

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y
DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

EFFECTOS EN LA PROPAGACION DE ONDAS DE
PLATAFORMA, DEBIDO A UN CAMBIO BRUSCO
DE LA LINEA DE COSTA Y TOPOGRAFIA.

T E S I S
MAESTRIA EN CIENCIAS

Ana Consuelo Carrasco Licea

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, JUNIO DE 1991.



RESUMEN de la tesis de Ana ~~X~~ Consuelo Carrasco Licea presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRA EN CIENCIAS en OCEANOGRAFIA FISICA. Ensenada Baja California México. Junio 1991.

EFFECTOS EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS DE PLATAFORMA, DEBIDOS A UN CAMBIO BRUSCO DE LA LÍNEA DE COSTA Y TOPOGRAFÍA.



Resumen aprobado por

Dr. Pedro Ripa

Las ondas topográficas de Rossby tienen frecuencias subinerciales y deben su existencia a cambios en la profundidad del fondo del mar y al efecto de Coriolis. En particular, se propagan sobre las plataformas continentales, atrapándose a la costa. Se han realizado trabajos donde se les modela en plataformas con costa recta y topografía paralela a ésta. La existencia de batimetrías no uniformes, a lo largo de la costa, motivó la realización de otros modelos como el aquí utilizado.

Inspirados en regiones como las del Golfo de Tehuantepec, en este trabajo se estudia la transmisión y reflexión de estas ondas en una plataforma cuyo ancho cambia bruscamente donde, además, la costa tiene forma de escalón. La solución se encuentra por dos métodos: expansión en modos y teoría de rayos (TR); este último provee una aproximación al primero, y es más sencilla de llevar a cabo.

La solución modal muestra variaciones en el flujo de energía en función de la frecuencia; que no son reproducidas por la solución de TR, aunque ésta coincide en promedio. Los flujos de energía obtenidos por ambos métodos concuerdan mejor en frecuencias bajas que en altas.

Ambas soluciones coinciden en la localización y valores extremos de la estructura espacial de la función corriente. Sin embargo, la teoría de rayos predice cambios demasiado bruscos, por ejemplo en la frontera entre una "zona de sombra" y la región alcanzada por los rayos.

TESIS DEFENDIDA POR: ANA CONSUELO CARRASCO LICEA

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



DR. PEDRO RIPA.- Director del Comité



DR. JOSE LUIS OCHOA DE LA TORRE.- Miembro del Comité



DRA. MA. LUISA ARGOTE ESPINOZA.- Miembro del Comité



M.C. JUAN ANTONIO MADRID GONZALEZ.- Miembro del Comité



M.C. JOSE MARIA ROBLES PACHECO.- Jefe Depto. de Oceanografía Física



DR. HECTOR ECHAVARRIA HERAS.- Director Académico

14 DE JUNIO DE 1991

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE EDUCACION
SUPERIOR DE ENSENADA.

DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFIA FISICA

EFFECTOS EN LA PROPAGACION DE ONDAS DE PLATAFORMA, DEBIDOS A UN
CAMBIO BRUSCO DE LA LINEA DE COSTA Y TOPOGRAFIA.

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos
necesarios para obtener el grado de MAESTRA EN CIENCIAS
presenta

ANA CONSUELO CARRASCO LICEA

Ensenda Baja California, Junio 1991.

A mis padres.

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos al Dr. Pedro Ripa, por haber dirigido este trabajo con entusiasmo y el siempre presente empeño en transmitir a sus alumnos una nueva manera de razonar, pero sobre todo por su inmensa paciencia.

Les agradezco a los miembros de mi comité las correcciones que realizaron a este trabajo, especialmente al Dr. Jose Luis Ochoa por sus valiosas observaciones y ayuda. También agradezco al Dr. Manuel López el interés que mostró en el tema y sus comentarios.

A Mauricio, Pedro y Alejandro les agradezco las facilidades proporcionadas, para imprimir las "n" versiones (textos y gráficas) de esta tesis. Así como a José María por los dibujos.

Gracias a mis amigos; Angélica, Luis Fernando, Antonio, Sergio, Isabel y Marco Julio por todas las palmaditas en el hombro. Con mucho cariño.

Y por supuesto, gracias a Timothy, por todos los apapachos, su apoyo y amor.

CONTENIDO

	<u>Página.</u>
I. INTRODUCCION	1
II. DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES	5
III. ONDAS DE PLATAFORMA	6
IV. COSTA EN FORMA DE ESCALÓN; MODOS	10
V. SOLUCIÓN POR TEORÍA DE RAYOS	18
VI. COSTA EN FORMA DE ESCALÓN; RAYOS	25
VII. RESULTADOS	31
VIII. CONCLUSIONES	49
BIBLIOGRAFÍA	52
APÉNDICE A: Criterios de convergencia	53
APÉNDICE B: Flujos de energía.	57
APÉNDICE C: Función corriente por medio de TR.	59

LISTA DE FIGURAS.

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
1. Esquema del canal de ancho constante	7
2. Relación de dispersión de los primeros cinco modos para $\lambda a = 1.5$; la profundidad mar adentro relativa a la profundidad en la costa es $e^{\lambda a}$.	9
3. Esquema de la batimetría del modelo. El "muro" al final de la plataforma se colocó por conveniencia matemática.	11
4. Relaciones de dispersión lejanas al escalón. Los parámetros fijos son $\epsilon = 0.3$, $\lambda a = 1.5$. El ancho de la plataforma a ambos lados del escalón es $a(1-\epsilon)$ & $a(1+\epsilon)$, respectivamente.	13
5. Diagrama de lentitud para $\lambda a = 0.6$.	22
6. Diagramas de lentitud con los vectores velocidad de grupo a) para el caso de una frontera rígida inclinada y b) para el caso de fronteras paralelas a los ejes coordenados.	24
7. Esquema de las familias de rayos necesarias para construir la función ψ en el canal de ancho constante descrito en la figura 1.	26
8. Regiones donde se definen las contribuciones necesarias para la construcción de la función ψ por medio de teoría de rayos, para plataformas que se angostan hacia el Norte, $\epsilon > 0$.	28
9. Lo mismo que la anterior pero para plataformas que se ensanchan hacia el Norte, $\epsilon < 0$.	29

Cont. LISTA DE FIGURAS.

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
10. Fracción de energía transmitida calculada con la solución modal y la obtenida por teoría de rayos, variando con la razón de los anchos del canal, $(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$, y la contribución modal. Los valores fijos son $\omega/f = 0.1$, $\lambda a = 1.5$; a) cuando incide una onda del primer modo y b) del segundo modo.	32
11. Fracción de energía transmitida calculada por ambas técnicas y contribución modal contra ω/f . Los parámetros fijos son $\epsilon = 0.3$ y $\lambda a = 1.5$. a) incide el primer modo y b) el segundo.	35
12. Fracción de energía transmitida calculada por ambas técnicas y contribución modal contra ω/f . Los parámetros fijos son $\epsilon = -0.387$ y $\lambda a = 1.63$. a) incide el primer modo y b) el segundo.	39
13. Parte real, a), e imaginaria, b), de la función corriente obtenida por la solución modal para $\epsilon = 0.3$, $\lambda a = 1.5$, $\omega/f = 0.2$ y $j = 2$.	41
14. Lo mismo que en la figura anterior, pero obtenida por teoría de rayos.	42
15. Lo mismo que la figura 13 para $\epsilon = -0.387$, $\lambda a = 1.63$, $\omega/f = 0.1$ y $j = 2$.	44
16. Lo mismo que en la figura anterior pero obtenida por teoría de rayos.	46

Cont. LISTA DE FIGURAS.

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
17. Flujos de energía reflejados como función del período para una batimetría que modela al golfo de Tehuantepec, $\varepsilon = 0.556$, $\lambda a = 1.404$ y $f = 4.018 \cdot 10^{-5} (\text{s}^{-1})$. Los símbolos ($\cdot, +, *$) corresponden a los obtenidos por Trasviña (1987), modelo sin "muro". Las líneas sólidas corresponden a lo obtenido por nuestra solución modal y la línea punteada es la obtenida por teoría de rayos.	47
18. Fases de las amplitudes del primer modo transmitido y reflejado (los únicos libres) como función del número de modos desvanecientes, M , para $\varepsilon = 0.3$, $a\lambda = 1.5$, $\omega/f = 0.3$ y $j = 1$. Claramente para $M \geq 8$ la solución numérica ha convergido a la analítica.	56

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla</u>	<u>Página</u>
I. Medidas de convergencia y flujos de energía para diferentes valores de M_α y M_p . Las variables fijas son $\varepsilon = 0.3$ $\omega/f = 0.125$ y $a\lambda = 1.5$. Se transmiten dos modos y se reflejan cuatro.	55

I.-INTRODUCCION

Trabajos teóricos han mostrado la posibilidad de existencia de ondas barotrópicas, con frecuencias subinerciales, que tienen como agente restaurador al gradiente de la vorticidad potencial ambiental, $\nabla(f/H)$, donde f es el parámetro de Coriolis y H es la profundidad del fondo. Cuando H es constante y $f = f_0 + \beta y$ (donde β es el gradiente latitudinal de f y f_0 el parámetro de Coriolis en alguna latitud determinada) las ondas se llaman de Rossby "planetarias", mientras que para f constante y H variable se denominan ondas topográficas de Rossby; éstas son el objeto de esta tesis. Una peculiaridad de este tipo de ondas es que sus crestas sólo se propagan en una dirección, es decir, su rapidez de fase siempre tiene el mismo signo. El mecanismo que permite su propagación está basado en la conservación de vorticidad potencial en cada elemento del fluido: la fase avanza, precisamente, en la dirección de $\hat{z} \times \nabla(f/H)$, donde \hat{z} es el vector unitario vertical.

Las ondas topográficas de Rossby sólo existen en regiones oceánicas donde la profundidad no es constante, en particular sobre plataformas continentales con fondo no plano; en este caso, también son llamadas ondas de plataforma (OP). Estas están atrapadas a la costa, ya que su amplitud decae en la dirección normal a ella, en una escala comparable al ancho de la plataforma o menor. La fase avanza con la costa a la derecha en el hemisferio Norte y a la izquierda en el Sur.

Existen varios estudios que modelan la propagación de estas ondas para diferentes topografías, como son los de Robinson (1964), y Buchwald & Adams (1968). Estos últimos estudiaron el caso de una costa recta con una plataforma de perfil exponencial, encontrando soluciones dispersivas para las que, aunque la rapidez de fase es en un sólo sentido, la

velocidad de grupo cambia de signo, indicando así que puede haber propagación de energía en ambas direcciones. La estructura de las diferentes ondas forman una base completa con la que se puede describir cualquier perturbación inicial y su evolución posterior. Cada término de esta base está asociado a un modo de oscilación y depende del valor de la componente a lo largo de la costa del número de onda, l , y de un número entero n , que indica el número de cruces por cero en la estructura normal a la costa. Para cada modo n , existe una frecuencia en donde la velocidad de grupo es cero; ésta es la frecuencia máxima a la cual ese modo puede existir. A cada frecuencia fija inferior a la máxima le corresponden dos valores de longitudes de onda. La energía asociada con la onda larga se propaga, igual que la fase, con la costa a la derecha, si estamos en el hemisferio Norte, mientras que la asociada con la corta viaja en sentido contrario. Para simplificar llamaremos en adelante "Norte" y "Sur" a estas dos direcciones, pensando en las costas mexicanas del Pacífico.

En los trabajos mencionados se aproxima la costa a una recta; éste puede ser un modelo aceptable para casos donde la costa y/o topografía varían suavemente. Variaciones lentas pueden tratarse por procedimientos 'adiabáticos', esto es manteniendo el mismo flujo de energía por modo y permitiendo que su estructura espacial se modifique tan lentamente como la topografía requiere. Sin embargo, la existencia de costas que varían significativamente en escalas espaciales menores a las de las longitudes de onda de las OP requieren de modelos más complicados. En cambios bruscos en la línea de costa o topografía, se conectan al modo incidente con posibles modos reflejados y transmitidos (Trasviña 1987; Wilkin y Chapman 1987). Por ejemplo, en la región del Golfo de Tehuantepec, localizado entre los 15° y 16° N y entre los 93° y 97° W, la línea de costa presenta un cambio brusco, además de que la plataforma continental es ancha al Este de los 95° W,

angostándose bruscamente al Oeste de ese meridiano.

Trasviña (1987) investigó la incidencia de una OP sobre una plataforma que modela al Golfo de Tehuantepec. La topografía de este modelo consiste en una línea de costa en forma de escalón, con fondo exponencial hasta cierta distancia de la costa, y fondo plano mar adentro. Utilizando los resultados de Buchwald y Adams (1968) respecto a soluciones lejanas al escalón, encontró las transmitidas y reflejadas en base a las características de la incidente.

Wilkin y Chapman (1987) estudiaron la conexión de ondas de plataforma sobre la misma batimetría usada por Trasviña, con el agregado de un "muro" justo donde termina al fondo exponencial, haciendo de la plataforma un canal. La colocación del muro mar adentro, con el propósito de hacer el cálculo mucho más sencillo, retiene inalterables las características principales del modelo original. Esto se debe a que el muro delimita a la región de atrapamiento y no provoca respuestas espúreas, ya que la suposición de flujo no divergente elimina la posibilidad de ondas de Kelvin que viajen atrapadas a él.

En este trabajo se estudia la dispersión de OP, con la batimetría usada por Wilkin y Chapman (1987), con la innovación de la utilización de Teoría de Rayos. Esta teoría provee una aproximación a la solución exacta de un problema hiperbólico, que es asintóticamente válida en el límite de longitudes de onda mucho más cortas que la escala de inhomogeneidades del medio. Esta solución asintótica ha sido usada en varios trabajos para describir la propagación de ondas oceánicas (v.gr. Smith 1971; Ripa 1989) mostrando ser una herramienta muy útil.

El problema se plantea en términos de la solución lejana: proveniente del "Sur" se tiene una onda larga incidente, cuya

frecuencia y número de modo son los datos de entrada, y un campo reflejado de ondas cortas con energía viajando en sentido contrario, mientras que al "Norte" se tiene sólo un campo de ondas largas transmitidas. Se consideran las ondas excitables a la misma frecuencia que la incidente.

Para determinar el rango de validez del método de rayos, el análisis se hará utilizando también otra técnica, a la que llamaremos "exacta", que consiste en expandir la solución mediante bases completas a ambos lados del escalón. Se estudiarán las diferencias entre los resultados de ambas. Como primer paso se discutirán las ondas para un canal con línea de costa recta y fondo exponencial, para después obtener la solución en presencia del escalón.

II.- DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES.

Las ecuaciones linealizadas de aguas someras sin fricción ni forzamiento son

$$u_t - f v = -g\eta_x \quad (1a)$$

$$v_t + f u = -g\eta_y \quad (1b)$$

$$\eta_t + (Hu)_x + (Hv)_y = 0 \quad (1c)$$

donde $[u, v]$ son las componentes de la velocidad en la direcciones $[x, y]$ ("Este", normal a la costa, y "Norte", a lo largo de la costa, respectivamente), g es la aceleración de la gravedad, η es la elevación de la superficie libre, H es la profundidad, y f es el parámetro de Coriolis, el cual se considera constante. Los subíndices indican diferenciación parcial.

En primer lugar hacemos la aproximación de tapa rígida, es decir, suponemos que $\eta_t = 0$ en (1c), para eliminar las ondas gravitatorias y de Kelvin, quedándonos sólo con las topográficas de Rossby. La ecuación de continuidad se reemplaza por la de no-divergencia y es gracias a ésto que definimos una función corriente ψ tal que

$$Hu = -\psi_y, \quad (2)$$

$$Hv = \psi_x.$$

Eliminando η de las ecuaciones (1) y sustituyéndola en (2), obtenemos una sola para ψ de la forma

$$\nabla \left(\frac{1}{H} \nabla \psi \right)_t + \mathcal{J} \left(\psi, \frac{f}{H} \right) = 0 \quad (3)$$

donde $\mathcal{J}(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$; ésta es la ecuación linearizada, de conservación de vorticidad potencial.

Podemos expresar los cambios temporales de la energía cinética en función de la divergencia del vector flujo de energía \vec{J} . Multiplicando la ecuación de vorticidad (3) por la

función corriente ψ , se obtiene

$$E_t + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (4)$$

donde

$$E = \frac{1}{2} H^{-1} |\nabla \psi|^2$$

y

$$J^x = -H^{-1} \psi \psi_{xt} - \frac{1}{2} \left(\frac{f}{H} \right)_y \psi^2, \quad (5)$$

$$J^y = -H^{-1} \psi \psi_{yt} + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{H} \right)_x \psi^2.$$

III.- ONDAS DE PLATAFORMA.

Consideremos un fondo que varía sólo en la dirección perpendicular a una costa recta, i.e. $H = H(x)$. Proponemos una solución para la ecuación (3) de ondas libres viajando a una frecuencia ω y con un número de onda a lo largo de la costa l , es decir, de la forma

$$\psi = H^{1/2} \phi(x) e^{i(ly - \omega t)}, \quad (6)$$

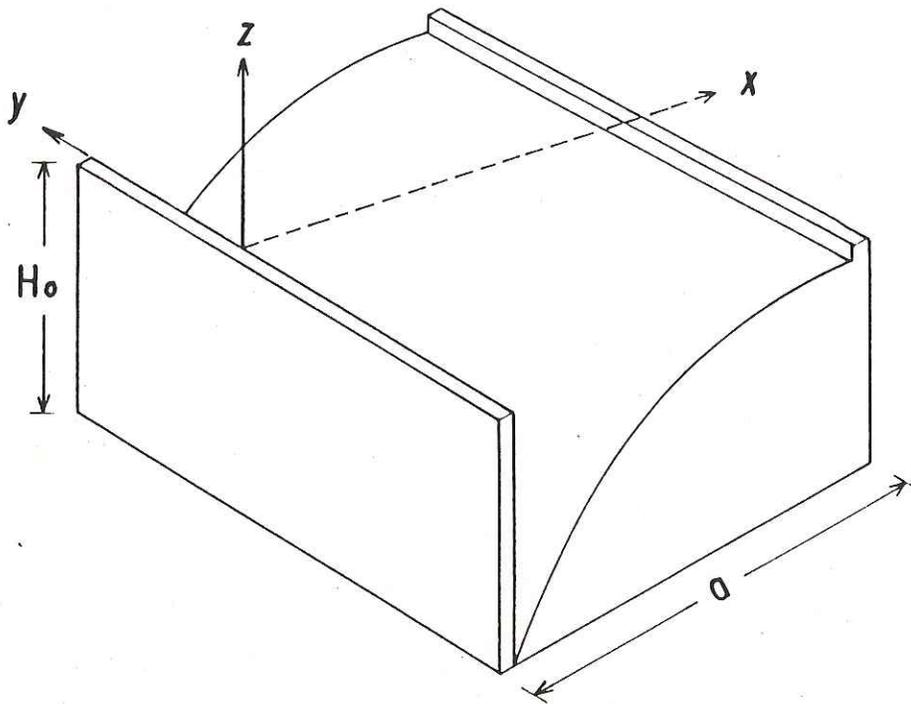
donde ϕ da la estructura a través del canal y el factor $H^{1/2}$ fué introducido por conveniencia. Sustituyendo, la ecuación (3) se reduce a

$$\phi_{xx} + k^2 \phi = 0 \quad (7)$$

donde

$$k^2(x) = \frac{1}{2} H_{xx} / H - \frac{3}{4} (H_x / H)^2 - (fl/\omega)(H_x / H) - l^2. \quad (8)$$

Si el muro está en $x = 0$ y la costa recta está a lo largo de $x = a$, ver figura 1, es decir, tenemos un canal de ancho a ,



$$H = H_0 e^{-2\lambda x}$$

Fig. 1. Esquema del canal de ancho constante.

las condiciones de frontera en las paredes requieren que u sea nulo en ellas

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 0, \\ \phi(a) &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Si elegimos un fondo que varíe exponencialmente de la siguiente manera

$$H(x) = H_0 e^{-2\lambda x}.\tag{10}$$

donde H_0 es la profundidad en la orilla de la plataforma y λ es un número positivo, k^2 no depende de x . Nótese que el valor de H_0 es irrelevante en (8), pues con (10) la ecuación (8) se transforma en

$$k^2 = \frac{2f\lambda l}{\omega} - l^2 - \lambda^2.$$

La solución de (7), considerando las condiciones de frontera (9), es entonces

$$\phi = C_n \sin(k_n x)\tag{11}$$

con $k_n = n\pi/a$, $n = 1, 2, \dots$, y C_n es una amplitud arbitraria. El valor de $n - 1$ indica el número de veces que la función ψ cruza por cero exceptuando el origen y $x = a$. Buchwald y Adams (1967) sin utilizar $\psi(0) = 0$ sino un fondo plano en lugar del muro, encuentran eigenfunciones que para $0 < x < a$ son sinusoidales, en $x = 0$, ψ tanto como ψ_y son continuas, y en $x < 0$ decrecen exponencialmente. La elección del muro obliga un atrapamiento algo más restringido que en este modelo más realista. Entonces la relación de dispersión es,

$$\omega = \Omega_n(l) = 2\lambda f l / (k_n^2 + \lambda^2 + l^2).\tag{12}$$

La rapidez de fase, ω/l , siempre tiene el mismo signo, pues sólo depende de f . Esta relación se grafica en la figura 2 para los primeros cinco valores de k_n , o sea los primeros

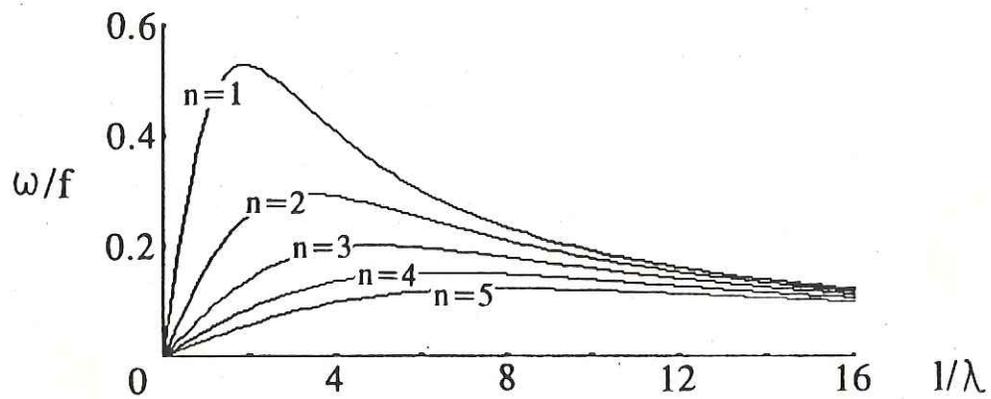


Fig. 2. Relación de dispersión de los primeros cinco modos para $\lambda a = 1.5$; la profundidad mar adentro relativa a la profundidad en la costa es $e^{\lambda a}$.

cinco modos. De esta gráfica se puede determinar, el signo de la componente "y" de la velocidad de grupo. Éste cambia al pasar por $l^* = \sqrt{k_n^2 + \lambda^2}$, lo que implica que aunque la fase se propague en una dirección, al "Norte", el tren de ondas y la energía pueden propagarse en ambas, dependiendo de la longitud de onda. Para valores de l menores que l^* la velocidad de grupo tiene el mismo signo que la de fase, mientras que para valores mayores a l^* , tienen signos opuestos. El punto donde la velocidad de grupo es nula marca la frecuencia máxima que cada modo n alcanza, $\omega_n^* = f\lambda / \sqrt{k_n^2 + \lambda^2}$, y es siempre menor que f .

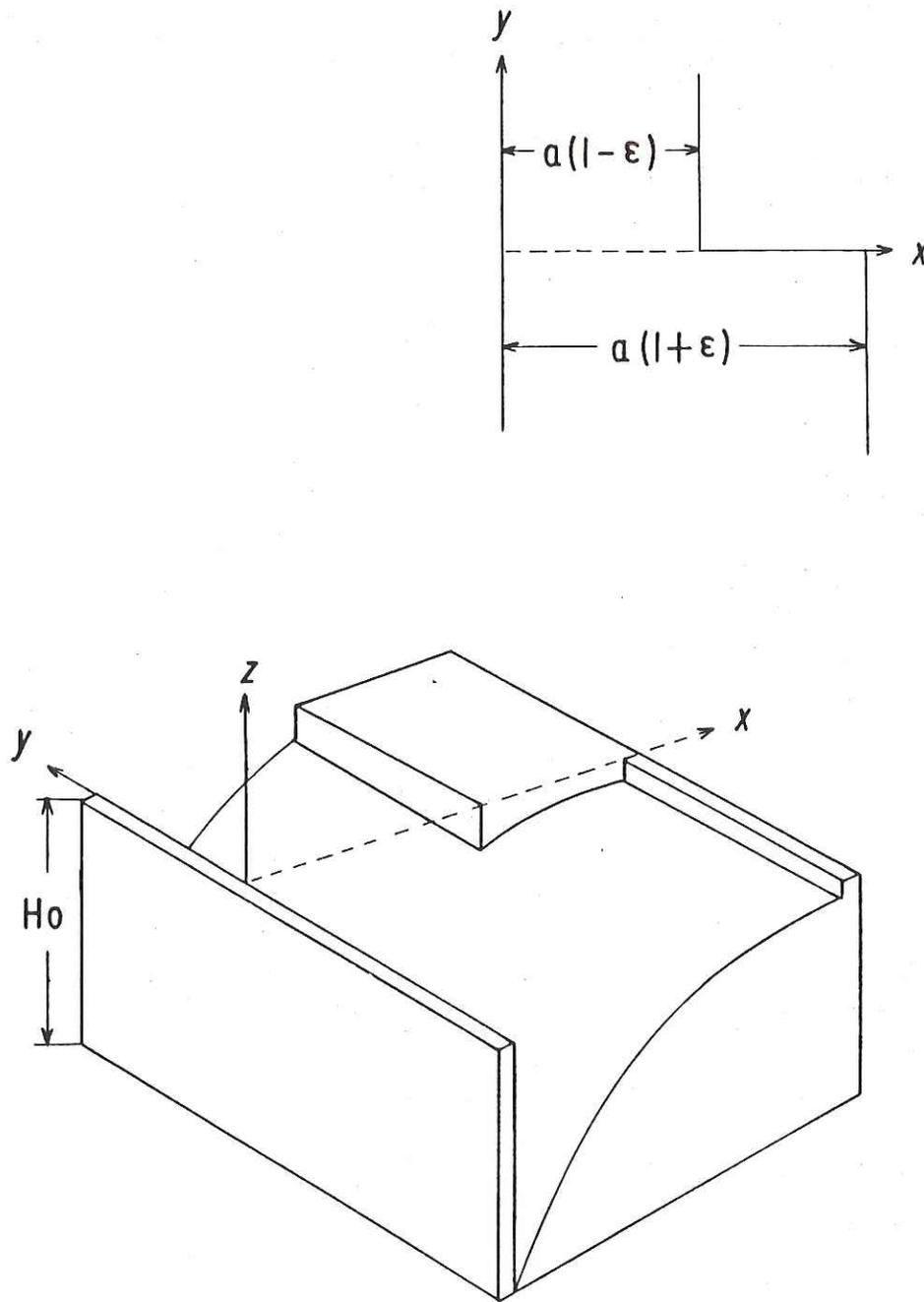
Para analizar como son los valores posibles de l a una frecuencia fija despejamos l de (12)

$$l = \frac{f \lambda}{\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{f \lambda}{\omega}\right)^2 - \lambda^2 - k_n^2}$$

Si $(f\lambda/\omega)^2 < \lambda^2 + k_n^2$, l es compleja y tenemos soluciones desvanecientes, es decir ondas que no transmiten energía y cuya estructura espacial está modulada decrecientemente conforme $|y|$ aumenta. Para una frecuencia fija existe un número finito de modos propagables con l real, que corresponden a ondas largas viajando al Norte y cortas viajando al Sur, así como también un número infinito de ondas desvanecientes.

IV.-COSTA EN FORMA DE ESCALÓN; MODOS.

Ahora estudiaremos el "choque" de una OP contra una discontinuidad abrupta. La batimetría consiste en un canal que cambia de ancho bruscamente en $y = 0$ (ver fig. 3). El fondo varía exponencialmente en la dirección perpendicular a la



$$H = H_0 e^{-2\lambda x}$$

Fig. 3. Esquema de la batimetría del modelo. El "muro" al final de la plataforma se colocó por conveniencia matemática.

costa de la misma manera al Norte y al Sur pero los anchos del canal son $a(1-\epsilon)$ para la parte norteña y $a(1+\epsilon)$ para la sureña, donde $|\epsilon| < 1$. Los resultados de la sección anterior son utilizados para la solución lejana a $y = 0$.

Tanto al Norte como al Sur del escalón, donde no se siente su presencia, los modos estudiados en 3, son soluciones válidas. La incidencia de una onda larga desde el Sur genera lo que llamamos modos transmitidos y reflejados. Estas ondas son necesarias para que el flujo de energía se conserve y quedan totalmente establecidas por medio de los diagramas de dispersión. Llamaremos modos transmitidos y reflejados a aquellos modos que transportan energía en dirección igual y opuesta, respectivamente, al incidente. De hecho qué fracción de la energía es reflejada resulta una de las preguntas más sencillas de este tipo de estudios. Las únicas señales que pueden existir, en $|y| \rightarrow \infty$, y a la misma frecuencia son ondas largas propagándose al Norte (transmitidas) y cortas al Sur (reflejadas). Se analiza el caso en el que se hace incidir una onda larga, cuya fase y energía viajan hacia el Norte, con determinada frecuencia y estructura modal.

Se pueden deducir los posibles modos transmitidos y reflejados analizando sus curvas de dispersión en los extremos del canal, i.e. $|y| \rightarrow \infty$, independientemente de los detalles de como interactúan en el escalón. Por ejemplo en la figura 4 vemos las relaciones de dispersión lejanas al escalón para los primeros seis modos, para los valores $\lambda a = 1.5$ y $\epsilon = 0.3$; un valor positivo de ϵ significa que la plataforma se angosta hacia el Norte. En la frecuencia del modo incidente, por ejemplo $\omega/f = 0.2$, hay que trazar una horizontal en ambos diagramas. Las intersecciones con las curvas de dispersión determinan unívocamente los modos transmitidos (sólo uno en este caso) y los reflejados (son tres). Los transmitidos son aquellos de longitud de onda larga cuyo flujo de energía es

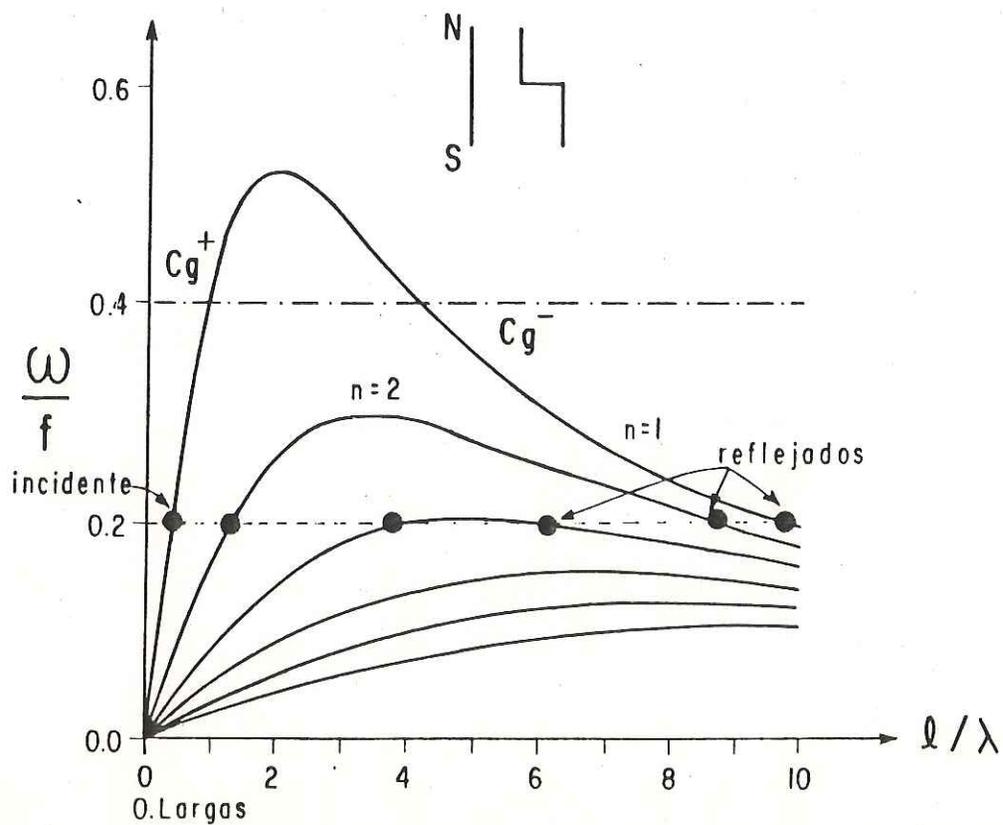
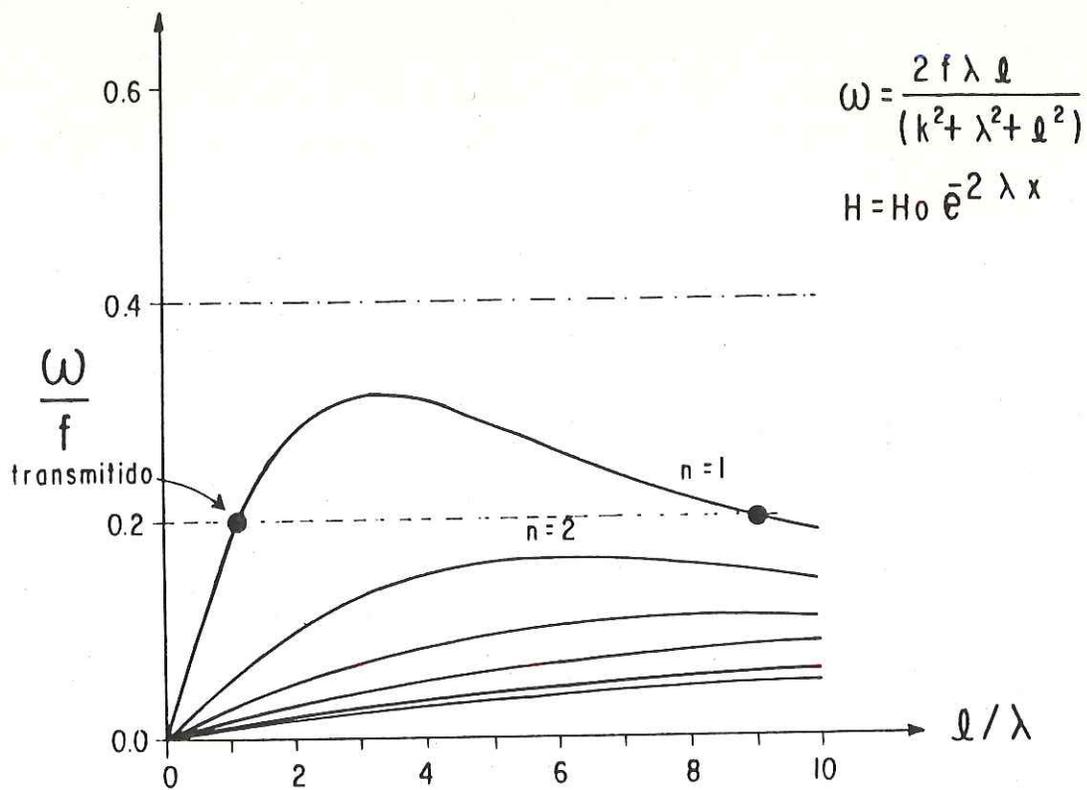


Fig. 4. Relaciones de dispersión lejanas al escalón. Los parámetros fijos son $\varepsilon = 0.3$, $\lambda a = 1.5$. El ancho de la plataforma a ambos lados del escalón es $a(1-\varepsilon)$ & $a(1+\varepsilon)$, respectivamente.

hacia el Norte. Nótese que sobre la curva de dispersión de cada modo transmitido también existe una de longitud de onda mas corta, la cual no entra en los modos libres a considerar, pues su flujo de energía es hacia el Sur. Todas las curvas que quedan por debajo de la frecuencia seleccionada corresponden a los modos desvanecentes. Por ejemplo para la parte sureña del canal, éstos están asociados a los modos desde $n = 4$ a infinito. Si eligiéramos la frecuencia $\omega/f = 0.4$, por otra parte, no tendríamos ningún modo transmitido en la parte angosta.

Con las relaciones de dispersión lejanas al escalón podemos determinar qué modos libres se transmiten, cuáles se reflejan y cuáles son los incidentes posibles, así como el rango de frecuencias transmisibles para valores determinados de λa y ε . En resumen el procedimiento consiste en usar la solución (6) y (11) para las regiones lejanas y acoplarla en el escalón ($y = 0$), haciendo las siguientes consideraciones.

i). La onda incidente determina la frecuencia de todas las variaciones.

ii) El campo reflejado comprende a todos los modos libres cuyo flujo de energía es hacia el Sur (ondas cortas) en $y < 0$.

iii) El campo transmitido consiste todos los modos libres, que viajan hacia el Norte (ondas largas) en $y > 0$.

iv) Los modos desvanecentes al Sur ($y < 0$) tienen la parte imaginaria de l negativa y al Norte ($y > 0$) la tienen positiva.

La solución para el canal que se angosta, es decir para cuando $\varepsilon > 0$ se muestra a continuación. Considerando una onda

incidente de amplitud unitaria, número de onda ℓ y modo j , las funciones corrientes resultantes son

$$\psi_N(x, y, t) = e^{\lambda x} \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} G_{\alpha} e^{i(l_{\alpha} y - \omega t)} \quad (13)$$

para $y > 0$

$$\psi_S(x, y, t) = e^{\lambda x} \sum_{p=1}^{\infty} B_p F_p e^{i(\ell_p y - \omega t)} + e^{\lambda x} F_j e^{i(\ell_j y - \omega t)} \quad (14)$$

para $y < 0$, donde

$$G_{\alpha}(x) = \text{sen}\left(\frac{\alpha\pi x}{a(1-\varepsilon)}\right)$$

$$F_p(x) = \text{sen}\left(\frac{p\pi x}{a(1+\varepsilon)}\right).$$
(15)

Los primeros términos en las sumatorias de (13) y (14) se refieren a los modos libres, es decir los transmitidos y reflejados respectivamente. Los siguientes, hasta infinito, son los desvanecentes, ya que l_{α} y ℓ_p se convierten en números complejos. Nuestro problema es calcular los valores de las amplitudes A_{α} y B_p tales que cumplan las condiciones de frontera en el escalón. Éstas son: velocidad normal cero en la pared expuesta del escalón, continuidad de transporte a lo largo de la costa y velocidad perpendicular en la frontera libre. Es decir, para $\varepsilon > 0$ y en $y = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \psi_S &= 0 && \text{en } a(1-\varepsilon) \leq x < a(1+\varepsilon), \\ \psi_S &= \psi_N && \text{en } 0 \leq x < a(1-\varepsilon), \\ \psi_{N,y} &= \psi_{S,y} && \text{en } 0 \leq x < a(1-\varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

De (16a) y (16b) se obtiene,

$$\sum_{p=1}^{\infty} B_p F_p = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} G_{\alpha} - F_j & \text{en } 0 \leq x < a(1-\varepsilon) \\ -F_j & \text{en } a(1-\varepsilon) < x < a(1+\varepsilon) \end{cases} \quad (17)$$

y de la condición (16c),

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} l_{\alpha} G_{\alpha} = \sum_{p=1}^{\infty} B_p l_p F_p + l_j F_j \quad \text{en } 0 \leq x < a(1-\varepsilon). \quad (18)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones usaremos la propiedad de ortogonalidad de la función seno, calculando las siguientes integrales:

$$\frac{1}{a(1+\varepsilon)} \int (17) F_q dx \quad \text{y} \quad \frac{1}{a(1-\varepsilon)} \int (18) G_{\beta} dx,$$

obteniendo

$$B_q + \delta_{jq} = \frac{2\gamma}{\pi} \text{sen}(q\gamma\pi) \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} \frac{\alpha(-1)^{\alpha}}{q^2\gamma^2 - \alpha^2}, \quad (19a)$$

$$A_{\beta} l_{\beta} = \frac{2\beta}{\pi} (-1)^{\beta} \sum_{p=1}^{\infty} l_p (B_p + \delta_{pj}) \frac{\text{sen}(p\gamma\pi)}{p^2\gamma^2 - \beta^2} \quad (19b)$$

donde $\gamma = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Substituimos B_q de (19a) en (19b) y se obtiene una ecuación algebraica para las A_{β} .

Para el caso del canal ensanchándose, es decir $\varepsilon < 0$, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$A_p = \frac{2\gamma}{\pi} \operatorname{sen}(\beta\gamma\pi) \sum_{p=1}^{\infty} (B_p + \delta_{pj}) \frac{p(-1)^p}{\beta^2\gamma^2 - p^2},$$

$$\ell_p(B_p - \delta_{jp}) = \frac{2p}{\pi} (-1)^p \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha l_\alpha \frac{\operatorname{sen}(\alpha\gamma\pi)}{\alpha^2\gamma^2 - p^2}.$$

Se puede ver de las ecuaciones (13) y (14) que la incidencia de una OP excita un número infinito de modos, donde los primeros términos se refieren a los modos que propagan energía y los restantes se refieren a los confinados al escalón, ó desvanecentes. Como no podemos tomar un número infinito de términos en las sumatorias, usamos un criterio de convergencia para truncarlas. Éste se explica en el Apéndice A; se toman como buenos los valores límites de $M_\alpha = M_p = 10$ para ambas sumatorias.

Flujos de energía.

Se puede calcular la contribución al flujo de energía de cada modo cuando se tiene un conjunto de OP a la misma frecuencia; las contribuciones de la interacción entre ellos son idénticamente nulas (Hunthnance 1975). El flujo de energía está dado por el promedio temporal de la componente del vector flujo de energía, J^y definido en (5b), integrado en dirección normal a la costa. En el Apéndice B se explica detalladamente su cálculo. Para cada modo reflejado el flujo de energía es

$$R_p = -|B_p|^2 \frac{\omega}{4H_0} a(1+\varepsilon) \left(\ell_p - \frac{f\lambda}{\omega} \right),$$

para cada transmitido es

$$T_\alpha = |A_\alpha|^2 \frac{\omega}{4H_0} a(1-\varepsilon) \left(\frac{f\lambda}{\omega} - l_\alpha \right),$$

y para el incidente es

$$I = \frac{\omega}{4H_0} a(1+\varepsilon) \left(\ell_j - \frac{f\lambda}{\omega} \right).$$

Normalizando con el flujo incidente se define los flujos totales transmitido, T , y reflejado, R , de la siguiente manera

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} T_\alpha / I \quad \text{y} \quad R = \sum_{p=1}^{N_p} R_p / I \quad (20)$$

donde N_α y N_p indican el número de modos que se propagan hacia el Norte y hacia el Sur respectivamente. La ecuación de conservación de energía es

$$\boxed{T + R = 1} \quad (21)$$

Para el cálculo de (20) sólo usamos las soluciones que se propagan pues la contribución de las atrapadas es nula (Trasviña 1987).

V.-SOLUCION POR TEORIA DE RAYOS.

La teoría de rayos se desarrolló como un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, las cuales tienen soluciones de tipo onda. Generalmente esta aproximación es asintóticamente válida en el límite de longitudes de onda mucho más cortas que la escala de inhomogeneidades del medio. Sin embargo aunque estas condiciones no se satisfagan completamente, el método suele funcionar satisfactoriamente. Más aún, este método puede generar soluciones exactas en casos particulares como él aquí tratado. Las trayectorias de los rayos indican la dirección de transmisión de la energía y la frecuencia se mantiene constante a lo largo de cada rayo.

Se propone una solución para la ecuación de conservación de vorticidad;

$$-i\omega \left(\frac{1}{H} \nabla \psi \right) + \mathcal{J} \left(\psi, \frac{f}{H} \right) = 0$$

de la forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) e^{i\vartheta(\mathbf{x}, t)}, \quad (22)$$

donde A es la amplitud y ϑ es la fase, y se define el número de onda local y la frecuencia local como

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) := \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{x}}, \quad \omega(\mathbf{x}, t) := - \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (23)$$

Este método está basado en la suposición que ninguno de estos campos, ni tampoco la amplitud, varían mucho a través de una longitud de onda o durante un período. Lo que hace que (22) tenga contenido físico es el hecho de que las derivadas espacio-temporales de la fase están ligadas por la relación de dispersión

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{x}). \quad (24)$$

Al sustituir ψ de (22) en la ecuación de vorticidad, encontramos para la fase y la amplitud las siguientes ecuaciones aliniales

$$- A^{-1} \nabla (A^2 H^{-1}) \cdot \nabla \vartheta = A H^{-1} \nabla^2 \vartheta + f \omega^{-1} \mathcal{J}(A, H^{-1}) \quad (25)$$

$$- A^{-1} \nabla (H^{-1} \nabla A) = - H^{-1} (\nabla \vartheta)^2 - f \omega^{-1} \mathcal{J}(\vartheta, H^{-1}). \quad (26)$$

En el límite de $k \rightarrow \infty$ (25) y (26) son equivalentes a las ecuaciones de "transporte" y "eikonal" respectivamente usadas en óptica geométrica. Se estima la amplitud A a partir de la ecuación de transporte (25) usando las definiciones (23).

La imposición de suavidad provoca que el término del lado

izquierdo sea mucho mayor que los dos restantes por ende (25) queda reducida a

$$\nabla(A^2 H^{-1}) \cdot \mathbf{k} = 0$$

lo cual es satisfecho si

$$\boxed{A^2 \propto H} . \quad (27)$$

La ecuación (26) proporciona la relación de dispersión. Para su obtención, a diferencia de la amplitud, no tomaremos en cuenta, por el momento las condiciones de suavidad (o el límite $k \rightarrow \infty$). Es precisamente debido a esto, satisfacer (27) y una elección particular de H , que obtenemos soluciones exactas de (25) y (26). Entonces usando sólo el resultado (27) y las definiciones de frecuencia y número de onda tenemos que ésta se transforma en

$$H^{1/2} \nabla \left(\frac{\nabla H^{1/2}}{H} \right) - k^2 - l^2 - \frac{f}{\omega} H \left(k(H^{-1})_y - l(H^{-1})_x \right) = 0, \quad (28)$$

donde k y l son las componentes del vector \mathbf{k} .

Con el propósito de resolver (25) usaremos el método de características, (ver Lighthill 1979) el cual nos proporciona las ecuaciones de evolución para los rayos

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (29a)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} . \quad (29b)$$

La primera nos dice cómo es la curvatura de los rayos e implica que las derivadas totales en tiempo corresponden a un observador moviéndose a lo largo de un rayo con la velocidad de grupo local $\mathbf{C}_g = \partial \Omega / \partial \mathbf{k}$. La segunda especifica cómo es la razón de cambio del vector número de onda a lo largo del rayo.

De (29) y (23) se obtiene una ecuación para la fase tal que

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} - \omega. \quad (30)$$

Consideremos primero una plataforma a lo largo de y con un fondo exponencial $H(x)$ como el expresado en (10). Construimos la relación de dispersión sustituyendo H en (28),

$$\lambda^2 + k^2 + l^2 - f\omega^{-1}2l\lambda = 0, \quad (31)$$

nótese que es la misma expresada en (12). De aquí resolvemos las ecuaciones de rayos, (29), y encontramos que sus trayectorias son rectas, de la forma

$$y = \frac{(x - x_0)}{k} \left(\frac{f\lambda}{\omega} - 1 \right) + Y_0, \quad (32)$$

y que el número de onda se mantiene constante a lo largo de un rayo, i.e. $dk/dt = 0$. La elección del fondo exponencial provoca que los rayos sean rectos ya que los términos $H(H^{-1})_x$ y $H^{1/2}(H^{1/2}/H)_x$ que aparecen en (28) son constantes.

Entonces tenemos que los rayos viajan en trayectorias rectas sobre el fondo exponencial y el número de onda se mantiene constante. Al llegar a una frontera rígida los rayos se reflejan y el número de onda cambia de valor como se explicará a continuación. Para tratar el problema de la reflexión, usaremos el diagrama de lentitud, el cual es la relación de dispersión en el espacio número de onda. Esto se obtiene de (31), la cual puede también escribirse

$$k^2 + (1 - f\lambda/\omega)^2 = \left(\frac{f\lambda}{\omega} \right)^2 - \lambda^2$$

y en el espacio (k, l) describe círculos para valores fijos de la frecuencia. Se muestra un ejemplo en la figura 5 para $\lambda a = 0.6$. La utilidad de esta gráfica consiste en que con ella se puede obtener el cambio del número de onda al chocar y

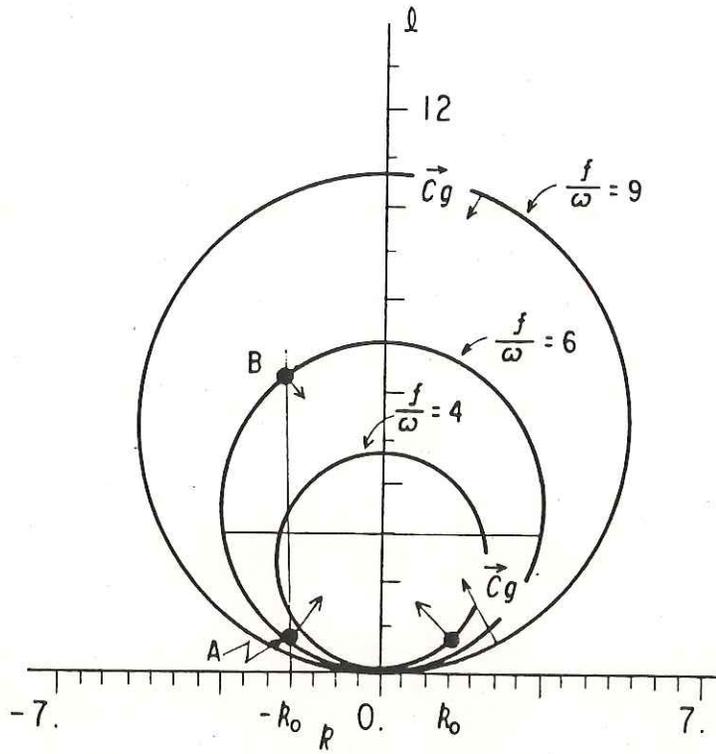


Fig. 5. Diagrama de lentitud para $\lambda a = 0.6$.

reflejarse en las fronteras. La dirección del vector velocidad grupo, el cual está definido como

$$C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} ,$$

es decir el gradiente de las líneas de frecuencia constante, es igual a la de los rayos, debido a (29a). La magnitud de estos vectores para una frecuencia dada, no es constante pues el gradiente es más fuerte conforme l disminuye.

Aunque en este trabajo sólo usamos las reflexiones contra muros paralelos a la coordenada y , supongamos por un momento que existe una pared completamente reflectora inclinada un ángulo α , ver fig. 6. Para este análisis se definen nuevas coordenadas (k', l') , de manera que esta frontera coincida con una de las nuevas componentes del vector número de onda, l' . La condición de reflexión consiste en hacer a ψ nula y requiere que la dependencia de la fase a lo largo de esa frontera, i.e. $l'y'$, así como la temporal ωt , sea la misma para el tren de ondas incidente como el reflejado. Entonces con esta información vemos de la figura que para una misma frecuencia, es decir sobre el mismo círculo, al elegir un l' encontramos que hay dos valores de la componente normal, k' , posibles. Con el vector C_g en esos dos puntos se determina cual de ellos corresponden al incidente y cual al reflejado. Éstos además de tener signos opuestos, en su componente x' , tienen magnitudes diferentes.

Consideremos un muro paralelo al eje y , ver fig 6b, la componente de la velocidad de grupo en dirección al muro cambia de signo al reflejarse en la pared pero, en este caso donde el muro es paralelo a y , su magnitud se mantiene constante. Al igual que en la figura 6a, el ángulo de incidencia es el mismo que el reflejado y esto se debe a la geometría del círculo, es decir al diagrama de lentitud.

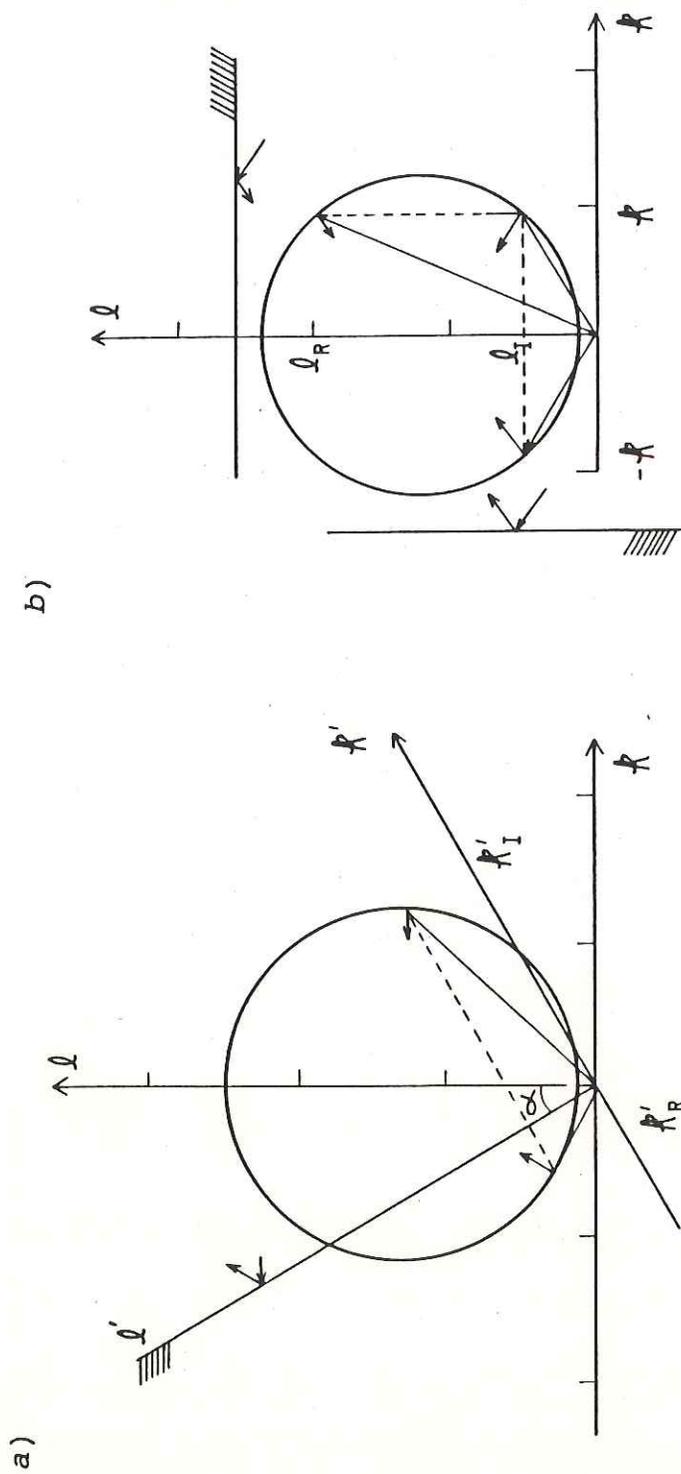


Fig. 6. Diagramas de lentitud con los vectores velocidad de grupo a) para el caso de una frontera rígida inclinada y b) para el caso de fronteras paralelas a los ejes coordenados.

Usaremos la topografía descrita en la sección 3, i.e. un canal infinito, con fondo $H(x)$ como en (10) y cuyas fronteras están en $x = a$, la costa, y $x = 0$, el muro, ver fig. 1. Como condiciones iniciales suponemos una familia de rayos en $y \rightarrow -\infty$, con una propagación neta hacia el Norte, ver fig. 7. La solución es una superposición de dos familias de rayos, una viajando del muro a la costa y la otra de la costa al muro, variando su número de onda de k a $-k$ y su magnitud de A a $-A$. Estas dos familias forman interferencia constructiva si los rayos permanece en fase después de dos reflexiones, lo que exige que los valores que toma k sean

$$\boxed{k = j\pi/a, \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots} \quad (33)$$

con esto se obtiene una solución en forma de modos. Entonces la función corriente, ψ , en todo el canal es

$$\psi = A e^{i(l y - \omega t)} \text{sen}(j\pi x/a). \quad (34)$$

Hay que hacer notar que la forma de esta solución es exactamente igual a la obtenida por la técnica anterior, ver ec (11).

VI.-COSTA EN FORMA DE ESCALÓN; MODOS

Consideremos ahora la topografía descrita por la figura 3, la cual consiste en un canal que cambia bruscamente de ancho en $y = 0$.

En la región sureña, $y < 0$, con dos familias de rayos obtenemos una solución de ondas propagándose desde $y \rightarrow -\infty$ hacia el Norte, en forma de modos. Con la presencia del cambio de ancho en $y = 0$ se generan nuevas familias que no necesariamente cumplen con la condición (33). La construcción de ψ se realiza sumando las contribuciones locales de todas las familias de rayos posibles que llegan a cada región.

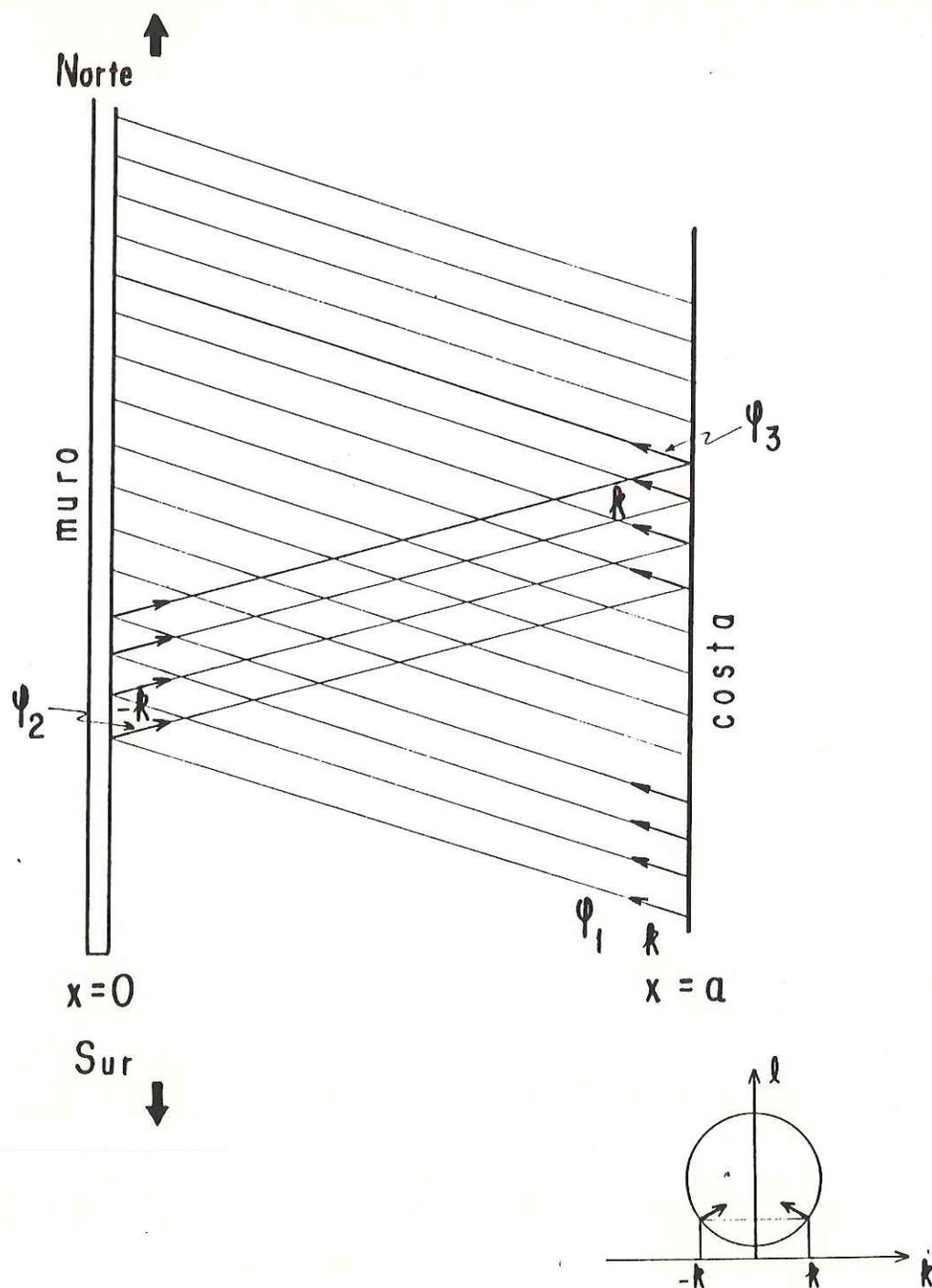


Fig. 7. Esquema de las familias de rayos necesarias para construir la función ψ en el canal de ancho constante descrito en la figura 1.

Si el canal se ensancha, $\epsilon < 0$, se generan familias de rayos que al propagarse hacia el Norte, i.e. a través de $y > 0$, cambian sus fases para satisfacer las nuevas condiciones de frontera (en $x = 0$ y $x = a(1-\epsilon)$). Al conservar la misma pendiente crean regiones donde no pasa ningún rayo, "zonas de sombra". Por otra parte en $y < 0$, la solución por modos permanece inalterada.

Si el canal se angosta, $\epsilon > 0$, se generan dos grupos de familias. Uno de ellos viaja al Sur y está asociado a la reflexión provocada por la presencia de la frontera en $y = 0$, el otro viaja hacia el Norte. Ambos van cambiando de fase al satisfacer las condiciones de frontera. La construcción de ψ se vuelve más complicada pues en $y < 0$ hay regiones en las que hay que sumar la contribución de las familias viajando al Sur a la solución por modos.

Para analizar la reflexión local en esa nueva frontera la cual corre a lo largo de $a(1-\epsilon) \leq x \leq a(1+\epsilon)$, en $y = 0$, usamos el mismo diagrama de lentitud (ver fig. 6b). A lo largo de esta barrera la componente k se mantiene constante y al reflejarse este rayo se ve que l cambia de

$$l_I = f\lambda/\omega - \sqrt{(f\lambda/\omega)^2 - (\lambda^2 + k^2)}$$

a $l_R = 2f\lambda/\omega - l_I$. El vector C_g además de que cambia de dirección también cambia de magnitud. Para este rayo, el cual define características de una familia de ellos, en esa frontera la componente l_R del reflejado es menor que la incidente. La solución incluye la contribución de todas las familias de rayos posibles en esa región. Existe otra familia para la cual l_R es menor que l_I .

En las figuras 8 y 9 se marcaron las regiones que delimitan familias de rayos cercanas al escalón y rayos característicos para el caso del canal que se angosta y para el que se ensancha respectivamente. En el Apéndice C se

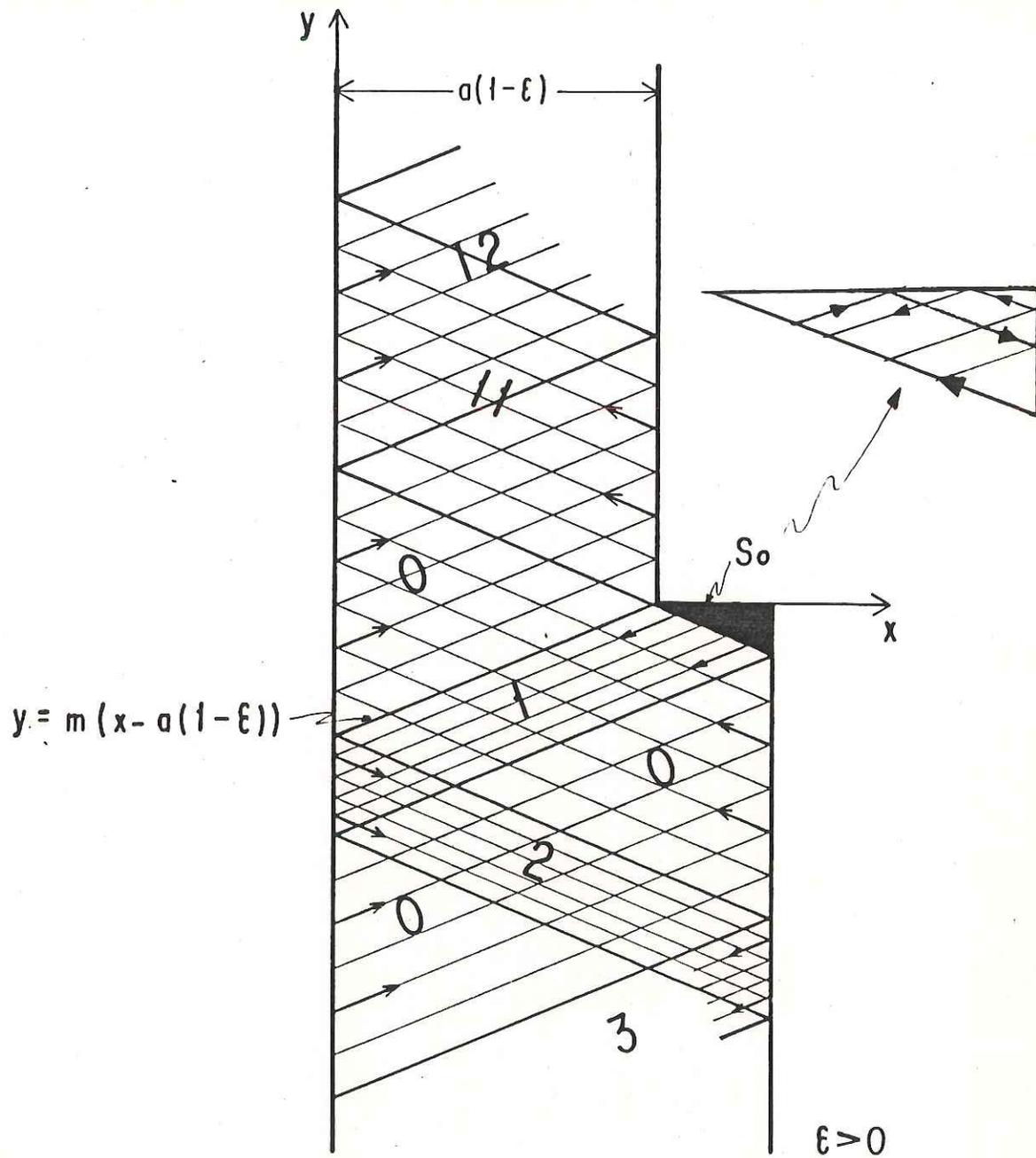


Fig. 8. Regiones donde se definen las contribuciones necesarias para la construcción de la función ψ por medio de teoría de rayos, para plataformas que se angostan hacia el Norte, $\epsilon > 0$.

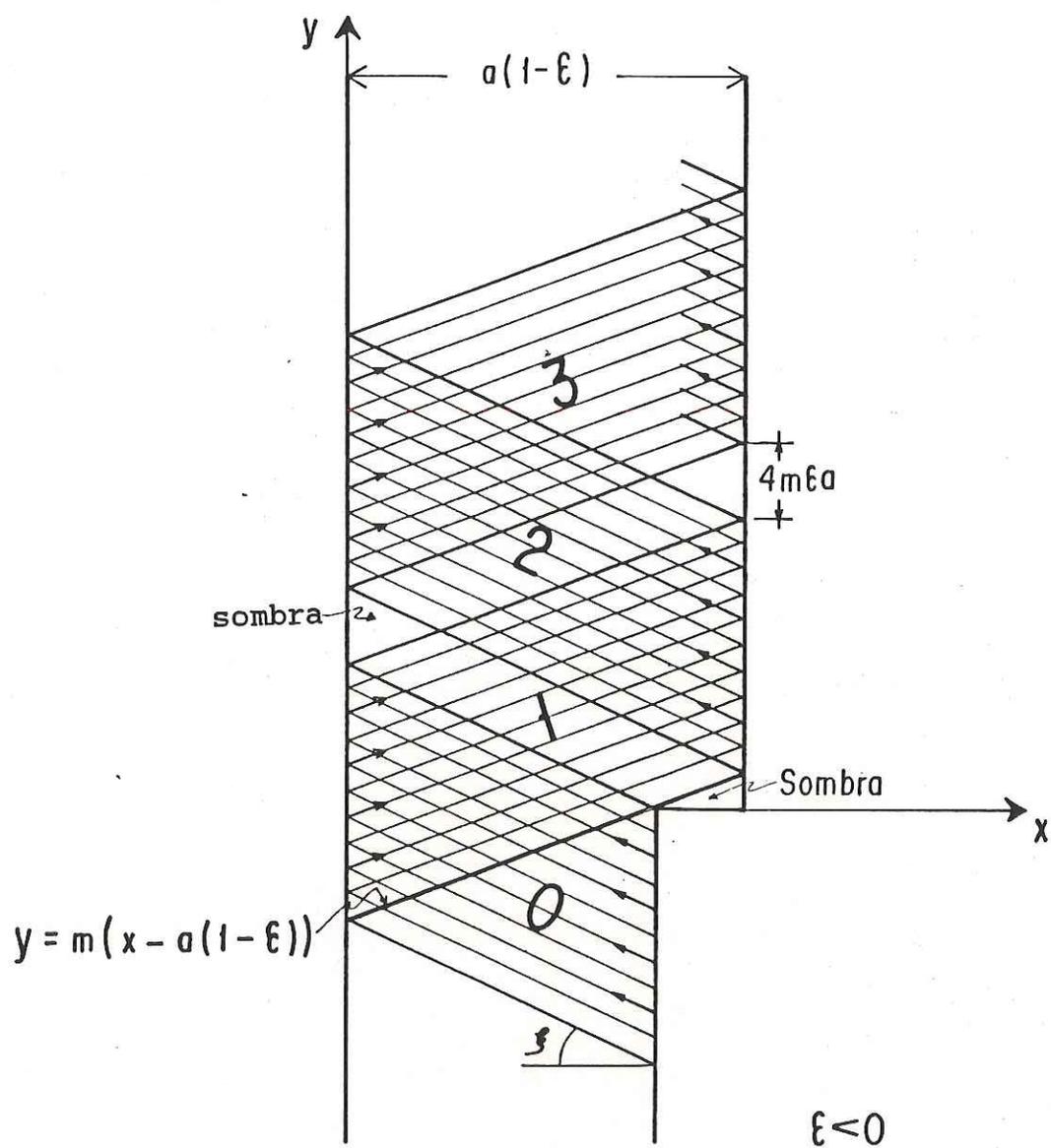


Fig. 9. Lo mismo que la anterior pero para plataformas que se ensanchan hacia el Norte, $\epsilon < 0$.

explica la obtención de las funciones corriente por medio de rayos.

Cálculo de flujos de Energía.

El flujo de energía entre dos rayos infinitamente próximos es constante. Al reflejarse en las paredes paralelas a las isóbatas (muro o costa) la cantidad de energía que viaja hacia el "Norte" permanece inalterable. La parte que se refleja, para $\varepsilon > 0$, en la pared normal a las isóbatas (escalón) pasa de transmitir energía al "Norte" a transmitir hacia al "Sur", con el mismo flujo.

Por lo tanto, en el caso en que el canal se ensancha al "Norte", figura 17, la fracción de energía transmitida corresponde al cociente del ancho norteño sobre el sureño.

En el caso opuesto, figura 18, toda la energía incidente es transmitida; nótese que en la parte norteña la suma de los anchos transversales de ambos trenes de ondas es una constante (gracias a la existencia de zonas de sombra). En resumen,

$$T = \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)} & \text{para } \varepsilon > 0 \\ 1 & \text{para } \varepsilon < 0, \end{cases} \quad (35)$$

y por conservación de energía se define el reflejado como

$$R = 1 - T \quad (36)$$

Hay que notar que los flujos de energía son independientes de la frecuencia y del ángulo incidente. Estos resultados tan sencillos no son, de ninguna manera, generales, sino una consecuencia de la geometría y topografía utilizadas.

VII.-RESULTADOS.

Flujos de energía.

En esta sección se estudian los cambios que sufren los flujos de energía al variar algunos parámetros libres del modelo para así ilustrar el efecto del escalón. En lo referente a la solución modal se muestra la contribución de cada modo al flujo de energía transmitido. Los parámetros son cuatro ϵ & λa , que proporcionan información de la topografía (ver fig. 3), y los otros dos caracterizan a la onda incidente, ω/f la frecuencia y j el modo. Para comparar se grafican también los flujos de energía obtenidos por Teoría de Rayos, TR, los cuales sólo dependen de la variable ϵ (ver ec. (35)).

La figura 10 muestra como varía el flujo de energía transmitido con respecto a la razón de los anchos, $(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$, al incidir sobre una topografía con pendiente $\lambda a = 1.5$ una onda del primer modo, fig. 10a, y otra del segundo, fig. 10b, a una frecuencia $\omega/f = 0.1$. Se marcan con líneas gruesas el flujo de energía transmitido total obtenido con TR, ver ec (35), y el calculado por la solución modal, ver ec. (20), que son las curvas comparables. Las otras curvas se refieren a las contribuciones de cada modo.

Para el caso de una plataforma que se angosta, i.e. para $(1-\epsilon)/(1+\epsilon) < 1$, y tanto para ondas del primer y segundo modo incidentes, una buena parte de la energía es reflejada, ver ec. (36). Para estos valores de ω/f y λa , desde para cuando el canal esta cerrado, ($\epsilon = 1$), hasta para cuando el ancho norteño es 0.12 veces mas chico que el sureño, toda la energía incidente es reflejada. Ésta disminuye conforme ambos anchos se acercan al mismo valor, en donde desaparece y toda la energía incidente es transmitida. Por TR este aumento es lineal y alcanza el valor de uno cuando $\epsilon = 0$. La diferencia máxima entre ambas soluciones, en la fig. 10a es de $\approx 17\%$ del

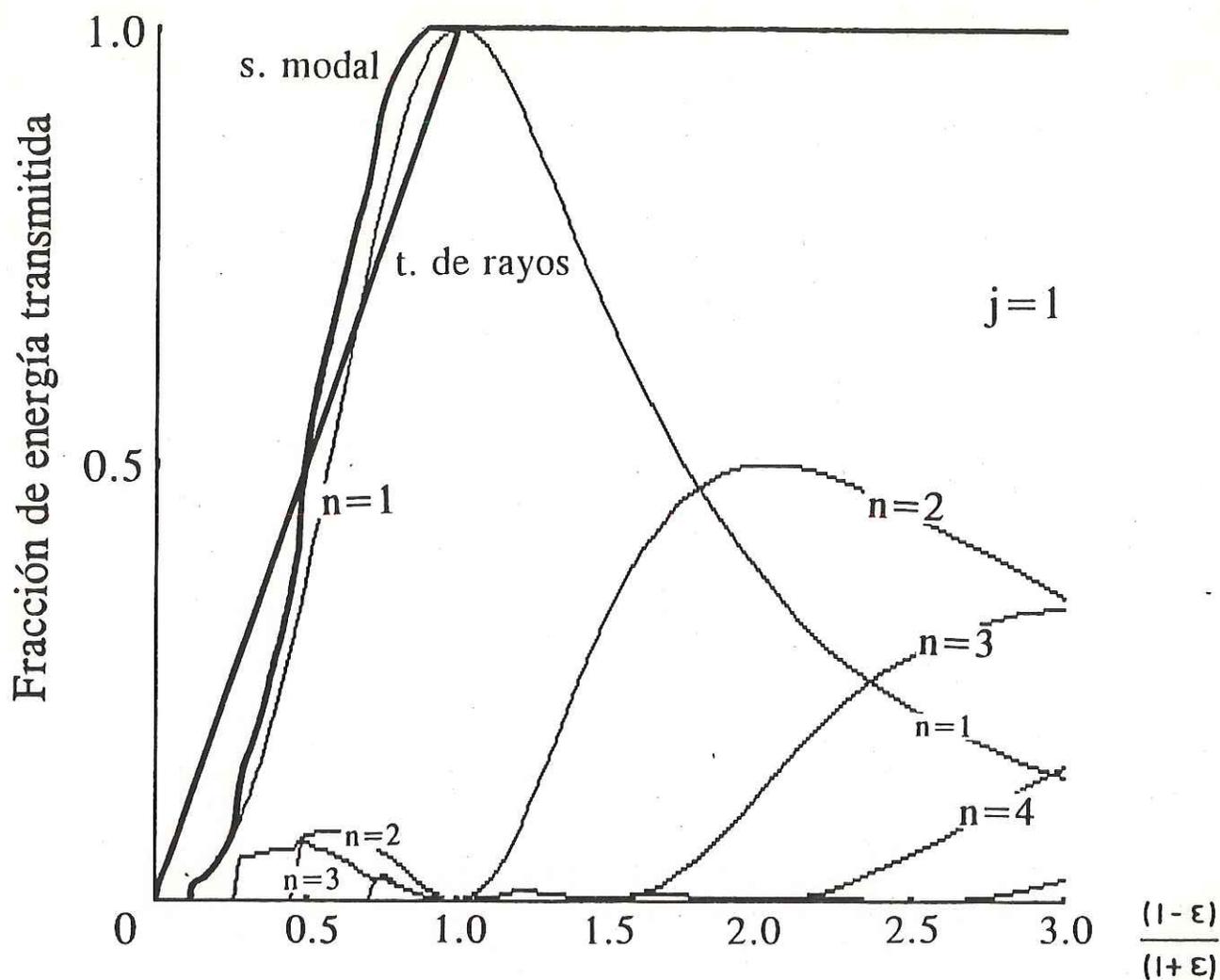


Fig. 10a. Fracción de energía transmitida calculada con la solución modal y la obtenida por teoría de rayos, variando con la razón de los anchos del canal, $(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$, y la contribución modal. Los valores fijos son $\omega/f = 0.1$, $\lambda a = 1.5$; cuando incide una onda del primer modo.

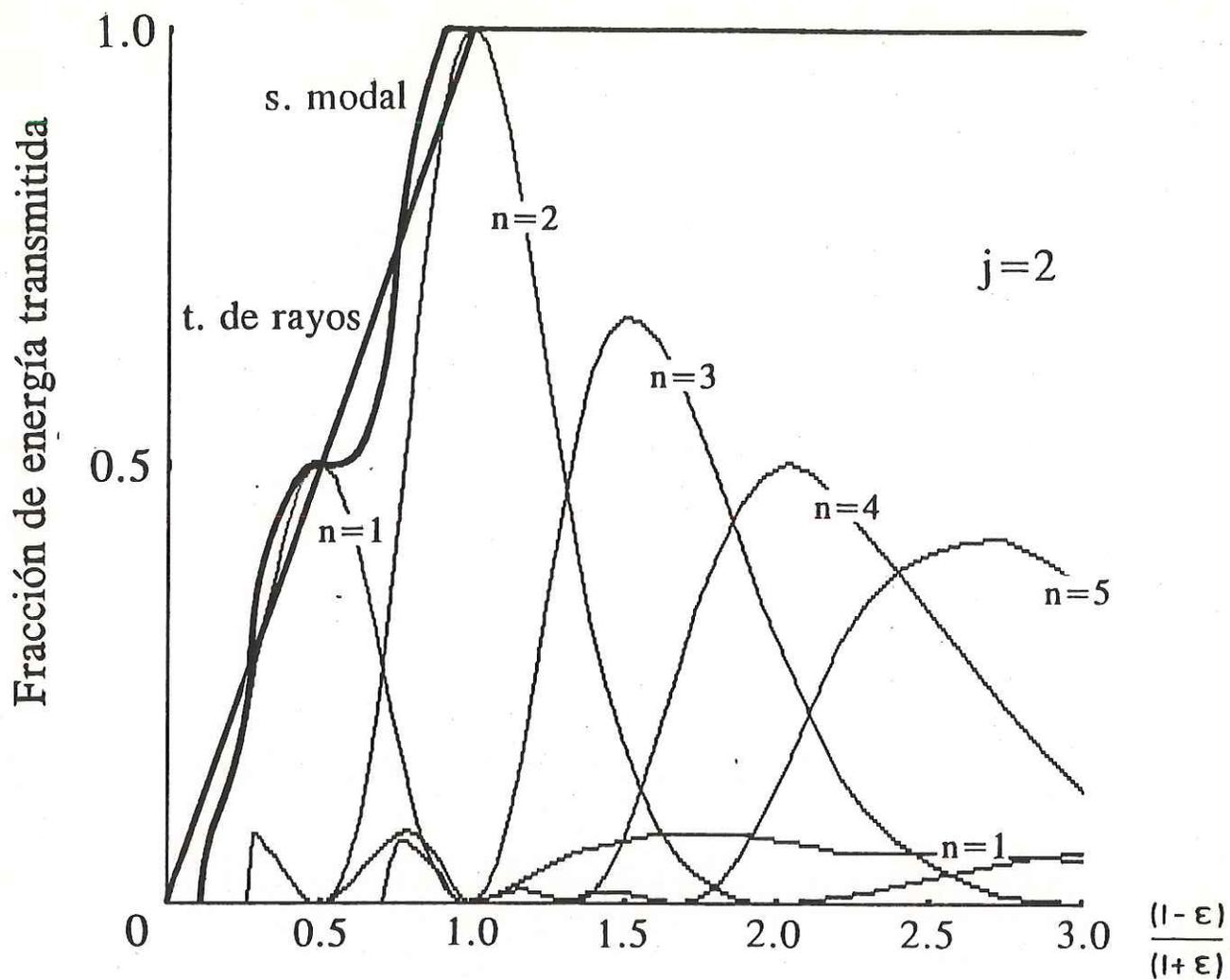


Fig. 10b. Lo mismo que la figura anterior pero cuando incide una onda del segundo modo.

flujo total y de $\approx 10\%$ en 10b. En cuanto a plataformas que se ensanchan ambas soluciones predicen que todo el flujo entrante del Sur se transmite al Norte.

La energía del modo incidente se transfiere tanto a modos reflejados como transmitidos. El modo más excitado de los transmitidos es aquel que mejor se ajusta en estructura, a través del canal, con la onda incidente (Wilkin y Chapman 1987). Para que un modo transmitido β sea altamente excitado su estructura en x de la forma; $\text{sen}(\beta\pi x/a(1-\epsilon))$, tendrá que ser similar a la de la incidente; $\text{sen}(j\pi x/a(1+\epsilon))$. Esto sucede en la vecindad de $\beta/j \approx (1-\epsilon)/(1+\epsilon)$. Entonces cada modo transmitido β , llega a su máxima amplitud cerca de éste último valor. Esto se puede apreciar con mayor claridad en la figura 10b, pues en $(1-\epsilon)/(1+\epsilon) = 1/2$, el modo incidente dos excita casi exclusivamente al modo transmitido uno. Conforme se ensancha la plataforma los modos transmitidos llegan a su amplitud máxima, pero no son los únicos contribuyentes al flujo. Por ejemplo cuando $j = 2$, en $(1-\epsilon)/(1+\epsilon) = 3/2$, el modo 3 transmitido es el de mayor amplitud, pero existe transferencia significativa a los modos 1, 2 y 4. Esto se debe a que para satisfacer la condición de $\psi = 0$ en $y = 0$ se requiere de todos los modos transmitidos con amplitudes significantes y fases específicas aparte de los desvanecientes. Un solo modo transmitido, en este caso, violaría tal condición (Wilkin y Chapman 1987).

La figura 11a muestra el flujo de energía variando la frecuencia, ω/f , para los valores fijos de $\lambda a = 1.5$, $\epsilon = 0.3$ (plataforma que se angosta) y $j = 1$. El flujo total de energía transmitido calculado por la solución modal oscila alrededor del obtenido por TR, $T = 0.54$, acercándose ambas, conforme ω/f disminuye. Esto era de esperarse pues TR es asintóticamente válida en el límite de $k \rightarrow \infty \therefore \omega/f \rightarrow 0$. La diferencia de este valor con el promedio es de 0.05. En cuanto a la partición

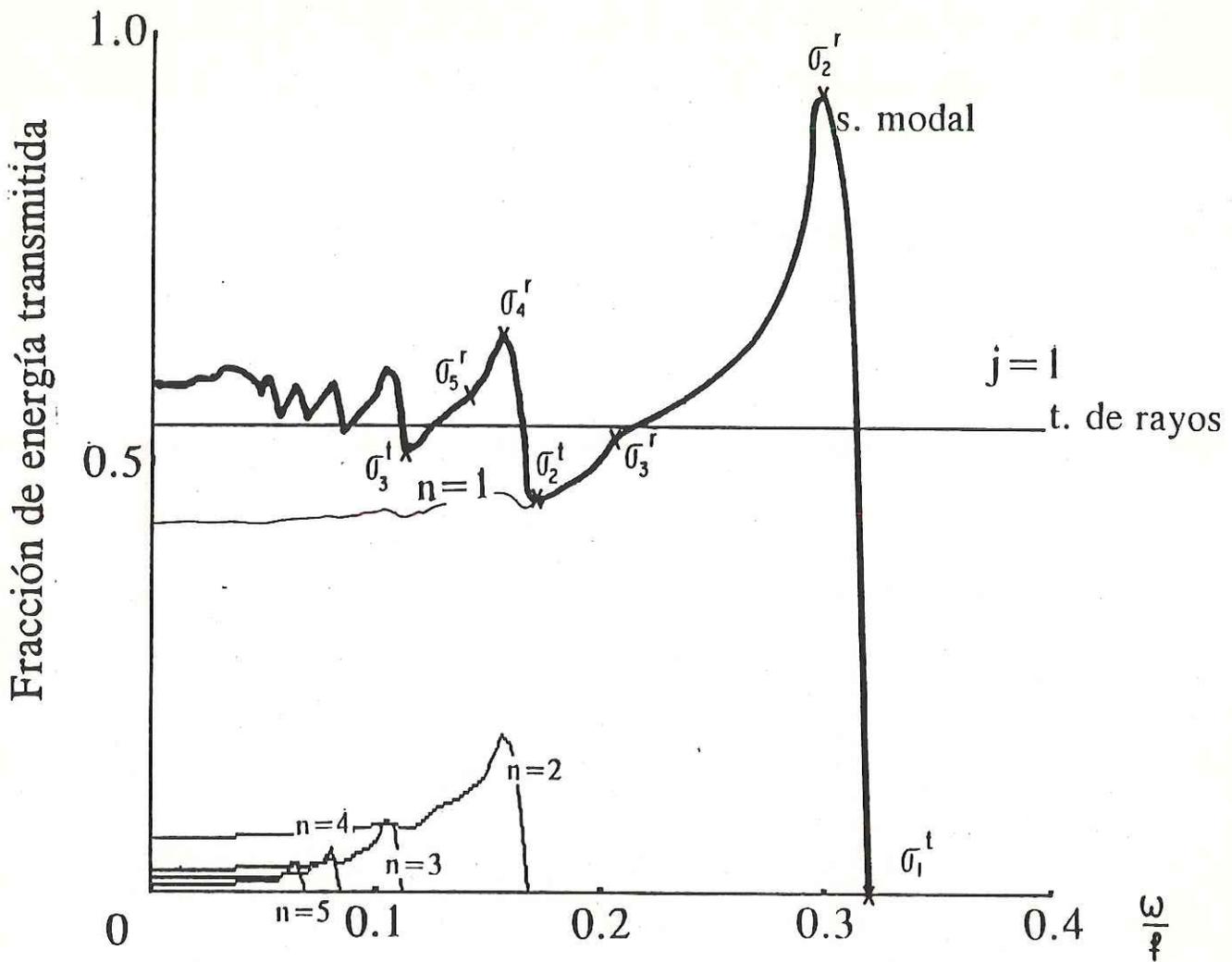


Fig. 11a. Fracción de energía transmitida calculada por ambas técnicas y contribución modal contra ω/f . Los parámetros fijos son $\epsilon = 0.3$ y $\lambda a = 1.5$. incide el primer modo.

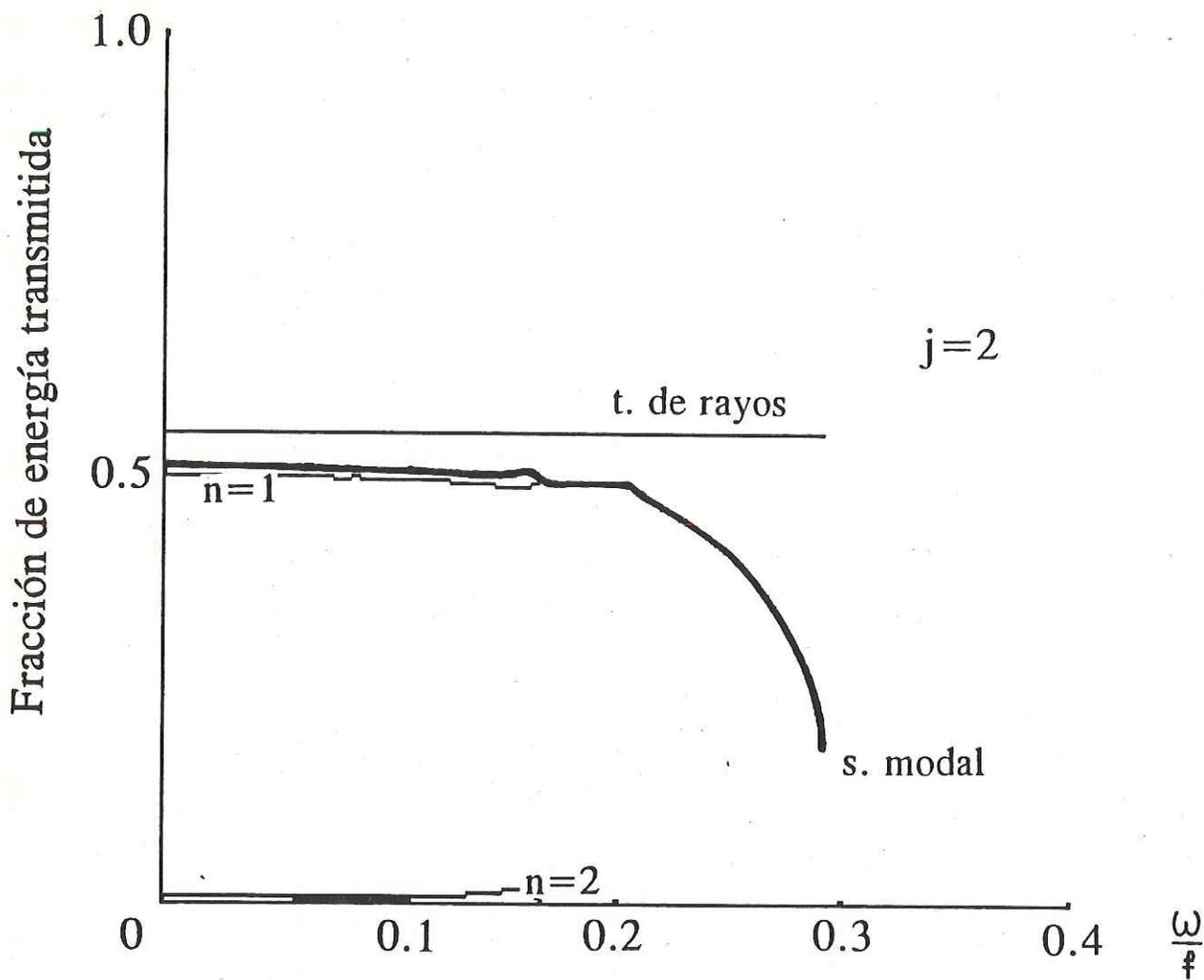


Fig. 11b. Lo mismo que la figura anterior pero cuando incide una onda del segundo modo.

modal se puede apreciar que conforme ω/f aumenta los modos más altos, alcanzan sus frecuencias de corte y cesan de propagar energía, (ver figura 4) causando sobre el flujo total transmitido un descenso brusco. En estos puntos la velocidad de grupo del posible modo transmitido tiende a cero y parte de la energía es transferida a modos reflejados. Indicaremos a las frecuencias de corte con el símbolo σ_n^t , donde el subíndice es el número del modo y los supraíndices 't' o 'r' especificarán si es transmitido o reflejado.

En esta figura se puede apreciar que, para frecuencias mayores a aquella donde el modo uno puede ser transmitido, ($\sigma_1^t = 0.317$), toda la energía incidente es reflejada. Cuando se alcanza la frecuencia de corte del primer modo transmitido posible, éste se excita rápidamente conforme ω/f disminuye. Cuando $\omega/f = \sigma_2^r = 0.2964$, la energía es transferida al modo dos reflejado. Con el nacimiento de este nuevo modo la energía reflejada aumenta hasta llegar a $\sigma_3^r = 0.2026$, donde cambia ligeramente de pendiente, disminuyendo hasta $\sigma_2^t = 0.1648$. Y así sucesivamente. Se marcaron con cruces sobre la curva de energía total transmitida las frecuencias de corte de cuatro de los modos reflejados para mostrar que indican puntos de inflexión.

La figura 11b es una situación igual a la anterior pero con $j = 2$. Aquí vemos que el modo uno transmitido es el que lleva prácticamente toda la energía en el espectro de frecuencias. Esto es debido a que para éste valor de ϵ la razón $(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$ es muy cercana a $1/2 = \beta/j$. Para frecuencias menores a $0.16f$ el flujo de energía se vuelve independiente de ω/f . En este sentido se parece a lo encontrado por TR, la cual lo sobrestima en aproximadamente un 7%. A diferencia de la gráfica anterior la variación de energía reflejada y transmitida es mucho más suave. Ésta aumenta considerablemente para valores mayores de la frecuencia σ_3^r .

La figura 12a ilustra el flujo de energía transmitido para una plataforma que se ensancha. Los valores fijos son $\epsilon = -0.387$, $\lambda a = 1.63$ & $j = 1$. Para topografías de este tipo, i.e. $\epsilon < 0$, TR predice un valor de uno para el flujo de energía transmitido en todo el rango de frecuencias (ver ec. 34). Referente a la partición modal se ve que el modo dos es el más energético en todo el espectro. En bajas frecuencias la contribución de cada modo es independiente de ω/f . Y al igual que en la figura 11, conforme ω/f aumenta, los modos más altos llegan a su σ_n^t y dejan de propagar energía. La transición del flujo total al pasar por las σ_n^t de los modos altos tiene una pequeña fuga de energía transferida a modos reflejados para después recuperar su valor de uno. Esta fuga es tan pequeña que no se manifiesta en la gráfica; del orden de 10^{-4} . Conforme se acerca a las de los más bajos aumenta considerablemente y ya no recupera su valor anterior. El resultado más notorio es que para frecuencias mayores a $\sigma_3^t = 0.233$, aparece una transferencia que aumenta considerablemente, por ejemplo en $\omega/f = 0.28$ se tiene un 8% de energía reflejada. Aún para plataformas que se ensanchan el modelo barotrópico predice energía reflejada en frecuencias altas, (Wilkin y Chapman 1987). Entonces el flujo transmitido predicho por TR falla para frecuencias mayores a σ_3^t .

Cuando incide una onda con $j = 2$, fig 12b, el rango de frecuencias transmitibles es menor que para $j = 1$, debido a la relación de dispersión. En este caso la frecuencia máxima es la de corte del modo incidente en la región sureña, i.e. $\sigma_2^r = 0.1571$. El flujo de energía total transmitido presenta una transferencia al reflejado que aumenta considerablemente a partir de la σ_n^t más cercana, en este caso se trata de la del quinto modo.

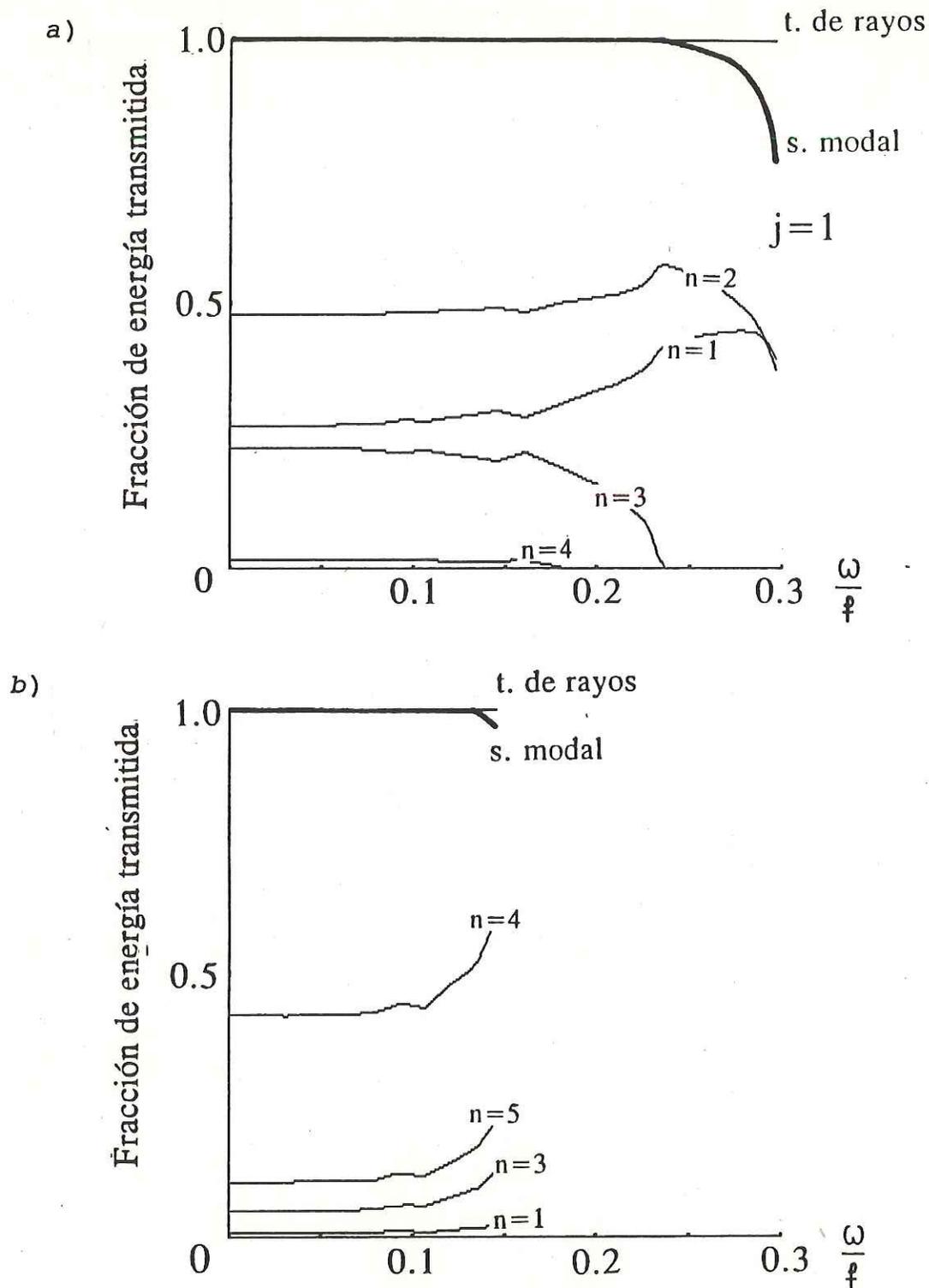


Fig. 12. Fracción de energía transmitida calculada por ambas técnicas y contribución modal contra ω/f . Los parámetros fijos son $\epsilon = -0.387$ y $\lambda a = 1.63$. a) incide el primer modo y b) el segundo.

Funciones de corriente.

Se presentan dos ejemplos del campo de la función corriente, ψ , en la región cercana al escalón obtenidos con ambas técnicas. Para mostrar la continuidad de las soluciones las gráficas de contorno se hacen por separado para la región "Sur" y "Norte" del escalón. De esta manera no se obliga a las isolíneas a que parezcan continuas debido al graficado. Para su presentación se escribe a la función corriente de la forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\left(\psi_R(\mathbf{x}) + i\psi_I(\mathbf{x}) \right) e^{-i\omega t} \right],$$

donde los campos ψ_R y ψ_I son reales, que representan a ψ en $\omega t = 0$ y ψ en $\omega t = \pi/2$ respectivamente.

La figura 13 muestra el campo obtenido por la solución modal para $\varepsilon = 0.3$, $\omega/f = 0.2$, $\lambda a = 1.5$ y $j = 2$. Las líneas sólidas marcan valores positivos, las punteadas valores negativos y las quebradas cero. El truncamiento de las sumatorias marcadas en las ecuaciones (13) y (14) fué $M = 16$, y se puede apreciar que las isolíneas coinciden bastante bien en la discontinuidad, $0 \leq x \leq a(1-\varepsilon)$, así como ψ es muy cercana a cero sobre el escalón, en $y = 0$ y $a(1+\varepsilon) > x > a(1-\varepsilon)$. Se puede notar la estructura del modo dos entrando por la parte sureña en ψ_R y cómo un cuarto de ciclo después, en ψ_I , se deformó por la propagación de los modos reflejados. También se ve que el modo uno transmitido es el más energético (ver fig. 11b). Para este ejemplo, que es el indicado en la fig. 4, se transmite un modo y se reflejan tres.

En la figura 14 se presenta la función corriente para los mismos valores de los parámetros del caso anterior, pero construida por medio de TR. En esta solución saltan a la vista las zonas con gradientes muy grandes, donde este método proporciona resultados poco confiables. Éstas están relacionadas con las intersecciones de las regiones marcadas

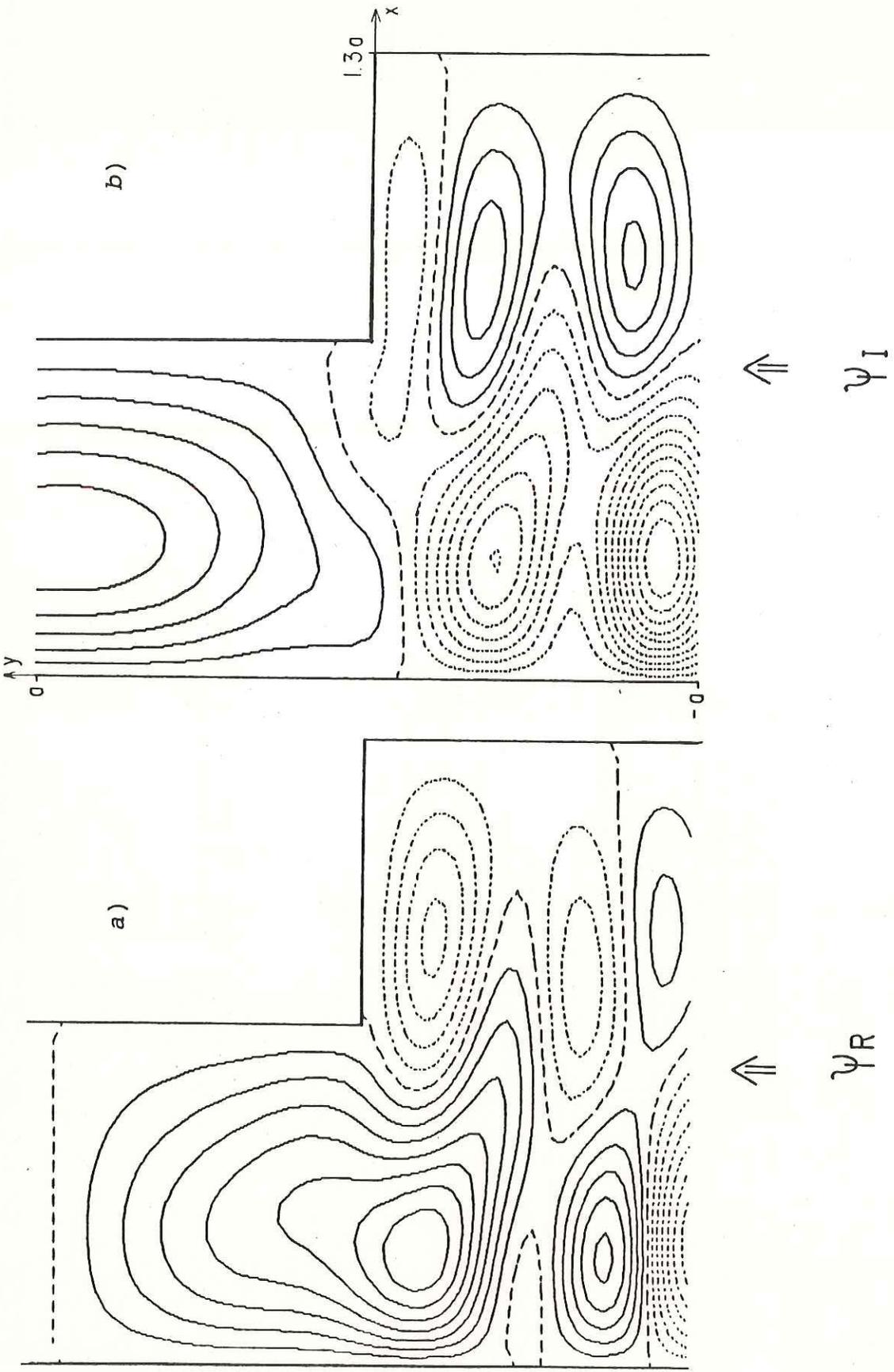


Fig.13. Parte real, a), e imaginaria, b), de la función corriente obtenida por la solución modal para $\epsilon = 0.3$, $\lambda a = 1.5$, $\omega/f = 0.2$ y $j = 2$.

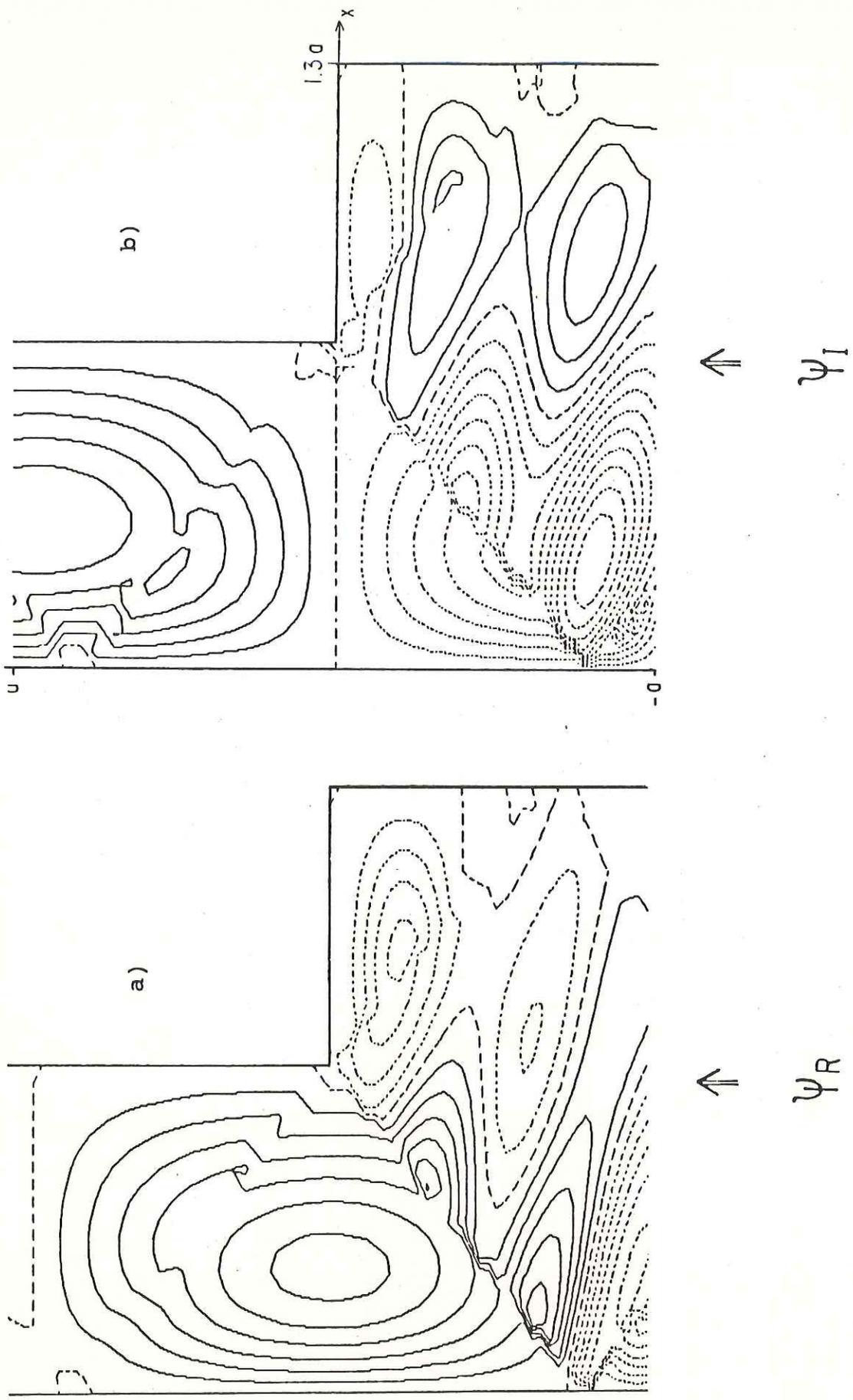


Fig. 14. Lo mismo que en la figura anterior, pero obtenida por teoría de rayos.

en las figuras 8 & 9. Ahí las velocidades tienen valores muy altos, ver ec 2. Comparando ambos campos (figura 13 y 14) se ve que ésta última es menos suave que la anterior pero marca a *grosso modo* áreas del mismo signo, y con esto la dirección de los giros, así como valores extremos iguales. Es decir los valores picos calculados por la solución modal se mantienen en la TR. Aunque se pierde información, por ejemplo, en la fig. 13, la región que encierra el contorno cero cerca del muro en $y = -0.5a$, en ψ_R , desaparece completamente en la fig. 14. La estructura del modo dos incidente asociada a la función corriente ya no es tan clara como en la solución anterior. Por último la solución de TR presenta siempre una estructura complicada en la esquina del escalón, i.e. en $y = 0$, $x = a(1-\varepsilon)$. La diferencia entre las fracciones de flujo de energía transmitida calculado por ambas técnicas es de 0.057, ver figura 11b. Comparando siempre con la solución modal, éste es uno de los mejores resultados obtenidos. Si usamos $j = 1$ y mantenemos los parámetros restantes fijos esta solución se parece menos.

Para un canal que se ensancha Wilkin y Chapman (1987), encontraron la existencia de una región de velocidades muy débiles detrás del escalón. La figura 15 muestra una combinación de ambas soluciones (los parámetros fijos son $\varepsilon = -0.387$, $\lambda a = 1.63$, $\omega/f = 0.1$ y $j = 2$). Sobre las isocorrientes de la función corriente obtenidas de la solución modal se muestra la trayectoria de un rayo límite. Como se puede apreciar la TR predice satisfactoriamente al área de la región de sombra. Ésta se obtiene calculando el ángulo de incidencia, para lo cual sólo se necesitan conocer los parámetros del modelo (en este caso es de 50.8°). Una estimación de la diferencia entre estas áreas es de 12% en ψ_R y de 0% en ψ_I . Al igual que en la solución modal anterior se tomó $M = 16$. El contorno cero cerca de la frontera $a(1+\varepsilon) > x > a(1-\varepsilon)$ muestra

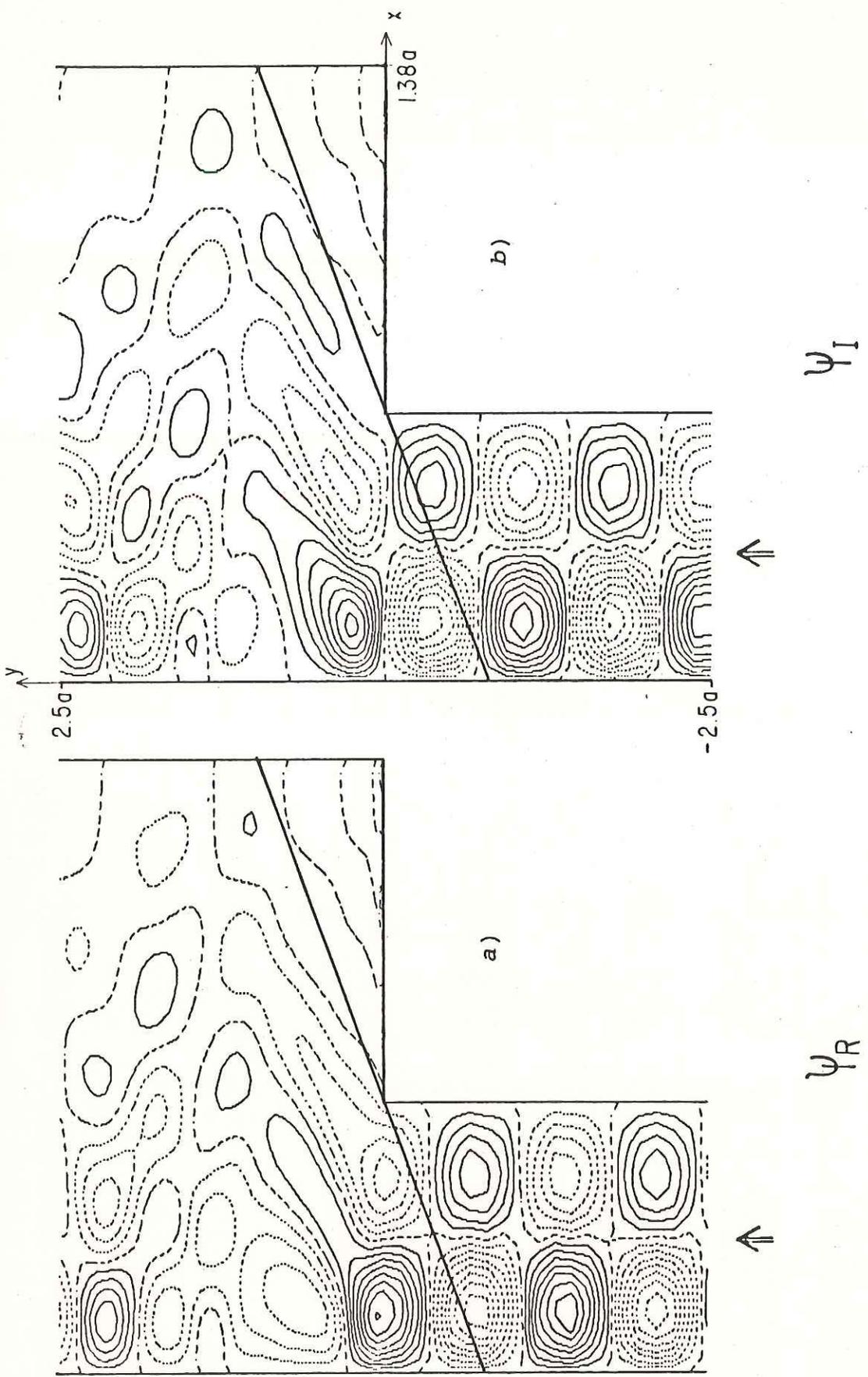


Fig. 15. Lo mismo que la figura 13 para $\epsilon = -0.387$, $\lambda a = 1.63$, $\omega/f = 0.1$ y $j = 2$.

la presencia de ruido y con esto la incerteza de éste método (del orden de 10^{-4}). Los giros asociados al modo dos incidente se aprecian claramente en la parte Sur al escalón en ψ_R y cómo éstos avanzan y se debilitan al esparsirse en la plataforma ancha en ψ_I . Aquí se transmiten siete modos.

Para los mismos parámetros de la figura 14 se calcula el campo de ψ por TR, fig. 16. En esta gráfica podemos ver que TR predice perfectamente la solución modal al Sur del escalón, es decir en esta región ambas soluciones son prácticamente idénticas. Al Norte del escalón la solución difiere bastante de la modal. Por ejemplo la otra zona de sombra sobre el muro que esta solución predice, no está claramente asociada a los contornos de la figura anterior. Sin embargo al igual que en la fig. 14, las regiones de giros y las valores extremos se localizan más o menos en las coordenadas (x, y) de la solución de la figura anterior. La diferencia en el flujo de energía transmitido entre ambas soluciones es de 0.0012.

Comparaciones con un modelo sin muro.

Trasviña (1987) estudió la dispersión de OP sobre una topografía que modela al Golfo de Tehuantepec. Esta batimetría difiere de la aquí usada en que no tiene un "muro" mar adentro. En esta sección se comparan los flujos de energía reflejados como función del período, para una latitud de 16°N , obtenidos por Trasviña, con los calculados en este trabajo. Los parámetros fijos son $\varepsilon = 0.555$, $f = 4.018 \cdot 10^{-5}$ y $\lambda a = 1.404$. La figura 17a se obtuvo para una onda incidente del modo uno y la 17b para otra del modo dos. Los valores marcados con símbolos son los obtenidos por Trasviña (modelo sin muro) quien sólo pudo calcular los flujos de energía para ciertos períodos. Los símbolos (\circ , $+$ y $*$) representan el flujo

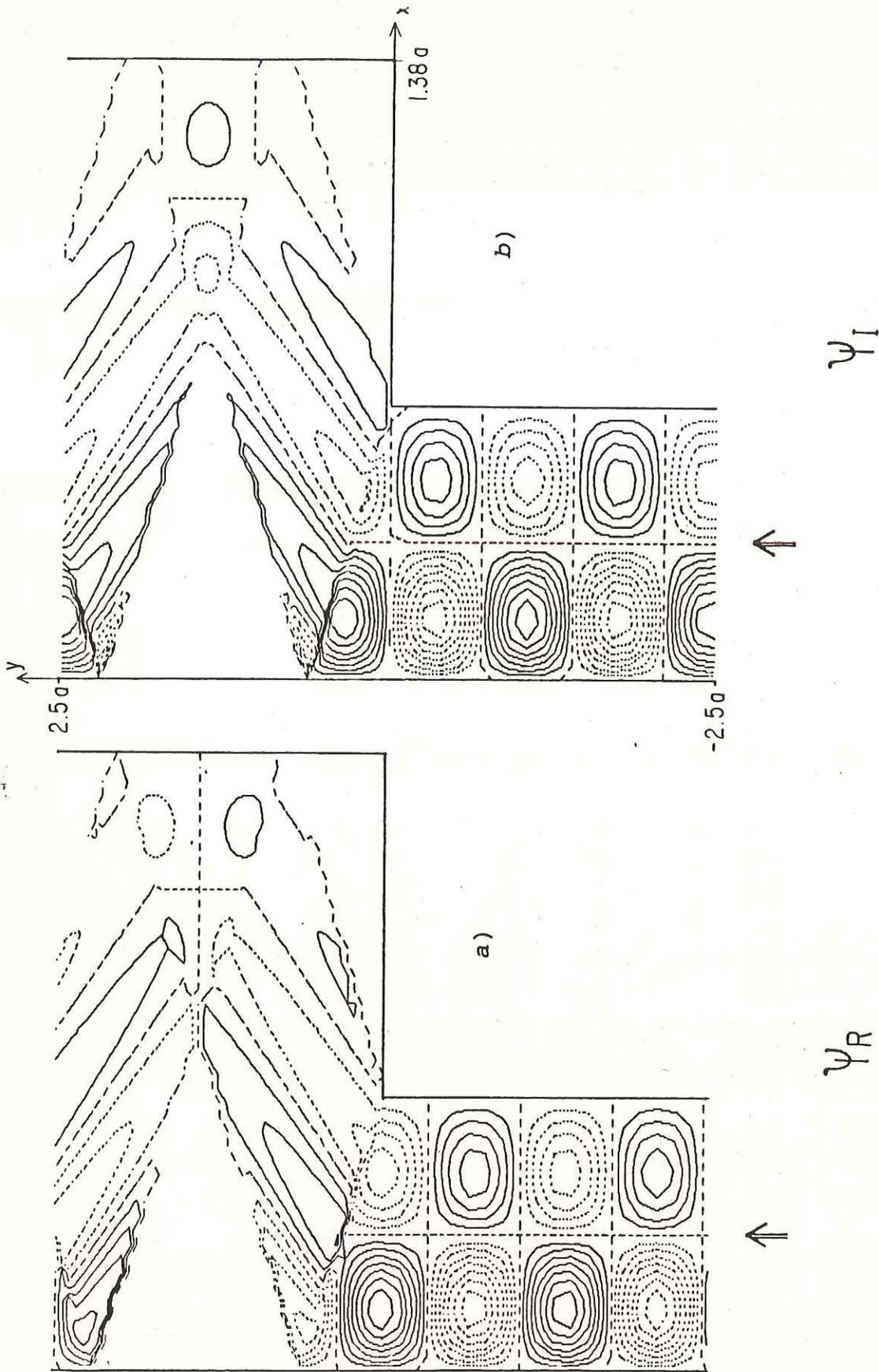
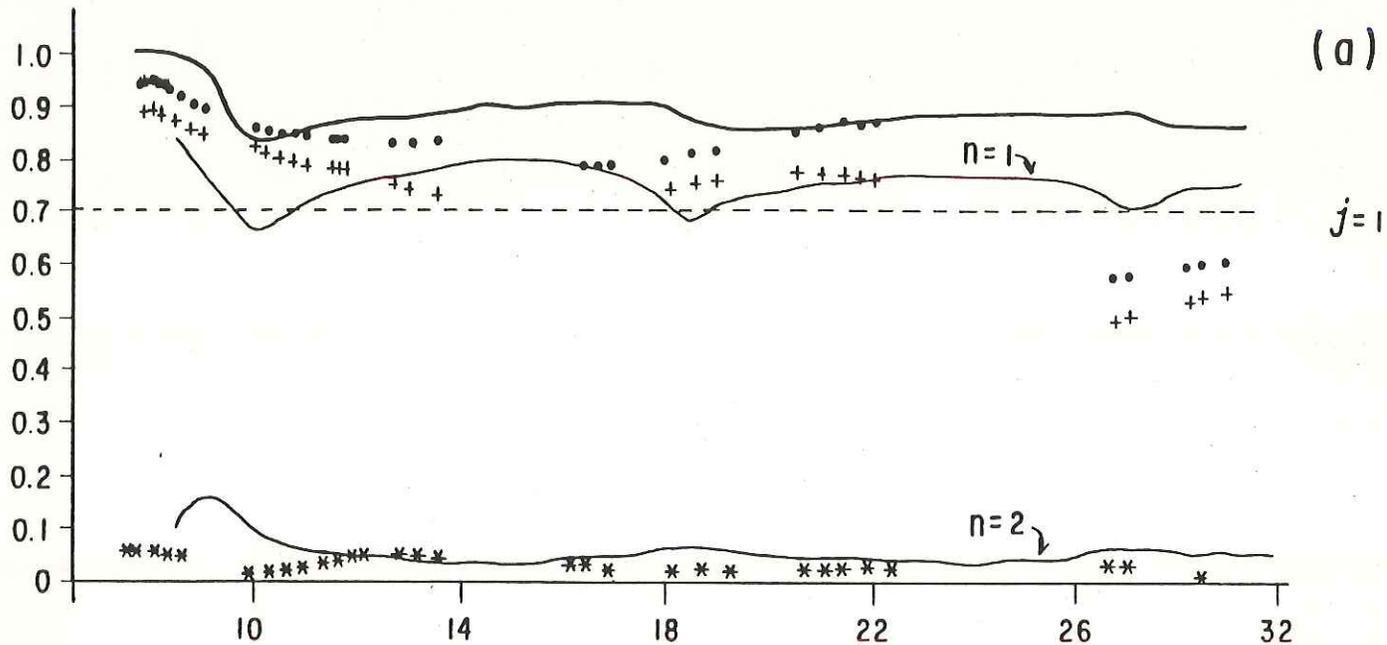


Fig. 16. Lo mismo que en la figura anterior pero obtenida por teoría de rayos.



••• FUJO TOTAL REFLEJADO
 +++ CONTRIBUCION DEL MODO 1
 *** CONTRIBUCION DEL MODO 2

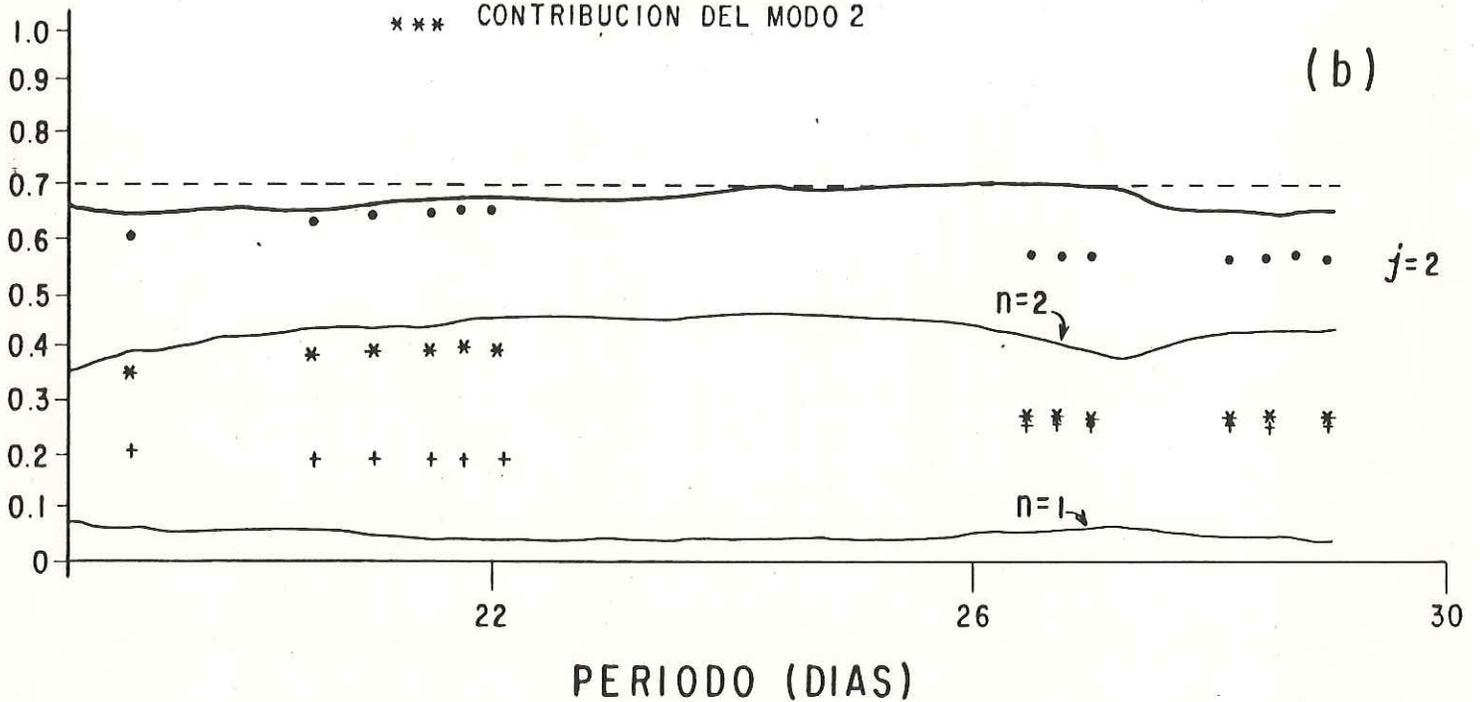


Fig. 17. Flujos de energía reflejados como función del período para una batimetría que modela al golfo de Tehuantepec, $\epsilon = 0.556$, $\lambda a = 1.404$ y $f = 4.018 \cdot 10^{-5} (\Delta^{-1})$. Los símbolos (\cdot , $+$, $*$) corresponden a los obtenidos por Trasviña (1987), modelo sin "muro". Las líneas sólidas corresponden a lo obtenido por nuestra solución modal y la línea punteada es la obtenida por teoría de rayos.

total reflejado, el debido al modo uno y al modo dos respectivamente. Las líneas sólidas continuas, son las obtenidas por nuestra solución modal. De éstas la que tiene los valores más altos indica el flujo total reflejado y las dos restantes son las asociadas al modo uno y dos. Y por último la línea continua punteada independiente del período es la que proporciona TR, $R = 0.714$.

En 17a, se ve que la mayor parte de la energía incidente es reflejada hacia el Sur para las tres soluciones, aunque la solución obtenida por TR subestima completamente a las otras dos. En el intervalo de 10 a 26 días los cálculos por rayos se alejan de lo obtenido por Trasviña en un 18%.

En cuanto a la partición modal, nuestra estimación describe aceptablemente lo obtenido por Trasviña. El modo uno tiene, en ambas soluciones, la mayor contribución al flujo reflejado, aunque los puntos de inflexión no son los mismos. El modo dos, para períodos mayores a 12 días, nunca rebasa el 10% en ambos resultados. Nuestra solución modal es insensible a la disminución del por ciento de energía transmitida, que el modelo sin muro predice para períodos mayores a 22 días.

Cuando incide una onda del modo dos, fig 17b, los flujos reflejados de las tres soluciones coinciden mucho más que en el caso anterior. Aquí la solución de TR coincide en muchos puntos con la solución con muro y sobrestima, en un 18% aproximadamente, a la sin muro. Excluyendo la solución por rayos, vemos que la reflexión es menor que cuando incide una onda de modo uno y que el modo dos reflejado es el más energético, para las dos soluciones restantes. Nuestra solución modal describe de manera muy parecida la partición modal, aunque sobrestima la contribución del modo dos y por ende subestima la del uno.

A pesar de que la batimetría usada por Trasviña es diferente y mucho más realista, en lo referente a la exclusión del muro mar adentro, nuestros resultados son comparables y más sencillos.

VIII.-CONCLUSIONES.

Al estudiar como se propagan las OP sobre la batimetría especificada (ver fig.3), la solución obtenida por teoría de rayos posee las siguientes características. Por haberse utilizado un fondo exponencial (ver ec. 10) se obtiene exactamente la relación de dispersión para estas OP y con esto una reflexión especular, sobre las paredes del canal. Otra consecuencia del perfil de H es que las trayectorias de los rayos resultan rectas. Por medio de la solución modal, se obtiene que al incidir una OP sobre el escalón se excitan un número determinado de modos transmitidos y reflejados más un infinito de modos desvanecentes necesarios para acoplar las condiciones de frontera en $y = 0$.

Una de las grandes fallas de la solución de rayos es que no proporciona información de estos modos ni de su contribución al flujo de energía.

Plataformas que se angostan, $\varepsilon > 0$.

Al variar la razón de los anchos tanto la TR como la solución modal predicen un aumento en el flujo total transmitido, desde cero cuando se tiene un canal cerrado, $\varepsilon = 1$, hasta el valor de uno, cuando se tiene un canal de ancho constante $\varepsilon = 0$. Para la TR, este aumento es proporcional a la razón de anchos, y coincide en varios puntos con el obtenido por la otra solución. Hay que hacer notar que teoría de rayos no proporciona información del rango donde la solución modal predice flujo nulo transmitido (que para el ejemplo ilustrado en la figura 10, va de $\varepsilon = 1$ a $\varepsilon = 0.78$) ni tampoco los puntos

de inflexión, que están relacionados con el modo transmitido que se ajusta más al incidente.

Los flujos de energía de la solución modal, obtenidos variando la frecuencia (ver ec. 20) proporcionan una estructura complicada asociada a las frecuencias de corte de tanto los modos transmitidos como los reflejados. Mientras que teoría de rayos da un valor constante en todo el rango de frecuencias. Para el caso ilustrado en la figura 10a, donde los valores fijos son $j = 1$, $\lambda a = 1.5$ y $\varepsilon = 0.3$, el flujo total de energía oscila alrededor del obtenido por rayos (ya que difiere del promedio en un 10%) aunque se aleja mucho de los valores pico, de la solución modal, en frecuencias altas. Cuando incide un modo dos, fig 11b, en un rango bastante amplio de frecuencias bajas, ambas soluciones se vuelven independientes de ω/f . En ese rango (al menos de 0.01 a 0.16) TR sobrestima el flujo transmitido en un 7% aproximadamente. En cuanto a la función corriente las soluciones difieren en forma, pero coinciden en la localización y valor de los mínimos y máximos. Aunque TR omite algunas características importantes da una idea global de la dinámica del problema planteado. Las zonas donde rayos falla son más notorias cuando el ángulo de incidencia aumenta. Para una frecuencia fija éste ángulo es siempre mayor cuando incide una onda del primer modo que una del segundo. Esto era de esperarse pues TR es asintóticamente válida en el límite de $k \rightarrow \infty$.

Plataformas que se ensanchan, $\varepsilon < 0$.

Los flujos de energía totales transmitidos calculados por ambas técnicas proporcionan un valor casi unitario, excepto para frecuencias muy altas donde la solución modal predice la excitación de los modos más altos reflejados. En más del 60% de las frecuencias transmisibles, para una topografía y modo incidente dado, ambas soluciones coinciden respecto a las fracciones de flujos de energía. En lo referente a las funciones de corriente, rayos proporciona exactamente la misma

que la modal en la región sureña del escalón. En la región norteña predice satisfactoriamente el área de sombra detrás del escalón pero hacia el Norte éstas difieren cada vez más.

En todos los casos tratados, las soluciones coinciden más en el límite de frecuencias bajas, como lo predicho y cuando incide una onda del modo más alto. Sin embargo, el rango de aplicabilidad de teoría de rayos es mayor que el esperado.

Comparando los flujos de energía del modelo sin muro hecho por Trasviña, la solución modal elaborada en este trabajo coincide bastante bien. Con esto se ve que la elección del muro mar adentro proporciona más ventajas que incertidumbres; además de que es más sencilla se puede obtener mayor información de la dinámica de las OP, pues los cálculos no se complican tanto al variar los parámetros libres del modelo. Como era de esperarse, la solución por teoría de rayos no describe los detalles de la solución de Trasviña pero se puede decir que da una buena estimación, sabiendo que en el caso de una onda incidiendo del modo uno, TR subestima el flujo de energía y para una del modo dos lo sobrestima.

Finalmente se puede decir que la teoría de rayos es una herramienta muy útil que en ejemplos como éste, da resultados más simples que la resolución directa de las ecuaciones de movimiento. Aunque no hay que olvidar que la información que proporciona es sólo una estimación del comportamiento de estas ondas.

BIBLIOGRAFÍA.

- Buchwald V.T., and J.K. Adams (1968). The propagation of continental shelf waves. *Proc. Roy. Soc. A* 305, 235-250.
- Lighthill J. (1979). *Waves in fluids*. Cambridge University Press.
- Ripa P. (1989). Rays in Equatorial Oceans. *Tropical Ocean Atmosphere Newsletter*. Number 48.
- Robinson A.R. (1964). Continental shelf waves and the response of sea-level to weather systems. *J. Geophys. Res.* 69, 367-368.
- Smith R. (1971). The Ray of topographic Rossby waves. *Deep Sea Res.* vol 18, pp 477 to 483.
- Trasviña A. (1987). Propagación de ondas de plataforma en el Golfo de Tehuantepec. Tesis de maestría CICESE.
- Wilkin J.L., and D.C. Chapman (1987). Scattering off Continental Shelf waves at discontinuity in Shelf Width. *J. Phys. Ocean.* Vol 17, pp 713, 724.

APÉNDICE A.

Criterio de convergencia.

Se puede ver de las ecuaciones que describen las funciones de corriente al Norte y al Sur del escalón, (13) y (14), que la incidencia de una OP excita un número infinito de modos. Los primeros términos se refieren a los modos libres, mencionados al analizar las relaciones de dispersión lejanas, y los restantes se refieren a los confinados al escalón, ó desvanecentes. Como no podemos tomar un número infinito de términos en las sumatorias, usamos un criterio de convergencia para truncarlas. Éste se basa en las condiciones de continuidad en $y = 0$, descritas en (16).

La primera consiste en imponer velocidad nula en la pared, es decir

$$\psi_s = 0 \quad \text{en} \quad a(1-\varepsilon) \leq x < a(1+\varepsilon).$$

Para saber que tan bien se cumple esta condición calculamos el valor

$$f_0 = \frac{\int_{a(1-\varepsilon)}^{a(1+\varepsilon)} |\psi_s|^2 dx}{\int_0^{a(1+\varepsilon)} |\psi_I|^2 dx} \Bigg|_{y=0} \quad (A1)$$

donde $\psi_I = e^{\lambda x} F_j e^{i(l_j y - \omega t)}$, y las barras indican módulo.

La segunda es la de continuidad de velocidad en la frontera libre,

$$\psi_s = \psi_N \quad \text{en} \quad 0 \leq x < a(1-\varepsilon).$$

Para esta condición calculamos

$$\ell_1 = \frac{\int_0^{a(1-\varepsilon)} |\psi_S - \psi_N|^2 dx}{\int_0^{a(1+\varepsilon)} |\psi_I|^2 dx} \Bigg|_{y=0} \quad (A2)$$

Y la última es la de continuidad de transporte,

$$\psi_{N,y} = \psi_{S,y} \quad \text{en} \quad 0 \leq x < a(1-\varepsilon).$$

Para la cual calculamos,

$$\ell_2 = \frac{\int_0^{a(1-\varepsilon)} |\psi_{S,y} - \psi_{N,y}|^2 dx}{\int_0^{a(1+\varepsilon)} |\psi_{I,y}|^2 dx} \Bigg|_{y=0} \quad (A3)$$

Entre más cercanas a cero se encuentren estas medidas, mejor será el ajuste. En la tabla I tenemos algunos valores para el caso de $\varepsilon = 0.3$, $\omega/f = 0.1$ y $\lambda a = 1.5$. La primer columna indica el máximo alcanzado para la sumatoria de las A_α y la segunda para las B_p . Las siguientes tres columnas corresponden a estas tres medidas. Tenemos un buen ajuste para ℓ_0 y ℓ_1 (del orden de 10^{-3}) con prácticamente todos los valores mayores a $M_\alpha = 2$ y $M_p = 4$, que son los modos libres transmisibles. Y como era de esperarse los valores mas lejanos a cero son los de ℓ_2 ya que es la condición mas difícil de cumplir. También se muestran los flujos de energía transmitidos y reflejados definidos en (20). El balance de energía se satisface siempre que se considere en las sumatorias, al menos, el número de los modos que se propagan. Al incluir a los desvanecentes tanto el flujo transmitido como el reflejado cambian y tienden a un solo valor. Estos resultados son representativos de otros casos. Se tomaron como buenos valores $M = M_p = M_\alpha \geq 10$.

Se realizó también una prueba para ver que tanto se veían afectados las fases de las amplitudes de los modos propagables al aumentar el número de los desvanecentes, ver figura 18. Se

TABLA I.

Medidas de convergencia y flujos de energía para diferentes valores de M_α y M_p . Las variables fijas son $\epsilon = 0.3$ $\omega/f = 0.125$ y $a\lambda = 1.5$. Se transmiten dos modos y se reflejan cuatro.

M_α	M_p	l_0	l_1	l_2	T	R	$T + R$
2	4	0.0096	0.0154	0.2339	0.5465	-0.4535	1.0000
4	8	0.0015	0.0028	0.1673	0.5404	-0.4596	1.0000
6	12	0.0008	0.0009	0.1467	0.5391	-0.4609	1.0000
8	16	0.0006	0.0004	0.1311	0.5388	-0.4612	1.0000
9	18	0.0005	0.0003	0.1236	0.5387	-0.4613	1.0000
18	18	0.0015	0.0010	0.0413	0.5401	-0.4599	1.0000
10	20	0.0004	0.0003	0.1164	0.5387	-0.4613	1.0000
12	24	0.0003	0.0002	0.1038	0.5386	-0.4614	1.0000
14	28	0.0002	0.0002	0.0951	0.5385	-0.4615	1.0000
16	32	0.0001	0.0001	0.0904	0.5384	-0.4616	1.0000
16	34	0.0001	0.0001	0.0959	0.5383	-0.4617	1.0000
18	36	0.0001	0.0001	0.0880	0.5384	-0.4616	1.0000

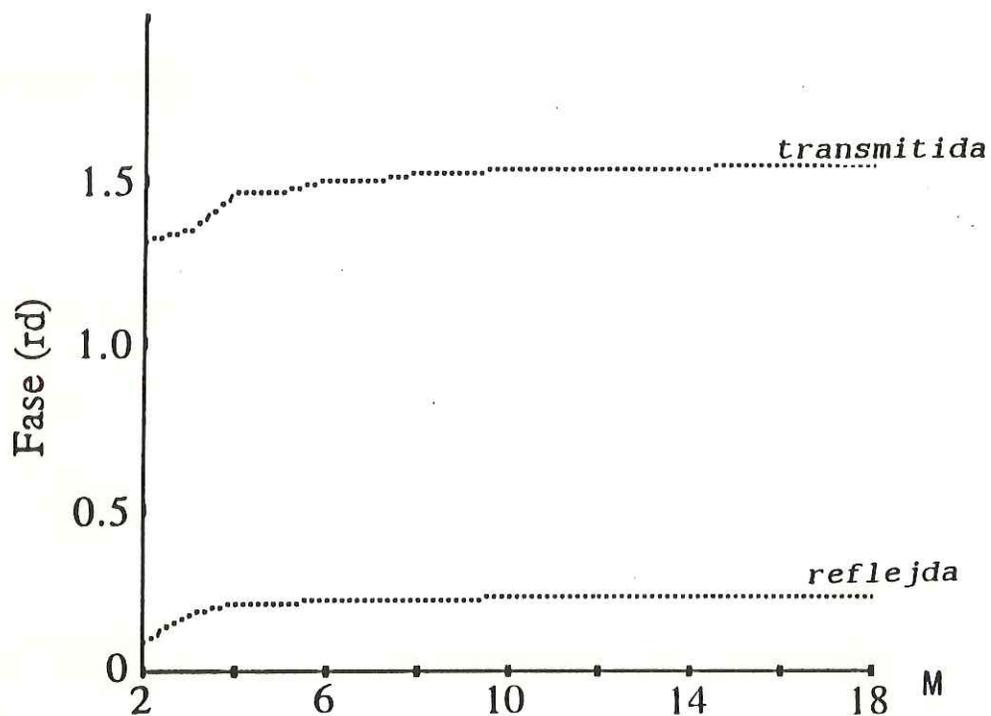


Fig. 18. Fases de las amplitudes del primer modo transmitido y reflejado (los únicos libres) como función del número de modos desvanecientes, M , para $\epsilon = 0.3$, $a\lambda = 1.5$, $\omega/f = 0.3$ y $j = 1$. Claramente para $M \geq 8$ la solución numérica ha convergido a la analítica.

eligió una frecuencia tal que sólo un modo libre se transmite y otro se refleja. El número de las desvanecientes aumenta de la misma forma tanto al Norte como al Sur. Se aprecia claramente de la figura que estas faces tienden a estabilizarse para valores mayores de $M = 8$.

APÉNDICE B.

Flujos de energía.

Dado un conjunto de amplitudes, es posible calcular los flujos de energía cinética que transporta cada onda. La energía potencial, es nula en nuestro caso, es nula por haberse impuesto la condición de tapa rígida, $\eta_t = 0$. Al multiplicar la ecuación de vorticidad (3) por la función corriente ψ se obtiene,

$$\left(2H^{-1}|\nabla\psi|^2\right)_t - \nabla \cdot \left(H^{-1}\psi \nabla\psi_t\right) = \mathcal{J}\left(\psi^2/2, fH^{-1}\right). \quad (B1)$$

De esta ecuación vemos que es posible expresar los cambios temporales de la energía cinética, $E = \frac{1}{2} H^{-1} |\nabla\psi|^2$, en función de la divergencia del vector flujo de energía \vec{J} . La ec. (B1) es equivalente a la (4) y las componentes del vector \vec{J} están especificadas en la ec.(5).

Nos interesa el promedio temporal del flujo de energía integrado en todo el dominio de la solución. Esto es

$$\int_{Y_1}^{Y_2} \langle J^x \rangle dy \Big|_{x=0, x=a(1+\varepsilon)} + \int_0^{a(1+\varepsilon)} \langle J^y \rangle dx \Big|_{y=y_1, y=y_2} = 0 \quad (B2)$$

donde $|y_1|, |y_2| \rightarrow \infty$, $\langle \rangle = \mathcal{T} \int_0^{\mathcal{T}} dt ()$ y \mathcal{T} es el período.

El primer término de (B2), el cual se refiere al flujo perpendicular a la costa, es nulo (Trasviña 1987), primero porque H sólo depende de x y segundo porque la condición de no flujo de masa atravesando las paredes elimina la integral restante. Entonces el flujo de energía lejos del escalón está dado sólo por la componente paralela a la costa. Para un sólo modo el flujo de energía es

$$J = \int_0^L \left\langle \frac{1}{2} (f/H)_x \psi^2 - H^{-1} \psi \psi_{yt} \right\rangle dx \quad (B3)$$

donde L es el ancho del canal. Si expresamos la función corriente como

$$\psi = \text{Re} \left\{ K_n(x) e^{i(l_n y - \omega t)} \right\} \quad (B4)$$

tenemos que el flujo de energía debido a un sólo modo es

$$J = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{1}{2} (f/H)_x - \omega \text{Re}\{l_n\} H^{-1} \right) e^{-2Y \text{Im}\{l_n\}} K_n(x)^2 dx. \quad (B5)$$

Sabemos que H varía exponencialmente de la forma

$$H(x) = H_0 e^{-2\lambda x},$$

en toda la región de estudio. Las funciones $K_n(x)$ y los números de onda l_n son de la forma;

al Norte $L = a(1-\varepsilon)$,

$$K_{\alpha}(x) = H^{1/2} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha \pi x}{a(1-\varepsilon)} \right) A_{\alpha}, \quad l_{\alpha} = \frac{f\lambda}{\omega} \boxed{+} \sqrt{\left(\frac{f\lambda}{\omega} \right)^2 - \lambda^2 - \left(\frac{\alpha \pi}{a(1-\varepsilon)} \right)^2}$$

y al Sur $L = a(1+\varepsilon)$,

$$K_p(x) = H^{1/2} \operatorname{sen} \left(\frac{p \pi x}{a(1+\varepsilon)} \right) B_p, \quad l_p = \frac{f\lambda}{\omega} \boxed{-} \sqrt{\left(\frac{f\lambda}{\omega} \right)^2 - \lambda^2 - \left(\frac{\alpha \pi}{a(1+\varepsilon)} \right)^2}$$

La elección de los signos encerrados en un cuadrado se realizó de manera que los modos desvanecientes decrecieran conforme $|y|$ aumenta. Al sustituir tenemos que por ejemplo al Norte el flujo de energía transmitido debido a un solo modo es

$$T = |A_{\alpha}|^2 \left(\lambda f - \omega \operatorname{Re}\{l\} \right) e^{2\operatorname{Im}\{l\}} \frac{a(1-\varepsilon)}{4H_0}. \quad (\text{B5})$$

Para los modos desvanecientes (B5) se anula ya que $\operatorname{Re}\{l\} = f\lambda/\omega$. Entonces no contribuyen al flujo de energía (Trasviña 1987). Para los modos que se propagan la parte imaginaria de l es nula y $e^{2\operatorname{Im}\{l\}} = 1$.

APÉNDICE C.

En un canal de ancho constante y fondo $H(x)$, como el expresado en (10), se obtuvo por teoría de rayos la siguiente relación de dispersión

$$\lambda^2 + k^2 + l^2 - f\omega^{-1} 2l\lambda = 0. \quad (31)$$

Con ésta se resuelven las ecuaciones de evolución para los rayos (29) y con ellas la ecuación para la fase (30), las cuales pueden describirse como

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}, \\ \dot{\mathbf{k}} = 0, \\ \dot{\vartheta} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} - \omega \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(t - t_0), \\ \mathbf{k} = \mathbf{k}_0, \\ \vartheta = \vartheta_0 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{k} - \omega)(t - t_0), \end{array}$$

donde

$$C = \left\{ \frac{\omega^2}{f\lambda^2} \left(-2k/l, \frac{(k^2 + \lambda^2)}{l^2} - 1 \right) \right\}$$

La función fase es entonces

$$\vartheta = \vartheta_0 + k_0(x - x_0) - \omega(t - t_0).$$

donde $\vartheta_0 = \vartheta(x_0, y_0, t_0)$.

Primero estudiaremos la solución para el canal con fronteras en $x = 0$ y $x = a$. Definimos un campo φ_1 asociado a una familia de rayos que viaja de la costa al muro,

$$\varphi_1 = A_1 e^{i(l_1 y + k_1 x - \omega_1 t)}$$

y otro, φ_2 , asociado a una familia de rayos que viaja del muro a la costa

$$\varphi_2 = A_2 e^{i(l_2 y + k_2 x - \omega_2 t)}$$

ver figura 7. Del diagrama de lentitud obtenemos que la componente $k_1 = k$ cambia a $k_2 = -k$, al reflejarse sobre una frontera paralela a y . Sobre $x = 0$, se verifica que la función ψ , formada por la contribución de todas las φ locales existentes, se anula, i.e. en $x = 0$

$$\psi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,$$

y que la dependencia en y y en t permanece inalterables, es decir

$$\forall t, y : l_1 y - \omega_1 t = l_2 y - \omega_2 t.$$

y resulta que

$$A_1 = -A_2.$$

Con esta dos familias de rayos se satisface la condición de frontera en $x = 0$. Ahora definimos una nueva familia que viaja, al igual que φ_1 , de la costa al muro,

$$\varphi_3 = A_3 e^{i(ly + k_3 x - \omega t)}.$$

Al satisfacer las condiciones en $x = a$ y usando el diagrama de lentitud, se obtiene que

$$A_1 = A_3 e^{i2ka}.$$

La única solución constructiva posible es cuando la familia φ_1 está en fase con φ_3 . Es decir cuando $A_1 = A_3$, lo que provoca que

$$k = j\pi/a, \text{ con } j = 1, 2, 3.$$

Entonces la función corriente ψ , en todo el canal es de la forma

$$\psi = A e^{i(lY - \omega t)} \text{sen}(j\pi x/a).$$

La amplitud se obtiene de (27) y es

$$A = H_0^{1/2} e^{\lambda x}.$$

Ahora consideremos la batimetría indicada en la figura 3. El problema a analizar consiste en hacer incidir desde el "Sur", i.e. $y \rightarrow -\infty$, una ψ_0 asociada a un modo, j , y con una propagación neta hacia el Norte. Esta es

$$\psi_0 = A e^{i(l_1 Y - \omega t)} \left(e^{-ikx} - e^{ikx} \right) \quad (C1)$$

donde $|k| = j\pi/a(1+\varepsilon)$ y $l = l_1 = f\lambda/\omega - \sqrt{(f\lambda/\omega)^2 - (\lambda^2 + k^2)}$.

En la figura 8 están marcadas las regiones que caracterizan a familias de rayos, cercanas al escalón para una plataforma que se angosta, $\varepsilon < 0$. La pendiente de estas líneas se obtiene de la ec (32)

$$\tan\zeta = k^{-1} \sqrt{(f\lambda/\omega)^2 - (\lambda^2 + k^2)} = m.$$

Al Sur del escalón, en $y < 0$, ψ_0 es solución y también en una región norteña definida por $y \leq m(a(1-\varepsilon) - x)$. La contribución

de ψ_0 debe de ser adicionada para la construcción de la función corriente en todos los lugares donde aparezca.

Al llegar al escalón, $y=0$, una parte de esta familia incidente se transmite al Norte, pasando al canal angosto, (regiones 11, 12, 13 ...) y otra se refleja, (regiones So, 1, 2, 3..). En So, la contribución es de la forma

$$\psi_{So} = -A e^{i(-kx + l_R y - \omega t)}.$$

donde $l_R = 2f\lambda/\omega - l_I$. Para cualquier punto (x, y) , localizado en So la función corriente es $\psi = \psi_{So} + \psi_0$. En las regiones 1, 3, 5, .. las contribuciones son de la forma

$$\psi_1 = \psi_3 = \psi_5 \dots = A e^{i(kx + l_R y - \omega t)},$$

y en las 2, 4, 6, ..

$$\psi_2 = \psi_4 = \psi_6 \dots = -A e^{i(-kx + l_R y - \omega t)}.$$

Entonces, por ejemplo para un punto localizado en donde se intersectan las regiones 1,2 y 0, la función corriente es

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 + \psi_2 + \psi_0 \\ A e^{-i\omega t} \text{sen}(j\pi x/a) \left(e^{i(l_I + l_R)y} \right) \end{cases}.$$

En las regiones 11, 13, 15...

$$\psi_{10+2n+1} = A e^{-ik2na(1-\varepsilon)} e^{-ikx} e^{i(l_I y - \omega t)}, n = 0, 1, 2 \dots$$

y por último en 12, 14, 16...

$$\psi_{10+2n+2} = -A e^{-ik2(n+1)a(1-\varepsilon)} e^{ikx} e^{i(l_I y - \omega t)}, n = 0, 1, 2 \dots$$

La figura 9 marca las regiones para una plataforma que se ensancha, $\varepsilon < 0$. El procedimiento para construir ψ es el mismo.

Al igual que en el caso anterior, incide desde la parte sureña una ψ_0 de la forma descrita en (C1). Aquí la solución es más sencilla ya que en todo el dominio

$$y < m(x - a(1-\varepsilon))$$

la única contribución a la función corriente es ψ_0 , i.e. $\psi = \psi_0$. y en las zonas de sombra marcadas con S_0 , no existe contribución, i.e. ψ es nula. Para las regiones norteñas 1, 3, 5, ..., la contribución es

$$\psi_{2n+1} = A e^{-ik2na(1+\varepsilon)} e^{-ikx} e^{i(l_1 y - \omega t)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

y para las 2, 4, 6, ...

$$\psi_{2n+2} = -A e^{-ik2(n+1)ya(1+\varepsilon)} e^{ikx} e^{i(l_1 y - \omega t)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

