_{nM}{}^2}{k_{cu}^2 b^2 \zeta_{1nq}^2 - \chi'_{nM}{}^2} J'_n(k_{cu} b \zeta_{1nq}) \right] \right\} \delta_{n,N} \delta_{l,L} \end{aligned} \right.$$

(130)

$$\sum_{pqt} Y_{2pq} K_{2nm2pqt} K_{1NML2pqt}^* =$$

$$\sum_q \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{4}{\gamma_{2nq} \sqrt{n^2 - \chi'_{nM}{}^2} \cdot \Omega_{2nq}} \frac{1}{1-2\Delta} \frac{b k_{cu} b \zeta_{2nq} J_n(k_{cu} b \zeta_{2nq})}{a k_{cu}^2 b^2 \zeta_{2nq}^2 - \chi_{nm}^2} \times \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{1-2\Delta} \frac{n}{k_{cu} a \zeta_{2nq}} J_n(k_{cu} b \zeta_{2nq}) - \frac{b}{a} \frac{\gamma_{2nq}^2 \chi'_{nM}{}^2}{k_{cu}^2 b^2 \zeta_{2nq}^2 - \chi'_{nM}{}^2} X_{2pq} J'_n(k_{cu} b \zeta_{2nq}) \right] \right\} \delta_{n,N} \delta_{l,L} \end{aligned} \right.$$

(131)

La sumatoria en q deberá resolverse numéricamente.

II.2 El método de momentos

II.2.1 Introducción

El método de momentos es una herramienta para la resolución computacional de ecuaciones integro-diferenciales (Harrington, 1968). Se clasifica entre los métodos de discretización, junto con los métodos de elemento finito y de diferencia finita. Aunque es difícil dar una definición que englobe las distintas variedades del método, se cita aquí una definición que podría ser útil. “El método de momentos consiste en un cierto tipo de técnicas de resolución numérica en las cuales un problema físico es formulado como una ecuación integro-diferencial en un dominio finito y pequeño, en el cual las incógnitas escogidas son discretizadas y resueltas en una computadora digital por medio de un método directo o iterativo” (Wang, 1991).

El primer paso a realizar en este método es la formulación del problema en forma de una ecuación integro-diferencial con un dominio finito y pequeño. El que el dominio sea finito y pequeño, es un requisito necesario para que el problema pueda manejarse dentro de la limitada capacidad de una computadora. El método de momentos se divide en dos tipos fundamentales, el método de momentos directo (MMD) y el método de momentos indirecto (MMI). La diferencia entre ambos se aclarará más adelante.

A continuación se delinearán en forma general los pasos fundamentales que se siguen para aplicar el método de momentos. Para esto, supóngase que se tiene un sistema electromagnético donde $\vec{\mathbf{x}} = \{\vec{\mathbf{x}}^E, \vec{\mathbf{x}}^H\}$ representa información sobre los

campos que se desea conocer y $\bar{\mathbf{y}} = \{\bar{\mathbf{y}}^E, \bar{\mathbf{y}}^H\}$ representa información sobre campos ya conocidos. La relación entre la información conocida y la desconocida está dada por

$$A(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{y}} \quad \text{en } S \quad (132)$$

donde el operador A representa una ecuación integro-diferencial y S es una región finita del espacio.

El siguiente paso consiste en expandir la incógnita (es decir $\bar{\mathbf{x}}$) en una base completa de funciones ortonormales, esto es

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \hat{\Lambda}_j \quad (133)$$

En donde x_j son constantes complejas y $\hat{\Lambda}_j = \{\hat{\Lambda}_j^E, \hat{\Lambda}_j^H\}$ es un conjunto ortonormal completo de eigenfunciones o modos tal como se describieron en la sección II.1, tales que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^E &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \hat{\Lambda}_j^E \\ \bar{\mathbf{x}}^H &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j Y_j^{\Lambda} \hat{\Lambda}_j^H \end{aligned} \quad (134)$$

El siguiente paso consiste en sustituir (133) en (132) y utilizar la linealidad del operador A , para obtener la ecuación exacta

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j A(\hat{\Lambda}_j) = \bar{\mathbf{y}} \quad (135)$$

Esta ecuación no puede resolverse a menos que pueda discretizarse. Es importante destacar que la discretización no puede realizarse simplemente truncando la sumatoria del miembro izquierdo de la ecuación para

$$\sum_{j=1}^n x_j A(\hat{\Lambda}_j) \cong \bar{\mathbf{y}} \quad . \quad (136)$$

La razón de que esto no sea correcto, es que el truncamiento en el lado izquierdo de la ecuación no tiene su contraparte en el lado derecho. Por esta razón se dice que la ecuación (136) está mal-definida. Para realizar correctamente la discretización, el método de momentos utiliza la definición de producto interior

$$\langle \hat{\Lambda}_j, \hat{\Pi}_k \rangle = \iint_{\mathcal{S}} \hat{\Lambda}_j^E \cdot \hat{\Pi}_k^{H*} dS. \quad (137)$$

Esta última expresión es idéntica a (23) con la excepción de que se ha omitido la dependencia de los modos con las coordenadas transversales. Otro requerimiento para la discretización es disponer de otro conjunto ortonormal completo de funciones linealmente independientes $\hat{\mathbf{w}}_k = \{\hat{\mathbf{w}}_k^E, \hat{\mathbf{w}}_k^H\}$, a las que se les llama *funciones de ponderado*. Cuando se utiliza un conjunto fijo de funciones de ponderado, se dice que se está aplicando el MMD. Si el conjunto de las funciones de ponderado puede cambiar, entonces se está aplicando el MMI.

Teniendo esto en cuenta, el siguiente paso en el MMD consiste en tomar el producto interior de cada uno de los miembros de la ecuación (135) con las funciones de ponderado, para obtener así

$$\left\langle \vec{\mathbf{w}}_k, \sum_{j=1}^{\infty} x_j A(\hat{\Lambda}_j) \right\rangle = \langle \vec{\mathbf{w}}_k, \vec{\mathbf{y}} \rangle \quad j = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (138)$$

lo que al aplicar la linealidad del operador A , lleva a

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \langle \vec{\mathbf{w}}_k, A(\hat{\Lambda}_j) \rangle = \langle \vec{\mathbf{w}}_k, \vec{\mathbf{y}} \rangle \quad j = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (139)$$

Analizando la ecuación (139) puede notarse que consiste en un conjunto infinito de ecuaciones de infinitas incógnitas, que se puede describir en forma matricial

$$\{A_{kj}\}\{x_j\} = \{y_k\} \quad (140)$$

donde

$$\{A_{kj}\} = \begin{bmatrix} \langle \bar{w}_1, A(\hat{\Lambda}_1) \rangle & \langle \bar{w}_1, A(\hat{\Lambda}_2) \rangle & \langle \bar{w}_1, A(\hat{\Lambda}_3) \rangle & \dots & \dots \\ \langle \bar{w}_2, A(\hat{\Lambda}_1) \rangle & \langle \bar{w}_2, A(\hat{\Lambda}_2) \rangle & \langle \bar{w}_2, A(\hat{\Lambda}_3) \rangle & \dots & \dots \\ \langle \bar{w}_3, A(\hat{\Lambda}_1) \rangle & \langle \bar{w}_3, A(\hat{\Lambda}_2) \rangle & \langle \bar{w}_3, A(\hat{\Lambda}_3) \rangle & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (141)$$

$$\{x_j\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad \{y_j\} = \begin{bmatrix} \langle \bar{w}_1, \bar{y} \rangle \\ \langle \bar{w}_2, \bar{y} \rangle \\ \langle \bar{w}_3, \bar{y} \rangle \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}. \quad (142)$$

Esta ecuación matricial que involucra matrices y vectores de dimensiones infinitas no puede resolverse en forma exacta. Sin embargo, si se truncan los renglones y columnas de matrices y vectores hasta los valores máximos (n,m) puede encontrarse una solución. Este truncamiento del sistema no lleva a una ecuación mal-definida, debido a que al aplicar la función de ponderado en ambos miembros de la ecuación, podemos saber que la parte trunca se encuentra en subespacios equivalentes. Si se escogen los valores máximos (n,m) para las dimensiones de la matriz, los valores de $\{x_j\}$ pueden obtenerse a partir de

$$\{x_j\} = \{A_{kj}\}^{-1} \{y_k\}. \quad (143)$$

A partir de donde los campos eléctrico y magnético buscados, pueden obtenerse directamente a partir de la ecuación (134).

Los valores (n,m) ideales deben encontrarse escogiendo cada vez valores más grandes, hasta que se llegue al punto en los resultados obtenidos para una matriz de $(n+1,m+1)$, no sean diferentes a un cierto nivel de precisión de los resultados obtenidos para la matriz de (n,m) . En un problema determinado esta convergencia podría no ocurrir en absoluto, o por lo menos no ocurrir para valores (n,m) manejables computacionalmente. Si esto sucede así, el método de momentos no es apropiado para resolver ese problema.

La variante indirecta del método de momentos se distingue en que el procedimiento se repite sucesivamente utilizando funciones de ponderado cambiantes. El cambio de funciones se realiza de forma que una función de error se minimice. Cuando esta función de error llegue a un cierto valor predeterminado, el procedimiento se detiene. En este trabajo se utilizará sólo el MMD. Para más información sobre el MMI puede consultarse la obra de Wang.

II.2.2 El método de momentos con dos incógnitas

Los lineamientos generales del método de momentos se explicaron en la sección anterior. Sin embargo, la aplicación del método resulta algo diferente cuando existe más de una incógnita involucrada. En esta subsección se analizará el caso en que tenemos dos incógnitas diferentes y dos ecuaciones integro-diferenciales que las relacionan con la información conocida.

Supóngase que se tienen dos ecuaciones integrodiferenciales de dos incógnitas representadas por

$$\begin{aligned} A(\bar{x}_1) + B(\bar{x}_2) &= \bar{y}_1 \\ C(\bar{x}_1) + D(\bar{x}_2) &= \bar{y}_2 \end{aligned} \quad (144)$$

El siguiente paso consiste en expandir las incógnitas en alguna base ortonormal. En el caso general, cada incógnita se expande en una base diferente.

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} \hat{\Lambda}_j \\ \bar{x}_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j} \hat{\Pi}_j \end{aligned} \quad (145)$$

Siguiendo el procedimiento, se sustituye (145) en (144) y se aprovecha la linealidad de los operadores, para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} A(\hat{\Lambda}_j) + \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j} B(\hat{\Pi}_j) &= \bar{y}_1 \\ \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} C(\hat{\Lambda}_j) + \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j} D(\hat{\Pi}_j) &= \bar{y}_2 \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (146)$$

A continuación se toma el producto interior de las funciones de ponderado con ambos miembros de las dos ecuaciones, lo que resulta en

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} \langle \bar{\mathbf{w}}_k, A(\hat{\Lambda}_j) \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j} \langle \bar{\mathbf{w}}_k, B(\hat{\Pi}_j) \rangle &= \langle \bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{y}}_1 \rangle \\ \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} \langle \bar{\mathbf{w}}_k, C(\hat{\Lambda}_j) \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j} \langle \bar{\mathbf{w}}_k, D(\hat{\Pi}_j) \rangle &= \langle \bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{y}}_2 \rangle \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad (147)$$

lo que se puede expresar también como

$$\begin{aligned} \{A_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{B_{kj}\} \{x_{2j}\} &= \{y_{1k}\} \\ \{C_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{D_{kj}\} \{x_{2j}\} &= \{y_{2k}\} \end{aligned} \quad (148)$$

La ecuación (148) es un sistema de dos ecuaciones matriciales con dos incógnitas, donde cada incógnita es un vector de dimensión infinita.

Para resolver el sistema en (148) se multiplica la primera ecuación por $\{B_{kj}\}^{-1}$ y la segunda por $\{D_{kj}\}^{-1}$. Al hacer esto se obtiene

$$\begin{aligned} \{B_{kj}\}^{-1} \{A_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{x_{2j}\} &= \{B_{kj}\}^{-1} \{y_{1k}\} \\ \{D_{kj}\}^{-1} \{C_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{x_{2j}\} &= \{D_{kj}\}^{-1} \{y_{2k}\} \end{aligned} \quad (149)$$

Si estas ecuaciones se restan entre sí, esto resulta en

$$\left[\{B_{kj}\}^{-1} \{A_{kj}\} - \{D_{kj}\}^{-1} \{C_{kj}\} \right] \{x_{1j}\} = \{B_{kj}\}^{-1} \{y_{1k}\} - \{D_{kj}\}^{-1} \{y_{2k}\} \quad (150)$$

De aquí puede despejarse fácilmente la incógnita, para dar

$$\{x_{1j}\} = \left[\{B_{kj}\}^{-1} \{A_{kj}\} - \{D_{kj}\}^{-1} \{C_{kj}\} \right]^{-1} \left[\{B_{kj}\}^{-1} \{y_{1k}\} - \{D_{kj}\}^{-1} \{y_{2k}\} \right] \quad (151)$$

Utilizando un procedimiento equivalente, se encuentra que

$$\{x_{2j}\} = \left[\{A_{kj}\}^{-1} \{B_{kj}\} - \{C_{kj}\}^{-1} \{D_{kj}\} \right]^{-1} \left[\{A_{kj}\}^{-1} \{y_{1k}\} - \{C_{kj}\}^{-1} \{y_{2k}\} \right] \quad (152)$$

Una vez que se tienen los valores de $\{x_{1j}\}$ y $\{x_{2j}\}$, los campos asociados a estos vectores pueden obtenerse a partir de (145).

II.2.3 Onda electromagnética que incide en la interfaz entre dos medios

En esta subsección se estudiará la aplicación del MMD a un problema electromagnético sencillo. Supóngase un problema como el de la figura 29, en que el espacio puede dividirse en dos zonas: la zona 1 y la zona 2. Las dos zonas están divididas por el plano $z = 0$. Se supondrá que los campos en las dos diferentes zonas, se deben expandir en dos bases ortonormales discretas diferentes.

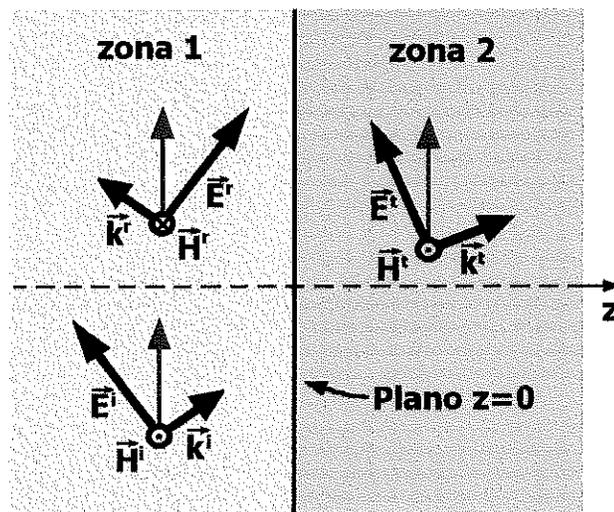


Figura 29: Representación del problema de una onda que incide en la interfaz entre dos medios.

El procedimiento que se delinearé aquí tiene carácter general y no necesariamente llevará a la solución de un cierto problema en particular. Esto dependerá de si las condiciones específicas del problema permiten que el resultado converja. Como un ejemplo de un problema que si puede resolverse con este método, se encuentra el caso en que la zona 1 es una guía de onda de sección rectangular y la

zona 2 una guía de onda cilíndrica, ambas de paredes conductoras (Amitay & Galindo, 1968). Como ambas son guías de onda cerradas, cumplen con la condición de que sus ecuaciones son válidas en un dominio finito y pequeño.

De acuerdo a la figura 29, para que se cumplan las condiciones de continuidad en el plano $z = 0$, los campos totales deben cumplir que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_i(u, v)\big|_{z=0} + \bar{\mathbf{E}}_r(u, v)\big|_{z=0} &= \bar{\mathbf{E}}_t(u, v)\big|_{z=0} \\ \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}_i(u, v)\big|_{z=0} - \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}_r(u, v)\big|_{z=0} &= \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{H}}_t(u, v)\big|_{z=0} \end{aligned} \quad (153)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tal como el de la ecuación (144). Las incógnitas son los campos reflejados, $\bar{\mathbf{x}}_1 = \{\bar{\mathbf{E}}_r, \bar{\mathbf{H}}_r\}$ y los campos transmitidos, $\bar{\mathbf{x}}_2 = \{\bar{\mathbf{E}}_t, \bar{\mathbf{H}}_t\}$ mientras que los campos incidentes son la parte conocida $\bar{\mathbf{y}} = \{\bar{\mathbf{E}}_i, \bar{\mathbf{H}}_i\}$.

Si los campos en la zona 1 se expanden en la base ortonormal $\hat{\Lambda}_j = \{\hat{\Lambda}_j^E, \hat{\Lambda}_j^H\}$ (con Y_j^A) y los campos en la zona 2 en la base $\hat{\Pi}_j = \{\hat{\Pi}_j^E, \hat{\Pi}_j^H\}$ (con Y_j^Π), la ecuación (153) se convierte entonces en

$$\sum_{j=1}^{\infty} E_j' \hat{\Lambda}_j^E + \sum_{j=1}^{\infty} E_j' \hat{\Lambda}_j^H = \sum_{j=1}^{\infty} E_j' \hat{\Pi}_j^E \quad (154)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} E_j' Y_j^A \hat{\Lambda}_j^H - \sum_{j=1}^{\infty} E_j' Y_j^A \hat{\Lambda}_j^E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j' Y_j^\Pi \hat{\Pi}_j^H \quad (155)$$

Si se obtiene el producto interior de ambos miembros de la ecuación (154) y la función $\hat{\Lambda}_i = \{\hat{\Lambda}_i^E, \hat{\Lambda}_i^H\}$, es necesario multiplicar por $\hat{\Lambda}_i^{H*}$ e integrar sobre toda la superficie $z = 0$ para obtener

$$\sum_{j=1}^{\infty} E_j' \langle \hat{\Lambda}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^r \langle \hat{\Lambda}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} E_j' \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle . \quad (156)$$

Si se aplican las condiciones de ortonormalidad y se despeja el campo reflejado, se obtiene

$$E_l^r = -E_l' + \sum_{j=1}^{\infty} E_j' \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle . \quad (157)$$

Si este resultado se sustituye en (155) se obtiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} E_j' Y_j^{\Lambda} \hat{\Lambda}_j^{\text{H}} - \sum_{l=1}^{\infty} \left[-E_l' + \sum_{j=1}^{\infty} E_j' \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \right] Y_l^{\Lambda} \hat{\Lambda}_l^{\text{H}} = \sum_{j=1}^{\infty} E_j' Y_j^{\Pi} \hat{\Pi}_j^{\text{H}} . \quad (158)$$

Esto se puede reacomodar como

$$\sum_{j=1}^{\infty} E_j' \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Lambda} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \hat{\Lambda}_l^{\text{H}} + E_j' Y_j^{\Pi} \hat{\Pi}_j^{\text{H}} \right] = 2 \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\Lambda} E_j' \hat{\Lambda}_j^{\text{H}} . \quad (159)$$

lo que es una ecuación análoga a (132), puesto que sólo incluye la incógnita $\bar{\mathbf{x}}_2 = \{\bar{\mathbf{E}}_l, \bar{\mathbf{H}}_l\}$. Si multiplicamos la ecuación (159) por los $\hat{\mathbf{w}}_k^{\text{E}*}$ de una función de ponderado $\hat{\mathbf{w}}_k$ y se integra sobre todo el plano $z = 0$, se obtiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} E_j' \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Lambda} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \langle \hat{\Lambda}_l, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* + Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] = 2 \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\Lambda} E_j' \langle \hat{\Lambda}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (160)$$

Esto puede escribirse como

$$\{A_{kj}\} \{x_j\} = \{y_k\} \quad (140)$$

donde

$$A_{kj} = \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Lambda} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \langle \hat{\Lambda}_l, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* + Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] \quad (161)$$

$$x_j = E_j' \quad (162)$$

y

$$y_k = 2 \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\wedge} E_j' \langle \hat{\Lambda}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \quad (163)$$

Una vez que se tienen los valores de los elementos de la matriz, ésta se trunca y se resuelve fácilmente. Ya que se tienen los valores de E_j' , la incógnita $\bar{\mathbf{x}}_2 = \{\bar{\mathbf{E}}_l, \bar{\mathbf{H}}_l\}$ está determinada, por lo que los valores E_j' es decir, la incógnita $\bar{\mathbf{x}}_1 = \{\bar{\mathbf{E}}_r, \bar{\mathbf{H}}_r\}$ puede obtenerse directamente a partir de la ecuación (157).

II.2.4 Onda electromagnética en un sistema con tres medios diferentes

En la figura 30 se plantea un problema ligeramente más complicado que el de la subsección anterior. En este problema, el espacio se divide en tres zonas. Se supone que las fronteras entre zonas son los planos $z = -h/2$ y $z = h/2$. Los campos en cada una de las zonas deben expandirse cada una de ellas en una base ortonormal diferente. Por simplicidad se supondrá que las tres bases son discretas.

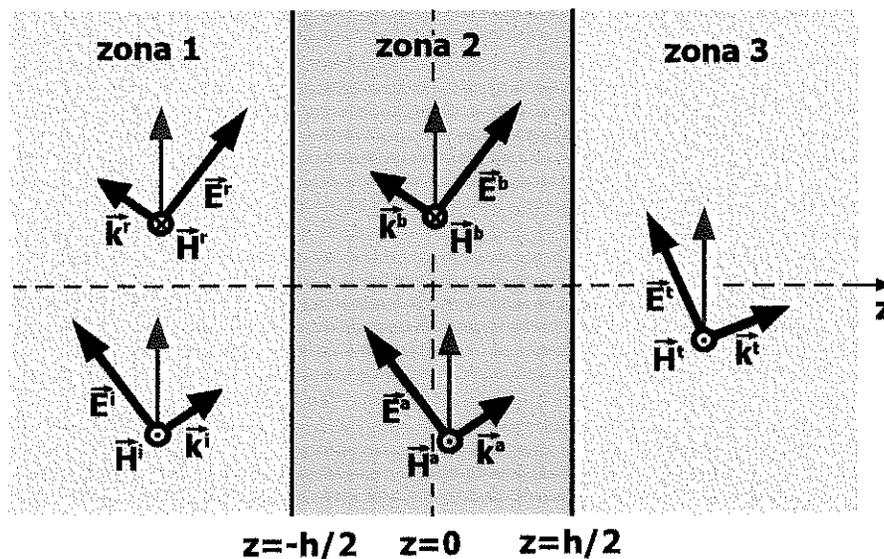


Figura 30: Una onda electromagnética en un sistema en que el espacio se divide en tres regiones.

Al igual que para el problema de la subsección anterior, aquí se define un procedimiento general, que podría llevar a la solución de un problema específico sólo si puede existir la convergencia. Un ejemplo de un modelo que sigue en rasgos generales el procedimiento aquí delineado es el modelo de transmisión a través de

una apertura circular perforada en una pantalla conductora gruesa que se describió en la sección I.3.3. En la sección II.3 se describirán minuciosamente los detalles matemáticos de este modelo.

De acuerdo a la figura 30, las condiciones de continuidad en la interfaz entre la zona 1 y la zona 2 establecen que los campos transversales totales en estas zonas deben cumplir con

$$\vec{\mathbf{E}}_i \Big|_{z=-h/2} + \vec{\mathbf{E}}_r \Big|_{z=-h/2} = \vec{\mathbf{E}}_a \Big|_{z=-h/2} + \vec{\mathbf{E}}_b \Big|_{z=-h/2} \quad , \quad (164)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_i \Big|_{z=-h/2} - \vec{\mathbf{H}}_r \Big|_{z=-h/2} = \vec{\mathbf{H}}_a \Big|_{z=-h/2} - \vec{\mathbf{H}}_b \Big|_{z=-h/2} \quad ; \quad (165)$$

mientras que para la interfaz entre las zonas 2 y 3, deben cumplir con

$$\vec{\mathbf{E}}_a \Big|_{z=h/2} + \vec{\mathbf{E}}_b \Big|_{z=h/2} = \vec{\mathbf{E}}_t \Big|_{z=h/2} \quad , \quad (166)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_a \Big|_{z=h/2} - \vec{\mathbf{H}}_b \Big|_{z=h/2} = \vec{\mathbf{H}}_t \Big|_{z=h/2} \quad . \quad (167)$$

Esta es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que puede esquematizarse como

$$\begin{aligned} A(\vec{\mathbf{x}}_1) + B(\vec{\mathbf{x}}_2) + C(\vec{\mathbf{x}}_3) + D(\vec{\mathbf{x}}_4) &= \vec{\mathbf{y}}_1 \\ E(\vec{\mathbf{x}}_1) + F(\vec{\mathbf{x}}_2) + G(\vec{\mathbf{x}}_3) + H(\vec{\mathbf{x}}_4) &= \vec{\mathbf{y}}_2 \\ I(\vec{\mathbf{x}}_1) + J(\vec{\mathbf{x}}_2) + K(\vec{\mathbf{x}}_3) + L(\vec{\mathbf{x}}_4) &= \vec{\mathbf{y}}_3 \\ M(\vec{\mathbf{x}}_1) + N(\vec{\mathbf{x}}_2) + O(\vec{\mathbf{x}}_3) + P(\vec{\mathbf{x}}_4) &= \vec{\mathbf{y}}_4 \end{aligned} \quad (168)$$

donde, $\vec{\mathbf{x}}_1 = \{\vec{\mathbf{E}}_a, \vec{\mathbf{H}}_a\}$, $\vec{\mathbf{x}}_2 = \{\vec{\mathbf{E}}_b, \vec{\mathbf{H}}_b\}$, $\vec{\mathbf{x}}_3 = \{\vec{\mathbf{E}}_r, \vec{\mathbf{H}}_r\}$, $\vec{\mathbf{x}}_4 = \{\vec{\mathbf{E}}_t, \vec{\mathbf{H}}_t\}$ y $\vec{\mathbf{y}} = \{\vec{\mathbf{E}}_i, \vec{\mathbf{H}}_i\}$.

A continuación se utilizará un procedimiento similar al delineado en II.2.3, para eliminar dos de las incógnitas. Los campos en la zona 1 se expandirán en la base ortonormal $\hat{\Lambda}_j = \{\hat{\Lambda}_j^E, \hat{\Lambda}_j^H\}$ (con γ_j^Λ y Y_j^Λ), los de la zona 2 en la base

$\hat{\Pi}_j = \{\hat{\Pi}_j^E, \hat{\Pi}_j^H\}$ (con γ_j^Π y Y_j^Π) y los de la zona 3 en la base $\hat{\Omega}_j = \{\hat{\Omega}_j^E, \hat{\Omega}_j^H\}$ (con γ_j^Ω y Y_j^Ω). De esta forma, las ecuaciones (164-167) se convierten en

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} E_j^i \hat{\Lambda}_j^E \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^r \hat{\Lambda}_j^E \exp[ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] = \\ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \hat{\Pi}_j^E \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \hat{\Pi}_j^E \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \end{aligned} \quad (169)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Lambda E_j^i \hat{\Lambda}_j^H \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Lambda E_j^r \hat{\Lambda}_j^H \exp[ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] = \\ \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Pi E_j^a \hat{\Pi}_j^H \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Pi E_j^b \hat{\Pi}_j^H \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \end{aligned} \quad (170)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \hat{\Pi}_j^E \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \hat{\Pi}_j^E \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] = \\ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^i \hat{\Omega}_j^E \exp[ik_0 \gamma_j^\Omega h/2] \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Pi E_j^a \hat{\Pi}_j^H \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Pi E_j^b \hat{\Pi}_j^H \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] = \\ \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Omega E_j^i \hat{\Omega}_j^H \exp[ik_0 \gamma_j^\Omega h/2] \end{aligned} \quad (172)$$

Si se multiplica (169) por $\hat{\Lambda}_j^{H*}$ e integramos sobre todo el plano $z = -h/2$, se

obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} E_j^i \langle \hat{\Lambda}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^r \langle \hat{\Lambda}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] = \\ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \end{aligned} \quad (173)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned}
E_j^r \exp[ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] &= -E_l^i \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] \\
+ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] &+ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2]
\end{aligned} \quad (174)$$

Si esto se sustituye en (170) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Lambda E_j^i \hat{\Lambda}_j^H \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] \\
&- \sum_{l=1}^{\infty} Y_j^\Lambda \left[\begin{aligned} &-E_l^i \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \end{aligned} \right] \hat{\Lambda}_l^H = \quad (175) \\
&\sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Pi E_j^a \hat{\Pi}_j^H \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Pi E_j^b \hat{\Pi}_j^H \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2]
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Lambda E_j^i \hat{\Lambda}_j^H \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] = \\
&\sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_j^\Lambda \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \hat{\Lambda}_l^H - Y_j^\Pi \hat{\Pi}_j^H \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_j^\Lambda \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \hat{\Lambda}_l^H - Y_j^\Pi \hat{\Pi}_j^H \right]
\end{aligned} \quad (176)$$

Si se multiplica por $\hat{\mathbf{w}}_k^{E*}$ de la función de ponderado $\hat{\mathbf{w}}_k = \{\hat{\mathbf{w}}_k^E, \hat{\mathbf{w}}_k^H\}$ se

obtiene

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^\Lambda E_j^i \langle \hat{\Lambda}_j, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* \exp[-ik_0 \gamma_j^\Lambda h/2] = \\
&\sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \exp[-ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_j^\Lambda \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \langle \hat{\Lambda}_l, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* - Y_j^\Pi \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \exp[ik_0 \gamma_j^\Pi h/2] \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_j^\Lambda \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \langle \hat{\Lambda}_l, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* - Y_j^\Pi \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right]
\end{aligned} \quad (177)$$

En esta ecuación, \bar{x}_3 se ha eliminado, mientras que permanecen \bar{x}_1 y \bar{x}_2 .

Si también se toma (171), se multiplica por $\hat{\Pi}_j^H$ y se integra sobre toda la superficie $z = h/2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle E_j^b \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] = \\ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^l \langle \hat{\Omega}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^{\Omega} h/2] \end{aligned} \quad (178)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} E_l^l \exp[ik_0 \gamma_l^{\Omega} h/2] = \\ \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] + \sum_{j=1}^{\infty} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle E_j^b \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \end{aligned} \quad (179)$$

Si esto se reemplaza en (172), se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\Pi} E_j^a \hat{\Pi}_j^H \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\Pi} E_j^b \hat{\Pi}_j^H \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] = \\ \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \right] \hat{\Omega}_l^H \end{aligned} \quad (180)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[Y_j^{\Pi} \hat{\Pi}_j^H - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Omega} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \hat{\Omega}_l^H \right] + \\ - \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[Y_j^{\Pi} \hat{\Pi}_j^H - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Omega} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \hat{\Omega}_l^H \right] = 0 \end{aligned} \quad (181)$$

Si se multiplican ambos lados de la ecuación por $\hat{\mathbf{w}}_k^{E*}$ y se integra, se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} E_j^a \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Omega} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \langle \hat{\Omega}_l, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] + \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} E_j^b \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Omega} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \langle \hat{\Omega}_l, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] = 0 \end{aligned} \quad (182)$$

Aquí se eliminó la incógnita $\bar{\mathbf{x}}_4$ y al igual que en (177), sólo permanecen la incógnitas $\bar{\mathbf{x}}_1$ y $\bar{\mathbf{x}}_2$.

Las ecuaciones (176) y (181) son equivalentes a un sistema

$$\begin{aligned} A'(\bar{\mathbf{x}}_1) + B'(\bar{\mathbf{x}}_2) &= \bar{\mathbf{y}}'_1 \\ C'(\bar{\mathbf{x}}_1) + D'(\bar{\mathbf{x}}_2) &= \bar{\mathbf{y}}'_2 \end{aligned} \quad (183)$$

que al aplicar la función de ponderado se convierten en (177) y (182) que tienen la forma

$$\begin{aligned} \{A_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{B_{kj}\} \{x_{2j}\} &= \{y_{1k}\} \\ \{C_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{D_{kj}\} \{x_{2j}\} &= \{y_{2k}\} \end{aligned} \quad (148)$$

donde

$$A_{kj} = \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_j^{\Lambda} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \langle \hat{\Lambda}_l, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* - Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] \quad (184)$$

$$B_{kj} = \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[\sum_{l=1}^{\infty} Y_j^{\Lambda} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Lambda}_l \rangle \langle \hat{\Lambda}_l, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* - Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] \quad (185)$$

$$C_{kj} = \exp[ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Omega} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \langle \hat{\Omega}_l, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] \quad (186)$$

$$D_{kj} = \exp[-ik_0 \gamma_j^{\Pi} h/2] \left[Y_j^{\Pi} \langle \hat{\Pi}_j, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{\Omega} \langle \hat{\Pi}_j, \hat{\Omega}_l \rangle \langle \hat{\Omega}_l, \bar{\mathbf{w}}_k \rangle^* \right] \quad (187)$$

$$x_{1j} = E_j^a \quad (188)$$

$$x_{2j} = E_j^b \quad (189)$$

$$y_{1k} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\wedge} E_j^i \langle \hat{\Lambda}_j, \hat{\mathbf{w}}_k \rangle^* \exp[-ik_0 \gamma_j^{\wedge} h/2] \quad (190)$$

$$y_{2k} = 0 \quad (191)$$

que puede resolverse por medio del procedimiento que se delineó en la sección II.2.2.

Una vez encontradas las incógnitas $\bar{\mathbf{x}}_1$ y $\bar{\mathbf{x}}_2$, el resto de ellas puede encontrarse a través de (174) y (179).

II.2.5 Transmisión a través de una apertura circular

Esta sección está dedicada a describir el modelo de A. Roberts para la transmisión a través de una apertura circular perforada en una pantalla conductora gruesa. Los parámetros que se utilizarán en el modelo se describen en la figura 31. El procedimiento general es el mismo que el utilizado en la sección II.2.4. En este caso la zona 1 y la zona 3 corresponden a espacio libre, en donde los campos se expandirán en modos de Rayleigh, mientras que la zona 2 es una guía de onda cilíndrica de paredes conductoras, en donde los campos se expandirán con los modos tal como se describen en la ecuación (52).

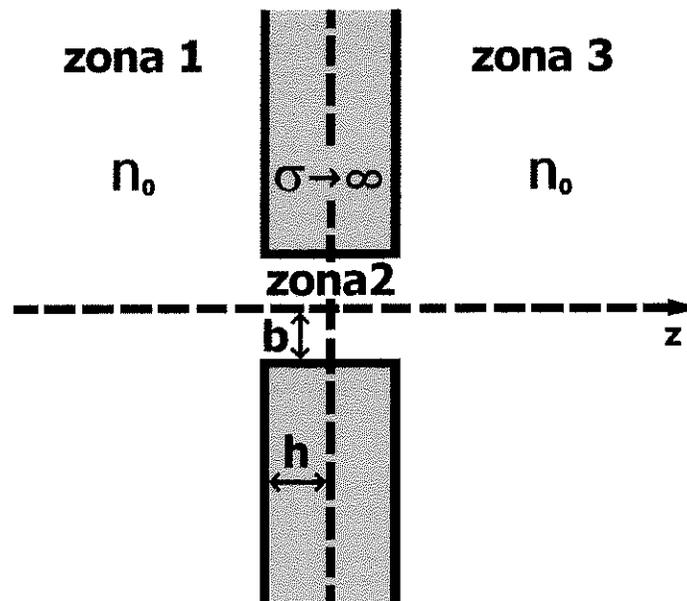


Figura 31: Sección transversal de la geometría del modelo de A. Roberts para la transmisión a través de una apertura circular perforada en una pantalla conductora gruesa.

Las condiciones de frontera para este sistema son las siguientes

$$\vec{\mathbf{E}}_t \Big|_{z=-h/2} + \vec{\mathbf{E}}_r \Big|_{z=-h/2} = \begin{cases} \vec{\mathbf{E}}_a \Big|_{z=-h/2} + \vec{\mathbf{E}}_b \Big|_{z=-h/2} & \text{si } \rho \leq b \\ 0 & \text{si } \rho > b \end{cases}, \quad (192)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_t \Big|_{z=-h/2} - \vec{\mathbf{H}}_r \Big|_{z=-h/2} = \vec{\mathbf{H}}_a \Big|_{z=-h/2} - \vec{\mathbf{H}}_b \Big|_{z=-h/2} \quad \text{si } \rho \leq b; \quad (193)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_a \Big|_{z=h/2} + \vec{\mathbf{E}}_b \Big|_{z=h/2} = \begin{cases} \vec{\mathbf{E}}_t \Big|_{z=h/2} & \text{si } \rho \leq b \\ 0 & \text{si } \rho > b \end{cases}, \quad (194)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_a \Big|_{z=h/2} - \vec{\mathbf{H}}_b \Big|_{z=h/2} = \vec{\mathbf{H}}_t \Big|_{z=h/2} \quad \text{si } \rho > b. \quad (195)$$

Después de realizar la expansión, se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] \vec{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & + \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_r^r(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] \vec{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \\ & \sum_{snml} [-a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] \vec{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \end{aligned} \quad (196)$$

$$\begin{aligned} & \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] \vec{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & - \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^r(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] \vec{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \\ & -i \sum_{snml} Y_{snml} [a_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2]] \vec{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \quad \text{si } \rho < b \end{aligned} \quad (197)$$

$$\sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] \vec{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) = \quad (198)$$

$$\begin{aligned} & \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_r^i(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] \vec{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & -i \sum_{snml} Y_{snml} [a_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] - b_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2]] \vec{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) = \\ & \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] \vec{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad \text{si } \rho < b \end{aligned} \quad (199)$$

Si se toma (196), se multiplica por $\bar{\Phi}_R^*(\alpha', \beta')$ y se integra sobre todo el plano $z = -h/2$ se obtiene

$$E_r^r(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] = -E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] + \sum_{snml} [-a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] I_{snmlr}(\alpha, \beta) \quad (200)$$

Si este resultado se sustituye en (197), se obtiene

$$\begin{aligned} & 2 \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] \bar{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & - \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \left\{ Y_r(\alpha, \beta) \sum_{snml} [-a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] \times \right. \\ & \left. I_{snml}(\alpha, \beta) \bar{\Phi}_r(\alpha, \beta) \right\} d\alpha d\beta = . \\ & -i \sum_{snml} Y_{snml} [a_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \quad \text{si } \rho < b \end{aligned} \quad (201)$$

Esta es una ecuación equivalente a (176), con dos incógnitas $\bar{\mathbf{x}}_1 = \{a_{snml}\}$ y $\bar{\mathbf{x}}_2 = \{b_{snml}\}$. Se escoge como función de ponderado a la misma base ortonormal en que se expanden los campos de la zona 2, por tanto (201) debe multiplicarse por $\bar{\Psi}_{SNML}(\rho, \phi)$ e integrarse sobre todo el plano $z = -h/2$ para obtener

$$\begin{aligned} & \sum_{snml} a_{snml} \left[\begin{array}{l} -iY_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ -\sin[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snml}(\alpha, \beta) I_{SNML}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{array} \right] \\ & + \sum_{snml} b_{snml} \left[\begin{array}{l} -iY_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ +\cos[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snml}(\alpha, \beta) I_{SNML}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{array} \right] = \quad (202) \\ & 2 \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] I_{SNML}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{aligned}$$

En esta ecuación equivalente a (177) las expresiones entre corchetes son los elementos de dos matrices infinitas, mientras que el segundo miembro de la ecuación es un vector conocido.

El procedimiento se repite para obtener una segunda ecuación matricial. Para eliminar los campos transmitidos, se toma (198), se multiplica por $\vec{\Phi}_R^*(\alpha', \beta')$ y se integra sobre todo el plano $z = h/2$ con lo que se obtiene

$$E'_r(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] = \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] I_{snml}(\alpha, \beta) \quad (203)$$

Después este resultado debe reemplazarse en (197) para obtener

$$-i \sum_{snml} Y_{snm} [a_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] - b_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2]] \vec{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) = \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] I_{snmlr}(\alpha, \beta) \vec{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (204)$$

Esta ecuación, equivalente a (181) debe multiplicarse por la función de ponderado, e integrarse sobre todo el plano $z = h/2$ para así obtener

$$\sum_{snml} a_{snml} \begin{bmatrix} -iY_{snm} \cos[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ -\sin[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snmlr}(\alpha, \beta) I_{SNMLr}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{bmatrix} + \sum_{snml} b_{snml} \begin{bmatrix} iY_{snm} \sin[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ -\cos[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snmlr}(\alpha, \beta) I_{SNMLr}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{bmatrix} = 0 \quad (205)$$

lo que es una ecuación matricial de dos incógnitas equivalente a (182), que complementa a (202).

Si se suman (202) y (205) se obtiene

$$\sum_{snml} a_{snml} \left[\begin{array}{l} -iY_{snm} \cos[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ -\sin[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snml}(\alpha, \beta) I_{SNML}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{array} \right] = \quad (206)$$

$$\sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] I_{SNML}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta$$

que es una ecuación matricial sólo para la incógnita $\{a_{snml}\}$. Si por otra parte, se resta (205) de (202) se obtiene

$$\sum_{snml} b_{snml} \left[\begin{array}{l} -iY_{snm} \sin[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ +\cos[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snml}(\alpha, \beta) I_{SNML}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{array} \right] = \quad (207)$$

$$\sum_r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] I_{SNML}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta$$

lo que es una ecuación sólo para $\{b_{snml}\}$.

Si se truncan los valores de s, n, m, l y S, N, M, L , pueden encontrarse los valores de $\{a_{snml}\}$ y $\{b_{snml}\}$, utilizando métodos estándar de inversión de matrices. Se encuentra que la convergencia sólo ocurre cuando las dimensiones de la apertura son del orden de la longitud de onda de la luz que se supone incidente. Sólo para el caso de incidencia normal puede existir convergencia para radios mucho más grandes que la apertura (Roberts, 1987).

Si se supone que la onda incidente es una onda plana monocromática debe establecerse que

$$\begin{aligned} E_1^i(\alpha, \beta) &= -\delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta) \\ E_2^i(\alpha, \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (208)$$

para una onda TE, o bien

$$\begin{aligned} E_1^i(\alpha, \beta) &= 0 \\ E_2^i(\alpha, \beta) &= \gamma_0 \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta) \end{aligned} \quad (209)$$

para una onda TM, de acuerdo a lo establecido en (34-35). Entonces, el flujo de energía que incide sobre la apertura es igual a la densidad de flujo multiplicada por el área de ésta. De acuerdo a (38), esto es

$$W_i = \frac{(k_0 b)^2 \gamma_0}{8\pi Z_0} \quad (210)$$

Ya que, por otra parte, el flujo transmitido por todos los modos de la guía de onda cilíndrica de paredes conductoras es igual a

$$W_t = \sum_{smnl} F_{smnl} \quad (211)$$

donde F_{smnl} está dado por la ecuación (54). Por tanto, el coeficiente de transmisión puede calcularse por medio de

$$\mathbf{t} = \frac{W_t}{W_i} . \quad (12)$$

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

III.1 Desarrollo del modelo

III.1.1 Procedimiento analítico

En este capítulo se desarrollará el modelo propuesto en la sección 1.3.3 para puntas de fibra óptica para microscopía óptica de campo cercano. En la figura 32 se pueden ver los principales parámetros que se utilizarán.

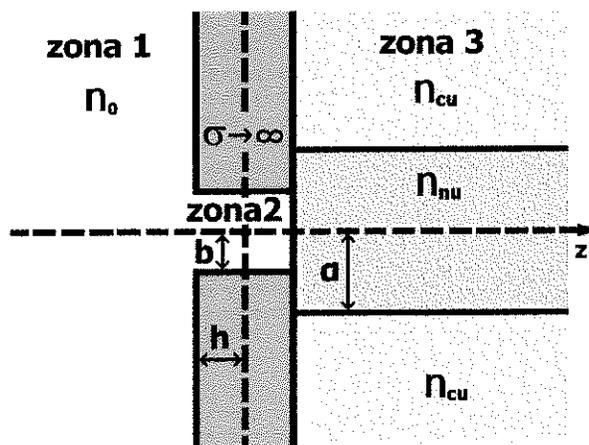


Figura 32: Sección transversal de la geometría del modelo propuesto.

Las condiciones de frontera para este sistema son las mismas que para el modelo de Roberts.

$$\vec{E}_i \Big|_{z=-h/2} + \vec{E}_r \Big|_{z=-h/2} = \begin{cases} \vec{E}_a \Big|_{z=-h/2} + \vec{E}_b \Big|_{z=-h/2} & \text{si } \rho \leq b \\ 0 & \text{si } \rho > b \end{cases}, \quad (192)$$

$$\vec{H}_i \Big|_{z=-h/2} - \vec{H}_r \Big|_{z=-h/2} = \vec{H}_a \Big|_{z=-h/2} - \vec{H}_b \Big|_{z=-h/2} \quad \text{si } \rho \leq b ; \quad (193)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_a \Big|_{z=h/2} + \bar{\mathbf{E}}_b \Big|_{z=h/2} = \begin{cases} \bar{\mathbf{E}}_t \Big|_{z=h/2} & \text{si } \rho \leq b \\ 0 & \text{si } \rho > b \end{cases}, \quad (194)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_a \Big|_{z=h/2} - \bar{\mathbf{H}}_b \Big|_{z=h/2} = \bar{\mathbf{H}}_t \Big|_{z=h/2} \quad \text{si } \rho > b. \quad (195)$$

Después de realizar la expansión, se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] \bar{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & + \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} E_r^r(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] \bar{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \\ & \sum_{snml} [-a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \end{aligned} \quad (196)$$

$$\begin{aligned} & \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] \bar{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ & - \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^r(\alpha, \beta) \exp[ik_0 \gamma h/2] \bar{\Phi}_r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \\ & -i \sum_{snml} Y_{snm} [a_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) \quad \text{si } \rho < b \end{aligned} \quad (197)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) = \\ & \sum_{r=1}^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{t=1}^2 \int_0^{\infty} A_r(\xi) \exp[ik_0 \gamma(\xi) h/2] \hat{\xi}_{rpt}^E(\xi) d\xi \\ & + \sum_{r=1}^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^q \sum_{t=1}^{\max 2} A_{rpqt}^g \exp[ik_0 \gamma_{rpq} h/2] \hat{\xi}_{rpqt}^E \end{aligned} \quad (212)$$

$$\begin{aligned} & -i \sum_{snml} Y_{snm} [a_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] - b_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) = \\ & \sum_{rpt} \int_0^{\infty} Y_r(\xi) A_r(\xi) \exp[ik_0 \gamma(\xi) h/2] \hat{\xi}_{rpt}^H(\xi) d\xi \\ & + \sum_{rpqt} Y_{rpq} A_r^g(\xi) \exp[ik_0 \gamma_{rpq} h/2] \hat{\xi}_{rpqt}^H \quad \text{si } \rho < b \end{aligned} \quad (213)$$

De (196) y (197) se puede obtener

$$\begin{aligned}
& \sum_{snml} a_{snml} \left[\begin{aligned} & -iY_{snm} \cos[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ & - \sin[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snmlr}(\alpha, \beta) I_{SNMLr}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{aligned} \right] \\
& + \sum_{snml} b_{snml} \left[\begin{aligned} & -iY_{snm} \sin[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ & + \cos[k_0 v_{snm} h/2] \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) I_{snmlr}(\alpha, \beta) I_{SNMLr}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \end{aligned} \right] = \\
& 2 \sum_r \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y_r(\alpha, \beta) E_r^i(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 \gamma h/2] I_{SNMLr}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{202}$$

tal como se hizo en la sección II.1.4.

Además, si se toma (212), se multiplica por $\hat{\xi}_{rpt}^{H^*}(\xi)$ y se integra sobre el plano $z = h/2$, se obtiene

$$\begin{aligned}
& A_r(\xi) \exp[ik_{cu} \gamma(\xi) h/2] = \\
& \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] J_{snmlrpt}(\xi) \quad \cdot \tag{214}
\end{aligned}$$

Por otra parte, si la misma (212) se multiplica por $\hat{\xi}_{rpqt}^{H^*}$ y se integra sobre el mismo plano se obtiene

$$\begin{aligned}
& A_{rpqt}^g \exp[ik_{cu} \gamma_{rpq} h/2] = \\
& \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] K_{snmlrpqt} \quad \cdot \tag{215}
\end{aligned}$$

Si (214) y (215) se sustituyen en (213), esto da

$$\begin{aligned}
& -i \sum_{snml} Y_{snm} [a_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2] - b_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2]] \bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi) = \\
& \sum_{rpt} \int_0^{\infty} Y_r(\xi) \left\{ \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] J_{snmlrpt}(\xi) \right\} \hat{\xi}_{rpt}^H(\xi) d\xi \\
& - \sum_{rpqt} Y_{rpq} \left\{ \sum_{snml} [a_{snml} \sin[k_0 v_{snm} h/2] + b_{snml} \cos[k_0 v_{snm} h/2]] K_{snmlrpqt} \right\} \hat{\xi}_{rpqt}^H \quad si \rho < b
\end{aligned} \tag{216}$$

Si se multiplica por la función de ponderado $\bar{\Psi}_{snml}(\rho, \phi)$ y se integra sobre el plano correspondiente, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{snml} a_{snml} \left[\begin{array}{l} -iY_{snm} \cos[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ -\sin[k_0 v_{snm} h/2] \left\{ \sum_{rpt} \int_0^{\infty} Y_r(\xi) J_{snmlrpt}(\xi) J_{SNMLrpt}(\xi)^* d\xi \right. \\ \left. + \sum_{rpqt} Y_{rpq} K_{snmlrpqt} K_{SNMLrpqt}^* \right\} \end{array} \right] \\
& + \sum_{snml} b_{snml} \left[\begin{array}{l} iY_{snm} \sin[k_0 v_{snm} h/2] \delta_{s,S} \delta_{n,N} \delta_{m,M} \delta_{l,L} \\ -\cos[k_0 v_{snm} h/2] \left\{ \sum_{rpt} \int_0^{\infty} Y_r(\xi) J_{snmlrpt}(\xi) J_{SNMLrpt}(\xi)^* d\xi \right. \\ \left. + \sum_{rpqt} Y_{rpq} K_{snmlrpqt} K_{SNMLrpqt}^* \right\} \end{array} \right] = 0
\end{aligned} \tag{217}$$

En el caso límite en que $n_{nu}=n_{cu}=n_0$, los modos guiados desaparecen y además tenemos que

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} Y(\alpha, \beta) I_{snmlr}(\alpha, \beta) I_{SNMLr}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \sum_{pt} \int_0^{\infty} Y_r(\xi) J_{snmlrpt}(\xi) J_{SNMLrpt}^*(\xi) d\xi \tag{218}$$

con lo que la ecuación (217) se vuelve idéntica a (205). Ya que las ecuaciones (217) y (202) no presentan la simetría de las ecuaciones (202) y (205), no es posible encontrar

ecuaciones equivalentes a (206) y (207). Sin embargo, el problema puede resolverse utilizando el procedimiento de la sección II.2.2 para sistemas de dos ecuaciones con dos vectores incógnita.

Una vez que se encuentran los coeficientes a_{snml} y b_{snml} puede calcularse un coeficiente de transmisión tal como se definió en la ecuación (12). Este parámetro, análogo al utilizado en el modelo de Roberts se definió como el flujo de energía que sale por la apertura dividida entre el flujo que incide sobre ésta. En este nuevo modelo el interés se centra en la proporción de energía que se acopla efectivamente en modos guiados de la fibra óptica, por lo que el coeficiente de transmisión se define en forma diferente. Por medio de a_{snml} y b_{snml} pueden obtenerse los coeficientes de acoplamiento A_{rpq} de los modos guiados a partir de (215). La energía transmitida por los modos guiados puede calcularse entonces por

$$W^g = \frac{1}{2} \sum_{rpq} |A_{rpq}|^2 \quad (219)$$

y el coeficiente de transmisión se define como

$$t^g = \frac{W^g}{W_i} \quad (220)$$

III.1.2 Procedimiento numérico

La parte analítica del modelo concluye una vez que se deducen las ecuaciones (202) y (207). A partir de ahí, el resto del procedimiento es computacional. Las mencionadas ecuaciones corresponden a un sistema de forma

$$\begin{cases} \{A_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{B_{kj}\} \{x_{2j}\} = \{y_{1k}\} \\ \{C_{kj}\} \{x_{1j}\} + \{D_{kj}\} \{x_{2j}\} = \{y_{2k}\} \end{cases} \quad (148)$$

donde A, B, C y D son matrices de elementos infinitos y_1 y y_2 son vectores conocidos y x_1, x_2 son vectores desconocidos.

La computación de los elementos de las matrices requiere que se calculen integrales de la forma de

$$\iint Y(\alpha, \beta) I_{snmlr}(\alpha, \beta) I_{SNMLr}(\alpha, \beta)^* d\alpha d\beta \quad (107)$$

y

$$\int Y(\xi) J_{snmlrpqt}(\xi) J_{SNMLrpqt}(\xi)^* d\xi \quad (118)$$

y sumatorias como

$$\sum_{pqt} Y_{rpq} K_{snmlrpqt} K_{SNMLrpqt}^* \quad (125)$$

De acuerdo a (207), todos los elementos del vector y_2 son cero, mientras que para calcular el vector y_1 es necesario sustituir la ecuación (34) en (202) para el caso en que la onda plana incidente tiene polarización TE o la ecuación (35) si tiene

polarización Los vectores desconocidos x_1, x_2 se identifican con los coeficientes de los modos de la apertura a_{snml} y b_{snml} .

Ya que las matrices y vectores tienen un número infinito de elementos, antes de realizar la computación debe escogerse un valor finito hasta el que las matrices y vectores se truncarán, como se explicó en la subsección II.2.1. Sea n_{max} es el máximo orden de las funciones de Bessel y sus derivadas que se toma en cuenta, donde para cada función se consideran sólo los primeros m_{max} ceros disponibles. En este caso n_{max} y m_{max} son los *parámetros de truncamiento*. En este trabajo se escogieron los valores $n_{max}=9$ y $m_{max}=10$. Esto corresponde a realizar cálculos con matrices de 380×380 .

La figura 33 describe en diagrama de bloques la estructura del programa que realiza la parte numérica del modelo. Los cálculos se realizaron en una supercomputadora Origin2000 de Silicon Graphics. Se trabajó en sistema UNIX y se programó en Fortran 77. Buena parte de las subrutinas se tomaron del libro de *recetas numéricas* de Press *et al.* (1986). A continuación se explicará brevemente el funcionamiento del programa.

Resulta obvio que los ceros de las funciones de Bessel y de sus derivadas son parámetros invariables, que no dependen de los parámetros de la apertura ni de los de la fibra óptica. Estos parámetros se requerirán repetidas veces a través del procedimiento. Por esta razón, el programa se alimenta con un archivo que contienen m_{max} ceros de las funciones de Bessel, a partir de las de orden cero hasta las de orden n_{max} . Un archivo similar se utiliza para los ceros de las derivadas de estas funciones.

El programa lee estos archivos cada vez que necesita estos parámetros en alguna computación.

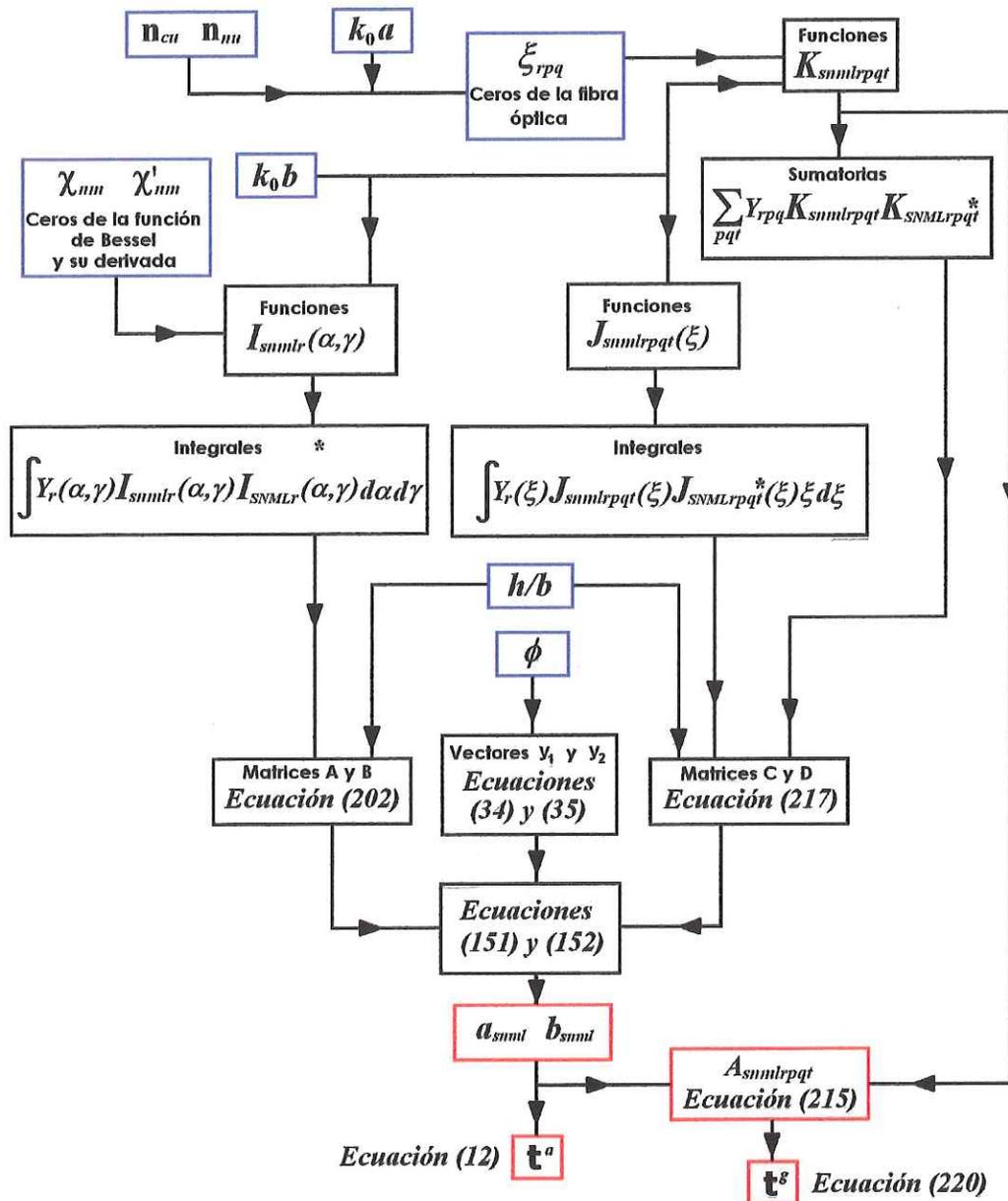


Figura 33: Estructura general del programa en Fortran que encuentra los coeficientes de transmisión t^a y t^s utilizando las ecuaciones (202) y (217). En azul están los datos que el programa lee y en rojo los que entrega.

Un arreglo similar se utilizó para manejar los ceros de la fibra óptica. Como ya se mencionó, estos valores son soluciones de la ecuación característica (59) que dependen de los parámetros n_{cu} , n_{nu} y k_0a . En la figura 28, estos ceros se identifican con los puntos azules y rojos que se muestran en el eje vertical. La solución de la ecuación característica (59) no es un procedimiento trivial. La principal complicación está en la dificultad de saber de antemano cuántos ceros (y por tanto modos) tendrá una fibra óptica en particular. La forma más segura y recomendable (Snyder, 1983) es por inspección de la gráfica de la ecuación característica.

Para realizar esto efectivamente, se utiliza el programa *Mathematica*, por medio del cual se grafica la ecuación característica y se encuentran valores aproximados de los ceros por inspección. Posteriormente, estos valores aproximados se utilizan como parámetros para resolver la ecuación característica y encontrar así los valores precisos. Estos valores se colocan en un archivo que alimentará al programa principal. En este archivo también se incluyen los parámetros n_{cu} , n_{nu} y k_0a que se utilizaron para calcular los ceros. A diferencia de los archivos que almacenan los ceros de las funciones de Bessel y sus derivadas, el archivo que almacena los ceros de la fibra óptica deberá cambiarse cada vez que cambien los parámetros de la fibra óptica. Para facilitar el trabajo, se dispone de un banco de archivos para diferentes fibras ópticas, que pueden utilizarse con el programa principal.

Los ceros de las funciones Bessel y sus derivadas, junto con k_0b son suficientes para que el programa defina las funciones $I_{snmtr}(\alpha, \beta)$ y $J_{snmtrpqt}(\xi)$. Para definir las funciones $K_{snmtrpqt}$ se requieren además, todos los parámetros de la fibra

óptica (ceros, n_{cu} , n_{nu} y k_0a). Por medio de estas funciones y del parámetro ϕ (ángulo de la onda plana incidente) puede calcularse el vector conocido en (202), así como las integrales y sumatorias que aparecen en (202) y (207). El programa se diseñó de tal modo que realiza un cálculo para el caso TE y a continuación otro para el caso TM.

La resolución de integrales es la etapa del programa que requiere más tiempo de cómputo. Para realizarla se utilizó una de las subrutinas estándar (QTRAP) de Press *et al.* (1986), con un parámetro de precisión (EPS, en la referencia) igual a 0.005. En las condiciones en que se trabajó, y con los parámetros de truncamiento elegidos, los archivos de integrales quedan terminados en alrededor 20 minutos, para cada polarización. En cuanto a la resolución de sumatorias, ésta corresponde a un problema trivial de programación. Todas las integrales y sumatorias calculadas se almacenan en archivos, y quedan disponibles para utilizarse en etapas posteriores.

Por medio de los datos de las integrales y sumatorias y del parámetro h/b (relación entre grosor y radio de la apertura) resulta trivial generar las matrices A , B , C y D . De este modo, el sistema en (148) queda completo. Una vez que esto es así, se pueden encontrar los vectores desconocidos por medio de las ecuaciones

$$\{x_{1j}\} = \left[\{B_{kj}\}^{-1} \{A_{kj}\} - \{D_{kj}\}^{-1} \{C_{kj}\} \right]^{-1} \left[\{B_{kj}\}^{-1} \{y_{1k}\} - \{D_{kj}\}^{-1} \{y_{2k}\} \right] \quad (151)$$

y

$$\{x_{2j}\} = \left[\{A_{kj}\}^{-1} \{B_{kj}\} - \{C_{kj}\}^{-1} \{D_{kj}\} \right]^{-1} \left[\{A_{kj}\}^{-1} \{y_{1k}\} - \{C_{kj}\}^{-1} \{y_{2k}\} \right]. \quad (152)$$

Como puede verse, la resolución de este par de ecuaciones involucra restas, multiplicaciones e inversiones de matrices. Todos estos cálculos se realizaron con la

ayuda de las subrutinas de Press *et al.* (1986). Para los parámetros de truncamiento establecidos, resolver las ecuaciones (151) y (152) requiere alrededor de 5 minutos.

Ya que los parámetros h/b y ϕ no están involucrados en el cómputo de las integrales, puede ahorrarse tiempo si una vez que se tienen los resultados de las integrales, se utilizan para calcular diferentes juegos de parámetros h/b y ϕ . En concordancia con el estilo de programación, se editó un archivo en donde se indican distintos juegos valores de h/b y ϕ junto con los nombres de los archivos donde el programa deberá escribir los resultados. El programa lee este archivo y repite los cálculos de acuerdo con estas indicaciones, tanto para polarización TE como TM. Esto es, si al programa se le proporcionan cuatro juegos distintos de parámetros h/b y ϕ , se obtendrán ocho diferentes juegos de coeficientes de transmisión.

Una vez que se ha resuelto en sistema en (148) y se han calculado los vectores desconocidos (cuyos componentes son los valores de a_{snml} y b_{snml}) resulta trivial calcular \mathbf{t}^a por medio de la ecuación (12). Por otra parte, el cálculo de \mathbf{t}^g requiere de procesos adicionales. Los valores de $A_{snmlrpqt}$ se calculan por medio de la ecuación (215), con ayuda de los coeficientes a_{snml} y b_{snml} y de las funciones $K_{snmlrpqt}$. Una vez que se tienen los valores $A_{snmlrpqt}$ se utiliza la ecuación (220) para calcular \mathbf{t}^g .

III.2 Cálculos numéricos

III.2.1 Concordancia con modelos anteriores

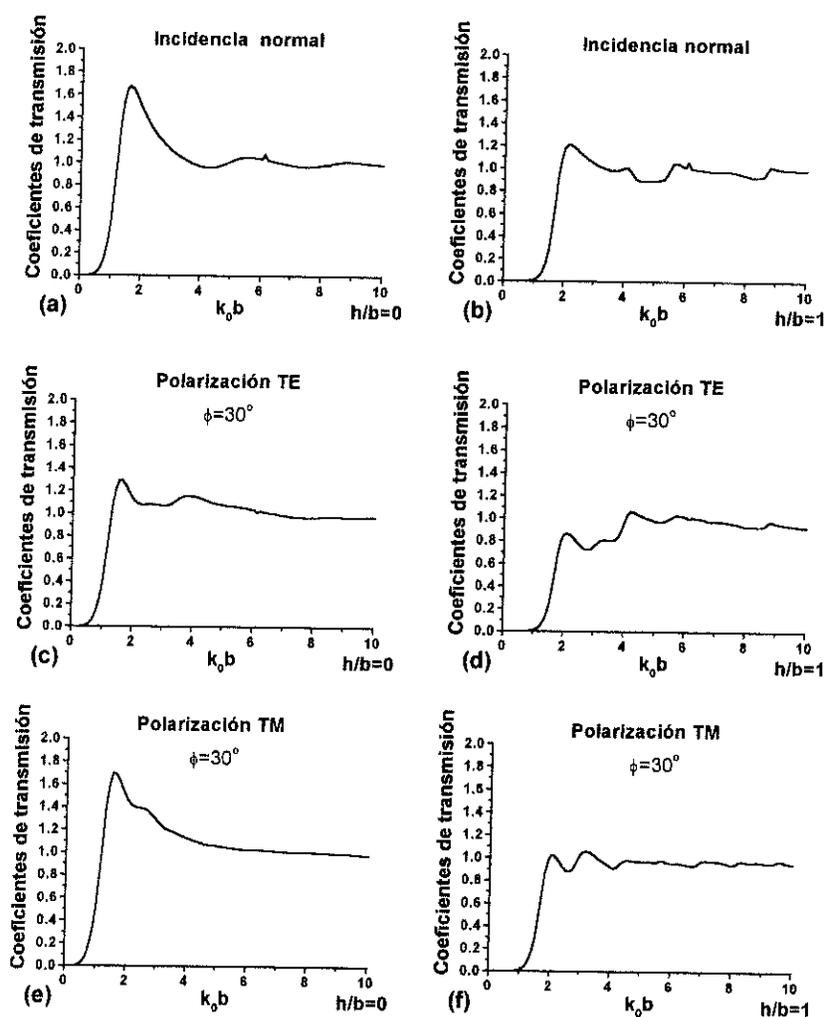


Figura 34: Cálculos para el coeficiente de transmisión t^a de acuerdo al modelo de Roberts. Este modelo se implementó por medio de un programa similar al descrito en la figura 33.

Se ha señalado con anterioridad que el modelo de Roberts es un caso particular del nuevo modelo en el que se cumple que $n_{cu}=n_{nu}=1$. En la subsección

II.1.5.2 se discutió la concordancia algebraica que existe entre los dos modelos. Para discutir la concordancia con los cálculos numéricos se presentan en la figura 34, seis gráficas del coeficiente de transmisión de la apertura t^a , con respecto al parámetro k_0b , obtenidas utilizando el modelo de Roberts (1987). Estas gráficas se obtuvieron con un programa similar al descrito en la figura 33. En este programa se utilizaron los parámetros de truncamiento $n_{max}=5$ y $m_{max}=7$ que Roberts utilizó en su trabajo.

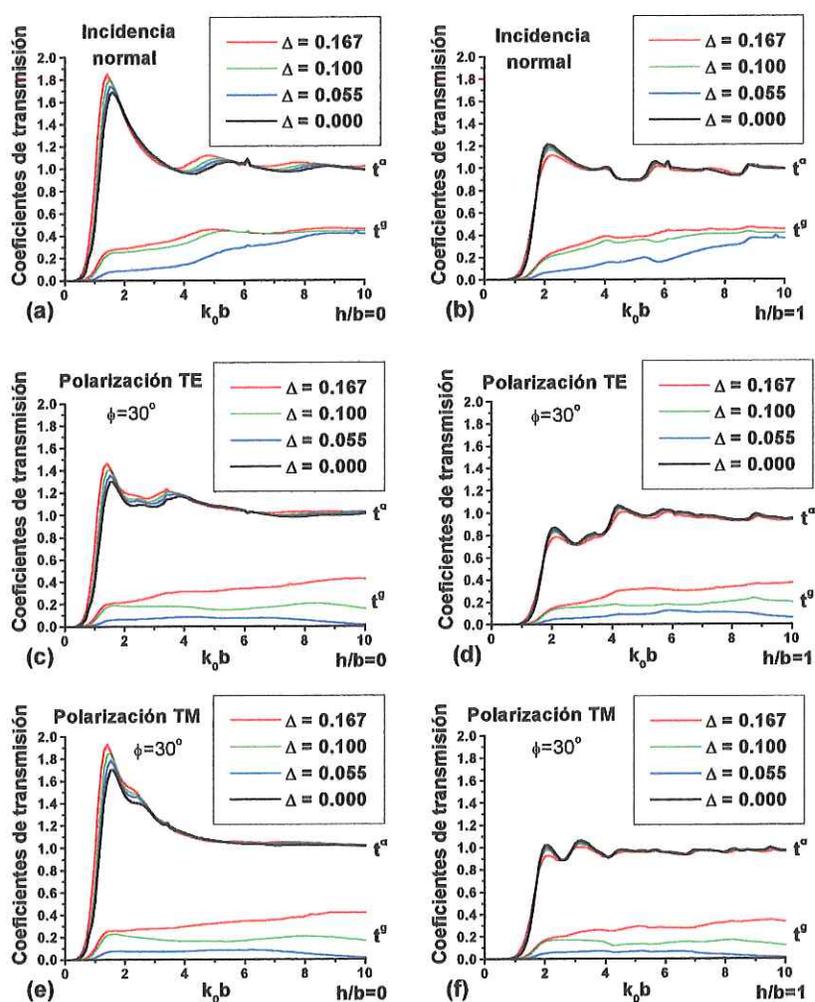


Figura 35: Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0a=10$ y $n_{cu}=1$. Este caso idealizado se utiliza para hacer la comparación con el modelo de Roberts. Los diferentes valores de Δ tienen 15, 7, 4 y 0 modos guiados disponibles.

En la figura 34 puede observarse que, para valores de k_0b pequeños, la transmisión crece rápidamente hasta alcanzar un punto crítico. Este punto crítico se alcanza, para el caso de pantalla delgada ($h/b=0$), alrededor de $k_0b=1.5$, mientras que para el caso de pantalla gruesa ($h/b=1$), se alcanza alrededor de $k_0b=2$. Para el caso de pantalla delgada puede observarse un gran pico de transmisión que sobrepasa la unidad. En el caso de pantalla gruesa, el pico también aparece, aunque muy disminuido. Esto es particularmente cierto en el caso de incidencia oblicua, en donde el pico se confunde fácilmente con otras oscilaciones de la gráfica.

Si dejamos de lado el intervalo de valores más pequeños de k_0b (desde cero hasta poco después del pico) se puede observar que las gráficas para el caso de pantalla delgada y pantalla gruesa son en buena medida similares. Esto no debería sorprender si se recuerda que en el modelo no se incluye ningún efecto de atenuación por parte del metal. Por esta razón, para el modelo, la apertura funciona como guía de onda sin pérdidas y no hay ninguna razón para que el incremento en el grosor de la pantalla reduzca significativamente la transmisión. El comportamiento para valores pequeños de k_0b requiere de un análisis más detallado.

Si se compara la figura 34 con la figura 3 del artículo de Roberts puede notarse la gran similitud entre las gráficas. Las diferencias pueden explicarse por los diferentes métodos de integración que se utilizaron en cada caso. Es importante destacar que los resultados presentados por Roberts para $h/b=0$ e incidencia normal concuerdan con los resultados de la figura 10 del trabajo de Nomura & Katsura (1955) quienes utilizaron un método basado en la expansión de polinomios

hipergeométricos. En esta figura pueden verse también resultados de publicaciones anteriores, todos los cuales muestran un máximo de transmisión en las vecindades de $k_0b=1.5$. También debe destacarse que el comportamiento de t^a para valores grandes de k_0b , tendiendo a la unidad, está en total concordancia con las teorías escalares clásicas (Klein & Furtak, 1986).

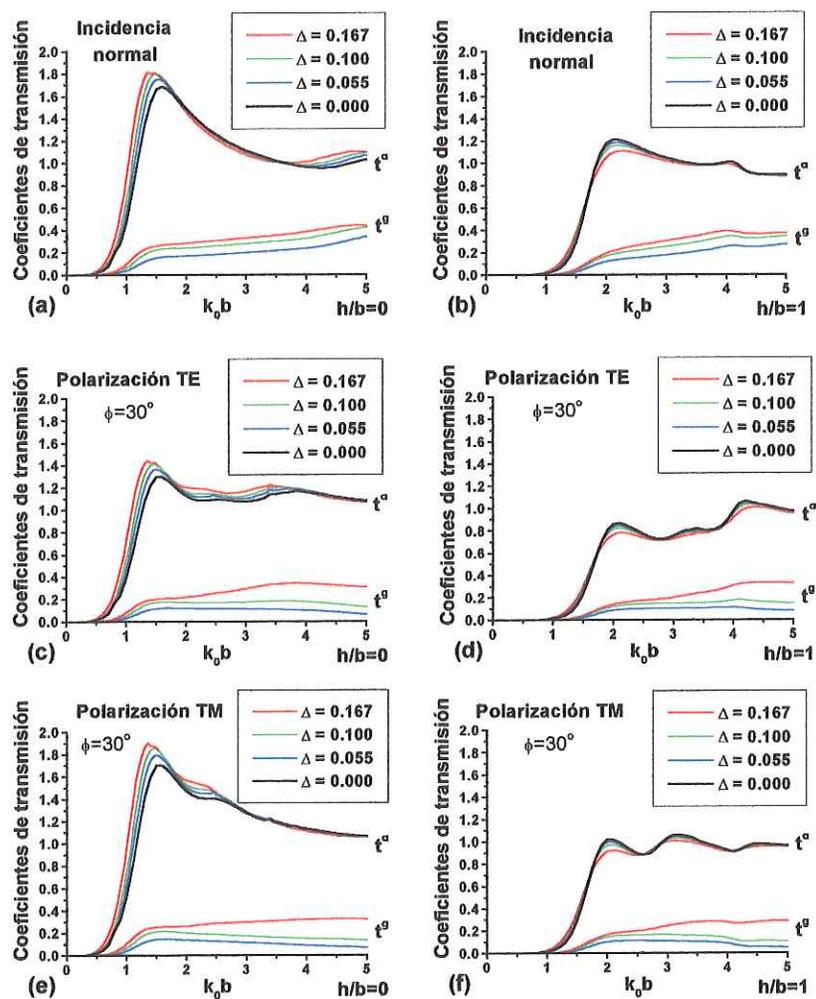


Figura 36: Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0a=5$ y $n_{cu}=1$. Este caso idealizado se utiliza para hacer la comparación con el modelo de Roberts. Los diferentes valores de Δ tienen 4, 3, 1 y 0 modos guiados disponibles.

La figura 35 muestra resultados para los coeficientes de transmisión cuando $n_{cu}=1$, $k_0\alpha=10$ y algunos valores de Δ en el intervalo $[0,0.25]$. Las gráficas de t^a , para $\Delta=0$ (en negro) concuerdan casi a la perfección con las gráficas mostradas en la figura 34. Debe ser obvio porqué no puede apreciarse la gráfica para t^s en este caso; para $\Delta=0$ no existe fibra óptica y t^s debe ser igual a cero. La figura 36 muestra resultados similares a los mostrados por la figura 35, sólo que en este caso $k_0\alpha=5$. Aquí también puede verificarse la concordancia de las gráficas en negro con el modelo de Roberts aunque, debido a la escala, no es tan evidente a simple vista.

El parámetro $n_{cu}=1$ utilizado en las gráficas corresponde físicamente a una fibra óptica cuya cubierta está hecha de aire. Esto no es tan irreal como podría parecer inicialmente. En la figura 17 de la subsección 1.4.2 se muestra un punta fabricada por el método de estiramiento, en que el ápice es tan pequeño, que al acoplar luz en ella, la cubierta hace el papel de núcleo y el aire hace el papel de cubierta. (Buckland *et al.* 1993).

Sin embargo, ya se señaló que no se espera que el modelo pueda ser útil para simular puntas con ángulos de filo pequeños, tales como las fabricadas por el método de estiramiento, sino puntas con ángulos de filo grandes, tales como las fabricadas por ataque químico. En este caso, lo usual es que tanto la cubierta como el núcleo estén hechos de vidrio. La verdadera razón por la que se escogió el parámetro $n_{cu}=1$ fue que podía coincidir en el caso límite con el modelo de Roberts.

III.2.2 Diferencias entre los coeficientes de transmisión de la apertura y de la fibra

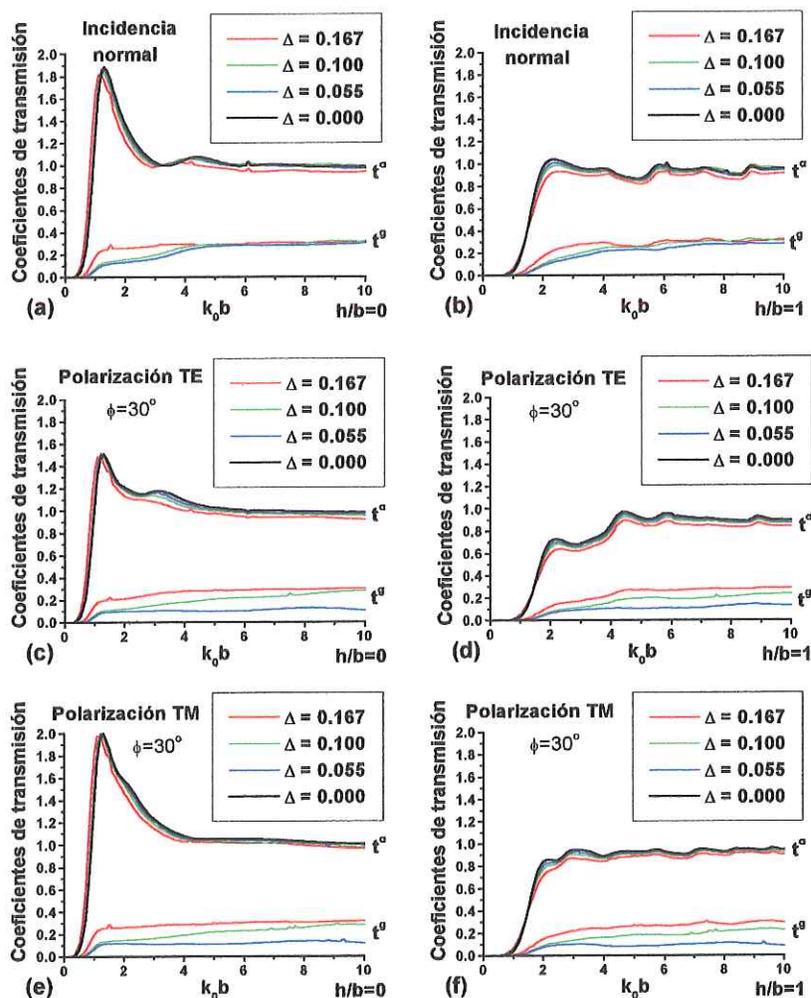


Figura 37: Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0 a = 10$ y $n_{cu} = \sqrt{2}$. La gráfica marcada con negro muestra los resultados que se obtendrían si toda la zona 3 se llena con un vidrio con índice de refracción igual a n_{cu} . Los diferentes valores de Δ tienen 29, 15, 4 y 0 modos guiados disponibles.

Una vez que la concordancia del nuevo modelo con el de Roberts ha quedado bien establecida, se discutirán las principales características de las gráficas de los

coeficientes de transmisión. Con el propósito de utilizar resultados más cercanos a una aplicación práctica se presentan en esta sección las figuras 37 y 38, que son análogas a las figuras 35 y 36 de la subsección anterior, con la excepción de que ahora $n_{cu} = \sqrt{2}$, valor muy cercano al índice de refracción típico del vidrio. A continuación, se enumerarán las principales diferencias entre los coeficientes de transmisión de la apertura y de la fibra.

- **El coeficiente de transmisión de la fibra t^b siempre es menor que el coeficiente de transmisión de la apertura t^a .**

La razón de esto resulta evidente si se recuerda que los modos guiados son sólo una pequeña proporción del conjunto ortonormal completo (la cantidad de modos radiativos es infinita). Lo que sí es sorprendente es que esta pequeña proporción de modos pueda conducir en algunos casos (figura 35), hasta la mitad de la energía que logra atravesar la apertura.

- **El coeficiente de transmisión de la apertura t^a es casi independiente de Δ mientras que el coeficiente de transmisión de la fibra t^b tiene una fuerte dependencia con este mismo parámetro.**

Esta característica puede explicarse parcialmente tomando en cuenta que, si $k_0 a$ mantiene constante, el parámetro Δ controla la cantidad de modos guiados disponibles. De acuerdo a esto t^b debe ser mayor mientras mayor sea la cantidad de modos guiados que pueden excitarse. Sin embargo, esto no es completamente exacto.

Pueden encontrarse casos en los que una reducción en la cantidad de modos no produce reducción en t^g y casos en que t^g se reduce sin existir reducción de modos.

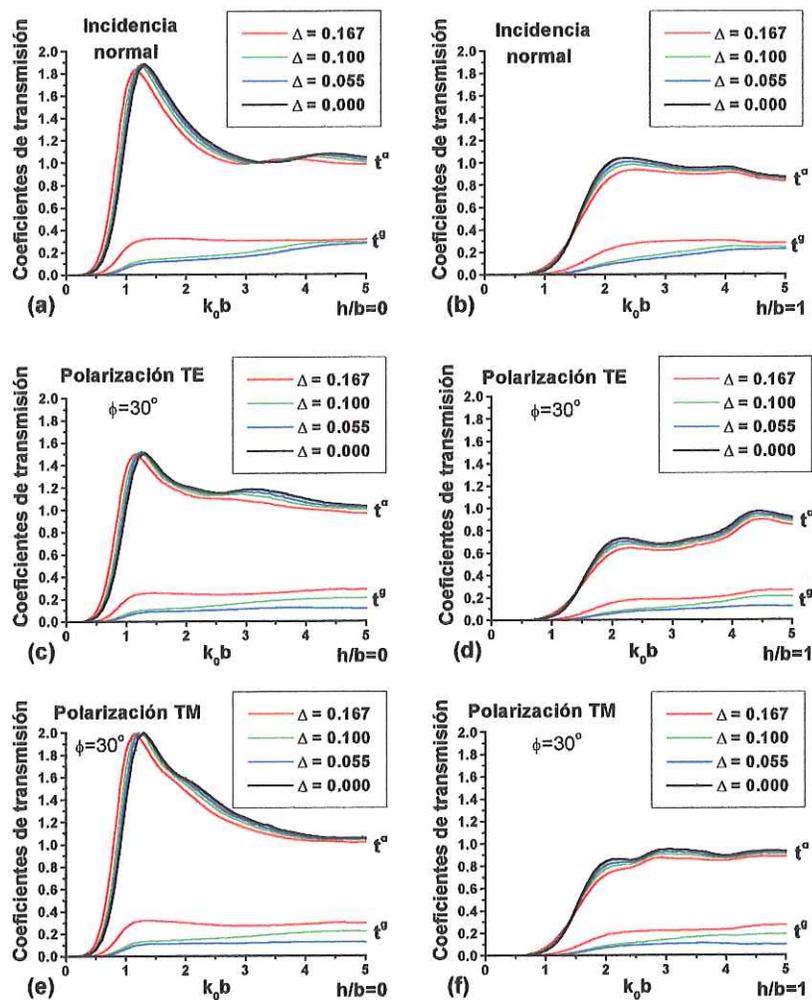


Figura 38: Cálculos de los coeficientes de transmisión para una fibra con $k_0 a = 5$ y $n_{cu} = \sqrt{2}$. La gráfica marcada con negro muestra los resultados que se obtendrían si toda la zona 3 se llena con un vidrio con índice de refracción igual a n_{cu} . Los diferentes valores de Δ tienen 7, 4, 4 y 0 modos guiados disponibles.

Considérense las figuras 35a, 35b, 37a y 37b que suponen incidencia normal.

En todas ellas puede encontrarse un valor lo suficientemente grande de $k_0 b$ para el cual las gráficas azul, verde y roja, prácticamente se empalman. En la figura 35, estas

gráficas representan sistemas con 15, 7 y 4 modos, mientras que en la figura 37, (en donde el empalme es más pronunciado), las tres gráficas representan sistemas con 29, 15 y 4 modos. La explicación es, que en esta situación, la mayor parte de la energía se acopla en modos guiados de orden inferior.

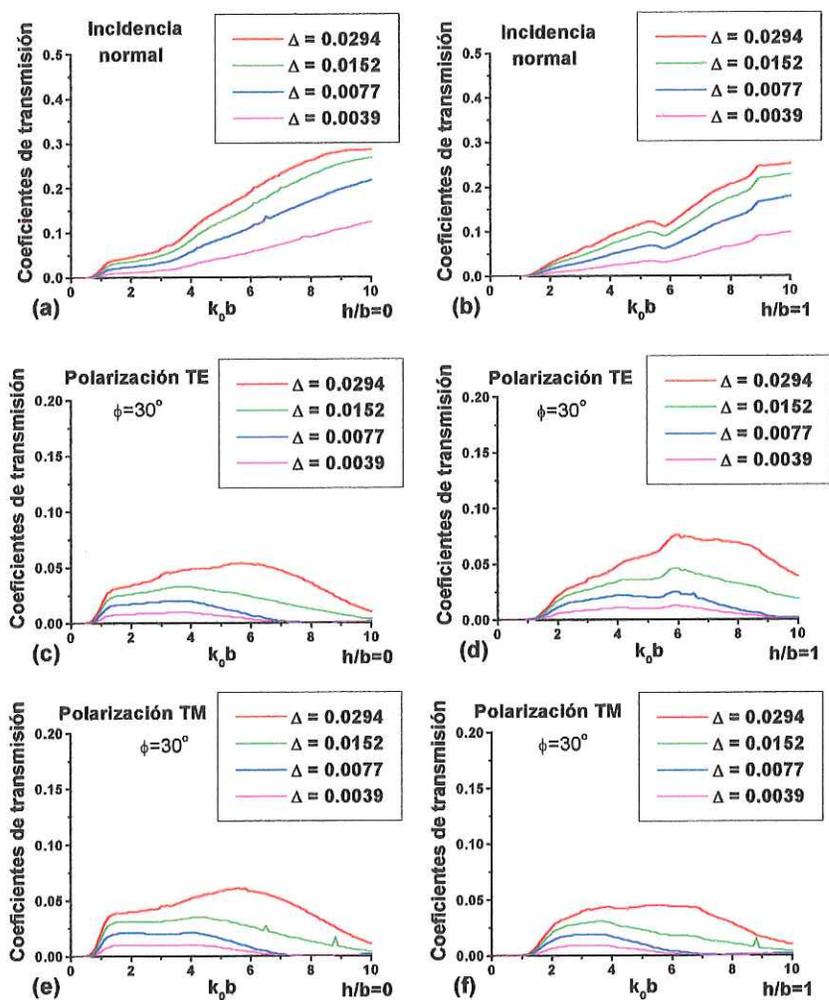


Figura 39: Cálculos del coeficientes de transmisión para fibras con $k_0 a = 10$ y $n_{cu} = \sqrt{2}$, para valores pequeños de Δ . Los diferentes valores de Δ tienen 4, 4, 1 y 1 modo guiado disponible.

Para saber que ocurre cuando la cantidad de modos guiados se reduce, hasta llegar al caso de una fibra unimodo, se necesitan resultados adicionales. En la figura

39 se muestran gráficas del coeficiente de transmisión, análogas a las de la figura 37, pero en donde la fibra tiene valores más pequeños de Δ . En esta figura no existe empalme de las gráficas para valores grandes de k_0b en incidencia normal. Esto revela que los modos guiados que en esta situación acarrean cantidades significativas de energía, son más de uno.

En la figura 39 pueden observarse comportamientos diferentes de la transmisión de la fibra para incidencia normal y para incidencia oblicua. Para incidencia normal, la transmisión siempre aumenta al aumentar k_0b . En cambio, para incidencia oblicua existe un máximo de transmisión, que se alcanza a valores menores de k_0b conforme los valores de Δ se vuelven más pequeños. Es interesante notar que se observa reducción en la transmisión *siempre que existe reducción en Δ* . Esto ocurre aunque *no ocurra reducción en la cantidad de modos guiados disponibles*.

- **En las gráficas del coeficiente de transmisión de la fibra t^g no aparece el pico que aparece en las gráficas de t^a .**

Es de esperarse que mientras más energía atraviese la apertura, una porción más grande de ésta se excite en forma de modos guiados. Por esto, sería de esperar que las gráficas de t^g tuvieran un cierto parecido con las de t^a . En realidad, por lo general es así. Para valores pequeños de k_0b ambos coeficientes de transmisión aumentan mientras k_0b aumenta y, en algunos casos, ambos coeficientes tienden a un valor constante para valores grandes de k_0b . Las dos excepciones a esto son, el máximo de transmisión t^g que aparece para valores pequeños de Δ y la ausencia en las

gráficas de t^g , del gran pico que aparece en las gráficas de t^a . La ausencia de este pico en las gráficas de t^g , indica que los modos de la apertura responsables de éste se acoplan preferentemente con modos radiativos de la fibra óptica, de modo que toda esta energía no puede contribuir a la transmisión a través de la fibra. La ausencia de pico en las gráficas de t^g tiene una consecuencia secundaria. En las gráficas de t^g , sólo para valores muy pequeños de k_0b existen diferencias significativas en los casos de pantalla delgada y pantalla gruesa.

III.2.3 Transmisión de la fibra con respecto número de modos disponibles y a la altura del perfil.

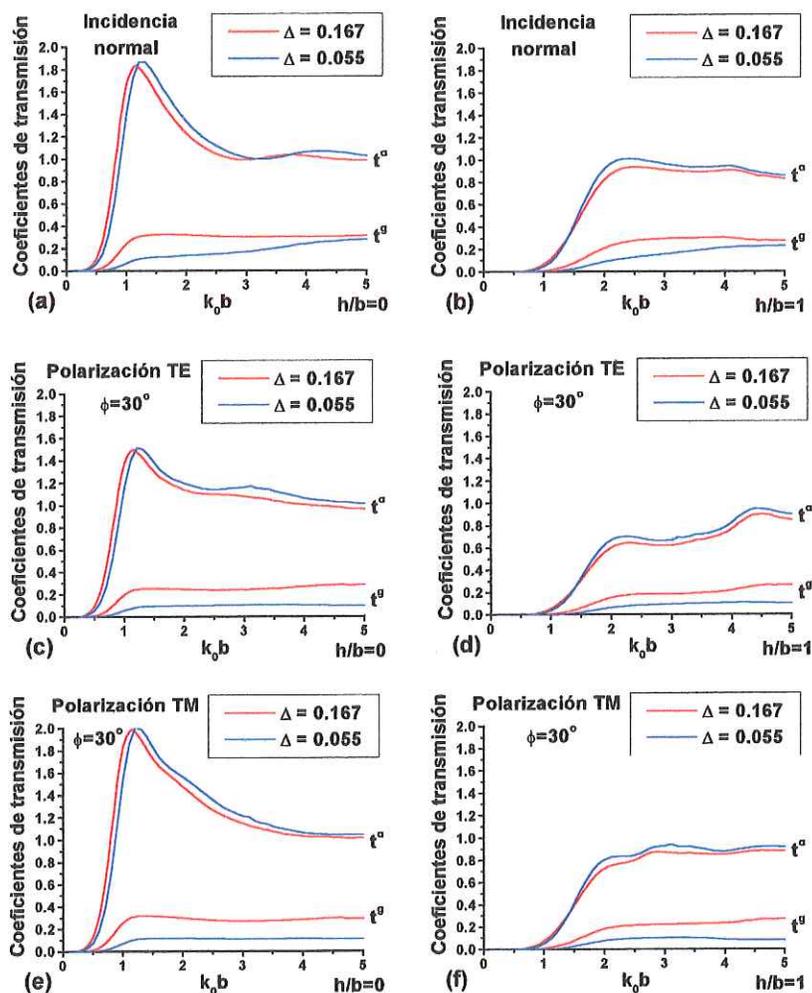


Figura 40: Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=5$ (7 modos guiados). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^g siempre es mayor para valores mayores de Δ .

Una de las observaciones más importantes de la subsección anterior consiste en la dependencia del coeficiente de transmisión de la fibra t^g , con respecto a la altura del perfil Δ . Se señaló que esto está relacionado de alguna forma con la dependencia

de t^g con la cantidad de modos guiados disponibles, pero que la relación no es lo suficientemente clara. En la figura 39 pueden observarse casos en que, aunque la reducción de Δ no implica reducción de la cantidad de modos guiados, la reducción de Δ sí implica reducción en la transmisión t^g .

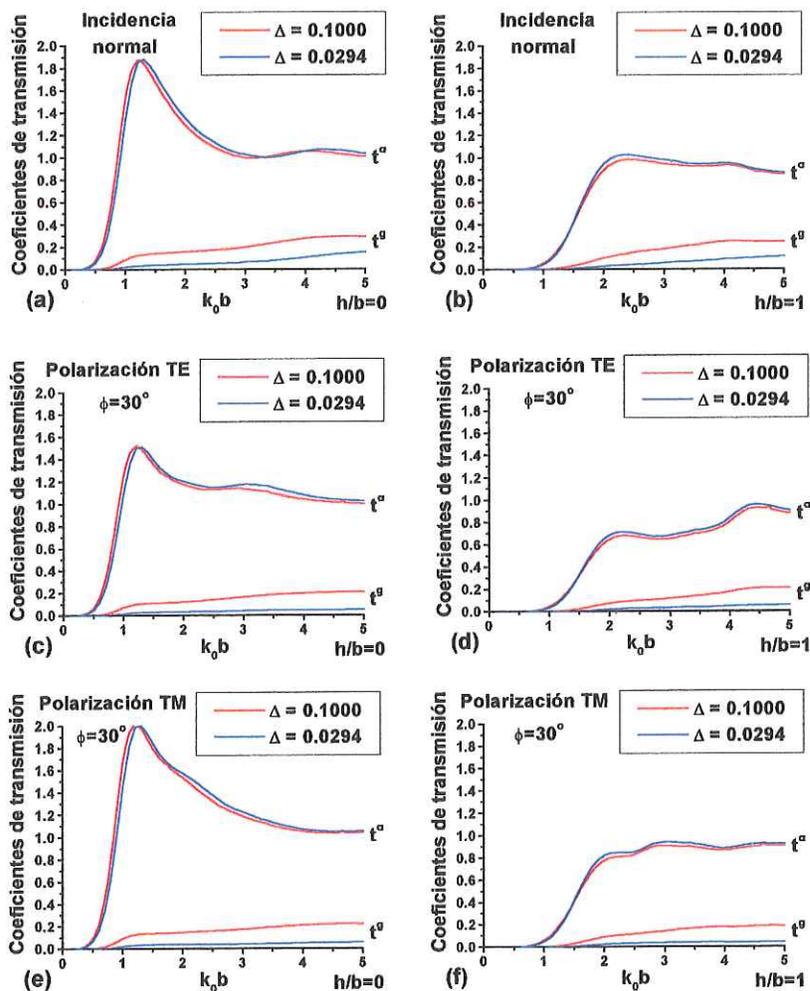


Figura 41: Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=3.535$ (4 modos guiados). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^g siempre es mayor para valores mayores de Δ .

En la figura 40 pueden apreciarse las gráficas de los coeficientes de transmisión para dos diferentes fibras. La gráfica roja representa una fibra con $k_0a=5$ y $\Delta=0.167$ mientras que la gráfica azul representa una con $k_0a=10$ y $\Delta=0.055$. Ambas fibras tienen el mismo parámetro $V=5$ y 7 modos guiados. Es muy evidente que en casi todos los casos, la transmisión de la fibra t^g es menor cuando la altura del perfil Δ es menor.

En la figura 41 se observa un caso análogo, sólo que en esta ocasión el parámetro de la fibra es $V=3.535$ y las fibras tienen 4 modos guiados. En esta gráfica puede apreciarse también que la gráfica que corresponde al valor de Δ mayor (gráfica roja) siempre tiene un coeficiente de transmisión de la fibra t^g más grande que aquella en que Δ es menor (gráfica azul).

La figura 42 representa un sistema en que $V=2.5$ y 4 modos guiados. Se vuelve a encontrar que los valores grandes de Δ siempre tienen más transmisión en modos guiados. Se puede discutir otra situación interesante comparando las figuras 41 y 42. Aunque el parámetro de la fibra se ha reducido en la figura 42, aún existe la misma cantidad de modos. Puede apreciarse que, aunque no se observa una diferencia significativa en los valores t^g en las dos figuras para incidencia normal, los valores de t^g en la figura 42, para el caso de incidencia oblicua, son decididamente menores.

Por último, la figura 42 muestra la comparación entre dos fibras con parámetro $V=1.768$. Este valor está por debajo de $V=2.402$, por lo que corresponde a fibras unimodo. En este caso extremo, también se perciben valores más altos en la

gráfica roja que en la gráfica azul. Es más, para incidencia oblicua, la gráfica azul casi no puede apreciarse para la escala escogida.

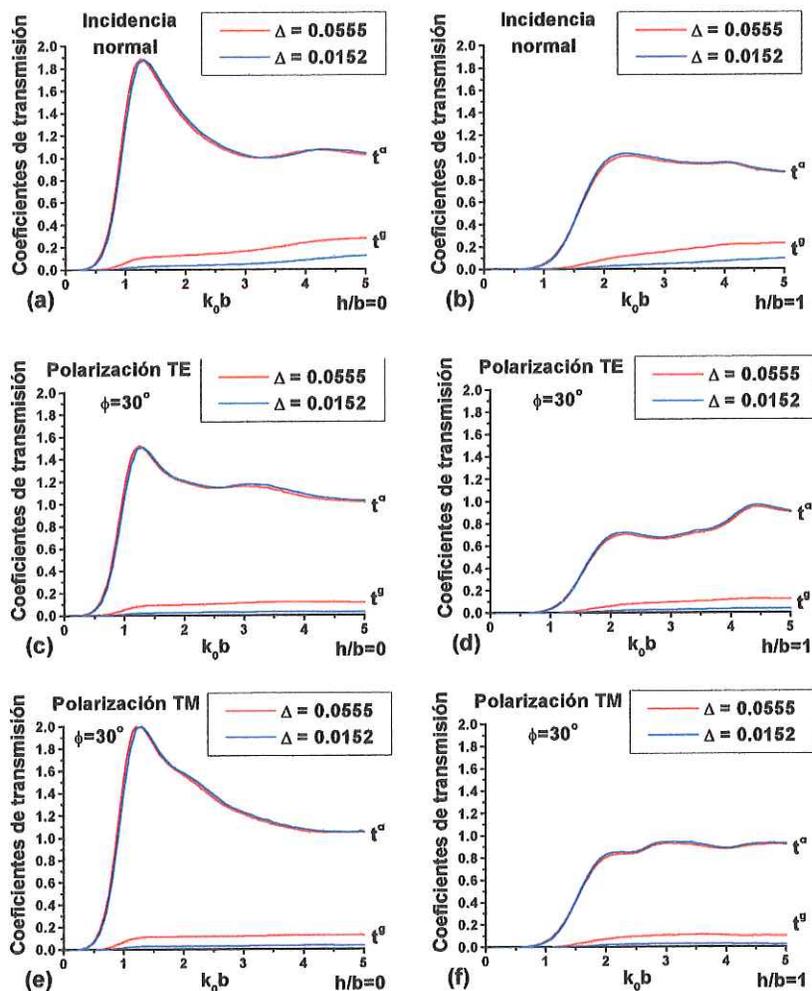


Figura 42: Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=2.5$ (4 modos guiados). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^e siempre es mayor para valores mayores de Δ .

Todas las gráficas presentadas hasta el momento comparaban resultados para los que $k_0 a$ era una constante y por tanto, los distintos valores de Δ correspondían a

distintos valores de V . Ya que el parámetro V es el que controla la cantidad de modos guiados disponibles, si se pretende aclarar la verdadera relación de t^g con Δ es necesario presentar las gráficas en forma algo diferente.

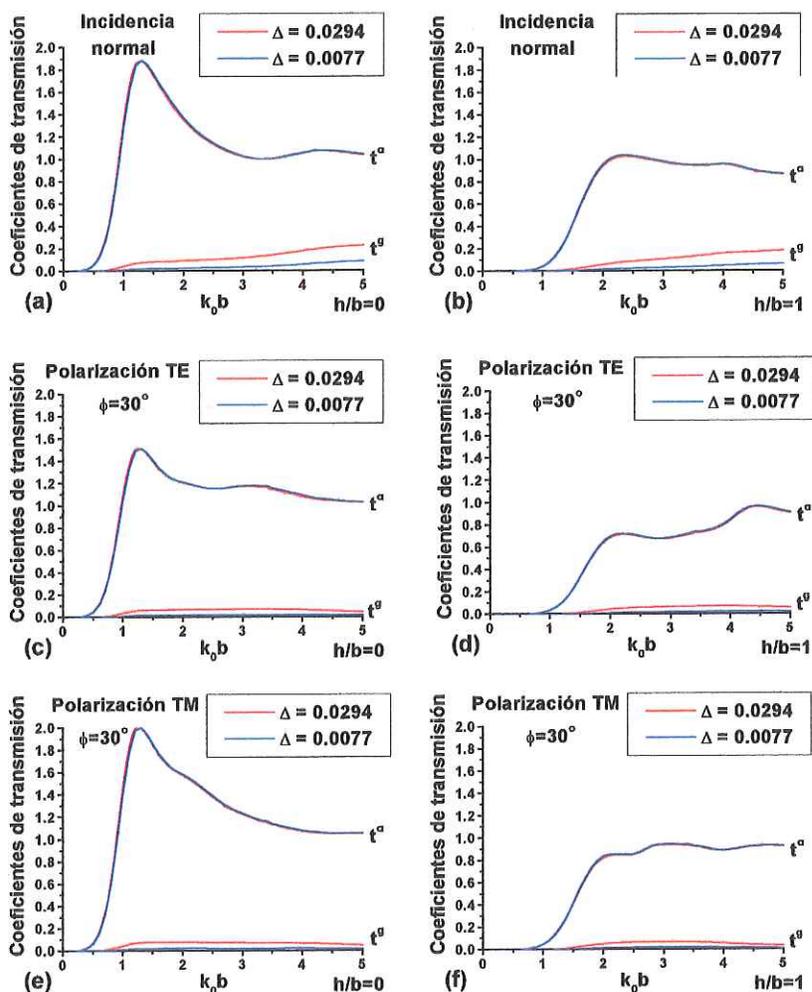


Figura 43: Cálculos de los coeficientes de transmisión para dos fibras con $V=1.768$ (1 modo guiado). Puede observarse que la transmisión de la fibra t^g siempre es mayor para valores mayores de Δ .

Puede observarse en las figuras 40-43 que, si bien ya es familiar el parecido de las gráficas para t^a , este parecido se va haciendo mayor conforme los valores de Δ

se van haciendo pequeños. La razón de esto es obvia si se recuerda que el modelo de Roberts es el caso límite de este modelo para el caso $\Delta=0$ y que es independiente del valor de k_0a . En cuanto a t^g las gráficas sugieren una dependencia de Δ , que no está relacionada con la cantidad de modos disponibles.

Esta situación se puede analizar desde el punto de vista físico. Se supone que se hace que $\Delta \rightarrow 0$ y $k_0a \rightarrow \infty$ mientras se mantiene fijo el parámetro V . El mantener fijo el parámetro V garantiza que la cantidad de modos guiados será constante y no influirá en el análisis subsecuente. Mientras $\Delta \rightarrow 0$, la diferencia entre los dos medios se reduce. Más aún, el hacer $k_0a \rightarrow \infty$ a longitud de onda constante, implica agrandar el radio del núcleo de la fibra. De esta manera, la frontera entre los dos medios se alejará más y más de la zona de interés. Es evidente que en esta situación t^g debe ir haciéndose cada vez más pequeña para llegar en el límite al caso de un medio continuo.

Debe anotarse que la relación de t^g con Δ , señalada en el párrafo anterior, no excluye que el parámetro de la fibra (relacionado con Δ) tenga su propia forma de influir en t^g . Así, existen dos formas de favorecer la transmisión en modos guiados, incrementar la cantidad de modos guiados disponibles, mantener fijo este parámetro e incrementar el valor de Δ , o bien las dos cosas. En MOBC existen situaciones en las que las puntas deben fabricarse necesariamente con fibras unimodo, o en que la estructura de la punta se comporta como una fibra unimodo. En estos casos si se desea maximizar la transmisión deberán escogerse las fibras con los valores de Δ más altos disponibles.

III.2.4 Dependencia de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia

En las subsecciones anteriores se presentaron cálculos que toman en cuenta dos posibles ángulos de la onda incidente: incidencia normal e incidencia a 30° . Para analizar con más profundidad el comportamiento de los coeficientes de transmisión con respecto a variaciones en el ángulo de incidencia ϕ , se requiere presentar información adicional.

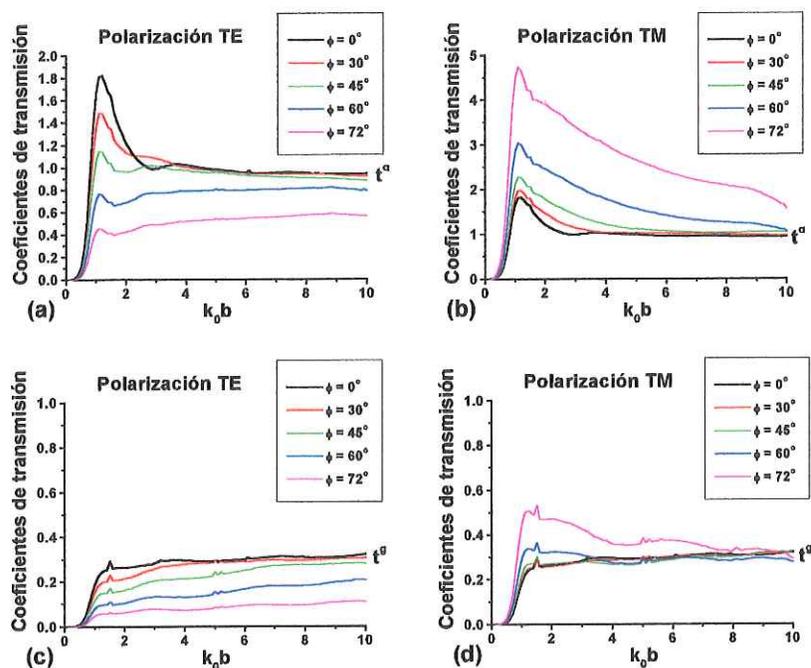


Figura 44: Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0 a = 10$ y $\Delta = 0.167$ ($V = 10$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.

En la figura 44 pueden observarse gráficas de los coeficientes de transmisión para el caso de una fibra con $k_0 a = 10$ y $\Delta = 0.167$. Debido a las diferencias en la

magnitud de t^a para polarización TE y TM, las escalas en las figuras 44a y 44b son diferentes. En ambas figuras, las gráficas para $\phi=0^\circ$ (en negro) son idénticas. Un ángulo de incidencia cero para cualquier polarización corresponde a incidencia normal corresponden al caso de incidencia normal, en el que la polarización no es un parámetro relevante.

A partir de las gráficas para $\phi=0^\circ$, la transmisión de la apertura para el caso TE se reduce mientras se incrementa ϕ . Por otra parte, para el caso TM los incrementos en el ángulo producen grandes incrementos en esta transmisión. Esta característica es un resultado conocido (Paesler, 1994) que se ha utilizado en muchos casos para maximizar la señal en diversas configuraciones de MOBC. En estas gráficas de t^a para polarización TM se puede apreciar que el pico que existe en las vecindades de $k_0b=1.5$ se vuelve cada vez más grande con cada sucesivo incremento de ϕ .

Anteriormente se discutió que para el caso de incidencia normal, el ya mencionado pico en t^a no ejerce mayor influencia en la gráfica correspondiente de t^g . Por comparación de las figuras 44b y 44d puede observarse que este caso es diferente. Los grandes picos en la figura 44b sí tienen correspondencia en incrementos en la transmisión en la figura 44d. Sin embargo, a pesar de que esta influencia es real, es notorio que los incrementos en t^g no están en proporción con los grandes incrementos de t^a . Esto revela que sigue siendo verdad que la mayoría de los modos de la apertura, responsables de los picos, acoplan preferentemente en modos

radiativos. Es debido al gran tamaño de estos picos, que la pequeña proporción que acopla en modos guiados llega a tener un valor absoluto significativo.

Es interesante comparar qué otras diferencias y similitudes existen entre las gráficas de t^a y t^g . Comparando las gráficas 44a y 44c puede observarse que la dependencia de t^g con ϕ sigue el mismo patrón que la dependencia de t^a con ϕ , esto es, la transmisión se reduce al incrementar el ángulo de incidencia. Comparando las gráficas 44b y 44d se observa que por lo general también aquí el comportamiento de t^g es similar al de t^a . Esto con excepción de los valores grandes de ϕ , en los que casi no se observa dependencia de t^g con el ángulo de incidencia.

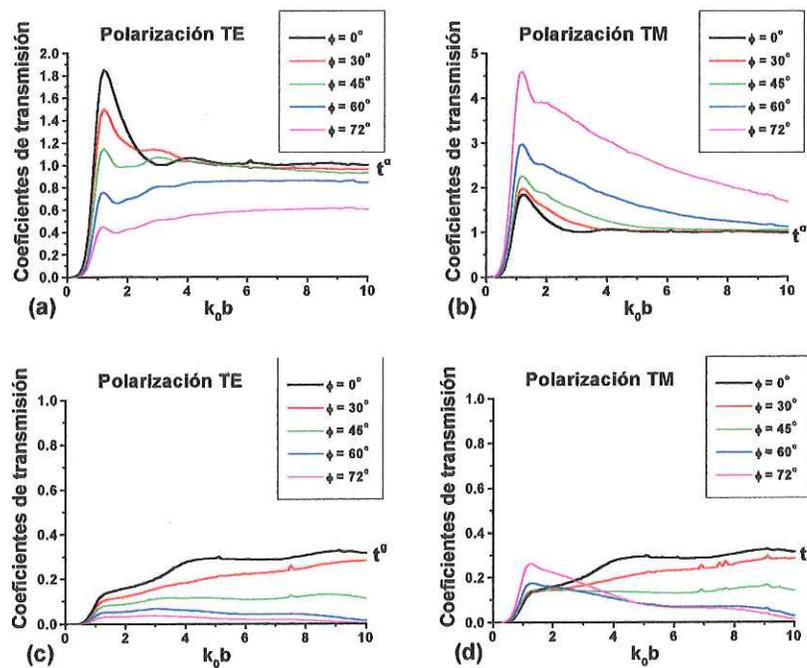


Figura 45: Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0 a = 10$ y $\Delta = 0.1$ ($V = 7.07$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.

En la figura 45 se observa el caso de una fibra con parámetro de perfil $\Delta=0.1$. En este caso las figuras 45a y 45c (polarización TE) son muy parecidas a sus correspondientes en la figura 44, llevando a las mismas observaciones que se hicieron para esta figura. En cuanto al caso de polarización TM La figura 45b también es similar a la 44b pero, en la figura 45d se observa una característica sorprendente. Se sigue encontrando que para valores pequeños de k_0b , la dependencia de t^g con ϕ sigue el mismo comportamiento que t^a , esto es, la transmisión aumenta conforme ϕ aumenta. Sin embargo, existe un punto a partir del cual, para valores mayores de k_0b , la transmisión disminuye con incrementos sucesivos del ángulo de incidencia. El punto que divide estas dos distintas formas de comportamiento se puede apreciar con facilidad en 45d como el punto en que las gráficas de t^g se cruzan.

Es interesante observar que en el intervalo posterior al cruce, las gráficas de t^g para las dos polarizaciones son notablemente similares. La explicación de lo que ocurre en la figura 45d podría explicarse argumentando que el comportamiento *básico* de t^g con respecto a ϕ es similar para las dos polarizaciones. Sin embargo, en el caso de la polarización TM, para valores bajos de k_0b , los excesivamente grandes picos de transmisión en t^a incrementan la transmisión de t^g en este intervalo. Una vez que la gran cantidad de energía debida al pico deja de estar disponible, los valores de t^g empiezan a decrecer (región del cruce) hasta regresar finalmente a su comportamiento *básico*.

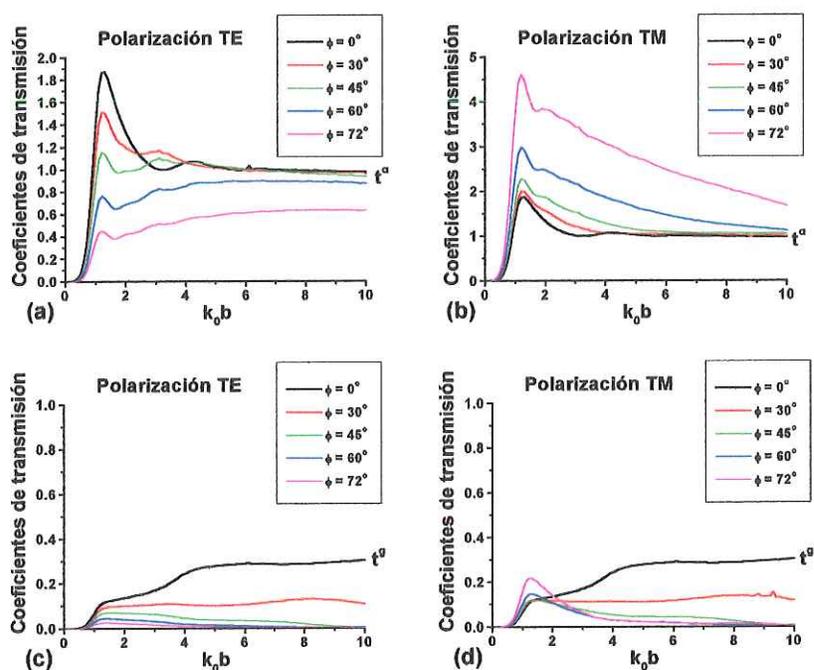


Figura 46: Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0 a = 10$ y $\Delta = 0.055$ ($V = 5$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.

En la figura 46 se presenta un caso adicional en que el parámetro del perfil es $\Delta = 0.055$. Para este caso, todas las observaciones que pueden hacerse son idénticas a las hechas para la figura 45. Aquí también, para polarización TE, los coeficientes de transmisión de la apertura y de la fibra tienen una dependencia inversa con respecto al ángulo de incidencia. Y para el caso TM, el coeficiente de transmisión de la apertura t^a depende directamente de ϕ , mientras que el coeficiente de transmisión de la fibra t^b tiene dos intervalos de comportamiento: para valores bajos de $k_0 b$, t^b se comporta en forma similar a t^a , mientras que para valores que sobrepasan el punto de cruce, los valores de t^b para polarización TM son similares a sus análogos para polarización TE.

Es interesante investigar en que condiciones las gráficas de t^g muestran el cruce que se observa en las figuras 45d y 46d ($\Delta=0.1$ y $\Delta=0.055$), pero no en la figura 44d ($\Delta=0.167$). Es evidente que esta situación parece estar relacionada con valores pequeños de Δ , o bien con valores pequeños del parámetro V . Para clarificar esto, es necesario presentar resultados adicionales.

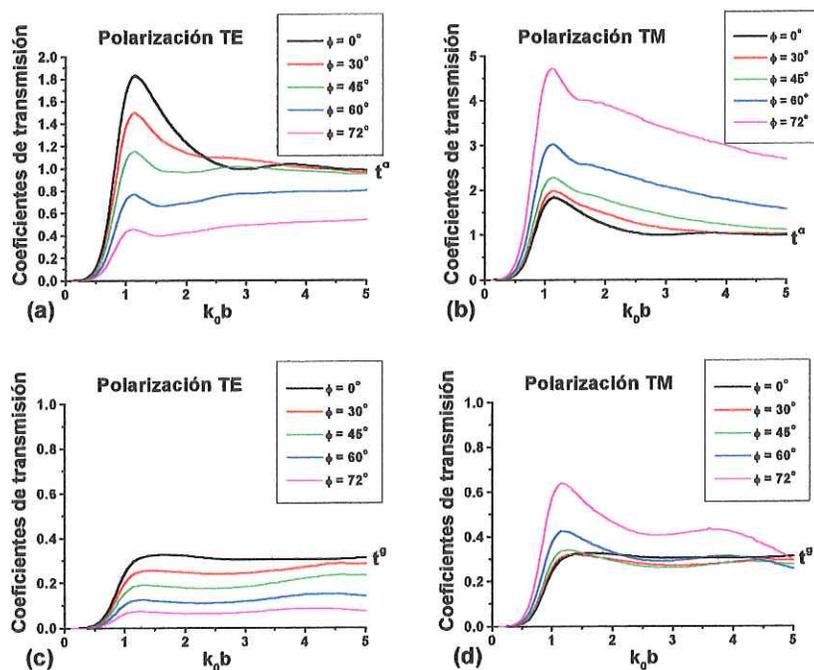


Figura 47: Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0 a = 5$ y $\Delta = 0.167$ ($V = 5$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.

En las figuras 47-49 pueden encontrarse resultados análogos a los de las figuras 44-46 con la excepción de que en este caso $k_0 a = 5$. En esta situación para valores similares de la altura del perfil, el parámetro de la fibra (y el número de modos guiados) será menor.

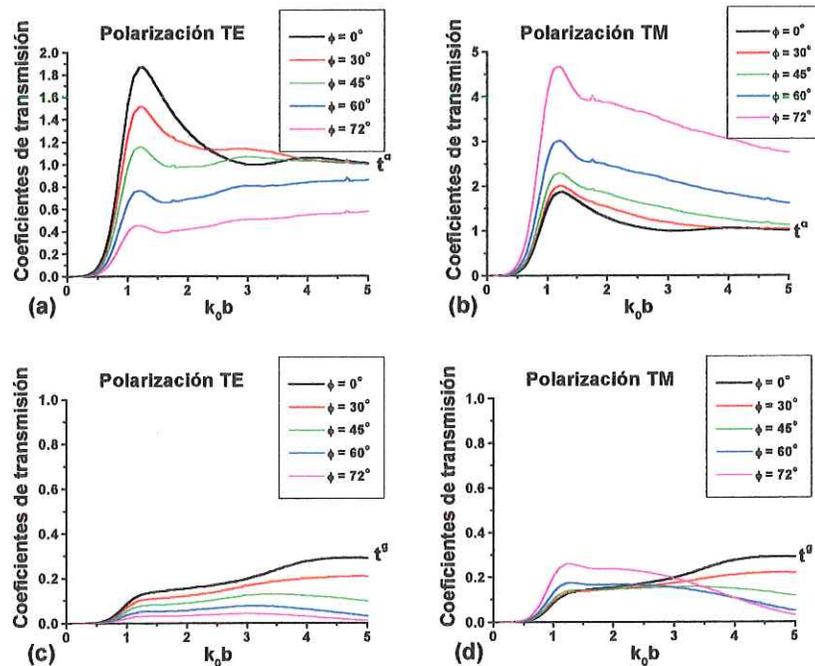


Figura 48: Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0 a = 5$ y $\Delta = 0.1$ ($V = 3.54$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.

De la comparación de las figuras 44-46 con las 47-49 puede notarse que las gráficas con valores similares de Δ son muy similares, a pesar de que el parámetro V sea muy diferente. En cambio, las gráficas correspondientes al mismo parámetro (figuras 46 y 47) no tienen nada en común. Esto es evidencia de que la situación de cruce no tiene que ver con una reducción en la cantidad de modos guiados disponibles, sino con valores pequeños de Δ . Sin embargo, puede constatar que el parámetro V influye en el valor de $k_0 b$ en que se alcanzará el cruce. Valores pequeños de V se relacionan con cruces a valores menores de $k_0 b$.

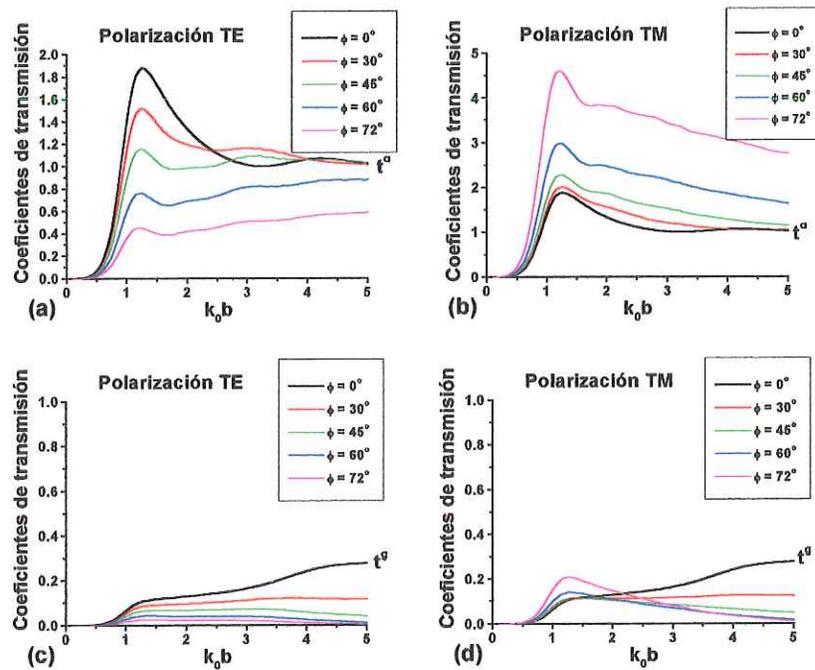


Figura 49: Cálculos de los coeficientes de transmisión con respecto al ángulo de incidencia para una fibra con $k_0 a = 5$ y $\Delta = 0.055$ ($V = 1.77$). La pantalla conductora se considera infinitamente delgada.

En las figuras anteriores pueden verificarse también la forma ya conocida de la dependencia de t^g con respecto a Δ . Ya se discutió extensamente que t^g se reduce cuando el parámetro del perfil Δ se reduce, con la excepción notable del caso de incidencia normal para el intervalo de valores grandes de $k_0 b$. Se puede observar además que la reducción que sufre t^g cuando se reduce Δ es mayor para ángulos de incidencia mayores.

IV.-CONCLUSIONES

Desde que Pohl (1984) construyó su *estetoscopio óptico*, la búsqueda de un buen modelo teórico que pueda usarse para predecir resultados experimentales en MOBCC ha sido ardua. Se han desarrollado gran cantidad de modelos, desde los más sencillos como los de difracción por pequeñas aperturas, hasta los que tratan de resolver computacionalmente las complicadas condiciones de frontera involucradas.

Hasta donde se tiene conocimiento (Paesler&Moyer, 1994) no existe aún un modelo general para la MOBCC. De esta forma, cualquier aproximación diferente al problema, puede contribuir en esta dirección. El modelo ideal sería aquél que fuera sencillo, que no requiriera excesivo tiempo de cómputo y que se aproximara lo más posible a la geometría real del problema.

Como ya se mencionó anteriormente, una de las aproximaciones más utilizadas en el desarrollo de nuevos modelos para MOBCC es el dividir el problema en dos: por una parte se requiere un modelo para la interacción luz-sonda y por la otra un modelo para la interacción luz-muestra. Ya que existe una cantidad infinita de posibles muestras, y una grande, pero finita cantidad de diferentes modelos de sondas para MOBCC, existen modelos exclusivamente dedicados a analizar la interacción sonda-luz. La sonda más utilizada es la punta de fibra óptica. Entre estas, muchas de ellas se encuentran recubiertas de metal. La forma más sencilla de aproximar estas puntas consiste en utilizar modelos de difracción a través de pequeñas aperturas circulares. En estos modelos se supone que el recubrimiento metálico de la punta es

una pantalla conductora infinita con un orificio en el centro. La luz que logra atravesar el orificio se considera que logró acoplarse en la punta.

En el modelo que se presenta en este trabajo se parece a un modelo de difracción a través de pequeñas aperturas, pero en el cual la estructura material de la fibra óptica con que se ha construido la punta se toma en cuenta. Esto permite, con ayuda del conocimiento teórico de la estructura modal de la fibra, que se pueda separar la luz que atraviesa el orificio, en dos tipos: aquella que después de atravesar se radia al ambiente, de aquella que logra ser transportada por el cuerpo de la fibra.

En otras palabras, la principal aportación de este nuevo modelo consiste en que es posible distinguir entre transmisión a través de la apertura (toda la energía que atraviesa la perforación en el recubrimiento metálico) y transmisión a través de la fibra (la parte de la energía que se acopla en forma de modos guiados). Esta última forma de calcular la transmisión, hasta donde se sabe, no se había utilizado en modelos similares anteriores. Es de esperarse que esta *transmisión de la fibra* represente mejor el acoplamiento real de luz en puntas de fibra óptica que la *transmisión de la apertura*.

Aunque un poco más complicado algebraicamente que su inmediato predecesor (Roberts, 1987), este nuevo modelo no recurre, en realidad, a matemáticas muy avanzadas. En su desarrollo teórico se han utilizado conceptos básicos de álgebra lineal y de resolución de ecuaciones diferenciales. Por otra parte, en su implementación numérica sólo se recurre a algoritmos sencillos de integración y de operaciones con matrices.

La principal desventaja del modelo consiste en su geometría excesivamente simplificada. En particular, la geometría cónica de las puntas no se toma en cuenta. Esto no permite utilizar el modelo para discutir las diferencias en la eficiencia de transmisión de puntas con ángulos de filo α diferentes, lo que podría ser muy importante en aplicaciones experimentales. Sin embargo, aunque el modelo aquí presentado no pueda hacerlo, las bases teóricas que se han presentado a lo largo de este trabajo podrían utilizarse, sin añadir demasiado, para la implementación de un modelo mejorado que pueda tomar en cuenta esta característica.

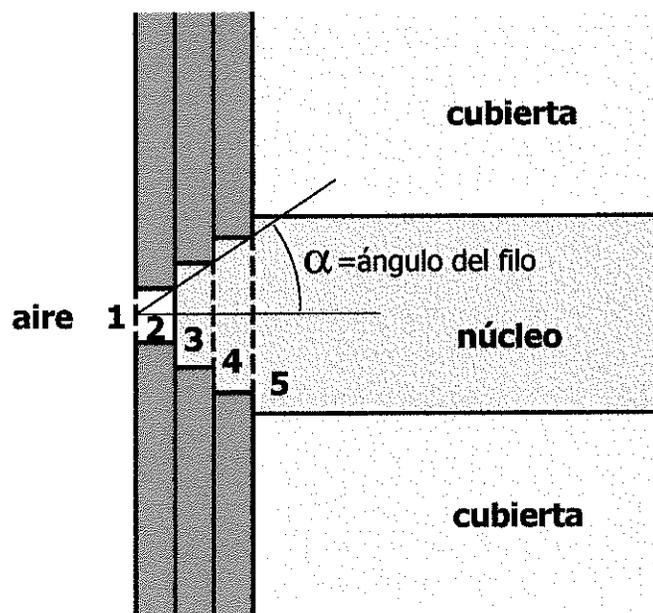


Figura 50: Sección transversal de la geometría de una versión avanzada del modelo que incluye la conicidad de las puntas reales. En este caso el espacio se divide en cinco o más zonas. Aunque esta versión requiere cálculos algebraicos adicionales y es más pesado numéricamente, no es teóricamente más complicado que el modelo que se ha expuesto en este trabajo.

En la figura 50 puede apreciarse un esquema de un modelo tal. La figura muestra el caso en que el espacio se ha dividido en cinco zonas (obsérvese la manera

en que las aperturas escalonadas representan la conicidad de la punta). Esta geometría debe conducir a la evaluación de cuatro condiciones de frontera que de acuerdo al método de momentos deben conducir a un sistema de cuatro ecuaciones matriciales con cuatro vectores incógnita. Es decir, a un resultado mucho más complejo que el sistema formado por las ecuaciones (202) y (207).

Puede escogerse dividir el espacio en un número de zonas mayor, lo que se aproximará cada vez más a la geometría de un cono. Sin embargo, mientras más grande sea este número, más grande será el sistema de ecuaciones matriciales y más pesadas serán también las partes numéricas del procedimiento. Dependiendo de la aplicación específica, deberá hacerse un compromiso entre aproximación a la estructura real de la punta y tiempo de cómputo que se está dispuesto a gastar.

El modelo en la figura 50 no es en gran medida cualitativamente diferente del modelo al que está dedicado este trabajo (figuras 23 y 31). Las principales diferencias son de carácter cuantitativo. No se utilizan nuevas matemáticas ni nuevos procedimientos. Tal vez la única diferencia importante sea que debe ser necesario calcular productos interiores entre modos de guías de onda de paredes conductoras, con radios diferentes. Pero esto es un procedimiento algebraico que aunque pueda ser tedioso, es bastante directo.

Además, ya se discutió antes que se recomienda utilizar el modelo presentado en este trabajo para aproximar puntas con ángulos de filo grandes. Ya se comentó en varias ocasiones que generalmente las puntas fabricadas por el método de ataque químico satisfacen mejor este requisito que las fabricadas por el método de

estiramiento. Sin embargo, serán sólo los resultados experimentales los que determinarán si el modelo y los cálculos presentados en el **Capítulo III** de este trabajo tendrán directamente aplicación práctica o sólo constituirán un paso adelante para la consecución de un mejor modelo que sí la tenga. En cualquiera de los dos casos, este trabajo será útil de un modo u otro.

En resumen, el modelo que se ha desarrollado a lo largo de este trabajo es una aportación modesta, pero original en el esfuerzo de aproximar el comportamiento real de las puntas de fibra óptica recubiertas de metal. Este esfuerzo que se suma a otros muchos que tratan de lograr una mejor comprensión del funcionamiento de las diferentes configuraciones de microscopia óptica de campo cercano.

LITERATURA CITADA

- Amitay N. & Galindo V. 1968.** "On the scalar product of certain circular and cartesian wave functions", *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques*. MTT-16: 265-266.
- Barchiesi D. & Van Labeke D. 1993.** "Scanning tunneling optical microscopy: theoretical study of polarization effects with two models of tip". En: Pohl D.W. y Courjon D. (eds.) "Near Field Optics". Kluwer Academic Publishers. Boston. 179-188.
- Bethe H. A. 1944.** "Theory of diffraction by small holes". *The Physical Review*. 66 (7): 163-182.
- Born M. & Wolf E. 1959.** "Principles of optics". Pergamon. London.
- Bouwkamp C. J. 1950.** "On the diffraction of electromagnetic waves by small circular disks and holes". *Philips Research Reports*. 5: 401-422.
- Buckland E.L., Moyer P.J. & Paesler M.A. 1993.** "Resolution in collection-mode scanning optical microscopy". *Journal of Applied Physics* 73 (3): 1018-1028.
- Courjon D., Sarayeddine K. & Spajer M. 1989.** "Scanning tunneling optical microscopy". *Optics Communications* 71 (1) 23-28.
- Denk W. & Pohl D.W. 1991.** "Near field optics: microscopy with nanometer-size fields", *Journal of Vacuum Science and Technology B*. 9: 510-513.
- Dürig U, Pohl D.W. & Rohner F. 1986.** "Near-field optical-scanning microscopy". *Journal of Applied Physics* 59 (10): 3318-3327.

- Girard C. & Courjon D. 1990.** “Model for scanning tunneling optical microscopy: a microscopic self-consistent approach”. *Physical Review B*. 42: 9340-9349.
- Gloge D. 1971.** “Weakly guiding fibers”. *Applied Optics*, 10(10): 2252-2258.
- Harrington R. F. 1967.** “Matrix methods for field problems”. *Proceedings of the IEEE*. 55 (2): 136-149.
- Hoffman P., Dutoit B. & Salathé R.P. 1995.** “Comparison of mechanically drawn and protection layer chemically etched optical fiber tips”. *Ultramicroscopy*. 61: 165-170.
- Kittel C. 1996.** “Introduction to solid state physics”. John Wiley and Sons, Inc. Séptima edición. New York.
- Klein M.V. & Furtak T. E. 1986.** “Optics”. Segunda edición. John Wiley and Sons. New York.
- Lambelet P., Sayah A., Pfeffer M. Philipona C. & Marquis-Weible F. 1998.** “Chemically etched fiber tips for near-field optical microscopy: a process for smoother tips”. *Applied Optics* 37 (31): 7289-7292.
- Marcuse D. 1974.** “Theory of dielectric optical waveguides”, Academic Publishers, New York.
- Morita N. 1988.** “Radiation modes of circular dielectric waveguides”. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 2 (5):445-457.
- Nomura Y. & Katsura S. 1955.** “Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole”. *Journal of the Physical Society of Japan*. 10: 285-304.

- Ohtsu M. 1995.** “Progress of high-resolution photon scanning tunneling microscopy due to a nanometric fiber probe”. *Journal of Lightwave Technology*. 13 (7): 1200-1220.
- Paesler, M. A. & Moyer P. J. 1996.** “Near-field optics: theory, instrumentation and applications”. John Wiley and Sons, Inc. Primera edición. New York.
- Pohl D. W. 1993.** “Some remarks on the history of near-field optics”. En: Pohl D. W. y Courjon D. (eds.). “Near-field optics” . Kluwer Academic Publishers. Boston. 1-5.
- Pohl D. W., Denk W. & Lanz M. 1984.** “Optical stethoscopy”. *Applied Physics Letters* 44: 651-653.
- Press W.H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. & Flannery B. P. 1986.** “Numerical Recipes in Fortran”. Cambridge University Press. Cambridge.
- Reddick R. C., Warmack R. J. & Ferrel T. L. 1989.** “New form of scanning optical microscopy”. *Physical Review B*. 39 (1): 767-770.
- Roberts A. 1987.** “Electromagnetic theory of diffraction by a circular aperture in a thick, perfectly conducting screen”. *Journal of the Optical Society of America A* 4 (10): 1970-1983.
- Roberts A. 1991.** “Small-hole coupling of radiation into a near-field probe”. *Journal of Applied Physics* 70 (8): 4045-4049.
- Silver S. 1962.** “Microwave aperture antennas and diffraction theory”. *Journal of the Optical Society of America*. 52 (2): 131-139.
- Slyater E. M. & Slyater H. S 1992.** “Light and electron microscopy”. Primera edición. Cambridge University Press. Cambridge.

- Snitzer E. 1961.** “Cylindrical dielectric waveguide modes”. *Journal of the Optical Society of America*, 51 (5): 491-498.
- Snyder A. W. & Love J. D. 1983.** “Optical waveguide theory”. Chapman and Hall. Primera edición. New York.
- Snyder A.W. 1971.** “Continuous mode spectrum of a circular dielectric rod”, *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques*, MTT-19: 720-727.
- Stöckle R., Fokas C., Deckert V., Zenobi R., Sick B., Hecht B. & Wild U. P. 1999.** “High-quality near-field optical probes by tube etching”. *Applied Physics Letters* 75 (2): 160-162.
- Syngé E.H 1928.** “A suggested method for extending microscopic resolution into the ultramicroscopic region”. *Philosophical Magazine*. 6: 356-362.
- Turner D.R. 1983.** U.S. Patent 4 469 554.
- Valaskovic G.A., Holton M. & Morrison G.H. 1995.** “Parameter control, characterization and optimization in the fabrication of optical fiber near-field probes”. *Applied Optics*. 34 (7): 1215-1228.
- Van Labeke D. & Barchiesi D. 1993.** “Theoretical problems in scanning near-field optical microscopy”. En: Pohl D.W. y Courjon D. (eds.) “Near Field Optics”. Kluwer Academic Publishers. Boston. 157-178.
- Wang J. J. H. 1991.** “Generalized moment method in electromagnetics: formulation and computer solution of integral equations”, Wiley and Sons, New York.
- Watson G.N. 1958.** “A treatise on the theory of Bessel functions”, Cambridge United Press, Cambridge.

Xiao M., Nieto J., Siqueiros J. and Machorro R. 1997. “Simple device for making optical fiber tips for scanning near field optical microscopes” *Review Scientific Instruments*, 68: 2787-2789.

