

**Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada**



**CONTROL H_2 PARA SISTEMAS NO LINEALES
VARIANTES EN EL TIEMPO**

TESIS

DOCTORADO EN CIENCIAS

LEONARDO ACHO ZUPPA


ENSENADA, B. C., DICIEMBRE DEL 2000.

TESIS DEFENDIDA POR
Leonardo Acho Zuppa
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



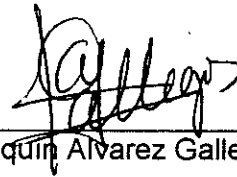
Dr. Iouri Orlov K.

Director del Comité



Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez.

Miembro del Comité



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos.

Miembro del Comité



Dr. Alexander Poznyak Gorbach

Miembro del Comité



Dr. José Luis Medina M.

*Departamento de Electrónica y
Telecomunicaciones*



Dr. Federico Graef Ziehl

Director de Estudios de Posgrado

Diciembre del 2000.

**Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada**

**División de Física Aplicada
Departamento de Electrónica y
Telecomunicaciones**

Control H_∞ para Sistemas no Lineales Variantes en el Tiempo

TESIS

**que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener
el grado de DOCTOR en CIENCIAS presenta:**

Leonardo Acho Zuppa

Ensenada, Baja California, México. Diciembre del 2000.

RESUMEN de la Tesis de **Leonardo Acho Zuppa**, presentada como requisito parcial, para la obtención del grado de **DOCTOR en CIENCIAS en ELECTRÓNICA y TELECOMUNICACIONES**. Ensenada, Baja California, México. Diciembre del 2000.

Control H_∞ para Sistemas no Lineales Variantes en el Tiempo

Resumen aprobado por:



Dr. Iouri Orlov
Director de Tesis

RESUMEN

Síntesis de controladores H_∞ no lineales son presentados para sistemas variantes en el tiempo vía retroalimentación continua y muestreada de la salida del sistema. La síntesis del controlador H_∞ no lineal para sistemas variantes en el tiempo vía retroalimentación continua es desarrollado para dar solución al caso global y local. La solución global está basado en la solución de desigualdades apropiadas de Hamilton-Jacobi-Isaacs, mientras que la solución local está basada en la solución de ecuaciones de Riccati perturbadas que aparecen de la solución al problema de control H_∞ del sistema linealizado. La síntesis del controlador H_∞ vía retroalimentación muestreada de la salida del sistemas (caso local) es obtenida a partir de la solución al problema de control H_∞ vía retroalimentación continua de la salida del sistema.

Palabras Claves: Control H_∞ , Sistemas no Lineales, Estabilidad.

ABSTRACT of the Thesis of **Leonardo Acho Zuppa**, presented as a partial requirement to obtain the degree of **DOCTOR of SCIENCES** in the field of **ELECTRONICS** and **TELECOMMUNICATIONS**. Ensenada, Baja California, México. December 2000.

Nonlinear H_∞ Control for Time-Varying Systems

ABSTRACT

Nonlinear H_∞ -controller synthesis is presented for time-varying systems via time-continuous and sampled-data measurement feedback. The Nonlinear H_∞ -controller synthesis for time-varying systems via continuous measurement feedback is developed for both global and local solution. The global solution is based on a solution to appropriate strict Hamilton-Jacobi-Isaacs inequalities, whereas the local solution is derived by means of a certain perturbation of the Riccati equations appearing in solving the linear H_∞ -control problem for the linearized system. The H_∞ -controller synthesis for sampled-data measurement feedback (local case) is derived from that of the time-continuous measurement feedback H_∞ -control problem.

Keywords: Control H_∞ , Nonlinear Systems, Stability.

A mi PADRE: Fernando Acho Lozano
y mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a los siguientes actores, que gracias a ellos, fue posible el presente trabajo.

- 1) Al Dr. Iouri Orlov, por su liderazgo en la dirección de la tesis, y por sus conocimientos que siempre estuvieron en la frontera del saber.
- 2) A los integrantes del comité de tesis: Dr. Rafael Kelly Martínez, Dr. Joaquín Álvarez Gallegos, Dr. Alexander Poznyak, por tan importantes aportaciones y sugerencias.
- 3) Al CICESE, por ser mi hogar durante mi estancia.
- 4) A la UABC.
- 5) Al CONACYT.

Índice General

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 1 |
| I Concepto de Norma H_∞ | 5 |
| I.1 Introducción | 5 |
| I.2 Definición de norma H_∞ para sistemas lineales | 5 |
| I.3 Planteamiento de la 'norma H_∞ ' para sistemas no lineales invariantes en el tiempo | 9 |
| I.4 Planteamiento de la 'norma H_∞ ' para sistemas no lineales variantes en el tiempo | 10 |
| II Control H_∞ para Sistemas Lineales | 12 |
| II.1 Introducción | 12 |
| II.2 Formulación y solución al problema de control H_∞ lineal | 12 |
| II.3 Ejemplo numérico | 15 |
| III Control H_∞ para Sistemas no Lineales | 21 |
| III.1 Introducción | 21 |
| III.2 Control H_∞ para sistemas no lineales | 22 |
| III.3 Control H_∞ no lineal basado en la linealización del sistema | 25 |
| IV Control H_∞ para Sistemas no Lineales Periódico | 28 |
| IV.1 Introducción | 28 |
| IV.2 Control H_∞ : Caso global | 29 |
| IV.3 Control H_∞ : Caso local | 32 |
| IV.4 Procedimiento de diseño de control H_∞ | 36 |
| IV.5 Demostración de los resultados obtenidos | 36 |
| IV.5.1 Demostración del teorema 4 | 36 |
| IV.5.2 Demostración del teorema 5 | 39 |
| IV.6 Resultados numéricos de control H_∞ para Robots Manipuladores | 42 |
| V Control H_∞ para Sistemas no Lineales Variante en el Tiempo | 50 |
| V.1 Introducción | 50 |
| V.2 Control H_∞ : Caso global | 50 |
| V.3 Control H_∞ : Caso local | 53 |
| V.3.1 Demostración del lema 1 | 56 |
| VI Control H_∞ no Lineal vía Mediciones Discretas | 60 |
| VI.1 Introducción | 60 |
| VI.2 Control local H_∞ modificado | 60 |
| VI.3 Síntesis de control H_∞ vía mediciones discretas | 63 |
| VI.4 Resultados numéricos | 66 |

| | |
|--|-----------|
| VII Conclusiones y Trabajo a Futuro | 70 |
| Apéndice A | 72 |
| Literatura Citada | 75 |

Índice de Figuras

| Figura | Pág. |
|--|------|
| 1 Péndulo Simple. | 1 |
| 2 Respuesta en frecuencia. | 8 |
| 3 Péndulo simple. | 16 |
| 4 Resultados numéricos con $x_1(0)=0.7358$, $x_2(0)=\xi_1(0)=\xi_2(0)=0$. | 19 |
| 5 Resultados numéricos del sistema perturbado con $w_1=2$ y $w_2=1$. | 20 |
| 6 Gráfica de las trayectorias: controlador H_∞ no lineal (línea sólida) y controlador H_∞ lineal (línea punteada); caso no perturbado. | 45 |
| 7 Gráfica de las trayectorias: controlador H_∞ no lineal (línea sólida) y controlador H_∞ lineal (línea punteada); caso perturbado. | 46 |
| 8 Gráfica de $(x_1(t), x_2(t), u(t))$: Columna izquierda caso no perturbado, columna derecha caso perturbado; controlador H_∞ no lineal (líneas sólidas) y controlador H_∞ lineal (líneas punteadas). | 47 |
| 9 Comparación de desempeño. Gráfica de $\int_0^t \ z(\tau)\ ^2 d\tau$ controlador H_∞ no lineal (líneas sólidas) y lineal (líneas punteadas): a) caso no perturbado, y b) caso perturbado. | 48 |
| 10 Simulaciones numéricas robot de dos grados de libertad, caso no perturbado. | 49 |
| 11 Simulaciones numéricas robot de dos grados de libertad, caso perturbado. | 49 |
| 12 Menores principales. | 67 |
| 13 Simulaciones del sistema no perturbado. | 68 |
| 14 Simulaciones del sistema perturbado con $w_1=0.01e^{-t}$ y $w_2=0.01$. | 68 |
| 15 Simulaciones del sistema perturbado con $w_1=0.01e^{-t}$ y $w_2=0.02$. | 69 |

Introducción

La presente memoria es acerca de control H_∞ . Se considera un sistema a controlar con la presencia de perturbaciones, donde el objetivo del controlador diseñado usando teoría de control H_∞ , tiene por objetivos :

1) Estabilizar asintóticamente en forma global o local (según el caso) el sistema cuando éste no está sujeto a perturbaciones.

2) Con la presencia de perturbaciones, y con el sistema inicializado en el origen, el sistema debe tener estabilidad L_2 , tomando como entrada las perturbaciones y como salida una salida virtual.

La salida a la que hace referencia el punto 2), es una salida especialmente diseñada para que el controlador pueda trabajar con un desempeño apropiado a los intereses del objetivo de control. Suponga que se quiere diseñar un controlador H_∞ para regular la posición vertical de un péndulo simple, o robot de un grado de libertad (ver fig. 1), donde q es el ángulo medido con respecto al eje superior vertical, m es la masa del péndulo, l es la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad y u es la entrada de control o torque aplicado. Suponga que existe perturbación en el torque aplicado.

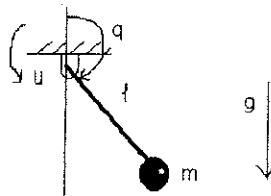


Fig. 1 Péndulo simple.

Claramente el objetivo de control es mantener el péndulo en la posición vertical. Suponga que se especifica una salida virtual en función de la posición angular y la entrada de control. En este ejemplo, el controlador logrará estabilidad asintótica (local o global, según el caso) bajo la ausencia de la perturbación en el torque aplicado, pero con la incidencia de ésta, al satisfacer los requerimientos de estabilidad L_2 , el controlador buscará atenuar el efecto de la perturbación manteniendo q y u lo más cercano posible a cero, esto debido a que la salida virtual especificada involucra la posición angular y la entrada de control. De tal manera que si el desempeño fuera especificado el atenuar el efecto de la perturbación y mantener q y u los más pequeño posible, con el planteamiento de la salida virtual antes mencionado, satisfará este requerimiento. Si se quisiera involucrar a la velocidad angular (\dot{q}), especificando que cuando el sistema esté perturbado, mantener q , \dot{q} y u los más pequeño posible, habría que incluir esta variable dentro de la salida virtual. Hay que destacar que los requerimientos del sistema perturbado, el sistema tiene que ser inicializado en su punto de equilibrio antes de empezar la incidencia de la perturbación.

En la presente, diferentes esquemas de control H_∞ son desarrolladas para sistemas lineales y no lineales, tanto por retroalimentación continua de la salida, como vía mediciones (observaciones) discretas de la salida del sistema. La formulación y solución al problema de control H_∞ se basa en la representación en variables de estados de la planta en consideración. El controlador resultante, en ambos casos, es un controlador con dinámica, que tiene como entrada la salida del sistema. El controlador diseñado para sistemas no lineales vía retroalimentación continua de la salida es un controlador de dinámica suave, mientras que para el caso de mediciones discretas, dicho controlador tendrá, además de dinámica continua, dis-

continuidades (saltos) en los instantes de medición de la salida del sistema (en los instantes de muestreo).

Recientemente han sido reportados muchos trabajos sobre diseño de controladores H_∞ , como los mostrados en la sección de referencias dadas al final de la presente, entre otros muchos más. Sin embargo, a la realización del presente trabajo de investigación, poco se ha hecho con respecto al diseño de controladores H_∞ para sistemas no lineales variantes en el tiempo, tanto para mediciones continuas, como para mediciones discretas. También el desarrollo de controladores H_∞ con aplicaciones, no han sido completamente desarrolladas. Desde el punto de vista de implementación de controladores de regulación, en la gran mayoría de los casos, se obtiene que el sistema en lazo cerrado es invariante en el tiempo, cosa que no pasa en el problema de seguimiento de trayectorias. De igual manera, para el diseño de controladores vía mediciones discretas, el sistema en lazo cerrado será variante en el tiempo; uno de los motivos por el cual en el presente trabajo se presenta la metodología para la síntesis de controladores para sistemas no lineales variantes en el tiempo.

El objetivo y aportaciones de este trabajo de investigación es el desarrollo de controladores H_∞ para sistemas no lineales variantes en el tiempo, vía mediciones continuas; y la síntesis de controladores con mediciones discretas, a partir de los resultados generados del punto anterior. En detalle, se han hecho las siguientes aportaciones:

- 1) Se generalizaron los resultados de la teoría de control H_∞ para sistemas variantes en el tiempo.
- 2) Se obtuvieron resultados del diseño de controladores para sistemas usando mediciones discretas de la salida del sistema.

El diseño de controladores H_∞ vía mediciones continuas se consideran dos casos. El primero es el caso global, siendo el caso local el segundo. La derivación del controlador del caso global se realiza por medio de la correcta solución a ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi-Isaacs, mientras que el caso local, se resuelve mediante la obtención de la correcta solución a ecuaciones diferenciales de Riccati.

La organización de la presente memoria es como sigue. En el capítulo uno se presenta la definición de la norma H_∞ , punto de origen para el diseño de controladores H_∞ , así como diversas representaciones alternas para definir la 'norma H_∞ ' para sistemas no lineales invariantes y variantes en el tiempo. El capítulo dos recolecta los resultados reportados de la síntesis de controladores H_∞ para sistemas lineales invariantes en el tiempo, mientras que el capítulo tres recolecta los resultados publicados del diseño de controladores para sistemas no lineales invariantes en el tiempo, vía retroalimentación de la salida de la planta. El capítulo cuatro se muestran las aportaciones del presente trabajo, de la síntesis de controladores H_∞ para sistemas no lineales variantes en el tiempo periódico. De igual modo, las aportaciones hechas del diseño de controladores H_∞ , para sistemas no lineales variantes en el tiempo vía mediciones continuas, son mostradas en el capítulo cinco; entre tanto, las aportaciones para el caso de mediciones discretas, son mostradas en el capítulo seis.

Capítulo I

Concepto de Norma H_∞

I.1 Introducción

Para evaluar o medir el desempeño de un sistema, la definición de norma puede ser muy útil. La norma es una generalización de la distancia entre dos puntos a vectores y matrices (Khalil, 1996).

Inicialmente, el desarrollo de la teoría de control H_∞ se basó en el concepto de la norma H_∞ de sistemas lineales estables. Posteriormente se planteó la ‘norma H_∞ ’ para sistemas no lineales con el propósito de extender las ideas de control H_∞ para este tipo de sistemas (Isidori y Astolfi, 1992; Aho *et al.*, 1999; Orlov y Aho, 1999.). El objetivo del presente capítulo es dar la definición de la norma H_∞ para sistemas lineales y no lineales.

El desarrollo del capítulo es como sigue. En la sección 2 se plantea la definición de la norma H_∞ para sistemas lineales y en la sección 3 y 4 se define ‘la norma H_∞ ’ para sistemas no lineales invariantes en el tiempo y sistemas no lineales variantes en el tiempo respectivamente.

I.2 Definición de la norma H_∞ para sistemas lineales

La norma H_∞ se aplica a funciones de variable compleja que pertenecen a los espacios llamados *Espacios Hardy*, de ahí el origen de la ‘H’ en H_∞ . El tipo de funciones que pertenecen a los espacios Hardy son aquellas funciones de variable compleja que son analíti-

cas en el semiplano derecho cerrado, y acotadas en la variable compleja¹ (esto excluye los sistemas con retardo).

La norma H_∞ de un sistema lineal con una entrada y una salida está definida como sigue :

Definición 1 (Skogestad y Postlethwaite, 1996).- *La norma H_∞ de una función de transferencia escalar estable $G(s)$, es el valor máximo de $|G(jw)|$ como una función de la frecuencia, esto es,*

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_w |G(jw)|. \quad (1)$$

Con esta definición dada de la norma H_∞ , es posible formalizar, desde el punto de vista aplicaciones a control, la definición de espacios Hardy- ∞ (H_∞) como el conjunto de funciones de transferencias con norma H_∞ acotada (Skogestad y Postlethwaite, 1996).

Para el caso de sistema lineales con múltiples entradas y múltiples salidas, la generalización de la definición 1 se aplica descomponiendo en valores singulares la función de transferencia y tomando el máximo como una función de la frecuencia (Skogestad y Postlethwaite, 1996; Zhou *et al.*, 1996).

El concepto de la norma H_∞ puede ser descrito analizando la definición de la norma H_∞ . En esencia, la norma H_∞ de un sistema lineal, con una entrada y una salida, expresado en respuesta a la frecuencia, viene siendo la máxima ganancia del sistema.

Otra forma de calcular la norma H_∞ de una función de transferencia escalar estable es (ver Zhou *et al.*, 1998):

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s)>0} |G(s)|, \quad (2)$$

¹ Si $G(s)$ es una función de transferencia de un sistema SISO, ésta no debe ser impropia y debe ser estable.

donde claramente (2), se simplifica a (1), debido a que la función es analítica en $\text{Re}(s) > 0$, y su valor supremo se encuentra en la frontera, que es el eje vertical del plano descrito por $\text{Re}(s) > 0$ (Zhou *et al.*, 1988, pág. 47 y 48).

También están los espacios Hardy-2 (H_2) que representan el conjunto de funciones con transferencia estable y estrictamente propia (Skogestad y Postlethwaite, 1996), donde la norma H_2 de una función de transferencia estable y estrictamente propia se define como sigue:

Definición 2 (Skogestad y Postlethwaite, 1996).- *La norma H_2 de una función de transferencia estable y estrictamente propia está dada como:*

$$\|G(s)\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(jw)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De la comparación de la definición 1 y 2, la primera se enfoca al valor máximo de la función y la segunda a su área bajo la curva.

Otra forma de obtener la norma H_∞ de un sistema con función de transferencia estable es usando la siguiente relación (Skogestad y Postlethwaite, 1996):

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{u \in U} \frac{\|y_{ss}\|_T}{\|u\|_T}, \quad (3)$$

donde U es el conjunto de señales periódicas (de cualquier periodo $T > 0$), y_{ss} denota la salida del sistema en estado estacionario,

$$\|y_{ss}\|_T = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \|y_{ss}\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

y

$$\|u\|_T = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \|u\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Ejemplo.- Suponga que se tiene un sistema con función de transferencia estable,

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}.$$

La respuesta en frecuencia de este sistema es mostrado en la fig. 2.

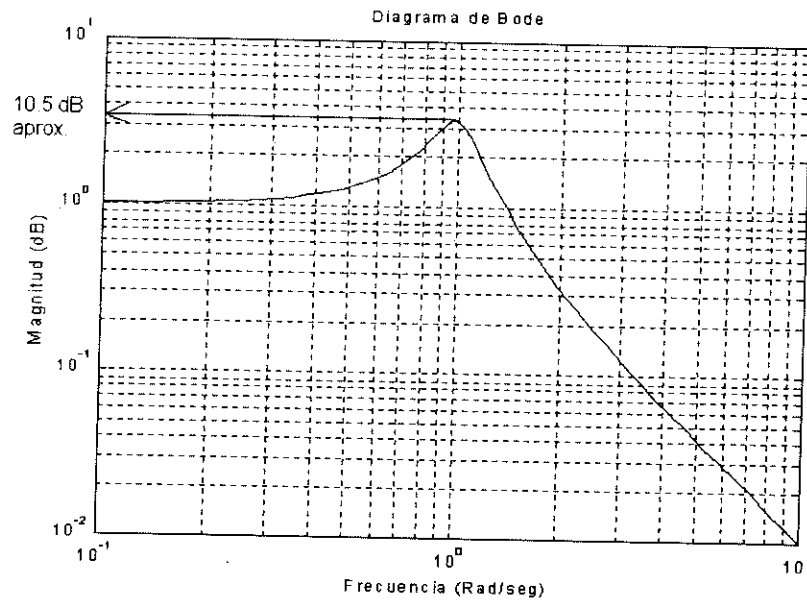


Fig.2 Respuesta en frecuencia.

De la fig. 2 y usando la definición 1, se puede apreciar que la norma H_∞ del sistema es de aproximadamente de 10.5 dB ó 3.349.

La norma H_∞ también puede ser descrita en función de la norma inducida del mapeo lineal

$$M : L_2(0, \infty) \rightarrow L_2(0, \infty),$$

$$M : u \mapsto y \triangleq h * u = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall u \in L_2(0, \infty),$$

donde $h : R \rightarrow R$ es la respuesta al impulso del sistema lineal. Se asume que

$$\|h\|_1 = \int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

La norma inducida del mapeo lineal M , viene dada como:

$$\|M\| = \sup_{\|u\|_2=1} \|y\|_2,$$

según (Doyle *et al.*, 1992), y comparando con (3), el resultado obtenido es

$$\|G(s)\|_{\infty} = \|M\|.$$

I.3 Planteamiento de la ‘norma H_{∞} ’ para sistemas no lineales invariantes en el tiempo

Para plantear la ‘norma H_{∞} ’ de un sistema no lineal invariante en el tiempo estable con operador $T_{yu} : u \rightarrow y$, con $u \in R^m$ siendo la entrada del sistema y $y \in R^p$ la salida del mismo, considérese el caso de que u es seccionalmente continua a tramos y el sistema inicializado con condiciones iniciales cero. La ‘norma H_{∞} ’ se define como:

$$\|T_{yu}\|_{\infty} = \sup_{s \geq 0} \|T_{yu}\|_s$$

donde

$$\|T_{yu}\|_s \triangleq \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{(\int_0^s \|y\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}}{(\int_0^s \|u\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}}. \quad (6)$$

Para el caso de un sistema lineal estable, la definición en (6) puede ser usada para calcular la norma H_{∞} de la función de transferencia (Doyle *et al.*, 1992), por lo que la definición en (6) concuerda con la definición uno para el caso de sistemas lineales.

Nótese que si existe $\|T_{yu}\|_\infty$, se puede encontrar una constante real positiva $\gamma < \infty$, tal que se cumpla la siguiente desigualdad

$$\frac{\left(\int_0^t \|y\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_0^t \|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \|T_{yu}\|_\infty < \gamma,$$

para cualquier función u seccionalmente continua a tramos y cualquier $t > 0$ (finito).

En resumen, se ha demostrado que si existe un número real positivo $\gamma < \infty$ tal que $\|T_{yu}\|_\infty < \gamma$, entonces, para toda u seccionalmente continua a tramos y cualquier $t > 0$ (finito) se satisface

$$\int_0^t \|y\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^t \|u\|^2 dt. \quad (7)$$

Si (7) se cumple, entonces $\|T_{yu}\|_\infty \leq \gamma$.

La ecuación (7) es usada en vez de (6) para plantear y resolver el problema de control subóptimo H_∞ (control H_∞ por simplicidad) para sistemas no lineales invariantes en el tiempo (Isidori y Astolfi, 1992), pero especificando otras variables para y y u .

I.4 Planteamiento de la ‘norma H_∞ ’ para sistemas no lineales variantes en el tiempo

Para plantear la ‘norma H_∞ ’ de un sistema no lineal variante en el tiempo estable con operador $T_{yu} : u \rightarrow y$, con $u \in R^m$ siendo la entrada del sistema y $y \in R^p$ la salida del mismo, considérese el caso de que u es seccionalmente continua a tramos y el sistema inicializado con condiciones iniciales cero en $t = t_0 > 0$. La ‘norma H_∞ ’ se define como:

$$\|T_{yu}\|_\infty = \sup_{t_1 \geq t_0} \|T_{yu}\|_{(t_0, t_1)}$$

donde

$$\|T_{yu}\|_{(t_0, t_1)} \triangleq \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\left(\int_{t_0}^{t_1} \|y\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

Nótese que si existe $\|T_{yu}\|_{\infty}$, se puede encontrar una constante real positiva $\gamma < \infty$, tal que se cumpla la siguiente desigualdad

$$\frac{\left(\int_{t_0}^{t_1} \|y\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \|T_{yu}\|_{\infty} < \gamma,$$

para cualquier función u seccionalmente continua a tramos y cualquier $t_1 > t_0 > 0$.

En resumen, se ha demostrado que si existe un número real positivo $\gamma < \infty$ tal que $\|T_{yu}\|_{\infty} < \gamma$, entonces, para toda u seccionalmente continua a tramos y cualquier $t_1 > t_0 > 0$ se satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \|y\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2 dt. \quad (9)$$

Si (9) se cumple, entonces $\|T_{yu}\|_{\infty} \leq \gamma$.

La ecuación (9) es usada en vez de (8) para plantear y resolver el problema de control subóptimo H_{∞} (control H_{∞} por simplicidad) para sistemas no lineales variantes en el tiempo (Acho *et al.*, 1999), pero especificando otras variables para y y u .

Cuando la salida $y(t)$ de un sistema, del resultado de aplicar una entrada $u(t)$ seccionalmente continua a tramos y el sistema inicializado con condiciones iniciales cero en $t = t_0 > 0$, satisface (9) para una $\gamma \geq 0$ dada y para cualquier $t_1 > t_0 > 0$, se dice que el sistema tiene una ganancia L_2 menor que γ (Isidori y Astolfi, 1992; Chung y Hauser, 1997; Acho *et al.*, 1999; Arjan, 1996; Jian-Bo *et al.*, 1998; entre otros muchos más). Tal definición será usada para plantear el problema de control H_{∞} .

Capítulo II

Control H_∞ para Sistemas Lineales

II.1 Introducción

Los primeros resultados logrados de control H_∞ para sistemas lineales invariantes en el tiempo (control H_∞ lineal), representados en variables de estado, fueron reportados por (Doyle *et al.*, 1989).

El objetivo de este capítulo es presentar un resumen del resultado principal de control H_∞ para sistemas lineales representados en variables de estados.

La organización del presente capítulo es como sigue. La sección 2 presenta la formulación y solución al problema de control H_∞ lineal. La sección 3 muestra un ejemplo numérico del diseño de control H_∞ , para regular la posición vertical de un péndulo simple.

II.2 Formulación y solución del problema de control H_∞ lineal

Se supone que la representación en variables de estado del sistema lineal está dada como sigue,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados, $u \in R^m$ es el vector de entrada de control, $w \in R^r$ es el vector de perturbaciones (sujeto a que sea seccionalmente continua a tramos), $z \in R^l$ es el

vector de la salida virtual a controlar, $y \in R^p$ es el vector de salida de la planta. Las matrices constantes $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$ son conocidas y de dimensiones apropiadas.

Las suposiciones que debe cumplir el sistema (10) son:

i) (A, B_1) es controlable y (C_1, A) es observable.

ii) (A, B_2) es estabilizable y (C_2, A) es detectable.

iii) $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$.

iv) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Se dice que controlador dinámico de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \hat{A}_{\infty} \xi - Z_{\infty} L_{\infty} y, \quad \xi \in R^n \\ u &= F_{\infty} \xi, \end{aligned} \quad (11)$$

es un controlador admisible, si el sistema en lazo cerrado (10) y (11), con $w = 0$, es asintóticamente estable.

El problema de control H_{∞} consiste en diseñar un controlador admisible, tal que si existe $\|T_{zw}\|_{\infty}$ y con el sistema inicializado el punto de equilibrio, encontrar un número real $\gamma \geq 0$ de tal manera que la siguiente desigualdad del sistema en lazo cerrado (10) y (11),

$$\int_0^t \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^t \|w(t)\|^2 dt \quad (12)$$

se cumpla con $w \neq 0$ seccionalmente continua a tramos, y para toda $t > 0$. Con respecto a w , w se dice que es una perturbación admisible, si para el sistema inicializado en el origen, las trayectorias del sistema perturbado permanecen cerca del punto de equilibrio, de tal manera

que si el sistema deja de ser perturbado, el sistema converge nuevamente al origen. Esta suposición se hará en el resto del presente documento.

La desigualdad (12) indica realmente que cuando el sistema está perturbado ($w \neq 0$), se cumple

$$\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma,$$

como fue mostrado en el capítulo uno al reemplazar y por z y u por w .

La solución al problema de control H_{∞} anunciado previamente es postulado a continuación como teorema.

Teorema 1 (Doyle *et al.*, 1989; Zhou *et al.*, 1996).- *Existirá un controlador admisible que resuelve el problema de control H_{∞} lineal si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:*

i) Existe una solución positiva definida de la ecuación de Riccati

$$X_{\infty}A + A^T X_{\infty} + C_1^T C_1 + X_{\infty} \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] X_{\infty} = 0. \quad (13)$$

ii) Existe una solución positiva definida de la ecuación de Riccati

$$Y_{\infty}A^T + AY_{\infty} + B_1 B_1^T + Y_{\infty} \left[\frac{1}{\gamma^2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right] Y_{\infty} = 0. \quad (14)$$

iii) $\max_i |\lambda_i(X_{\infty}Y_{\infty})| < \gamma^2$,

donde $\lambda_i(X_{\infty}Y_{\infty})$ representa los valores propios de la matriz $X_{\infty}Y_{\infty}$.

Además, si las condiciones anteriores se cumplen, uno de tales controladores viene siendo como en (11) con,

$$\hat{A}_\infty = A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty = (I - \frac{1}{\gamma^2} Y_\infty X_\infty)^{-1}.$$

También es posible reemplazar las condiciones ii) y iii) por la siguiente condición (Isidori y Astolfi, 1992):

iv) Existe una solución positiva definida de la ecuación de Riccati,

$$\tilde{A} Z_\infty + Z_\infty \tilde{A}^T + B_1 B_1^T + Z_\infty \left[\frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_2 B_2^T X_\infty - C_2^T C_2 \right] Z_\infty = 0$$

donde $\tilde{A} = A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T X_\infty$.

Nótese que las condiciones i) e ii) del teorema 1 presentan ecuaciones de Riccati desacopladas, en tanto que si reemplazamos las condiciones antes mencionadas por la condición iv), ahora las ecuaciones de Riccati presentadas están acopladas.

II.3 Ejemplo numérico

La presente sección muestra el diseño de un regulador usando los resultados de la sección anterior sobre la teoría de control H_∞ , aplicado para regular la posición vertical de un péndulo simple. A este péndulo simple también se le conoce como un robot de un grado de libertad.

El modelo del sistema es como sigue (Smith y Smith, 1968; Spong y Vidyasagar, 1989),

$$I \ddot{q} - mgl \sin(q) = u, \quad (15)$$

donde q es la posición angular con respecto al eje vertical, I es el momento de inercia total alrededor de la unión de giro, m es la masa total, g es la aceleración de la gravedad y l es la distancia del punto de giro al centro de masa del sistema (ver fig. 3).

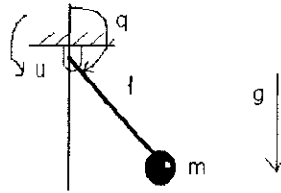


Fig.3 Péndulo simple.

Usando los parámetros $I = 1$ y $mgl = 1$, la representación en variables de estados del sistema (15) es

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (16)$$

donde w_1 es la perturbación de entrada, $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$.

Se propone como salida del sistema la posición angular del péndulo, esto es,

$$y = x_1 + w_2, \quad (17)$$

donde w_2 es la perturbación en la salida del sistema.

La linealización del sistema (16), en la posición vertical del péndulo, produce:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_2} u. \quad (18)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D_{21}} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

La salida virtual se propone como sigue,

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{12}} u. \quad (20)$$

El objetivo es diseñar un controlador H_∞ tal que regule la posición vertical del péndulo y que cumpla con los objetivos de la solución del problema de control H_∞ . Para el sistema en (18)-(20), se pueden verificar que las condiciones i),ii),iii) y iv) son satisfechas. También es importante destacar que la ecuación (20) es de diseño y tiene que contemplar algunos requerimientos de control. En este caso, se le esta pidiendo al controlador que ponga énfasis en mantener los estados del sistema cerca del punto de equilibrio y al consumo de energía de la entrada de control bajo, para cuando el sistema esta perturbado. Por ejemplo, si sólo se interesa mantener mucho énfasis en mantener cerca el estado x_1 al punto de equilibrio y poco énfasis en el consumo de energía en de entrada de control con el sistema bajo perturbación, se puede especificar (20) como:

$$z = \begin{bmatrix} 100z_1 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Para el diseño de tal controlador se usará el modelo lineal del sistema (18)-(20), donde los resultados obtenidos serán aplicados al sistema no lineal (16). Está comprobado en (Tuan y Hosoe, 1996; Isidori y Astolfi, 1992) (ver también capítulo 3) que la utilización del controlador lineal para un sistema no lineal, usando linealización, se puede usar como un solución al problema de control H_∞ en forma local; esto es, encontrar un controlador de la forma (11), tal que si $w = 0$, existe una vecindad del punto de equilibrio, donde el controlador estabiliza al sistema en forma exponencial, y con $w \neq 0$, se cumpla la condición dada en (12).

Con $\gamma = 6$ se obtiene que la solución positiva definida de la ecuación de Riccati (13) da,

$$X_{\infty} = \begin{bmatrix} 3.4731 & 2.4731 \\ 2.4731 & 2.4731 \end{bmatrix},$$

de igual modo para la ecuación de Riccati (14),

$$Y_{\infty} = \begin{bmatrix} 2.3430 & 2.5764 \\ 2.5764 & 3.2904 \end{bmatrix},$$

y $\max_i |\lambda_i(X_{\infty}Y_{\infty})| = 28.9266 < \gamma^2 = 36$; por lo que todas las condiciones del teorema 1 se cumplen, entonces el siguiente controlador dinámico da solución al problema de control H_{∞} en forma local:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -11.5796 & 1 \\ -14.9261 & -2.4044 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -11.5796 \\ -13.5217 \end{bmatrix} y$$

$$u = \begin{bmatrix} -2.4731 & -2.4731 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Los resultados numéricos son mostrados como sigue. En la figura 4 se muestran los estados del sistema con $w_1 = w_2 = 0$, donde se puede apreciar estabilidad asintótica local en forma exponencial.

La figura 5 muestra los resultados del sistema perturbado, donde la línea continua es $\int_0^t \|z(t)\|^2 dt$, y la punteada es $\gamma^2 \int_0^t \|w(t)\|^2 dt$; apreciándose claramente que se cumple la desigualdad (12).

Nótese que si las perturbaciones existen en tiempo finito, los límites de integración en (12) pueden ser extendidos al infinito. Con estos resultado numéricos se valida la aplicación de un controlador H_{∞} lineal aplicado a un sistema no lineal.

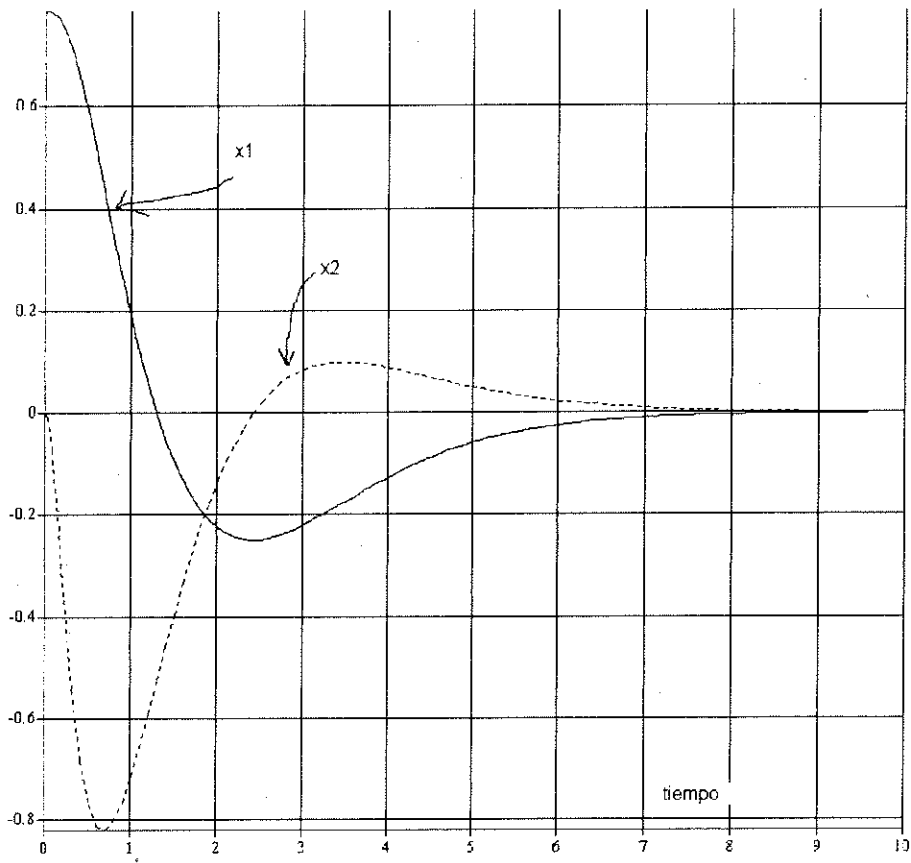


Fig.4 Resultados numéricos con $x_1(0) = 0.7358$, $x_2(0) = \xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$.

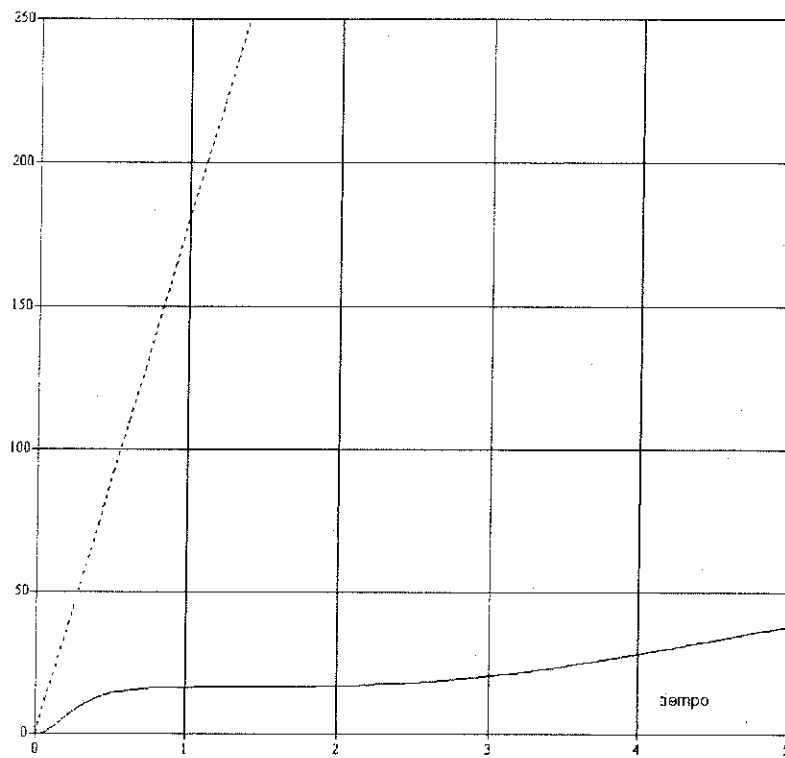


Fig.5 Resultados numéricos del sistema perturbado con $w_1 = 2$ y $w_2 = 1$.

Capítulo III

Control H_∞ para sistemas no Lineales

III.1 Introducción

Los primeros resultados con referencia al control H_∞ para sistemas no lineales (Control H_∞ no lineal) han sido reportados por (Chung y Hauser, 1997; Isidori y Astolfi, 1992; Arjan, 1996; Arjan, 1992), entre otros más.

Una de las aportaciones realizadas en los trabajos antes mencionados muestran el planteamiento del problema de control H_∞ para sistemas no lineales en forma local y las condiciones que se requieren para que este problema tenga solución. Esta solución requiere resolver las ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi Issacs. Sin embargo, si se toma la linealización del sistema en un punto de equilibrio, estas ecuaciones diferenciales parciales se transforman a ecuaciones algebraicas de Riccati; probando además que dicha solución al problema de control H_∞ del sistema linealizado es una solución local al problema de control H_∞ no lineal.

El presente capítulo muestra un resumen de los resultados sobre el tema y está organizado como sigue. En la sección dos se presenta el planteamiento y solución al problema de control H_∞ para sistemas no lineales. La sección tres trata el diseño de control H_∞ del sistema linealizado como una solución local al problema de control H_∞ no lineal.

III.2 Control H_∞ para sistemas no lineales

Para la formulación del problema de control H_∞ se considera que el sistema no lineal está modelado por las siguientes ecuaciones,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados del sistema, $u \in R^m$ es el vector de entrada de control, $w \in R^r$ es el vector de perturbaciones, $z \in R^l$ es el vector de la salida a ser controlada, $y \in R^p$ es el vector de salida del sistema. Sin pérdida de generalidad, se supone que el origen es el punto de equilibrio del sistema. Se supone que las funciones $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $k_{12}(x)$, $k_{21}(x)$ son funciones suaves. Se asume que $f(0) = 0$, $h_1(0) = 0$, y $h_2(0) = 0$.

El sistema en (21) debe satisfacer las siguientes suposiciones,

$$h_1^T(x)k_{12}(x) = 0, \quad k_{21}(x)g_1^T(x) = 0,$$

$$k_{12}^T(x)k_{12}(x) = I, \quad k_{21}(x)k_{21}^T(x) = I.$$

Las suposiciones anteriores pueden ser suavizadas, sin embargo, estas suposiciones se cumplen en la gran mayoría de los casos de sistemas perturbados, como será evidenciado en el capítulo cuatro en aplicaciones a seguimientos de trayectorias de robots manipuladores.

El planteamiento de control H_∞ requiere de un controlador dinámico de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, y), \quad \eta(\xi, y) \in R^n \\ u &= \theta(\xi), \quad \theta(\xi) \in R^m \end{aligned} \quad (22)$$

tal que si las perturbaciones son cero ($w = 0$), el sistema en lazo cerrado (21), (22) es asintóticamente estable en forma local. A tal controlador con esta propiedad se le conoce como un controlador admisible.

Se supone que las funciones η y θ valen cero en el origen del sistema, esto es, $\eta(0, 0) = 0$ y $\theta(0) = 0$; de tal manera que el sistema en lazo cerrado, sin pérdida de generalidad, tiene su punto de equilibrio el origen.

Obsérvese que la dinámica del controlador en (22) tiene como entrada la salida de la planta.

El problema de control H_∞ consiste en diseñar un controlador admisible, tal que si existe $\|T_{zw}\|_\infty$ y con el sistema inicializado el punto de equilibrio, encontrar un número real $\gamma \geq 0$ de tal manera que la siguiente desigualdad del sistema en lazo cerrado (10) y (11),

$$\int_0^t \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^t \|w(t)\|^2 dt, \quad (23)$$

se cumpla con $w \neq 0$ seccionalmente continua a tramos, y para toda $t > 0$.

Para postular el teorema que muestra la solución del problema de control H_∞ de sistemas no lineales se requiere de la siguiente definición de detectabilidad,

Definición 3 (Isidori y Astolfi, 1992).- *Suponga que $f(0) = 0$ y $h(0) = 0$. La pareja $\{f, h\}$ se dice que es localmente detectable si existe una vecindad U del punto $x = 0$ tal que, si $x(t)$ es una trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x)$ satisfaciendo que $x(0) \in U$, entonces $h(x(t))$ está definida para toda $t \geq 0$ y si $h(x(t)) = 0$ para toda $t \geq 0$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.*

El siguiente teorema muestra cómo puede ser resuelto el problema de control H_∞ .

Teorema 2 (Isidori y Astolfi, 1992).-*Considérese las siguientes suposiciones para el sistema (21):*

H1) La pareja $\{f, h_1\}$ es localmente detectable.

H2) Existe una función $V(x)$ definida positiva y suave, definida localmente en la vecindad del origen, la cual satisface la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs,

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \gamma^2 \alpha_1^T(x) \alpha_1(x) - \alpha_2^T(x) \alpha_2(x) + h_1^T(x) h_1(x) = 0 \quad (24)$$

donde

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (25)$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{1}{2} g_2^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T. \quad (26)$$

H3) Existe una matriz $G \in R^{n \times p}$ tal que el equilibrio $x = 0$ del sistema

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x) \alpha_1(x) - G h_2(x)$$

es asintóticamente estable en forma local.

H4) Existe una función $W(x, \xi)$ semidefinida positiva y suave, definida localmente en la vecindad del origen, sujeta a que $W(0, \xi) > 0$ por cada $\xi \neq 0$, tal que satisface la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_e(x, \xi) + h_e^T(x, \xi) h_e(x, \xi) + \gamma^2 \phi^T(x, \xi) \phi(x, \xi) = 0 \quad (27)$$

donde

$$f_e(x, \xi) = \begin{pmatrix} f(x) + g_1(x) \alpha_1(x) + g_2(x) \alpha_2(x) \\ f(\xi) + g_1(\xi) \alpha_1(\xi) + g_2(\xi) \alpha_2(\xi) + G[h_2(x) - h_2(\xi)] \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$h_c(x, \xi) = \alpha_2(\xi) - \alpha_2(x) \quad (29)$$

$$\phi(x, \xi) = \frac{1}{2\gamma^2} g_c^T(x) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^T \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^T \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$g_c(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ Gk_{21}(x) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Si las suposiciones antes mencionadas se dan, entonces un controlador admisible que resuelve el problema de control H_∞ en forma local es:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi) + g_1(\xi)\alpha_1(\xi) + g_2(\xi)\alpha_2(\xi) + G[y - h_2(\xi)], \\ u &= \alpha_2(\xi). \end{aligned} \quad (32)$$

La demostración de este teorema puede ser encontrado en (Isidori y Astolfi, 1992). De esta última referencia también se comprueba que si el sistema fuera lineal, se obtendrían los mismos resultados del controlador H_∞ lineal mostrado en el capítulo dos. Con respecto al controlador especificado, éste no es único, esto es, se pueden derivar más controladores que den solución al problema de control H_∞ (ver Isidori y Astolfi, 1992 sección 7)

III.3 Control H_∞ no lineal basado en la linealización del sistema

Considérese la linealización del sistema (21) en el punto de equilibrio (el origen del sistema),

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

donde $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$, $B_1 = g_1(0)$, $B_2 = g_2(0)$, $C_1 = \frac{\partial h_1}{\partial x}(0)$, $D_{12} = k_{12}(0)$, $C_2 = \frac{\partial h_2}{\partial x}(0)$, y $D_{21} = k_{21}(0)$.

A continuación se enlistan las suposiciones que darán solución al problema de control H_∞ en forma local usando el modelo linealizado del sistema (21).

A1) Existe una solución positiva definida de a la ecuación algebraica de Riccati,

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + P \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P = 0 \quad (34)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P] x \quad (35)$$

sea exponencialmente estable.

A2) Existe una solución positiva definida de la ecuación algebraica de Riccati,

$$\tilde{A} Z + Z \tilde{A}^T + B_1 B_1^T + Z \left[\frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2^T C_2 \right] Z = 0 \quad (36)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [\tilde{A} - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)] x \quad (37)$$

sea exponencialmente estable ($\tilde{A} = A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T P$).

Teorema 3 (Isidori y Astolfi, 1992).- *Si las condiciones A1) y A2) son satisfechas, entonces un controlador admisible que resuelve el problema de control H_∞ en forma local es:*

$$\dot{\xi} = (A + [\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T] P - Z C_2^T C_2) \xi + Z C_2^T y$$

$$u = -B_2^T P \xi. \quad (38)$$

La principal aportación del teorema 3 dice que si se tiene un sistema no lineal, la solución al problema de control H_∞ del sistema linealizado es una solución del problema de control H_∞ local del sistema no lineal. Obsérvese que el controlador dado en (38) coincide con el controlador en (11) mostrado en el capítulo dos. Evidentemente, es más sencillo resolver el problema de control H_∞ local usando los resultados del teorema 3 en lugar del teorema 2, esto debido a la naturaleza de las ecuaciones involucradas. Sin embargo, los resultados del controlador en el teorema 2 muestran un controlador no lineal, la cual tiene más propiedades que el controlador lineal usado en el teorema 1, como lo es la región de atracción y perturbaciones admisibles.

Capítulo IV

Control H_∞ para Sistemas no Lineales Periódico

IV.1 Introducción

El objetivo del presente capítulo es el contener el avance de los resultados de control H_∞ para sistemas no lineales periódicos. Estos resultados han sido reportados en (Orlov y Acho, 1999). Los resultados obtenidos han sido aplicados al control de seguimiento de trayectorias periódicas para robots manipuladores rígidos con articulaciones rotacionales (Acho *et al.*, 2001).

El planteamiento y solución del problema de control H_∞ , para sistemas no lineales periódicos, tiene dos casos. El primero es el planteamiento y solución global, y el segundo, es el planteamiento y solución local al problema de control H_∞ . La solución local se obtiene por medio de la adecuación de un controlador no lineal, el cual tiene mejor desempeño que el controlador lineal usado en la solución del problema de control H_∞ en forma local, a partir de la linealización del sistema (ver capítulo 3). El procedimiento empleado para alcanzar los resultados de interés son también mostrados en el presente capítulo.

El arreglo de este capítulo es como sigue. La sección dos muestra el planteamiento y solución del problema de control H_∞ global, mientras que el caso local es tratado en la sección tres. Sección cuatro muestra un algoritmo de diseño de control H_∞ . En la sección cinco se presenta la demostración de los resultados obtenidos. Finalmente, la sección seis muestran ejemplos numéricos de diseño de control H_∞ local para el seguimiento de trayectorias pe-

riódicas de robots manipuladores. Los resultados numéricos muestran que el controlador no lineal obtenido tiene un mejor desempeño que la solución del problema de control H_∞ usando la linealización del sistema.

IV.2 Control H_∞ : Caso global

Considérese el sistema no lineal variante en el tiempo periódico, gobernado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) + g_1(x(t), t)w(t) + g_2(x(t), t)u(t) \\ z(t) &= h_1(x(t), t) + k_{12}(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= h_2(x(t), t) + k_{21}(x(t), t)w(t), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

donde $x \in R^n$ es el estado, $t \geq 0$ es el tiempo, $u \in R^m$ es la entrada, $w \in R^r$ es el vector de perturbaciones, $z \in R^s$ es la salida virtual a controlar, $y \in R^p$ representa las mediciones disponibles del sistema. Las funciones $f(x, t)$, $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$, $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $k_{12}(x, t)$, $k_{21}(x, t)$ se suponen periódicas todas con el mismo periodo T , continuamente diferenciables en x y continuas con respecto a t . También se supone que $f(0, t) = 0$, $h_1(0, t) = 0$ y $h_2(0, t) = 0$ para toda $t \in [0, \infty)$.

Un controlador dinámico de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, y, t), \quad \eta(\xi, y, t) \in R^v \\ u &= \theta(\xi, t), \quad \theta(\xi, t) \in R^m \end{aligned} \quad (40)$$

se dice que es un controlador admisible si las funciones $\eta(\xi, y, t)$, $\theta(\xi, t)$ son continuas en todos los argumentos y periódicas con periodo T en el tiempo, con $\eta(0, 0, t) = 0$ y $\theta(0, t) = 0$ para toda $t \in [0, \infty)$, y el sistema en lazo cerrado (39), (40), es asintóticamente estable en

forma global con $w = 0$. Nótese que acorde con el teorema 45 de (Vidyasagar, 1978, p.141) la estabilidad asintótica de un sistema no lineal periódico en algún instante $t_0 \geq 0$, es equivalente a su estabilidad asintótica uniforme sobre el intervalo $[0, \infty)$.

Dado un número real $\gamma \geq 0$, se dice que el sistema (39), (40) tiene una ganancia L_2 menor que γ , si la respuesta de z , del resultado de aplicar una perturbación w , satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \quad (41)$$

para toda $t_1 > t_0 \geq 0$ y para todas las funciones $w(t)$ seccionalmente continuas y con el sistema inicializado en el punto de equilibrio ($x(t_0) = \xi(t_0) = 0$).

El problema de control H_∞ consiste en encontrar un controlador admisible (40), tal que la ganancia L_2 del sistema en lazo cerrado (39), (40), sea menor a γ . Obsérvese que la definición de la ganancia L_2 usada, es en sí, la definición de la norma L_2 truncada.

Se supone que el sistema (39) satisface:

$$\begin{aligned} h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) &= 0, & k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) &= I \\ k_{21}(x, t)g_1^T(x, t) &= 0, & k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) &= I. \end{aligned} \quad (42)$$

A continuación se dan las hipótesis bajo las cuáles se derivará la solución global del problema de control H_∞ .

H1) Existe una función $F(x)$ definida positiva y una función $V(x, t)$ suave, positiva definida, periódica y radialmente no acotada², tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-

²En lo que sigue, $V(x, t)$ es acotado y positiva definida si y sólo si existen funciones $V_0(x)$ y $V_1(x)$, invariantes en el tiempo y positivas definidas, tal que las desigualdades $V_0(x) \leq V(x, t) \leq V_1(x)$ se cumplan para toda $x \in R^n$, $t \in [0, \infty)$ y $V_0(x) \rightarrow \infty$ conforme $x \rightarrow \infty$.

Isaacs

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) - \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) + h_1^T(x, t) h_1(x, t) + F(x) \leq 0 \quad (43)$$

se satisfaga, donde

$$\alpha_1(x, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (44)$$

$$\alpha_2(x, t) = -\frac{1}{2} g_2^T(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T. \quad (45)$$

H2) Existe una función $G(t)$ periódica y continua, una función $Q(x, \xi)$ positiva semidefinida con $Q(0, \xi)$ positiva definida, y una función $W(x, \xi, t)$ suave, positiva semidefinida, periódica, con $W(0, \xi, t)$ positiva definida y radialmente no acotada, tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_e(x, \xi, t) + h_e^T(x, \xi, t) h_e(x, \xi, t) + \gamma^2 \phi^T(x, \xi, t) \phi(x, \xi, t) + Q(x, \xi) \leq 0 \quad (46)$$

se cumpla con

$$f_e(x, \xi, t) = ((f_e^1)^T, (f_e^2)^T)^T$$

$$\left. \begin{aligned} f_e^1 &= f(x, t) + g_1(x, t) \alpha_1(x, t) + g_2(x, t) \alpha_2(\xi, t) \\ f_e^2 &= f(\xi, t) + g_1(\xi, t) \alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t) \alpha_2(\xi, t) + G(t)(h_2(x, t) - h_2(\xi, t)) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$h_e(x, \xi, t) = \alpha_2(\xi, t) - \alpha_2(x, t) \quad (48)$$

$$\phi(x, \xi, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_e^T(x, t) \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{pmatrix}^T \right) \quad (49)$$

$$g_i(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ G(t)k_{21}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Usando las hipótesis H1) y H2), una solución del problema de control H_∞ considerado, es enunciado como sigue.

Teorema 4(Acho *et al.*, 2001).-*Suponga que las hipótesis H1) y H2) son satisfechas.*

Entonces el siguiente controlador

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi, t) + g_1(\xi, t)\alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t)\alpha_2(\xi, t) + G(t)[y(t) - h_2(\xi, t)], \\ u &= \alpha_2(\xi, t) \end{aligned} \quad (51)$$

estabiliza en forma global el sistema (39) con $w = 0$, y hace que la ganancia L_2 del sistema en lazo cerrado sea menor que γ .

La demostración de este teorema es dada en la sección 5.

IV.3 Control H_∞ : Caso local

En la presente sección se dará el planteamiento y solución del problema de control H_∞ en forma local.

Un controlador de la forma (40), la cual estabiliza en forma asintótica y local el punto de equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ del sistema en lazo cerrado (39) y (40) con $w = 0$, se dice que es un controlador admisible localmente. El problema de control H_∞ en forma local consiste en encontrar un controlador admisible localmente, tal que si $w \neq 0$, se cumpla la desigualdad (41) para toda $t_1 > t_0 \geq 0$ y para todas las funciones $w(t)$ seccionalmente continuas y con el sistema inicializado en el punto de equilibrio $(x(t_0) = \xi(t_0) = 0)$.

Considere la linealización del sistema (39):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \\ z &= C_1(t)x + D_{12}(t)u \\ y &= C_2(t)x + D_{21}(t)w \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, t), \quad B_1(t) = g_1(0, t),$$

$$B_2 = g_2(0, t), \quad C_1(t) = \frac{\partial h_1}{\partial x}(0, t),$$

$$D_{12}(t) = k_{12}(0, t), \quad C_2(t) = \frac{\partial h_2}{\partial x}(0, t),$$

$$\text{y} \quad D_{21}(t) = k_{21}(0, t).$$

En seguida se dan las condiciones bajo las cuales se derivará la solución local del problema de control H_∞ .

A1) Existe una solución periódica con periodo T , positiva semidefinida a la ecuación

$$-\dot{P} = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P(t), \quad (53)$$

sujeto a que el sistema

$$\dot{x} = [A - (B_2B_2^T - \gamma^{-2}B_1B_1^T)P](t)x(t), \quad (54)$$

sea asintóticamente estable;

A2) Existe una solución periódica con periodo T , positiva semidefinida de la ecuación

$$\dot{Z} = \tilde{A}(t)Z(t) + Z(t)\tilde{A}^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) + Z(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}PB_2B_2^TP - C_2^TC_2\right](t)Z(t), \quad (55)$$

sujeto a que el sistema

$$\dot{x} = [\tilde{A} - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)](t)x(t), \quad (56)$$

sea asintóticamente estable; donde $\tilde{A}(t) = A(t) + \frac{1}{\gamma^2} B_1(t) B_1^T(t) P(t)$.

En (Chung y Hauser, 1997) está demostrado que estas ecuaciones de Riccati tendrán soluciones periódicas positivas semidefinidas con periodo T si y sólo si existe un controlador admisible que resuelve el problema de control H_∞ .

Acorde con el Lema 1.3 en (Chung y Hauser, 1997) las condiciones anteriores garantizan la existencia de una constante positiva ε_0 , tal que las ecuaciones perturbadas de Riccati

$$-\dot{P}_\varepsilon = P_\varepsilon(t)A(t) + A^T(t)P_\varepsilon(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P_\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T\right](t)P_\varepsilon(t) + \varepsilon I, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\varepsilon = & \tilde{A}_\varepsilon(t)Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)\tilde{A}_\varepsilon^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ & + Z_\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2\right](t)Z_\varepsilon(t) + \varepsilon I, \end{aligned} \quad (58)$$

tienen una única solución periódica y positivas definidas para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; donde

$$\tilde{A}_\varepsilon(t) = A(t) + \frac{1}{\gamma^2} B_1(t) B_1^T(t) P_\varepsilon(t).$$

Se dice que las soluciones $P_\varepsilon(t)$ y $Z_\varepsilon(t)$ son soluciones estabilizadoras de (57) y (58) si, además de que satisfacen las ecuaciones deseadas, ambos sistemas (54) y (56) son asintóticamente estable con $P(t) = P_\varepsilon(t)$ y $Z(t) = Z_\varepsilon(t)$.

En lo que sigue, las ecuaciones (57) y (58) son utilizadas para derivar una solución local al problema de control H_∞ para el sistema periódico (39).

Teorema 5 (Acho *et al.*, 2001) *Suponga que las condiciones A1) y A2) se cumplen, y sea $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ una solución periódica, positiva definida de las ecuaciones (57) y (58) para algún $\varepsilon > 0$. Entonces las hipótesis H1) y H2) se cumplen localmente en la vecindad del punto de equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ con*

$$V(x, t) = x^T P_\varepsilon(t)x, \quad (59)$$

$$W(x, \xi, t) = \gamma^2(x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-1}(t)(x - \xi), \quad (60)$$

$$F(x) = \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2, \quad (61)$$

$$G(t) = Z_\varepsilon(t)C_2^T(t), \quad (62)$$

$$Q(x, \xi) = \frac{\varepsilon}{2} \gamma^2 \min_{t \in [0, T]} \|Z_\varepsilon^{-1}(t)\|^2 \|x - \xi\|^2, \quad (63)$$

donde el siguiente sistema dinámico

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + \left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t)g_1^T(\xi, t) - g_2(\xi, t)g_2^T(\xi, t) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon(t)C_2^T(t)[y(t) - h_2(\xi, t)],$$

$$u = -g_2^T(\xi, t)P_\varepsilon \xi \quad (64)$$

es una solución local del problema de control H_∞ .

La demostración de este teorema se da en la sección 5.

Acorde con los resultados mostrados en (Ichikawa y Katayama, 1999), las condiciones en A1) y A2) son necesarias y suficientes para la existencia de un controlador H_∞ .

IV.4 Procedimiento de diseño de control H_∞

Para calcular la solución H_∞ subóptima, conforme γ se aproxima a su valor mínimo que puede lograrse en (41), denotado como γ^* , se tiene que usar la iteración- γ . Esta iteración consiste en seleccionar una γ lo suficientemente grande, tal que los sistemas (53) y (55) tengan una solución periódica, positivas semidefinidas y luego iterar en γ para determinar al valor (sub-) óptimo γ^* , tal que (41) sea válida para toda $\gamma > \gamma^*$. Después de esto, una solución periódica, de los sistemas perturbados en (57) y (58), son producidas con $\gamma = \gamma^*$ y una $\varepsilon > 0$. Finalmente, el controlador en (64), correspondiente a la γ y ε seleccionadas anteriormente, completan la síntesis del controlador, que da la solución local del problema de control H_∞ , para el sistema no lineal periódico en (39).

De hecho, el procedimiento antes mencionado es parte de la aproximación inicial del procedimiento iterativo en (Lukes, 1969) para obtener una aproximación a las desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs. Este procedimiento iterativo fue originalmente desarrollado para resolver ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman dentro del contexto de control óptimo, y entonces fueron extendidas por (Arjan, 1992) para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs que aparecen dentro del marco de control H_∞ .

IV.5 Demostración de los resultados obtenidos

En lo que sigue, se darán las demostraciones de los teoremas 4 y 5.

IV.5.1 Demostración del teorema 4

Para empezar con la demostración se usará la función:

$$H(x, w, u, t) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] + h_1^T(x, t)h_1(x, t) + u^T u - \gamma^2 w^T w \quad (65)$$

la cual es cuadrática en (w, u) . De las relaciones (44) y (45) se tiene

$$\left(\frac{\partial H}{\partial w} \right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x, t) - 2\gamma^2 \alpha_1^T = 0, \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\partial V}{\partial x} g_2(x, t) + 2\alpha_2^T = 0, \quad (67)$$

y expandiendo la función cuadrática $H(x, w, u, t)$ en series de Taylor alrededor de $(w, u) = (\alpha_1, \alpha_2)$, se obtiene

$$H(x, w, u, t) = H(x, \alpha_1(x, t), \alpha_2(x, t), t) - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 + \|u - \alpha_2(x, t)\|^2, \quad (68)$$

donde $H(x, \alpha_1(x, t), \alpha_2(x, t), t) \leq -F(x)$ en correlación con la hipótesis H1). De aquí que

$$H(x, w, u, t) \leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 - F(x) \quad (69)$$

y utilizando (65), (69), se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] &\leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 \\ &- \|h_1(x, t)\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x). \end{aligned} \quad (70)$$

Ahora se usará la función

$$H_e(x, \xi, r, t) =$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_e(x, \xi, t) + g_e(x, t)r] + h_e^T(x, \xi, t)h_e(x, \xi, t) - \gamma^2 r^T r \quad (71)$$

la cual es cuadrática en r . Entonces tenemos que

$$\left(\frac{\partial H_c}{\partial r} \right)_{r=\phi(x,\xi,t)} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) g_c(x,t) - 2\gamma^2 \phi^T(x,\xi,t) = 0$$

mientras que la hipótesis H2) asegura que $H_c(x,\xi,\phi(x,\xi,t),t) \leq -Q(x,\xi)$. Por lo tanto, la función cuadrática $H_\epsilon(x,\xi,r,t)$, expandida en series de Taylor, da

$$\begin{aligned} H_\epsilon(x,\xi,r,t) &= H_\epsilon(x,\xi,\phi(x,\xi,t),t) - \gamma^2 \|r - \phi(x,\xi,t)\|^2 \\ &\leq -\gamma^2 \|r - \phi(x,\xi,t)\|^2 - Q(x,\xi) \end{aligned} \quad (72)$$

y, en de (71), se produce la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_\epsilon(x,\xi,t) + g_\epsilon(x,t)(w - \alpha_1(x,t))] \\ \leq -\gamma^2 \|w - \alpha_1(x,t) - \phi(x,\xi,t)\|^2 \\ - \|\alpha_2(\xi,t) - \alpha_2(x,t)\|^2 + \gamma^2 \|w - \alpha_1(x,t)\|^2 - Q(x,\xi). \end{aligned} \quad (73)$$

Ahora se demostrará que la función

$$U(x,\xi,t) = V(x,t) + W(x,\xi,t), \quad (74)$$

la cual es periódica, positiva definida y radialmente no acotada por construcción, tiene una derivada, con respecto al tiempo, definida negativa a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (39) y (51) con $w = 0$. De hecho, (70) y (73), sumadas dan

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x,t) + g_1(x,t)w + g_2(x,t)u] + \frac{\partial W}{\partial t} \\ &\quad + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_\epsilon(x,\xi,t) + g_\epsilon(x,t)(w - \alpha_1(x,t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t)\|^2 - \|h_1(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t) + \phi(x, \xi, t)\|^2 \\
&\quad - \|\alpha_2(\xi, t) - \alpha_2(x, t)\|^2 + \gamma^2 \|\alpha_1(x, t)\|^2 - \|u\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) \\
&\leq -\|h_1(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t) + \phi(x, \xi, t)\|^2 - \|\alpha_2(\xi, t)\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) \\
&\leq -F(x) - Q(x, \xi), \tag{75}
\end{aligned}$$

del cual se concluye, que el sistema en lazo cerrado (39) y (51) es asintóticamente estable en forma global.

Finalmente, para demostrar que se cumple con (41), se diferenciará (74) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (39) y (51) (con $w \neq 0$). Usando (70), (73) se obtiene

$$\frac{dU}{dt} \leq -\|z(t)\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t) - \phi(x, \xi, t)\|^2. \tag{76}$$

Claramente, (76) asegura que

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} (\gamma^2 \|w\|^2 - \|z(t)\|^2) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} [F(x(t)) + Q(x(t), \xi(t))] dt + U(x(t_1), \xi(t_1), t_1) \\
&\quad - U(x(t_0), \xi(t_0), t_0) + \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t) - \alpha_1(x(t), t) - \phi(x(t), \xi(t), t)\|^2 dt > 0 \tag{77}
\end{aligned}$$

para cualquier trayectoria de (39), (51) empezando en $x(t_0) = 0, \xi(t_0) = 0$. Por lo que el sistema dinámico (51), da solución del problema global de control H_∞ .

IV.5.2 Demostración del teorema 5

Primero se demostrará que en la vecindad del origen $x = 0$, la función $V(x, t) = x^T P_\varepsilon(t)x$, siendo suave, periódica y positiva definida por construcción, satisface la desigual-

dad de Hamilton-Jacobi-Isaacs (43) sujeto a (61). De hecho,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = x^T \dot{P}_\varepsilon(t)x. \quad (78)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) = x^T [P_\varepsilon A + A^T P_\varepsilon](t)x + o_t(\|x\|^2), \quad (79)$$

$$\gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) = \frac{1}{\gamma^2} x^T P_\varepsilon B_1(t) B_1^T(t) P_\varepsilon x + o_t(\|x\|^2), \quad (80)$$

$$- \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) = -x^T P_\varepsilon B_2(t) B_2^T(t) P_\varepsilon x + o_t(\|x\|^2), \quad (81)$$

$$h_1^T(x, t) h_1(x, t) = x^T C_1^T(t) C_1(t)x + o_t(\|x\|^2) \quad (82)$$

donde $\frac{\alpha_i(\|x\|^2)}{\|x\|^2} \rightarrow 0$ uniformemente en t conforme $\|x\|^2 \rightarrow 0$, y debido a (57), se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) - \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) + h_1^T(x, t) h_1(x, t) \\ &= x^T \{ \dot{P}_\varepsilon + P_\varepsilon A + A^T P_\varepsilon + P_\varepsilon [\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T] P_\varepsilon + C_1^T C_1 \} (t)x + o_t(\|x\|^2) \\ &= -\varepsilon \|x\|^2 + o_t(\|x\|^2) \leq -\frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2 \end{aligned} \quad (83)$$

para toda $t \geq 0$ y $\|x\|$ suficientemente pequeña. De aquí, la hipótesis H1) se satisface localmente con $V(x, t)$ y $F(x)$ definidas por (59) y (61).

A continuación, obsérvese que por construcción, la función

$$W(x, \xi, t) = \gamma^2 (x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-1}(t) (x - \xi)$$

es suave, periódica, positiva semidefinida, y tal que $W(0, \xi, t)$ es positiva definida. Más aún, en la vecindad del origen $(x, \xi) = (0, 0)$, $W(x, \xi, t)$ satisface la desigualdad de Hamilton-

Jacobi-Isaacs (46) sujeto a (62) y (63). De hecho,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma^2(x - \xi)^T \dot{Z}_\varepsilon^{-1}(t)(x - \xi), \quad (84)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_\varepsilon(x, \xi, t) =$$

$$\gamma^2(x - \xi)^T \{Z_\varepsilon^{-1} \tilde{A}_\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon^T Z_\varepsilon^{-1} - 2C_2^T C_2\}(t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2), \quad (85)$$

$$h_\varepsilon^T(x, \xi, t)h_\varepsilon(x, \xi, t) = (x - \xi)^T [P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon](t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2), \quad (86)$$

$$\gamma^2 \phi^T(x, \xi, t)\phi(x, \xi, t) = \gamma^2(x - \xi)^T \{Z_\varepsilon^{-1} B_1 B_1^T Z_\varepsilon^{-1} + C_2^T C_2\}(t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2), \quad (87)$$

y tomando en consideración la ecuación (ecuación dual de Riccati de (58))

$$\begin{aligned} -\dot{Z}_\varepsilon^{-1} &= Z_\varepsilon^{-1}(t) \tilde{A}_\varepsilon(t) + \tilde{A}_\varepsilon^T(t) Z_\varepsilon^{-1}(t) + \left[\frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2 \right](t) \\ &+ Z_\varepsilon^{-1}(t) B_1(t) B_1^T(t) Z_\varepsilon^{-1}(t) + \varepsilon Z_\varepsilon^{-2}(t), \end{aligned} \quad (88)$$

resultado de (58), se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &+ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_\varepsilon(x, \xi, t) + h_\varepsilon^T(x, \xi, t)h_\varepsilon(x, \xi, t) + \gamma^2 \phi^T(x, \xi, t)\phi(x, \xi, t) \\ &= \gamma^2(x - \xi)^T \{ \dot{Z}_\varepsilon^{-1} + Z_\varepsilon^{-1} \tilde{A}_\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon^T Z_\varepsilon^{-1} + \left[\frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2 \right] \\ &\quad + Z_\varepsilon^{-1} B_1 B_1^T Z_\varepsilon^{-1} \}(t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2) \\ &= -\varepsilon \gamma^2(x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-2}(t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2) \leq -\frac{\varepsilon}{2} \gamma^2 \min_{t \in [0, T]} \|Z_\varepsilon^{-1}(t)\|^2 \|x - \xi\|^2 \end{aligned}$$

para toda $t \geq 0$ y $\|x\|, \|x - \xi\|$ suficientemente pequeño. Así que, hipótesis H2) se satisface

localmente con $W(x, \xi, t)$, $G(t)$, y $Q(x, \xi)$ definidas por (60), (62), y (63) respectivamente.

Finalmente, siguiendo la mismas líneas de razonamiento para demostrar el teorema 1, se concluye que el sistema dinámico descrito en (51) el cual, debido a (59)-(63), toma la forma (64), es una solución local del problema de control H_∞ , por lo que el teorema 2 queda demostrado.

IV.6 Resultados numéricos de control H_∞ para Robots Manipuladores

En esta sección se muestra el desempeño del controlador (64), mientras que el sistema (39) es especificado como sigue:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \ddot{q}_d - M^{-1}(q_d - x_1)[M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) - C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(\dot{q}_d - x_2) \\ & - G(q_d - x_1)] - M^{-1}(q_d - x_1)w_1 - M^{-1}(q_d - x_1)u \end{aligned} \quad (89)$$

$$z_1 = u, z_2 = x_1 \quad (90)$$

$$y = x_1 + w_2 \quad (91)$$

donde $x_1, x_2, z_1, z_2, w_1, w_2 \in R$ son las componentes del vector de estados, del vector de la salida virtual, y del vector de perturbaciones x, z , y w respectivamente; $y \in R$ es la medición disponible por el sistema; $u \in R$ es la entrada de control; $q_d(t)$ es una función suave y periódica; $M(x_1)$, $C(x_1, x_2)$ y $G(x_1)$ son funciones suaves de dimensiones apropiadas y $M(x_1)$ se supone simétrica y definida positiva.

Es fácil verificar que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio de (89)-(91), y que las suposiciones (42) se cumplen para el sistema en cuestión. Estamos interesados en la simu-

lación de un controlador por retroalimentación de la salida disponible, que localmente estabilice, en forma asintótica, el sistema (89) no perturbado ($w = 0$), y establezca una ganancia L_2 de w a z , lo más pequeño que sea posible.

Las ecuaciones de estado en (89) son resultado de la ecuación de desviación del sistema dinámico de un robot manipulador de l grados de libertad, gobernado por:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + w_1, \quad (92)$$

donde la desviación $x_1 = q_d - q$ es con respecto a la trayectoria deseada $q_d(t)$, y el par externo (Acho *et al.*, 2001)

$$\tau = M(q_d) \ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) + u \quad (93)$$

es aplicado para asegurar que el sistema no actuado ($u = 0$), y no perturbado ($w = 0$) (92), (93), posea una familia de órbitas periódicas formadas por la trayectoria $q_d(t)$. Desde un punto de vista físico, q es el vector de las posiciones articulares, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriólis, y $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales. Así que, el problema de control H_∞ viene siendo en realidad el problema de control H_∞ para el seguimiento de trayectorias aplicado a robots manipuladores, usando sólo información de posición.

En las simulaciones realizadas con Matlab, un robot manipulador de un grado de libertad moviéndose en el plano vertical, fue planeado para seguir una trayectoria $q_d(t) = \frac{1}{2} \sin(\frac{2\pi}{7}t) + \frac{\pi}{2}$. Para este ejemplo, los siguientes parámetros fueron seleccionados:

$$M(q) = 1, \quad C(q, \dot{q}) = 0, \quad G(q) = \sin(q). \quad (94)$$

Usando el procedimiento de diseño de control H_∞ propuesto anteriormente (sección 4), se encontró $\gamma^* \simeq 3.54$. Sin embargo, se usará en las simulaciones $\gamma = 5$ para evitar comportamientos no deseados que presentan los controladores de alta ganancia, como producto de seleccionar γ muy cerca al óptimo. Perturbando la parte derecha de las ecuaciones de Riccati (53) y (55) con $\gamma = 5$, se obtuvo que con $\varepsilon = 0.8$, las correspondientes ecuaciones de Riccati (57) y (58) tiene soluciones periódicas y positivas definidas con los valores de γ y ε antes mencionados. Primero, soluciones positivas definidas de (57) y (58) con los valores de γ y ε fueron obtenidos numéricamente. Entonces, del hecho (Xie,1993) de que estas soluciones se aproximan a sus soluciones periódicas, fueron usadas para construir soluciones periódicas. Estas soluciones periódicas fueron posteriormente usadas para sintetizar el controlador (64), la cual resuelve el problema de control H_∞ en consideración.

Para fines de comparación, también se diseñó el controlador lineal H_∞ correspondiente del sistema linealizado. Este controlador también es aplicable al sistema no lineal, como ha sido postulado en el capítulo 3. Se simularon dos casos para cada controlador, el no perturbado y el perturbado con perturbaciones permanentes $w_1 = 0.02$ y $w_2 = 0.01$. Las condiciones iniciales en todas las simulaciones fueron $x_1(0) = 0.6$, $x_2(0) = -0.3$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$. Las correspondientes trayectorias son mostradas en las figuras 6,7 y 8. Las líneas sólidas indican el controlador H_∞ no lineal y las punteadas el controlador H_∞ lineal. Estas figuras muestran que el controlador H_∞ no lineal, así como el controlador H_∞ lineal, estabilizan al sistema en forma asintótica con $w = 0$. Sin embargo, las perturbaciones permanentes, las cuales son atenuadas por el controlador no lineal, causan inestabilidad del sistema en lazo cerrado para el controlador lineal. Así que, las perturbaciones usadas en las simulaciones,

pertencen al dominio del controlador no lineal y no pertenecen al dominio del controlador lineal. La figura 9 compara el desempeño de los dos controladores. De la figura 9 se concluye un mejor desempeño del controlador no lineal.

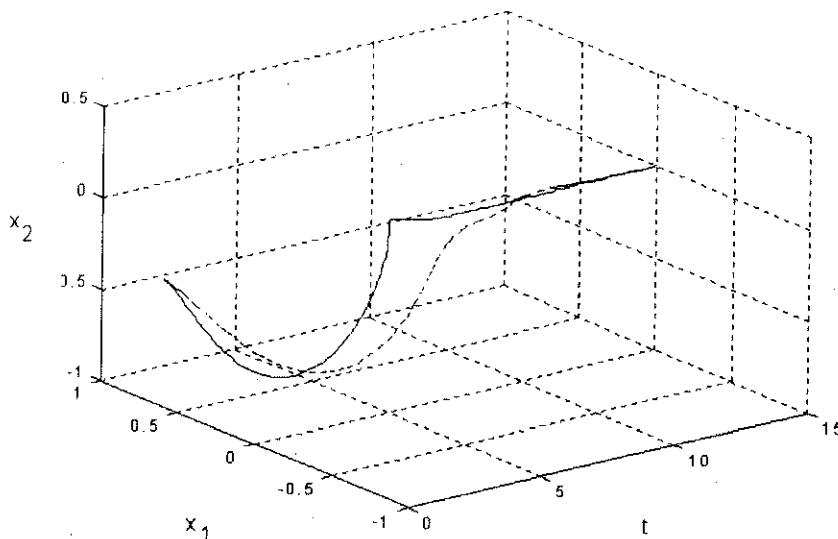


Fig.6 Gráfica de las trayectorias: controlador H_∞ no lineal (línea sólida) y controlador H_∞ lineal (línea punteada); caso no perturbado.

Como segundo ejemplo, considérese el sistema dinámico (92) con fricción de Coulomb:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + w_1$$

donde

$$F(\dot{q}) = \text{vec}\{k_i \text{sgn}(\dot{q}_i)\} = \begin{bmatrix} k_1 \text{sgn}(\dot{q}_1) \\ \vdots \\ k_l \text{sgn}(\dot{q}_l) \end{bmatrix}$$

con la función signo definida como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

y l , como se ha definido anteriormente, representa los grados de libertad del sistema.

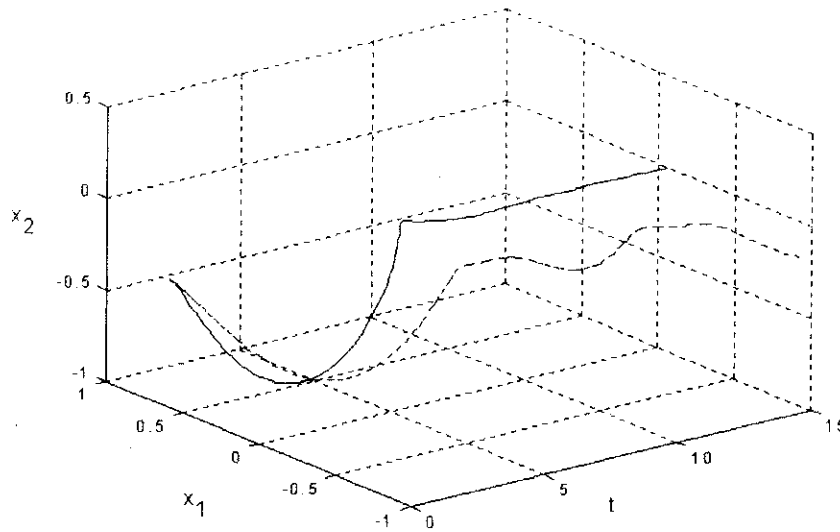


Fig.7 Gráfica de las trayectorias: controlador H_∞ no lineal (línea sólida) y controlador H_∞ lineal (línea punteada); caso perturbado.

La versión modificada de (93), esto es, tomando en cuenta el término de fricción de Coulomb, como:

$$\tau = M(q_d) \ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d + G(q_d) + F(\dot{q}_d) + u.$$

Simulaciones numéricas realizadas con Matlab, ahora usando un robot de dos grados de libertad con articulaciones rotacionales medidas con respecto al eje inferior vertical en forma absoluta, con su modelo dinámico dado como sigue:

$$M(q) = \begin{bmatrix} 2.351 + 0.168 \cos(q_2) & 0.102 + 0.084 \cos(q_2) \\ 0.102 + 0.084 \cos(q_2) & 0.102 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -0.168 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -0.084 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ 0.084 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

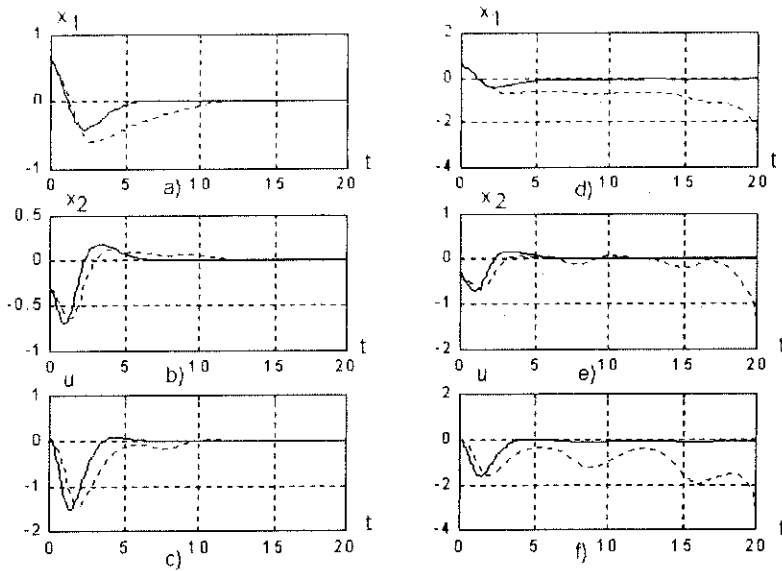


Fig.8 Gráficas de $(x_1(t), x_2(t), u(t))$: Columna izquierda caso no perturbado, columna derecha caso perturbado; controlador H_∞ no lineal (líneas sólidas) y el controlador H_∞ lineal (líneas punteadas).

$$G(q) = g \begin{bmatrix} 3.921 \sin(q_1) + 0.186 \sin(q_1 + q_2) \\ 0.186 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} k_1 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ k_2 \text{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

donde k_1 y k_2 representan los coeficientes de fricción de Coulomb, de tal manera que $k_1 = 7.17$ Nm para $\dot{q}_1 > 0$, $k_1 = -8.049$ Nm para $\dot{q}_1 < 0$ y $k_2 = 1.734$ Nm.

El vector de las trayectorias deseadas fueron programadas de la siguiente manera:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 0.7854(1 - e^{-2t^3}) + 0.1745(1 - e^{-2t^3}) \sin(7.5t) \\ 1.0472(1 - e^{-1.8t^3}) + 2.1816(1 - e^{-1.8t^3}) \sin(1.75t) \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Aunque en si, la expresión en (95) no es periódica, se obtiene resultados satisfactorios. En el capítulo siguiente, se podrá concluir que los resultados obtenidos concuerdan con las condiciones para diseñar un controlador para sistemas variantes en el tiempo. Usando el

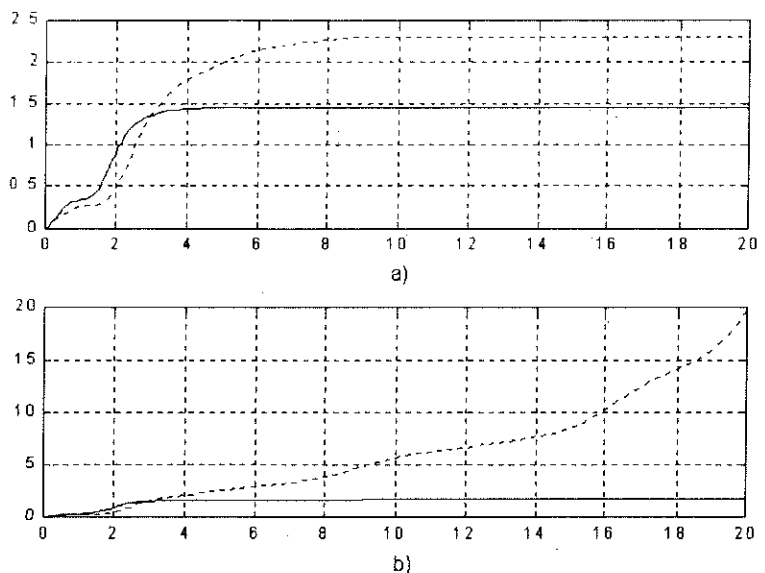


Fig.9 Comparación de desempeño. Gráficas de $\int_0^t \|z(\tau)\|^2 d\tau$ controlador H_∞ no lineal (líneas sólida) y lineal (líneas punteada): a) caso no perturbado, y b) caso perturbado.

diseño del controlador H_∞ propuesto, se encontró que $\gamma^* \simeq 150$. Sin embargo, en las simulaciones realizadas, una $\gamma = 1000$ fue seleccionada para evitar un controlador de ganancia alta. El valor de $\varepsilon = 1$ fue suficiente para que las ecuaciones perturbadas de Riccati, (57) y (58), tengan soluciones positivas definidas. Resultados numéricos del caso no perturbado y perturbado son mostrados en la fig. 10 y fig. 11 respectivamente. Para el caso perturbado, las perturbaciones usadas fueron $w_1 = [0.1 \ 0.1]^T$ y $w_2 = [0.1 \ 0.1]^T$. En este caso sólo se simuló en controlador no lineal propuesto en el teorema 5. Nótese que para este segundo ejemplo se usó un término discontinuo (el término de fricción de Coulomb), y aunque la teoría presentada no aplica para este caso, las simulaciones numéricas indican que es factible, con un esfuerzo adicional, el diseñar controladores H_∞ para sistemas con discontinuidades, tema aún abierto a la investigación.

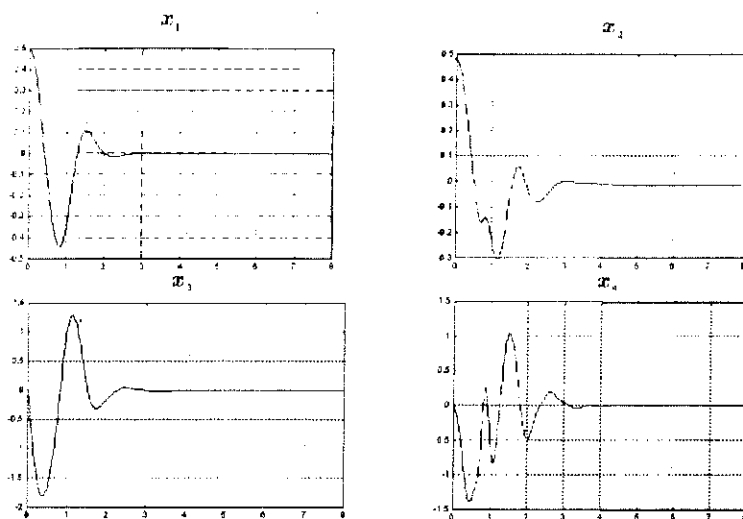


Fig.10 Simulaciones numéricas robot de dos grados de libertad, caso no perturbado.

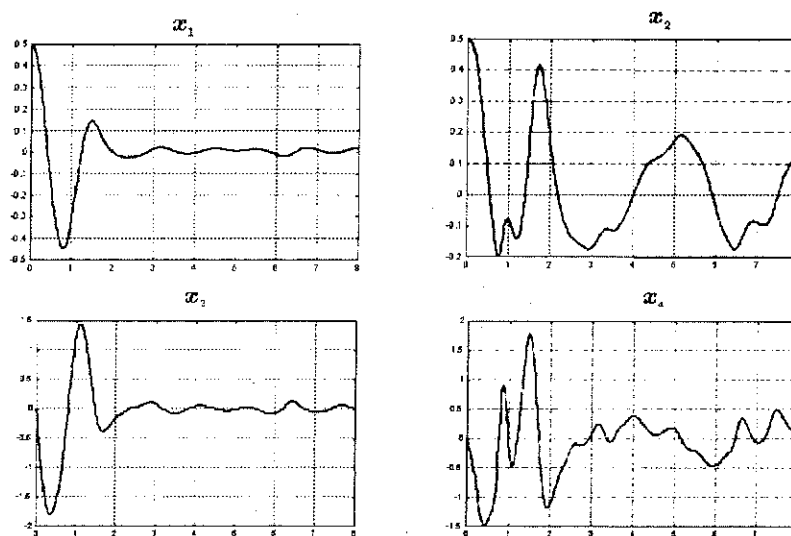


Fig.11 Simulaciones numéricas robot de dos grados de libertad, caso perturbado.

Capítulo V

Control H_∞ para Sistemas no Lineales Variante en el Tiempo

V1 Introducción

El presente capítulo tiene por finalidad mostrar las condiciones que se requieren para que la técnica de control H_∞ , desarrollada en el capítulo 4 para sistemas no lineales periódicos, pueda ser extendida al caso general de sistemas no lineales variantes en el tiempo. Los resultados que serán presentados fueron publicados en (Orlov *et al.*, 1999), donde nuevamente se tienen dos casos: el caso global y el caso local.

La composición de este capítulo es como sigue. La sección dos muestra los resultados para el control H_∞ para sistemas no lineales variantes en el tiempo para el caso global; en tanto, el caso local es tratado en la sección tres.

V2 Control H_∞ : Caso global

Nuevamente se considera que el sistema no lineal variante en el tiempo bajo consideración está regido por las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) + g_1(x(t), t)w(t) + g_2(x(t), t)u(t) \\ z(t) &= h_1(x(t), t) + k_{12}(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= h_2(x(t), t) + k_{21}(x(t), t)w(t), \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

donde $x \in R^m$ es el vector de estados, $t \in R$ es la variable de tiempo, $u \in R^m$ es la entrada de control, $w \in R^r$ es el vector de perturbaciones, $z \in R^l$ es la salida a ser controlada, $y \in R^p$ es la salida disponible del sistema. Las funciones $f(x, t)$, $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$, $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $k_{12}(x, t)$, $k_{21}(x, t)$ se suponen continuas en t y continuamente diferenciables en x . También se supone que $f(0, t) = 0$, $h_1(0, t) = 0$ y $h_2(0, t) = 0$ para toda t .

Un controlador dinámico de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta(\xi, y, t), \quad \eta(\xi, y, t) \in R^q \\ u &= \theta(\xi, t), \quad \theta(\xi, t) \in R^m\end{aligned}\tag{97}$$

se dice que es un controlador admisible si las funciones $\eta(\xi, y, t)$ y $\theta(\xi, t)$ son continuas en ξ , y , y t ; $\eta(0, 0, t) = \theta(0, t) = 0$ para toda t y el sistema en lazo cerrado (96), (97), con $w = 0$, es el origen asintóticamente estable en forma global y uniforme.

Dado un número real $\gamma \geq 0$ se dice que el sistema (96), (97), tiene una ganancia L_2 menor que γ si la respuesta z , resultado de aplicar w , y con el sistemas inicializado en el punto de equilibrio ($x(t_0) = \xi(t_0) = 0$), satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt\tag{98}$$

para toda $t_1 > t_0$ y todas las funciones $w(t)$ seccionalmente continuas.

El problema de control H_∞ consiste en encontrar un controlador admisible (97) tal que la ganancia L_2 del sistema en lazo cerrado (96), (97) sea menor que γ .

El sistema (96) debe satisfacer las siguientes suposiciones:

$$\begin{aligned}h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) &= 0, & k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) &= I \\ k_{21}(x, t)g_1^T(x, t) &= 0, & k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) &= I.\end{aligned}\tag{99}$$

A continuación se dan las hipótesis bajo las cuales se mostrará la solución global del problema de control H_∞ .

H1) Existe una función $F(x)$ definida positiva y una función $V(x, t)$ definida positiva³, suave y acotada, tal que la siguiente desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) - \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) + h_1^T(x, t) h_1(x, t) + F(x) \leq 0 \quad (100)$$

se cumpla con

$$\alpha_1(x, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (101)$$

$$\alpha_2(x, t) = -\frac{1}{2} g_2^T(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T. \quad (102)$$

H2) Existe una función $G(t)$ continua a tramos, una función $Q(x, \xi)$ positiva semidefinida con $Q(0, \xi)$ positiva definida, y una función $W(x, \xi, t)$ suave, positiva semidefinida y acotada con $W(0, \xi, t)$ positiva definida y acotada, tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_e(x, \xi, t) + h_e^T(x, \xi, t) h_e(x, \xi, t) + \gamma^2 \phi^T(x, \xi, t) \phi(x, \xi, t) + Q(x, \xi) \leq 0 \quad (103)$$

se cumpla con

$$f_e(x, \xi, t) = ((f_e^1)^T, (f_e^2)^T)^T$$

$$\left. \begin{aligned} f_e^1 &= f(x, t) + g_1(x, t) \alpha_1(x, t) + g_2(x, t) \alpha_2(\xi, t) \\ f_e^2 &= f(\xi, t) + g_1(\xi, t) \alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t) \alpha_2(\xi, t) + G(t)(h_2(x, t) - h_2(\xi, t)) \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

³En lo que sigue, $V(x, t)$ es acotado y positiva definida si y sólo si existen funciones $V_0(x)$ y $V_1(x)$, invariantes en el tiempo y positivas definidas, tal que las desigualdades $V_0(x) \leq V(x, t) \leq V_1(x)$ se cumplan para toda $x \in R^n$, $\forall t \geq t_0 \geq 0$ y $V_0(x) \rightarrow \infty$ conforme $x \rightarrow \infty$.

$$h_c(x, \xi, t) = \alpha_2(\xi, t) - \alpha_2(x, t) \quad (105)$$

$$\phi(x, \xi, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_c^T(x, t) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^T \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^T \end{pmatrix} \quad (106)$$

$$g_c(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ G(t)k_{21}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Con las hipótesis H1) y H2), una solución del problema de control H_∞ bajo cuestión es postulado como sigue.

Teorema 6 (Acho *et al.*, 2001) *Supóngase que las hipótesis H1) y H2) son satisfechas. Entonces una solución del problema de control H_∞ está dada por el siguiente sistema dinámico:*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi, t) + g_1(\xi, t)\alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t)\alpha_2(\xi, t) + G(t)[y(t) - h_2(\xi, t)], \\ u &= \alpha_2(\xi, t). \end{aligned} \quad (108)$$

La demostración de este teorema es similar a la demostración del teorema 4 dado en el capítulo 4.

V.3 Control H_∞ : Caso local

A continuación se dará el planteamiento y solución del problema de control H_∞ en forma local.

Un controlador de la forma (97) el cual estabiliza en forma asintótica, uniforme y local el punto de equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ del sistema en lazo cerrado (96), (97) con $w = 0$, se dice que es un controlador admisible localmente. El problema de control H_∞ en forma local, consiste en encontrar un controlador admisible, tal que si $w \neq 0$, se cumpla la desigualdad

(98) para toda $t_1 > t_0 \geq 0$ para todas las funciones $w(t)$ seccionalmente continuas y con el sistema inicializado en el punto de equilibrio.

Nuevamente se considera la linealización del sistema:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \\ z &= C_1(t)x + D_{12}(t)u \\ y &= C_2(t)x + D_{21}(t)w. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

En lo que sigue, se muestran las condiciones bajo las cuales se dará la solución local del problema de control H_∞ .

A1) Existe una solución positiva semidefinida y acotada de la ecuación

$$-\dot{P} = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P(t), \quad (110)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - (B_2B_2^T - \gamma^{-2}B_1B_1^T)P](t)x(t), \quad (111)$$

es exponencialmente estable;

A2) Existe una solución positiva semidefinida y acotada de la ecuación

$$\dot{Z} = \tilde{A}(t)Z(t) + Z(t)\tilde{A}^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) + Z(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}PB_2B_2^TP - C_2^TC_2\right](t)Z(t), \quad (112)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [\tilde{A} - Z(C_2^TC_2 - \gamma^{-2}PB_2B_2^TP)](t)x(t), \quad (113)$$

es exponencialmente estable; donde $\tilde{A}(t) = A(t) + \frac{1}{\gamma^2}B_1(t)B_1^T(t)P(t)$.

Considérese nuevamente las versiones perturbadas de las ecuaciones diferenciales de Riccati antes mencionadas:

$$-\dot{P}_\varepsilon = P_\varepsilon(t)A(t) + A^T(t)P_\varepsilon(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P_\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P_\varepsilon(t) + \varepsilon I, \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\varepsilon = & \tilde{A}_\varepsilon(t)Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)\tilde{A}_\varepsilon^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ & + Z_\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}P_\varepsilon B_2B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2\right](t)Z_\varepsilon(t) + \varepsilon I; \end{aligned} \quad (115)$$

donde $\tilde{A}_\varepsilon(t) = A(t) + \frac{1}{\gamma^2}B_1(t)B_1^T(t)P_\varepsilon(t)$.

El siguiente lema es una extensión del lema 1.3 en (Chung, 1997) y es de importancia para dar solución al problema local de control H_∞ . Dicho lema también fue utilizado en el capítulo 4 en la sección 3, en su versión periódica.

Lema 1 (Orlov y Acho, 1999). - *Suponga que las condiciones A1) y A2) se cumplen. Entonces existe una $\varepsilon_0 > 0$ tal que las ecuaciones (114), (115) tienen una única solución positiva definida y acotadas $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

En lo que sigue, las ecuaciones (114) y (115) serán utilizadas para postular la solución del problema de control H_∞ en consideración.

Teorema 7 (Orlov y Acho, 1999). - *Suponga que las condiciones A1) y A2) se satisfacen, y sea $P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)$ soluciones positivas definidas y acotadas de las ecuaciones (114) y (115) para algún $\varepsilon > 0$. Entonces las hipótesis H1) y H2) se cumplen localmente en la vecindad del punto de equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ con*

$$V(x, t) = x^T P_\varepsilon(t)x, \quad (116)$$

$$W(x, \xi, t) = \gamma^2(x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-1}(t)(x - \xi), \quad (117)$$

$$F(x) = \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2, \quad (118)$$

$$G(t) = Z_\varepsilon(t)C_2^T(t), \quad (119)$$

$$Q(x, \xi) = \frac{\varepsilon}{2} \gamma^2 \min_{t \in R^1} \|Z_\varepsilon^{-1}(t)\|^2 \|x - \xi\|^2, \quad (120)$$

donde el siguiente sistema dinámico

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + \left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t)g_1^T(\xi, t) - g_2(\xi, t)g_2^T(\xi, t) \right] P_\varepsilon(t)\xi + Z_\varepsilon(t)C_2^T(t)[y(t) - h_2(\xi, t)], \quad (121)$$

$$u = -g_2^T(\xi, t)P_\varepsilon(t)\xi \quad (122)$$

es una solución local del problema de control H_∞ .

La demostración de este teorema es semejante a la demostración del teorema 5 en el capítulo 4, quedando sólo por demostrar el lema 1 antes mencionado. Dicho lema fue demostrado en (Orlov *et al.*, 1999). Aquí se presentará otra alternativa de la demostración diferente.

V3.1 Demostración del Lema 1

Primero, considere el siguiente sistema dinámico lineal variante en el tiempo

$$\dot{x} = \hat{A}(t)x, \quad (123)$$

y suponga que dicho sistema es exponencialmente estable. Suponga que la ecuación de Lyapunov

$$-\dot{P}(t) = P(t)\hat{A}(t) + \hat{A}^T(t)P(t) + Q(t) \quad (124)$$

tiene una solución simétrica positiva semidefinida y acotada para alguna $Q(t)$ simétrica y positiva definida, esto es,

$$Q(t) \geq \delta I > 0 \quad \forall t \geq 0,$$

para alguna constante δ positiva. Perturbando (124) se tiene,

$$-\dot{P}_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t)\hat{A}(t) + \hat{A}^T(t)P_\varepsilon(t) + Q(t) + \varepsilon I \quad (125)$$

para alguna constante $\varepsilon > 0$.

Manipulemos ahora (125) de la siguiente forma. Primero multipliquemos por la izquierda por $e^{\hat{A}^T(t)t}$ y por la derecha por $e^{\hat{A}(t)t}$. Se tiene

$$e^{\hat{A}^T(t)t}[-\dot{P}_\varepsilon(t)]e^{\hat{A}(t)t} = e^{\hat{A}^T(t)t}[P_\varepsilon(t)\hat{A}(t) + \hat{A}^T(t)P_\varepsilon(t) + Q(t) + \varepsilon I]e^{\hat{A}(t)t}. \quad (126)$$

Esta última expresión se simplifica a

$$\frac{d}{dt}(e^{\hat{A}^T(t)t}P_\varepsilon(t)e^{\hat{A}(t)t}) = -e^{\hat{A}^T(t)t}[Q(t) + \varepsilon I]e^{\hat{A}(t)t}, \quad (127)$$

integrando se logra

$$\int de^{\hat{A}^T(t)t}P_\varepsilon(t)e^{\hat{A}(t)t} = - \int e^{\hat{A}^T(t)t}[Q(t) + \varepsilon I]e^{\hat{A}(t)t}dt,$$

evaluando la integral, de cero a infinito en el tiempo, y tomando en cuenta que el sistema (123) es exponencialmente estable, se obtiene

$$P_\varepsilon(t) = \int_0^\infty e^{\hat{A}^T(t)t}[Q(t) + \varepsilon I]e^{\hat{A}(t)t}dt = P(t) + \int_0^\infty e^{\hat{A}^T(t)t}[\varepsilon I]e^{\hat{A}(t)t}dt. \quad (128)$$

De (128) se concluye que es si $P(t)$ es positiva semidefinida, entonces $P_\varepsilon(t)$ es positiva definida y es única. El hecho de que es única, se puede verificar como sigue. Suponga

que existe otra solución positiva definida de (125):

$$-\dot{W}_\varepsilon(t) = W_\varepsilon(t)\hat{A}(t) + \hat{A}^T(t)W_\varepsilon(t) + Q(t) + \varepsilon I. \quad (129)$$

Restando (129) de (125) y agrupando, se llega a

$$\dot{P}_\varepsilon(t) - \dot{W}_\varepsilon(t) + (P_\varepsilon(t) - W_\varepsilon(t))\hat{A}(t) + \hat{A}^T(t)(P_\varepsilon(t) - W_\varepsilon(t)) = 0. \quad (130)$$

Ahora, multiplicando por la izquierda por $e^{\hat{A}^T(t)t}$ y por la derecha por $e^{\hat{A}(t)t}$, a (130),

y simplificando, se obtiene

$$\frac{d}{dt}(e^{\hat{A}^T(t)t}[P_\varepsilon(t) - W_\varepsilon(t)]e^{\hat{A}(t)t}) = 0. \quad (131)$$

De aquí se concluye que

$$e^{\hat{A}^T(t)t}[P_\varepsilon(t) - W_\varepsilon(t)]e^{\hat{A}(t)t} = \text{a una contante } \forall t$$

Tomando dos valores en el tiempo e igualando (en $t = 0$ y en $t = \infty$), se obtiene que

$$P_\varepsilon(0) - W_\varepsilon(0) = 0,$$

por lo que se obtiene que $P_\varepsilon(0) = W_\varepsilon(0)$, y debido a que ambas tienen la misma ecuación diferencial, y si son las mismas condiciones iniciales, se concluye que ambas tienen la misma solución, por lo que se comprueba la hipótesis en cuestión.

Finalmente, de la observación de que la ecuación de Riccati (Ravi *et al.*, 1992)

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P(t),$$

se puede simplificar a la ecuación diferencial de Lyapunov, por medio de agrupación de términos,

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + [A + (\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) P]^T(t) P(t) + P(t) [A + (\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) P](t) \\ = -P(t) [\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T](t) P(t) - C_1^T(t) C_1(t) \end{aligned}$$

y usando las mismas líneas de razonamiento antes bosquejado, queda demostrado el Lema 1.

Con la demostración del Lema 1 queda evidenciado la extensión de los resultados del capítulo 4 a sistemas variantes en el tiempo de una forma casi directa, claro, estaba sujeto a la veracidad del Lema 1. La importancia de estos resultados es que el controlador propuesto puede ser extendido a una gama más grandes de tipo de sistema y no sólo sujeto a sistemas no lineales periódicos, como los resultados mostrados en el capítulo 4.

Capítulo VI

Control H_∞ no Lineal vía Mediciones Discretas

VI.1 Introducción

Este capítulo muestra el planteamiento y solución del problema de control local H_∞ para sistemas no lineales variantes en el tiempo por medio de mediciones discretas. La síntesis del controlador es obtenida a partir de los resultados mostrados en el capítulo cinco introduciendo adecuadamente la función del tren de impulsos de la consecuencia de las mediciones discretas, ya que las mediciones discretas pueden ser representadas como la multiplicación de una señal continua (observación continua) por esta función tren de impulsos.

La organización de este capítulo es como sigue. La sección dos muestra las modificaciones de los resultados del capítulo seis requeridas para la síntesis del controlador local H_∞ vía mediciones discretas. La sección tres muestra la síntesis del controlador H_∞ vía mediciones discretas. Resultados numéricos son mostrados en la sección cuatro.

VI.2 Control local H_∞ modificado

Considere el siguiente sistema no lineal variante en el tiempo:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) + g_1(x(t), t)w(t) + g_2(x(t), t)u(t) \\ z(t) &= h_1(x(t), t) + k_{12}(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= h_2(x(t), t) + k_{21}(x(t), t)w(t) \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados, $t \in R^1$ es la variable de tiempo, $u \in R^m$ es la entrada de control, $w \in R^r$ es el vector de perturbaciones, $z \in R^l$ es la salida a ser controlada, $y \in R^p$ es la salida disponible del sistema. Las funciones $f(x, t)$, $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$, $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $k_{12}(x, t)$, $k_{21}(x, t)$ se suponen continuas en t y continuamente diferenciables en x . También se supone que $f(0, t) = 0$, $h_1(0, t) = 0$ y $h_2(0, t) = 0$ para toda t .

Para el caso de mediciones discretas, la salida disponible de la planta (132) queda representada como sigue:

$$y_j = h_2(x(\tau_j), \tau_j) + k_{21}(x(\tau_j), \tau_j)w(\tau_j), \quad j = 0, 1, \dots \quad (133)$$

Se aplicará la misma metodología del capítulo 5 para derivar un controlador local H_∞ , pero ahora usando las siguientes suposiciones para (132):

$$\begin{aligned} h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) &= 0, & k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) &= I \\ k_{21}(x, t)g_1^T(x, t) &= 0, & k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) &= N(t). \end{aligned} \quad (134)$$

El motivo de tomar ahora $k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) = N(t)$ en lugar de $k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) = I$, es debido a que se facilitará la obtención del controlador local H_∞ para mediciones discretas, a partir del controlador de mediciones continuas, haciendo

$$N^{-1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} N_j \delta(t - \tau_j), \quad (135)$$

donde $N_j = k_{21}(x(\tau_j), \tau_j)k_{21}^T(x(\tau_j), \tau_j)$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$, $j = 0, 1, \dots$. Esta misma estrategia fue usada en (Basar y Bernhard, 1991), para derivar el control H_∞ lineal con mediciones muestreadas, a partir del controlador H_∞ de mediciones continuas.

Nuevamente se considera la linealización del sistema:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \\ z &= C_1(t)x + D_{12}(t)u \\ y &= C_2(t)x + D_{21}(t)w. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

A continuación se muestran las condiciones bajo las cuales se dará la solución local del problema de control H_∞ .

A1) Existe una solución positiva semidefinida y acotada a la ecuación

$$-\dot{P} = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P(t), \quad (137)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - (B_2B_2^T - \gamma^{-2}B_1B_1^T)P](t)x(t), \quad (138)$$

es exponencialmente estable;

A2) Existe una solución positiva semidefinida y acotada de la ecuación

$$\dot{Z} = \tilde{A}(t)Z(t) + Z(t)\tilde{A}^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) + Z(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}PB_2B_2^TP - C_2^TN^{-1}C_2\right](t)Z(t), \quad (139)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [\tilde{A} - Z(C_2^TN^{-1}C_2 - \gamma^{-2}PB_2B_2^TP)](t)x(t), \quad (140)$$

es exponencialmente estable; donde $\tilde{A}(t) = A(t) + \frac{1}{\gamma^2}B_1(t)B_1^T(t)P(t)$.

Considérense nuevamente las versiones perturbadas de las ecuaciones diferenciales de Riccati antes mencionadas:

$$-\dot{P}_\varepsilon = P_\varepsilon(t)A(t) + A^T(t)P_\varepsilon(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P_\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P_\varepsilon(t) + \varepsilon I, \quad (141)$$

$$\dot{Z}_\varepsilon = \tilde{A}_\varepsilon(t)Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)\tilde{A}_\varepsilon^T(t) + B_1(t)B_1^T(t)$$

$$+ Z_\varepsilon(t) \left[\frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T N^{-1} C_2 \right] (t) Z_\varepsilon(t) + \varepsilon I; \quad (142)$$

donde $\tilde{A}_\varepsilon(t) = A(t) + \frac{1}{\gamma^2} B_1(t) B_1^T(t) P_\varepsilon(t)$.

Teorema 8 (Orlov y Acho, 1999). - *Suponga que las suposiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces existe una $\varepsilon_0 > 0$ tal que los sistemas (141), (142) tiene una solución única $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ positiva definida y acotada para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, donde el siguiente sistema dinámico*

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + \left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t) g_1^T(\xi, t) - g_2(\xi, t) g_2^T(\xi, t) \right] P_\varepsilon(t) \xi + Z_\varepsilon(t) C_2^T(t) N^{-1}(t) [y(t) - h_2(\xi, t)], \quad (143)$$

$$u = -g_2^T(\xi, t) P_\varepsilon(t) \xi \quad (144)$$

da solución al problema de control H_∞ en forma local.

La demostración de este teorema se puede obtener exactamente del mismo procedimiento que se usó para demostrar el teorema 7 del capítulo cinco, usando ahora

$$k_{21}(x, t) k_{21}^T(x, t) = N(t).$$

VI.3 Síntesis de control H_∞ vía mediciones discretas

El propósito de esta sección es mostrar el diseño de un controlador local H_∞ vía mediciones discretas, el cual es un controlador admisible, tal que la desigualdad (98) se satisfaga para toda $t_1 > t_0$, para todas las funciones $w(t)$ seccionalmente continuas y con el sistema inicializado en el origen ($x(t_0) = \xi(t_0) = 0$). Obsérvese que en sí, y debido a las

observaciones discretas, la integral en (98) se transforma a (Orlov y Acho, 2001)

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \left[\int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt + \sum_{\tau_j \in [t_0, t_1]} \|w(\tau_j)\|^2 \right].$$

Supóngase además que se cumple

$$k_{21}(x(\tau_j), \tau_j)k_{21}^T(x(\tau_j), \tau_j) = I, \quad j = 0, 1, \dots \quad (145)$$

La introducción de $N^{-1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} N_j \delta(t - \tau_j)$ en las ecuaciones diferenciales en (140), (142) y (143), representan ecuaciones diferenciales con discontinuidades (Bainov y Simeonov, 1989), de (142) se obtiene que entre intervalos de muestreo se cumple

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\varepsilon &= \tilde{A}_\varepsilon(t)Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)\tilde{A}_\varepsilon^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ &+ \gamma^{-2}Z_\varepsilon(t)P_\varepsilon(t)B_2(t)B_2^T(t)P_\varepsilon(t)Z_\varepsilon(t) + \varepsilon I, \end{aligned} \quad (146)$$

mientras que en los instantes de muestreo hay que calcular las discontinuidades de (146) a partir de

$$\dot{Z}_\varepsilon = -Z_\varepsilon(t)[C_2^T(\tau_j)C_2(\tau_j)]Z_\varepsilon(t)\delta(t - \tau_j). \quad (147)$$

Al multiplicar $Z_\varepsilon^{-1}(t)$ por la izquierda y derecha de (147), se llega a

$$Z_\varepsilon^{-1} \dot{Z}_\varepsilon Z_\varepsilon^{-1} = -\dot{Z}_\varepsilon^{-1}(t) = -[C_2^T(\tau_j)C_2(\tau_j)]\delta(t - \tau_j). \quad (148)$$

Integrando (148) se logra

$$Z_\varepsilon^{-1}(\tau_j+) - Z_\varepsilon^{-1}(\tau_j-) = C_2^T(\tau_j)C_2(\tau_j),$$

Multiplicando por la izquierda por $Z_\varepsilon(\tau_j+)$ y por la derecha por $Z_\varepsilon(\tau_j-)$ y despejando $Z_\varepsilon(\tau_j+)$, se obtiene

$$Z_\varepsilon(\tau_j+) = Z_\varepsilon(\tau_j-)[I + C_2^T(\tau_j)C_2(\tau_j)Z_\varepsilon(\tau_j-)]^{-1}. \quad (149)$$

Con lo que se concluye que la ecuación diferencial (142) con efectos impulsivos, se traduce a ecuación diferencial (146) con discontinuidades (149).

Considere las siguientes ecuaciones con dinámica entre intervalos de muestreo,

$$\dot{x} = [\tilde{A} + \gamma^{-2}ZPB_2B_2^T P](t)x(t) \quad (150)$$

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + \left[\frac{1}{\gamma^2}g_1(\xi, t)g_1^T(\xi, t) - g_2(\xi, t)g_2^T(\xi, t)\right]P_\varepsilon(t)\xi \quad (151)$$

y con discontinuidades en los instantes de muestreo,

$$x(\tau_j+) = x(\tau_j-) - [Z_\varepsilon(\tau_j+)]C_2^T(\tau_j)C_2(\tau_j)x(\tau_j-) \quad (152)$$

$$\xi(\tau_j+) = \xi(\tau_j-) + [Z_\varepsilon(\tau_j+)]C_2^T(\tau_j)[y_j - h_2(\xi(\tau_j-), \tau_j)]. \quad (153)$$

El cálculo de estas discontinuidades, son mostrados en el Apéndice A.

Las discontinuidades describen cambios instantáneos en las trayectorias del controlador H_∞ en los instantes de la medición τ_j , $j = 0, 1, \dots$.

A fin de poder postular la síntesis del controlador H_∞ vía mediciones discretas, la condición A2) será modificada como sigue:

A2') Con $\varepsilon = 0$ existe una solución positiva semidefinida y acotada de $Z(t)$ de (146), (149) tal que el sistema (150), (152) es exponencialmente estable.

El siguiente teorema muestra la síntesis de la solución del problema de control H_∞ vía mediciones discretas.

Teorema 9 (Orlov y Acho, 2001). -*Suponga que las condiciones A1) y A2') se cumplen. Suponga además que existe una $\varepsilon_0 > 0$ tal que los sistemas (141), (146), (149) tiene una solución única $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ positiva definidas y acotadas, por cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Entonces, una solución al problema de control H_∞ vía mediciones discretas está dada por (144), (151), (153).*

El resultado mostrado en el teorema 9, coinciden en forma similar con los resultados mostrados en (Suzuki *et al.*, 1994.) para el caso invariante en el tiempo. Los resultados mostrados en (Orlov y Acho, 2000), muestran otra forma de calcular las discontinuidades a las ecuaciones antes mencionadas, por medio de uso de la teoría de distribución y transformaciones en el tiempo y esta fuera del alcance de la presente memoria.

VI.4 Resultados numéricos

La presente sección tiene la finalidad de mostrar simulaciones numéricas que soportan los resultados mostrados en el teorema 9. El sistema no lineal usado es el mismo que el primer ejemplo usado en el capítulo 4, pero ahora con mediciones discretas de la forma:

$$y_j = \sin(x_1(\tau_j)) + w_2(\tau_j), \quad j = 0, 1, \dots$$

Se muestran las simulaciones realizadas con Matlab, con un periodo de muestreo de un medio segundo, con $\gamma = 5$ y $\varepsilon = 0.2$, los menores de las ecuaciones de Riccati (141), y (146) con (149), son mostrados en la fig.12. De la figura 12, se puede concluir que son

soluciones positivas definidas y acotadas de las ecuaciones antes mencionadas para estas condiciones dadas.

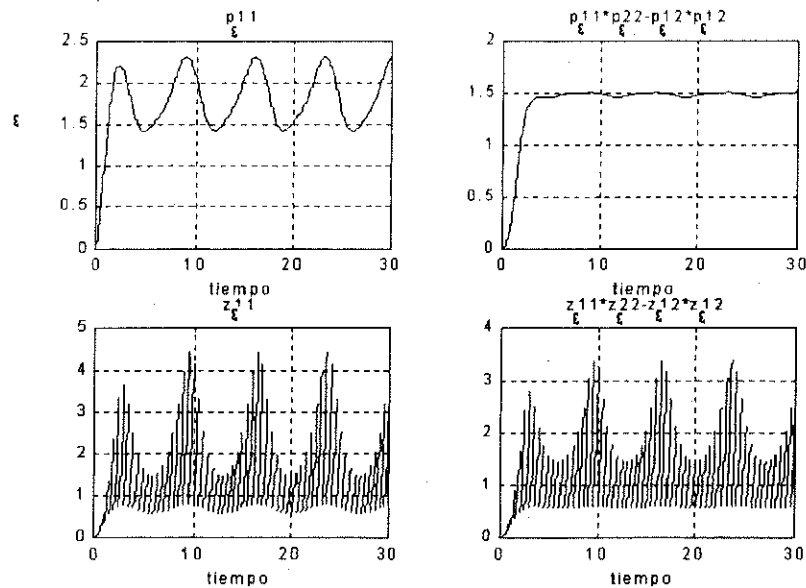


Fig 12 Menores principales.

La fig. 13 muestra los estados del sistema, ley de control y la salida muestreada del caso no perturbado, mostrando que el controlador es admisible localmente. Las figuras 14 y 15 muestran dos casos perturbados. Las condiciones iniciales en todas las simulaciones fueron $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = \xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$.

Esta metodología de usar los resultados de un controlador basado en mediciones continuas para obtener un controlador vía mediciones discretas ha sido usado en (Basar y Bernhard, 1991), y aquí ha sido usado de igual manera. Una observación muy importante de los resultados mostrados en la presente, es que no es necesario que las mediciones sea con periodo de muestreo constante, pudiendo así usarse periodos de muestreos no constantes o variantes, ver también (Orlov y Acho, 2001).

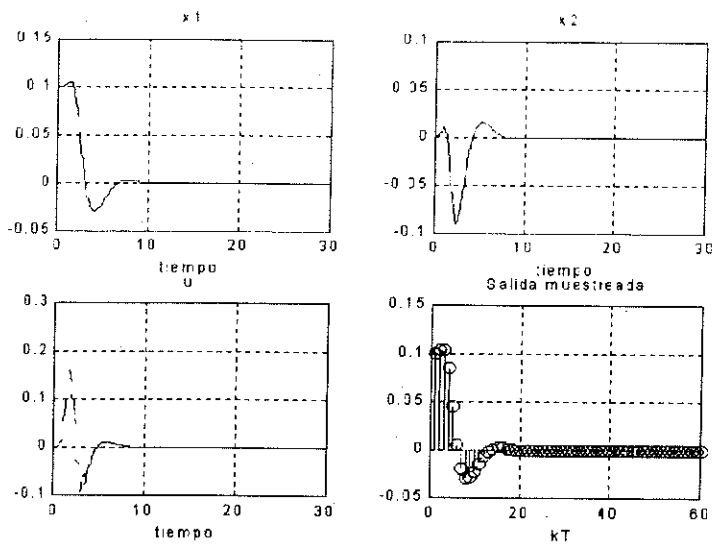


Fig.13 Simulaciones del sistema no perturbado.

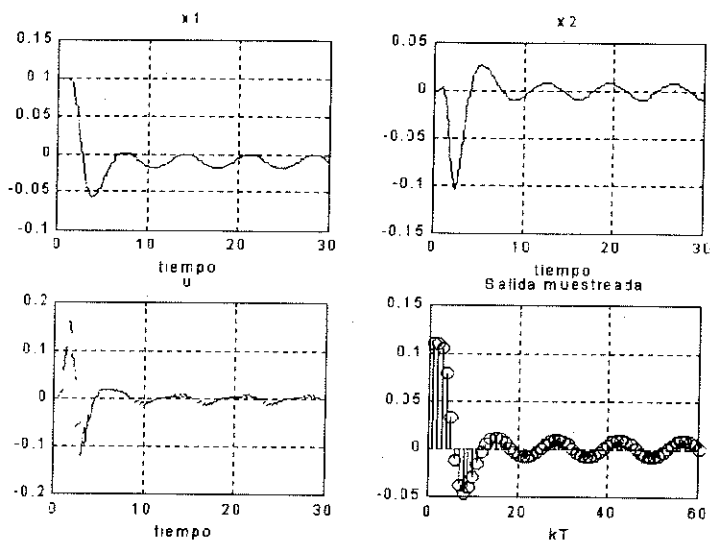


Fig.14 Simulaciones del sistema perturbado con $w_1 = 0.01e^{-t}$ y $w_2 = 0.01$.

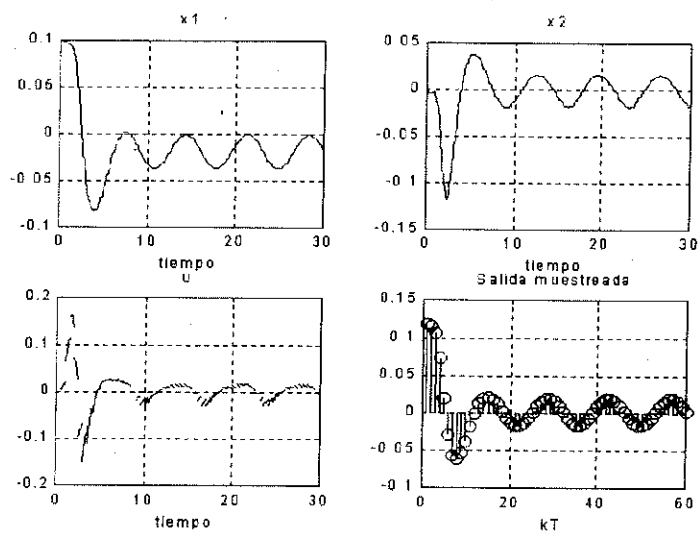


Fig.15 Simulaciones del sistema perturbado con $w_1 = 0.02e^{-t}$ y $w_2 = 0.02$.

VII Conclusiones y Trabajo a Futuro

Conclusiones

Durante el desarrollo del presente trabajo, se encontraron diferentes metodologías posibles para la derivación del controlador H_∞ para sistemas no lineales variantes en el tiempo vía mediciones continuas de la salida. Las más comunes fueron aquellas basadas en álgebra matricial usando desigualdades. Esta metodología ha sido también usada con éxito para obtener controladores H_∞ cuando se tiene retardo (Jian-Bo *et al.*, 1998) y efectos de saturación en la ley de control (Xiong *et al.*, 1999). Esta técnica fue usada aquí para la derivación del control H_∞ para sistemas no lineales variantes en el tiempo vía mediciones continuas, facilitando además las pruebas de estabilidad usando la teoría de Lyapunov. Además, esta misma estrategia fue usada para obtener otros esquemas de controladores H_∞ (Acho y Sánchez, 2000) y (Acho y Nieto, 2001, trabajo sometido bajo revisión). También es factible usar los resultados obtenidos en (Acho y Bugarín, 2001, trabajo sometido bajo revisión) para implementar técnicas de control H_∞ para sistemas con mediciones discretas usando el planteamiento presentado en el capítulo seis.

Con respecto al diseño de controladores para sistemas con mediciones discretas, se encontró que la forma dominante es transformar el sistema invariante en el tiempo con mediciones discretas a un sistema no lineal variante en el tiempo periódico con mediciones continuas. El aparato matemático requerido para resolver este problema es complejo, sin embargo, usando la metodología presentada en el capítulo seis, resulta ser más simple.

Concerniendo a la forma de representar el sistema a ser controlado, éste tiene que contener los efectos de las perturbaciones. La adecuada inclusión de las perturbaciones en el modelo reflejará un mejor desempeño del controlador diseñado. Por lo que se requiere, antes de obtener el modelo final del sistema sujeto a perturbaciones, localizar y caracterizar correctamente las perturbaciones en éste; tema de investigación en la actualidad.

Los objetivos del diseño de controladores H_{∞} mostrados en la presente memoria son versiones más simples de las ya existentes como en (Isidori y Astolfi, 1992), desde el punto de vista de que los requerimientos de detectabilidad no son usadas, siendo los resultados presentados de más relevancia.

Trabajo a Futuro

Como ha sido presentado en los capítulos 4, 5 y 6, la solución local usada para resolver el problema de control H_{∞} se basa en la solución a ecuaciones lineales de Riccati; sin embargo, el controlador usado es no lineal. De este hecho, la robustez del controlador se ve limitada por el uso de las ecuaciones lineales de Riccati, por lo que se puede extender los resultados presentados usando ecuaciones no lineales de Riccati, como las usadas en (Erdem y Alleyne, 1999), para mejorar el desempeño del controlador, en cuanto a perturbaciones admisibles y región de atracción para el sistema no perturbado.

Otras consideraciones abiertas, es la extensión de los resultados para sistemas con fricción, donde en vez de compensar la fricción, buscar un controlador dinámico discontinuo o de estructura variable, como las usadas en (Alvarez *et al.*, 2000).

Apéndice A

Operaciones Básicas con Funciones de Delta Dirac y de Heaviside

El presente apéndice tiene que ver esencialmente con operaciones de las funciones de Delta Dirac y funciones de Heaviside (la función escalón unitario). Unas de tales operaciones conocidas, desarrolladas usando la teoría de la distribución, es que la integral de la función de Delta Dirac, da como resultado la función de Heaviside. De igual modo, al derivada de la función de Heaviside, da como resultado la función de Delta Dirac. La correcta interpretación de estas operaciones permite que sistemas dinámicos con discontinuidades usando esta funciones, sean correctamente obtenidas, ver por ejemplo (Filippov, 1988.).

Sin embargo, si se tiene un sistema dinámico de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)\delta(t - c)\chi(t - c)$$

donde $x \in R^n$, las funciones $f(x, t)$ y $g(x, t)$, son funciones suaves que cumplen con la condición de Lipzchipz, $\delta(t - c)$ es la función de Delta Dirac, $\chi(t - c)$ es la función de Heaviside, y c una constante positiva. Dicho sistema dinámico, no tiene completamente caracterizado la cantidad del salto discontinuo del vector de estado en $t = c$ (Filippov, 1988), esto debido a la dificultad de la siguiente operación

$$J = \int g(x, t)\delta(t - c)\chi(t - c)dt. \quad (154)$$

Para hacer un estimado del resultado del valor de esta última integral, considere el siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = p\delta(t - c)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in R^1 \quad (155)$$

donde p es una constante. Este sistema se puede manipular a la siguiente forma

$$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{x} = p\delta(t - c)$$

donde la solución a $\dot{y} = p\delta(t - c)$ es $y(t) = p\chi(t - c)$, mientras que la solución a $\dot{y} = \frac{\dot{x}}{x}$ da

$$x(t) = x_0 e^{y(t)} = x_0 e^{p\chi(t-c)},$$

de donde claramente se ilustra, que $x(t)$ presentará un salto discontinuo en $t = c$ con valor de $x_0 e^p - x_0$, ó dicho de otro modo, la solución a (155) es

$$x(t) = x_0 + x_0(e^p - 1)\chi(t - c). \quad (156)$$

Diferenciando (156) y usando (155), después de algunas manipulaciones, e integrando con respecto al tiempo, se llega a

$$J = \int \delta(t - c)\chi(t - c)dt = \frac{e^p - 1 - p}{p(e^p - 1)}, \quad (157)$$

donde el valor de esta integral va de uno a cero, conforme p toma valores de $-\infty$ a $+\infty$. Este mismo resultado es obtenido en (Saichev y Woyczyński, 1997 pág. 61).

Ahora tómesese el siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = \delta(t - c)\chi(t - c)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in R^1 \quad (158)$$

repetiendo el mismo procedimiento anterior, se llega a que la solución a (158) es

$$x(t) = x_o + x_o(e^J - 1)\chi(t - c) \quad (159)$$

con J dado en (157). Por lo que la discontinuidad en $x(t)$ en $t = c$, no esta completamente determinado, dicha visión concuerda con (Filippov, 1988 Cap3. Sección 1). Al integrar (158), se observa que

$$J_x = \int x\delta(t - c)\chi(t - c)dt = x_o(e^J - 1) \quad 0 \leq J \leq 1 \quad (160)$$

la cuál lleva a que

$$J_x = \int g(x, t)\delta(t - c)\chi(t - c)dt = g(x_o, c)(e^J - 1) \quad 0 \leq J \leq 1. \quad (161)$$

Desde el punto de vista práctico, obsérvese que $x_o = x(t)$ en $t = (c-)$. Nótese que en los instantes de medición, las ecuaciones integradas en (140) y (143), pueden ser escritas, en función de la cantidad del salto discontinuo de Z_ε dado en (149), como

$$x(\tau_j+) - x(\tau_j-) = Z_\varepsilon(\tau_j+)[C_2^T(\tau_j)C_2(\tau_j)] \int x\delta(t - \tau_j)\chi(t - \tau_j)dt$$

$$\xi(\tau_j+) - \xi(\tau_j-) = Z_\varepsilon(\tau_j+)C_2^T(\tau_j) \int [y(\tau_j) - h_2(\xi(\tau_j-), \tau_j)]\delta(t - \tau_j)\chi(t - \tau_j)dt,$$

usando (160) y (161), se llega a las discontinuidades calculados en (152) y (153) con $J = \ln(2)$.

Literatura Citada

- Acho L., Orlov I. y Solis V., 2001. "Nonlinear Measurement Feedback H_∞ Control of Time-Periodic Systems with Application to Tracking Control of Robot Manipulators". *Int. J. Control*, 74(2): 190-198 p.
- Acho L. y Sánchez Juan de Dios, 2000. "An alternative H_∞ Control Design for Linear Systems via State Feedback". II Conferencia Internacional en Control e Instrumentación Digital 2000, Querétaro, México.
- Acho L. y Juan I. Nieto, 2001. "Control H_∞ para Sistemas Lineales vía Retroalimentación de Estados con Grado Prescrito de Estabilidad", sometido al X Congreso Internacional de Electrónica y Computadores CONIELECOMP 2001.
- Acho L., y Bugarín Eusebio, 2001. "Diseño de un Controlador de Regulación para Robots Manipuladores Usando sólo Mediciones de la Posición de las Articulaciones", sometido al X Congreso Internacional de Electrónica y Computadores CONIELECOMP 2001.
- Alvarez J., Orlov I. y Acho L., 2000. "An Invariance Principle for Discontinuous Dynamic Systems with Application to a Coulomb Friction Oscillator", Aceptado para la edición especial de la revista ASME programada este Diciembre del 2000.
- Arjan Van der Shaft, 1996. " L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control". Springer Verlag. Primera Edición. London. 157 pp.
- Arjan Van der Shaft, 1992. " L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ - Control". *IEEE Trans. Aut. Ctrl.*, 37: 770-784 p.
- Bainov D.D. y Simeonov P. S., 1989. "Systems with Impulsive Effect: Stability, Theory and Applications". Ellis Horwood Limited Pu., Primera Edición. Great Britain. 255 pp.

- Ball J. A., Helton J. W., y Walker M. L., 1993. "H_∞-Control for Nonlinear Systems with Output Feedback". IEEE Trans. Aut. Ctrl., 38: 546-559 p.
- Basar T. y Bernhard P., 1991. "H_∞—Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Games Approach". Birkhauser. Primera Edición. Mass. 224 pp.
- Brogliato Bernard, 1996. "Nonsmooth Impact Mechanics". Springer. Primera Edición. France. 400 pp.
- Chen B., Lee T. y Feng J., 1994. "A Nonlinear H_∞ Control Design in Robotic Systems Under Parameter Perturbation and External Disturbance". Int. J. Control, 59: 439-461 p.
- Chung C. C. y Hauser J., 1997. "Nonlinear H_∞-Control Around Periodic Orbits". Syst. and Ctrl. Lett., 30:127-137 p.
- Doyle John C., Glover Keith, Khargonekar Pramod P. y Francis Bruce A., 1989. "State-Space Solutions to Standard H₂ and H_∞ Control Problems ". IEEE Trans. Aut. Ctrl. 34 (8): 831-847 p.
- Doyle John C., Francis Bruce A. y Tannenbaum Allen R., 1992. "Feedback Control Theory". Macmillan Pu. Primera Edición. N.Y. 227 pp.
- Erdem E. B. y Alleyne A. G., 1999. "Globally Stabilization Second Order Nonlinear Systems by SDRE Control". Procc. American Control Conference, San Diego:California USA: 2501-2505.
- Filippov A. F., 1988. "Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides". Kluwer Academic Pu. Primera Edición. Boston. 304 pp.

- Haddad Wassim M., Chellaboina Vijaysekhar, y Kablar Natasa A., 1999. "Nonlinear Impulsive Dynamical Systems, Part I: Stability and Dissipativity". Procc. Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA: 4404-4422 p.
- Ichikawa A. y Katayama Hitoshi, 1999. "Remarks on Time Varying H_∞ Riccati Equations". Syst. and Ctrl. Lett., 37:335-345 p.
- Isidori Alberto y Astolfi Alessandro, 1992. "Disturbance Attenuation and H_∞ Control Via Measurement Feedback in Nonlinear Systems". IEEE Trans. Aut. Ctrl. 37 (9): 1283-1293 p.
- Jian-Bo He, Qing-Guo Wang y Tong-Heng Lee, 1998. " H_∞ Disturbance Attenuation for State Delayed Systems". Syst. and Ctrl. Lett. 33:105-114 p.
- Khalil Hassan, 1996. "Nonlinear Systems". Prentice Hall. Segunda Edición. New Jersey. 734 pp.
- Lukes D. L., 1969. "Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems". SIAM J. Contr., 7: 75-100 p.
- Orlov Y., 1985. "Vibrocorrect Differential Equations with Measure". Mathematical Notes, 1 (38): 100-119 p.
- Orlov Yu., y Acho L., 1999. "Measurement Feedback H_∞ -Control of Time-Periodic Nonlinear Systems". Procc. American Control Conference, San Diego, California USA: 1294-1298 p.
- Orlov Yu., Acho L., y Solis V., 1999. "Nonlinear H_∞ -Control of Time-Varying Systems". Procc. Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA: 3764-3769 p.

- Orlov Y., 1997. "Nonlinear Control Systems with Impulsive Inputs". Procc. Conference on Decision and Control, San Diego, California USA: 630-635 p.
- Orlov Y. y Acho L., 2001. "Nonlinear H_∞ Control of Time-Varying Systems: A Unified Distribution-Based Formalism for Continuous and Sampled-Data Measurement Feedback Design". IEEE Trans. Aut. Ctrl. (por aparecer).
- Orlov Y y Acho L., 2000. "Nonlinear H_∞ Control via Sampled-Data Measurement Feedback: Time-Scale Conversion to Continuous Measurement Case". Aceptado para el Procc. Conference on Decision and Control, Sidney, Australia.
- Ravi R., Nagpal K. M. y Khargonekar P. D., 1991. " H_∞ -Control of Linear Time-Varying Systems: A State-Space Approach". SIAM J. Ctrl. and Opt. 29: 1394-1413 p.
- Ravi R., A. M. Pascoal y P. P. Khargonekar, 1992. "Normalized Coprime Factorization for Linear Time-Varying Systems". Syst. and Ctrl. Lett. 18: 455-465 p.
- Saichev Alexander I. y Woyczyński Wojbor A., 1997. "Distributions in Physical and Engineering Sciences". Birkhauser. Primera Edición. 336 pp.
- Smith P. y Smith R. C., 1968. "Mechanics". John Wiley. Segunda Edición. 321 pp.
- Skogestad Sigurd y Postlethwaite Ian, 1996. "Multivariable Feedback Control". John Wiley. Primera Edición. Chichester. 559 pp.
- Spong M. W. y Vidyasagar M., 1989. "Robot Dynamics and Control". John Wiley. Primera Edición. Singapore. 336 pp.
- Suzuki S., Isidori Alberto and Tarn T., 1994. " H_∞ Control of Continuous Systems with Sampled Measurement". Procc. Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Florida USA: 715-718.

- Tuan H. D. y Hosoe S., 1996. "On linearization Technique in Robust Nonlinear Control". Syst. and Ctrl. Lett. 27: 21-27 p.
- Wei-Min Lu, 1996. " H_{∞} -Control of Non-Linear Time-Varying Systems with Finite Time Horizon". Int. J. Control, 64, 241-262 p.
- Xie L. and Souza C. E., 1993. " H_{∞} State Estimation for Linear Periodic systems". IEEE Trans. Aut. Ctrl., 38: 1704-1707 p.
- Xiong X., Cao Y, y Sun Y, 1999. " H_{∞} Performance of Linear Systems Subject to Input Saturation". Procc. of the 14th Triennial World Congress (IFAC), Beijing P. R. China.
- Zhou Kemin, Doyle John C. y Glover Keith, 1996. "Robust and Optimal Control". Prentice Hall. Primera Edición. New Jersey. 596 pp.

