

TESIS DEFENDIDA POR

Iván Ulises Herrera Rodríguez

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité

Dr. David Isaías Rosas Almeida

Miembro del Comité

Dr. Ervin Jesús Álvarez Sánchez

Miembro del Comité

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Miembro del Comité

M.C. Ricardo Francisco Núñez Pérez

Miembro del Comité

Dra. María del Carmen Maya Sánchez

*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

18 de noviembre de 2009

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**DINÁMICA COMPLEJA EN SISTEMAS MECÁNICOS CONTROLADOS
CON TÉCNICAS DE CONTROL DISCONTINUO**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

IVÁN ULISES HERRERA RODRÍGUEZ

Ensenada, Baja California, México, noviembre de 2009

RESUMEN de la tesis de **IVÁN ULISES HERRERA RODRÍGUEZ**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, noviembre de 2009.

DINÁMICA COMPLEJA EN SISTEMAS MECÁNICOS CONTROLADOS CON TÉCNICAS DE CONTROL DISCONTINUO

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de Tesis

Se presenta el estudio de la dinámica de un sistema de segundo orden con una discontinuidad en uno de los estados, modelada mediante la función signo. El objetivo es realizar un estudio analítico, numérico y experimental para descubrir la presencia de bifurcaciones de puntos de equilibrio, bifurcaciones de órbitas periódicas y caos homoclínico. Se utilizó la teoría de Melnikov, una de las pocas herramientas analíticas para determinar las condiciones del sistema para que éste presente un comportamiento caótico. La dificultad radica en que el método fue desarrollado para sistemas continuos y no se puede aplicar directamente a sistemas discontinuos, por lo que se emplea una aproximación diferenciable. Resultados numéricos y experimentales ilustran el análisis presentado.

Palabras Clave: Bifurcaciones, teoría de Melnikov, comportamiento caótico, órbita homoclínica.

ABSTRACT of the thesis presented by **IVÁN ULISES HERRERA RODRÍGUEZ**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of MASTER IN SCIENCES in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS with orientation in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California, november 2009.

COMPLEX DYNAMICS IN MECHANICAL SYSTEMS CONTROLLED BY DISCONTINUOUS CONTROL TECHNIQUES

We present a theoretical and experimental study of a second order mechanical system with a discontinuity in one of the states, modeled by the sign function. The objective is to perform an analytical, numerical, and experimental study to discover the presence of bifurcations of equilibria, periodic orbits and homoclinic chaos. Melnikov's theory was used to determine the system conditions to present a chaotic behavior. The difficulty is that this method was developed for differentiable dynamical systems and it is not possible to be applied directly to discontinuous dynamical systems. In order to overcome this problem, a differentiable approach of the discontinuity is used. Numerical and experimental results illustrate the presented analysis.

Keywords: Bifurcations, Melnikov's theory, chaotic behavior, homoclinic orbit

Si la naturaleza no fuera bella, no valdría la pena conocerla, y si la naturaleza no fuera digna de conocerse, entonces no valdría la pena vivir.

Jules Henry Poincaré (1854-1912).

Me gustaría dedicar esta tesis a mi familia, ya que sin su apoyo incondicional y desinteresado nunca hubiera logrado llegar a ser la persona que soy ahora. También quiero dedicarla a mis amigos de la maestría por haberme aceptado tal y como soy. Especialmente, estoy agradecido con dos personas por haberme escuchado en mis momentos más difíciles. Gracias.

Agradecimientos

A mi familia por su amor y palabras de aliento y apoyo. Ellos son la razón de mi existir.

A mis amigos, los cuales fueron y seguirán siendo el caos homoclínico de mi vida.

A todos los investigadores que fueron mis maestros, muchas gracias por sus enseñanzas.

Al Dr. Joaquín Álvarez por haberme ofrecido su amistad, sus consejos y apoyo.

A todos los miembros del comité de tesis, instructor Ricardo Núñez, Ervin, David y el Dr. Méndez por darme sus sugerencias para la realización de esta tesis.

Al pueblo de México por financiar instituciones como el CONACyT, el cual fomenta el desarrollo tecnológico en el país.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	x
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1 Motivación	1
I.2 Objetivo de la tesis	4
I.3 Organización de la tesis	5
II. PRELIMINARES MATEMÁTICOS	6
II.1 Sistemas dinámicos diferenciables	6
II.1.1 Existencia y unicidad de las soluciones	7
II.1.2 Estabilidad de puntos de equilibrio	8
II.1.3 Soluciones periódicas y estabilidad	9
II.1.4 Teoría de Melnikov	16
II.2 Sistemas dinámicos discontinuos	24
II.2.1 Existencia y unicidad de las soluciones	27
II.2.2 Nociones de solución para sistemas dinámicos discontinuos	29
II.2.3 Soluciones de tipo Filippov	30
II.2.4 Bifurcaciones en sistemas dinámicos discontinuos	37
III. ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.	45
III.1 Planteamiento del modelo	46
III.2 Bifurcaciones de puntos de equilibrio	48
III.3 Bifurcaciones de órbitas periódicas	52
III.3.1 Existencia de órbitas periódicas del sistema autónomo.	53
III.3.2 Bifurcaciones de órbitas periódicas del sistema con una entrada senoidal.	55
III.4 Conclusiones	62
IV. ESTUDIO DE LA DINÁMICA CAÓTICA	64

Contenido (continuación)

	Página
IV.1 Aproximación de la discontinuidad empleando una función diferenciable. . .	64
IV.2 Estudio del comportamiento caótico	69
IV.3 Conclusiones	75
V. RESULTADOS EXPERIMENTALES	77
V.1 Sistema rectilíneo	77
V.1.1 Resultados numéricos y experimentales	79
V.2 Implementación del circuito electrónico	88
V.2.1 Resultados experimentales del circuito.	91
V.3 Sistema rotacional	95
V.3.1 Resultados experimentales	98
V.4 Conclusiones	101
VI. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO.	102
VI.1 Conclusiones generales.	102
VI.2 Trabajo a futuro.	103
REFERENCIAS	104
A. Cálculo de la órbita homoclínica	107
B. Cálculo de la integral de Melnikov	110

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Sistema de lazo cerrado en donde se puede aplicar el método de balance armónico.	10
2	Predicción de la estabilidad de un ciclo límite empleando la función descriptiva y el criterio de Nyquist.	14
3	Diagrama esquemático que muestra una sección de Poincaré.	16
4	Órbitas homoclínicas del sistema hamiltoniano.	17
5	Geometría del sistema hamiltoniano y la sección de Poincaré.	18
6	Destrucción de la órbita homoclínica debido a la perturbación.	19
7	Génesis del enredo homoclínico.	20
8	Enredo homoclínico.	21
9	Sistema dinámico discontinuo de tipo I.	25
10	Sistema dinámico discontinuo de tipo II.	26
11	Convertidor reductor CD-CD en lazo abierto.	27
12	Sistema dinámico discontinuo de tipo III.	27
13	Solución del sistema del ejemplo 1.	28
14	Solución única.	35
15	Modo deslizante de atracción.	36
16	Modo deslizante de repulsión.	37
17	Tipo de bifurcaciones que incluyen una superficie de discontinuidad.	44
18	Sistema en lazo cerrado.	47
19	Equilibrios del sistema con $L < 0$	49
20	Diagrama de bifurcación de puntos de equilibrios.	50
21	Comportamiento del sistema con $r(t) = 0$	51
22	Sistema en lazo cerrado con retroalimentación negativa.	53
23	Diagrama de Nyquist.	54
24	Diagrama de Nyquist.	55

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
25	Condiciones para la existencia de una bifurcación de pasedura.	58
26	Diagrama de bifurcación numérico.	59
27	Órbita 3-periódica.	60
28	Órbita 2-periódica.	62
29	Órbita caótica.	62
30	Funciones saturación.	66
31	Funciones tangente hiperbólica.	66
32	Retratos de fase de los sistemas (90), (91) y (92) para $x_0 = (0.01, 6)$	67
33	Errores de posición.	68
34	Error de posición. $w_1 - z_1$	68
35	Funciones de potencial.	71
36	Órbitas homoclínicas.	73
37	Superficie crítica que ofrece el criterio para caos.	75
38	Sistema masa-resorte-amortiguador de 1 grado de libertad.	77
39	Planta rectilínea ECP modelo 210.	78
40	Función de transferencia del sistema físico.	79
41	Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 1$ Hz.	81
42	Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 2$ Hz.	82
43	Resultados experimentales para una frecuencia de excitación $f = 2$ Hz y $k = 400N/m$	83
44	Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 3$ Hz.	84
45	Resultados experimentales para una frecuencia de excitación $f = 3$ Hz y $k = 800N/m$	85

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
46	Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 4$ Hz.	86
47	Resultados experimentales para una frecuencia de excitación $f = 4$ Hz y $k = 800N/m$	87
48	Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 6$ Hz.	88
49	Detector de cruce por cero (DCC).	89
50	Circuito electrónico que emula el comportamiento dinámico de un sistema mecánico de segundo orden.	90
51	Fotografía del circuito electrónico en protoboard.	91
52	Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 1.	92
53	Fotografía del circuito electrónico en operación para el caso del Experimento 1.	93
54	Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 2.	94
55	Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 3.	94
56	Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 4.	95
57	Modelo de la planta de cuerpo rígido.	96
58	Emulador industrial ECP modelo 220.	96
59	Curva crítica de Melnikov. Los parámetros del sistema son $a=2$, $M=1$	99
60	Retrato de fase. Los parámetros del sistema son $a=2$, $M=1$	99
61	Series de tiempo. Los parámetros del sistema son $a=2$, $M=1$	100
62	FFT del estado x_1	100

Lista de Tablas

Tabla	Página
I Equilibrios del sistema cuando se utiliza la función saturación.	70

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

I.1 Motivación

La descripción de la dinámica de los sistemas ha fascinado a la humanidad durante cientos de años. Los intentos de Isaac Newton por entender y modelar la dinámica de los planetas del sistema solar lo llevó al desarrollo del cálculo diferencial. A partir de entonces se desarrolló toda una teoría sobre ecuaciones diferenciales lineales ordinarias para entender el comportamiento de los sistemas lineales. No fue así para el caso de los sistemas no lineales ya que encontrar una solución resultaba muy difícil y en ocasiones hasta imposible. Estos sistemas permanecieron inaccesibles durante mucho tiempo hasta que H. Poincaré desarrolló un estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales desde un punto de vista geométrico y cualitativo.

A finales del siglo XIX, Poincaré observó que los sistemas no lineales podían presentar un comportamiento dinámico complejo, aparentemente aleatorio. A este comportamiento se le conoce como caos. La teoría del caos describe el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos que pueden exhibir dinámicas que son sensibles a las condiciones iniciales. Como resultado de esta sensibilidad, el comportamiento de los sistemas caóticos parece ser aleatorio. Los métodos modernos para el análisis cualitativo de los sistemas no lineales tienen sus orígenes en los trabajos de Poincaré, Birkhoff (Birkhoff, 1917), Lyapunov (Pesin, 1977), Andronov (Andronov *et al.*, 1973), Arnold (Arnold, 1996), Smale, Ruelle y Takens (Ruelle y Takens, 1971). Se ha desarrollado una teoría sobre sistemas diferenciables; sin embargo, no se cuenta con una teoría universal para el caso de los sistemas cuyo modelo es no diferenciable. La búsqueda de esa teoría aún es un tema abierto de investigación.

La presencia de ciertas discontinuidades en los sistemas dinámicos puede producir comportamientos que no son comunes para el caso continuo, como por ejemplo: presentar un intervalo de puntos de equilibrio, presentar variedades deslizantes, ciclos límite, así como bifurcaciones no típicas (por ejemplo, colisiones de frontera, bifurcaciones de tipo grazing y/o deslizantes (di Bernardo *et al.*, 2008), bifurcaciones discontinuas (Leine, 2000)), además de atractores caóticos.

Una discontinuidad se puede presentar de manera natural en un sistema. Los fenómenos físicos tales como fricción seca, impacto y holgura mecánica (backlash, en inglés) en los sistemas mecánicos se modelan matemáticamente con alguna clase de discontinuidad. La presencia de fricción seca puede inducir vibraciones que pueden llegar a disminuir el desempeño de un sistema mecánico (Leine, 2000).

Muchos problemas en ingeniería están relacionados con vibraciones provocadas por estos fenómenos físicos, un ejemplo es el estudio de la estabilidad de un vehículo en movimiento ante condiciones críticas de manejo (Hassan *et al.*, 2008). Debido a que el conductor del vehículo debe reaccionar rápidamente en una situación de riesgo y que lo hace comúnmente de una manera violenta. ¿Cómo afecta este cambio brusco la estabilidad del sistema? Las estimaciones del ángulo de deslizamiento lateral y las fuerzas de fricción entre las llantas y el suelo son muy importantes ya que influyen sobre la estabilidad del vehículo.

Otro ejemplo se presenta en los pozos para la producción de petróleo y gas natural se utiliza un taladro guiado desde la superficie por una estructura de pipas, llamadas columnas de perforación. Cuando se perfora el subsuelo con el taladro, están presentes diversas fuerzas de fricción: entre el taladro, la roca y el fluido, éste último es bombeado por el hueco de la columna de perforación. El fluido tiene como objetivo compensar la presión de la roca, lubricar y remover los restos de la roca del pozo. La columna de perforación sufre varios tipos de vibraciones durante el proceso de perforación. Las fuerzas de fricción entre la roca y el taladro inducen violentas vibraciones torsionales, lo que a su vez provoca vibraciones

laterales de amplitudes muy grandes sobre la columna. Todas estas vibraciones son una importante causa de falla prematura de los componentes de la columna de perforación y afectan la eficiencia del proceso. Un estudio particular se puede encontrar en (Leine, 2000).

Sin embargo, en ocasiones se introduce intencionalmente un elemento discontinuo en el control de un sistema para brindar ciertas propiedades al mismo (Edwards y Spurgeon, 1998), como por ejemplo:

- Exhibir una robustez significativa frente a incertidumbres paramétricas en el modelo matemático del sistema.
- Tener robustez frente a perturbaciones externas.
- Convergencia de las variables del sistema a un valor deseado en un tiempo finito.
- Además, este tipo de controladores son simples y confiables para muchas aplicaciones.

Los controladores implementados mediante técnicas de control discontinuo son ampliamente utilizados para controlar diferentes tipos de dispositivos en ingeniería, tradicionalmente sistemas mecánicos y electromecánicos (Rosas *et al.*, 2006), y su estudio se ha expandido a controladores de estructura variable (Utkin, 1977), control supervisorio, métodos discontinuos para sintonización de controladores PID en procesos industriales y convertidores A/D delta-sigma en procesamiento digital de señales (Seely y Poularikas, 1984). Muchos procesos industriales incluyen tanto elementos continuos como elementos activados por eventos tales como: interruptores, válvulas, bombas hidráulicas, etc. Estos procesos son conocidos como híbridos, ya que localmente pueden ser continuos pero a un nivel mayor pueden ser discretos. Para modelar tales sistemas se requiere combinar ambas dinámicas: continua y discreta. La ventaja de considerar a un sistema como híbrido es que provee de un marco apropiado de referencia para modelar sistemas en un amplio alcance de aplicaciones en ingeniería; en los sistemas mecánicos, el movimiento continuo puede ser interrumpido por colisiones; en circuitos eléctricos, la carga de un capacitor puede ser interrumpida por la

(el) apertura (cierre) de un interruptor o conmutación de diodos; en los procesos químicos, la evolución de una reacción química puede ser controlada mediante el uso de válvulas y bombas hidráulicas. Además, se ha demostrado que los sistemas con una discontinuidad o un elemento no lineal en el control, tal como una saturación, pueden exhibir comportamiento caótico (Banerjee y Grebogi, 1999), (Curiel y Álvarez, 1997). Por tal motivo, es de particular interés buscar condiciones para la existencia de caos en el sistema bajo estudio ya que por lo regular, los comportamientos caóticos son indeseables en un sistema mecánico y mediante una elección adecuada de los parámetros del sistema es posible controlar la aparición de éstas dinámicas. Para este último punto se pretende utilizar el *método de Melnikov para órbitas homoclínicas* (Wiggins, 1990), una de las pocas herramientas analíticas para la predicción de dinámica caótica. Dado que el método no fue desarrollado para aplicarse a sistemas discontinuos, el enfoque propuesto es utilizar una aproximación diferenciable de la discontinuidad para aplicar el método de Melnikov.

I.2 Objetivo de la tesis

Realizar un estudio teórico y experimental sobre bifurcaciones de puntos de equilibrio, órbitas periódicas y existencia de caos homoclínico en sistemas mecánicos de baja dimensión con una acción de control discontinua. En particular se pretende determinar analíticamente los parámetros del sistema para que presente o no presente comportamiento caótico. Se realizará una parte experimental en prototipos de laboratorio de diversos mecanismos (v.g., en un sistema rectilíneo ECP 210 y en otro rotacional ECP 220) y en circuitos electrónicos para ilustrar el estudio realizado.

I.3 Organización de la tesis

La organización del trabajo es como sigue: las herramientas matemáticas utilizadas se introducen en el capítulo II. En el capítulo III se plantea el modelo del sistema por estudiar y se comienza con el estudio de la dinámica del mismo: se realiza un análisis de bifurcaciones de puntos de equilibrios y de órbitas periódicas del sistema y se reportan los resultados obtenidos. Mediante el estudio realizado en el capítulo III se identifica que el sistema posee una órbita homoclínica y por tal motivo se realiza el estudio de comportamiento dinámico caótico mediante el método de Melnikov y se obtienen las condiciones suficientes para la existencia de un conjunto invariante caótico, este estudio se lleva a cabo en el capítulo IV. El capítulo V está dedicado a presentar resultados numéricos y experimentales que ilustran el comportamiento caótico, los cuales sustentan la teoría presentada en el capítulo anterior. Finalmente, las conclusiones generales se dan en el capítulo VI.

Capítulo II

PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Puesto que, una gran variedad de funciones no diferenciables pueden expresarse en términos de la función signo, un método común de análisis y control es aproximar esta por una función continua y diferenciable. Esta aproximación facilita el análisis y ofrece soluciones adecuadas para muchas situaciones prácticas. Con el fin de emplear una aproximación de la discontinuidad, específicamente para poder utilizar la teoría de Melnikov, en este capítulo se incluyen algunos resultados básicos para sistemas dinámicos diferenciables. También se presentan dos métodos para el estudio de las órbitas periódicas: el método de la función descriptiva y del mapeo de Poincaré.

Posteriormente, se introduce el método de Melnikov para órbitas homoclínicas. El método propuesto por Melnikov (Wiggins, 1990) fue desarrollado para sistemas diferenciables y no se puede aplicar directamente en el estudio de caos en sistemas discontinuos. Por tal motivo, el enfoque que se utiliza es emplear una aproximación continua y diferenciable de la discontinuidad.

Finalmente, se presenta un resumen de lo más relevante de bifurcaciones en sistemas dinámicos no diferenciables.

II.1 Sistemas dinámicos diferenciables

Puesto que una gran variedad de funciones no diferenciables pueden expresarse en términos de la función signo, un método común de análisis y control es aproximar dicha función por una aproximación continua o diferenciable. Sin embargo, existen fenómenos dinámicos que no pueden modelarse mediante aproximaciones diferenciables y que son exclusivos de

los sistemas discontinuos (v.g., bifurcaciones de colisión, deslizantes, etc.). De aquí surge la necesidad de analizar la variedad de estados estacionarios que pueden presentar estos sistemas y diseñar estrategias de control que corrijan el comportamiento no deseado.

Cuando se emplea una aproximación, se pueden perder propiedades importantes del sistema no diferenciable y las cuales no serán detectadas durante el proceso de análisis, aún así, dichas aproximaciones facilitan el análisis y, para muchas situaciones prácticas, ofrecen soluciones adecuadas. Por tal motivo, se presenta un repaso breve de los sistemas dinámicos diferenciables.

II.1.1 Existencia y unicidad de las soluciones

En este trabajo sólo se considerarán sistemas dinámicos continuos en el tiempo, los cuales son expresados por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \quad (1)$$

donde $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ es una función de una variable independiente (usualmente el tiempo) y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave en un conjunto $U \in \mathbb{R}^n$. Se dice que el *campo vectorial* f genera un flujo $\varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ es una función suave definida para todo x en U y t en algún intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, y φ satisface (1) en el sentido:

$$\left. \frac{d\varphi(x, t)}{dt} \right|_{t=\tau} = f(\varphi(x, \tau)) \quad (2)$$

para todo $x \in U$ y $\tau \in I$. A continuación se cita el teorema básico de existencia y unicidad (Guckenheimer y Holmes, 1983, pág.3):

Teorema 1 . Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto del espacio real Euclidiano, y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable (C^1) y un punto $x_0 \in U$. Entonces existe una constante $c > 0$ y una solución única $\varphi(x_0, \cdot) : (-c, c) \rightarrow U$ que satisface la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial $x(0) = x_0$.

De hecho, sólo se requiere que f sea (localmente) Lipschitz, es decir, se debe cumplir $|f(y) - f(x)| \leq K|x - y|$ para alguna constante $K < \infty$ en donde K es llamada la constante Lipschitz de f .

II.1.2 Estabilidad de puntos de equilibrio

Una importante clase de soluciones de la ecuación diferencial (1), son los llamados *puntos de equilibrio*. Los puntos de equilibrio son definidos por el desvanecimiento del campo vectorial $f(x) : f(\bar{x}) = 0$. Un punto de equilibrio \bar{x} es *estable* si una solución $x(t)$ permanece cerca de \bar{x} para todo tiempo, si para cada vecindad V de \bar{x} en U existe una vecindad $V_1 \subset V$ tal que para cada solución $x(x_0, t)$ con $x_0 \in V_1$ está definida y permanece dentro de V para $t > 0$. Si, además, V_1 puede ser escogida tal que $x(t) \rightarrow \bar{x}$ para $t \rightarrow \infty$ entonces se dice que \bar{x} es *asintóticamente estable*. De lo contrario, el punto de equilibrio es inestable.

Una de las herramientas para probar la estabilidad de un punto de equilibrio es la función de Lyapunov. No existe un método general para construir una función de Lyapunov que pruebe la estabilidad de un equilibrio. Para sistemas dinámicos, por ejemplo sistemas físicos, las leyes de conservación de energía pueden emplearse para construir una función de Lyapunov candidata.

Definición 1 . (Khalil, 2001) Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable, se dice que V es una función candidata de Lyapunov si localmente es una función definida positiva, es decir:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(x) &> 0, \forall x \in U, x \neq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde U es una vecindad alrededor de $x = 0$.

El criterio de estabilidad de un punto de equilibrio utilizando funciones de Lyapunov se presenta en el teorema 2.

Teorema 2 . Sea $\bar{x} = 0$ un equilibrio del sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ y sea

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla V \dot{x} = \nabla V f(x) \quad (4)$$

la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov. Si la función candidata de Lyapunov V es localmente definida positiva y su derivada \dot{V} es localmente semidefinida negativa

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \kappa \quad (5)$$

para alguna vecindad κ del origen, entonces el punto de equilibrio es estable. Si $\dot{V}(x) < 0$ localmente, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

II.1.3 Soluciones periódicas y estabilidad

Una solución $x = X(t)$ de un sistema continuo es periódica con periodo T si $X(t+T) = X(t)$.

Existen varias herramientas para estudiar la existencia y estabilidad de órbitas periódicas en un sistema dinámico. Se presentan dos que son fundamentales para el desarrollo del trabajo: el método de la función descriptiva y el mapeo de Poincaré.

Método de la función descriptiva

El método de la función descriptiva es una aproximación del método de balance armónico. Este es un método aproximado para analizar la posibilidad de oscilaciones armónicas en sistemas dinámicos. La idea esencial del método consiste en considerar la posibilidad de existencia o no de armónicos de una cierta frecuencia en la respuesta del sistema.

Enseguida se presenta una breve introducción al método.

El contexto típico en donde se aplica el método se muestra en la figura 1.

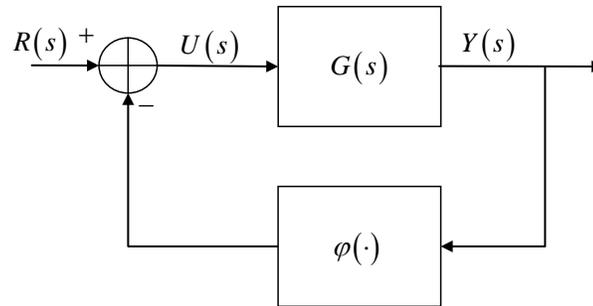


Figura 1. Sistema de lazo cerrado en donde se puede aplicar el método de balance armónico.

En el diagrama de la figura 1 se presenta un sistema lineal con función de transferencia $G(s)$ y una componente no lineal invariante en el tiempo, denotado por $\varphi(\cdot)$, la cual puede ser por ejemplo una saturación, un bloque de histéresis, zona muerta, etc. La función de transferencia está dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (6)$$

la cual admite la representación de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -\varphi(y) \end{aligned} \quad (7)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}$, (A, B) es controlable, (A, C) es observable y $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una no linealidad estática.

Por simplicidad, se trabaja con el caso $r(t) = 0$. Este caso corresponde precisamente a un sistema autónomo. De la figura 1 se obtiene:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s) \quad (8)$$

cuya ecuación diferencial correspondiente es:

$$d(p)y(t) = n(p)u(t) \quad (9)$$

donde p es el operador $p = d(\cdot)/dt$. Como $u(t) = -\varphi(y(t))$, entonces $y(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial

$$d(p)y(t) + n(p)\varphi(y(t)) = 0 \quad (10)$$

Lo que se busca es la posible existencia de comportamiento periódico del sistema. Para eso se supone que la salida es periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$, y en consecuencia, la salida tiene una representación en series de Fourier dada por (11).

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \hat{y}_k \exp(jk\omega t) \quad (11)$$

$$\hat{y}_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \exp(-jk\omega t) dt$$

Además, como $\varphi(\cdot)$ es invariante en el tiempo, $\varphi(y(t))$ es periódica con la misma frecuencia ω :

$$\varphi(y(t)) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \hat{\varphi}_k \exp(jk\omega t) \quad (12)$$

$$\hat{\varphi}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(y(t)) \exp(-jk\omega t) dt$$

Y puesto que se cumple:

$$n(p) \exp(jk\omega t) = n(jk\omega) \exp(jk\omega t) \quad (13)$$

entonces bajo la argumentación anterior se obtiene:

$$d(p) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \hat{y}_k \exp(jk\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d(jk\omega) \hat{y}_k \exp(jk\omega t) \quad (14)$$

$$n(p) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \hat{\varphi}_k \exp(jk\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} n(jk\omega) \hat{\varphi}_k \exp(jk\omega t)$$

Finalmente, se sustituye en la ecuación diferencial (10) y se obtiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (d(jk\omega) \hat{y}_k + n(jk\omega) \hat{\varphi}_k) \exp(jk\omega t) = 0 \quad (15)$$

Puesto que las funciones $\exp(jk\omega t)$, $k \in \mathbb{Z}$ son funciones independientes entre sí, entonces se obtiene la expresión dada por (16),

$$G(jk\omega) \hat{\varphi}_k + \hat{y}_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (16)$$

Como $G(jk\omega) = \bar{G}(-jk\omega)$, $\hat{y}_k = \bar{\hat{y}}_{-k}$, $\hat{\varphi}_k = \bar{\hat{\varphi}}_{-k}$, solo se considera la ecuación (16) para $k \geq 0$. La ecuación (16) es de dimensión infinita, por lo que es necesario buscar una aproximación finita.

Sea $G(s)$ estrictamente propia, es decir que el número de polos de $G(s)$ es mayor que el número de ceros, es decir, $G(j\omega) \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$. Se puede suponer entonces que existe $q > 0$ tal que, para $k > q$, $|G(j\omega)|$ es suficientemente pequeña y se puede reemplazar $|G(j\omega)|$ (y en consecuencia \hat{y}_k) por cero. Entonces

$$G(jk\omega) \hat{\varphi}_k + \hat{y}_k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, q \quad (17)$$

es llamada la ecuación de balance armónico. La aproximación que se hace al trabajar con la función descriptiva es considerar un solo armónico de la ecuación (17), es decir, tomando $q = 1$:

$$G(0) \hat{\varphi}_0 + \hat{y}_0 = 0 \quad (18)$$

$$G(j\omega) \hat{\varphi}_1 + \hat{y}_1 = 0$$

Como la salida se supuso periódica, por ejemplo $y(t) = E \text{sen}(\omega t)$ con $E \geq 0$, entonces los coeficientes de Fourier de la primer armónica de la salida son:

$$\hat{y}_{-1} = -\frac{E}{2j} \quad \hat{y}_1 = \frac{E}{2j} \quad \hat{y}_0 = 0 \quad (19)$$

Si $\varphi(\cdot)$ es una función impar, entonces $\hat{\varphi}_0 = 0$ ya que

$$\hat{\varphi}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(y(t)) \exp(-jk\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(E \text{sen}(\omega t)) dt = 0 \quad (20)$$

Entonces la condición para el balance armónico se vuelve:

$$G(j\omega) \hat{\varphi}_1 + \frac{E}{2j} = 0 \quad (21)$$

donde $\hat{\varphi}_1$ es el coeficiente de Fourier de la primera armónica de la salida del bloque no lineal cuando su entrada es $y(t) = E \text{sen}(\omega t)$.

Ahora se define la función descriptiva como la relación (22)

$$N(E) = \frac{\hat{\varphi}_1}{\hat{y}_1} \quad (22)$$

Entonces la ecuación de balance armónico de primer orden está dada por (23) y $N(E)$ es la función descriptiva del bloque no lineal.

$$G(j\omega) N(E) + 1 = 0 \quad (23)$$

La condición (23) permite predecir la existencia de una oscilación periódica en el sistema en lazo cerrado. Resultados empíricos, con una posterior justificación periódica por (Taylor, 1999), han mostrado que con el método de la función descriptiva se puede solucionar, aproximadamente, un gran número de problemas de oscilación. Sin embargo, debido a que es un método aproximado, puede ocurrir lo siguiente:

- La frecuencia y amplitud de la oscilación predicha no sean correctas.
- Una oscilación predicha no exista.
- Una oscilación que exista no haya sido predicha.

Estabilidad de órbitas periódicas.

La condición (23) tiene una interpretación gráfica muy interesante cuando se grafica el diagrama de Nyquist $G(j\omega)$ del sistema lineal en el plano complejo, junto con el lugar geométrico $-1/N(E)$, nótese que ambos lugares geométricos se pueden graficar independientemente ya que son funciones de ω y E , respectivamente. Se predice un ciclo límite cuando existe una intersección transversal entre los dos lugares geométricos. Más aún, el punto de intersección da una estimación de la frecuencia ω y de la amplitud E del ciclo límite.

Una predicción útil de la estabilidad de los ciclos límite puede ser hecha a partir de la manera de cómo se intersectan los dos lugares geométricos. Utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist, el cual dice que si un sistema estable en lazo abierto $G(s)$ con una configuración con retroalimentación unitaria negativa (con ninguna no linealidad), entonces el sistema en lazo cerrado es estable si el lugar geométrico de $G(s)$ permanece a la derecha

del punto crítico $(-1, 0)$. De igual forma, el punto $-1/N(E)$ puede interpretarse como un "punto crítico".

Esto se puede entender mejor si se observan los diagramas de la figura 2, en donde se muestran las curvas de $-1/N(E)$ y $G(j\omega)$ y las flechas indican la dirección de crecimiento de E y ω , respectivamente. Si ocurre un incremento en la amplitud E de tal forma que el valor $-1/N(E)$ afuera de la región sombreada ilustrada en la figura 2(a), entonces se predice que el ciclo límite es estable. Pero si un incremento de la amplitud E mueve el punto hacia dentro de la zona sombreada, ver figura 2(b), entonces se predice que el ciclo límite es inestable.

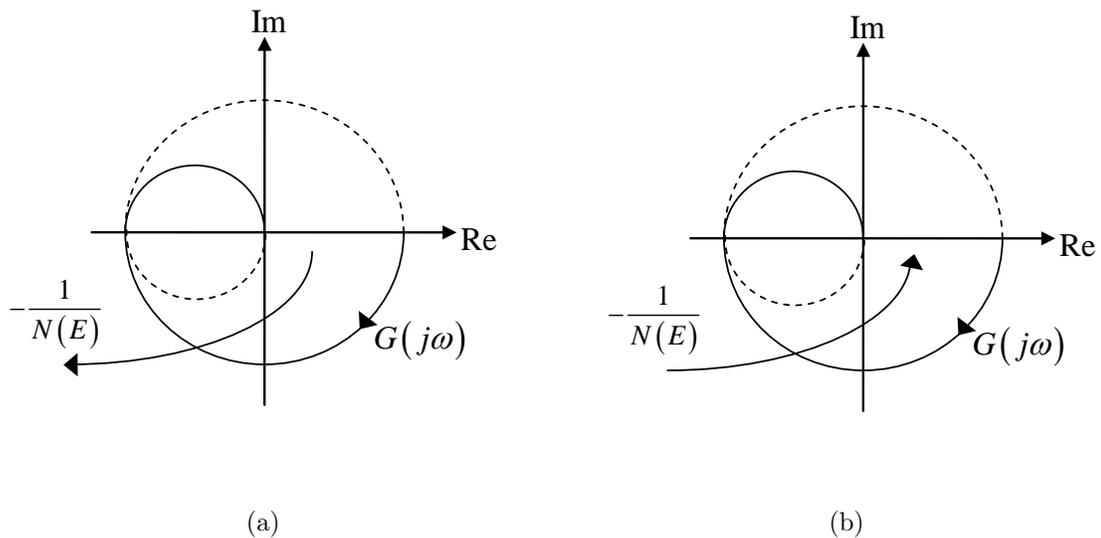


Figura 2. Predicción de la estabilidad de un ciclo límite empleando la función descriptiva y el criterio de Nyquist.

Mapeo de Poincaré

La estabilidad de las soluciones periódicas de un sistema continuo puede estudiarse mediante otras herramientas matemáticas tales como la teoría de Floquet (Nayfeh y Balachandran, 1995, pág 158) y la función de Poincaré (Nayfeh y Balachandran, 1995, pág. 172). A continuación se describe la función de Poincaré, la cual es utilizada para obtener los diagramas de bifurcación de la sección IV.

El mapeo de Poincaré juega un papel muy importante en la teoría de oscilaciones, se basa en el análisis de la intersección de una trayectoria del sistema bajo estudio con una superficie en el espacio de estados. Esto permite reducir el análisis de campos vectoriales de una dimensión n a un mapeo discreto de dimensión $(n - 1)$, resultando en la simplificación del problema original. Por ejemplo, esto da la ventaja de poder visualizar el comportamiento de un sistema de cuarto orden ya que, al emplear el mapeo de Poincaré, el análisis se reduce a un sistema discreto de tercer orden.

Sea η una órbita periódica de periodo T de un flujo φ_t en \mathbb{R}^n generada por un campo vectorial no lineal $f(x)$. Se toma una superficie $S \subset \mathbb{R}^n$, de dimensión $n - 1$. La superficie S no requiere ser plana, pero debe ser elegida de tal manera que el flujo siempre sea transversal a ella. Esto se logra si $f(x) \cdot n(x) \neq 0$ para toda $x \in S$, donde $n(x)$ es el vector normal unitario a la superficie S en el punto x . Sea q_m el punto donde η intersecta a S , y sea $U \subseteq S$ una vecindad de q_m . Entonces el *mapeo de Poincaré* $P : U \rightarrow S$, también llamado *mapeo del primer retorno*, está definido para un punto $q_m \in U$ como

$$q_{m+1} = P(q_m) = \varphi_\tau(q_m) \quad (24)$$

donde $\tau = \tau(q_m)$ es el tiempo que tarda la órbita $\varphi_\tau(q_m)$ desde el punto inicial q_m hasta que cruce de nueva cuenta la sección S , ver figura 3. Por lo general, τ depende de q_m y no es necesariamente igual al periodo de la órbita η , sin embargo, $\tau \rightarrow T$ cuando $q_m \rightarrow q_{m+1}$. Claramente, q_m es un punto de equilibrio del mapeo P si $q_m = q_{m+1}$ y no es difícil ver que la estabilidad de q_m para P refleja la estabilidad de η para el flujo φ_τ . Como dato adicional, si el mapeo de Poincaré tiene un punto de equilibrio, entonces a la órbita η se le llama órbita de periodo uno; si el mapeo tiene dos puntos de equilibrio, entonces a la órbita η se le llama órbita de periodo dos y así sucesivamente.

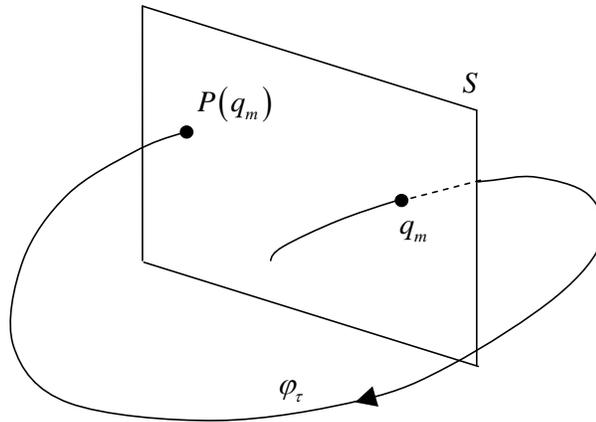


Figura 3. Diagrama esquemático que muestra una sección de Poincaré.

II.1.4 Teoría de Melnikov

El método de Melnikov es una técnica global de análisis que da condiciones para la existencia de una bifurcación homoclínica. Este tipo de bifurcaciones, acompañadas de una excitación externa periódica, puede generar importantes cambios en las cuencas de atracción que degeneran en los llamados *enredos homoclínicos*. Una *órbita homoclínica* es aquella que está formada por una trayectoria que une a un punto de equilibrio consigo mismo.

Antes de presentar la teoría general de Melnikov y para una mayor comprensión de la teoría, se explica el concepto de los enredos homoclínicos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1 . Considere el siguiente sistema disipativo, sujeto a una excitación periódica con frecuencia $2\pi/T$.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{25}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - ax_2 + \varepsilon \cos(\omega t)$$

Este sistema tiene un punto silla en el origen, llamado p_0 , y dos centros ubicados en $x = (\pm 1, 0)$. Para $a = 0$ y $\varepsilon = 0$, las ecuaciones de estado son

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{26}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_1^3$$

el sistema (26) es llamado sistema no perturbado. El sistema (26) es hamiltoniano y tiene niveles de energía dados por

$$H(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^4$$

luego, el retrato de fase del sistema (26) se ilustra en la figura 4. Si el punto de equilibrio p_0 es un punto silla, entonces es posible encontrar una órbita homoclínica asociada a ese punto. Obsérvese que el sistema posee dos órbitas homoclínicas Γ_1 y Γ_2 .

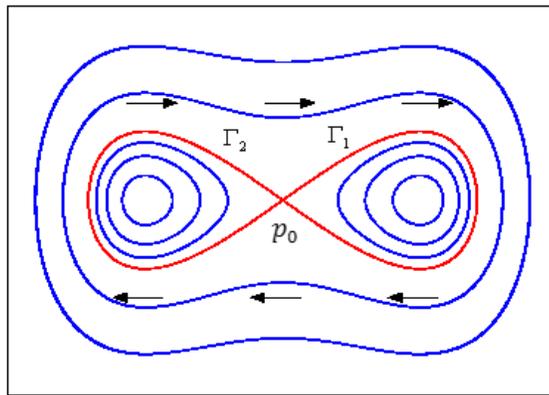


Figura 4. Órbitas homoclínicas del sistema hamiltoniano.

Ahora bien, en el caso de $a \neq 0$ y $\varepsilon \neq 0$, el sistema (25), el cual será llamado sistema perturbado, puede ser escrito como un sistema autónomo de tercer orden si se realiza el cambio de variable $\theta = \omega t$. Las ecuaciones de estado del sistema autónomo son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 - ax_2 + \varepsilon \cos(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \tag{27}$$

donde la frecuencia $\omega = 2\pi/T$. El retrato de fase del sistema (27) para $a = 0$ y $\varepsilon = 0$ tiene una estructura cíclica como se ilustra en la figura 5 (Wiggins, 1990).

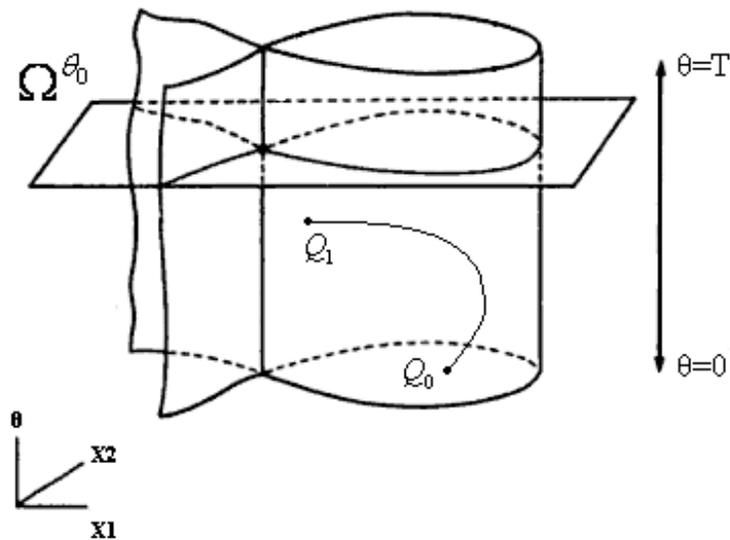


Figura 5. Geometría del sistema hamiltoniano y la sección de Poincaré.

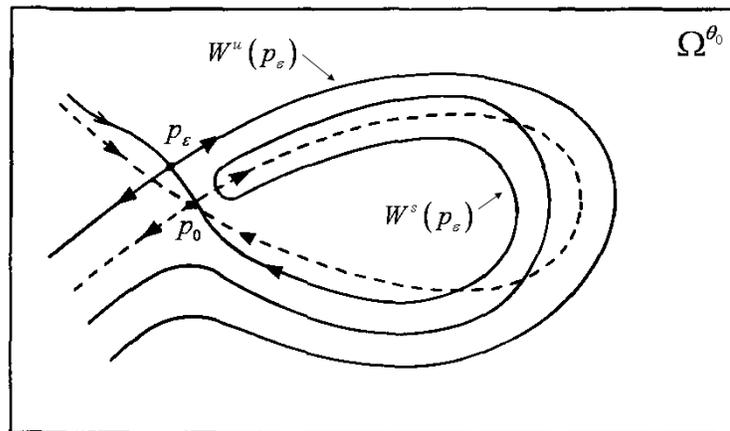
En este punto, dos parámetros adicionales son definidos para describir por completo el comportamiento de las variedades en el espacio tridimensional, asociados a los sistemas no perturbado (26) y perturbado (25). Primero, el símbolo θ indica la sección de Poincaré elegida, este parámetro varía en el intervalo $(0, T]$, que es el mismo periodo de la perturbación de entrada, ver figura 5. Segundo, $t \in (-\infty, \infty)$ está definido como el tiempo requerido de una trayectoria para llegar a un punto Q_1 a partir de una condición inicial Q_0 . En otras palabras, θ y t son valores de tiempo, theta se refiere a la sección Poincaré elegida y t es el tiempo transcurrido de una trayectoria particular Q . Por lo tanto, se puede definir un mapeo de Poincaré $P_\varepsilon : \Omega^{\theta_0} \rightarrow \Omega^{\theta_0}$, en donde Ω^{θ_0} es la superficie de Poincaré definida como $\Omega^{\theta_0} = \{(x_1, x_2, \theta) \mid \theta = \theta_0 \in [0, T)\}$.

Para $\varepsilon > 0$, la órbita homoclínica se separa en las variedades estable $W^s(p_\varepsilon)$ e inestable $W^u(p_\varepsilon)$, donde p_ε denota el punto silla bajo la perturbación. Matemáticamente las

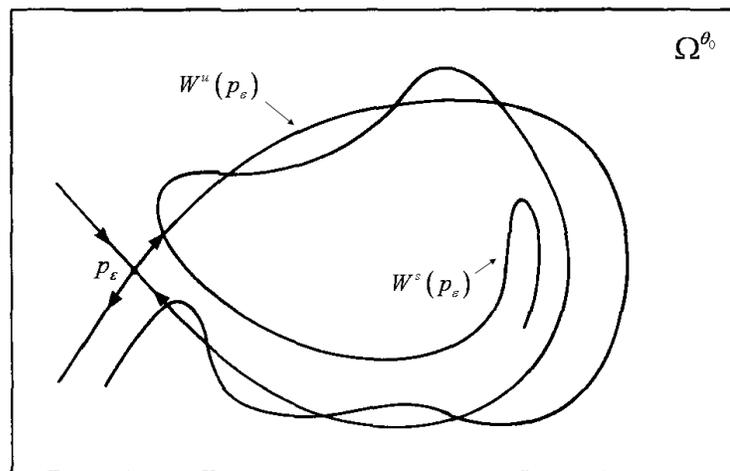
variedades estable e inestable están definidas como

$$\begin{aligned} W^s(p_\varepsilon) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \Omega^{\theta_0} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} P_\varepsilon^n = p_\varepsilon \right\} \\ W^u(p_\varepsilon) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \Omega^{\theta_0} \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} P_\varepsilon^{-n} = p_\varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Debido a la perturbación, el punto de equilibrio p_0 se mueve a p_ε (véase figura 6 (Wiggins, 1990)). Más aún, es posible que las variedades se crucen en más de un punto.



(a) Sin intersección entre las variedades



(b) Con intersección transversal entre las variedades

Figura 6. Destrucción de la órbita homoclínica debido a la perturbación.

Para entender la génesis de los enredos homoclínicos, se estudia el comportamiento de las variedades estable e inestable sobre la sección de Poincaré Ω^{θ_0}

A continuación se explica la génesis del enredo homoclínico, ver la figura 7. Sea X un punto de intersección entre las variedades estable e inestable en una determinada sección de Poincaré Ω^{θ_0} , este punto es llamado *punto homoclínico*, además se tiene el punto Y sobre $W^s(p_\varepsilon)$ que está *antes* del punto X y el punto Z sobre $W^u(p_\varepsilon)$ que también está *antes* del punto X . La primera iteración del mapeo de Poincaré de los puntos Y y Z deben estar *antes* del primer mapeo de Poincaré del punto X . La única manera de que esto suceda es que las variedades se crucen, formando un nuevo punto homoclínico $P_\varepsilon^1(X)$, ver figura 7(b). Posteriormente, las variedades vuelven a cruzarse originando un nuevo punto homoclínico dado por la segunda iteración del mapeo de Poincaré $P_\varepsilon^2(X)$. El punto $P_\varepsilon^2(X)$ está más cerca de el punto hiperbólico p_ε que el punto $P_\varepsilon^1(X)$ y la distancia entre $P_\varepsilon^1(X)$ y $P_\varepsilon^2(X)$ es más corta que la distancia entre X y $P_\varepsilon^1(X)$, ver figura 7(c). En otras palabras, la distancia entre cada nueva curva se hace más corta, pero debido a la propiedad de preservación de área del mapeo de Poincaré, la longitud de las curvas debe alargarse para preservar el área.

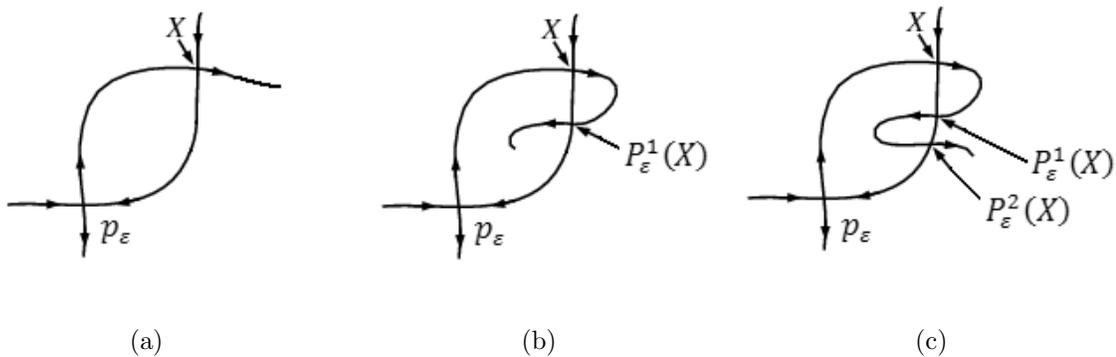


Figura 7. Génesis del enredo homoclínico.

En efecto, mientras la variedad estable se acerca al punto silla p_ε , las curvas se expanden en la dirección de la variedad inestable y se contraen en la dirección de la variedad estable. Sucede lo mismo con la variedad estable. El resultado es una red compleja de curvas, como la que se muestra en la figura 8. Esta red de curvas originan un conjunto denso de puntos homoclínicos que es conocido como *enredo homoclínico*.

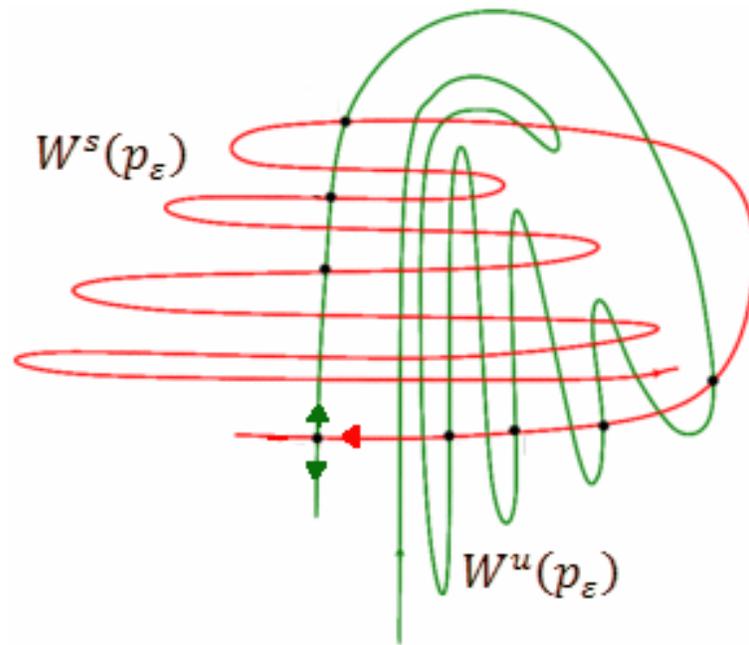


Figura 8. Enredo homoclínico.

La importancia del enredo homoclínico yace en el *teorema de Smale-Birkhoff*, el cual establece que las intersecciones transversales entre las variedades implican la existencia de herraduras de Smale. La prueba de este teorema se detalla en (Guckenheimer y Holmes, 1983).

Teoría general

La función de Melnikov es una medida de la distancia entre las variedades estable e inestable, cuando la distancia es pequeña (Guckenheimer y Holmes, 1983), (Wiggins, 1990), en una clase particular de sistemas dinámicos. La teoría de Melnikov estudia sistemas que poseen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t, \varepsilon) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t, \varepsilon) \\ (x, y) &\in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{29}$$

donde H es el Hamiltoniano, la cual es una función escalar diferenciable. Por definición $H(x_1, x_2)$ es constante en cada trayectoria del sistema. El sistema (29) se puede expresar

en forma vectorial como:

$$\dot{q} = JDH(q) + \varepsilon g(q, t, \varepsilon) \quad (30)$$

donde $q = (x, y)$, $DH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)$, $g = (g_1, g_2)$ y

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuando $\varepsilon = 0$ al sistema (29) se le llama sistema no perturbado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{aligned} \quad (31)$$

o en forma vectorial: $\dot{q} = JDH(q)$.

El parámetro ε es una medida explícita de la perturbación g y puede ser adecuada a la unidad si g es suficientemente pequeña. Para poder derivar la función de Melnikov, se deben de tomar en cuenta ciertas restricciones sobre el sistema (29). Se asume que (29) es lo suficientemente diferenciable ($C^r, r \geq 1$) en la región de interés. Igual de importante, es que la función g debe ser periódica en t con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Además, la estructura del retrato de fase del sistema no perturbado (31).

Condición 1. El sistema no perturbado posee un punto de equilibrio hiperbólico, p_0 , conectado consigo mismo por una órbita homoclínica $q_0 \equiv (x_0(t), y_0(t))$.

Condición 2. Sea $\Gamma_{p_0} = \{q \in \mathbb{R}^2 | q = q_0(t), t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\} = W^s(p_0) \cap W^u(p_0) \cup \{p_0\}$. El interior de Γ_{p_0} está lleno de una familia continua de órbitas periódicas $q^\lambda(t)$ con periodo $T^\lambda, \lambda \in (-1, 0)$. Se asume que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q^\lambda(t) = q_0(t)$, y $\lim_{\lambda \rightarrow 0} T^\lambda = \infty$.

Finalmente, se define la función de Melnikov como:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(x_0(t)) \cdot g(q_0(t), \omega(t + t_0)) dt \quad (32)$$

Teorema 3 . Teorema de Melnikov-Smale. *Suponga que hay un punto $t_0 = \bar{t}_0$ tal que*

$$M(\bar{t}_0) = 0 \quad \frac{\partial M(\bar{t}_0)}{\partial t_0} \neq 0 \quad (33)$$

Entonces para una perturbación $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, $W^s(p_\varepsilon)$ y $W^u(p_\varepsilon)$ se intersectan transversalmente. Más aún, si $M(\bar{t}_0) \neq 0$ para todo t_0 , entonces $W^s(p_\varepsilon) \cap W^u(p_\varepsilon)$.

Observación 1 . *El resultado del teorema 3 es importante, ya que permite probar la existencia de órbitas homoclínicas transversales en un conjunto específico de ecuaciones diferenciales. La presencia de tales órbitas implican, según el teorema de Smale-Birkhoff, que alguna iteración del mapeo de Poincaré $P_\varepsilon^N(X)$ presenta un conjunto invariante hiperbólico: una herradura de Smale (Guckenheimer y Holmes, 1983, pág.110). El mapeo de la herradura de Smale presenta un comportamiento caótico según la definición de Devaney.*

Para finalizar con esta sección se presenta el tan citado teorema de Smale-Birkhoff (Guckenheimer y Holmes, 1983, pág. 252).

Teorema 4 . *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo ¹ tal que p es un punto de equilibrio hiperbólico y existe un punto $q \neq p$, donde q es el punto de intersección transversal entre $W^s(p)$ y $W^u(p)$. Entonces f tiene un conjunto invariante hiperbólico Λ en el cual f es topológicamente equivalente a un mapeo de recorrimiento finito σ .*

El teorema de Smale-Birkhoff establece una estricta relación entre la dinámica del recorrimiento de una secuencia de símbolos y la dinámica real de un sistema. La realización de la teoría está basada en declarar las condiciones tales que el mapeo asociado al sistema dinámico f es topológicamente conjugado con un mapeo de recorrimiento σ , y entonces deducir el comportamiento caótico del primero a partir de la dinámica del segundo.

¹En matemáticas. Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable. Un homeomorfismo es una función continua entre dos espacios topológicos y que además tiene inversa.

II.2 Sistemas dinámicos discontinuos

Los sistemas físicos pueden operar en diferentes modos, generalmente cada modo presenta una dinámica diferente, y a veces es frecuente que ocurran transiciones entre los modos de operación de un sistema. Estas transiciones pueden considerarse instantáneas, siempre y cuando la escala de tiempo de la transición sea mucho menor a la escala de tiempo de las dinámicas de los modos individuales. Entre los sistemas mecánicos que poseen esta característica se encuentran: los sistemas con fricción seca, de impacto y con holgura mecánica. En los modelos matemáticos de los sistemas mecánicos sujetos a fricción, se consideran dos distintos modos de operación: estático y dinámico. Otros ejemplos se pueden encontrar en circuitos electrónicos que tengan diodos y/o transistores, como por ejemplo las fuentes conmutadas. El modelado matemático de los sistemas físicos (v.g. mecánicos, electrónicos, etc.) puede llevar a sistemas dinámicos discontinuos, los cuales cambian entre diferentes modos, en donde la dinámica de cada modo está asociada a un conjunto diferente de ecuaciones diferenciales.

Dependiendo del tipo de discontinuidad, los sistemas dinámicos discontinuos se pueden dividir en tres tipos (Leine, 2000):

1. **Sistemas continuos y no diferenciables (Tipo I).** Son sistemas que pueden ser descritos por una ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

En donde μ es un conjunto de parámetros del sistema y el lado derecho de la ecuación diferencial es una función continua y no diferenciable, por ejemplo:

$$\dot{x} = -3|x - \mu|$$

En la figura 9 se muestra un ejemplo de este tipo de sistemas, también se ilustra la función característica de la fuerza en la discontinuidad. Este es un ejemplo de

un sistema mecánico, el cual consiste de una masa colgada de un resorte y que se hace chocar con otro resorte debajo de ella. El modelo matemático que describe el comportamiento del sistema está dado por

$$m\ddot{x} + kx = f(t) - g(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ k_f x & x > 0 \end{cases} \quad (34)$$

Se observa que la fuerza $g(x)$ del resorte k_f es una función continua y no suave de la posición.

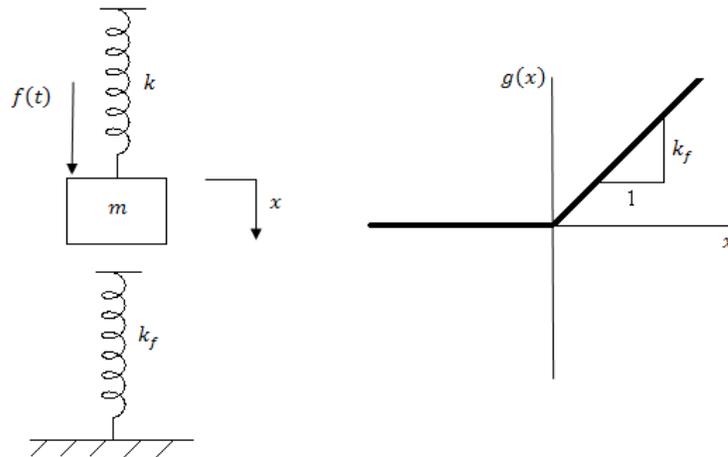


Figura 9. Sistema dinámico discontinuo de tipo I.

2. **Sistemas de tipo Filippov (Tipo II).** Son sistemas cuyo lado derecho de la ecuación diferencial presenta una discontinuidad, como por ejemplo un sistema masa-resorte con fricción seca.

$$m\ddot{x} + kx = F_{externa} + F_{friccion}$$

El segundo ejemplo, el cual se ilustra en la figura 10, es un sistema masa-resorte con un término de fricción seca w , donde la fuerza de fricción es una función discontinua de la velocidad. Las ecuación diferencial del sistema está dada por

$$m\ddot{x} + kx = f(t) - g(\dot{x}) \quad (35)$$

$$g(\dot{x}) \in \begin{cases} -w & \dot{x} < 0 \\ [-w, w] & \dot{x} = 0 \\ w & \dot{x} > 0 \end{cases}$$

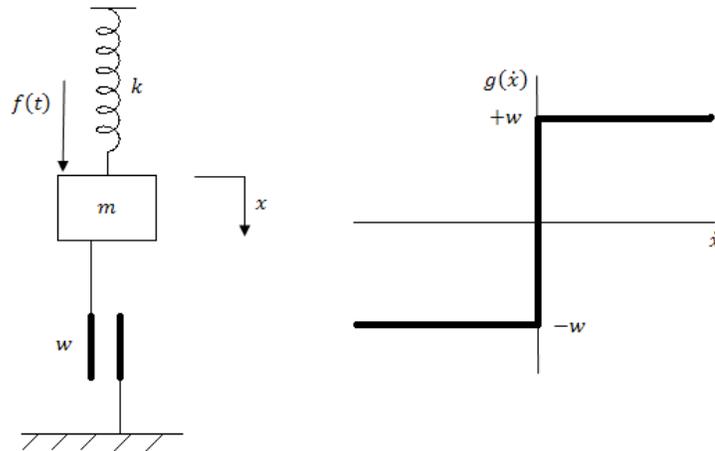


Figura 10. Sistema dinámico discontinuo de tipo II.

Otro ejemplo, muy citado en la literatura de electrónica de potencia (Miranda y Álvarez, 2009), es el convertidor reductor CD-CD (Buck, en inglés). El circuito en lazo abierto del convertidor se muestra en la figura 11. En la misma figura, el interruptor representa el elemento no lineal, el cual presenta una naturaleza discontinua ya que hace que el convertidor pase de un modo de operación a otro idealmente de manera instantánea.

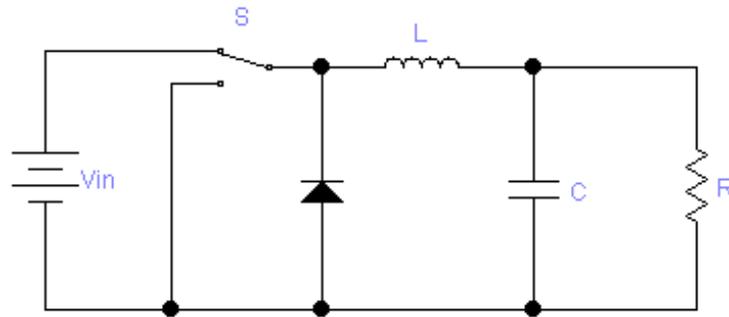


Figura 11. Convertidor reductor CD-CD en lazo abierto.

3. **Sistemas que presentan discontinuidades (o brincos) en el estado (Tipo III).** Se clasifican en sistemas que presentan impactos. Un ejemplo se muestra en la figura 12, se trata de una esfera que se deja caer e impacta contra el suelo; la fuerza de contacto se modela como una impulso de Dirac en el instante del impacto.

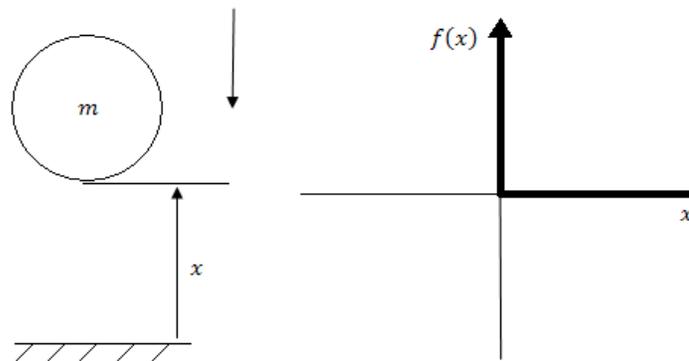


Figura 12. Sistema dinámico discontinuo de tipo III.

II.2.1 Existencia y unicidad de las soluciones

Numerosas cuestiones fundamentales aparecen cuando se habla de sistemas dinámicos discontinuos. Para un campo vectorial discontinuo, la existencia de una solución continuamente diferenciable, es decir, la existencia de una curva suave cuya derivada siempre siga la dirección del campo vectorial no está garantizada. El siguiente ejemplo, ver (Leine, 2000),

ilustra las dificultades en definir las soluciones de los sistemas dinámicos discontinuos.

Ejemplo 2 . Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) = 1 - 2\text{sign}(x)$$

$$\dot{x} = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases} \quad (36)$$

con $\text{sign}(0) = 0$. Para una condición inicial dada $x(0) \neq 0$ se puede obtener una solución a la ecuación (36) dada por

$$x(t) = \begin{cases} 3t + x(0) & x < 0 \\ t + x(0) & x = 0 \\ -t + x(0) & x > 0 \end{cases} \quad (37)$$

Una solución del sistema con condición inicial igual a $x(0) = 0.1$ se muestra en la figura 13

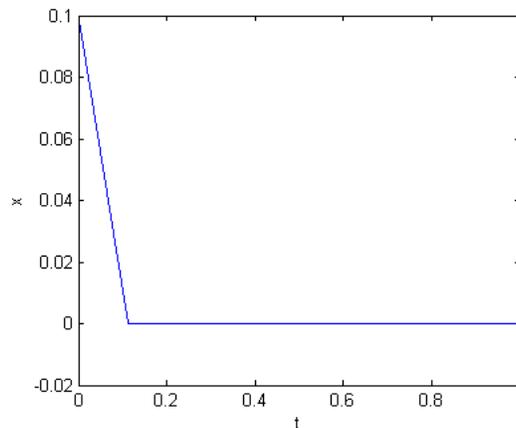


Figura 13. Solución del sistema del ejemplo 1.

Cada solución alcanza $x = 0$ en tiempo finito. Cuando la solución llega a $x = 0$, ésta no puede salir de $x = 0$ porque $\dot{x} > 0$ para $x < 0$ y $\dot{x} < 0$ para $x > 0$. La solución permanecerá en $x = 0$, lo que implica que $\dot{x} = 0$. Sin embargo, $x = 0$ y $\dot{x} = 0$ no es una solución en el sentido clásico ya que $0 \neq 1 - 2\text{sign}(0)$. Esto conduce a una contradicción en la definición $\text{sign}(0) = 0$, por lo que se tiene que definir a la función signo de otra manera. Antes de eso,

primero se introduce la noción de solución en el sentido de Filippov y después se retomará este ejemplo.

El ejemplo 2 puede ser descrito como un sistema dinámico de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x(t_0) = x_0 \quad (38)$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$, d es un entero positivo, y $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es discontinua. Se dice que una solución está definida en el sentido clásico si es una solución continuamente diferenciable. Claramente, si f es continua, entonces cada solución de (38) está definida en el sentido clásico.

El ejemplo 2 muestra las limitaciones de las soluciones en el sentido clásico y por tanto, se requiere de una noción de solución más apropiada. Desafortunadamente, no hay una respuesta única satisfactoria al momento de elegir la noción de solución. Dependiendo del problema, diferentes nociones de solución son apropiadas.

En la siguiente sección se presentan algunas nociones de solución que son absolutamente continuas. Aunque no se tratan en esta tesis, también es posible considerar soluciones que admitan discontinuidades en los estados y por tanto, no son absolutamente continuas. Tales soluciones son apropiadas para sistemas dinámicos del tipo III (Leine, 2000), como por ejemplo, una esfera que rebota.

II.2.2 Nociones de solución para sistemas dinámicos discontinuos

Primero se define lo que es una función absolutamente continua.

Definición 2 . Una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es **absolutamente continua** si, para todo $\varepsilon \in (0, \infty)$, existe un $\delta \in (0, \infty)$ tal que, para cada colección finita $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ de intervalos abiertos contenidos en $[a, b]$ con $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, entonces se sigue que:

$$\sum_{i=1}^n |\gamma(b_i) - \gamma(a_i)| < \varepsilon \quad (39)$$

Entre las más destacadas nociones de solución se encuentran las de Caratheodory y las soluciones en el sentido de Filippov. Ambos enfoques aceptan soluciones absolutamente continuas.

Las soluciones Caratheodory son una generalización de las clásicas. Hablando informalmente, las soluciones Caratheodory son funciones absolutamente continuas que satisfacen la versión integral de la ecuación (38), es decir,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \quad t > t_0 \quad (40)$$

donde la integral es la de Lebesgue. Empleando la forma integral (40), las soluciones Caratheodory debilitan los requerimientos clásicos de que la solución debe seguir la dirección del campo vectorial para todo tiempo.

Alternativamente, existen las soluciones de tipo Filippov, en donde ecuación diferencial (38) es reemplazada por una inclusión diferencial de la forma:

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad (41)$$

donde $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ denota la colección de todos los subconjuntos de \mathbb{R}^d . Debido a que los sistemas de tipo Filippov aparecen en modelos de circuitos electrónicos, en sistemas mecánicos con fricción y en sistemas de control, es pertinente presentar una introducción a esta clase de soluciones.

II.2.3 Soluciones de tipo Filippov

La idea central de una solución de tipo Filippov es considerar cómo se comporta el campo vectorial en la vecindad de un punto y no en el valor del campo en el punto individual. El marco de referencia matemático para formalizar esta idea de vecindad utiliza funciones

multi-evaluadas. Sea

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x(t_0) = x_0 \quad (42)$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$, d es un entero positivo, y $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es discontinua. La idea es asociar una función multi-evaluada a f a partir de los valores cercanos a cada punto. Específicamente, para $x \in \mathbb{R}^d$, el campo vectorial f es evaluado para los puntos pertenecientes a $B(x, \delta)$, la cual es una esfera abierta centrada en x y con radio $\delta > 0$. Para flexibilidad adicional, no se incluye un conjunto arbitrario de medida cero dentro de $B(x, \delta)$ cuando se evalúa f , de tal forma que las funciones multi-evaluadas son idénticas para dos campos vectoriales que difieran tan solo en un conjunto de medida cero.

Matemáticamente, el proceso descrito con anterioridad puede resumirse de la siguiente manera: Sea $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$, la colección de todos los subconjuntos de \mathbb{R}^d . Para $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, la *función multi-evaluada de Filippov* se define como

$$F[f](x) \triangleq \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \bar{c\bar{o}}\{f(B(x, \delta)/S)\} \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (43)$$

En la ecuación (43), $\bar{c\bar{o}}(A)$ denota el conjunto convexo cerrado más pequeño que contiene a A , y μ denota una medida de Lebesgue. Debido a la forma en que la función multi-evaluada de Filippov se define, el valor de $F[f]$ en el punto x es independiente del valor del campo vectorial f en el punto x .

Ejemplo 3 .Función multi-evaluada de Filippov para la función signo.

Considere el problema planteado en el ejemplo 2. Se concluyó que la solución $x(t) = 0$ no es una solución en el sentido clásico, por lo tanto, es necesario buscar otra noción de solución. Se define la función signo multi-evaluada como

$$Sign(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \sigma & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (44)$$

donde $\sigma \in [-1, 1]$. Con esta definición, $x(t) = 0$ es una solución global única de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in 1 - 2\text{Sign}(x) \quad (45)$$

con condición inicial $x(0) = 0$.

El ejemplo mencionado arriba es uni-dimensional. En el trabajo (Leine, 2000) se define una ecuación diferencial discontinua de una manera más general para cualquier dimensión. El estudio se restringe a ecuaciones diferenciales que son discontinuas en un determinado número de *hiper-superficies*, aquí llamadas superficies de discontinuidad, las cuales son superficies en el espacio de estados en donde el campo vectorial no es diferenciable. El caso más sencillo es cuando se tiene una sola superficie de discontinuidad Σ que divide el espacio de estados \mathbb{R}^n en 2 regiones G_1 y G_2 . La superficie Σ está definida por una función escalar $h(x(t))$. El estado $x(t)$ está en Σ cuando $h(x(t)) = 0$. La normal \underline{n} perpendicular a la superficie Σ está dada por $\underline{n}(x) = \text{grad}(h(x))$.

La función indicadora $h(x)$ no es única para definir una cierta superficie de discontinuidad Σ . Se asume que la función $h(x)$ es elegida de tal forma que se cumple que $\text{grad}(h(x)) \neq 0$.

Las regiones G_1 , G_2 y la superficie de discontinuidad pueden ser formuladas como

$$\begin{aligned} G_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) < 0\} \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0\} \\ G_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) > 0\} \end{aligned} \quad (46)$$

La función $f(x(t))$, ver ecuación (38), se supone que es localmente continua, diferenciable y acotada para todo $x \notin \Sigma$. A partir de esta consideración, la solución $x(t)$ en cada una de las regiones G_1 y G_2 existe y es única ².

Es posible considerar sistemas discontinuos no lineales de dimensión n como

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{cases} f_1(x) & x \in G_1 \\ f_2(x) & x \in G_2 \end{cases} \quad (47)$$

²ver teorema 1, pág. 7

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$. Como se mencionó, el lado derecho de la ecuación (47) es seccionalmente continua y diferenciable en G_1 y G_2 y discontinua en Σ . Además se asume que la función $f_1(x)$ es C^1 en $G_1 \cup \Sigma$ y $f_2(x)$ es C^1 en $G_2 \cup \Sigma$. No es necesario que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ coincidan en Σ . El sistema descrito en (47), $f(x(t))$ no está definido para $x(t) \in \Sigma$. Este problema se puede sobrepasar si se considera la función multi-evaluada $F(x(t))$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) = \begin{cases} f_1(x) & x \in G_1 \\ \bar{c}\bar{o}\{f^-(x), f^+(x)\} & x \in \Sigma \\ f_2(x) & x \in G_2 \end{cases} \quad (48)$$

donde el conjunto convexo puede expresarse como

$$\bar{c}\bar{o}\{f_1, f_2\} = \{(1 - q)f_1 + qf_2, \forall q \in [0, 1]\}$$

El parámetro q define la combinación entre f_1 y f_2 y no tiene significado físico. La extensión de un sistema dinámico discontinuo (47) a una inclusión diferencial (48) se conoce como el *método convexo de Filippov*.

Si el sistema discontinuo (47) es un modelo matemático de un sistema físico, entonces es de interés conocer las condiciones que garantizan la existencia de las soluciones. Por razones prácticas, se requiere que la elección de $F(x(t))$ garantice la existencia de las soluciones. La existencia puede ser asegurada con la noción de semi-continuidad superior de las funciones multi-evaluadas.

Definición 3 . Semi-continuidad superior

Una función multi-evaluada $F(x(t))$ es semi-continua superior en x si para $y \rightarrow x$

$$\sup_{a \in F(y)} \inf_{b \in F(x)} \|a - b\| \rightarrow 0$$

Teorema 5 . Existencia de una solución de una inclusión diferencial

Sea $F(x(t))$ una función multi-evaluada. Se asume que F es semi-continua superior, cerrada, convexa y acotada para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un $\tau > 0$

y una función absolutamente continua $x(t)$ definida $[0, \tau]$, la cual es la solución al problema de valor inicial

$$\dot{x} \in F(x(t)) \quad x(0) = x_0$$

El método convexo de Filippov junto con el teorema de existencia define las *soluciones en el sentido de Filippov* para una ecuación diferencial discontinua.

Definición 4 . Una función absolutamente continua $x(t) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es una solución de (47) en el sentido de Filippov si para casi toda $t \in [0, \tau]$ (para toda t excepto para un conjunto t de medida cero) se mantiene que

$$\dot{x} \in F(x(t))$$

donde F está definida en (43).

Las soluciones del sistema (48) pueden existir en el intervalo de tiempo $[0, \infty]$, sin embargo la unicidad de las soluciones no está garantizada. En los siguientes ejemplos se muestran tres maneras básicas de cómo se puede comportar el campo vectorial alrededor de la superficie de discontinuidad Σ (Leine, 2000).

Ejemplo 4 . Unicidad de la solución.

Considere el sistema discontinuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4 + 2\text{sign}(x_2 - c) \\ \dot{x}_2 &= -4 + 2\text{sign}(x_2 - c) \end{aligned} \tag{49}$$

el cual puede ser extendido a un campo vectorial multi-evaluado si se reemplaza $\text{sign}(x)$ por $\text{Sign}(x)$ y el símbolo de $' ='$ por $' \in'$. Se toma $h(x) = c - x_2$ como la función indicadora y la normal a Σ está dada por $\underline{n} = [0, -1]^T$. El retrato de fase del sistema se muestra en la figura 14. El campo vectorial empuja a las trayectorias hacia Σ cuando $x(t) \in G_1$ y aparta las trayectorias de Σ cuando $x(t) \in G_2$. Una solución de (49) que comience en una

condición inicial $x_0 \in G_1$, después de un tiempo chocará con la superficie Σ y eventualmente la cruzará transversalmente para proseguir en G_2 .

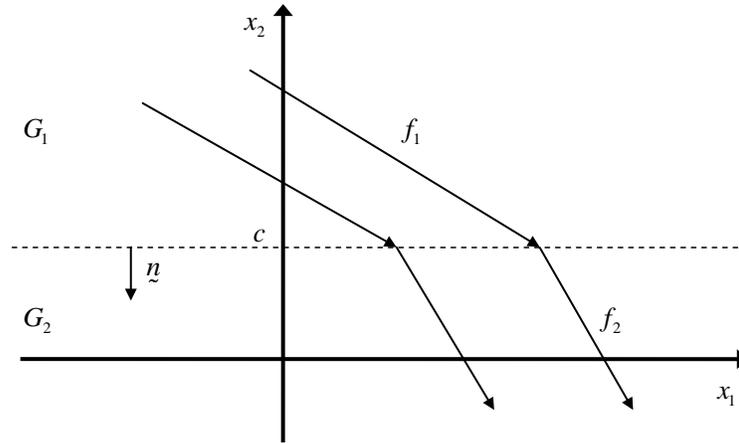


Figura 14. Solución única.

Cualquier solución de (49) con cualquier condición inicial en G_1 , existe y es única debido a que ocurre una intersección transversal del campo vectorial en Σ . Una condición necesaria para que ocurra una intersección transversal en Σ es

$$(n^T f^-(x)) (n^T f^+(x)) > 0 \quad x(t) \in \Sigma \quad (50)$$

donde $n^T f^-(x)$ y $n^T f^+(x)$ son las proyecciones de f^- y f^+ sobre la normal n .

Otra de las formas en las que se puede comportar el campo es el caso de un movimiento deslizante atractor.

Ejemplo 5 . Considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4 + 2\text{sign}(x_2 - c) \\ \dot{x}_2 &= 2 - 4\text{sign}(x_2 - c) \end{aligned} \quad (51)$$

cuyo retrato de fase es mostrado en la figura 15. La solución choca con la superficie Σ pero no sale de ella y en consecuencia se mueve a lo largo de Σ . Este fenómeno es llamado modo

deslizante, y debido a que la superficie atrae a la solución, esto se llama modo deslizante de atracción. Durante el movimiento deslizante, el campo vectorial a lo largo de Σ se puede definir como

$$\begin{aligned} f &= qf^+ + (1 - q)f^- \\ q &= \frac{n^T f^-}{n^T (f^- - f^+)} \end{aligned} \quad (52)$$

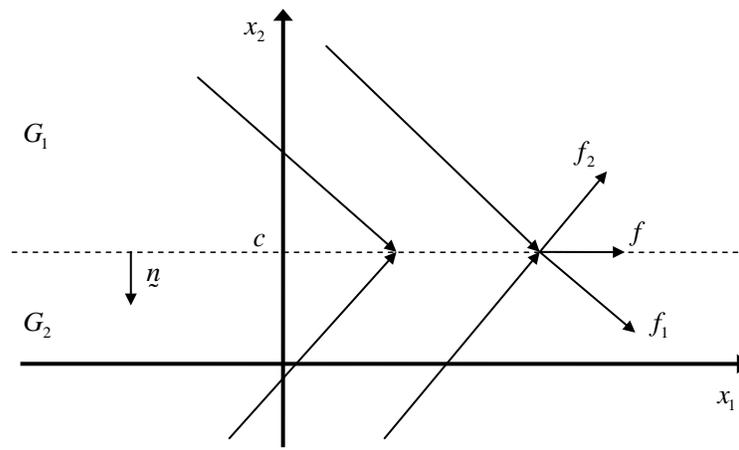


Figura 15. Modo deslizante de atracción.

La solución del sistema (51), existe y es única sólo para tiempo futuro. Un modo deslizante de atracción ocurre cuando los campos vectoriales en ambos lados de la superficie de discontinuidad Σ apuntan hacia la superficie.

El tercer caso es ilustrado en la figura 16, en donde se observa el campo vectorial del siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4 - 2\text{sign}(x_2 - c) \\ \dot{x}_2 &= -2 + 4\text{sign}(x_2 - c) \end{aligned} \quad (53)$$

Si la condición inicial se encuentra sobre Σ , la solución puede permanecer en Σ o moverse hacia las regiones G_1 o G_2 . Este tipo de comportamiento se le llama modo deslizante de repulsión ya que el campo vectorial aleja las soluciones de la superficie Σ . Las soluciones existen pero no son únicas para $t > 0$.

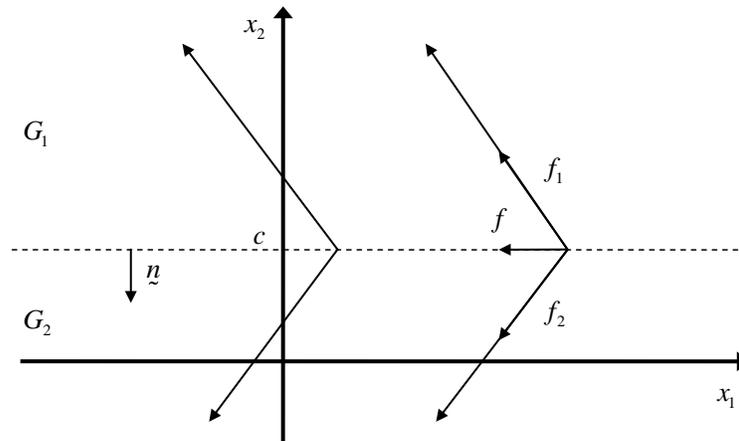


Figura 16. Modo deslizante de repulsión.

II.2.4 Bifurcaciones en sistemas dinámicos discontinuos

Bifurcación, es una palabra de origen francés introducida por Poincaré en el ámbito de la dinámica no lineal, y se usa para indicar un cambio cualitativo en las características de un sistema, tales como el número y tipo de sus soluciones, cuando uno o más parámetros del sistema bajo estudio varían (Nayfeh y Balachandran, 1995). El valor crítico del parámetro en el cual ocurre el cambio de comportamiento del sistema, es llamado *valor o punto de bifurcación*.

La teoría de bifurcaciones en campos vectoriales diferenciables es un tema ya estudiado y entendido (Guckenheimer y Holmes, 1983), (Wiggins, 1990). Para el caso de sistemas diferenciables, las bifurcaciones pueden ser divididas en dos clases:

1. **Bifurcaciones locales**, las cuales pueden ser completamente analizadas si se estudian

los cambios en las propiedades de estabilidad de puntos de equilibrio, órbitas periódicas o cualquier otro conjunto invariante cuando se varía el parámetro de bifurcación.

2. **Bifurcaciones globales**, las cuales ocurren cuando un conjunto invariante del sistema interacciona con otro. No pueden ser detectadas solamente analizando la estabilidad local.

Sin embargo, no existe una clasificación de las bifurcaciones en campos vectoriales no diferenciables y continuos, las cuales pueden ser completamente diferentes a las que ocurren en los sistemas dinámicos diferenciables, por lo que aún es un tema abierto de investigación. Para explicar la evidencia numérica y experimental de la existencia de estos *nuevos fenómenos*, investigadores de diferentes áreas de la ciencia y tecnología han desarrollado, independientemente, diferentes estrategias para estudiar estas bifurcaciones. Como resultado, surgieron un número de definiciones y notaciones para describir fenómenos que muchas veces son similares (Feigin, 1970), (Nusse y Yorke, 1992), (di Bernardo *et al.*, 2002).

Hasta el momento, no existe una teoría general de bifurcaciones para sistemas dinámicos no diferenciables. Sin embargo, en (di Bernardo *et al.*, 2002) se propone organizar los resultados ya existentes en el tema de bifurcaciones de una manera coherente con la finalidad de sentar las bases de esta teoría.

Muchos sistemas dinámicos discontinuos se pueden describir mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (54)$$

o mapeos discretos tales como

$$x_{k+1} = g(x_k, \mu) \quad (55)$$

donde $f, g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones seccionalmente diferenciables, $\mu \in \mathbb{R}^n$ es un vector de parámetros y x, x_k son vectores en \mathbb{R}^n . Por lo general, el retrato de fase de un sistema como (54) y (55), puede dividirse en varias regiones $G_i, i = 1, 2, \dots, N$ donde la dinámica de cada

región es diferente y está dominada por un conjunto de ecuaciones de la forma $f = f_i$ si $x \in G_i$ para $i = 1, 2, \dots, N$ (similarmente para g). Tales regiones son cerradas y suaves. La diferenciabilidad se pierde en las fronteras Σ_{ij} entre regiones adyacentes. Este tipo de sistemas son llamados *sistemas seccionalmente diferenciables (SSD)* (*Piecewise-smooth system (PWS)*, en inglés).

A pesar de que los SSD tienen varias aplicaciones en ingeniería, aún no existe una teoría sistemática para su estudio. Más aún, se han observado transiciones complejas en esta clase de sistemas cuando los parámetros son variados, lo cual no puede ser explicado mediante la teoría de bifurcaciones para sistemas diferenciables. Estos fenómenos involucran interacciones complejas entre la trayectorias del sistema y las conjuntos no diferenciables en el retrato de fase.

Los SSD pueden exhibir la mayoría de las bifurcaciones que exhiben los sistemas diferenciables, tales como duplicación de periodo, silla-nodo, etc. En adición a éstas, existen bifurcaciones que son exclusivas de los SSD.

Entre los principales tipos de bifurcaciones que han sido reportados en la literatura se encuentran:

- Colisiones de frontera de puntos de equilibrio. (Nusse y Yorke, 1992)
- Bifurcaciones discontinuas de puntos de equilibrio (Leine, 2000).
- Bifurcaciones de pacerura de ciclos límite (di Bernardo *et al.*, 2002).
- Bifurcaciones deslizantes de ciclos límite (di Bernardo *et al.*, 2002).

A continuación se resumen éstos escenarios de bifurcación.

1. **Colisiones de frontera de puntos de equilibrio en mapeos.** Considere un mapeo seccionalmente lineal. Además, considere una región $D \subset \mathbb{R}^n$ del retrato de fase el

cual es elegido de tal manera que, bajo un cambio de coordenadas adecuado, el mapeo bajo estudio puede ser descrito como

$$x \rightarrow \begin{cases} g_1(x, \mu) & , h(x) < 0 \\ g_2(x, \mu) & , h(x) > 0 \end{cases} \quad (56)$$

donde $h(x) = 0$ define una superficie Σ la cual separa la región D en dos regiones denotadas por G_1 y G_2 .

$$\Sigma = \{x \in D | h(x) = 0\}$$

$$G_1 = \{x \in D | h(x) < 0\} \quad (57)$$

$$G_2 = \{x \in D | h(x) > 0\}$$

Se asume que el mapeo es diferenciable hasta un orden k en cada subregión G_1 y G_2 y que es continuo en Σ .

Sea \hat{x} un punto de equilibrio el cual depende del parámetro $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se dice que el punto \hat{x} es un *punto de cruce de frontera* si cruza Σ transversalmente cuando μ varía entre $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Sin pérdida de generalidad se asume que

$$\hat{x} \in G_1 \quad -\varepsilon < \mu < 0$$

$$\hat{x} \in \Sigma \quad \mu = 0$$

$$\hat{x} \in G_2 \quad 0 < \mu < \varepsilon$$

Definición 5 . Colisión de frontera(Nusse y Yorke, 1992). *Se dice que un punto de equilibrio \hat{x} sufre una bifurcación de colisión de frontera para $\mu = 0$ si \hat{x} es un punto de cruce de frontera y se cumple que*

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \right|_{\mu=0} \neq \left. \frac{\partial g_2}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \right|_{\mu=0} \quad (58)$$

La condición (58) establece que el Jacobiano del mapeo es discontinuo en el punto de cruce de frontera.

2. **Bifurcaciones de puntos de equilibrio en campos vectoriales.** Considere una región $D \subset \mathbb{R}^n$ del retrato de fase, donde el sistema bajo estudio puede ser descrito

como

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x, \mu) & , h(x) < 0 \\ f_2(x, \mu) & , h(x) > 0 \end{cases} \quad (59)$$

donde $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar que depende de los estados del sistema. De acuerdo con (59), $h(x)$ define una superficie Σ la cual separa la región D en dos regiones denotadas por G_1 y G_2 .

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{x \in D | h(x) = 0\} \\ G_1 &= \{x \in D | h(x) < 0\} \\ G_2 &= \{x \in D | h(x) > 0\} \end{aligned} \quad (60)$$

se asume que los campos vectoriales f_1 y f_2 son diferenciables en G_1 y G_2 respectivamente. Ahora, suponga que \hat{x} es un punto de equilibrio de (59), el cual se asume que depende del parámetro $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Específicamente, se dice que el punto \hat{x} es un *equilibrio de cruce de frontera* si cruza Σ transversalmente cuando μ varía entre $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Sin pérdida de generalidad se asume que

$$\begin{aligned} \hat{x} &\in G_1 & -\varepsilon < \mu < 0 \\ \hat{x} &\in \Sigma & \mu = 0 \\ \hat{x} &\in G_2 & 0 < \mu < \varepsilon \end{aligned}$$

Definición 6 . Bifurcación discontinua (Leine, 2000). *Se dice que un punto estacionario \hat{x} sufre una bifurcación discontinua para $\mu = 0$ si \hat{x} es un equilibrio de cruce de frontera y la linealización del sistema alrededor de \hat{x} en G_1 y G_2 da*

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \right|_{\mu=0} \neq \left. \frac{\partial f_2}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \right|_{\mu=0}$$

Esta definición extiende el escenario de las colisiones de bordes para sistemas discretos en el tiempo. Esta definición no es exactamente la reportada en (Leine, 2000), ya que las bifurcaciones discontinuas son definidas en términos de los valores propios del sistema en el punto de bifurcación.

3. **Bifurcación de pacerura de ciclos límite.** En este caso, desarrollos numéricos, experimentales y teóricos (di Bernardo *et al.*, 2001a) han mostrado que algunas transiciones complejas en los SSD están frecuentemente asociadas a intersecciones tangenciales (*grazing*, en inglés) de las órbitas periódicas del sistema, o partes de ellas, con una superficie de discontinuidad.

Si una órbita periódica $\tilde{x}(t)$ de (59) toca tangencialmente la superficie Σ en un tiempo $t = t^*$ y en un punto $x^* = x(t^*)$, entonces el punto x^* es un punto de bifurcación si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} h(x^*) &= 0 \\ \nabla h(x^*) &\neq 0 \\ \langle \nabla h(x^*), f_i(x^*) \rangle &= 0 \\ \left\langle \nabla h(x^*), \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x} f_i(x^*) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} f_i(x^*), f_i(x^*) \right\rangle &> 0 \end{aligned} \tag{61}$$

Las primeras dos condiciones establece que $h(x)$ es una función apropiada para definir la superficie de discontinuidad Σ . La tercera condición implica que el campo vectorial es tangente a Σ en el punto x^* . La última condición asegura que la curvatura de la trayectoria a ambos lados de Σ tienen el mismo signo con respecto a $h(x)$.

Definición 7 . Bifurcación de pacerura. *Una órbita periódica $\tilde{x}(t)$ sufre una bifurcación de pacerura si para $\mu = 0$ se cumplen las condiciones (61) y para un $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ suficientemente pequeñas, $\tilde{x}(t)$, $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ no cruza Σ si $\mu \in [-\varepsilon, 0]$; $\tilde{x}(t)$, $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ cruza Σ transversalmente si $\mu \in [\varepsilon, 0]$.*

Las propiedades del campo vectorial del sistema a través de la superficie de discontinuidad son esenciales para determinar los escenarios de bifurcación que siguen de una bifurcación de pacerura. Otro caso reportado en la literatura recibe el nombre de *colisión de esquina*, la cual es la intersección de una órbita periódica con una superficie de discontinuidad que no es suave.

Además, es posible que el fenómeno de movimiento deslizando aparezca una vez que la trayectoria del sistema toque tangencialmente a la superficie Σ , originando comportamientos mucho más complejos. Esta clase de bifurcaciones se llaman *bifurcaciones deslizantes*.

4. **Bifurcaciones deslizantes.** En general, suponga que la dirección del campo vectorial del sistema (59) apunta simultáneamente hacia la superficie de discontinuidad Σ desde ambos lados. Entonces, cuando las trayectorias del sistema golpean la superficie Σ , su movimiento estará restringido a evolucionar a lo largo de Σ , hasta que la dirección del campo vectorial cambie. Resultados numéricos y analíticos han mostrado la existencia de cuatro tipos de bifurcaciones deslizantes (Kowalczyk y di Bernardo, 2001).

En la figura 17 se resume de manera gráfica los tipos de bifurcaciones discutidos anteriormente. En la figura 17(a) se muestra un ejemplo hipotético de una colisión de frontera en un mapeo discreto. Para un valor $\mu < 0$ del parámetro de bifurcación, el mapeo tiene un único punto de equilibrio, el cual permanece mientras se incrementa el valor del parámetro hasta un valor $\mu = 0$. Pero para $\mu > 0$, el mapeo ahora tiene 3 puntos de equilibrio.

Ejemplos de bifurcaciones de puntos de equilibrio y ciclos límite para campos vectoriales se muestran de la figura 17(b), a la 17(e).

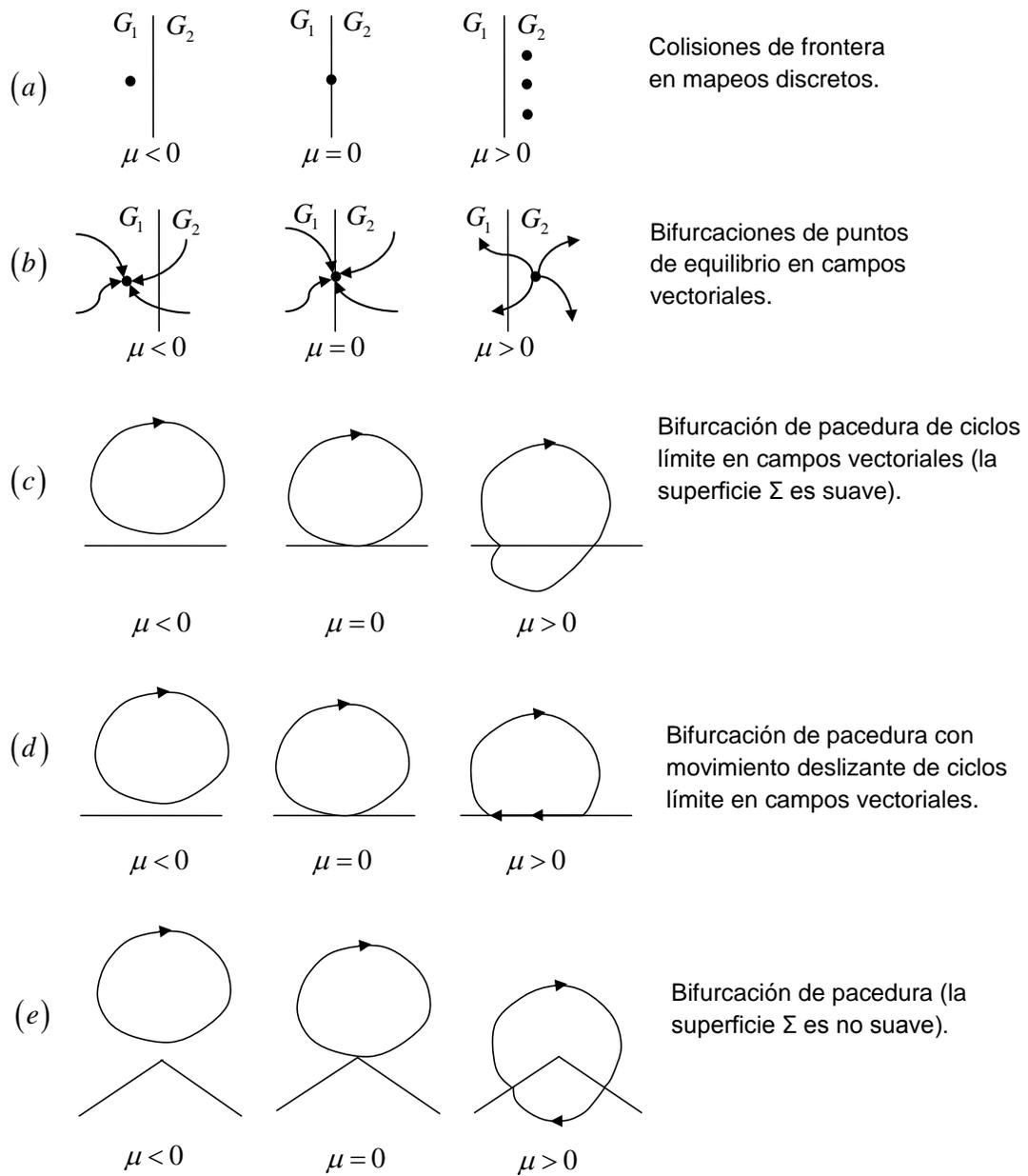


Figura 17. Tipo de bifurcaciones que incluyen una superficie de discontinuidad.

Capítulo III

ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

El comportamiento cualitativo de un sistema de segundo orden se determina por sus puntos de equilibrio y órbitas periódicas naturales, así como también por su estabilidad. Una cuestión de importancia es saber si los puntos de equilibrio cambian cuando se varían uno o más parámetros del sistema. El número y tipo de puntos de equilibrio pueden cambiar para un determinado valor paramétrico. A este cambio cualitativo en el comportamiento del sistema se le llama *bifurcación*. La teoría de bifurcaciones de puntos de equilibrio en campos vectoriales diferenciables ha sido ampliamente estudiada, ver por ejemplo (Guckenheimer y Holmes, 1983), (Wiggins, 1990). Considérese las bifurcaciones de puntos de equilibrio de (62) bajo la influencia de un parámetro μ .

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{62}$$

los puntos de equilibrio están definidos por $f(x; \mu) = 0$. En el espacio (x, μ) , una bifurcación local de puntos de equilibrio de (62) ocurre en el punto (x_0, μ_0) si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f(x_0; \mu_0) = 0$
2. $D_x f(x_0; \mu_0)$ tiene por lo menos un valor propio con parte real cero.

las cuales son condiciones necesarias. La primera condición asegura que la solución es un punto de equilibrio de (62) y la segunda condición implica que el punto de equilibrio es *no hiperbólico*.

Sin embargo, poco se conoce acerca de las bifurcaciones de puntos de equilibrio en campos vectoriales no diferenciables en comparación con el caso diferenciable. En (Leine,

2000) se muestra que una bifurcación en un sistema dinámico continuo no diferenciable puede ser discontinua, en el sentido de que los valores propios del sistema brincan sobre el eje imaginario bajo la variación de un parámetro, y en consecuencia no se puede establecer la hiperbolicidad de los puntos de equilibrio como en el caso de los sistemas diferenciables. Además, en dicho trabajo se realiza una comparación entre bifurcaciones encontradas en sistemas no diferenciables y bifurcaciones clásicas presentes en sistemas diferenciables. El trabajo realizado en (Leine, 2000) sirve como referencia para clasificar las bifurcaciones de puntos de equilibrio del sistema que se estudiará a lo largo del capítulo.

En esta sección se presenta el análisis del comportamiento dinámico de un sistema de segundo orden con una acción de control discontinua. Se estudia un sistema cuyo modelo se puede generalizar a una variedad de modelos de sistemas mecánicos.

En particular se analiza:

- La existencia, número y estabilidad de puntos de equilibrios cuando se varía un parámetro del sistema.
- La existencia de órbitas periódicas.

III.1 Planteamiento del modelo

Un gran número de procesos dinámicos que operan alrededor de un punto de equilibrio pueden ser modelados por un sistema de segundo orden caracterizado por una frecuencia natural ω_n y un coeficiente de amortiguamiento ζ . En su forma más simple el sistema puede ser descrito por la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (63)$$

donde s es la variable de Laplace y K es la ganancia en estado permanente. El control de sistemas como el (63) es un problema ampliamente estudiado; ya que existen propuestas

para diseñar controladores con diversos objetivos, por ejemplo, el empleo de un control de tipo *proporcional-integral-derivativo* puede mejorar el desempeño, el comportamiento en estado permanente y la respuesta transitoria del sistema.

En la práctica, la adición de bloques de saturación (antes o después de un controlador) es común para garantizar la confiabilidad y proteger la integridad de los dispositivos. Cuando el controlador opera con señales de pequeña amplitud, el saturador trabaja en la región lineal. Sin embargo, cuando el sistema opera con señales de amplitud muy grande, la saturación introduce términos no lineales. Se ha demostrado que una planta lineal como la (63), con K negativa y el uso de un control proporcional seguido de una saturación, puede exhibir comportamiento dinámico complejo (Curiel y Álvarez, 1997).

En el presente trabajo de tesis se introduce una discontinuidad al sistema (63) para observar su efecto sobre la dinámica del mismo. En la figura 18 se muestra el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.

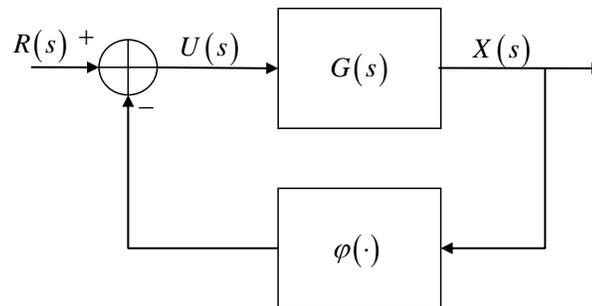


Figura 18. Sistema en lazo cerrado.

donde $\varphi(\cdot)$ es la función signo. La representación en variables de estado del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\in x_2 \\ \dot{x}_2 &\in -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + K\omega_n^2 (\rho \text{Sign}(x_1) + r(t)) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{64}$$

donde ρ es la magnitud de la función signo, $r(t)$ la entrada del sistema y $\text{Sign}(\cdot)$ es la función

signo, la cual se define como:

$$\text{Sign}(x_1) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \sigma & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (65)$$

donde $\sigma \in [-1, 1]$.

III.2 Bifurcaciones de puntos de equilibrio

Cuando $r(t) = 0$, los puntos de equilibrio del sistema (64) satisfacen la siguiente expresión

$$\begin{aligned} x_1 &= L\text{Sign}(x_1) \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

donde $L = K\rho$, es el parámetro de bifurcación que define el número de puntos de equilibrio.

Si el producto $L \leq 0$, el sistema tiene un único punto de equilibrio ubicado en el origen y

si $L > 0$, el sistema tiene tres puntos de equilibrio: $\bar{x}_{(1)} = (0, 0)$, $\bar{x}_{(2,3)} = (\pm L, 0)$. Una vez

obtenidos los puntos de equilibrios, el siguiente paso es determinar su estabilidad.

1. Caso $L < 0$. En este caso el sistema (64) tiene un punto de equilibrio en el origen. El campo vectorial del sistema (64) puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\in x_2 \\ \dot{x}_2 &\in -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + L\omega_n^2 \text{Sign}(x_1) \end{aligned} \quad (67)$$

Se puede demostrar la estabilidad asintótica del origen del sistema (67) utilizando la función de Lyapunov

$$V(x) = \frac{\omega_n^2 x_1^2 + x_2^2}{2} + |L\omega_n^2 x_1| \quad (68)$$

cuya derivada está dada por

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = -2\zeta\omega_n x_2^2 \leq 0 \quad (69)$$

que es semidefinida negativa y aplicando el teorema de invarianza para sistemas discontinuos presentado en (Orlov *et al.*, 2000) se concluye que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

En la figura 19 se observa el comportamiento del sistema (64) cuando $L < 0$, para los casos en que no se tiene amortiguamiento $\varsigma = 0$, ver figura 19(a), y cuando el amortiguamiento es positivo $\varsigma > 0$, ver figura 19(b). Si $\varsigma < 0$ el punto de equilibrio se vuelve inestable.

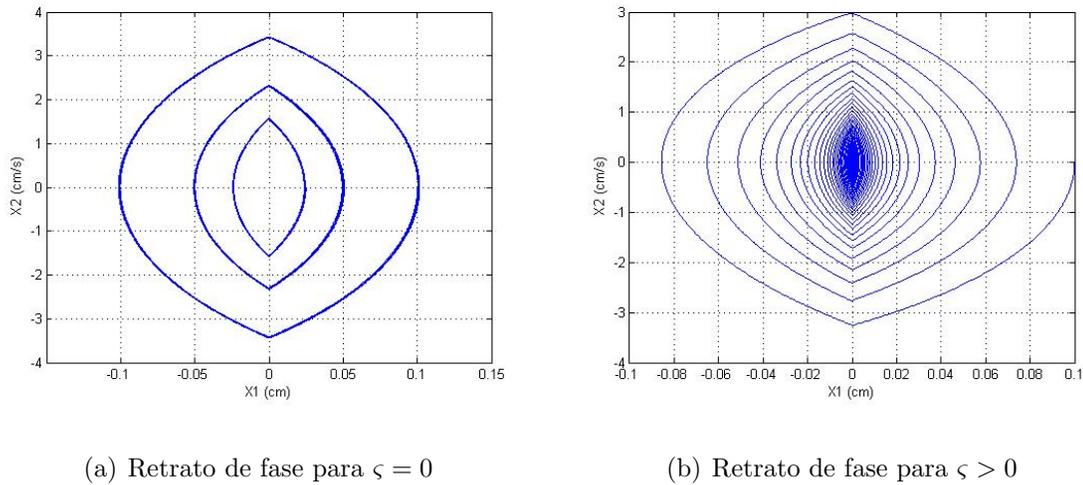


Figura 19. Equilibrios del sistema con $L < 0$.

2. Caso $L > 0$. Para este caso el sistema (64) tiene 3 puntos de equilibrio. El espacio de estados puede ser dividido en 2 regiones separados por la superficie de discontinuidad, la cual puede ser definida mediante la función escalar $h(x) = x_1$. En estas regiones el campo vectorial es completamente diferenciable, por lo que se puede emplear la teoría de estabilidad de sistemas continuos. Las regiones y la superficie de discontinuidad Σ están definidas como:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) < 0\} \\
 \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0\} \\
 G_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) > 0\}
 \end{aligned} \tag{70}$$

Y los campos vectoriales del sistema (64) están expresados por:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -L\omega_n^2 \end{pmatrix} & x \in G_1 \\
 f_2(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ L\omega_n^2 \end{pmatrix} & x \in G_2
 \end{aligned} \tag{71}$$

Las matrices de estado del sistema son idénticas, por lo tanto los equilibrios $\bar{x}_{(2)} = (-L, 0)$ y $\bar{x}_{(3)} = (L, 0)$ situados en las regiones G_1 y G_2 correspondientemente, poseen las mismas propiedades de estabilidad. Fácilmente la estabilidad de ambos puntos de equilibrios puede obtenerse a partir de los valores propios de los subsistemas $f_1(x)$ y $f_2(x)$:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left(\frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} \right) \tag{72}$$

Si consideramos que el coeficiente de amortiguamiento es positivo, los valores propios de (72) tienen parte real negativa y por tanto los equilibrios son asintóticamente estables.

En la figura 20 se ilustra el diagrama de bifurcación de puntos de equilibrio al variar $-2 < L < 2$, donde se resume el comportamiento del sistema descrito anteriormente.

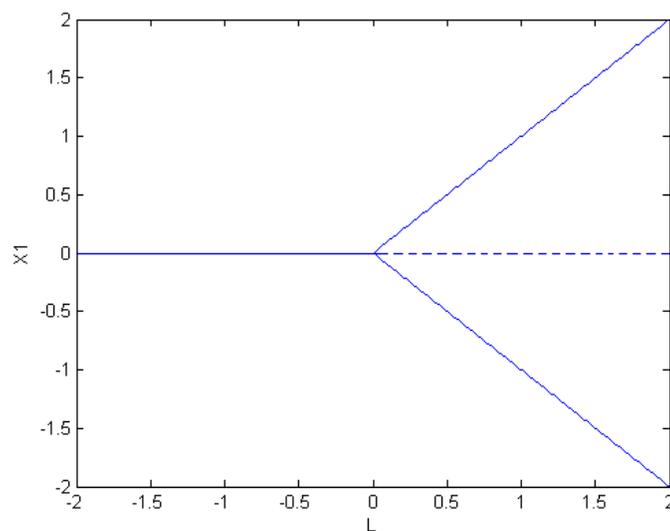


Figura 20. Diagrama de bifurcación de puntos de equilibrios.

Dependiendo de los valores de L y ζ y considerando una entrada $r(t) = 0$, el sistema (64) puede presentar diversos comportamientos. En la figura 21 se ilustran todos los posibles comportamientos dinámicos que puede exhibir el sistema (64). En la figura 21 se observa

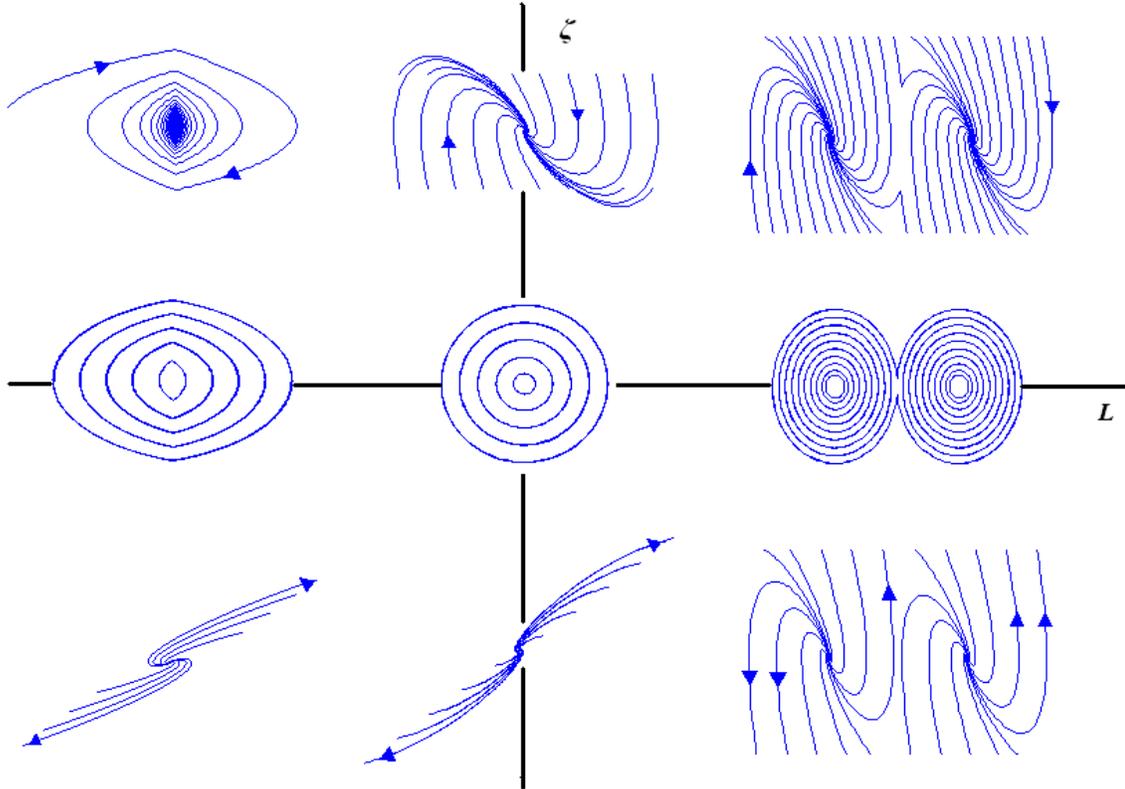


Figura 21. Comportamiento del sistema con $r(t) = 0$.

que para $L > 0$ y $\zeta = 0$ el sistema tiene 3 puntos de equilibrio: dos centros y un punto silla situado en el origen, además es posible que exista una órbita homoclínica asociada al punto silla. Bajo este escenario, si el sistema es perturbado con una excitación periódica externa se pueden generar dinámicas mucho más complicadas. El estudio de estas dinámicas es realizada en el capítulo IV.

III.3 Bifurcaciones de órbitas periódicas

Los sistemas dinámicos seccionalmente diferenciables (SSD) pueden exhibir diversos fenómenos de bifurcación que son únicos debido a la naturaleza discontinua de dichos sistemas. Una de estas bifurcaciones es la llamada bifurcación de pasedura, la cual ocurre cuando una trayectoria del sistema golpea tangencialmente alguna superficie de discontinuidad en el espacio de estados. Tal bifurcación origina una amplia variedad de transiciones como por ejemplo cascadas de duplicación de periodo y cambios abruptos de una órbita periódica a un atractor caótico (de Weger *et al.*, 1996), (Nordmark, 1991).

Con el fin de clasificar estas transiciones complejas, en la literatura (ej. (di Bernardo *et al.*, 2008)), se propone obtener un mapeo adecuado que describa el comportamiento del sistema en una vecindad del punto de bifurcación de pasedura. Si el mapeo obtenido es seccionalmente lineal, entonces sus bifurcaciones pueden ser estudiadas empleando la teoría de *colisiones de fronteras de puntos de equilibrio* desarrollada originalmente por Feigin (Feigin, 1970) y retomada en (di Bernardo *et al.*, 2002). Los mapeos seccionalmente lineales solo pueden derivarse cuando la superficie de discontinuidad no es suave, lo cual se comprueba en (di Bernardo *et al.*, 2001b), y es precisamente bajo este escenario que se puede aplicar la estrategia de clasificación de Feigin.

Para el caso en que se tiene un superficie de discontinuidad suave, que es el caso del sistema (64), el comportamiento del sistema cerca del punto de pasedura está descrito por mapeos no lineales que incluyen alguna singularidad de la forma $\sqrt{(\cdot)}$ o $\sqrt{(\cdot)^3}$. Estos mapeos son esenciales para comprender y clasificar los escenarios de bifurcación que se presentan después de una bifurcación de pasedura, sin embargo una clasificación completa de la dinámica asociada a dichos mapeos permanece como un problema abierto de investigación (di Bernardo *et al.*, 2001b).

En esta sección se pretende estudiar los escenarios de bifurcación de órbitas periódicas del sistema (64). Se considerarán dos casos: el primero donde $r(t) = 0$ y para este caso se

demostrará que el sistema no tiene soluciones periódicas. El segundo caso considera una entrada periódica de la forma general $r(t) = R\text{sen}(\omega t) + R_c$. Finalmente se ilustran algunos diagramas de bifurcación que muestran el comportamiento del sistema.

III.3.1 Existencia de órbitas periódicas del sistema autónomo.

Considere el sistema en lazo cerrado mostrado en la figura 22, donde $G(s)$ es la función de transferencia dada por la ecuación (63). La representación en variables de estado del sistema de la figura 22 está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\in x_2 \\ \dot{x}_2 &\in -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + \omega_n^2 (-L\text{Sign}(x_1) + r(t)) \end{aligned} \quad (73)$$

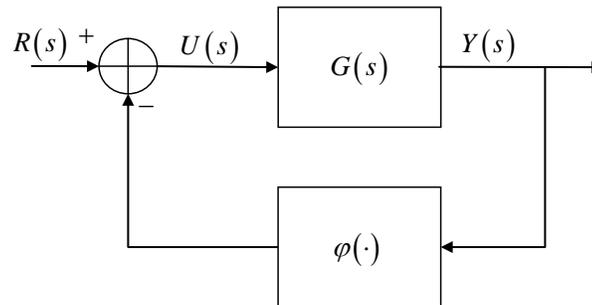


Figura 22. Sistema en lazo cerrado con retroalimentación negativa.

Se desea predecir la existencia de una oscilación periódica de este sistema para una entrada $r(t) = 0$, el sistema autónomo resultante está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\in x_2 \\ \dot{x}_2 &\in -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 - \omega_n^2 (L\text{Sign}(x_1)) \end{aligned} \quad (74)$$

Aplicando el método de la función descriptiva, ver sección II.1.3, se obtiene que si la condición (75) se cumple, entonces existe una oscilación periódica $y(t) = B\text{sen}(\omega t)$ donde B es

la amplitud y ω es la frecuencia.

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(B)} \quad (75)$$

La función descriptiva del bloque no lineal $\varphi = \rho \text{Sign}(y(t))$ está dada por la siguiente ecuación:

$$N(B) = \frac{4\rho}{\pi B} \quad (76)$$

La ecuación (75) se puede resolver gráficamente encontrando la intersección entre las curvas de $G(j\omega)$ y $-1/N(B)$. En la figura 23 se ilustran las gráficas de $G(j\omega)$ con los valores fijos $\omega_n = 1$, $K = 1$ diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento ζ . También se muestra el diagrama de $-1/N(B)$ para $\rho = 1$ y B variable.

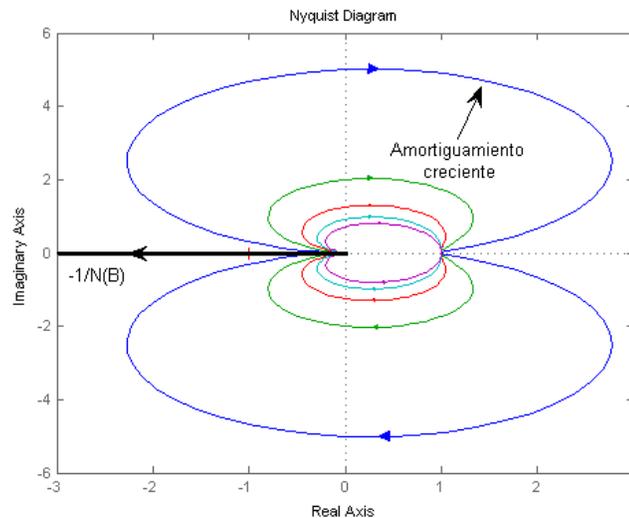


Figura 23. Diagrama de Nyquist.

La única intersección entre las curvas $G(j\omega)$ y $-1/N(B)$ es el origen del plano complejo, el cual corresponde a un valor $B = 0$ de la amplitud de salida; en consecuencia, el sistema (74) no presenta una oscilación periódica a la salida del sistema cuando $r(t) = 0$.

Ahora se analizará el caso con retroalimentación positiva, con este cambio, el sistema tiene tres puntos de equilibrio como se observó en la sección III.2. Las ecuaciones de estado

resultantes están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\in x_2 \\ \dot{x}_2 &\in -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + \omega_n^2 (L\text{Sign}(x_1) + r(t)) \end{aligned} \quad (77)$$

Para una entrada $r(t) = 0$, es fácil comprobar que la condición para la existencia de una órbita periódica está dada por:

$$G(j\omega) = \frac{1}{N(B)} \quad (78)$$

Las curvas de Nyquist de $G(j\omega)$ y $\frac{1}{N(B)}$ se grafican en la figura 24, el punto de intersección corresponde a $\omega = 0$ y $B = 4K\rho/\pi$. Este punto representa un punto de equilibrio del sistema, sin embargo, es solo una aproximación ya que los puntos de equilibrio del sistema (77) son $\bar{x}_{(1)} = (0, 0)$, $\bar{x}_{(2,3)} = (\pm K\rho, 0)$.

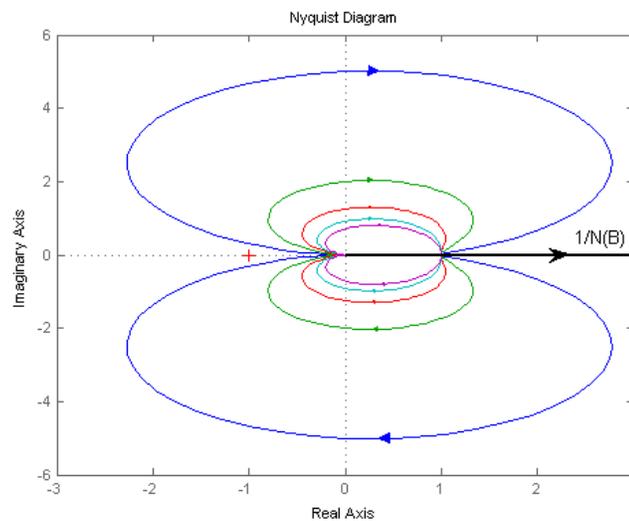


Figura 24. Diagrama de Nyquist.

III.3.2 Bifurcaciones de órbitas periódicas del sistema con una entrada senoidal.

La ecuación diferencial que se ha estado estudiando durante el capítulo está dada por

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x = \beta \text{Sign}(x) + \tilde{r}(t) \quad (79)$$

donde $\delta = 2\zeta\omega_n$, $\alpha = \omega_n^2$, $\beta = \omega_n^2 L$ y $\tilde{r}(t) = \omega_n^2 r(t)$. Considerando que para $x \neq 0$ la ecuación diferencial (79) se puede resolver para $x > 0$ y $x < 0$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x &= \beta + \tilde{r}(t) & x > 0 \\ \ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x &= -\beta + \tilde{r}(t) & x < 0 \end{aligned} \quad (80)$$

o bien, de una manera más general se puede resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x = \pm\beta + \tilde{r}(t) \quad (81)$$

Bajo la suposición de que los valores propios λ de la parte homogénea de la ecuación (81) son valores complejos conjugados

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\alpha}}{2} \quad (82)$$

la solución de la parte homogénea está dada por

$$\begin{aligned} x_h(t) &= e^{-\frac{\delta}{2}t} (C_1 \cos(vt) + C_2 \text{sen}(vt)) \\ v &= \frac{\sqrt{4\alpha - \delta^2}}{2} \end{aligned} \quad (83)$$

Se propone una entrada de la forma $r(t) = R \text{sen}(\omega t) + R_c$ donde R y R_c son constantes, además se tiene que $\tilde{r}(t) = \omega_n^2 r(t) = \tilde{R} \text{sen}(\omega t) + \tilde{R}_c$. Mediante el método de los coeficientes indeterminados es posible encontrar la solución particular de (81). Se propone la siguiente solución particular:

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t) + A_1 \text{sen}(\omega t) + A_2 \quad (84)$$

Obteniendo las derivadas $\dot{x}_p(t)$ y $\ddot{x}_p(t)$ y sustituyendo en la ecuación (81) se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} -A_0(\alpha - \omega^2) + A_1\delta\omega &= 0 \\ -A_0\delta\omega + A_1(\alpha - \omega^2) &= R \\ \alpha A_2 &= \pm\beta + \tilde{R}_c \end{aligned} \quad (85)$$

de donde se obtiene los valores para A_0 , A_1 y A_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= \pm L + R_c \\ A_1 &= \frac{\tilde{R}(\alpha - \omega^2)}{(\alpha - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2} \\ A_0 &= -\frac{\tilde{R}\delta\omega}{(\alpha - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2} \end{aligned} \quad (86)$$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial (81) está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\delta}{2}t} (C_1 \cos(vt) + C_2 \text{sen}(vt)) + A_0 \cos(\omega t) + A_1 \text{sen}(\omega t) + A_2 \\ \dot{x}(t) &= e^{-\frac{\delta}{2}t} \left(\cos(vt) \left(-\frac{\delta}{2}C_1 + C_2v \right) + \text{sen}(vt) \left(-\frac{\delta}{2}C_2 - C_1 \right) \right) \\ &\quad - A_0\omega \text{sen}(\omega t) + A_1\omega \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (87)$$

considerando condiciones iniciales $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$, entonces las constantes C_1 y C_2 están dadas por

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0^1 - A_0 - A_2 \\ C_2 &= \frac{1}{v} \left(\frac{\delta}{2}x_0^1 + x_0^2 - A_1\omega - \frac{\delta}{2}(A_0 + A_2) \right) \end{aligned} \quad (88)$$

De la ecuación (87) se observa que la solución es una órbita periódica (excluyendo la respuesta transitoria) que evoluciona alrededor del punto $A_2 = \pm L + R_c$, en donde $\pm L$ son los equilibrios del sistema, ver sección III.2. El parámetro R_c indica la robustez del sistema. Si $L + R_c \gg (A_0 + A_1)/\sqrt{2}$, la órbita periódica se alejará de la superficie de discontinuidad y no ocurrirá ningún fenómeno de bifurcación, mucho menos comportamiento caótico. Esto se puede resumir en la figura 25.

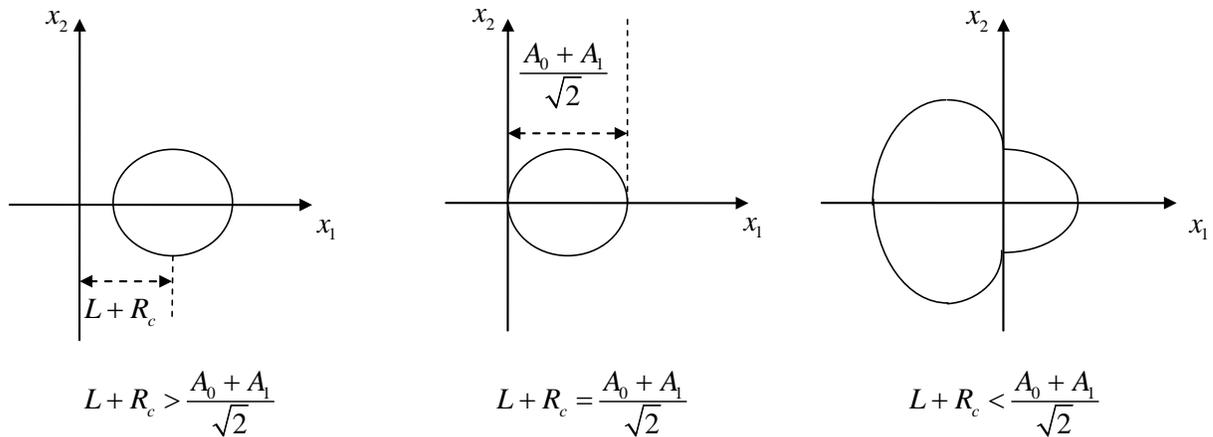


Figura 25. Condiciones para la existencia de una bifurcación de pagedura.

Se realiza un diagrama de bifurcación para explorar los diferentes comportamientos que ocurren cuando la órbita periódica interacciona con la superficie de discontinuidad. Se toma como parámetro de bifurcación el valor R_c , el cual es el valor de corriente directa de la entrada $r(t)$. Además se consideran los siguientes valores paramétricos $\alpha = 193.95$, $\delta = 2.25$, los cuales son valores reales correspondientes a un sistema masa-resorte-amortiguador (ver sección V.1). Para el control se tiene $\rho = 1$, $r(t) = 1.2\text{sen}(\omega t) + R_c$, donde $\omega = 2\pi f$ y $f = 2.7552$ Hz. Los valores de α y δ son valores aproximados del sistema mecánico y se tiene una cierta incertidumbre, por tal motivo se espera que los resultados numéricos no sean iguales a los resultados experimentales. Para las simulaciones numéricas se empleó MATLAB, se utilizó el algoritmo de integración ode15s y se muestreo el estado $x_1 = x$ a un periodo de muestreo $T = 2\pi/\omega$, igual al periodo de la señal de entrada, de esa forma se puede captar toda la dinámica del sistema en el diagrama de bifurcación. En la figura 26 se muestra el diagrama de bifurcación numérico.

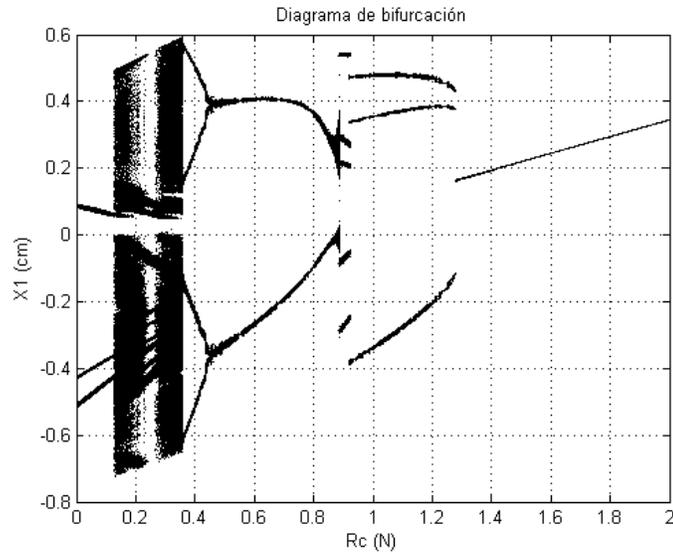


Figura 26. Diagrama de bifurcación numérico.

El diagrama de bifurcación muestra que existe una órbita periódica de periodo 1 (es decir, tiene periodo $T = 2\pi\omega$) para $R_c > 1.28 N$ aprox. Cuando $R_c = 1.28$, la órbita periódica toca tangencialmente la superficie de discontinuidad y está a punto de sufrir una bifurcación de pacerura (grazing, en inglés). Como se mencionó a principios del capítulo, es difícil clasificar los escenarios de bifurcación que ocurren después de una bifurcación de pacerura, en parte por que no existe una teoría general para lograrlo. Por el momento, sólo es posible observar las complejas transiciones que se observan en el diagrama de bifurcación.

Para un intervalo de valores $0.919N < R_c < 1.28N$, se observa que la órbita periódica de periodo 1 desaparece y se origina una nueva órbita periódica de periodo 3. Debido a la discontinuidad del sistema, se destaca que la transición entre la órbita 1-periódica y la órbita 3-periódica no es suave. Experimentalmente se obtuvo la órbita 3-periódica, véase la figura 27 para una entrada $r(t) = 1.25\text{sen}(2\pi(2.7552)t) + 1.5$, el valor de $R_c = 1.5N$, el cual se aleja un poco del alcance de valores mostrado en el diagrama de bifurcación. Este error es atribuido a las incertidumbres paramétricas del sistema mecánico.

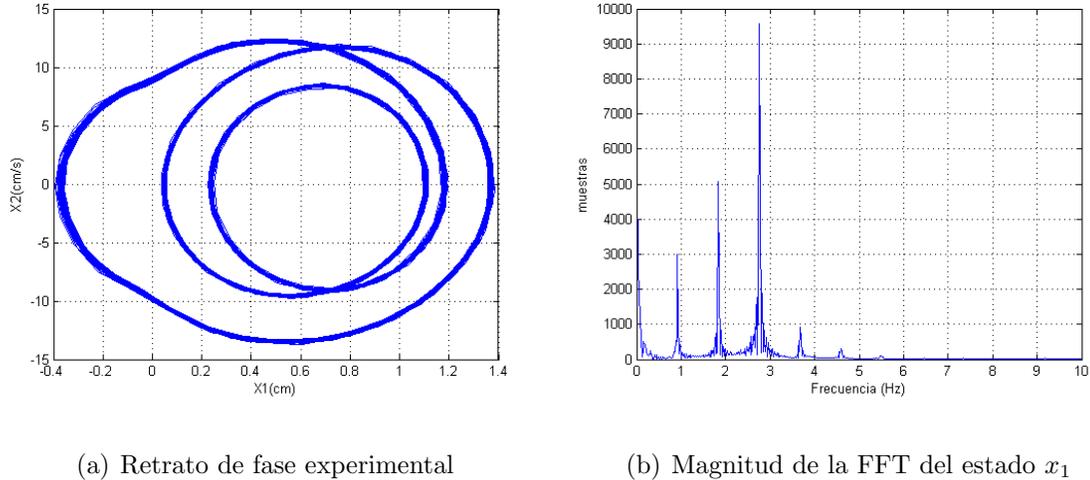


Figura 27. Órbita 3-periódica.

En el espectro de Fourier de la figura 27 se observa la aparición de 3 armónicas de frecuencia 0.9184 Hz., 1.8368 Hz. y 2.7552 Hz. (frecuencia fundamental), lo que indica que la órbita es de periodo 3. Una de las propiedades fundamentales de la teoría del caos es que si una función presenta un punto periódico de orden tres, entonces presentará puntos periódicos de cualquier orden. Esta propiedad fue descubierta por Li y Yorke (Tien-Yien y Yorke, 1975) a partir del trabajo original de Sharkovskii, el cual se resume a continuación: En 1974, A.N. Sharkovskii introdujo un ordenamiento para los números enteros positivos:

$$\begin{aligned}
 & 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, (2n + 1) \cdot 2^0, \dots \\
 & 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 9 \dots, (2n + 1) \cdot 2^1, \dots \\
 & 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, \dots, (2n + 1) \cdot 2^2, \dots \\
 & 2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, \dots, (2n + 1) \cdot 2^3, \dots \\
 & \vdots \\
 & \dots, 2^n, \dots, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1.
 \end{aligned} \tag{89}$$

Mediante el ordenamiento (89) se describe la coexistencia de puntos de diferentes periodo para un sistema dinámico discreto $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $y \in \mathbb{R}$ se llama punto periódico de f si se cumple que $f^n(y) = y$, donde n es la n -ésima iteración de f .

El teorema establecido por Sharkovskii establece que si existe un punto de cierto periodo p , debe de existir un punto de periodo q con $p < q$ en la secuencia de Sharkovskii (Guckenheimer y Holmes, 1983, pág. 311). Tiempo después Li y Yorke (Tien-Yien y Yorke, 1975) descubrieron que si un sistema dinámico discreto $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ presenta un punto de periodo tres, entonces deben de existir puntos de todos los periodos. El teorema de Sharkovskii no establece la estabilidad de los puntos periódicos, así que los puntos periódicos pueden ser estables o inestables.

El teorema de Sharkovskii no se puede aplicar directamente a cualquier otro sistema dinámico, además de que se requiere que la función f sea diferenciable por lo que no es aplicable a sistemas no diferenciables. Se ha investigado sobre la posibilidad de extender los resultados a una clase más amplia de mapeos (discontinuos, multi-evaluados (Andres *et al.*, 2002), aleatorios (Kluenger, 2001), etc.), y a sistemas de mayores dimensiones. Todos estos estudios han llevado a la aparición de una nueva sección en las matemáticas llamada *Dinámica Combinacional*.

En el diagrama de bifurcación de la figura 26 se observa una órbita 3-periódica y es interesante remarcar su existencia por todo lo que se ha comentado anteriormente.

Para los valores $0.8882N < R_c < 0.919N$, la órbita 3-periódica se convierte en una órbita 5-periódica. Una vez más, la transición no es suave. El alcance de valores de R_c en donde existe la órbita 5-periódica es muy pequeño y no se encontró de manera experimental.

Para el intervalo de valores $0.45N < R_c < 0.8882N$, la órbita 3-periódica desaparece y aparece un órbita 2-periódica, ver figura 28 en donde se muestra una órbita 2-periódica para $r(t) = 1.25\text{sen}(2\pi(2.7552)t) + 0.46$. Cuando el parámetro decrece por debajo del valor $R_c < 0.45N$, se origina una órbita 4-periódica, esto ocasiona una duplicación de periodo inversa.

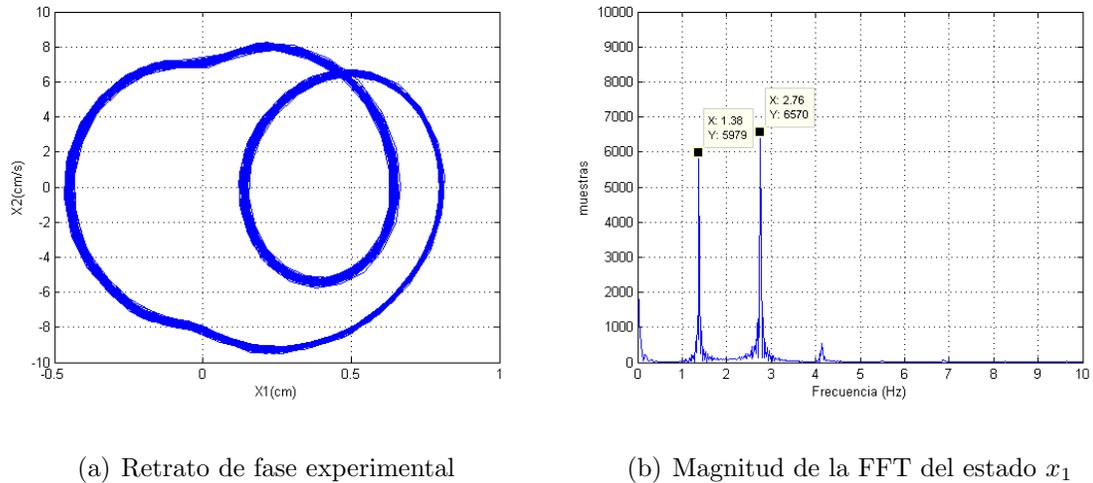


Figura 28. Órbita 2-periódica.

La órbita 4-periódica se mantiene hasta llegar a un valor del parámetro $R_c = 0.36$ en donde la órbita periódica explota repentinamente en un atractor caótico. En la figura 29 se ilustra el retrato de fase experimental para una entrada $r(t) = 1.25\text{sen}(2\pi(2.7552)t) + 0.299$.

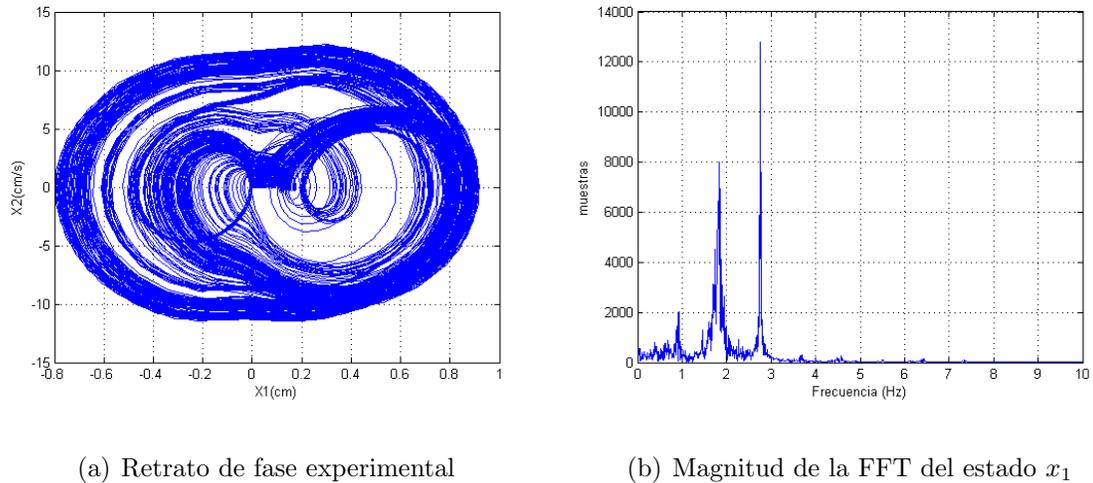


Figura 29. Órbita caótica.

III.4 Conclusiones

Por lo general, para estudiar la dinámica de un sistema primero se estudian sus soluciones más sencillas (puntos de equilibrio) y después se va aumentando el grado de complejidad

(órbitas periódicas y caóticas). En este capítulo se estudiaron los puntos de equilibrio del sistema bajo estudio y se observó el comportamiento de los mismos cuando se varió un parámetro del sistema. Esto permitió identificar el escenario, en el cual, existe la posibilidad de encontrar una órbita homoclínica. A partir de este punto, se puede desarrollar el estudio de la dinámica caótica mediante el uso del método de Melnikov que será el tema de estudio del siguiente capítulo.

Para el caso de las bifurcaciones de órbitas periódicas solamente se ilustró el diverso comportamiento que ocurre cuando una órbita periódica interacciona con la superficie de discontinuidad. Estos fenómenos ya han sido estudiados en diversos trabajos, principalmente en (di Bernardo *et al.*, 2008), pero como ya se ha mencionado, todavía se carece de una clasificación completa.

Mediante experimentos con el sistema mecánico y con simulaciones numéricas se exploraron los fenómenos de bifurcaciones de órbitas periódicas del sistema. Se observó la presencia de una órbita 3-periódica, esta órbita es de particular interés debido al descubrimiento de Li y Yorke (Tien-Yien y Yorke, 1975), el cual se puede resumir en el lema: *periodo 3 implica caos*. Sin embargo, los resultados de Li y Yorke se aplican a sistemas dinámicos discretos y diferenciables por lo que en este caso no se puede decir que la existencia de la órbita 3-periódica implica la existencia de órbitas de todos los periodos.

Capítulo IV

ESTUDIO DE LA DINÁMICA CAÓTICA

La mayoría de los métodos actuales para el estudio de la dinámica de un sistema suponen que el campo vectorial del sistema es diferenciable, por lo general hasta un cierto orden r . Uno de estos métodos es el de Melnikov para órbitas homoclínicas, el cual es uno de las pocos métodos analíticos que existen para predecir la dinámica caótica. Sin embargo, el campo vectorial del sistema planteado en este trabajo de tesis no es diferenciable, y por consecuencia no es posible aplicar este método. Por tal motivo, se propone aproximar la discontinuidad dada por $\text{sign}(x_1)$, por una función continua y diferenciable. También se propone realizar una comparación numérica para observar si se obtienen resultados similares.

IV.1 Aproximación de la discontinuidad empleando una función diferenciable.

Se consideran dos aproximaciones de la función signo: una función tangente hiperbólica y una función saturación. La función tangente hiperbólica es continua y diferenciable y su elección como aproximación del signo parece, a primera vista, más razonable que la elección de la función saturación. Sin embargo, si se emplea la función tangente hiperbólica, el cálculo de la órbita homoclínica (necesaria para aplicar el método de Melnikov, ver sección II.1.4) se vuelve demasiado complejo. Por su parte, el uso de la función saturación facilita los cálculos matemáticos.

Las simulaciones numéricas fueron realizadas en MATLAB y se simuló la respuesta de tres sistemas diferentes. El tiempo de simulación fue de 400 segundos con un paso de integración de $\Delta t = 0.008$ seg. Ahora bien, considere los ejemplos hipotéticos dados por las

siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 0.15x_2 + \text{sign}(x_1) \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{90}$$

donde $\text{sign}(0) = 0$ (En MATLAB se define $\text{sign}(0) = 0$). Utilizando la función tangente hiperbólica el sistema (90) se reescribe como:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= -2w_1 - 0.15w_2 + \tanh(\eta w_1) \\ y &= w_1\end{aligned}\tag{91}$$

con $\eta = 1 \times 10^5$. Reescribiendo (90) utilizando la función saturación se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 - 0.15z_2 + \text{sat}(b, z_1) \\ y &= z_1\end{aligned}\tag{92}$$

con $b = 1 \times 10^{-5}$ y $\text{sat}(b, z_1)$ es la ecuación general de la saturación dada por

$$\text{sat}(b, x_1) = \frac{1}{2b} (|x_1 + b| - |x_1 - b|)\tag{93}$$

el valor del parámetro b define la pendiente de la parte lineal de la saturación. En las figuras 30(a) y 30(b) se ilustra la función (93) para los valores de $b = 1$ y $b = 1 \times 10^{-10}$ respectivamente.

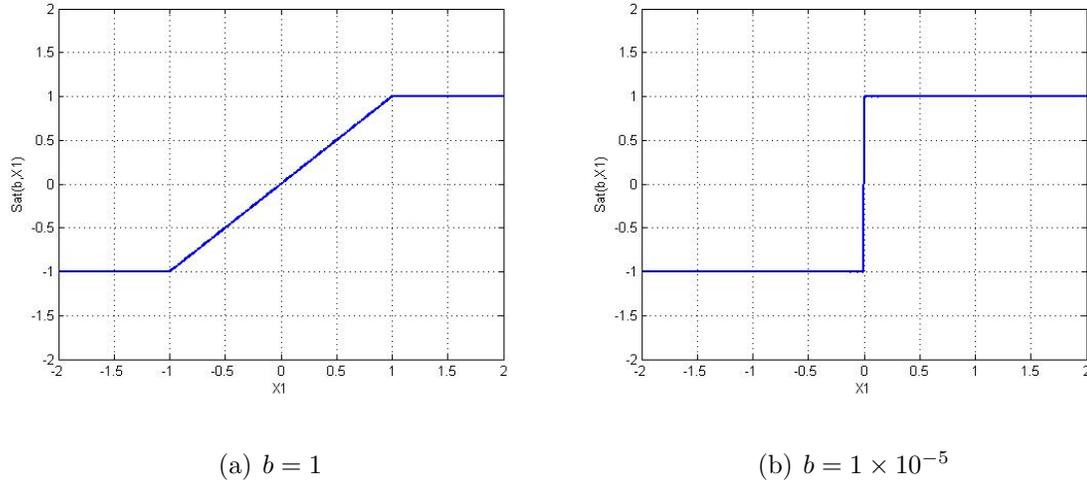


Figura 30. Funciones saturación.

En las figura 31 se ilustran las funciones tangente hiperbólica para los valores de $\eta = 1$ y $\eta = 1 \times 10^5$ correspondientemente.

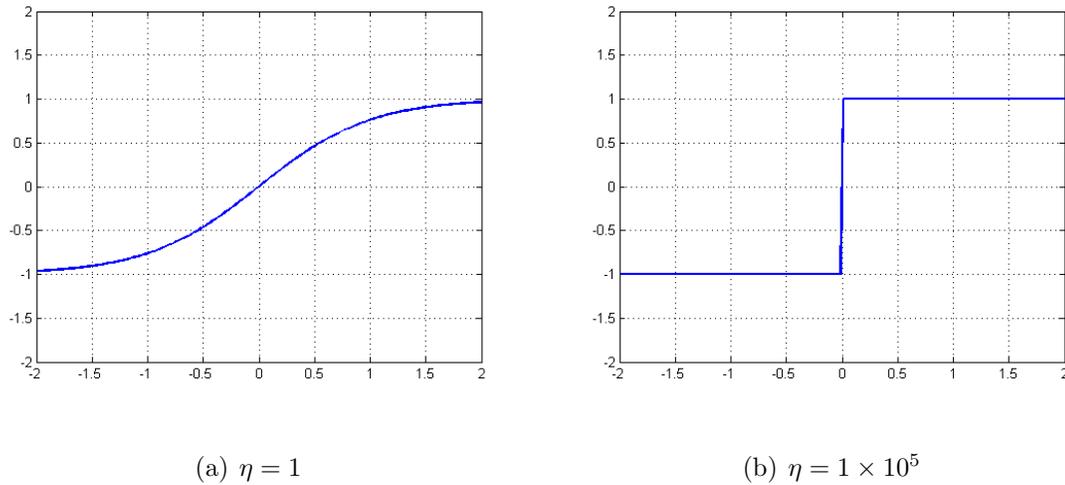
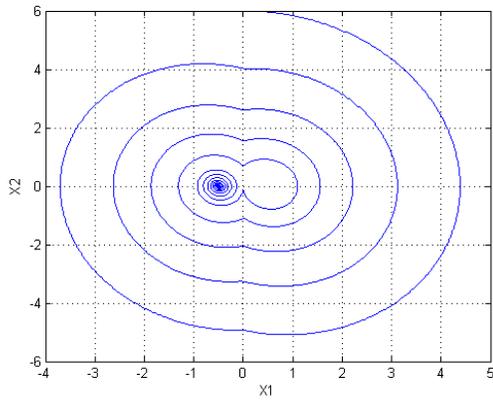


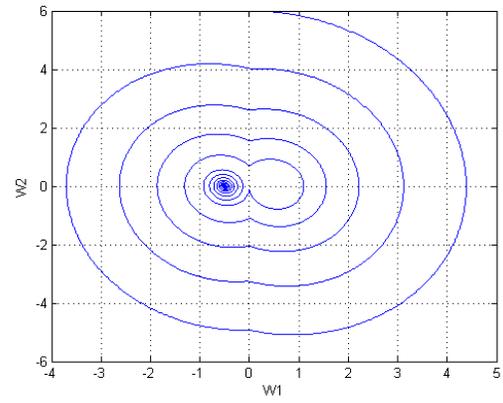
Figura 31. Funciones tangente hiperbólica.

Una vez definidos los sistemas y los parámetros de simulación, el siguiente paso es simular y realizar las comparaciones entre las respuestas de los sistemas (90), (91) y (92). Primero se ilustran los retratos de fase de los tres sistemas para una condición inicial $x_0 = (0.01, 6)$, los cuales son mostrados en la figura 32.

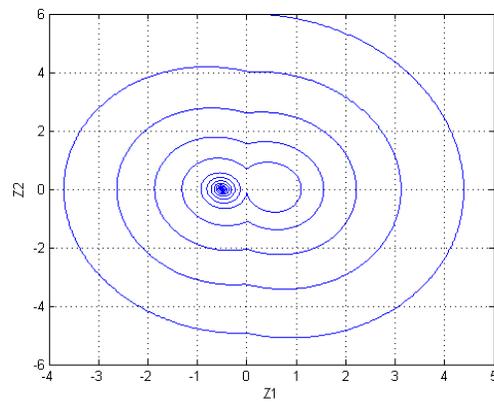
Se observa que el comportamiento entre los tres sistemas es muy semejante y que el error es muy pequeño. En la figura 33(a) se muestra el error entre el estado x_1 , corres-



(a) Signo



(b) Tangente hiperbólica



(c) Saturación

Figura 32. Retratos de fase de los sistemas (90), (91) y (92) para $x_0 = (0.01, 6)$.

pondiente al sistema con la función signo, y w_1 , correspondiente al sistema con la función tangente hiperbólica. En la figura 33(b) se muestra el error entre el estado x_1 y el estado z_1 , correspondiente al sistema con la función saturación.

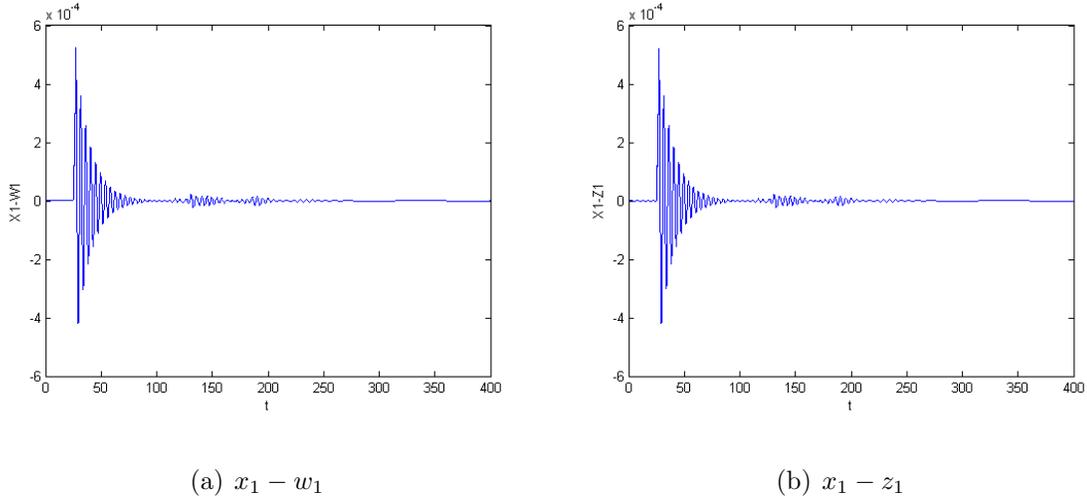


Figura 33. Errores de posición.

Las gráficas de las figuras 33(a) y 33(b) parecen ser idénticas, sin embargo no lo son. El error entre los estados w_1 y z_1 se muestra en la figura 34.

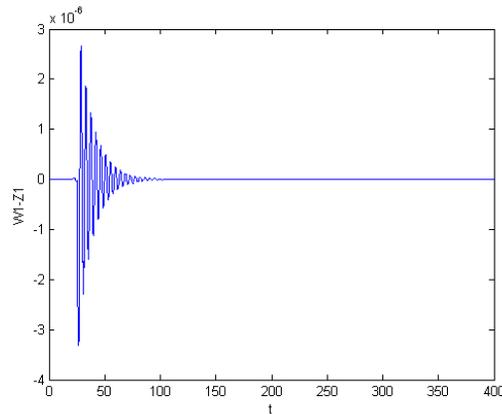


Figura 34. Error de posición. $w_1 - z_1$.

Se concluye que las funciones tangente hiperbólica y saturación son una buena aproximación de la función signo. Sin embargo, con el uso de la función tangente hiperbólica se complica el cálculo de la órbita homoclínica, la cual es necesaria para aplicar el método

de Melnikov. Por eso se prefiere emplear la función saturación para la realización de los cálculos que se presentan en la siguiente sección.

IV.2 Estudio del comportamiento caótico

En esta sección se aplica el método de Melnikov para analizar el efecto de una perturbación de la forma $r(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$ al sistema (64). Sin embargo, este sistema es discontinuo en $x_1 = 0$, lo cual no satisface la condición de diferenciabilidad para aplicar la teoría. Es por esta razón que se propone realizar el estudio reemplazando la función $\operatorname{sign}(x_1)$ por una aproximación. La función propuesta es una función saturación con una alta pendiente de la parte lineal. Esta aproximación se propuso a partir del trabajo Curiel y Álvarez (1997) y se prefirió sobre otras aproximaciones para facilitar los cálculos matemáticos.

Con esta aproximación el sistema (64) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 - \tilde{\delta} x_2 + \beta \operatorname{sat}(b, x_1) + \hat{A} \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (94)$$

donde $\alpha = \omega_n^2$, $\beta = K\rho\omega_n^2$, $\delta = 2\zeta\omega_n$, $\hat{A} = K\omega_n^2 A$. Los puntos de equilibrio del sistema (94) satisfacen la expresión (95).

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{sat}(b, x_1) \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

Los puntos de equilibrio del sistema (94) se resumen en la tabla (I).

Para aplicar el método de Melnikov, el retrato de fase del sistema (94) debe cumplir ciertas condiciones, ver sección II.1.4, lo cual sólo es posible si se satisface la relación

$$b < \frac{\beta}{\alpha} \quad (96)$$

lo cual no es problema si el parámetro b se hace pequeño. También nótese que $\beta/\alpha = L$, como se vio en la sección III.2.

Tabla I. Equilibrios del sistema cuando se utiliza la función saturación.

Condiciones	Equilibrios
$b < \frac{\beta}{\alpha}$	3 equilibrios: $\bar{x}_{(1)} = (0, 0)$, $\bar{x}_{(2,3)} = (\pm\beta/\alpha, 0)$
$b = \frac{\beta}{\alpha}$	intervalo de equilibrios: $\bar{x} = [-b, b]$
$b > \frac{\beta}{\alpha}$	1 equilibrio en el origen

Ahora se aplicará la teoría de Melnikov discutida en la sección II.1.4. El sistema (94) se expresa como:

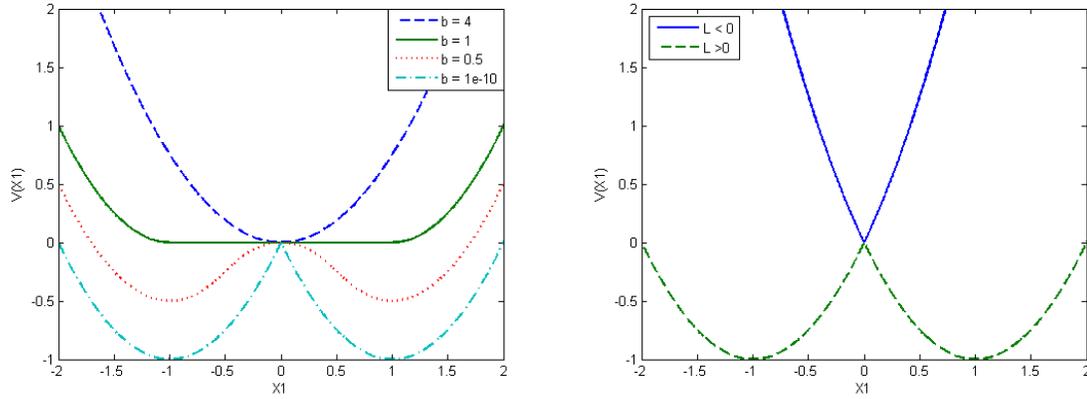
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 + \beta \text{sat}(b, x_1) + \varepsilon \left(-\tilde{\delta} x_2 + \tilde{A} \text{sen}(\omega t) \right) \end{aligned} \quad (97)$$

donde $\tilde{\delta} = \delta/\varepsilon$ y $\tilde{A} = \hat{A}/\varepsilon$.

Lo primero es encontrar una ecuación en función del tiempo para las órbitas homoclínicas que se puede obtener a partir de la ecuación diferencial del Hamiltoniano. El Hamiltoniano del sistema (97) está dado por la expresión (98).

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1) \\ V(x_1) &= \begin{cases} \frac{\alpha x_1^2}{2} + \beta \left(x_1 + \frac{b}{2}\right) & x_1 < -b \\ \frac{\alpha x_1^2}{2} - \frac{\beta}{2b}x_1^2 & |x_1| \leq b \\ \frac{\alpha x_1^2}{2} - \beta \left(x_1 - \frac{b}{2}\right) & x_1 > b \end{cases} \end{aligned} \quad (98)$$

En las figuras 35(a) y 35(b) se ilustran las funciones de potencial empleando la función saturación y la función signo correspondientemente. Se tomaron los valores $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. En estas figuras se aprecia el comportamiento, el cual se resume en la tabla (I), de los puntos de equilibrio del sistema (94) cuando se varia la pendiente de la saturación mediante el parámetro b . Se observa que cuando $b \rightarrow 0$, las funciones de potencial tienden a ser iguales, con la diferencia de que la función de potencial de la figura 35(b) no es derivable en $x_1 = 0$.



(a) Función de potencial del sistema empleando la saturación. (b) Función de potencial empleando la función signo.

Figura 35. Funciones de potencial.

Para calcular la órbita homoclínica $x^{h+}(t)$ correspondiente al semiplano derecho del espacio de estados se debe resolver la ecuación diferencial que satisface $H(x) = 0$. El procedimiento se detalla en el apéndice (A).

$$\begin{aligned}
 x_1^{h+}(t) &= \begin{cases} be^{k_1(t-t_1)} & t < t_1 \\ L + k_2 \cos(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ be^{-k_1(t-t_2)} & t > t_2 \end{cases} \\
 x_2^{h+}(t) &= \begin{cases} bk_1 e^{k_1(t-t_1)} & t < t_1 \\ -\sqrt{\alpha}k_2 \text{sen}(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -bk_1 e^{k_1(t-t_2)} & t > t_2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{99}$$

donde $L = \beta/\alpha$, $k_1 = \sqrt{\beta/b - \alpha}$, $k_2 = \sqrt{\beta(\beta - \alpha b)}/\alpha$, $t_1 = 1/\alpha \arccos((b - L)/k_2)$ y $t_2 = -t_1$. Si se hace que $b \rightarrow 0$, lo cual corresponde a aproximar la saturación a una función

signo, entonces la órbita homoclínica (99) se reduce a:

$$\lim_{b \rightarrow 0} x_1^h(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ L(1 + \cos(\sqrt{\alpha}t)) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t > t_2 \end{cases} \quad (100)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} x_2^h(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ -\sqrt{\alpha}L \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t > t_2 \end{cases}$$

con $t_1 = -\pi/\sqrt{\alpha} = -t_2$. De manera similar se obtiene la ecuación de la órbita homoclínica $x^{h-}(t)$ del semiplano izquierdo, la cual está dada por

$$x_1^{h-}(t) = \begin{cases} -be^{k_1(t-t_1)} & t < t_1 \\ -L - k_2 \cos(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -be^{-k_1(t-t_2)} & t > t_2 \end{cases} \quad (101)$$

$$x_2^{h-}(t) = \begin{cases} -bk_1 e^{k_1(t-t_1)} & t < t_1 \\ \sqrt{\alpha}k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ bk_1 e^{k_1(t-t_2)} & t > t_2 \end{cases}$$

En las figuras 36(a), 36(b) y 36(c) se observan las órbitas homoclínicas correspondientes a los valores $b = 0.5$, $b = 1$ y $b = 1 \times 10^{-5}$.

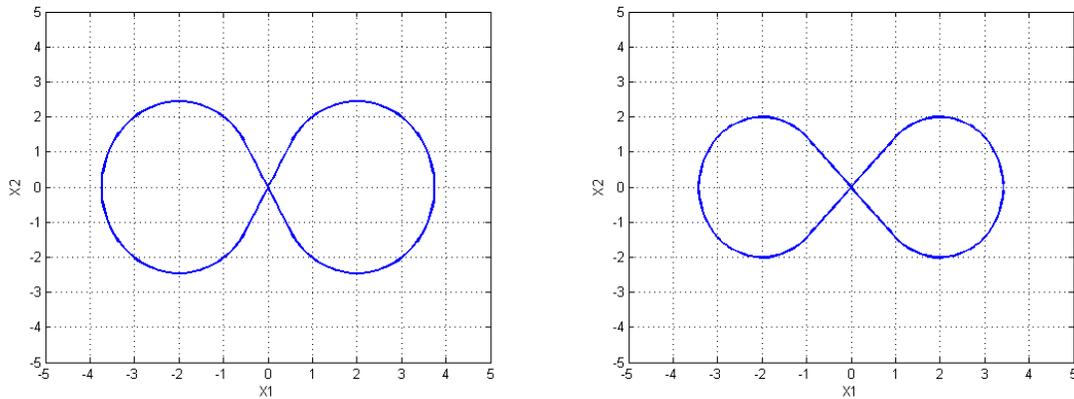
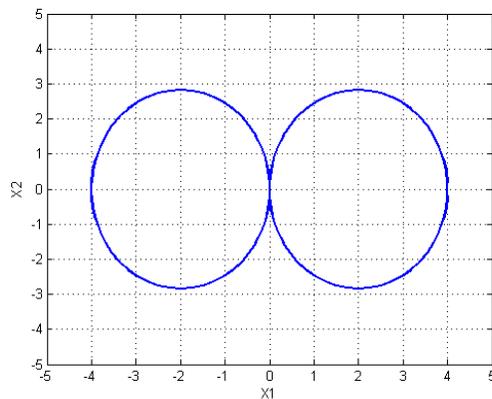
(a) $b = 0.5$ (b) $b = 1$ (c) $b = 1 \times 10^{-5}$

Figura 36. Órbitas homoclínicas.

Una vez obtenida una expresión analítica para las órbitas homoclínicas del sistema (94), el siguiente paso consiste en encontrar la función de Melnikov. De acuerdo con la ecuación (100) la órbita homoclínica tiene una duración finita, como se ilustra en la figura (36(c)). Por tanto, la integral de Melnikov es diferente de cero para el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ y cero para cualquier otro tiempo.

Desarrollando la integral de Melnikov (32) para el tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$M(t_0) = \int_{t_1}^{t_2} x_2^{h\pm}(t) \left(-\tilde{\delta}x_2^{h\pm}(t) + \tilde{A} \operatorname{sen}(\omega(t+t_0)) \right) dt \quad (102)$$

Para la evaluación de la función de Melnikov se puede tomar $x_2^{h+}(t)$ o $x_2^{h-}(t)$. Calculando

(102) y posteriormente derivando con respecto a t_0 se obtiene (el procedimiento se detalla en el apéndice B):

$$\begin{aligned} M(t_0) &= C_1 \cos(\omega t_0) + C_2 \\ \frac{\partial M(t_0)}{t_0} &= -\omega C_1 \operatorname{sen}(\omega t_0) \end{aligned} \quad (103)$$

donde $C_1 = \frac{2\tilde{A}\beta}{\omega^2 - \alpha} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{\alpha}}\right)$ y $C_2 = -\frac{\delta\beta^2\pi}{(\alpha)^{3/2}}$.

Para que la función de Melnikov tenga ceros se debe satisfacer que $|C_1| > |C_2|$. Ya que las ecuaciones (103) cumplen con el teorema (3), entonces para una perturbación lo suficientemente pequeña ε , la ecuación (104) da condiciones suficientes para que el sistema (94) presente un comportamiento caótico cuando se hace que el parámetro de la saturación $b \rightarrow 0$.

$$|\varsigma| \leq \left| \frac{A\omega_n^2}{\rho\pi(\omega^2 - \omega_n^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\omega_n}\right) \right| \quad (104)$$

La ecuación (104) se puede normalizar de la siguiente forma:

$$1 \leq \frac{|\sigma(\theta)|}{|\varsigma|} \quad (105)$$

en donde

$$\sigma(\theta) = \frac{A\omega_n^2}{\rho\pi(\omega^2 - \omega_n^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\omega_n}\right) \quad (106)$$

y $\theta = (A, \omega, \omega_n, \rho) \in \mathbb{R}^4$.

Si $\omega = \omega_n$ en la ecuación (106) se obtiene una indeterminación del tipo 0/0. Para este caso, se puede aplicar la regla de l'Hôpital para evaluar el límite

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} |\sigma(\theta)| = \left| \frac{A}{2\rho} \right|$$

En el límite $\omega \rightarrow \omega_n$, la condición para caos se reduce a

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{|\sigma(\theta)|}{|\varsigma|} \\ 1 &\leq \left| \frac{A}{2\rho\varsigma} \right| \end{aligned} \quad (107)$$

En la figura 37 se muestra una gráfica tridimensional de la superficie crítica (105) en función de los parámetros de entrada (v.g., la amplitud y la frecuencia de la señal de

excitación periódica). Se tomaron como ejemplo, los valores paramétricos $\omega_n = 2$ rad/seg, $\rho = 1$ y $\varsigma = 1$. La interpretación de la gráfica es que con esta elección de parámetros ω_n , ρ y ς puede existir un atractor caótico del sistema (94), para todo el par (A, ω) tal que la relación $1 \leq |\sigma(\theta)|/|\varsigma|$.

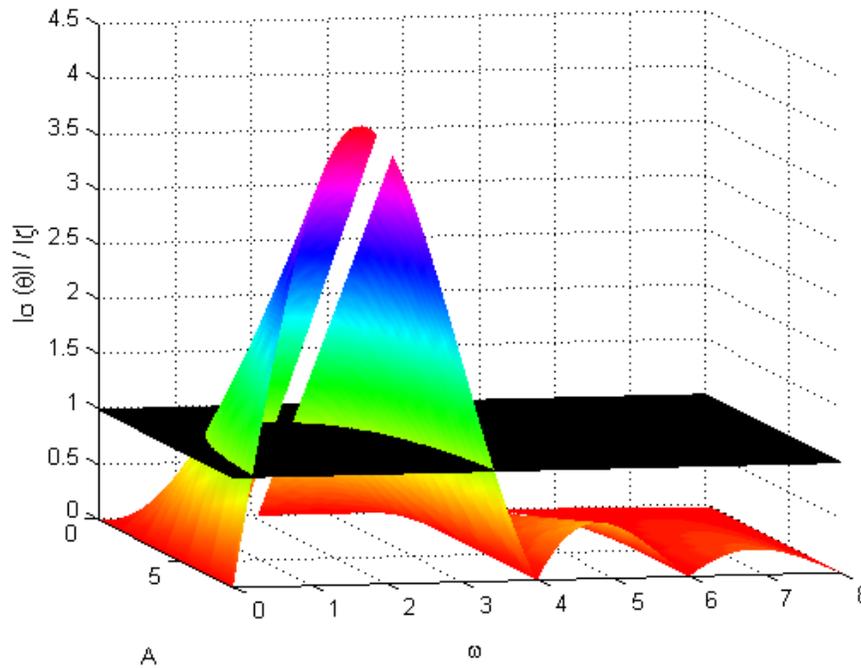


Figura 37. Superficie crítica que ofrece el criterio para caos.

IV.3 Conclusiones

En este capítulo se propuso aplicar el método de Melnikov para obtener las condiciones en las que el sistema puede presentar un comportamiento caótico. Debido a que el método fue desarrollado para aplicarse a sistemas diferenciables, se requirió de una aproximación de la función signo para realizar los cálculos matemáticos. Al principio, se propusieron dos funciones candidatas: la tangente hiperbólica y una saturación. Sin embargo, empleando la tangente hiperbólica no se encontró una ecuación analítica para la órbita homoclínica por lo que se eligió la de saturación para simplificar cálculos. Aún así, la saturación tampoco es una

función derivable. Su uso se puede justificar desde el siguiente punto de vista cualitativo.

En la figura 36 se observa el comportamiento de las órbitas homoclínicas conforme se varía el parámetro b , el cual define la pendiente de la saturación. Para un valor del parámetro $b \neq 0$, las órbitas homoclínicas tienen una duración infinita. En las figuras 36(a) y 36(b) es fácil observar que la parte lineal de las órbitas tienen una duración infinita y que la evolución de la trayectoria es lenta en esta parte. En la figura 36(c) ya no es posible observar la parte lineal de las órbitas por la magnitud del parámetro b , sin embargo, la órbita sigue teniendo una duración infinita y, por definición es una órbita homoclínica. La importancia de esta observación radica en la génesis de los *enredos homoclínicos* (ver sección II.1.4), es decir, se requiere que el sistema posea una órbita homoclínica (de periodo infinito) para que se puedan generar los enredos homoclínicos. Desde este punto de vista, el método de Melnikov pide diferenciabilidad para que el sistema posea una órbita homoclínica. De la figura 36 se observa que empleando una saturación se obtiene una órbita homoclínica y en principio es posible aplicar el método.

No ocurre lo mismo para el caso de la función signo. Suponga el caso límite en que $b = 0$, lo cual corresponde a usar el signo, la órbita tendría una duración finita $t_1 < t < t_2$ y por definición no sería una órbita homoclínica. De aquí surge otra interrogante, la cual se plantea para un trabajo a futuro de investigación, ¿es posible la existencia de enredos homoclínicos aunque la órbita sea de periodo finito?.

Se aplicó el método de Melnikov para encontrar condiciones suficientes para la existencia de conjuntos invariantes caóticos, sin embargo, el método no analiza la estabilidad de estos conjuntos, es decir, que estos conjuntos caóticos pueden ser estables (atractores) o inestables (repulsores). Además, si el *teorema de Melnikov-Smale* (teorema 3) no se cumple, entonces se puede asegurar que no existe un conjunto invariante caótico.

Capítulo V

RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se presentan resultados numéricos y experimentales para ilustrar la teoría presentada en el capítulo IV. Para la parte experimental, se cuenta con 2 plantas de laboratorio: un sistema rectilíneo y un sistema rotacional. Además se diseñó un circuito electrónico para emular la dinámica del sistema de segundo orden presentado en el capítulo III, con el propósito de realizar los experimentos que no se pueden llevar a la práctica, debido a limitaciones físicas, en las plantas de laboratorio mencionadas.

V.1 Sistema rectilíneo

El sistema rectilíneo es un sistema clásico masa-resorte-amortiguador con una fuerza de fricción, entre la base del aparato y la masa, modelada como viscosa. El mecanismo es el modelo 210 de la compañía ECP. Para la realización de los experimentos, el sistema se prepara en la configuración mostrada en la figura 38.

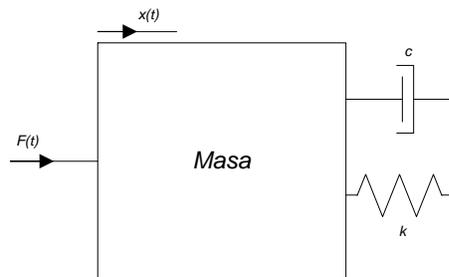


Figura 38. Sistema masa-resorte-amortiguador de 1 grado de libertad.



Figura 39. Planta rectilínea ECP modelo 210.

donde k es la constante del resorte con unidades N/m , m es la masa en kg y c es la constante de amortiguamiento con unidades $N \cdot s/m$. Si x denota la posición de la masa y $u(t)$ la fuerza aplicada, entonces su función de transferencia es:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1/m}{s^2 + \delta s + \alpha} \quad (108)$$

donde se ha sustituido $\alpha = k/m$, $\delta = c/m$. Supóngase que al sistema se aplica un control dado por $u(t) = \rho \text{sign}(x_1) + v(t)$ y $r(t)$ es una entrada de perturbación periódica de la forma $A \text{sen}(\omega t)$. La representación en variables de estado del sistema (108) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}(\rho \text{sign}(x_1) + A \text{sen}(\omega t)) \end{aligned} \quad (109)$$

Para la realización de los experimentos se contaron con 3 resortes cuyos valores nominales son: $k = 200N/m$, $k = 400N/m$ y $k = 800N/m$ y se utilizó una masa $m = 2.06238kg$. (se incluye la masa del carro de suspensión.) Sin embargo, se desconoce el coeficiente de amortiguamiento c .

Para estimar el coeficiente c , se empleó el método de respuesta a la frecuencia. Después se propone una función de transferencia analítica que se ajusta lo más posible a la función de transferencia real. En la figura 40 se ilustran la función de transferencia real (FT), la función de análisis de coherencia (FAC) y la función de transferencia analítica (G). La frecuencia de resonancia del sistema físico es $f_r = 2.4$ Hz.

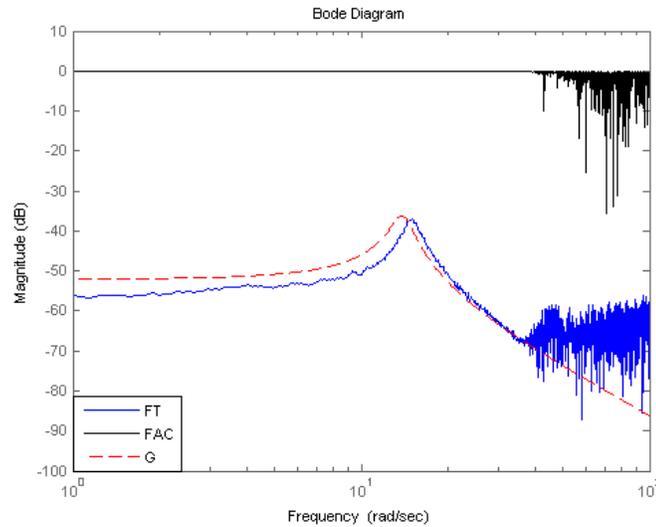


Figura 40. Función de transferencia del sistema físico.

La función de transferencia propuesta es:

$$G_a(s) = \frac{0.4848}{s^2 + 2.25s + 193.95} \quad (110)$$

en donde $c = 4.640355N \cdot s/m$.

V.1.1 Resultados numéricos y experimentales

La estructura de esta sección es la siguiente: primero se repasan las condiciones suficientes para la existencia de un atractor caótico, posteriormente se presenta un diagrama de bifurcación numérico y se compara con las condiciones analíticas. Debido a que existen ciertas incertidumbres en las constantes de los resortes, se elige la constante k como parámetro de bifurcación. Finalmente se presentan los resultados experimentales para los casos más representativos. La presentación de los resultados se presentan en varios casos para facilitar su comprensión, entre ellos se hace variar únicamente la frecuencia de la excitación de entrada. Para cada caso se presentan la curva crítica que da el criterio para caos, el diagrama de bifurcación numérico y resultados experimentales para ilustrar el comportamiento

caótico. De aquí en adelante, hasta indicar lo contrario, se consideran los siguientes valores paramétricos constantes: $m = 2.06238kg$, $c = 4.640355N \cdot s/m$, $\rho = 1$ y $A = 0.55N$.

La ecuación (105) da condiciones suficientes para la existencia de un atractor caótico del sistema (109), la cual se vuelve a escribir para mayor comodidad.

$$1 \leq \frac{\sigma(\theta)}{\varsigma(\omega_n)} \quad (111)$$

$$1 \leq \psi(\theta)$$

$\theta = (A, \omega, \omega_n, \rho) \in \mathbb{R}^4$, $\sigma(\theta)$ está dada por (106) y ς por la expresión (112), la cual representa el amortiguamiento del sistema físico.

$$\varsigma = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (112)$$

y la frecuencia natural del sistema está dada por la expresión

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (113)$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos:

1. **Caso 1** ($f = 1$ Hz). En la figura 41(a) se ilustra el alcance paramétrico donde se satisface la condición (111), en donde la variable independiente es la constante del resorte. A partir de la figura 41(a) se concluye que es posible encontrar comportamiento caótico, lo cual ocurre para cualquier valor de la constante k . Recordar que el método de Melnikov da condiciones para la existencia de un conjunto invariante caótico, pero no necesariamente son atractores. Por eso nos auxiliamos con los diagramas de bifurcación. En la figura 41(b) se muestra el diagrama de bifurcación numérico para este caso.

Nótese que, aún cuando el criterio de Melnikov-Smale establece que es posible encontrar un conjunto caótico para cualquier valor de la constante k , de la figura 41(b) se observa que este comportamiento sólo es visible para constantes menores a 142 aprox.

Dados los resortes disponibles para el sistema mecánico (200, 400 y 800 N/metro), podemos afirmar que éste no presentará comportamiento caótico para esta caso.

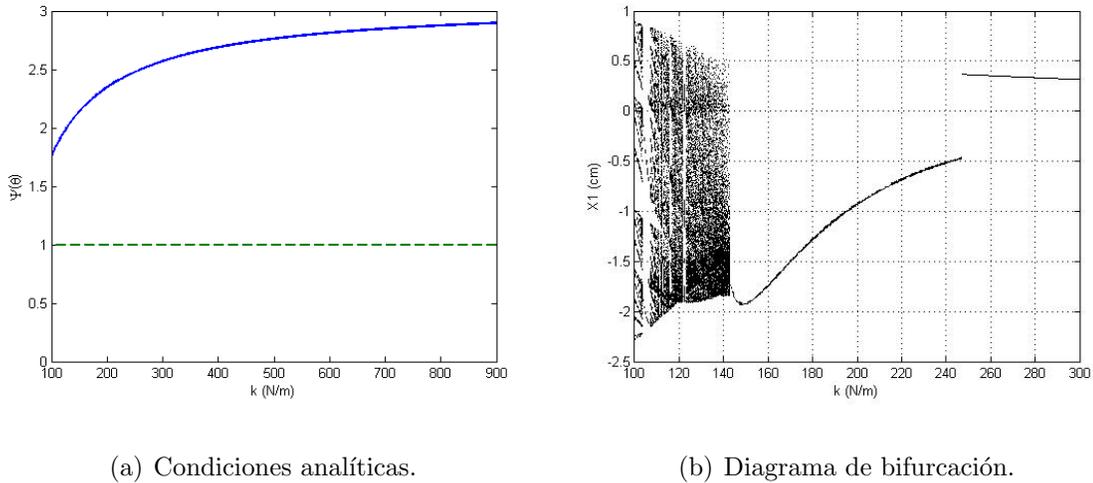
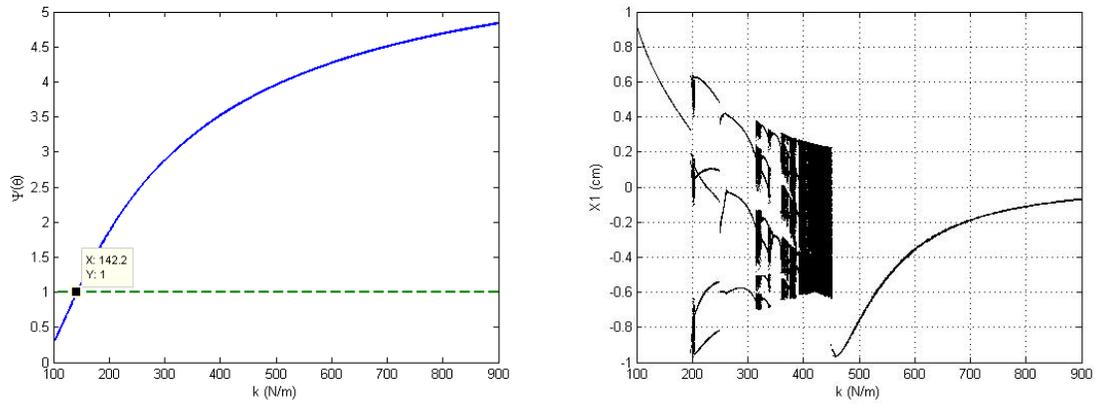


Figura 41. Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 1$ Hz.

2. **Caso 2 ($f = 2$ Hz).** La condición analítica para la existencia de un atractor caótico se muestra en la figura 42(a), nuevamente la variable independiente es la constante del resorte k y $\psi(\theta)$ está definida en (111).

Al observar la figura 42(a) se concluye que es posible encontrar comportamiento caótico para un valor $k > 142.2N/m$ aproximadamente. Para cotejar este resultado se obtuvo el diagrama de bifurcación para este caso, el cual es mostrado en la figura 42(b). Esta figura permite delimitar mejor el alcance de variación del parámetro k donde puede observarse un atractor caótico, que en este caso corresponde aproximadamente a $310N/m < k < 450N/m$, aunque también existe una región más pequeña alrededor de $k = 200N/m$. Además, claramente es posible ver que para $k < 142.2N/m$ se puede garantizar que el sistema no presentará comportamiento caótico, ya que no se satisface la condición (111).

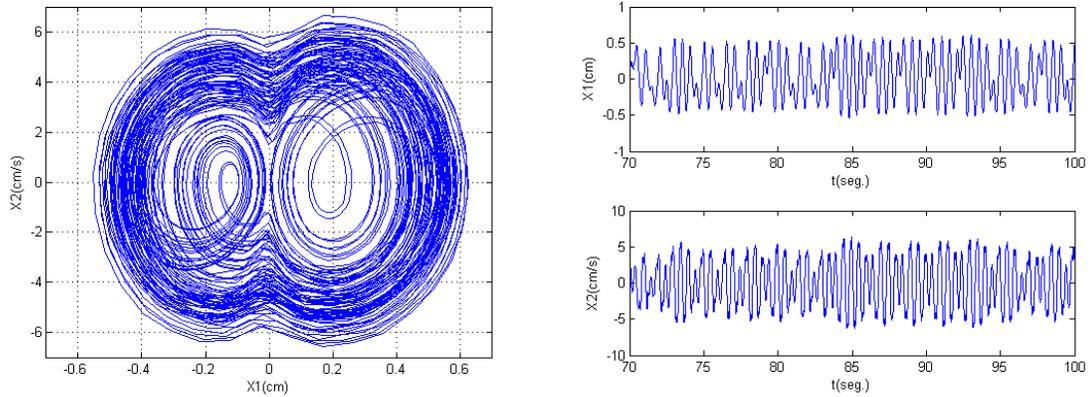


(a) Condiciones analíticas.

(b) Diagrama de bifurcación numérico

Figura 42. Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 2$ Hz.

En la figura 43(a) se muestra el retrato de fase obtenido experimentalmente para una constante nominal del resorte $k = 400\text{N/m}$. En la figura 43(b) se muestran las series de tiempo de los estados x_1 y x_2 y en la figura 43(c) se ilustra el espectro instantáneo de magnitud del estado x_1 , en donde se puede apreciar la armónica de frecuencia 2 Hz correspondiente a la frecuencia de la excitación de entrada.



(a) Retrato de fase

(b) Estados del sistema en el tiempo

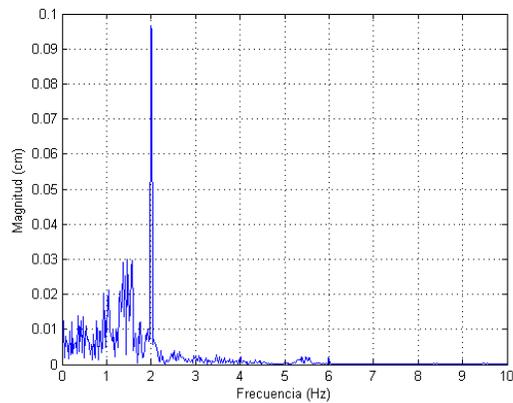
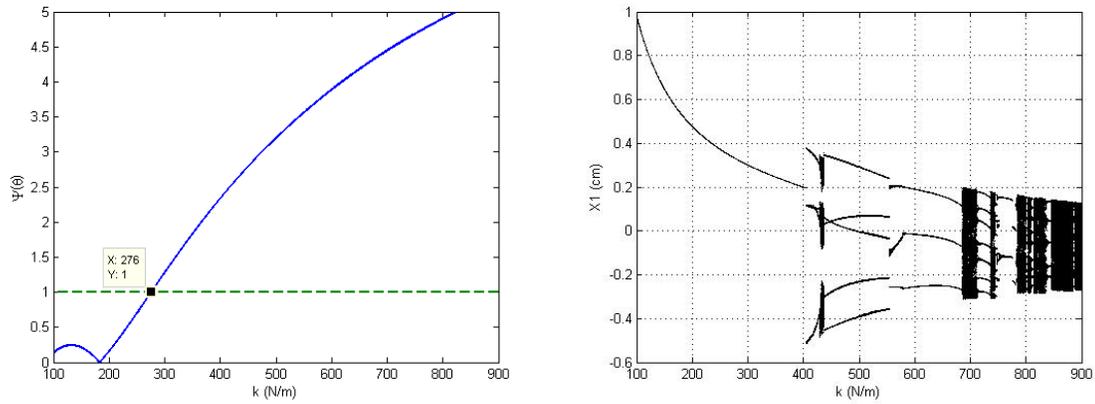
(c) Espectro de magnitud del estado x_1

Figura 43. Resultados experimentales para una frecuencia de excitación $f = 2$ Hz y $k = 400N/m$.

3. **Caso 3 ($f = 3$ Hz).** De nueva cuenta, las condición analítica para caos correspondiente a este caso se ilustra en la figura 44(a) y en la figura 44(b) el diagrama de bifurcación. A partir de la figura 44(a) se concluye que es posible encontrar un atractor caótico para un valor $k > 276N/m$ aproximadamente, lo cual se corrobora con el diagrama de bifurcación.

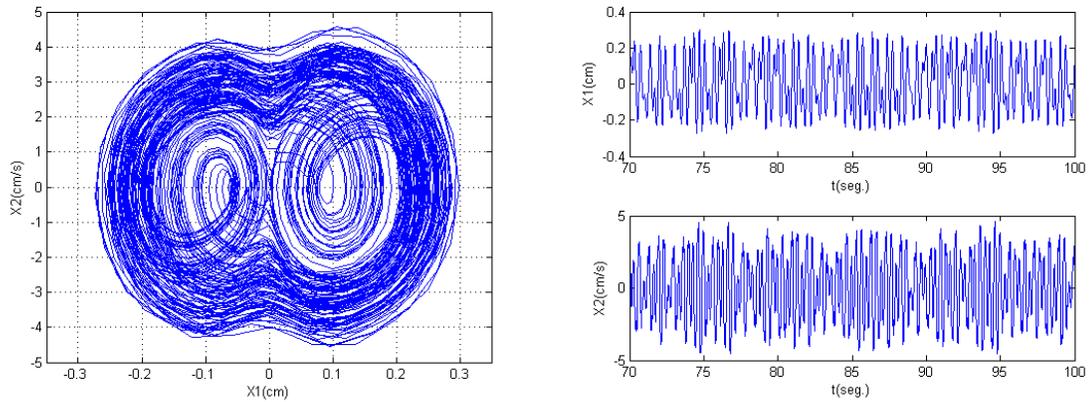


(a) Condiciones analíticas.

(b) Diagrama de bifurcación numérico

Figura 44. Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 3$ Hz.

Experimentalmente se encontró un atractor caótico para un valor nominal $k = 800\text{N}/m$. En la figura 45(a) se observa el retrato de fase experimental y en la figura 45(b) las series de tiempo de los estados x_1 y x_2 . En la figura 45(c) se ilustra el espectro instantáneo de magnitud del estado x_1 . Se observa que el espectro de Fourier es quebradizo en un alcance de frecuencias, lo cual es característico de un sistema con comportamiento caótico.



(a) Retrato de fase

(b) Estados del sistema en el tiempo

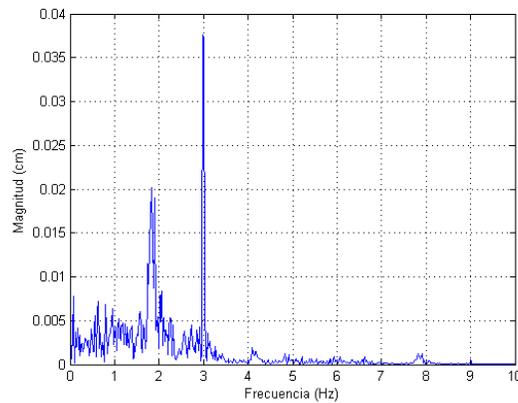
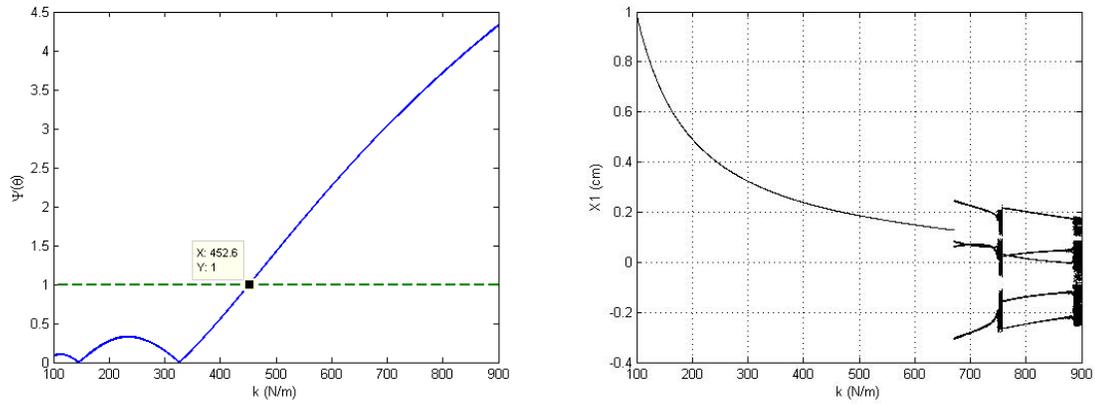
(c) Espectro de magnitud del estado x_1

Figura 45. Resultados experimentales para una frecuencia de excitación $f = 3$ Hz y $k = 800N/m$.

4. **Caso 4 ($f = 4$ Hz).** El alcance paramétrico que satisface la condición dada por Melnikov se ilustra en la figura 46(a). Se predice que para $k > 452.6N/m$, aproximadamente el sistema tiene un conjunto caótico. Dado el alcance de valores obtenidos de la figura 46(a), el diagrama de bifurcación de la figura 46(b) muestra la existencia de los atractores caóticos.



(a) Condiciones analíticas.

(b) Diagrama de bifurcación numérico

Figura 46. Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 4$ Hz.

En la figura 47(a) se muestra el retrato de fase obtenido experimentalmente para una constante $k = 800N/m$. En la figura 47(b) se muestran las correspondientes series de tiempo de los estados x_1 y x_2 y en la figura 47(c) se ilustra el espectro instantáneo de magnitud del estado x_1 . Para este valor de k el sistema no presenta un comportamiento caótico.

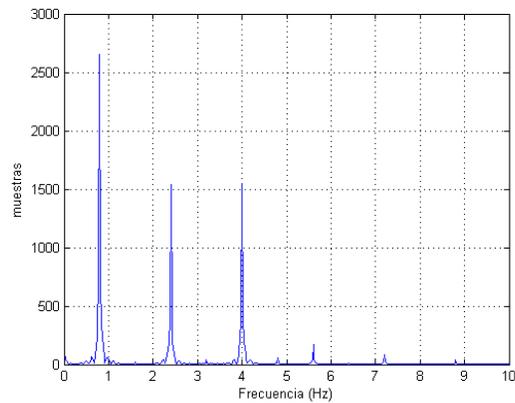
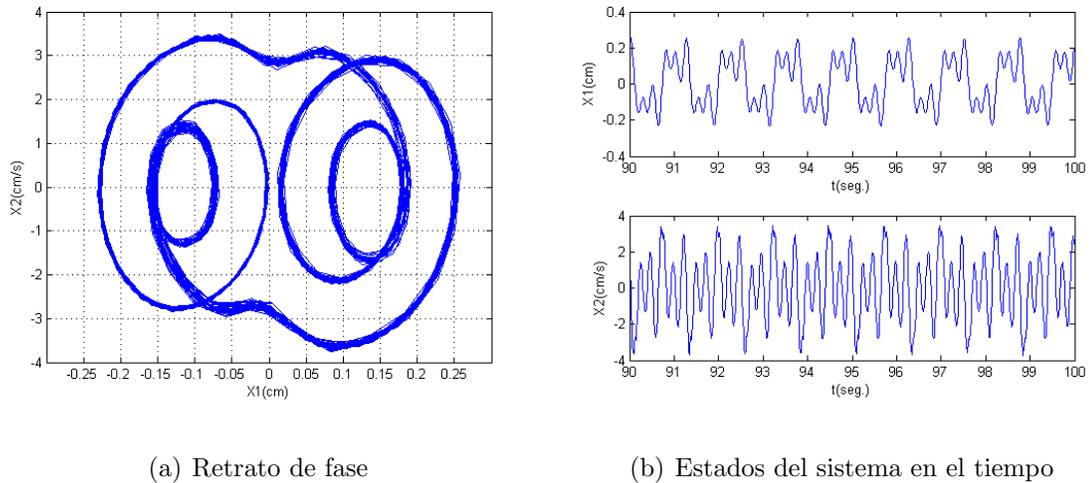
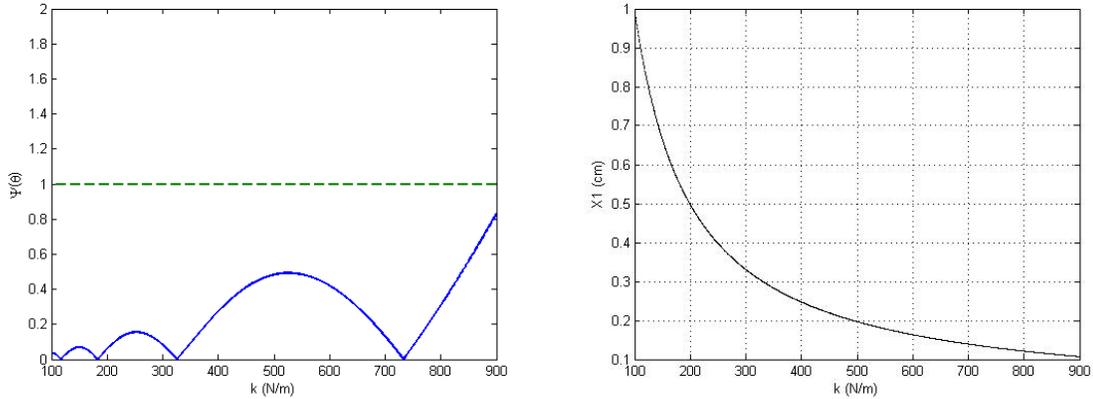


Figura 47. Resultados experimentales para una frecuencia de excitación $f = 4$ Hz y $k = 800N/m$.

5. **Caso 5 ($f = 6$ Hz).** De la figura 48(a) se concluye que no existe un conjunto invariante caótico por que no se satisface la condición (111), véase la figura 48(b) en donde se muestra el diagrama de bifurcación numérico para este caso y se observa que no existe evidencia de algún atractor caótico. Para este valor de frecuencia, no existe caos homoclínico en el sistema.



(a) Condiciones analíticas.

(b) Diagrama de bifurcación numérico

Figura 48. Condiciones analíticas para la existencia de un conjunto caótico y diagrama de bifurcación que ilustra los atractores caóticos para una frecuencia de excitación $f = 6$ Hz.

V.2 Implementación del circuito electrónico

En esta sección se muestran algunos resultados experimentales de la presencia de comportamiento caótico del sistema masa-resorte-amortiguador. En los diagramas de bifurcación de las figuras 41(b), 42(b), 44(b) y 46(b) es posible observar comportamiento irregular para diferentes valores del parámetro k . Sin embargo, no se puede observar experimentalmente la dinámica en estas zonas debido a limitaciones en la planta de laboratorio.

En esta sección se muestra el desarrollo de la implementación de un circuito electrónico que emula la dinámica del sistema rectilíneo (109) con la finalidad de reproducir las dinámicas observadas en los diagramas de bifurcación e ilustrar los resultados analíticos mediante experimentos.

Para la implementación del circuito se eligen amplificadores operacionales LF347. Para mantener la magnitud de las señales en niveles de operación adecuados se escalan los estados del sistema por los factores $z_1 = 100x_1$ y $z_2 = 10x_2$, en donde $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^T$ son los estados del circuito electrónico. Los factores de escalamiento fueron determinados a partir de simulaciones en la computadora. Además el circuito se escaló en frecuencia por un

factor de 1000 para operar en el alcance de kilohertz. Finalmente, la dinámica del circuito está descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 10z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{m} \left(-\frac{k}{10}z_1 - cz_2 + 10 \left(\rho \operatorname{sign} \left(\frac{z_1}{100} \right) + A \operatorname{sen}(\omega t) \right) \right) \end{aligned} \quad (114)$$

El circuito electrónico se muestra en las figura 50, en donde, la función $\operatorname{sign}(z_1)$ se implementa mediante un detector de cruce por cero (Smathers *et al.*, 1973), ver figura 49.

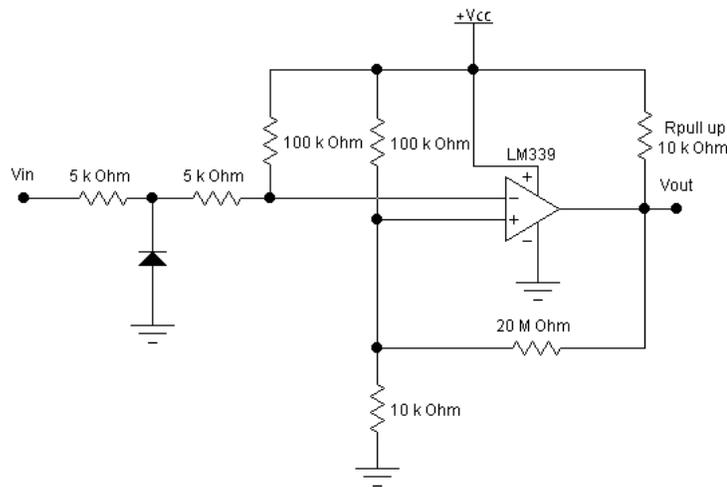


Figura 49. Detector de cruce por cero (DCC).

Se definen los valores de las resistencias $R_A = k/10m$, $R_D = c/10m$ y $R_M = \rho/10m$, las cuales se pueden identificar en el circuito de la figura 50. En la figura 51 se muestra una fotografía del circuito electrónico armado en el laboratorio.

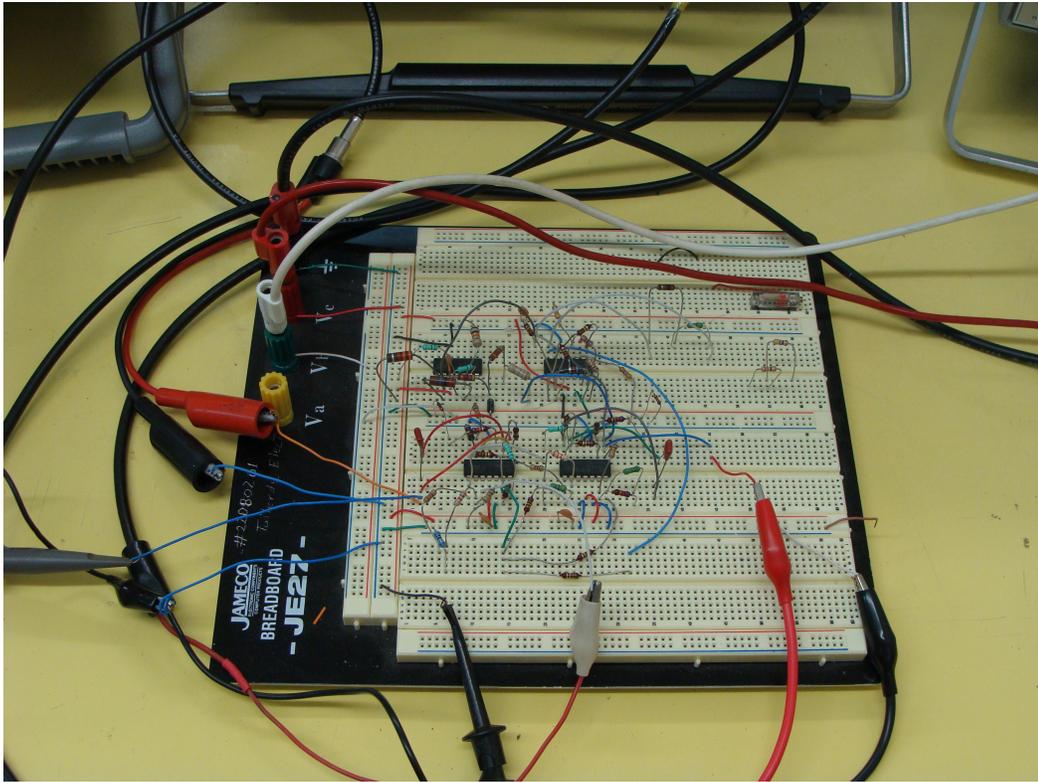


Figura 51. Fotografía del circuito electrónico en protoboard.

V.2.1 Resultados experimentales del circuito.

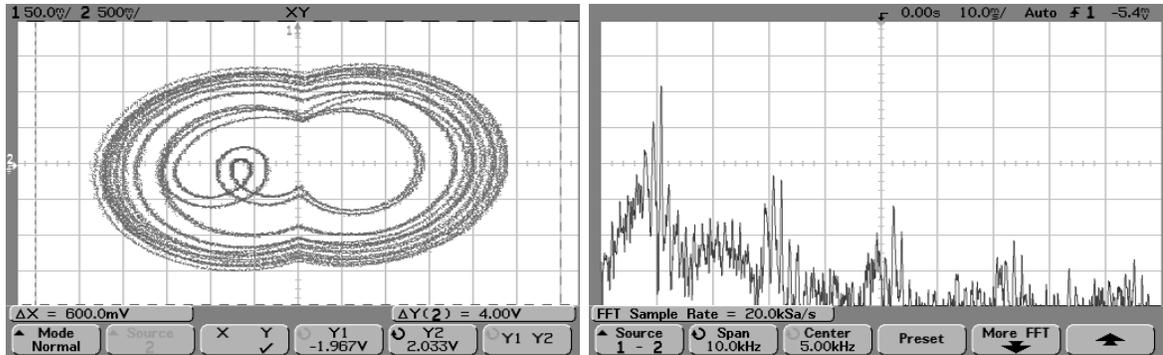
En esta sección se presentan los resultados obtenidos del circuito electrónico.

Experimento 1 ($f = 1 \text{ KHz}$). En el caso 1 de la sección V.1.1 los valores paramétricos del sistema mecánico fueron: $c = 4.640355 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$, $m = 2.06238 \text{ kg}$. Con una perturbación $r(t) = 0.55 \text{sen}(2\pi t)$ se concluyó que el sistema puede presentar comportamiento caótico para el alcance de valores $100 < k < 900$. Sin embargo, en el diagrama de bifurcación de la figura 41(b) se observa una dinámica irregular para un pequeño alcance de valores, que debido a limitaciones de los resortes disponibles, no es posible observar experimentalmente.

A partir del diagrama de bifurcación de la figura 41(b), se puede observar que es posible encontrar un atractor caótico en el alcance paramétrico $100 \text{ N}/\text{m} < k < 142 \text{ N}/\text{m}$ aprox. Ahora bien, se elige un valor $k = 130 \text{ N}/\text{m}$, su valor correspondiente en el circuito electrónico es: $R_A = 6.303 \text{ K}\Omega$, y el resto de los parámetros son $R_D = 2.25 \text{ K}\Omega$, $R_M = 4.848 \text{ K}\Omega$ y se

considera la siguiente perturbación: $r(t) = 0.55\text{sen}(2\pi ft)$, donde $f = 1$ KHz.

En la figura 52 se muestran el retrato de fase y el espectro instantáneo de Fourier del estado z_1 para este experimento, en donde se observa una dinámica caótica.



(a) Retrato de fase

(b) FFT del estado z_1 . El alcance de frecuencia es de 10Khz.

Figura 52. Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 1.

En la figura 53 se ilustra la operación de del circuito electrónico para los valores paramétricos presentados en el experimento 1.

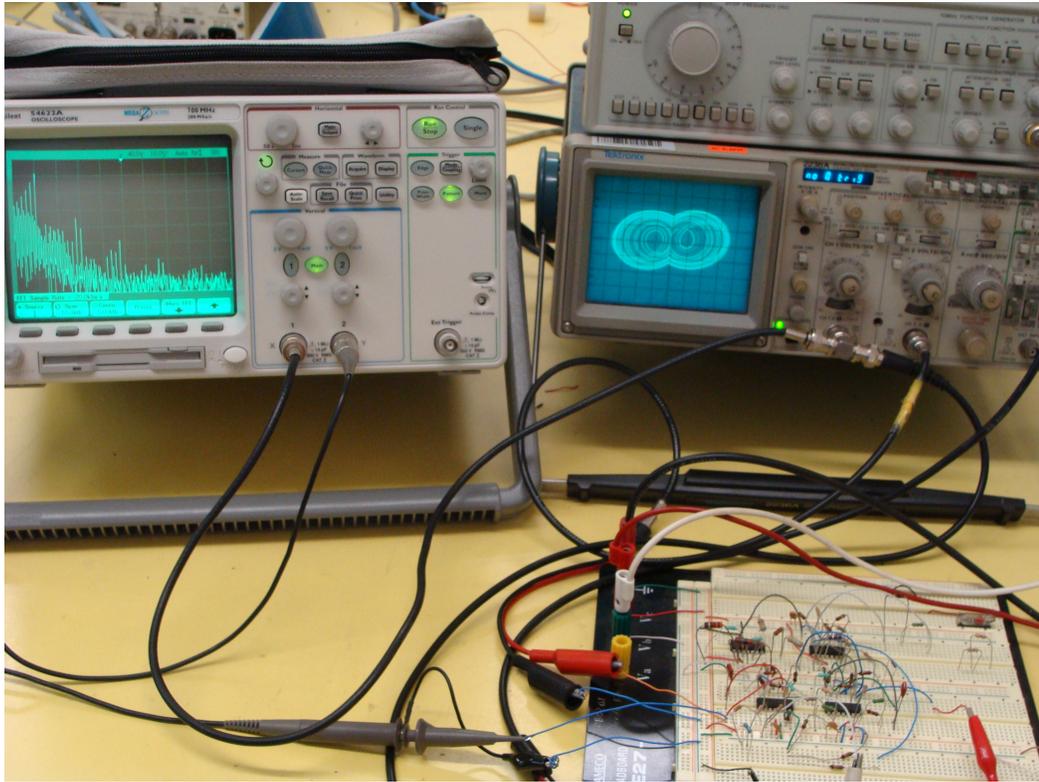
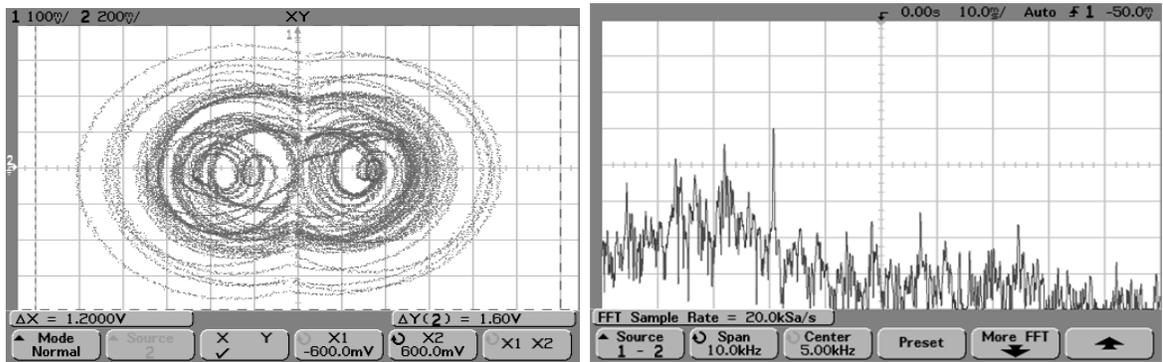


Figura 53. Fotografía del circuito electrónico en operación para el caso del Experimento 1.

Experimento 2. Nuevamente a partir del diagrama de bifurcación de la figura 44(b), se proponen los siguientes parámetros del sistema mecánico: $k = 700N/m$, $c = 4.640355N \cdot s/m$, $m = 2.06238kg$. y $0.55\text{sen}(2\pi(3)t)$. Los correspondientes valores paramétricos del circuito electrónico son: $R_A = 33.941K\Omega$, $R_D = 2.25K\Omega$ y $R_M = 4.848K\Omega$. Además se tiene la siguiente perturbación $r(t) = 0.55\text{sen}(2\pi ft)$, donde $f = 3$ kHz.

En la figura 54 se muestran el retrato de fase y el espectro instantáneo de Fourier del estado z_1 para el segundo experimento.



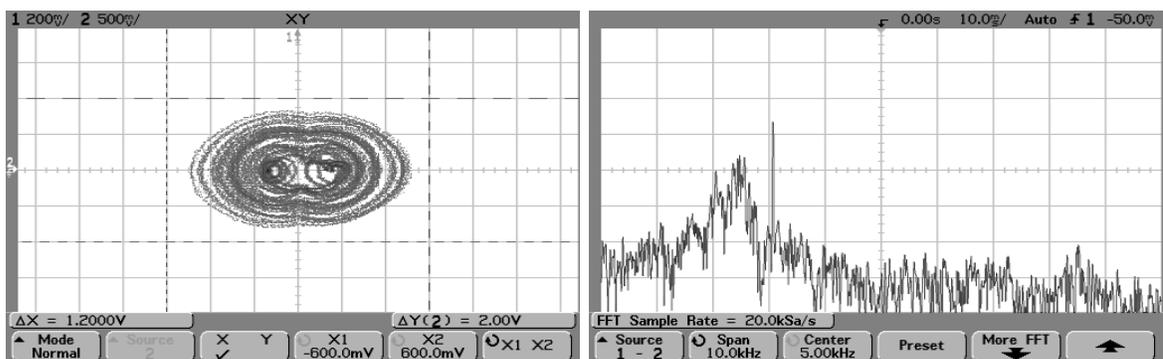
(a) Retrato de fase

(b) FFT del estado z_1 . El alcance de frecuencia es de 10Khz.

Figura 54. Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 2.

Experimento 3. En diagrama de bifurcación de la figura 44(b) también se observa que hay un atractor caótico alrededor de $k = 900N/m$. El diagrama de bifurcación se obtuvo con los valores paramétricos $c = 4.640355N \cdot s/m$, $m = 2.06238kg$. y $r(t) = 0.55\text{sen}(2\pi(3)t)$. Los correspondientes valores de resistencia del circuito electrónico: $R_A = 43.639K\Omega$, $R_D = 2.25K\Omega$ y $R_M = 4.848K\Omega$ y $r(t) = 0.55\text{sen}(2\pi ft)$, donde $f = 3$ kHz.

En la figura 55 se muestran el retrato de fase y el espectro instantáneo de Fourier del estado z_1 .



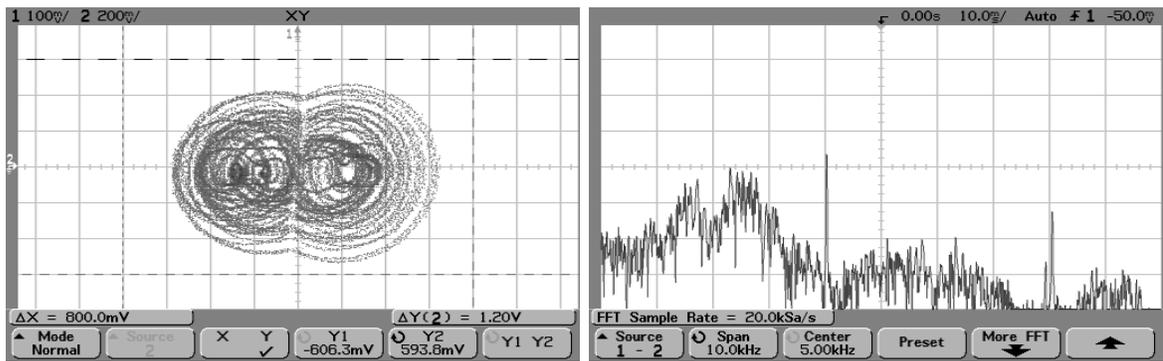
(a) Retrato de fase

(b) FFT del estado z_1 . El alcance de frecuencia es de 10Khz.

Figura 55. Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 3.

Experimento 4. Vea el diagrama de bifurcación de la figura 46(b), en donde se alcanza a apreciar un atractor caótico en las vecindades de $k = 900N/m$. Los parámetros del sistema mecánico son: $c = 4.640355N \cdot s/m$, $m = 2.06238kg$. y $r(t) = 0.55\text{sen}(2\pi(4)t)$ y los valores paramétricos del circuito son: $R_A = 33.941K\Omega$, $R_D = 2.25K\Omega$ y $R_M = 4.848K\Omega$ y $r(t) = 0.55\text{sen}(2\pi ft)$, con $f = 4$ kHz.

En la figura 56 se muestran el retrato de fase y el espectro instantáneo de Fourier del estado z_1 .



(a) Retrato de fase

(b) FFT del estado z_1 . El alcance de frecuencia es de 10Khz.

Figura 56. Resultados experimentales obtenidos del circuito electrónico. Los valores de los parámetros corresponde al experimento 4.

V.3 Sistema rotacional

El sistema rotacional es un emulador de una planta industrial modelo 220 manufacturado por ECP. En la figura 57 se ilustra un diagrama esquemático de la planta.

Para muchas aplicaciones en donde se emplean servo-motores, los efectos no lineales tales como holgura mecánica (backlash), fricción de Coulomb y otras no linealidades son lo suficientemente pequeñas de tal manera que la planta puede modelarse como un simple cuerpo rígido que obedece las leyes de Newton, y de esta forma el efecto de la fricción se

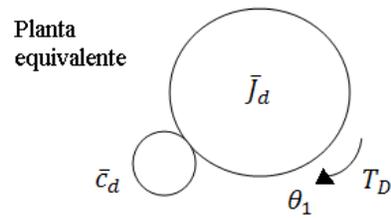
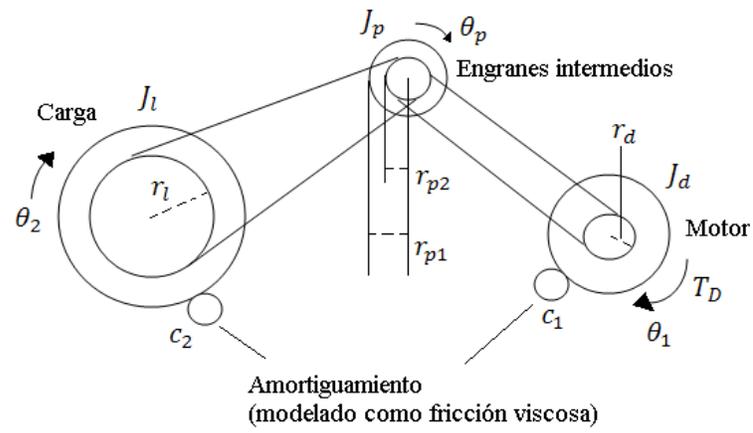


Figura 57. Modelo de la planta de cuerpo rígido.



Figura 58. Emulador industrial ECP modelo 220.

puede modelar como una fricción viscosa. De la figura 57 se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{J}_d \ddot{\theta}_1 + \bar{C}_d \dot{\theta}_1 &= T_d \\ \bar{J}_l \ddot{\theta}_2 + \bar{C}_l \dot{\theta}_2 &= gr T_d\end{aligned}\tag{115}$$

cuyas transformadas de Laplace están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\theta_1(s)}{T_D(s)} &= \frac{1}{s(\bar{J}_d s + \bar{C}_d)} \\ \frac{\theta_2(s)}{T_D(s)} &= \frac{gr}{s(\bar{J}_l s + \bar{C}_l)}\end{aligned}$$

Si se definen las variables de estado $x_1 = \theta_1$ y $x_2 = \dot{\theta}_1$ se tienen las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-\bar{C}_d x_2 + T_D}{\bar{J}_d}\end{aligned}\tag{116}$$

en donde

$$\begin{aligned}\bar{J}_d &= J_d + \frac{J_p}{(\bar{g}\bar{r})^2} + \frac{J_l}{(\bar{g}\bar{r})^2} \\ \bar{J}_l &= J_d (\bar{g}\bar{r})^2 + J_p \left(\frac{gr}{\bar{g}\bar{r}}\right)^2 + J_l\end{aligned}\tag{117}$$

son las inercias totales reflejadas a la entrada y a la carga respectivamente. De manera similar se tiene para los coeficientes de fricción:

$$\begin{aligned}\bar{C}_d &= C_1 + C_2 (gr)^{-2} \\ \bar{C}_l &= C_1 (gr)^2 + C_2\end{aligned}\tag{118}$$

Finalmente gr es la relación de transmisión total del sistema y $\bar{g}\bar{r}$ es la relación de transmisión entre la entrada y la polea intermedia, ver figura 57.

$$\begin{aligned}gr &= \frac{r_l r_{p1}}{r_{p2} r_d} \\ \bar{g}\bar{r} &= \frac{r_{p1}}{r_d}\end{aligned}\tag{119}$$

El sistema (116) no tiene una estructura semejante a la de la ecuación (109), pero si se considera un control de la forma $T_D(t) = -ax_1 + \rho \text{sign}(x_1) + r(t)$, entonces se puede

aplicar la teoría desarrollada en el capítulo IV. Utilizando este control, las ecuaciones de estado del sistema quedan como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 - \delta x_2 + \beta \text{Sign}(x_1) + \tilde{r}(t)\end{aligned}\tag{120}$$

donde $\alpha = a/\bar{J}_d$, $\delta = \bar{C}_d/\bar{J}_d$ y $\beta = \rho/\bar{J}_d$.

V.3.1 Resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales obtenidos.

Para un solo disco. En esta configuración, el sistema consta de un solo disco directamente acoplado con el motor, ver figura 57. Los estados del sistema están definidos como $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$. Los parámetros de inercia y fricción viscosa, para esta configuración, son:

$$J_d = 0.0025 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c_1 = 0.004 \text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}/\text{s}$$

Primeramente se grafica la curva crítica para obtener las condiciones en las cuales el sistema puede presentar un comportamiento caótico. Se fijan de manera arbitraria los siguientes parámetros: $a = 2$, $\rho = 1$, se considera una perturbación $r(t) = A \text{sen}(\omega t)$ con $A = 1$. En la figura 59 se muestra la curva crítica en función de la frecuencia $\omega = 2\pi f$, donde es posible observar que entre un alcance de frecuencia $0.1202 \text{Hz} < f < 8.657 \text{Hz}$ aproximadamente existe la posibilidad de encontrar un atractor caótico.

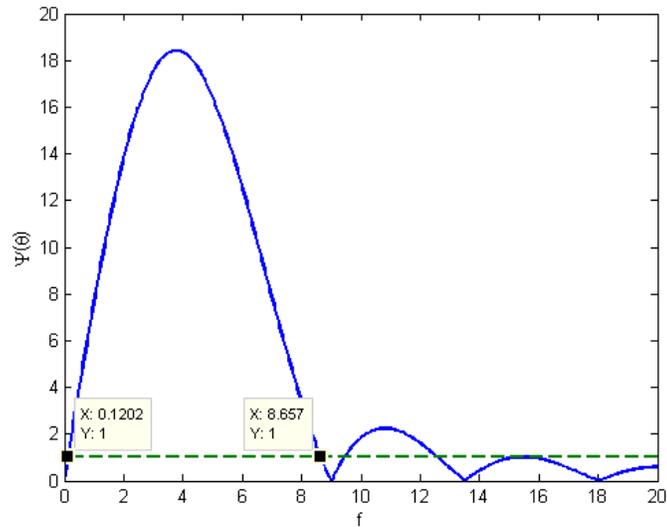


Figura 59. Curva crítica de Melnikov. Los parámetros del sistema son $a=2$, $M=1$.

Experimentalmente, para una frecuencia $f = 1.5$ Hz se encontró un atractor caótico, en la figura 60 se muestra el retrato de fase del sistema cuando se aplica una entrada $u(t) = \sin(3\pi t)$. El tiempo de ejecución del experimento fue de 300 segundos y se graficaron los últimos 150 segundos para desplegar el retrato de fase.

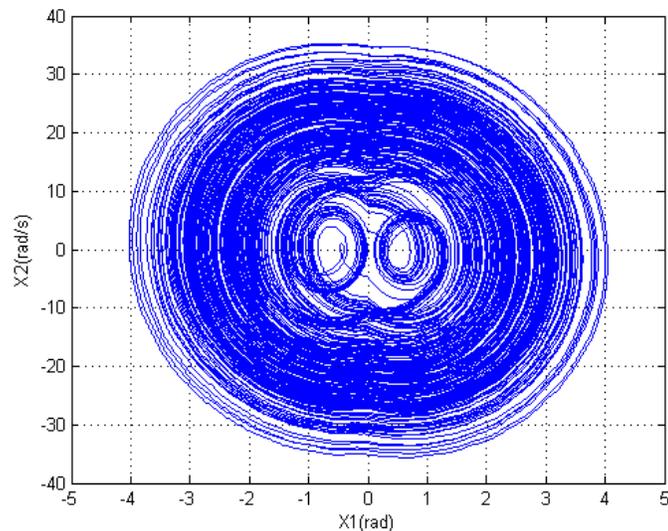


Figura 60. Retrato de fase. Los parámetros del sistema son $a=2$, $M=1$.

En las figuras 61 y 62 se muestran los estados x_1 y x_2 y el espectro del estado x_1 ,

respectivamente.

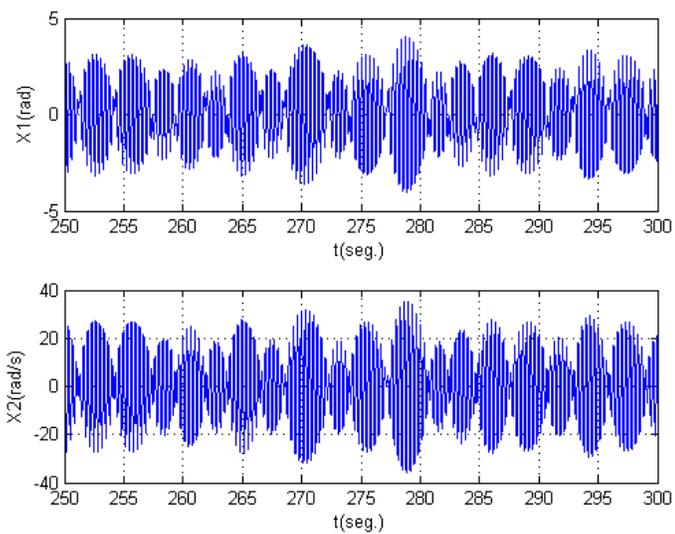


Figura 61. Series de tiempo. Los parámetros del sistema son $a=2$, $M=1$.

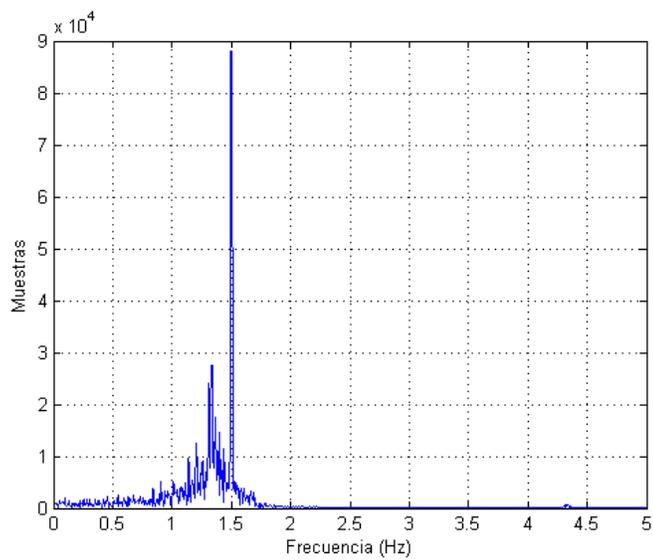


Figura 62. FFT del estado x_1 .

V.4 Conclusiones

En este capítulo se mostraron resultados numéricos y experimentales con el fin de ilustrar el análisis realizado en el capítulo IV. Los experimentos se llevaron a cabo en dos sistemas mecánicos de prueba: un sistema rectilíneo y otro rotacional, y en un circuito electrónico, el cual fue construido en una tarjeta de prueba (protoboard). El criterio para caos homoclínico que se obtuvo aplicando el método de Melnikov, ver ecuación (111), predice adecuadamente la existencia de atractores caóticos. Se realizaron simulaciones numéricas y se obtuvieron resultados experimentales que concuerdan con el estudio realizado.

Capítulo VI

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO.

VI.1 Conclusiones generales.

La principal aportación de la tesis fue realizar un estudio de un sistema dinámico discontinuo con la finalidad de predecir comportamiento caótico del mismo. Se llegó a la conclusión de que es posible encontrar un *conjunto invariante caótico* si los parámetros del sistema satisfacen la ecuación (105), de manera contraria, si la condición dada por la misma ecuación no se satisface, entonces se puede garantizar que el sistema no presentará *caos homoclínico*. En el capítulo V se mostraron resultados numéricos y experimentales, estos últimos realizados en sistemas mecánicos y electrónicos, que ilustran el comportamiento caótico y la coincidencia de los atractores caóticos con la predicción analítica.

En la práctica, tradicionalmente, se ha utilizado la teoría del caos para identificar y evitar el caos en los sistemas dinámicos, debido a que muchos diseños en ingeniería requieren operar en un régimen estable o periódico (v.g. control de vibraciones en sistemas mecánicos (Moon, 2004)). El análisis presentado en esta tesis, se muestra como una posibilidad para evitar dinámica caótica mediante una elección adecuada en los parámetros.

También existen diversas aplicaciones en la industria, en las que se desea que los sistemas exhiban un comportamiento caótico (v.g. calentadores de queroseno caóticos (Katayama, 1993), entre otras aplicaciones que pueden ser encontradas en (Ditto y Munakata, 1995)) con el propósito de hacer más eficientes a los sistemas. La idea fundamental detrás de estas aplicaciones es que regularidad no siempre es lo mejor, dependiendo del tipo de problema. Como aportación de la tesis, existe la posibilidad de aplicar la metodología desarrollada y

encontrar un conjunto de parámetros para que los sistemas exhiban dinámica caótica.

El método de Melnikov es una herramienta poderosa, sin embargo no se puede aplicar a cualquier sistema dinámico. Se requiere de la existencia de una órbita homoclínica en el espacio de estados, como se mencionó en la sección II.1.4, lo cual limita la aplicación del método.

VI.2 Trabajo a futuro.

El trabajo futuro por realizar se describe en los siguientes puntos:

En el aspecto matemático:

1. Justificar más formalmente el uso de la saturación. En las conclusiones del capítulo IV se justifica de una manera cualitativa el uso de la saturación a pesar de no ser una función diferenciable. Básicamente se debe a que con la saturación existe una órbita homoclínica, la cual por definición tiene un periodo infinito. Es necesario que la órbita tenga un periodo infinito para que se generen los *enredos homoclinicos* y en consecuencia comportamiento caótico, ver capítulo II. Mientras que con el signo no existe una órbita homoclínica sino más bien una órbita de tiempo finito.
2. Ampliar el estudio a sistemas dinámicos discontinuos de dos grados de libertad en busca de las condiciones para comportamiento caótico.

En el aspecto práctico:

1. Una vez realizado el estudio del sistema de dos grados de libertad, ilustrar los resultados analíticos mediante experimentos.
2. El circuito electrónico que se diseñó, puede ser utilizado para otras aplicaciones, como en el encriptamiento caótico de mensajes.

Referencias

- Andres, J., Fiser, J., y Juttner, L. (2002). On a multivalued version of the sharkovskii theorem and its application to differential inclusions. *Set-Valued Anal.*, **10**: 1–14.
- Andronov, A., Leontovich, E., Gordon, I., y Maier, A. (1973). *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. John Wiley and Sons, New York. 482 pp.
- Arnold, V. (1996). *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York. 351 pp.
- Banerjee, S. y Grebogi, C. (1999). Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps. *Physical Review E*, **59**(4): 4052–4061.
- Birkhoff, G. D. (1917). Dynamical systems with two degrees of freedom. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18**: 199–300.
- Curiel, L. E. y Álvarez, J. (1997). Bifurcations and chaos in a linear control system with saturated input. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**(8): 1811–1822.
- de Weger, J., Binks, D., Molenaar, J., y Van de Water, W. (1996). Generic behavior of grazing impact oscillators. *Physical Review Letters*, **76**(21): 3951–3954.
- di Bernardo, M., Budd, C., y Champneys, A. (2001a). Normal form maps for grazing bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Physical D*, **160**(13): 222–254.
- di Bernardo, M., Budd, C. J., y Champneys, A. R. (2001b). Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: A unified analytical framework. *Physical Review Letters*, **86**(12): 2553–2556.
- di Bernardo, M., Garofalo, F., Iannelli, L., y Vasca, F. (2002). Bifurcations in piecewise-smooth feedback systems. *International Journal of Control*, **75**(16): 1243–1259.
- di Bernardo, M., Budd, C. J., R., C. A., y Kowalczyk, P. (2008). *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer-Verlag, London, primera edición. 481 pp.
- Ditto, W. y Munakata, T. (1995). Principles and applications of chaotic systems. *Communications of the ACM*, **38**(11): 96–102.
- Edwards, C. y Spurgeon, S. K. (1998). *Sliding mode control : theory and applications*. Taylor and Francis, London, primera edición. 237 pp.
- Feigin, M. I. (1970). Doubling of the oscillation period with c-bifurcations in piecewise continuous systems. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, **34**: 861–869.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, segunda edición. 484 pp.

- Hassan, S., Ouladsine, M., y Fridman, L. (2008). Vehicle parameter and states estimation via sliding mode observers. *Lecture Notes in Control and Information Sciences: Modern Sliding Mode Control Theory*, **375**: 345–362.
- Katayama, R. (1993). Developing tools and methods for applications incorporating neuro, fuzzy and chaos technology. *Computers and Industrial Engineering*, **24**(4): 579–592.
- Khalil, H. K. (2001). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, tercera edición. 750 pp.
- Kluenger, M. (2001). Periodicity and sharkovsky's theorem for random dynamical systems. *Stochastics and Dynamics*, **1**(3): 299–338.
- Kowalczyk, P. y di Bernardo, M. (2001). On a novel class of bifurcations in hybrid dynamical systems: the case of relay feedback systems. *Lecture Notes in Computer Science. Hybrid Systems: Computation and Control. Springer Berlin/Heidelberg*, **2034**: 361–374.
- Leine, R. I. (2000). *Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type*. Tesis de doctorado, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven.
- Miranda, M. y Álvarez, J. (2009). Bifurcations and chaos produced by the modulation signal in a pwm buck converter. *Chaos, Solitons and Fractals*, **42**(4): 2260–2271.
- Moon, F. C. (2004). *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley and Sons Publications, London, primera edición. 309 pp.
- Nayfeh, A. H. y Balachandran, B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley and Sons, Inc., New York. 700 pp.
- Nordmark, A. B. (1991). Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, **145**: 279–297.
- Nusse, H. E. y Yorke, J. A. (1992). Border-collision bifurcations including period two to period three for piecewise smooth systems. *Physical D*, **57**: 39–57.
- Orlov, Y., Álvarez, J., y Acho Zupa, L. (2000). An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a coulomb friction oscillator. *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, **122**: 687–690.
- Pesin, Y. B. (1977). Characteristic lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, **32**(4): 55–114.
- Rosas, D., Álvarez, J., y Fridman, L. (2006). Robust observation and identification of n degrees of freedom lagrangian systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **17**: 842–861.
- Ruelle, D. y Takens, F. (1971). On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, **20**: 167–192.
- Seely, S. y Poularikas, A. D. (1984). *Signals and systems*. Krieger Publishing Company, Florida, E.U.A.

- Smathers, R. T., Frederiksen, T. M., y M., H. W. (1973). *LM339 - A Quad of Independently Functioning Comparators*. National Semiconductor Corporation. 24 pp.
- Taylor, J. H. (1999). *Describing functions*. Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering. 47 pp.
- Tien-Yien, L. y Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, **82**(10): 985–992.
- Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding mode. *Automatic Control, IEEE Transactions*, **22**: 212– 222.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, segunda edición. 672 pp.

Apéndice A

Cálculo de la órbita homoclínica

En esta sección se procede a calcular la órbita homoclínica del semiplano derecho del espacio de estados para el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 + \beta \text{sat}(b, x_1) + \varepsilon \left(-\tilde{\delta} x_2 + \tilde{A} \text{sen}(\omega t) \right)\end{aligned}\tag{121}$$

Para calcular la ecuación de la órbita homoclínica, se parte de la ecuación diferencial del Hamiltoniano (122). El Hamiltoniano del sistema es constante a lo largo de la trayectoria de la órbita homoclínica, para encontrar el valor del hamiltoniano se evalúa éste en algún punto de la órbita, en este caso el origen ya que es el único punto conocido.

$$\begin{aligned}H(x) &= \frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1) \\ V(x_1) &= \begin{cases} \frac{\alpha x_1^2}{2} + \beta \left(x_1 + \frac{b}{2}\right) & x_1 < -b \\ \frac{\alpha x_1^2}{2} - \frac{\beta}{2b}x_1^2 & |x_1| \leq b \\ \frac{\alpha x_1^2}{2} - \beta \left(x_1 - \frac{b}{2}\right) & x_1 > b \end{cases}\end{aligned}\tag{122}$$

1. Cálculo de la órbita homoclínica para $x_1 > b$. Tomando $H(x) = 0$ se tiene:

$$H(x) = \frac{1}{2}(\alpha x_1^2 + x_2^2) - \beta \left(x_1 - \frac{b}{2}\right) = 0$$

despejando x_2 en función de x_1 :

$$x_2 = \sqrt{-\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 - \beta b}$$

sustituyendo $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{-\alpha x^2 + 2\beta x - \beta b}$$

resolviendo la ecuación diferencial resultante mediante la ayuda de la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} \right) \quad (a < 0)$$

se llega a:

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma + k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t + C_2) \\ \dot{x}(t) &= \sqrt{\alpha}k_2 \cos(\sqrt{\alpha}t + C_2) \end{aligned} \quad (123)$$

donde $\gamma = \beta/\alpha$ y $k_2 = \frac{\sqrt{\beta(\beta-\alpha b)}}{\alpha}$.

Para encontrar la constante de integración se encuentra el punto $(x, 0)$ a partir de la ecuación (122). Por definición, este punto corresponde a $t = 0$, así que servirá como condición inicial.

$$H(x, 0) = \frac{1}{2}\alpha x^2 - \beta \left(x - \frac{b}{2} \right) = 0$$

después se obtienen las raíces del polinomio del segundo orden, las cuales son $x_{1,2} = \gamma \pm k_2$. Se calcula la constante C_2 a partir de (123) y la condición inicial $x(0) = (\gamma + k_2, 0)$, lo que da como resultado que $C_2 = \pi/2$.

Finalmente la órbita homoclínica para $x_1 > b$ está dada por:

$$\begin{aligned} x_1^h(t) &= \gamma + k_2 \cos(\sqrt{\alpha}t) \\ x_2^h(t) &= -\sqrt{\alpha}k_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t) \end{aligned} \quad (124)$$

2. Cálculo de la órbita homoclínica para $|x_1| \leq b$. Tomando $H(x) = 0$ se tiene:

$$H(x) = \frac{1}{2} (\alpha x_1^2 + x_2^2) - \frac{\beta}{2b} x_1^2 = 0$$

despejando x_2 en función de x_1 y sustituyendo $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$ se obtiene:

$$\dot{x} = k_1 x$$

donde $k_1 = \sqrt{\beta/b - \alpha}$. Resolviendo la ecuación diferencial sujeta a las condiciones iniciales $x(t_1) = b$ se tiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= b e^{k_1(t-t_1)} \\ \dot{x}(t) &= b k_1 e^{k_1(t-t_1)} \end{aligned} \tag{125}$$

Para encontrar el tiempo t_1 , se emplea la ecuación (123) y se calcula el tiempo que tarda la trayectoria desde $t = 0$ hasta $t = t_1$, donde $t_1 < 0$.

$$\begin{aligned} \gamma + k_2 \cos(-\sqrt{\alpha} t_1) &= b \\ t_1 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arccos\left(\frac{b - \gamma}{k_2}\right) \end{aligned}$$

Apéndice B

Cálculo de la integral de Melnikov

En esta parte se presenta la solución de la integral de Melnikov dada por la ecuación (102).

Sea:

$$M(t_0) = \int_{t_1}^{t_2} x_2^h(t) \left(-\tilde{\delta} x_2^h(t) + \tilde{A} \text{sen}(\omega(t+t_0)) \right) dt \quad (126)$$

donde $t_1 = -\pi/\sqrt{\alpha} = -t_2$ y $x_2^h(t)$ es:

$$x_2^h(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ -\sqrt{\alpha}\gamma \text{sen}(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t > t_2 \end{cases} \quad (127)$$

Desarrollando la ecuación (126) se obtiene:

$$M(t_0) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\tilde{A} \text{sen}(\omega(t+t_0)) x_2^h(t) - \tilde{\delta} (x_2^h(t))^2 \right) dt \quad (128)$$

Resolviendo la primera integral de la ecuación (128) se obtiene:

$$\begin{aligned} M^I(t_0) &= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{A} \text{sen}(\omega(t+t_0)) x_2^h(t) dt \\ M^I(t_0) &= -\tilde{A}\sqrt{\alpha}\gamma \left(\cos(\omega t_0) \int_{-\pi/\sqrt{\alpha}}^{\pi/\sqrt{\alpha}} \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\sqrt{\alpha}t) dt + \right. \\ &\quad \left. \text{sen}(\omega t_0) \int_{-\pi/\sqrt{\alpha}}^{\pi/\sqrt{\alpha}} \cos(\omega t) \text{sen}(\sqrt{\alpha}t) dt \right) \\ M^I(t_0) &= \frac{2\tilde{A}\alpha\gamma}{\omega^2 - \alpha} \text{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{\alpha}}\right) \cos(\omega t_0) \\ M^I(t_0) &= \frac{2\tilde{A}\beta}{\omega^2 - \alpha} \text{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{\alpha}}\right) \cos(\omega t_0) \end{aligned} \quad (129)$$

Resolviendo la segunda integral de la ecuación (128)

$$M^{II}(t_0) = -\tilde{\delta} \int_{t_1}^{t_2} [x_2^h(t)]^2 dt = -\tilde{\delta} \alpha \gamma^2 \int_{-\pi/\sqrt{\alpha}}^{\pi/\sqrt{\alpha}} \text{sen}^2(\sqrt{\alpha}t) dt \quad (130)$$

$$M^{II}(t_0) = -\tilde{\delta} \alpha \gamma^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \right) = -\tilde{\delta} \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \right) = -\frac{\tilde{\delta} \beta^2 \pi}{(\alpha)^{3/2}}$$

Finalmente se obtiene la función de Melnikov:

$$M(t_0) = \frac{2\tilde{A}\beta}{\omega^2 - \alpha} \text{sen} \left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{\alpha}} \right) \cos(\omega t_0) - \frac{\tilde{\delta} \beta^2 \pi}{(\alpha)^{3/2}} \quad (131)$$

Sustituyendo $\alpha = \omega_n^2$, $\beta = KM\omega_n^2$, $\tilde{\delta} = 2\zeta\omega_n/\varepsilon$ y $\tilde{A} = K\omega_n^2 A/\varepsilon$ en la ecuación (131) se obtiene:

$$M(t_0) = \frac{2K^2M\omega_n^2A}{\varepsilon(\omega^2 - \alpha)} \text{sen} \left(\frac{\omega\pi}{\omega_n} \right) \cos(\omega t_0) - \frac{2\zeta K^2M^2\omega_n^2\pi}{\varepsilon} \quad (132)$$

La ecuación (132) tiene la estructura $M(t_0) = D_1 \cos(\omega t_0) + D_2$ y claramente se tiene que si $|D_1| \geq |D_2|$, la ecuación (132) tendrá ceros. Resolviendo esta última desigualdad, se llega a la condición (133) para la existencia de un conjunto invariante caótico.

$$|\zeta| \leq \left| \frac{A\omega_n^2}{M\pi(\omega^2 - \omega_n^2)} \text{sen} \left(\frac{\omega\pi}{\omega_n} \right) \right| \quad (133)$$