

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Doctorado en Ciencias  
en Óptica con orientación en Óptica Física**

---

**Determinación de las estadísticas de pendientes y alturas de  
superficies marinas a partir del procesado de sus patrones de  
brillo**

Tesis  
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias

Presenta:

**Claudia Andrea Vidales Basurto**

Ensenada, Baja California, México  
2018

Tesis defendida por  
**Claudia Andrea Vidales Basurto**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Josué Álvarez Borrego**  
Director de tesis

**Dra. Diana Tentori Santa Cruz**

**Dr. Héctor Alonso Echavarría Heras**

**Dr. Héctor García Nava**

**Dra. Selene Solorza Calderón**



---

**Dr. Pedro Negrete Regagnon**  
Coordinador del Posgrado en Óptica

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**  
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta **Claudia Andrea Vidales Basurto** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física.

### **Determinación de las estadísticas de pendientes y alturas de superficies marinas a partir del procesado de sus patrones de brillo**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Josué Álvarez Borrego  
**Director de tesis**

El oleaje es un proceso estocástico variable en el espacio que está directamente relacionado con la rugosidad de la superficie marina. La importancia de su estudio radica en la vulnerabilidad de ciudades costeras, transportes marítimos y la topografía costera ante eventos climáticos. Debido a la rugosidad, se generan pequeños “espejos” sobre la superficie marina que reflejan la luz solar a cada instante produciéndose los patrones de brillo que se visualizan en un día despejado. El objetivo del presente trabajo de Tesis reside en que a partir del patrón de brillo registrado en la imagen, se puede inferir la estadística de las alturas y pendientes de la superficie marina que lo producen. Se presenta el análisis teórico y numérico en 1D y 2D de los parámetros estadísticos de la varianza y las funciones de auto-correlación con los que es posible determinar la distribución energética del mar y la estadística de la elevación del oleaje, respectivamente. En primera instancia, se logró la familiarización con la metodología en 1D, así como la obtención de los resultados en trabajos anteriores. No obstante, debido a la complejidad de las ecuaciones matemáticas, el tiempo de ejecución es mayor conforme aumenta el número de puntos sobre la superficie analizada, por lo que se implementó programación paralela CPU con las directivas OpenMP, reduciéndose un 80% en los tiempos de ejecución, así mismo, se aplicó un nuevo enfoque con naturaleza vectorial a la metodología en 1D con lo que fue posible la deducción del modelo geométrico y las ecuaciones para el caso 2D. Luego, se obtuvo automáticamente una extensa base de datos para distintas geometrías del problema considerando dos funciones de brillo: rect y gaussiana para una función de densidad de probabilidad (*fdp*) gaussiana y *fdp* no gaussiana. Finalmente, el proceso inverso para 1D fue realizado con éxito. Se obtuvieron curvas que tienen puntos de inflexión a diferentes velocidades del viento en la superficie del mar para diversas geometrías, y las curvas tienen formas similares para ambas funciones del brillo. Los resultados muestran valores más altos para las varianzas de las intensidades de la imagen usando la función de brillo rect en comparación con la función de brillo gaussiana, debido a que la última contiene menos energía en su forma matemática. El comportamiento de las curvas de varianza depende en gran medida de los ángulos de incidencia de los rayos solares. Una *fdp* no gaussiana proporciona curvas de varianza ligeramente suavizadas a diferencia de la *fdp* gaussiana. Sin embargo, los valores son similares por lo que una de éstas se puede usar para representar ambas. Lo mismo ocurre para las funciones de auto-correlación que determinan las condiciones óptimas para realizar el proceso inverso con el objetivo de obtener el modelado de la superficie marina usando el espectro de energía. Los resultados presentan algunos ejemplos de geometría que se pueden usar para optimizar el diseño del experimento siendo posible utilizar una longitud de perfil de mar corta en lugar de una longitud de perfil larga para una altura del detector alta.

**Palabras clave:** patrón de brillo, estadística pendientes marinas, varianza, funciones de auto-correlación.

Abstract of the thesis presented by **Claudia Andrea Vidales Basurto** as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Optics with orientation in Optics Physics.

**Slopes and heights marine surfaces statistics determination from the processing of their brightness patterns**

Abstract approved by:

---

PhD. Josué Álvarez Borrego  
Thesis Director

The swell is a variable stochastic process in space that is directly related to the roughness of the marine surface. The importance of its study lies in the vulnerability of coastal cities, maritime transport and coastal topography in the face of climatic events. Due to the roughness, small “mirrors” are generated on the sea surface, where the sunlight it is reflected instantly producing the patterns of brightness that are visualized on a bright day. The objective of this work lies in starting off the brightness pattern registered in the image, the statistic of the heights and slopes of the marine surface that produce it can be inferred. We present the theoretical and numerical analysis in 1D and 2D of the statistical parameters of the variance and the auto-correlation functions which it is possible to determine the energetic distribution of the sea and the statistics of wave elevation, respectively. First, 1D methodology familiarization was achieved, as well as the obtaining of the results in previous works. However, due to the complexity of the mathematical equations, the execution time is more significant as the number of points on the analyzed surface increases. So CPU parallel programming with OpenMP directives was implemented, reducing by 80% for the execution times. Likewise, a new approach using a vectorial nature was applied to the methodology in 1D, with it was possible to deduce the geometric model and the equations for the 2D case. Then, an extensive database was obtained automatically for different geometries of the problem considering two brightness functions: Rect and Gaussian for a Gaussian probability density function (*pdf*) and non-Gaussian *pdf*. Finally, the reverse process for 1D was carried out successfully. Curves were obtained that have inflection points at different wind speeds on the sea surface for various geometries, and the curves have similar shapes for both brightness functions. The results show higher values for the variances of the intensities of the image using the function of brightness Rect in comparison with the function of Gaussian brightness because the last one contains less energy in its mathematical form. The behavior of the curves of variance depends to a great extent on the angles of incidence of the solar rays. A non-Gaussian *pdf* provides slightly smoothed variance curves, unlike the Gaussian *pdf*. However, the values are similar so one of these can be used to represent both. The same happens for the auto-correlation functions that determine the optimum conditions to perform the inverse process to obtain the modeling of the marine surface using the energy spectrum. The results present some geometry examples that can be used to optimize the design of the experiment being possible to use a short sea profile length instead of a lengthy profile length for a high detector height.

**Keywords:** brightness pattern, marine slope statistics, variance, auto-correlation functions

**Dedicatoria**

*Al recuerdo de mi hermano Pedro.*

*A mi amado Carlos.*

*A mis hijas Laurita y Ahlysse.*

*A mis padres.*

*A mi hermano Adolfo.*

*A mis sobrinos-hijos Joshua y Christopher*

*Muchas gracias por todo su apoyo, amor, comprensión y por brindarme las herramientas para hacerte frente a las situaciones que la vida nos presenta.*

*¡Los Amo!*

## Agradecimientos

Al CONACYT por la beca de doctorado otorgada para mi manutención, con número de registro: 263430.

A mi asesor Josué Álvarez Borrego por su confianza, apoyo y amistad que me brindó desde el primer momento. Nunca me había sentido tan cómoda y confiada para realizar alguna sugerencia, comentario o duda ante un investigador. ¡Muchas gracias Dr.!

A todo mi comité de Tesis por reforzar la investigación con sus comentarios y cuestionamientos en cada presentación del avance de Tesis.

A José Luis Poom Medina por su apoyo al brindarme la posibilidad de hacer uso del equipo de súper cómputo de la Universidad de Sonora (UNISON).

Al CICESE por aceptar mi solicitud de admisión, así como a todo su personal por la atención y proporcionarme un espacio para realizar la investigación cómodamente.

## Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatorias.....	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	viii
<b>Capítulo 1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes.....	3
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Objetivo general.....	4
1.4 Objetivos específicos.....	4
<b>Capítulo 2. Marco teórico.....</b>	<b>5</b>
2.1 Proceso estocástico.....	5
2.2 Variable aleatoria.....	5
2.3 Función de densidad de probabilidad.....	5
2.4 Promedio y Varianza.....	6
2.5 Función de auto-correlación.....	6
2.6 Función de densidad de probabilidad conjunta.....	7
2.7 Procesos estocásticos estacionarios.....	7
<b>Capítulo 3. Metodología.....</b>	<b>9</b>
3.1 Geometría 1D.....	9
3.2 Condición para las pendientes de superficie.....	10
3.3 Función de brillo 1D.....	12
3.4 Nuevo enfoque a la metodología 1D unidimensional.....	14
3.5 Formación de la imagen.....	15
3.6 Varianza de las intensidades en la imagen 1D.....	17
3.6.1 Estadística Gaussiana.....	20
3.6.2 Estadística no Gaussiana.....	21
3.7 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 1D.....	21
3.7.1 Estadística Gaussiana.....	22
3.7.2 Estadística no Gaussiana.....	23

3.8 Proceso inverso 1D.....	24
3.9 Geometría 2D.....	25
3.10 Condición para las pendientes de superficie.....	29
3.11 Función de brillo 2D.....	31
3.12 Varianzas de las intensidades en la imagen 2D.....	32
3.12.1 Estadística Gaussiana.....	34
3.12.2 Estadística no Gaussiana.....	35
3.13 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 2D.....	36
3.13.1 Estadística Gaussiana.....	38
3.13.2 Estadística no Gaussiana.....	39
<b>Capítulo 4 . Resultados y discusión.....</b>	<b>41</b>
4.1 Varianzas de las intensidades en la imagen 1D.....	42
4.2 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 1D.....	52
4.3 Proceso inverso 1D.....	61
4.4 Varianzas de las intensidades en la imagen 2D.....	70
4.5 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 2D.....	75
<b>Capítulo 5 . Conclusiones.....</b>	<b>79</b>
<b>Literatura citada.....</b>	<b>81</b>



## Lista de figuras

Figura		Página
1	Modelo geométrico unidimensional.....	9
2	Geometría del problema incluyendo el diámetro aparente del Sol $s$ .....	10
3	Función de brillo Rect.....	12
4	Modelo geométrico unidimensional. Enfoque vectorial.....	14
5	Diagrama de bloques de los procesos involucrados en la formación de la imagen $I(x)$ .....	16
6	Modelo geométrico bidimensional.....	26
7	Modelo geométrico bidimensional. Enfoque vectorial.....	27
8	Modelo geométrico bidimensional considerando el diámetro aparente del Sol.....	29
9	Ángulos de incidencia y reflexión sobre la recta tangente en el punto de estudio. Vista desde el plano $xz$ .....	30
10	Ángulos de incidencia y reflexión sobre la recta tangente en el punto de estudio. Vista desde el plano $yz$ .....	31
11	Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para 160m de longitud de perfil a 500m de altura del detector y un ángulo de incidencia de (a) $20^\circ$ y (b) $30^\circ$ , respectivamente. Para función de brillo Rect y Gaussiana considerando estadística Gaussiana y estadística no Gaussiana.....	42
12	Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para 100m de altura del detector a diferentes ángulos de incidencia para una longitud del perfil de (a) 20m, (b) 40m y (c) 80m, respectivamente. Función de brillo Rect y estadística Gaussiana.....	44
13	Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para 100m de altura del detector a diferentes ángulos de incidencia para una longitud del perfil de (a) 160m, (b) 320m y (c) 720m, respectivamente. Para función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	45
14	Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes longitudes del perfil con un ángulo de incidencia de $25^\circ$ y una altura del detector de (a) 100m, (b) 500m y (c) 1000m, respectivamente. Usando función de brillo Rect y estadística Gaussiana.....	47

15	Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes longitudes del perfil para una altura del detector de 5000m y un ángulo de incidencia de 25° (figura superior) y 50° (figura inferior). Tomada de Vidales-Basurto et al., 2017.....	48
16	Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes alturas del detector a un ángulo de incidencia de 10° y longitud de perfil de (a) 80m y (b) 160m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	50
17	Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes alturas del detector a un ángulo de incidencia de 10° y longitud de perfil de (a) 320m y (b) 720m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	51
18	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para diversos ángulos de incidencia de los rayos del sol sobre una longitud del perfil de 80m a una altura del detector de (a) 100m y (b) 500m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	52
19	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para diversos ángulos de incidencia a una altura del detector de 100 m para longitudes del perfil de (a) 20m y (b) 40m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	54
20	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para diversos ángulos de incidencia a una altura del detector de 100 m para longitudes del perfil de (a) 80m y (b) 160m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	55
21	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para distintas alturas del detector a un ángulo de incidencia de 10° para longitudes del perfil de (a) 80m, (b) 160m y (c) 320m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	57
22	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para distintas longitudes del perfil marino a una altura de 5000m del detector a un ángulo de incidencia de (a) 5° y (b) 10°, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	58
23	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para distintas longitudes del perfil marino a una altura de 5000m del detector a un ángulo de incidencia de (a) 25° y (b) 50°, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.....	59
24	Superficie marina numéricamente generada para un espectro Rect, estadística Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	61

25	Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 24 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	63
26	Superficie marina numéricamente generada para un espectro Gaussiano, estadística Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	64
27	Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 26 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	65
28	Superficie marina numéricamente generada para un espectro Rect, estadística no Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	66
29	Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 28 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	67
30	Superficie marina numéricamente generada para un espectro Gaussiano, estadística no Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	68
31	Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 30 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).....	69
32	Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso unidimensional (a), altura del detector de 100m, ángulo de incidencia de 30° y longitud de perfil de 40m sobre la superficie marina. Así mismo, para el caso bidimensional usando la metodología anterior (Martín-Atienza y Álvarez- Borrego, 2013) y la metodología implementada en éste trabajo (b) y (c), respectivamente.....	70
33	Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 500m a un ángulo de incidencia de 20° sobre un perfil de superficie de 160m en cada eje con una función de brillo modelada por la función Rect 2D para estadística Gaussiana y estadística no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.....	72

34	Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 500m a un ángulo de incidencia de 20° sobre un perfil de superficie de 160m en cada eje con una función de brillo modelada por la función Gaussiana 2D para estadística Gaussiana y estadística no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.....	73
35	Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 500m a un ángulo de incidencia de 20° sobre un perfil de superficie de 40m, 80m y 320m en cada eje ((a), (b) y (c), respectivamente), con una función de brillo modelada por la función Rect 2D para estadística Gaussiana.....	74
36	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen con respecto a las funciones de auto-correlación en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 800m a un ángulo de incidencia de 10° sobre un perfil de superficie de 160m en cada eje para una función de brillo Rect 2D con estadística Gaussiana y no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.....	75
37	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen con respecto a las funciones de auto-correlación en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 800m a un ángulo de incidencia de 10° sobre un perfil de superficie de 160m en cada eje para una función de brillo Gaussiana 2D con estadística Gaussiana y no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.....	76
38	Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen con respecto a las funciones de auto-correlación en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 100m a un ángulo de incidencia de 40° sobre un perfil de superficie de 20m, 40m y 80m para el caso unidimensional ((a), (b) y (c), respectivamente), y para el caso bidimensional ((d), (e) y (f), respectivamente). Función de brillo modelada por la función Rect 2D para estadística Gaussiana.....	78

## Capítulo 1. Introducción

---

El océano es el sistema dinámico más complejo de la naturaleza. La importancia de su estudio radica en los riesgos a los cuales son sometidas las ciudades costeras dispersas alrededor del mundo y los transportes marítimos. Además, debido a los eventos climáticos, la topografía costera cambia considerablemente de un momento a otro. Por lo anterior, es imprescindible prevenir la ocurrencia de oleajes fuertes, mareas, tsunamis, entre otros, los cuales están directamente relacionados con la rugosidad de la superficie marina. Dicha rugosidad es causada por la interacción del viento sobre la superficie del mar y por tanto, el grado de rugosidad depende de la velocidad del viento tornándose una superficie más rugosa conforme la velocidad de viento aumenta. Para lograr una prevención certera del estado de desarrollo de la superficie marina, se requiere del modelado numérico de las olas del mar a través de distintas metodologías aplicadas a diversas fuentes de información que monitorean el área de la porción del mar bajo investigación, tales como los registros del oleaje, imágenes satelitales, imágenes aéreas, entre otras.

Dada la importancia de la aportación energética del oleaje, el concepto de espectro es fundamental para su estudio. Con el espectro podemos describir las propiedades del oleaje irregular del mar caracterizando la energía o amplitud, frecuencia y dirección de propagación de las olas generadas en la superficie marina. Debido a la necesidad de estudiar la dinámica de los océanos y gracias al avance de la tecnología, se lograron desarrollar sensores muy costosos que son instalados en diferentes zonas de una misma región para su monitoreo, con el objetivo de obtener los registros del oleaje y posteriormente realizar un procesamiento de datos y así, lograr caracterizar la región de estudio mediante distintos parámetros físicos.

El procesamiento de imágenes representa un amplio y fértil campo de investigación científica. La importancia que reclaman tales investigaciones en procesos técnicos es notable, ya que corresponden a una diversidad de estudios y aplicaciones de apreciable trascendencia en el mundo actual, por ejemplo: identificación de objetos, detección de cáncer de piel, monitoreo del océano, entre otras. De toda la diversidad de propiedades físicas que se pueden caracterizar de la superficie marina en una imagen aérea, cobra gran importancia la reflexión especular de los rayos del sol sobre la superficie, la cual corresponde a la propiedad óptica visiblemente notable para un detector situado en un punto de observación, a una determinada hora del día en un cielo despejado. Dicho efecto óptico es fácilmente percibido por el ojo humano, ya que al dirigir la mirada hacia el océano se puede observar un conjunto dinámico de puntos brillantes sobre la superficie marina donde la acción del viento que ocasiona la rugosidad de ésta, genera

una diversidad de pequeños espejos sobre la superficie y los cuales reflejarán especularmente la luz solar a cada instante, produciéndose lo que se denominan como “patrones de brillo”. La configuración del patrón de brillo en un instante queda plasmada en las imágenes aéreas y ésta dependerá del grado de rugosidad de la superficie marina, del punto de observación y la hora del día.

Diversas investigaciones científicas del océano mediante el uso de imágenes aéreas, dieron como resultado que existe una relación directa entre las pendientes de la superficie marina y la intensidad de la luz del sol que es reflejada sobre la superficie marina y posteriormente registrada en la imagen como un patrón de brillo, de tal forma que, a partir de éste se puede inferir la estadística de las alturas y pendientes de la superficie marina que lo producen (Álvarez-Borrego, 1993a; Álvarez-Borrego, 1993b; Álvarez-Borrego, 1995a; Álvarez-Borrego, 1995b; Álvarez-Borrego, 1995c; Álvarez-Borrego y Martín-Atienza, 2010; Álvarez-Borrego y Martín-Atienza, 2013; Martín-Atienza y Álvarez-Borrego, 2013; Poom-Medina *et al.*, 2014; Vidales-Basurto *et al.*, 2017). De ésta manera es posible realizar una descripción cuantitativa del oleaje a través de los parámetros estadísticos del valor cuadrático medio y las funciones de auto-correlación, con los que se determina la distribución de energía del mar y la estadística de la elevación del oleaje, respectivamente. Para lograr lo anterior, se requieren de metodologías matemáticas adecuadas para representar las reflexiones especulares de la luz solar registradas por el detector mediante una función de brillo, la cual es responsable de la formación de los patrones de brillo que constituyen la imagen. Empleando esta función es posible obtener una función de auto-correlación de las variaciones de intensidad en la imagen y la función de auto-correlación de las alturas de la superficie marina bajo estudio, de modo que es posible calcular el espectro del oleaje.

En el presente trabajo de tesis, se realiza un estudio teórico y numérico sobre la estadística de las pendientes de superficie marina y las intensidades en la imagen haciendo uso de funciones de brillo para geometrías en 1D y 2D, con el propósito de profundizar más en el método teórico y numérico publicado con anterioridad a partir de varios trabajos de investigación realizados por Álvarez-Borrego y Martín-Atienza (2010), Poom *et al.* (2014) para el caso unidimensional y Martín-Atienza y Álvarez-Borrego (2013) para el caso bidimensional. De tal manera que con el nuevo enfoque realizado a la metodología para 1D se lograron deducir tanto el modelo geométrico del problema físico así como las ecuaciones matemáticas que rigen el caso 2D, con lo que los cálculos numéricos fueron optimizados al implementar programación paralela por lo que la base de datos de los resultados es inmensa. Como trabajo a futuro, se pretende motivar a que se aplique la metodología en fotografías aéreas de la superficie del mar y así proveer alternativas de equipos costosos de monitoreo marítimo como son los sensores de presión.

## 1.1 Antecedentes

A finales del siglo pasado, distintos grupos de investigación comenzaron a medir algunos parámetros ópticos con el objetivo de analizar la superficie marina, donde la irradiancia de la luz solar reflejada sobre la superficie del mar fue el primer parámetro óptico que se logró medir. Duntley (1950) encontró experimentalmente que las pendientes de las olas capilares (olas con longitud de onda y amplitudes de unos pocos milímetros) tienen dos componentes que obedecen una distribución normal y son independientes entre sí: pendiente paralela y ortogonal a la dirección de la propagación de la ola. Luego, Barber (1954) estimó la direccionalidad de las ondas del mar a partir del patrón de difracción de la superficie del mar plasmado en una imagen.

Cox y Munk (1954a, 1954b) utilizaron cámaras sobre un avión para fotografiar el brillo solar en el Océano Pacífico y al realizar un análisis más cuantitativo de éstos patrones de brillo plasmados en las imágenes, obtuvieron una función de densidad de probabilidad (*fdp*) para las pendientes de la superficie marina. Al efectuar la toma de imágenes varias veces para diferentes velocidades del viento, lograron demostrar que la *fdp* de las pendientes de la superficie marina puede describirse como una función Gaussiana y no Gaussiana incluyendo términos de sesgo y curtosis. Los resultados de los estudios anteriores sugieren que la distribución a lo largo de la dirección del viento está sesgada, mostrando mayor probabilidad para las pendientes de sotavento que para las de ceñida. Así mismo, la varianza de la función de densidad de probabilidad de las pendientes es linealmente proporcional a la velocidad del viento, lo que indica que la superficie marina se vuelve más rugosa a medida que la velocidad del viento aumenta.

Los resultados de investigaciones posteriores mostraron que las variaciones de densidad en la película fotográfica están relacionadas con las pendientes de la superficie marina, por lo que intentaron obtener los espectros de energía del oleaje. Sin embargo, los resultados se basaron en una serie de aproximaciones que restringen la aplicación del modelo, debido a que consideraron pendientes muy pequeñas, iluminación uniforme y linealidad en el proceso fotográfico. (Kivelson y Moszkowski, 1966; Stilwell, 1969; Stilwell y Pílon, 1974). Kasevich (1975) concluyó que la luz que llega a la película fotográfica se encuentra explícitamente relacionada con la posición y orientación de la cámara, así como la distribución de la irradiancia en la atmósfera y las pendientes de la superficie del mar. Diversos estudios sobre ésta interacción de la luz solar con la superficie marina prevalecieron, obteniendo resultados un tanto desfavorables o muy poco fiables ya que la mayoría de los modelos propuestos no fueron corroborados con datos experimentales. Álvarez-Borrego y Martínez-García (1995), así como Cureton (2010) han

realizado pruebas experimentales haciendo uso de la metodología presentada en éste trabajo de Tesis, con lo que ha mostrado una trascendencia para analizar la rugosidad de la superficie.

Los sensores de presión son instalados para lograr estudiar una región de la superficie de mar. Debido a la enorme inversión y el procesamiento arduo de los datos, se pretendió simplificar éstos procedimientos utilizando información sobre las propiedades estadísticas de superficies rugosas a partir de imágenes y no fue hasta que el análisis pionero de Álvarez-Borrego (1993a, b; 1995a, b, c) logró resolver la problemática derivando la ecuación que describe el patrón de brillo en una y dos dimensiones. La función de brillo es de gran utilidad para calcular algunas propiedades estadísticas de la superficie marina por medio de fotografías debido a que describe la relación entre las pendientes superficiales y la intensidad de la imagen.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo general**

Análisis matemático y numérico de los patrones de brillo que son generados por la reflexión especular de la luz del sol sobre la superficie marina a un cierto ángulo de incidencia y registrados por un detector localizado a cierta altura para una región oceánica en 1D ó 2D.

### **1.2.2. Objetivos específicos**

- Determinar la relación de la varianza del patrón de brillo con la varianza de las pendientes de la superficie que lo genera, utilizando una función de brillo Rect, Circ y Gaussiana en 1D y 2D.
- Describir el comportamiento de las relaciones para diferentes alturas del detector que toma la imagen del patrón de brillo en 1D y 2D.
- Descripción del comportamiento entre las relaciones para distintas longitudes en el perfil o diferente área.
- Determinar la relación entre la función de auto-correlación del patrón de brillo con la función de auto-correlación de las pendientes de la superficie que lo genera en 1D y 2D.
- Generación de diferentes superficies con estadística gaussiana y no gaussiana. Se aplicará el modelo geométrico perfeccionado para llevar a cabo el proceso de inversión, utilizando funciones de brillo Rect ó Gaussiana (caso 1D).



## Capítulo 2. Marco Teórico

---

Predecir el oleaje requiere conocer algunas características del comportamiento del océano, lo cual es una tarea ardua debido a que los datos obtenidos al efectuar alguna medición y/ó monitoreo del movimiento marítimo son demasiados. Sin embargo, la estadística es la ciencia que permite inferir sobre el comportamiento de algún suceso ó evento que aún no sucede a partir de mediciones anteriores del mismo, por lo que es la herramienta adecuada para aplicar en cualquier estudio sin importar el nivel de dificultad que éste represente. En dicho capítulo se presenta una breve revisión de los fundamentos teóricos usados para la realización de éste trabajo, enfocándonos en los parámetros estadísticos de la varianza y autocorrelación, así como en la función de densidad de probabilidad y algunas definiciones estadísticas básicas que se adaptan al tema de estudio.

### 2.1 Proceso Estocástico

Un proceso estocástico se define como un conjunto de sucesos que están sometidos al azar y que son dependientes de las leyes probabilísticas, de tal forma que son objeto del análisis estadístico. El conjunto de los datos registrados en una serie temporal que representa un registro de oleaje, sismograma, experimento, entre otros, provienen de un proceso estocástico o aleatorio. La naturaleza aleatoria de éstos procesos proviene del hecho de que no se puede conocer el comportamiento a futuro de la serie durante un determinado tiempo de observación (Papoulis, 1981; Brzezniak, 1999).

### 2.2 Variable aleatoria

Una variable aleatoria es aquél valor numérico que se obtiene como resultado al realizar un experimento aleatorio o medición de algún evento de la naturaleza. Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias (Papoulis, 1981; Brzezniak, 1999).

### 2.3 Función de densidad de probabilidad

Debido a que las variables aleatorias se estudian en conjunto para un experimento, suceso o evento, se requiere conocer la distribución de probabilidad, de forma que la estructura probabilística del proceso aleatorio se encuentre definida. Toda variable aleatoria  $X$  tiene asociada una función de densidad de

probabilidad  $p(X = x)$ , donde  $x$  representa los valores de la variable aleatoria. Dicha función de densidad de probabilidad cumple lo siguiente (Papoulis, 1981; Brzezniak, 1999):

$$\begin{aligned} p(x) &\geq 0 \quad \forall x, \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx &= 1, \\ P(L1 \leq x \leq L2) &= \int_{L1}^{L2} p(x) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

La función de densidad de probabilidad normal o Gaussiana, es una función de probabilidad para variables aleatorias continuas de gran aplicación que nos sirve para describir el comportamiento global del proceso y sólo depende de la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$ . La expresión matemática que representa una función de densidad es la siguiente (Papoulis, 1981; Brzezniak, 1999):

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

donde  $\sigma$  es la desviación típica o estándar.  $\mu$  y  $\sigma^2$  se definen en la siguiente sección.

## 2.4 Promedio y Varianza

El valor esperado o promedio mide la tendencia central de los datos mientras que la varianza es una medida de la variabilidad para el conjunto de dichos datos. Ésta medida de la dispersión emplea todos los valores de los datos y se basa en la diferencia entre cada valor y el promedio. El promedio y varianza de una variable aleatoria continua están determinados por (3) y (4), respectivamente (Papoulis, 1981).

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx, \quad (3)$$

$$\sigma^2 = E\left[(x - E[x])^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx. \quad (4)$$

## 2.5 Función de auto-correlación

Es una función que compara dos variables aleatorias ocurridas en tiempos distintos de un mismo proceso para obtener la relación estadística entre ellas, o es una la herramienta matemática que permite conocer

y cuantificar la similitud entre las variables y que proporciona información sobre la evolución del proceso en un instante de tiempo a otro. Se define mediante el valor esperado como (Papoulis, 1981):

$$C = E[x(t_1)x(t_2)] = E[x_1x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2p(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (5)$$

donde la función de densidad de probabilidad conjunta cumple con lo siguiente:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &\geq 0 \quad \forall x_1, x_2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)dx_1dx_2 &= 1, \\ p(a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d) &= \int_a^b \int_c^d p(x_1, x_2)dx_1dx_2. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2.6 Función de densidad de probabilidad conjunta

Para caracterizar completamente un proceso estocástico, es necesario conocer la función de densidad conjunta. La distribución conjunta requiere de dos variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$  así como del coeficiente de correlación  $C$ . Se dice que esas variables son conjuntamente gaussianas si su función de densidad de probabilidad conjunta se expresa por la ecuación (6) (Papoulis, 1981; Brzezniak, 1999).

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-C^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-C^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2C(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}. \quad (7)$$

## 2.7 Procesos estocásticos estacionarios

Para un proceso estocástico cada instante de observación genera una variable aleatoria distinta, de manera que el número de variables aleatorias determinadas es infinito. Cada una de éstas con sus respectivas funciones y estadísticas, por lo que trabajar con tal cantidad de parámetros representa un grado de dificultad enorme. Para poder estimar las características del proceso, se requiere suponer que las variables aleatorias son estables a lo largo del tiempo, es decir, pertenecen a un proceso estocástico estacionario. Para éstos procesos la media o promedio, así como la función de densidad de probabilidad

no depende del tiempo y la auto-correlación depende del desplazamiento  $\tau$  (Papoulis, 1981; Brzezniak, 1999).

Para procesos estocásticos estacionarios, la función de auto-correlación entre dos variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$  se determina por:

$$C(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)p(x(t),x(t+\tau))dx_t dx_{t+\tau}. \quad (8)$$

## Capítulo 3. Metodología

La idea esencial de éste trabajo es que a partir de la imagen del patrón de brillo que es producto de la reflexión especular de los rayos del sol sobre la superficie del mar hacia el detector, se puede inferir sobre la estadística de las alturas y pendientes de la superficie del mar causadas por la rugosidad que ocasiona el viento en el tiempo de observación. En éste capítulo se describe la formación de la imagen del patrón de brillo, así como las funciones de brillo implementadas. Se muestra el nuevo enfoque de la metodología en una dimensión, así como las ecuaciones que la rigen. La implementación del caso 1D para extender y obtener el modelo geométrico, así como las deducciones de las ecuaciones estadísticas bidimensionales.

### 3.1 Geometría 1D

Para lograr estudiar el patrón de brillo de la imagen, se implementó el siguiente modelo geométrico representado en la figura 1. En éste estudio, polarización, pérdidas debidas a la transmisión de los rayos solares a través de la atmósfera y demás parámetros ópticos son ignorados. Además se supone que todas las ondas del mar se mueven a lo largo del eje horizontal por lo que se considera una longitud del perfil de la superficie del mar unidimensional  $\zeta(x)$ . Dicho perfil fue analizado punto a punto hasta alcanzar la longitud del perfil de interés  $i = 1, 2, \dots, N$  espaciados cada  $\Delta x = 2cm$ .

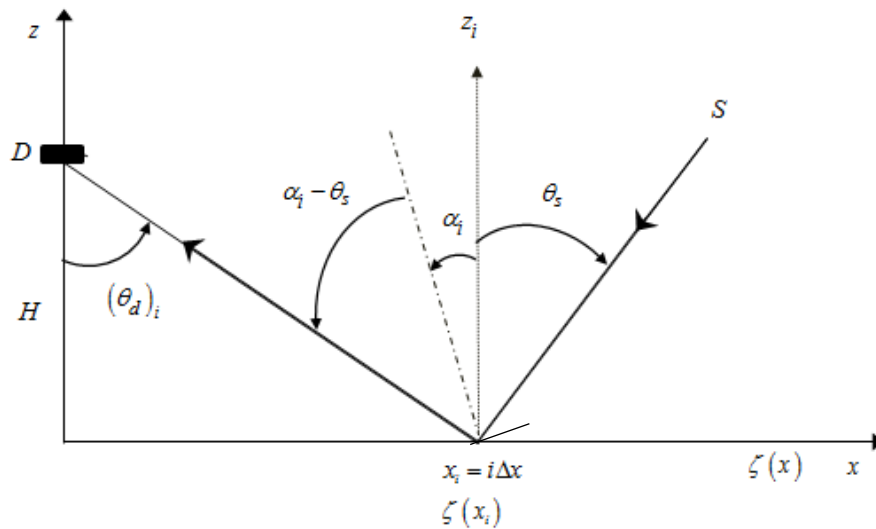
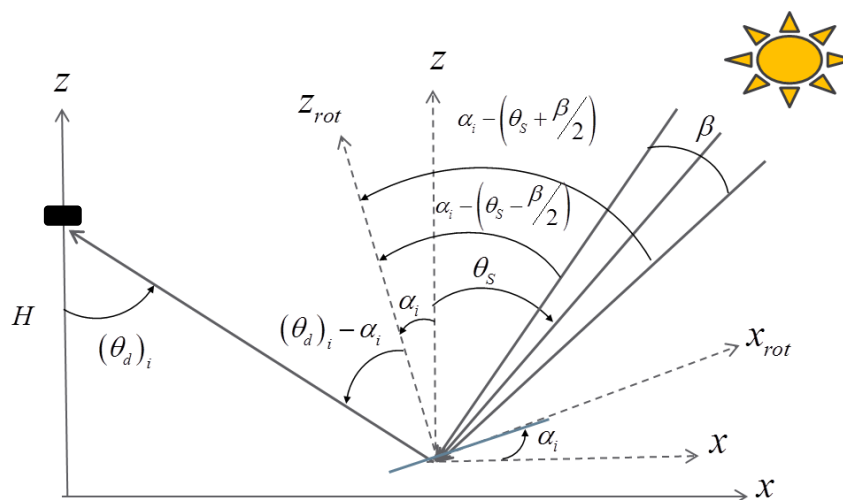


Figura 1. Modelo geométrico unidimensional.

La imagen del patrón de brillo queda registrada por el detector  $D$  situado en el eje vertical a una altura  $H$  de la superficie del mar. En la figura consideramos la reflexión especular de un rayo del Sol  $S$  incidiendo a un ángulo  $\theta_s$  sobre un punto  $x_i = i\Delta x$  del perfil de superficie en estudio. La recta tangente al perfil de superficie en ése punto cumple con la condición para reflexión especular, por lo que el rayo solar será reflejado en un ángulo  $(\theta_d)_i$  hacia el detector. De modo que el ángulo subtendido entre la normal al perfil de superficie promedio y la normal a la recta tangente ( $\alpha_i$ ) y que corresponde al ángulo de inclinación de la recta tangente al perfil de superficie en el punto de estudio, representa el ángulo de la reflexión especular.

### 3.2 Condición para las pendientes de superficie

Un perfil de superficie es la superposición de ondas con diferentes amplitudes y frecuencias. Existe un gran número de pendientes de la superficie marina que se forman por la rugosidad que ocasiona la velocidad del viento sobre dicha superficie. La pendiente es un valor numérico que indica el ángulo de inclinación. Dependiendo del grado de inclinación tendremos sobre la superficie un “espejo” para un determinado rayo de luz solar. Éste rayo de luz puede llegar o no al detector, entonces, nos interesan sólo aquellas pendientes que contribuyen direccionando los rayos hacia el detector, donde se lleva a cabo la formación de la imagen del patrón de brillo. Para lo anterior, se requiere considerar el diámetro aparente de la fuente  $\beta$ , que en nuestro caso es el Sol, por lo que se obtienen las pendientes de superficie marina que contribuyen a ése patrón de brillo.



**Figura 2.** Geometría del problema incluyendo el diámetro aparente del Sol  $S$ .

Partiendo del modelo geométrico del problema unidimensional ilustrado en la figura 1, se incluye el diámetro aparente del Sol  $\beta$ , con lo que se obtiene el rango de ángulos de incidencia para los rayos solares que inciden sobre el punto del perfil de superficie bajo análisis como se muestra en la figura 2. La recta tangente a la superficie en ése punto, se encuentra situada a lo largo del eje rotado  $x_{rot}$  como resultado de rotar el eje  $x$  un ángulo  $\alpha_i$ .

Para que exista reflexión especular se debe cumplir la igualdad entre el ángulo incidente y el ángulo reflejado, por lo que de la figura se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_i - \left(\theta_s - \frac{\beta}{2}\right) &= (\theta_d)_i - \alpha_i, \\ \alpha_i - \left(\theta_s + \frac{\beta}{2}\right) &= (\theta_d)_i - \alpha_i.\end{aligned}\tag{9}$$

Al despejar  $\alpha_i$  en cada ecuación, se obtienen los límites inferior y superior, respectivamente.

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2} - \frac{\beta}{4}, \\ \alpha_i &= \frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2} + \frac{\beta}{4}.\end{aligned}\tag{10}$$

De tal forma que se determinan los ángulos de inclinación de la recta tangente a la superficie en el punto analizado que cumplen con la reflexión especular de los rayos solares incidentes.

$$\frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2} - \frac{\beta}{4} \leq \alpha_i \leq \frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2} + \frac{\beta}{4}.\tag{11}$$

Aplicando tangente a la expresión (ec. 11), tenemos que:

$$\tan\left[\frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2} - \frac{\beta}{4}\right] \leq \tan(\alpha_i) \leq \tan\left[\frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2} + \frac{\beta}{4}\right].\tag{12}$$

Haciendo uso de la siguiente aproximación:

$$\tan\left[\theta \pm \frac{\beta}{4}\right] \approx \tan(\theta) \pm (1 + \tan^2(\theta))\frac{\beta}{4} \quad \forall \quad \frac{\beta}{4} = 1.\tag{13}$$

Se tiene entonces que la ecuación 11 se puede representar como:

$$\tan\left[\frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2} \pm \frac{\beta}{4}\right] \approx \tan\left[\frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2}\right] \pm \left[1 + \tan^2\left(\frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2}\right)\right] \frac{\beta}{4}. \quad (14)$$

Definiendo lo siguiente:

$$M_i = \tan(\alpha_i); M_{0i} = \tan\left[\frac{(\theta_d)_i + \theta_s}{2}\right]. \quad (15)$$

Y finalmente, se obtiene la condición que las pendientes de superficie marina deben cumplir para reflexión especular.

$$M_{0i} - (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4} \leq M_i \leq M_{0i} + (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4}. \quad (16)$$

### 3.3 Función de brillo 1D

El patrón de brillo que consiste de regiones brillantes y oscuras que constituyen la imagen está determinado por la superficie marina y la función de brillo. Dicha función de brillo se puede calcular a partir de la posición y diámetro tanto de la fuente como del detector por lo que a través de ésta función se puede obtener la ubicación espacial y extensión de los brillos. Álvarez-borrego (1993), encontró la función de brillo que cumple con la condición de las pendientes de superficie marina para reflexión especular. Si está dentro del rango será 1 lo cual equivale a un brillo si no, que sea cero (negro). Éstas condiciones nos describen una función cajón o Rect definida por la ecuación 17 y representada por la figura 3.

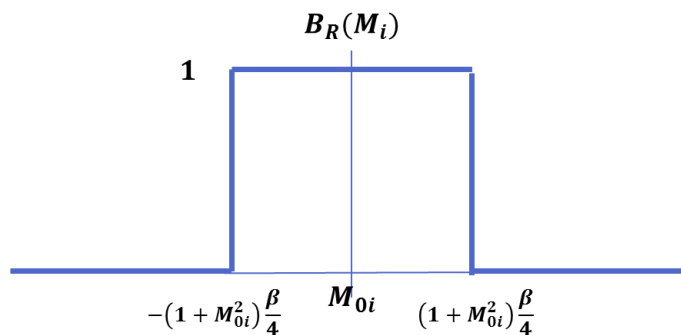


Figura 3. Función de brillo Rect.



$$B_R(M_i) = \text{rect} \left[ \frac{M_i - M_{0i}}{(1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{2}} \right] = \begin{cases} 1, & -(1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4} \leq M_i - M_{0i} \leq (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4} \\ 0, & |M_i - M_{0i}| > (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4} \end{cases} \quad (17)$$

Otra función de brillo utilizada en éste trabajo es la función de brillo Gaussiana, la cual representaría escalas de grises en la imagen del patrón de brillo registrado en el detector, y estará dada por la siguiente expresión (Poom-Medina *et al.* 2014):

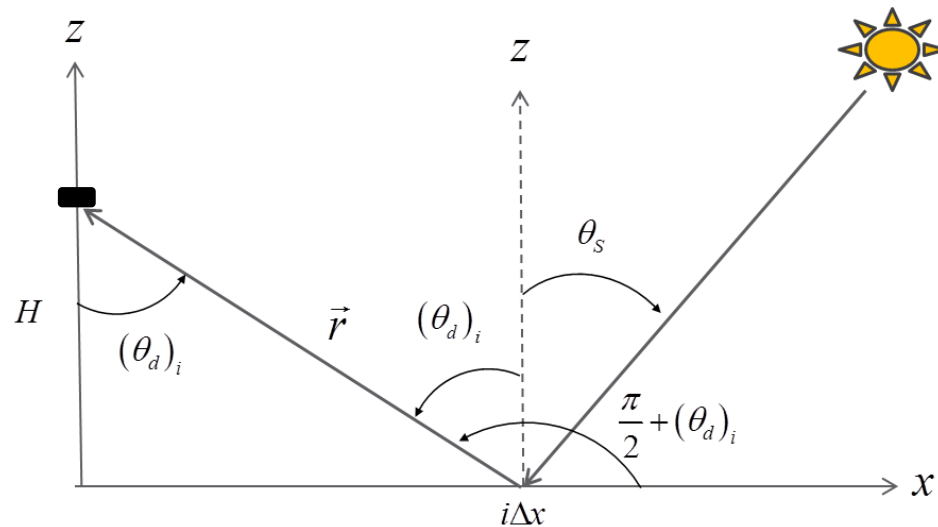
$$B_G(M_i) = \exp \left[ -\frac{(M_i - M_{0i})^2}{a_i^2} \right], \quad (18)$$

$$a_i = \frac{(1 + M_{0i}^2) \beta}{8}.$$

donde  $a_i$  es el ancho de la función gaussiana.

Por tanto, el brillo de cada punto analizado estará modelado por la función de brillo Rect o gaussiana. La intensidad del punto brillante estará determinada por el diámetro de la Rect o el ancho de la gaussiana, donde entre más ancho más intenso ya que existen mayor cantidad de rayos de luz solar que inciden en un rango más amplio de pendientes. El hecho de que en la imagen se observen puntos alejados, se debe a que por alguna razón debida a la geometría existe poca intensidad de la luz solar que se plasma en la imagen. La función de brillo determina el perfil de brillo del punto sobre la superficie marina y éste se refiere a cada punto luminoso que aparece en las imágenes. Sea N puntos, por tanto, N funciones Rect o N funciones gaussianas, dependiendo la función de brillo a utilizar.

### 3.4 Nuevo enfoque a la metodología unidimensional



**Figura 4.** Modelo geométrico unidimensional. Enfoque vectorial.

Partiendo de la figura 1 que representa el modelo geométrico del problema unidimensional, se realizó un nuevo enfoque de tal forma que nos permitió extender nuestra metodología a otra dimensión, de forma que se realizó el modelo geométrico bidimensional y la deducción de las ecuaciones que lo rigen. El nuevo enfoque es de carácter vectorial. Considerando la figura 4, se tiene que  $\vec{r}$  es el vector que se dirige hacia el detector después de ser reflejado especularmente en el punto de análisis  $i\Delta x$ . En la ecuación (19) el vector  $\vec{r}$  está definido por sus proyecciones sobre cada eje, y haciendo uso del teorema de Pitágoras se encuentra su magnitud  $|\vec{r}|$ .

$$\begin{aligned} \vec{r} &= -i\Delta x \hat{i} + H \hat{k}, \\ |\vec{r}| &= \sqrt{(i\Delta x)^2 + H^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Recordando que para situar a todo vector en el espacio, requerimos el cálculo de sus cosenos directores, los cuales están definidos por los ángulos que existen entre el vector  $\vec{r}$  con cada eje del sistema de referencia en sentido contrario a las manecillas del reloj. Los cosenos directores del vector quedan expresados en la ecuación 20.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + (\theta_d)_i\right) = \frac{r_x}{|r|} = -\frac{i\Delta x}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + H^2}}, \quad (20)$$

$$\cos((\theta_d)_i) = \frac{r_z}{|r|} = \frac{H}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + H^2}}.$$

Aplicando la identidad trigonométrica para el coseno de la suma de dos ángulos, se obtiene que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + (\theta_d)_i\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos((\theta_d)_i) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}((\theta_d)_i) = -\operatorname{sen}((\theta_d)_i). \quad (21)$$

Que al sustituir en su correspondiente expresión dada en la ecuación 20, tendremos que:

$$\operatorname{sen}((\theta_d)_i) = \frac{i\Delta x}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + H^2}}. \quad (22)$$

Y al aplicar la definición trigonométrica de la tangente:

$$\tan((\theta_d)_i) = \frac{\operatorname{sen}((\theta_d)_i)}{\cos((\theta_d)_i)} = \frac{i\Delta x}{H}. \quad (23)$$

Se encuentra que el ángulo subtendido por el detector y la normal a cada punto  $i$  de la superficie marina  $(\theta_d)_i$  estará dado por:

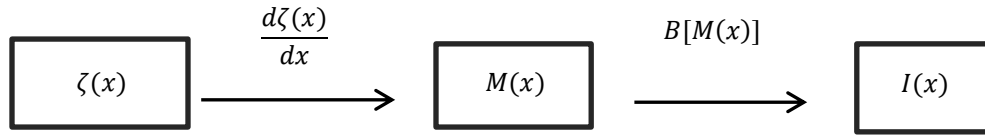
$$(\theta_d)_i = \arctan\left(\frac{i\Delta x}{H}\right). \quad (24)$$

Por lo tanto, se encuentra el mismo resultado que arroja la metodología anterior (Álvarez-Borrego y Martín-Atienza, 2010).

### 3.5 Formación de la imagen

La imagen del patrón de brillo  $I(x)$  se genera en el plano que contiene al detector  $D$  y está determinada por el proceso que describe las pendientes de la superficie marina o la derivada de la superficie  $M(x)$ , y la geometría del sistema a través de una transformación no lineal denominada función de brillo  $B[M(x)]$

(Fig. 5). Suponemos que las alturas de la superficie sólo tienen variaciones en una dirección representadas por  $\zeta(x)$  denominado perfil de superficie, de manera que la representación esquemática de los tres procesos aleatorios se encuentra descrita de la siguiente forma:



**Figura 5.** Diagrama de bloques de los procesos involucrados en la formación de la imagen  $I(x)$ .

Cabe mencionar que en general, el proceso  $I(x)$  no es estacionario debido a que los ángulos de reflexión y detección se encuentran en función de la coordenada  $x$  del sistema de referencia. Sin embargo, supondremos que el plano que contiene al detector se encuentra lejos de la superficie marina y además si restringimos el campo de visión podremos considerar que el proceso  $I(x)$  es estacionario. Por lo que las funciones de auto-correlación de los procesos representados por el perfil de superficie  $\zeta(x)$ , la derivada de la superficie  $M(x)$  y la imagen  $I(x)$  están determinadas por las siguientes expresiones:

$$C_{\zeta}(\tau) = \langle \zeta(x+\tau)\zeta(x) \rangle, \quad (25)$$

$$C_M(\tau) = \langle M(x+\tau)M(x) \rangle, \quad (26)$$

$$C_I(\tau) = \langle I(x+\tau)I(x) \rangle. \quad (27)$$

Los paréntesis  $\langle \rangle$  representan el valor esperado o promedio sobre el ensamble de las posibles realizaciones del proceso aleatorio. Así mismo, cada proceso tiene una varianza denotada por  $\sigma_{\zeta}^2$ ,  $\sigma_M^2$  y  $\sigma_I^2$ , respectivamente. Si consideramos que las alturas y pendientes de la superficie a analizar tienen una distribución gaussiana y donde  $M_1 = M(x_1)$  y  $M_2 = M(x_2)$  son los procesos que corresponden a las pendientes de la superficie para distintas posiciones  $x_1$  y  $x_2$ , y dado que existe una relación directa entre las pendientes de superficie marina y las intensidades en la imagen del patrón de brillo registrado por el detector, la ecuación 27 será reemplazada por la auto-correlación de la imagen descrita en la siguiente expresión:

$$C_I(\tau) = \langle B(M_1)B(M_2) \rangle. \quad (28)$$

Por lo que se requiere obtener la relación de la función de correlación entre las imágenes y la superficie del mar ya que cada proceso estocástico estacionario involucrado en la formación de la imagen del patrón de brillo tiene su varianza correspondiente, la relación de las varianzas entre las imágenes y la superficie del mar fueron también determinadas.

### 3.6 Varianza de las intensidades en la imagen 1D.

La función de brillo  $B(M)$  representa una variable aleatoria continua, con lo cual de la ecuación 4 tenemos que el promedio de la imagen  $\mu_I$  se puede escribir como

$$\mu_I = \langle I(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} B(M) p(M) dM. \quad (29)$$

donde  $p(M)$  es la función de densidad de la probabilidad para las pendientes de la superficie marina.

El modelo geométrico del problema considera una longitud del perfil, donde se analizarán los puntos que lo conforman ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) y los cuales representan un conjunto de variables aleatorias contables. De forma que el promedio de la imagen del patrón de brillo constituido por cada punto queda determinado por la ecuación 31.

$$\mu_I = \langle I(x) \rangle = \frac{1}{N} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} B(M_1) p(M_1) dM_1 + \int_{-\infty}^{\infty} B(M_2) p(M_2) dM_2 + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} B(M_N) p(M_N) dM_N \right], \quad (30)$$

$$\mu_I = \langle I(x) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} B(M_i) p(M_i) dM_i. \quad (31)$$

Lo mismo ocurre para las varianzas de las intensidades en la imagen del patrón de brillo, de modo que:

$$\sigma_{I_R}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [B_R(M) - \mu_{I_R}]^2 p(M) dM. \quad (32)$$

Para nuestro estudio, como se tiene una longitud de perfil analizada punto a punto, la ecuación (32) se transforma en:

$$\sigma_{I_R}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [B_R(M_i) - \mu_{I_R}]^2 p(M_i) dM_i. \quad (33)$$

Donde los límites de integración  $L_{1i}$  y  $L_{2i}$  de la función de brillo rect son las pendientes que cumplen con la condición para reflexión especular (ec. 16). Por tanto, se tiene que:

$$\mu_{I_r} = \langle I(x) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{L_{1i}}^{L_{2i}} B_R(M_i) p(M_i) dM_i, \quad (34)$$

$$\sigma_{I_r}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{L_{1i}}^{L_{2i}} [B_R(M_i) - \mu_{I_r}]^2 p(M_i) dM_i, \quad (35)$$

donde:

$$L_{1i} = M_{0i} - (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4},$$

$$L_{2i} = M_{0i} + (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4}.$$

La función de densidad de probabilidad gaussiana para las pendientes de superficie marina está dada por:

$$p_G(M_i) = \frac{1}{\sigma_M \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{M_i^2}{2\sigma_M^2}\right). \quad (36)$$

Para éste trabajo, además de analizar los parámetros estadísticos considerando estadística gaussiana, también se realizaron los cálculos considerando estadística no gaussiana, por lo que la función de densidad de probabilidad implementada corresponde a la ecuación (37).

$$p_{nG}(M_i) = p_G(M_i) \Omega(M_i) = \frac{1}{\sigma_M \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{M_i^2}{2\sigma_M^2}\right) \Omega(M_i). \quad (37)$$

El término no gaussiano  $\Omega(M_i)$  queda definido de la siguiente forma:

$$\Omega(M_i) = 1 + \frac{1}{6} \lambda_M^{(3)} \left\{ \left( \frac{M_i}{\sigma_M} \right)^3 - 3 \left( \frac{M_i}{\sigma_M} \right) \right\} + \frac{1}{24} \lambda_M^{(4)} \left\{ \left( \frac{M_i}{\sigma_M} \right)^4 - 6 \left( \frac{M_i}{\sigma_M} \right)^2 + 3 \right\}.$$

donde  $\lambda_M^{(3)}$  y  $\lambda_M^{(4)}$  son el sesgo y la curtosis, respectivamente.  $\sigma_M$  es la desviación estándar de las pendientes y  $M_i$  es el valor de la pendiente en el punto  $i$  del perfil de superficie analizado.

### 3.6.1 Estadística Gaussiana

Sustituyendo (17) y (36) en (34), se tiene que el promedio de la imagen usando una función de brillo Rect está definido por:

$$\mu_{I_R} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{M_i}{\sigma_M \sqrt{2}} \right) \right]_{L_{L_i}}^{L_{2i}}. \quad (38)$$

La relación entre la varianza de las intensidades de la imagen del patrón de brillo y la varianza de las pendientes de superficie para una función de brillo Rect que determina ése patrón de brillo, se encuentra resolviendo numéricamente la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_R}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [B_R(M_i) - \mu_{I_R}]^2 p_G(M_i) dM_i, \\ &= \mu_{I_R} (1 - \mu_{I_R}). \end{aligned} \quad (39)$$

El promedio de la imagen usando función de brillo gaussiana se obtiene sustituyendo (18) y (36) en (34), y queda determinado por:

$$\mu_{I_G} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left[ \chi \exp(\delta) \operatorname{erf}(\varepsilon M_i + \eta) \right]_{L_{L_i}}^{L_{2i}}, \quad (40)$$

donde:

$$\chi = \frac{a_i}{\sqrt{2\sigma_M^2 + a_i^2}}; \quad \delta = \frac{B^2}{A} - C; \quad \varepsilon = \sqrt{A}; \quad \eta = \frac{B}{\varepsilon}; \quad A = \frac{2\sigma_M^2 + a_i^2}{2\sigma_M^2 a_i^2}; \quad B = -\frac{M_{0i}}{a_i^2}; \quad C = -BM_{0i}.$$

Mientras que la varianza de las intensidades de la imagen usando función de brillo gaussiana, se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_G}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [B_G(M_i) - \mu_{I_G}]^2 p_G(M_i) dM_i, \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \int_{L_{L_i}}^{L_{2i}} [B_G(M_i)]^2 p_G(M_i) dM_i \right] - \mu_{I_G}^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Para resolver la integral de la ecuación anterior, se realiza el mismo procedimiento que para su promedio correspondiente (ec. 40), donde los términos son los mismos, con excepción de:

$$A = \frac{4\sigma_M^2 + a_i^2}{2\sigma_M^2 a_i^2}; \quad B = -\frac{2M_{0i}}{a_i^2}.$$

### 3.6.2 Estadística no Gaussiana

De (17) y (37) en (34), se encuentra la expresión para el promedio de la imagen considerando estadística no Gaussiana y función de brillo Rect. Dicha expresión se representa como sigue.

$$\mu_{I_R} = \nu \sum_{i=1}^N \left\{ \chi \operatorname{erf}(\varpi(M_i)) - \Upsilon(M_i) \exp(\mathcal{G}(M_i)) \right\} \Big|_{L_{i1}}^{L_{2i}}, \quad (42)$$

donde

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{8\sqrt{2\pi}N\sigma_M\varepsilon A^2}; & \chi &= \sqrt{\pi}(4A^2P + 2AR + 3T); & \varpi(M_i) &= \varepsilon M_i; & \Upsilon(M_i) &= \delta M_i^3 + \eta M_i^2 + oM_i + \kappa; & \mathcal{G}(M_i) &= -AM_i^2, \\ A &= \frac{1}{2\sigma_M^2}; & \varepsilon &= \sqrt{A}; & P &= 1 + \frac{1}{8}\lambda_M^{(4)}; & Q &= -\frac{\lambda_M^{(3)}}{2\sigma_M}; & R &= -\frac{\lambda_M^{(4)}}{4\sigma_M^2}; & S &= \frac{\lambda_M^{(3)}}{6\sigma_M^3}; & T &= \frac{\lambda_M^{(4)}}{24\sigma_M^4}; & \delta &= 4TA\varepsilon; & \eta &= 4SA\varepsilon, \\ o &= 2\varepsilon(2AR + 3T); & \kappa &= 4\varepsilon(AQ + S). \end{aligned}$$

Mientras que el promedio de la imagen considerando función de brillo Gaussiana está dado por:

$$\mu_{I_G} = \nu \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon A^4} \left\{ \chi \operatorname{erf}(h(M_i)) \exp(\delta) - Y(M_i) \exp(U(M_i)) \right\} \Big|_{L_{i1}}^{L_{2i}}. \quad (43)$$

con los términos dados por:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{8\sqrt{2\pi}\sigma_M N}; & A &= \frac{2\sigma_M^2 + a_i^2}{2\sigma_M^2 a_i^2}; & B &= -\frac{M_{0i}}{a_i^2}; & C &= -BM_{0i}; & P &= 1 + \frac{1}{8}\lambda_M^{(4)}; & \delta &= \frac{B^2}{A} - C; & Y(M_i) &= kM_i^3 + lM_i^2 + mM_i + n, \\ \chi &= \sqrt{\pi} \left[ 4PA^4 + (2R - 4BQ)A^3 + (4RB^2 - 6BS + 3T)A^2 - 4A(BS - 3T)B^2 + 4TB^4 \right]; & U(M_i) &= -(AM_i^2 + 2BM_i + C); & h(M_i) &= \varepsilon M_i + \eta, \\ k &= 4\varepsilon TA^3; & \varepsilon &= \sqrt{A}; & \eta &= \frac{B}{\varepsilon}; & l &= 4A^2\varepsilon(AS - BT); & n &= 2\varepsilon \left[ 2A^2(AQ - BR + S) - ABS(2B - T) - 2TB^3 \right], \\ m &= 2A\varepsilon \left[ 2A(AR - BS) + T(3A + 2B^2) \right]; & Q &= -\frac{\lambda_M^{(3)}}{2\sigma_M}; & R &= -\frac{\lambda_M^{(4)}}{4\sigma_M^2}; & S &= \frac{\lambda_M^{(3)}}{6\sigma_M^3}; & T &= \frac{\lambda_M^{(4)}}{24\sigma_M^4}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (42) y (43) en (39) y (41), respectivamente, considerando una función de densidad de probabilidad no gaussiana (ec. 37), las varianzas de las intensidades en la imagen para ambas funciones de brillo con una función de densidad de probabilidad no gaussiana son obtenidas.

$$\begin{aligned} \sigma_{I_R}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \left[ B_R(M_i) - \mu_{I_R} \right]^2 P_{nG}(M_i) dM_i, \\ &= \mu_{I_R} (1 - \mu_{I_R}), \end{aligned} \quad (44)$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{I_G}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [B_G(M_i) - \mu_{I_G}]^2 p_{nG}(M_i) dM_i, \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \int_{L_{i1}}^{L_{i2}} [B_G(M_i)]^2 p_{nG}(M_i) dM_i \right] - \mu_{I_G}^2.
\end{aligned} \tag{45}$$

Similarmente que para la estadística gaussiana, la varianza de las intensidades usando función de brillo gaussiana, se resuelve de la misma forma que para (43) con excepción de los siguientes términos:

$$A = \frac{4\sigma_M^2 + a_i^2}{2\sigma_M^2 a_i^2}; \quad B = -\frac{2M_{oi}}{a_i^2}.$$

### 3.7 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 1D

Debido a que las funciones de auto-correlación requieren comparar dos variables aleatorias continuas, requerimos de una función de densidad de probabilidad conjunta. De acuerdo a la naturaleza de  $B(M_1)$  y  $B(M_2)$ , las cuales tienen el carácter de ser dos variables aleatorias continuas, al aplicar (28) en (8) se tiene que las funciones de auto-correlación estarán dadas por la ecuación 47.

$$\begin{aligned}
\sigma_I^2 C_I(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(M_1) B(M_2) p(M_1, M_2) dM_1 dM_2, \\
\sigma_I^2 C_I(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(M_1) B(M_2)}{2\pi\sigma_M^2 \sqrt{1-C_M^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{M_1^2 + M_2^2 - 2C_M(\tau) M_1 M_2}{2\sigma_M^2 [1-C_M^2(\tau)]} \right\} dM_1 dM_2,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$(47)$$

donde  $p(M_1, M_2)$  es la función de densidad gaussiana conjunta.

Al resolver la ecuación 47 se obtiene la relación entre los valores que adquieren las funciones de correlación  $C_I(\tau)$  y  $C_M(\tau)$ . Para cada par de puntos  $i, j$  sobre el perfil de superficie a lo largo del eje horizontal, las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen del patrón de brillo estarán expresadas de la siguiente manera:

$$\sigma_I^2 C_I(\tau) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \sum_{i=1}^N \int_{L_{1i}}^{L_{2i}} B(M_{1i}) B(M_{2j}) p(M_{1i}, M_{2j}) dM_{1i} dM_{2j}. \tag{48}$$

Los límites de integración para la función de brillo de cada punto donde ocurre la reflexión especular, están determinados como sigue:

$$\begin{aligned} L_{1i} &= M_{0i} - (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2i} &= M_{0i} + (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4}; & M_{0i} &= \tan\left(\frac{\theta_s + (\theta_d)_i}{2}\right), \\ L_{1j} &= M_{0j} - (1 + M_{0j}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2j} &= M_{0j} + (1 + M_{0j}^2) \frac{\beta}{4}; & M_{0j} &= \tan\left(\frac{\theta_s + (\theta_d)_j}{2}\right). \end{aligned}$$

Donde las funciones de densidad de probabilidad Gaussianas conjuntas para estadística Gaussiana y no Gaussiana se obtienen mediante el cálculo de (49) y (50), respectivamente.

$$p_G(M_{1i}, M_{2j}) = \frac{1}{2\pi\sigma_M^2 \sqrt{1 - C_M^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{M_{1i}^2 + M_{2j}^2 - 2C_M(\tau)M_{1i}M_{2j}}{2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]}\right\}, \quad (49)$$

$$p_{nG}(M_{1i}, M_{2j}) = \frac{1}{2\pi\sigma_M^2 \sqrt{1 - C_M^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{M_{1i}^2 + M_{2j}^2 - 2C_M(\tau)M_{1i}M_{2j}}{2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]}\right\} \Omega(M_{1i}, M_{2j}). \quad (50)$$

El término no gaussiano tiene la siguiente estructura

$$\Omega(M_{1i}, M_{2j}) = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \begin{aligned} &\lambda_M^{(30)} \left[ \left(\frac{M_{1i}}{\sigma_M}\right)^3 - 3\sigma_M^2 \left(\frac{M_{1i}}{\sigma_M}\right) \right] + 3\lambda_M^{(21)} \left[ \left(\frac{M_{1i}}{\sigma_M}\right)^2 \left(\frac{M_{2j}}{\sigma_M}\right) - \sigma_M^2 \left(\frac{M_{2j}}{\sigma_M}\right) + 2\sigma_M^2 C_M(\tau) \left(\frac{M_{1i}}{\sigma_M}\right) \right] \\ &+ 3\lambda_M^{(12)} \left[ \left(\frac{M_{1i}}{\sigma_M}\right) \left(\frac{M_{2j}}{\sigma_M}\right)^2 - \sigma_M^2 \left(\frac{M_{1i}}{\sigma_M}\right) + 2\sigma_M^2 C_M(\tau) \left(\frac{M_{2j}}{\sigma_M}\right) \right] + \lambda_M^{(03)} \left[ \left(\frac{M_{2j}}{\sigma_M}\right)^3 - 3\sigma_M^2 \left(\frac{M_{2j}}{\sigma_M}\right) \right] \end{aligned} \right\}.$$

### 3.7.1 Estadística Gaussiana

Las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen considerando función de brillo Rect y función de densidad de probabilidad gaussiana conjunta para las pendientes de la superficie marina dada en (51), se obtuvo usando (17) y (49) en (48).

$$\sigma_{I_R}^2 C_{I_R}(\tau) = \nu \sum_{j=1}^N \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \left\{ \sum_{i=1}^N \operatorname{erf} \left[ D(M_{1i}) \right]_{L_{1i}}^{L_{2i}} \right\} \exp(\delta) dM_{2j}. \quad (51)$$

Los términos de (51) están dados por las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_M N^2}; & D(M_{li}) &= \varepsilon [M_{li} - C_M(\tau)M_{2j}]; & \delta &= \frac{B^2}{A} - C = -\frac{M_{2j}^2}{2\sigma_M^2}, \\ A &= \frac{1}{2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]}; & B &= -AC_M(\tau)M_{2j}; & C &= AM_{2j}^2; & \varepsilon &= \sqrt{A}. \end{aligned}$$

Para función de brillo gaussiana, la relación entre las funciones de auto-correlación entre las intensidades de la imagen y las pendientes de superficie está determinada por:

$$\sigma_{I_G}^2 C_{I_G}(\tau) = \nu \sum_{j=1}^N \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \sum_{i=1}^N 1_i \left\{ \exp(\delta) \operatorname{erf} [H(M_{li})]_{L_{li}}^{L_{2i}} \right\} dM_{2j}, \quad (52)$$

donde

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_M N^2}; & 1_i &= \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + 2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]}}; & \delta &= \frac{B^2}{A} - C; & \eta &= \frac{B}{\varepsilon}; & H(M_{li}) &= \varepsilon M_{li} + \eta; & \varepsilon &= \sqrt{A}, \\ A &= \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]}; & B &= -\left( \frac{M_{0i}^2}{a_i^2} + \frac{C_M(\tau)M_{2j}}{2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]} \right); & C &= \left( \frac{1}{a_j^2} + \frac{1}{2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]} \right) M_{2j}^2 - \frac{2M_{0j}M_{2j}}{a_j^2} + \frac{M_{0i}^2}{a_i^2} + \frac{M_{0j}^2}{a_j^2}. \end{aligned}$$

### 3.7.2 Estadística no Gaussiana

Al sustituir (17) y (50) en (48), obtenemos las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen para función de brillo Rect en función de las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas. Dicha relación se muestra en la ecuación (53).

$$\sigma_{I_R}^2 C_{I_R}(\tau) = \nu \sum_{j=1}^N \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \sum_{i=1}^N \left\{ \chi \exp(\delta) \operatorname{erf} [\varpi(M_{li})] - \Upsilon(M_{li}) \exp[\vartheta(M_{li})] \right\}_{L_{li}}^{L_{2i}} dM_{2j}, \quad (53)$$

donde los parámetros están determinados por las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\sigma_M N^2 A^3}; & \chi &= \sqrt{\pi} [(2AF - 2BS + Q)A^2 + AB(2BQ - 3P) - 2PB^3]; & \delta &= \frac{B^2}{A} - C; & \varpi(M_{li}) &= \varepsilon M_{li} + \eta, \\ \Upsilon(M_{li}) &= \kappa M_{li}^2 + \zeta M_{li} + \gamma; & \vartheta(M_{li}) &= -(AM_{li}^2 + 2BM_{li} + C); & A &= \frac{1}{2\sigma_M^2 (1 - C_M^2(\tau))}; & B &= -AC_M(\tau)M_{2j}; & C &= AM_{2j}^2, \\ \varepsilon &= \sqrt{A}; & \eta &= \frac{B}{\varepsilon}; & \kappa &= 2A^2 \varepsilon P; & \zeta &= 2A\varepsilon [AQ - BP]; & \gamma &= 2\varepsilon [A(P - BQ + AS) + PB^2]; & P &= \frac{\lambda_M^{(30)}}{6\sigma_M^3}; & Q &= \frac{\lambda_M^{(21)} M_{2j}}{2\sigma_M^3}, \\ F &= 1 + \frac{1}{2} \left( 2\lambda_M^{(12)} C_M(\tau) - \lambda_M^{(21)} - \lambda_M^{(03)} + \lambda_M^{(03)} \frac{M_{2j}^2}{3\sigma_M^4} \right) \sigma_M M_{2j}; & S &= \frac{1}{2} \left( 2\lambda_M^{(21)} C_M(\tau) - \lambda_M^{(12)} - \lambda_M^{(30)} + \lambda_M^{(12)} \frac{M_{2j}^2}{\sigma_M^4} \right) \sigma_M. \end{aligned}$$

Para una función de brillo gaussiana descrita en (18) y una función de densidad de probabilidad no Gaussiana dada en (50), las funciones de auto-correlación de las intensidades definidas en (48) quedan expresadas por la siguiente ecuación:

$$\sigma_{I_G}^2 C_{I_G}(\tau) = \nu \sum_{j=1}^N \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{A^3} \left\{ \chi \exp(\delta) \operatorname{erf}[\varpi(M_{1i})] - \Upsilon(M_{1i}) \exp[\mathcal{G}(M_{1i})] \right\}_{L_{1i}}^{L_{2i}} dM_{2j}. \quad (54)$$

Los parámetros son los mismos que para las funciones de auto-correlación usando función de brillo Rect descritas en la expresión matemática (ec. 53), con excepción de los siguientes términos:

$$\nu = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\sigma_M N^2}; \quad 1_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + 2\sigma_M^2 [1 - C_M^2(\tau)]}}; \quad A = \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{2\sigma_M^2 (1 - C_M^2(\tau))}; \quad B = -\left( \frac{M_{0i}^2}{a_i^2} + \frac{C_M(\tau) M_{2j}}{2\sigma_M^2 (1 - C_M^2(\tau))} \right),$$

$$C = \left( \frac{1}{a_j^2} + \frac{1}{2\sigma_M^2 (1 - C_M^2(\tau))} \right) M_{2j}^2 - \frac{2M_{0j}}{a_j^2} M_{2j} + \frac{M_{0i}^2}{a_i^2} + \frac{M_{0j}^2}{a_j^2}.$$

### 3.8 Proceso inverso 1D

Se pretende realizar análisis estadístico a las imágenes reales de la superficie marina donde se observen patrones de brillos para obtener la descripción cuantitativa del oleaje en una determinada región. La imagen debe contener suficientes brillos evitando la saturación de los mismos por lo que en cada imagen se debe apreciar el texturizado de la superficie marina bajo estudio.

Para garantizar la confiabilidad de nuestro estudio se compararon las curvas de las funciones de correlación de la superficie marina teórica, numérica y modelada. La última se refiere a la función de correlación de la superficie marina obtenida a partir de la ecuación que relaciona la función de auto-correlación del perfil de superficie  $C_\zeta(\tau)$  con su derivada  $C_M(\tau)$  y está dada por la ecuación (55) (Papoulis, 1981), donde se hace uso de las curvas obtenidas al resolver numéricamente las ecuaciones unidimensionales de las secciones 3.6 y 3.7 para las varianzas y funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen con respecto a las varianzas y funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie marina, respectivamente. Para lograr lo anterior, las curvas resultantes sirvieron para realizar el proceso inverso unidimensional, seleccionando aquellas geometrías del problema en las que las curvas contengan mayor gradiente para garantizar un proceso inverso exitoso. A partir de éste momento, se realiza la integración dos veces para obtener la curva que describe el modelo de los datos, es decir,

obtendremos la auto-correlación de las superficies, posteriormente, se aplica la transformada inversa de Fourier para calcular el espectro en una dimensión.

$$C_M(\tau) = -\frac{d^2 C_z(\tau)}{d\tau^2}. \quad (55)$$

Se generaron varias superficies marinas numéricas las cuales se asume tengan espectros Rect o Gaussiana rigiéndose por una función de densidad de probabilidad normal o Gaussiana, así como una función de densidad de probabilidad no Gaussiana. Con lo anterior, se logran estudiar los brillos generados por las funciones de brillo al realizar la simulación numérica del oleaje, de modo que se calculan las funciones de correlación de las superficies numéricas que comparando con las funciones de correlación obtenidas (modelo y teórico), se garantiza la confiabilidad de la simulación generadora de superficies marinas para distintos ángulos de incidencia de los rayos del sol.

Para los espectros gaussiano y Rect teóricos se implementaron las ecuaciones (56) y (57), respectivamente:

$$S_G(k_x) = l\sqrt{\pi}\sigma_z^2 \exp\left(-\frac{k_x^2 l^2}{4}\right), \quad (56)$$

$$S_R(k_x) = l\sigma_z^2 \text{rect}(k_x l), \quad (57)$$

donde  $k_x, l, \sigma_z$  son el número de onda, la longitud de correlación y la desviación estándar en las alturas, respectivamente. Las auto-correlaciones correspondientes se representan con las siguientes ecuaciones.

$$C_G(\tau) = \sigma_z^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{l^2}\right), \quad (58)$$

$$C_R(\tau) = \sigma_z^2 \text{sinc}\left(\frac{\tau}{l}\right). \quad (59)$$

### 3.9 Geometría 2D

El modelo geométrico bidimensional se encuentra a partir del nuevo enfoque para la metodología unidimensional como se hace mención con anterioridad. Similarmente, los procesos de pérdida por transmisión a través de la atmósfera, así como polarización y demás efectos ópticos para los rayos solares incidentes sobre la superficie marina han sido ignorados, considerando únicamente la reflexión especular. Para el caso bidimensional, consideramos que las ondas marinas se mueven a lo largo del plano  $xy$ , por lo

tanto el perfil de análisis  $\zeta(x, y)$  tiene un área delimitada por  $4N^2cm^2$ . Cada punto bajo estudio del perfil se encuentra situado en el par coordenado  $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$ , donde  $\Delta x = \Delta y = 2cm$  y  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . El detector se encuentra en el eje perpendicular al plano del perfil marino a una altura  $H$  sobre la superficie marina (fig. 6).

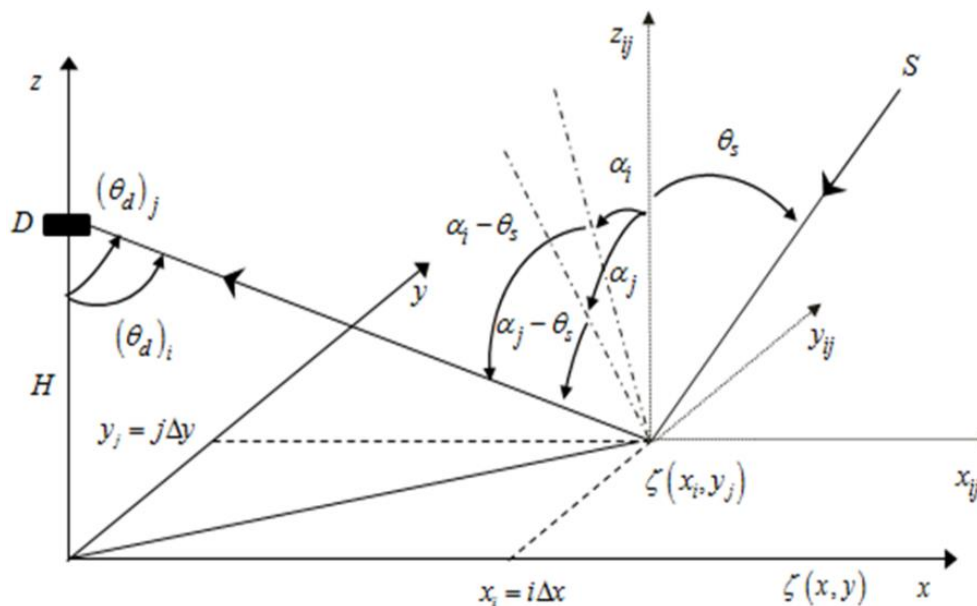
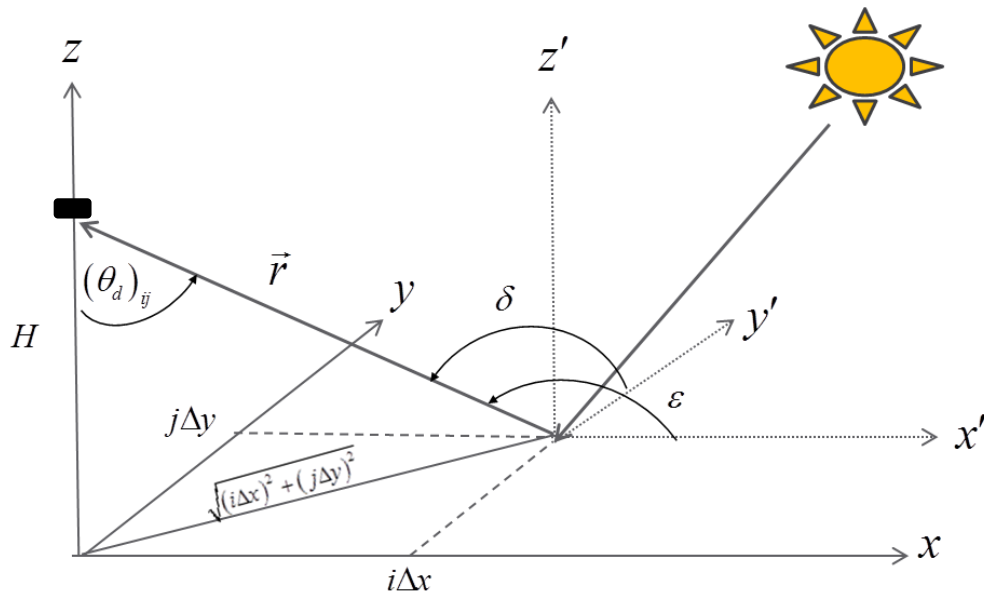


Figura 6. Modelo geométrico bidimensional.

El plano tangente al perfil de superficie en el punto  $(i\Delta x, j\Delta y)$  cumple con la condición para reflexión especular, por lo que los rayos solares serán reflejados hacia el detector en un ángulo  $(\theta_d)_i$  y  $(\theta_d)_j$  sobre el plano  $xz$  y  $yz$ , respectivamente. De modo que el ángulo subtendido entre la normal al perfil de superficie promedio y la normal a la componente en eje  $x$  del plano tangente ( $\alpha_i$ ), así como el ángulo subtendido correspondiente entre la normal al perfil y la componente en eje  $y$  del plano tangente ( $\alpha_j$ ) corresponden a los ángulos de inclinación de las rectas tangentes en el punto  $i\Delta x$  y  $j\Delta y$  al plano del perfil de superficie, respectivamente. Dichos ángulos subtendidos representan los ángulos donde ocurre la reflexión especular. El Sol tiene un diámetro aparente sobre la superficie del mar denotado por  $\beta$ , por lo que es de suma importancia conocer el intervalo de pendientes de superficie alrededor del punto de estudio donde se lleva a cabo la reflexión especular de los distintos rayos de luz solar. En la siguiente sección se obtiene la condición de reflexión especular para las pendientes de superficie marina.



**Figura 7.** Modelo geométrico bidimensional. Enfoque vectorial.

La figura 6 muestra la configuración del modelo geométrico. La imagen del patrón de brillo se forma en el detector gracias a la reflexión especular de los rayos solares sobre la superficie marina. Las variables del ángulo de incidencia  $\theta_s$ , la altura del detector  $H$  son valores que se conocen, y debido a que el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo reflejado para que se produzca la imagen en el detector, requerimos conocer el ángulo de reflexión hacia el detector  $(\theta_d)_{ij}$ .

Sea el vector  $\vec{r}$  situado en un sistema de coordenadas tridimensional  $xyz$  y reflejado en el punto de interés  $(i\Delta x, j\Delta y)$  hacia el detector a una altura  $H$  como se muestra en la figura, de tal manera que se tiene lo siguiente (Fig. 7):

$$\vec{r} = -i\Delta x\hat{i} - j\Delta y\hat{j} + H\hat{k}. \quad (60)$$

Al efectuar la proyección del vector sobre el plano de la superficie marina  $xy$ , y haciendo uso del teorema de Pitágoras, se tiene que su magnitud está dada por:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2 + H^2}. \quad (61)$$

Por otra parte, los cosenos directores de cualquier vector nos definen su posición en el espacio, de tal forma que haciendo uso de éstos podemos determinar completamente cualquier vector, entonces, los cosenos directores del vector en cuestión están definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
\cos(\varepsilon) &= \frac{r_x}{|r|} = -\frac{i\Delta x}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2 + H^2}}, \\
\cos(\delta) &= \frac{r_y}{|r|} = -\frac{j\Delta y}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2 + H^2}}, \\
\cos((\theta_d)_{ij}) &= \frac{r_z}{|r|} = \frac{H}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2 + H^2}},
\end{aligned} \tag{62}$$

donde  $\varepsilon, \delta$  y  $(\theta_d)_{ij}$  son los ángulos entre el vector y los eje  $x, y$  y  $z$ , respectivamente, y los cuales se definen como se muestra en la ecuación (63). Al hacer uso de la identidad trigonométrica para el coseno de la suma de dos ángulos, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = \frac{\pi}{2} + (\theta_d)_{ij} \therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} + (\theta_d)_{ij}\right) &= -\text{sen}\left((\theta_d)_{ij}\right) = -\frac{i\Delta x}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2 + H^2}}, \\
\delta = \frac{\pi}{2} + (\theta_d)_{ij} \therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} + (\theta_d)_{ij}\right) &= -\text{sen}\left((\theta_d)_{ij}\right) = -\frac{j\Delta y}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2 + H^2}}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Ya que el plano tangente a la superficie marina en el punto  $(i\Delta x, j\Delta y)$ , está determinado por dos componentes, esto es, una recta tangente a la superficie en el punto  $i\Delta x$  y  $j\Delta y$  sobre el eje  $x$  y  $y$ , respectivamente, tendremos que:

$$\left[(\theta_d)_{ij}\right]_x = (\theta_d)_i; \quad \left[(\theta_d)_{ij}\right]_y = (\theta_d)_j. \tag{64}$$

Además, de la figura 7 se tiene que:

$$\text{sen}\left((\theta_d)_{ij}\right) = \frac{\sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2}}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2 + H^2}}. \tag{65}$$

Por lo tanto, la igualdad con (65) de las expresiones correspondientes (ec. 63) se cumple cuando  $j\Delta y = 0$  y  $i\Delta x = 0$ , respectivamente. De tal forma que tenemos las siguientes relaciones:



$$\begin{aligned} \text{sen}[(\theta_d)_{ij}]_x &= \frac{i\Delta x}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + H^2}}; & \cos[(\theta_d)_{ij}]_x &= \frac{H}{\sqrt{(i\Delta x)^2 + H^2}}, \\ \text{sen}[(\theta_d)_{ij}]_y &= \frac{j\Delta y}{\sqrt{(j\Delta y)^2 + H^2}}; & \cos[(\theta_d)_{ij}]_y &= \frac{H}{\sqrt{(j\Delta y)^2 + H^2}}. \end{aligned} \quad (66)$$

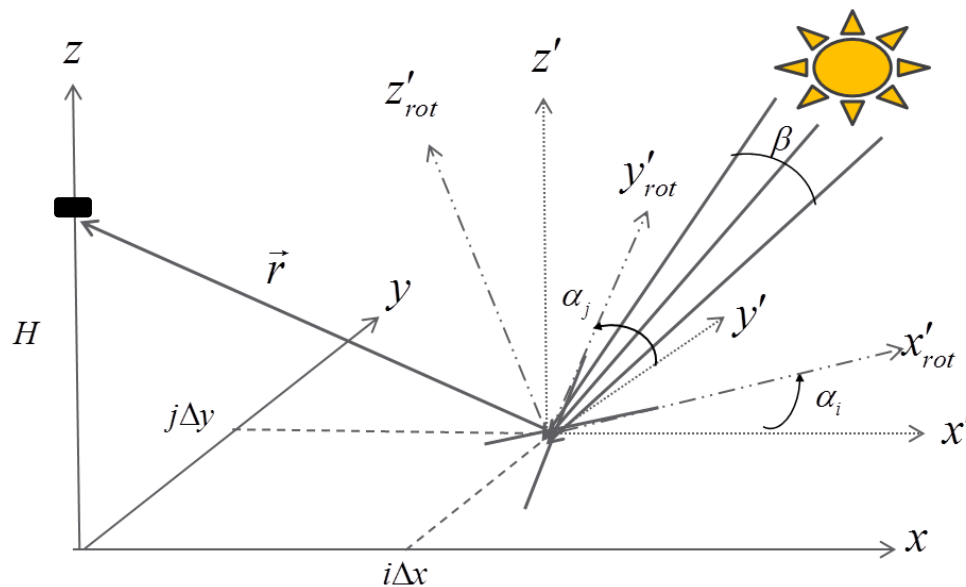
Al aplicar la definición de tangente en las ecuaciones anteriores, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_d)_i &= \frac{\text{sen}(\theta_d)_i}{\cos(\theta_d)_i} = \frac{i\Delta x}{H}, \\ \tan(\theta_d)_j &= \frac{\text{sen}(\theta_d)_j}{\cos(\theta_d)_j} = \frac{j\Delta y}{H}. \end{aligned} \quad (67)$$

Finalmente, de (67) se definen los ángulos de reflexión  $(\theta_d)_i$  y  $(\theta_d)_j$ , respectivamente.

$$(\theta_d)_i = \arctan\left(\frac{i\Delta x}{H}\right); \quad (\theta_d)_j = \arctan\left(\frac{j\Delta y}{H}\right). \quad (68)$$

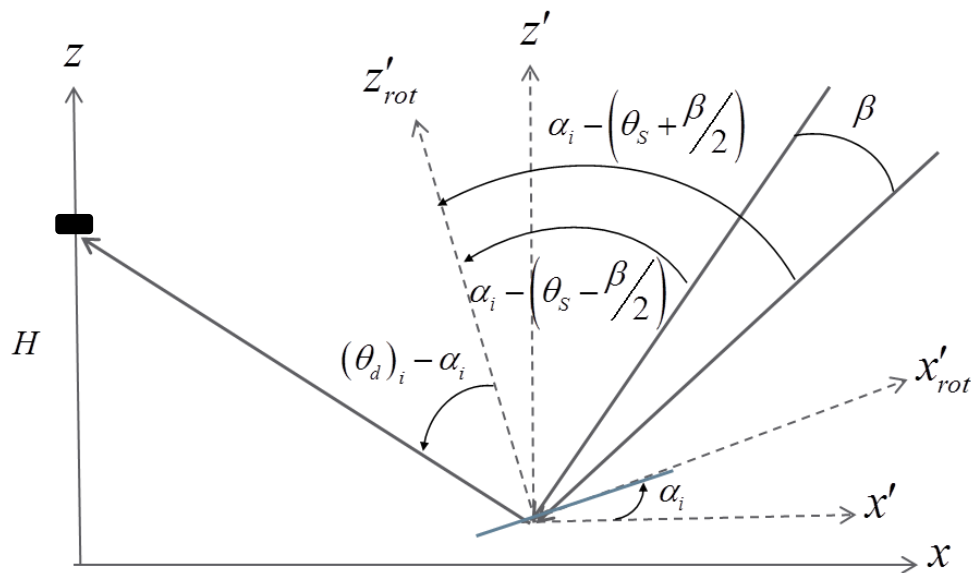
### 3.10 Condición para las pendientes de superficie



**Figura 8.** Modelo geométrico bidimensional considerando el diámetro aparente del Sol.

Como se hizo mención con anterioridad, el plano tangente a la superficie en el punto de observación, se define a través de la recta tangente que se encuentra a lo largo del eje  $x'_{rot}$  y la recta tangente sobre el eje  $y'_{rot}$  como se muestra en la figura 8. De modo que cada recta tangente a la superficie en el punto correspondiente ( $i\Delta x$  o  $j\Delta y$  según sea el caso) tendrá un ángulo de inclinación  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  respecto a su horizontal  $x'$  y  $y'$ , respectivamente. Por otra parte, se considera el diámetro aparente del Sol  $\beta$ , con el objetivo de determinar el rango de pendientes que cumplen con la condición de reflexión especular para que los rayos solares sean detectados a una altura  $H$  sobre la superficie marina. Para lograr lo anterior, se requiere realizar el esquema geométrico para cada recta tangente que compone al plano tangente a la superficie en el punto de estudio.

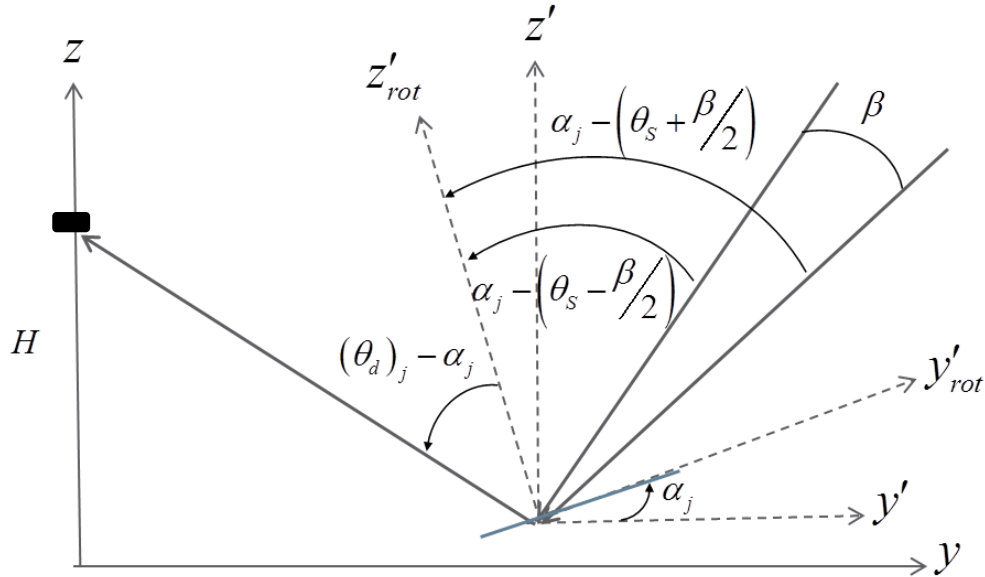
Para la recta tangente que se encuentra a lo largo del eje  $x'_{rot}$  se tiene la geometría mostrada en la figura 9.



**Figura 9.** Ángulos de incidencia y reflexión sobre la recta tangente en el punto de estudio. Vista desde el plano xz.

El sistema es idéntico al caso unidimensional, de tal forma que el intervalo de pendientes que cumplen con la condición para reflexión especular se obtuvo con anterioridad en la sección 3.2 y se determina por la ecuación (16).

Similarmente para la recta tangente a la superficie localizada a lo largo del eje  $y'_{rot}$  tenemos lo siguiente:



**Figura 10.** Ángulos de incidencia y reflexión sobre la recta tangente en el punto de estudio. Vista desde el plano yz.

De forma análoga, se obtiene la condición para reflexión especular y la cual está dada por la siguiente ecuación:

$$M_{0j} - (1 + M_{0j}^2) \frac{\beta}{4} \leq M_j \leq M_{0j} + (1 + M_{0j}^2) \frac{\beta}{4}, \quad (69)$$

donde

$$M_j = \tan(\alpha_j); \quad M_{0j} = \tan\left[\frac{(\theta_d)_j + \theta_s}{2}\right].$$

### 3.11 Función de brillo 2D

Álvarez-borrego (1993), encontró la función de brillo que cumple con la condición de las pendientes de superficie marina para reflexión especular en dos dimensiones (función Circ). Sin embargo, en nuestro estudio haremos uso de la Rect bidimensional definida en la siguiente expresión:

$$B_R(M_i, M_j) = \text{Rect} \left[ \frac{M_i - M_{0i}}{\left(1 + M_{0i}^2\right) \frac{\beta}{2}}, \frac{M_j - M_{0j}}{\left(1 + M_{0j}^2\right) \frac{\beta}{2}} \right]. \quad (70)$$

También se realizó el estudio para función de brillo gaussiana para considerar escala de grises en la imagen del patrón de brillo y la cual está dada por la siguiente expresión (Poom-Medina et al 2014):

$$B_G(M_i, M_j) = \exp \left[ -\frac{(M_i - M_{0i})^2}{a_i^2}, -\frac{(M_j - M_{0j})^2}{a_j^2} \right], \quad (71)$$

$$a_i = \frac{(1 + M_{0i}^2)\beta}{8}; \quad a_j = \frac{(1 + M_{0j}^2)\beta}{8},$$

donde  $a_i$  y  $a_j$  es el ancho de la función gaussiana en el eje  $x$  y  $y$ , respectivamente.

### 3.12 Varianza de las intensidades en la imagen 2D

Análogamente al caso unidimensional, la relación entre la varianza de las intensidades en la imagen del patrón de brillo y la varianza con las pendientes de la superficie marina en dos dimensiones está determinada por:

$$\mu_{I(x,y)} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} B(M_i, M_j) p(M_i, M_j) dM_i dM_j. \quad (72)$$

Donde los límites de integración quedan determinados por la condición para las pendientes de tal forma que ocurra reflexión especular, entonces (72) se transforma en la siguiente ecuación:

$$\mu_{I(x,y)} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \sum_{i=1}^N \int_{L_{1i}}^{L_{2i}} B(M_i, M_j) p(M_i, M_j) dM_i dM_j, \quad (73)$$

con los límites de integración definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_{1i} &= M_{0i} - (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2i} &= M_{0i} + (1 + M_{0i}^2) \frac{\beta}{4}, \\ L_{1j} &= M_{0j} - (1 + M_{0j}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2j} &= M_{0j} + (1 + M_{0j}^2) \frac{\beta}{4}. \end{aligned}$$

La función de densidad de probabilidad gaussiana implementada para la estadística gaussiana, está dada por la siguiente expresión:

$$p_G(M_i, M_j) = \frac{1}{2\pi\sigma_{M_x}\sigma_{M_y}} \exp\left(-\frac{M_i^2}{2\sigma_{M_x}^2} - \frac{M_j^2}{2\sigma_{M_y}^2}\right), \quad (74)$$

donde  $\sigma_{M_x}$  y  $\sigma_{M_y}$  son las desviaciones estándar de la componente en el eje  $x$  y  $y$  del plano tangente a la superficie en el punto de interés, respectivamente.

Para estadística no gaussiana, a la función de densidad de probabilidad gaussiana se le incluye un término no Gaussiano como se denota a continuación:

$$p_{nG}(M_i, M_j) = p_G(M_i, M_j) \Omega(M_i, M_j). \quad (75)$$

Se cumple que:

$$\Omega(M_i, M_j) = \Omega(M_i) \Omega(M_j), \quad (76)$$

y sea que  $\Omega(M_i, M_j) = \Omega(M_i) \Omega(M_j) = \Omega(M_{i,j})$ , entonces el término no Gaussiano se define como:

$$\Omega(M_{i,j}) = 1 + \frac{1}{6} \lambda_{M_{x,y}}^{(3)} \left\{ \left( \frac{M_{i,j}}{\sigma_{M_{x,y}}} \right)^3 - 3 \left( \frac{M_{i,j}}{\sigma_{M_{x,y}}} \right) \right\} + \frac{1}{24} \lambda_{M_{x,y}}^{(4)} \left\{ \left( \frac{M_{i,j}}{\sigma_{M_{x,y}}} \right)^4 - 6 \left( \frac{M_{i,j}}{\sigma_{M_{x,y}}} \right)^2 + 3 \right\}.$$

Se considera que la dirección del viento está a lo largo del eje  $x$ , por lo que el término no Gaussiano estará contenido sólo en ésta dirección.

### 3.12.1 Estadística Gaussiana

El promedio de la imagen del patrón de brillo al considerar función de brillo Rect 2D y función de densidad de probabilidad Gaussiana se obtiene al sustituir (70) y (74) en (73), y queda determinado por la siguiente ecuación:

$$\mu_{I_{R(x,y)}} = \frac{1}{4N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{M_i}{\sigma_{M_x} \sqrt{2}} \right) \Big|_{L_{1i}}^{L_{2i}} \operatorname{erf} \left( \frac{M_j}{\sigma_{M_y} \sqrt{2}} \right) \Big|_{L_{1j}}^{L_{2j}} \right]. \quad (77)$$

Mientras que el promedio de la imagen usando función de brillo Gaussiana se determina sustituyendo (71) y (74) en (73) con lo que la relación queda determinada por:

$$\mu_{I_{G(x,y)}} = \frac{1}{4N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \chi_{x,y} \exp(\delta_{x,y}) \operatorname{erf}(\varepsilon_x M_i + \eta_x) \Big|_{L_{1i}}^{L_{2i}} \operatorname{erf}(\varepsilon_y M_j + \eta_y) \Big|_{L_{1j}}^{L_{2j}} \right], \quad (78)$$

donde

$$\chi_{x,y} = \frac{a_{i,j}}{\sqrt{2\sigma_{M_{x,y}}^2 + a_{i,j}^2}}; \quad \delta_{x,y} = \frac{B_{x,y}^2}{A_{x,y}} - C_{x,y}; \quad \varepsilon_{x,y} = \sqrt{A_{x,y}}; \quad \eta_{x,y} = \frac{B_{x,y}}{\varepsilon_{x,y}}; \quad A_{x,y} = \frac{2\sigma_{M_{x,y}}^2 + a_{i,j}^2}{2\sigma_{M_{x,y}}^2 a_{i,j}^2}; \quad B_{x,y} = -\frac{M_{0i,0j}}{a_{i,j}^2}; \quad C_{x,y} = -B_{x,y} M_{0i,0j}.$$

La varianza de las intensidades en la imagen del patrón de brillo para función de brillo Rect bidimensional considerando estadística Gaussiana, tiene una relación con su promedio (ec. 77) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_{R(x,y)}}^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \left[ B_R(M_i, M_j) - \mu_{I_{R(x,y)}} \right]^2 P_g(M_i, M_j) dM_i dM_j, \\ &= \mu_{I_{R(x,y)}} \left( 1 - \mu_{I_{R(x,y)}} \right). \end{aligned} \quad (79)$$

Mientras que la varianza de las intensidades en la imagen se determina con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sigma_{I_{G(x,y)}}^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \left[ B_G(M_i, M_j) - \mu_{I_{G(x,y)}} \right]^2 p_g(M_i, M_j) dM_i dM_j, \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \left[ \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \sum_{i=1}^N \int_{L_{1i}}^{L_{2i}} B_G^2(M_i, M_j) p_g(M_i, M_j) dM_i dM_j \right] - \mu_{I_{G(x,y)}}^2.\end{aligned}\quad (80)$$

La resolución de la integral anterior se obtiene de forma similar al promedio calculado en (78), con excepción de los siguientes términos:

$$A_{x,y} = \frac{4\sigma_{M_{x,y}}^2 + a_{i,j}^2}{2\sigma_{M_{x,y}}^2 a_{i,j}^2}; \quad B_{x,y} = -\frac{2M_{0i,0j}}{a_{i,j}^2}; \quad \chi_{x,y} = \frac{a_{i,j}}{\sqrt{4\sigma_{M_{x,y}}^2 + a_{i,j}^2}}.$$

### 3.12.2 Estadística no Gaussiana

El promedio de las intensidades en la imagen del patrón de brillo bidimensional determinado con una función Rect 2D para la función de densidad no Gaussiana definida en la ecuación (81), se define al hacer la sustitución de (70) y (75) en (73), por lo que la expresión matemática queda como sigue:

$$\mu_{I_{R(x,y)}} = \nu \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ \chi_x \operatorname{erf}(\varpi_x(M_i)) - \Upsilon_x(M_i) \exp(\vartheta_x(M_i)) \right] \Big|_{L_{1i}}^{L_{2i}} \operatorname{erf} \left( \frac{M_j}{\sigma_{M_y} \sqrt{2}} \right) \Big|_{L_{1j}}^{L_{2j}} \right\}, \quad (81)$$

con las siguientes definiciones para los términos

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{16\sqrt{2\pi}N^2\sigma_{M_x}\varepsilon_x A_x^2}; \quad \chi_x = \sqrt{\pi}(4A_x^2 P_x + 2A_x R_x + 3T_x); \quad \varpi_x(M_i) = \varepsilon_x M_i; \quad \Upsilon_x(M_i) = \delta_x M_i^3 + \eta_x M_i^2 + o_x M_i + \kappa_x, \\ \vartheta_x(M_i) &= -A_x M_i^2; \quad \eta_x = 4S_x A_x \varepsilon_x; \quad A_x = \frac{1}{2\sigma_{M_x}^2}; \quad P_x = 1 + \frac{1}{8}\lambda_{M_x}^{(4)}; \quad Q_x = -\frac{\lambda_{M_x}^{(3)}}{2\sigma_{M_x}^2}; \quad R_x = -\frac{\lambda_{M_x}^{(4)}}{4\sigma_{M_x}^2}; \quad S_x = \frac{\lambda_{M_x}^{(3)}}{6\sigma_{M_x}^3}; \quad T_x = \frac{\lambda_{M_x}^{(4)}}{24\sigma_{M_x}^4}, \\ \varepsilon_x &= \sqrt{A_x}; \quad o_x = 2\varepsilon_x(2A_x R_x + 3T_x); \quad \kappa_x = 4\varepsilon_x(A_x Q_x + S_x); \quad \delta_x = 4T_x A_x \varepsilon_x.\end{aligned}$$

Para el valor promedio de las intensidades en la imagen considerando función de brillo gaussiana se hace uso de las ecuaciones (71) y (75) en la ecuación 73, por lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$\mu_{I_{G(x,y)}} = \nu \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_x A_x^4} \left\{ \left[ \chi_x \operatorname{erf}(h_x(M_i)) \exp(\delta_x) - Y_x(M_i) \exp(U_x(M_i)) \right]_{L_{4i}}^{L_{2i}} \chi_y \exp(\delta_y) \operatorname{erf}(\varepsilon_y M_j + \eta_y) \right\}_{L_{4j}}^{L_{2j}} \quad (82)$$

Con los mismos términos que (81) salvo los siguientes:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{16\sqrt{2\pi}\sigma_{M_x}N^2}; \quad \chi_x = \sqrt{\pi} \left[ 4P_x A_x^4 + (2R_x - 4B_x Q_x) A_x^3 + (4R_x B_x^2 - 6B_x S_x + 3T_x) A_x^2 - 4A_x (B_x S_x - 3T_x) B_x^2 + 4T_x B_x^4 \right], \\ h_x(M_i) &= \varepsilon_x M_i + \eta_x; \quad Y_x(M_i) = k_x M_i^3 + l_x M_i^2 + m_x M_i + n_x; \quad k_x = 4\varepsilon_x T_x A_x^3; \quad l_x = 4A_x^2 \varepsilon_x (A_x S_x - B_x T_x), \\ m_x &= 2A_x \varepsilon_x \left[ 2A_x (A_x R_x - B_x S_x) + T_x (3A_x + 2B_x^2) \right]; \quad n_x = 2\varepsilon_x \left[ 2A_x^2 (A_x Q_x - B_x R_x + S_x) + A_x B_x S_x (2B_x - T_x) - 2T_x B_x^3 \right], \\ U_x(M_i) &= -(A_x M_i^2 + 2B_x M_i + C_x). \end{aligned}$$

La varianza para las intensidades en la imagen del patrón de brillo definido por una función Rect 2D, se obtiene de la misma forma que en (81), con excepción de que la función de densidad de probabilidad será no Gaussiana (ec. 75). Así mismo, para la función de brillo Gaussiana 2D que determina el patrón de brillo bidimensional queda expresado por (80) y donde la integral a resolver se calcula con los mismos términos que la ecuación (82), excepto los siguientes dos términos:

$$A_{x,y} = \frac{4\sigma_{M_{x,y}}^2 + a_{i,j}^2}{2\sigma_{M_{x,y}}^2 a_{i,j}^2}; \quad B_{x,y} = -\frac{2M_{0i,0j}}{a_{i,j}^2}.$$

### 3.13 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 2D

La función de auto-correlación en 2D se encuentra a partir de la función de auto-correlación unidimensional representada en (48), por lo que tenemos que la relación entre las funciones de auto-correlación entre las intensidades de la imagen y las funciones de las pendientes de superficie marina se encuentra al resolver lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_{x,y}}^2 C_{I_{x,y}}(\tau_x, \tau_y) &= \frac{1}{N^4} \sum_{j_2=1}^N \int_{L_{4j_2}}^{L_{2j_2}} \sum_{j_1=1}^N \int_{L_{4j_1}}^{L_{2j_1}} \sum_{i_2=1}^N \int_{L_{4i_2}}^{L_{2i_2}} \sum_{i_1=1}^N \int_{L_{4i_1}}^{L_{2i_1}} B(M_{i_1}, M_{j_1}) B(M_{i_2}, M_{j_2}) p(M_{i_1}, M_{i_2}) \\ &\quad \times p(M_{j_1}, M_{j_2}) dM_{i_1} dM_{i_2} dM_{j_1} dM_{j_2}, \end{aligned} \quad (83)$$



donde  $i1$  y  $i2$  representan dos puntos de la proyección de la superficie marina sobre el eje x, mientras que  $j1$  y  $j2$  son dos puntos del eje y. Los límites de integración se definen por:

$$\begin{aligned} L_{i1} &= M_{0i1} - (1 + M_{0i1}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2i1} &= M_{0i1} + (1 + M_{0i1}^2) \frac{\beta}{4}; & M_{0i1} &= \tan\left(\frac{\theta_s + (\theta_d)_{i1}}{2}\right), \\ L_{i2} &= M_{0i2} - (1 + M_{0i2}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2i2} &= M_{0i2} + (1 + M_{0i2}^2) \frac{\beta}{4}; & M_{0i2} &= \tan\left(\frac{\theta_s + (\theta_d)_{i2}}{2}\right), \\ L_{j1} &= M_{0j1} - (1 + M_{0j1}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2j1} &= M_{0j1} + (1 + M_{0j1}^2) \frac{\beta}{4}; & M_{0j1} &= \tan\left(\frac{\theta_s + (\theta_d)_{j1}}{2}\right), \\ L_{j2} &= M_{0j2} - (1 + M_{0j2}^2) \frac{\beta}{4}; & L_{2j2} &= M_{0j2} + (1 + M_{0j2}^2) \frac{\beta}{4}; & M_{0j2} &= \tan\left(\frac{\theta_s + (\theta_d)_{j2}}{2}\right). \end{aligned}$$

La función de densidad de probabilidad gaussiana conjunta para las variables aleatorias continuas  $B(M_{i1}, M_{j1})$  y  $B(M_{i2}, M_{j2})$  en el eje x y y se representan por las siguientes ecuaciones, respectivamente.

$$P_{G(x)}(M_{i1}, M_{i2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{M_x}^2 \sqrt{1 - C_{M_x}^2(\tau_x)}} \exp\left\{-\frac{M_{i1}^2 + M_{i2}^2 - 2C_{M_x}(\tau_x)M_{i1}M_{i2}}{2\sigma_{M_x}^2 [1 - C_{M_x}^2(\tau_x)]}\right\}, \quad (84)$$

$$P_{G(y)}(M_{j1}, M_{j2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{M_y}^2 \sqrt{1 - C_{M_y}^2(\tau_y)}} \exp\left\{-\frac{M_{j1}^2 + M_{j2}^2 - 2C_{M_y}(\tau_y)M_{j1}M_{j2}}{2\sigma_{M_y}^2 [1 - C_{M_y}^2(\tau_y)]}\right\}. \quad (85)$$

Para la estadística no gaussiana, la función de densidad de probabilidad conjunta no Gaussiana para las pendientes de las rectas tangentes a la superficie marina en eje x y y que cumplen la condición para reflexión especular están definidas por (86) y (87), respectivamente.

$$P_{nG(x)}(M_{i1}, M_{i2}) = P_{G(x)}(M_{i1}, M_{i2}) \Omega_x(M_{i1}, M_{i2}), \quad (86)$$

$$P_{nG(y)}(M_{j1}, M_{j2}) = P_{G(y)}(M_{j1}, M_{j2}) \Omega_y(M_{j1}, M_{j2}), \quad (87)$$

donde los términos no gaussianos tienen la siguiente forma:

$$\Omega_x(M_{i1}, M_{i2}) = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \begin{aligned} & \lambda_{M_x}^{(30)} \left[ \left( \frac{M_{i1}}{\sigma_{M_x}} \right)^3 - 3\sigma_{M_x}^2 \left( \frac{M_{i1}}{\sigma_{M_x}} \right) \right] + 3\lambda_{M_x}^{(21)} \left[ \left( \frac{M_{i1}}{\sigma_{M_x}} \right)^2 \left( \frac{M_{i2}}{\sigma_{M_x}} \right) - \sigma_{M_x}^2 \left( \frac{M_{i2}}{\sigma_{M_x}} \right) + 2\sigma_{M_x}^2 C_{M_x}(\tau_x) \left( \frac{M_{i1}}{\sigma_{M_x}} \right) \right] \\ & + 3\lambda_{M_x}^{(12)} \left[ \left( \frac{M_{i1}}{\sigma_{M_x}} \right) \left( \frac{M_{i2}}{\sigma_{M_x}} \right)^2 - \sigma_{M_x}^2 \left( \frac{M_{i1}}{\sigma_{M_x}} \right) + 2\sigma_{M_x}^2 C_{M_x}(\tau_x) \left( \frac{M_{i2}}{\sigma_{M_x}} \right) \right] + \lambda_{M_x}^{(03)} \left[ \left( \frac{M_{i2}}{\sigma_{M_x}} \right)^3 - 3\sigma_{M_x}^2 \left( \frac{M_{i2}}{\sigma_{M_x}} \right) \right] \end{aligned} \right\},$$

$$\Omega_y(M_{j1}, M_{j2}) = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \begin{aligned} & \lambda_{M_y}^{(30)} \left[ \left( \frac{M_{j1}}{\sigma_{M_y}} \right)^3 - 3\sigma_{M_y}^2 \left( \frac{M_{j1}}{\sigma_{M_y}} \right) \right] + 3\lambda_{M_y}^{(21)} \left[ \left( \frac{M_{j1}}{\sigma_{M_y}} \right)^2 \left( \frac{M_{j2}}{\sigma_{M_y}} \right) - \sigma_{M_y}^2 \left( \frac{M_{j2}}{\sigma_{M_y}} \right) + 2\sigma_{M_y}^2 C_{M_y}(\tau_y) \left( \frac{M_{j1}}{\sigma_{M_y}} \right) \right] \\ & + 3\lambda_{M_y}^{(12)} \left[ \left( \frac{M_{j1}}{\sigma_{M_y}} \right) \left( \frac{M_{j2}}{\sigma_{M_y}} \right)^2 - \sigma_{M_y}^2 \left( \frac{M_{j1}}{\sigma_{M_y}} \right) + 2\sigma_{M_y}^2 C_{M_y}(\tau_y) \left( \frac{M_{j2}}{\sigma_{M_y}} \right) \right] + \lambda_{M_y}^{(03)} \left[ \left( \frac{M_{j2}}{\sigma_{M_y}} \right)^3 - 3\sigma_{M_y}^2 \left( \frac{M_{j2}}{\sigma_{M_y}} \right) \right] \end{aligned} \right\}.$$

Se asume que el viento tiene una velocidad en la dirección del eje x, de tal forma que el término no Gaussiano sólo se considera en ésta dirección.

### 3.13.1 Estadística Gaussiana

Las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen del patrón de brillo asumiendo que éste se encuentra determinado por la función Rect 2D en cada punto de estudio cuando las pendientes de superficie marina obedecen una distribución Gaussiana, se calculan a partir de la ecuación 88.

$$\sigma_{I_{R(x,y)}}^2 C_{I_{R(x,y)}}(\tau_x, \tau_y) = v_{x,y} \sum_{j2=1}^N \int_{L_{j2}}^{L_{2j2}} \sum_{j1=1}^N \sum_{i2=1}^N \int_{L_{i2}}^{L_{2i2}} \sum_{i1=1}^N \exp(\delta_{x,y}) \operatorname{erf} [D_x(M_{i1})]_{L_{i1}}^{L_{2i1}} \operatorname{erf} [D_y(M_{j1})]_{L_{j1}}^{L_{2j1}} dM_{i2} dM_{j2}, \quad (88)$$

donde se tienen los términos siguientes:

$$v_{x,y} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_{M_{x,y}}N^2}; \quad \delta_{x,y} = \frac{B_{x,y}^2}{A_{x,y}} - C_{x,y}; \quad D_{x,y}(M_{i1,j1}) = \varepsilon_{x,y} [M_{i1,j1} - C_{M_{x,y}}(\tau_{x,y})M_{i2,j2}]; \quad A_{x,y} = \frac{1}{2\sigma_{M_{x,y}}^2 [1 - C_{M_{x,y}}^2(\tau_{x,y})]},$$

$$B_{x,y} = -A_{x,y} C_{M_{x,y}}(\tau_{x,y}) M_{i2,j2}; \quad C_{x,y} = A_{x,y} M_{i2,j2}^2; \quad \varepsilon_{x,y} = \sqrt{A_{x,y}}.$$

Suponiendo que el patrón de brillo registrado en el detector está determinado por una función Gaussiana para cada punto sobre la superficie marina, al sustituir (71), (84) y (85) en (83), obtenemos que las funciones de auto-correlación se calculan mediante:

$$\sigma_{I_{G(x,y)}}^2 C_{I_{G(x,y)}}(\tau_x, \tau_y) = \nu_{x,y} \sum_{j_2=1}^N \int_{L_{1j_2}}^{L_{2j_2}} \sum_{j_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \int_{L_{4i_2}}^{L_{2i_2}} \sum_{i_1=1}^N 1_{i_1,j_1} \left\{ \exp(\delta_{x,y}) \operatorname{erf} \left[ H_x(M_{i_1}) \right]_{L_{4i_1}}^{L_{2i_1}} \operatorname{erf} \left[ H_y(M_{j_1}) \right]_{L_{4j_1}}^{L_{2j_1}} \right\} dM_{i_2} dM_{j_2}, \quad (89)$$

donde

$$\begin{aligned} \nu_{x,y} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_{M_{x,y}} N^2}; \quad 1_{i_1,j_1} = \frac{a_{i_1,j_1}}{\sqrt{a_{i_1,j_1}^2 + 2\sigma_{M_{x,y}}^2 [1 - C_{M_{x,y}}^2(\tau_{x,y})]}}; \quad \delta_{x,y} = \frac{B_{x,y}^2}{A_{x,y}} - C_{x,y}; \quad H_{x,y}(M_{i_1,j_1}) = \varepsilon_{x,y} M_{i_1,j_1} + \eta_{x,y}; \quad \varepsilon_{x,y} = \sqrt{A_{x,y}}, \\ A_{x,y} &= \frac{1}{a_{i_1,j_1}^2} + \frac{1}{2\sigma_{M_{x,y}}^2 [1 - C_{M_{x,y}}^2(\tau_{x,y})]}; \quad B_{x,y} = - \left( \frac{M_{0i_1,0j_1}}{a_{i_1,j_1}^2} + \frac{C_{M_{x,y}}(\tau_{x,y}) M_{i_2,j_2}}{2\sigma_{M_{x,y}}^2 [1 - C_{M_{x,y}}^2(\tau_{x,y})]} \right); \quad \eta_{x,y} = \frac{B_{x,y}}{\varepsilon_{x,y}}, \\ C_{x,y} &= \left( \frac{1}{a_{i_2,j_2}^2} + \frac{1}{2\sigma_{M_{x,y}}^2 [1 - C_{M_{x,y}}^2(\tau_{x,y})]} \right) M_{i_2,j_2}^2 - \frac{2M_{0i_2,0j_2} M_{i_2,j_2}}{a_{i_2,j_2}^2} + \frac{M_{0i_1,0j_1}^2}{a_{i_1,j_1}^2} + \frac{M_{0i_2,0j_2}^2}{a_{i_2,j_2}^2}. \end{aligned}$$

### 3.13.2 Estadística no Gaussiana

Sustituyendo (70), (86) y (87) en la ecuación (83), se tiene la relación entre las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen suponiendo función de brillo Rect 2D y función de densidad no Gaussiana conjunta. Dicha relación se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_{R(x,y)}}^2 C_{I_{R(x,y)}}(\tau_x, \tau_y) &= \nu \sum_{j_2=1}^N \int_{L_{1j_2}}^{L_{2j_2}} \sum_{j_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \int_{L_{4i_2}}^{L_{2i_2}} \sum_{i_1=1}^N \left\{ \chi_x \exp(\delta_x) \operatorname{erf} [\varpi_x(M_{i_1})] - \Upsilon_x(M_{i_1}) \exp[\vartheta_x(M_{i_1})] \right\}_{L_{4i_1}}^{L_{2i_1}} \\ &\quad \times \exp(\delta_y) \operatorname{erf} [D_y(M_{j_1})]_{L_{4j_1}}^{L_{2j_1}} dM_{i_2} dM_{j_2}. \end{aligned} \quad (90)$$

La definición de los términos es la misma que para (88) con excepción de:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{16\pi^{3/2}\sigma_{M_x}\sigma_{M_y}N^4A_x^3}; \quad \chi_x = \sqrt{\pi} \left[ (2A_x F_x - 2B_x S_x + Q_x) A_x^2 + A_x B_x (2B_x Q_x - 3P_x) - 2P_x B_x^3 \right]; \quad \varpi_x(M_{i_1}) = \varepsilon_x M_{i_1} + \eta_x, \\ \Upsilon_x(M_{i_1}) &= \kappa_x M_{i_1}^2 + \zeta_x M_{i_1} + \gamma_x; \quad \vartheta_x(M_{i_1}) = -(A_x M_{i_1}^2 + 2B_x M_{i_1} + C_x); \quad \kappa_x = 2A_x^2 \varepsilon_x P_x; \quad \zeta_x = 2A_x \varepsilon_x [A_x Q_x - B_x P_x], \\ \gamma_x &= 2\varepsilon_x [A_x (P_x - B_x Q_x + A_x S_x) + P_x B_x^2]; \quad \eta_x = \frac{B_x}{\varepsilon_x}; \quad P_x = \frac{\lambda_{M_x}^{(30)}}{6\sigma_{M_x}^3}; \quad Q_x = \frac{\lambda_{M_x}^{(21)} M_{i_2}}{2\sigma_{M_x}^3}; \quad \varepsilon_x = \sqrt{A_x}, \\ S_x &= \frac{1}{2} \left( 2\lambda_{M_x}^{(21)} C_{M_x}(\tau_x) - \lambda_{M_x}^{(12)} - \lambda_{M_x}^{(30)} + \lambda_{M_x}^{(12)} \frac{M_{i_2}^2}{\sigma_{M_x}^4} \right) \sigma_{M_x}; \quad F_x = 1 + \frac{1}{2} \left( 2\lambda_{M_x}^{(12)} C_{M_x}(\tau_x) - \lambda_{M_x}^{(21)} - \lambda_{M_x}^{(03)} + \lambda_{M_x}^{(03)} \frac{M_{i_2}^2}{3\sigma_{M_x}^4} \right) \sigma_{M_x} M_{i_2}. \end{aligned}$$

Las funciones de auto-correlación de las intensidades considerando función de brillo Gaussiana en función de las auto-correlaciones de las pendientes de superficie marina, y suponiendo que éstas variables aleatorias continuas tienen una función de densidad no Gaussiana conjunta, se obtienen al sustituir (71), (86) y (87) en la expresión (83), con lo que queda la siguiente relación:

$$\sigma_{I_{G(x,y)}}^2 C_{I_{G(x,y)}}(\tau_x, \tau_y) = \nu \sum_{j_2=1}^N \int_{L_{j_2}}^{L_{2j_2}} \sum_{j_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \int_{L_{i_2}}^{L_{2i_2}} \sum_{i_1=1}^N \frac{1}{A_x^3} \left\{ \chi_x \exp(\delta_x) \operatorname{erf}[\varpi_x(M_{i1})] - \Upsilon_x(M_{i1}) \exp[\vartheta_x(M_{i1})] \right\}_{L_{i1}}^{L_{2i1}} \times \exp(\delta_y) \operatorname{erf}[H_y(M_{j1})]_{L_{j1}}^{L_{2j1}} dM_{i2} dM_{j2}, \quad (91)$$

con los términos definidos para (90) con excepción de  $A_{x,y}, B_{x,y}, C_{x,y}, \delta_{x,y}, \varepsilon_{x,y}, \eta_{x,y}, l_{i1,j1}, H_y(M_{j1})$  los cuales corresponden a los mismos términos que para (89) y donde:

$$\nu = \frac{1}{16\pi^{3/2} \sigma_{M_x} \sigma_{M_y} N^4}.$$

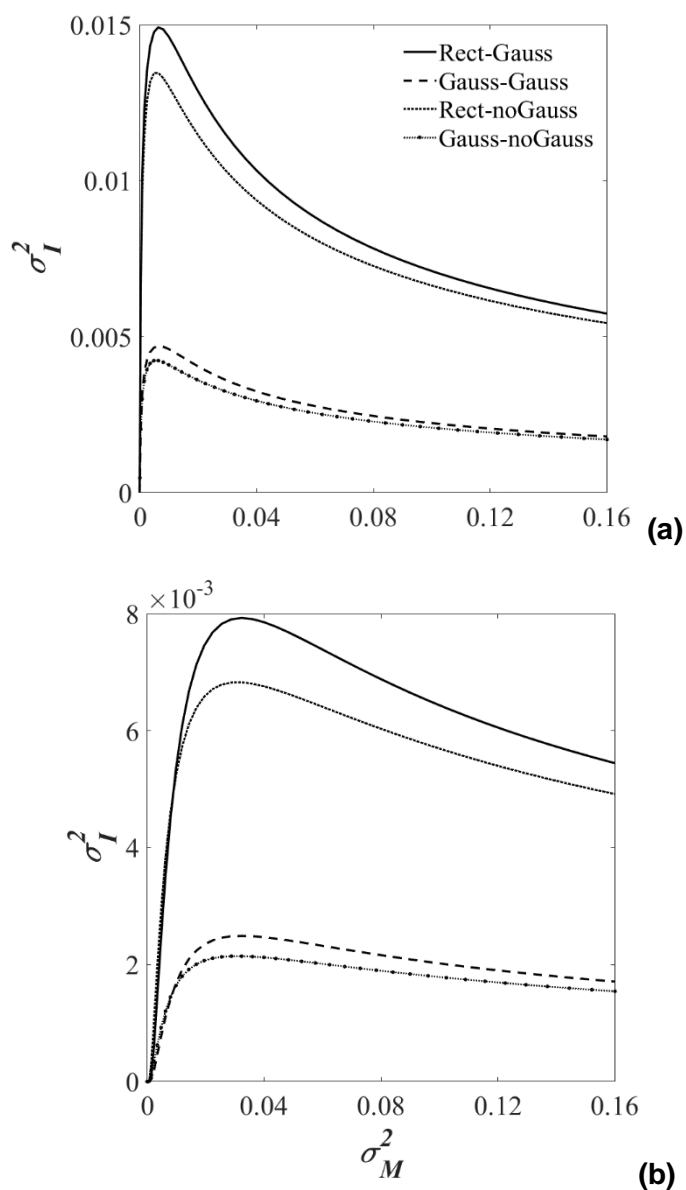
## Capítulo 4. Resultados y discusión

---

Se resolvieron numéricamente las ecuaciones para las varianzas de las intensidades en la imagen con respecto a las varianzas de las pendientes de superficie marina con 40 intervalos igualmente espaciados  $\sigma_M^2 \in [0, 0.16]$ , usando un intervalo de 2cm entre cada punto de la longitud del perfil en cada eje considerado (1D y 2D). Así mismo, las funciones de auto-correlación para las intensidades de la imagen a partir de las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie marina para 30 valores dentro del intervalo  $C_M \in [-0.5, 0.95]$  para cada eje fueron calculadas. Para estadística no Gaussiana, el valor de la curtosis y sesgo fue de 0.0 y -0.463, respectivamente. Debido a que las ecuaciones implican un grado de complejidad elevado y el tiempo de ejecución aumenta considerablemente cuando el número de puntos aumenta, se procedió a realizar una optimización del código realizado en el lenguaje de programación FORTRAN y posteriormente se implementó programación paralela para obtener una gran base de datos que fue obtenida automáticamente. Además, el enfoque vectorial que se realizó produjo ecuaciones independientes entre los ejes x y y, lo cual simplificó considerablemente la metodología bidimensional. Lo anterior resolvió el problema que se presentó en trabajos anteriores (Álvarez- Borrego y Martín-Atienza, 2010, Álvarez- Borrego y Martín-Atienza, 2013, Martín-Atienza y Álvarez- Borrego, 2013 y Poom-Medina et al., 2014).

Se generaron numéricamente 5000 superficies aleatorias con espectro Rect o Gaussiano obedeciendo una estadística Gaussiana o no Gaussiana. La función de densidad no Gaussiana implementada resulta de la función de densidad Gaussiana más el término no Gaussiano usado en la metodología unidimensional. Posteriormente, se realizó el proceso inverso haciendo uso de la curva calculada de las funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen con respecto a las de las pendientes de la superficie marina para un ángulo de incidencia de 25° y 16000 puntos de longitud del perfil marino a una altura del detector de 100 m, se obtuvo la función de correlación de la superficie marina en una dimensión, así como las funciones de correlación de las pendientes de la superficie marina y después se compararon con las funciones de correlación teóricas correspondientes y las funciones de correlación obtenidos con el promedio de las 5000 superficies. Dicha cantidad de superficies fue a partir de la cual el ajuste entre la función de correlación calculado numéricamente con el obtenido a partir de la teoría y el del modelo comenzó a ser óptimo.

### 4.1 Varianzas de las intensidades en la imagen 1D

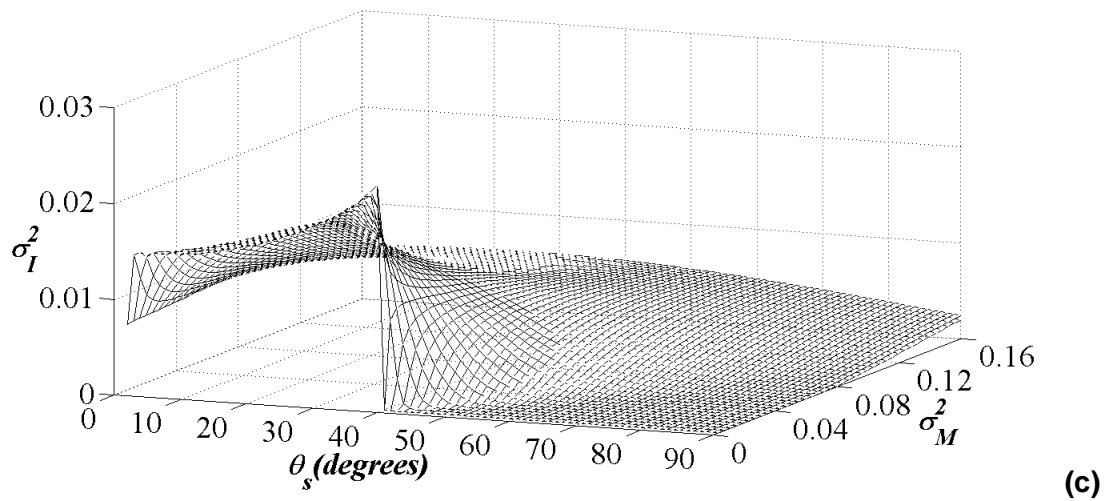
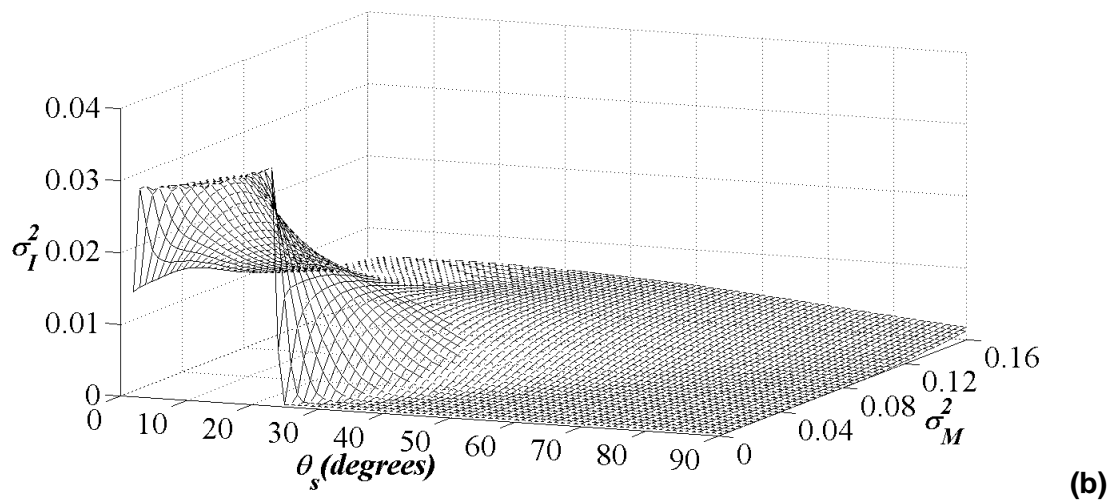
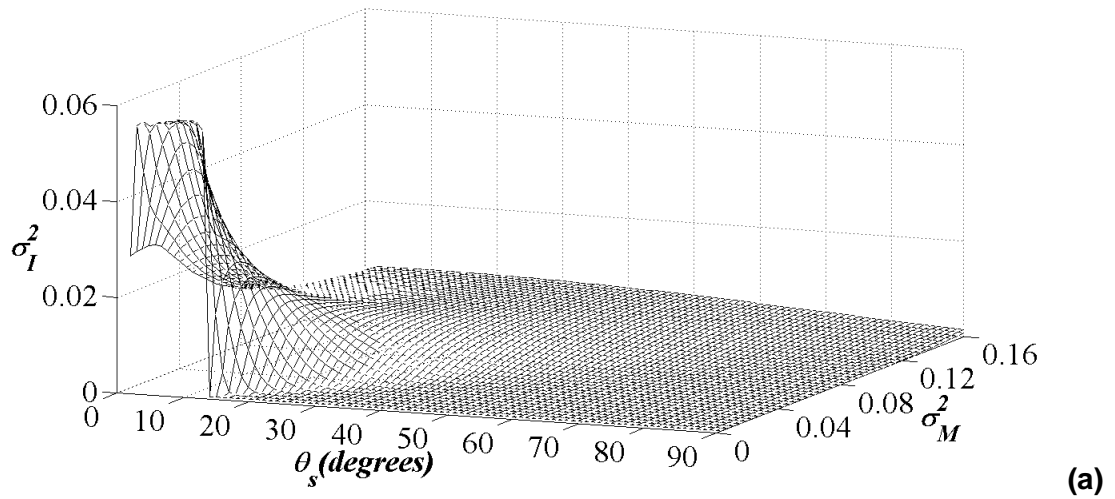


**Figura 11.** Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para 160m de longitud de perfil a 500m de altura del detector y un ángulo de incidencia de (a) 20° y (b) 30°, respectivamente. Para función de brillo Rect y Gaussiana considerando estadística Gaussiana y estadística no Gaussiana.

Las curvas de las varianzas de las intensidades en la imagen a partir de las varianzas de pendientes de la superficie marina fueron calculadas para función de brillo Rect y Gaussiana, donde se analizaron dos casos. En el primero, se asume que las pendientes de la superficie marina tienen una función de densidad de probabilidad Gaussiana y el segundo caso es para cuando las pendientes tienen una función de densidad

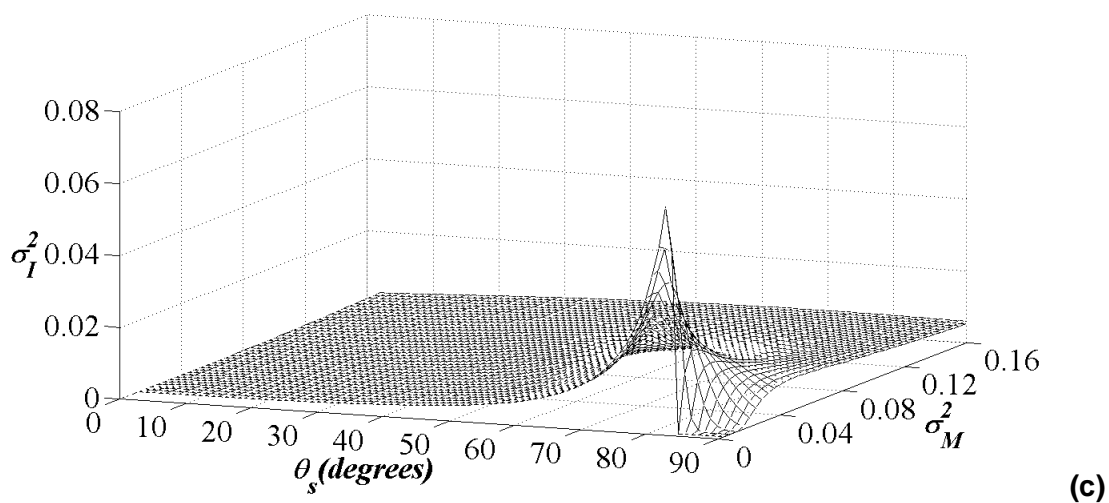
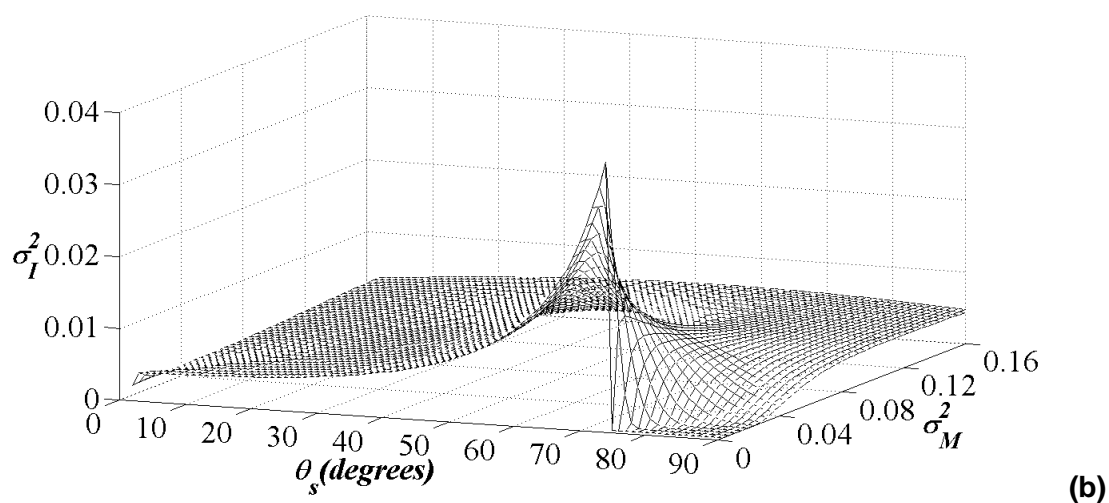
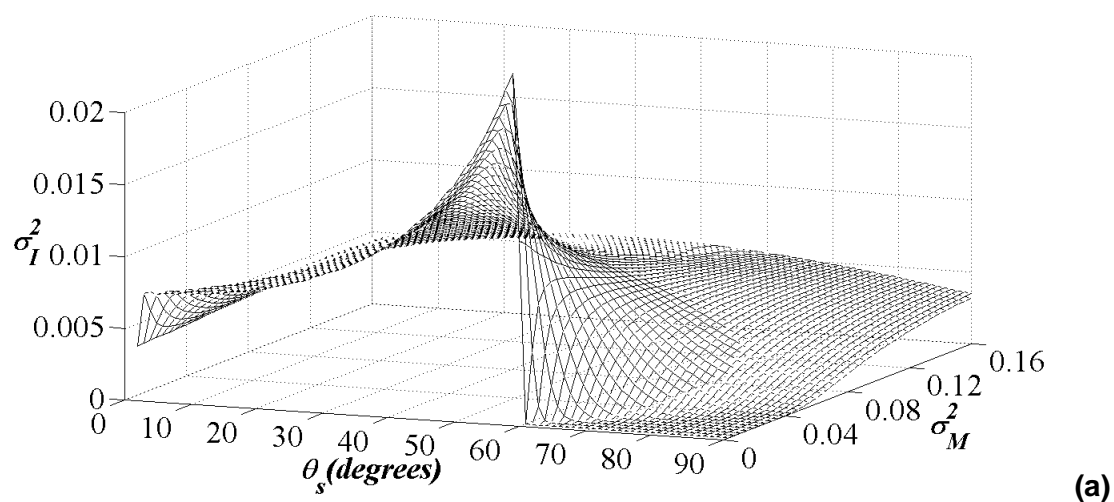
de probabilidad no Gaussiana. Las diferencias no son significativas al implementar una estadística Gaussiana de las pendientes o una estadística no Gaussiana, debido a que los valores obtenidos en las curvas de las varianzas son similares al comparar ambas estadísticas para una misma función de brillo sea Rect o Gaussiana como se muestra en la figura 11, de tal forma que se puede prescindir de los cálculos utilizando la función de densidad de probabilidad no gaussiana, los cuales implican mayor cantidad de tiempo en el proceso de ejecución debido a la complejidad de las ecuaciones. Así mismo, de la figura 11 se tiene que al usar una función de brillo Rect proporciona valores teóricos mayores que una función de brillo Gaussiana ya que la forma matemática de la función Rect contiene mayor contribución energética que la forma matemática de la función Gaussiana.

De la ecuación 36, se tiene que la pendiente de la recta tangente en cada punto del perfil marino en estudio tendrá una función de densidad de probabilidad Gaussiana con un valor promedio o media de cero ya que es una medida poblacional. El vector de varianzas de las pendientes usado  $\sigma_M^2 \in [0, 0.16]$  tiene una relación con la desviación estándar  $\sigma_M$  dada por la raíz cuadrada positiva, entonces tenemos el vector  $\sigma_M \in [0, 0.4]$ . Para  $\sigma_M = 0$  tenemos que la función de densidad de probabilidad Gaussiana es un impulso o delta de Dirac de tal forma que  $M_i = 0$  para cada punto de estudio, lo cual significa que el mar está en calma. Conforme  $\sigma_M$  aumenta, la función de densidad de probabilidad disminuye en altura y aumentando en anchura, de modo que la pendiente va adquiriendo mayor cantidad de valores, esto es que el intervalo  $M_i \in [-\sigma_M, \sigma_M]$  crece a medida que sus valores límites lo hacen. Lo anterior implica que nos encontramos ante una superficie marina con mayor rugosidad conforme aumenta el valor de la desviación estándar en las pendientes. Dicha rugosidad es causada por la velocidad del viento sobre la superficie terrestre y tiene una relación proporcional a las varianzas de las pendientes de la superficie marina (Cox y Munk (1954a, 1954b, 1955 y 1956)). La función en la ecuación (36) es una función de densidad de probabilidad simétrica, por lo que se supone que existe una probabilidad equitativa de que las pendientes tengan valores negativos, así como valores positivos. De la ecuación (37), se obtiene la función de densidad de probabilidad asimétrica, el nivel de asimetría estará cuantificado por el sesgo que se le proporcione a dicha función, si es negativo implica que la función estará “cargada” hacia la izquierda, mientras que si es positivo lo estará hacia la derecha, por lo que para nuestros cálculos el valor en el sesgo de -0.463 indica que existe mayor probabilidad de tener una pendiente negativa que una pendiente positiva para cada punto de la superficie analizado. Con lo anterior, se incluye la interacción del viento en la distribución de las pendientes.



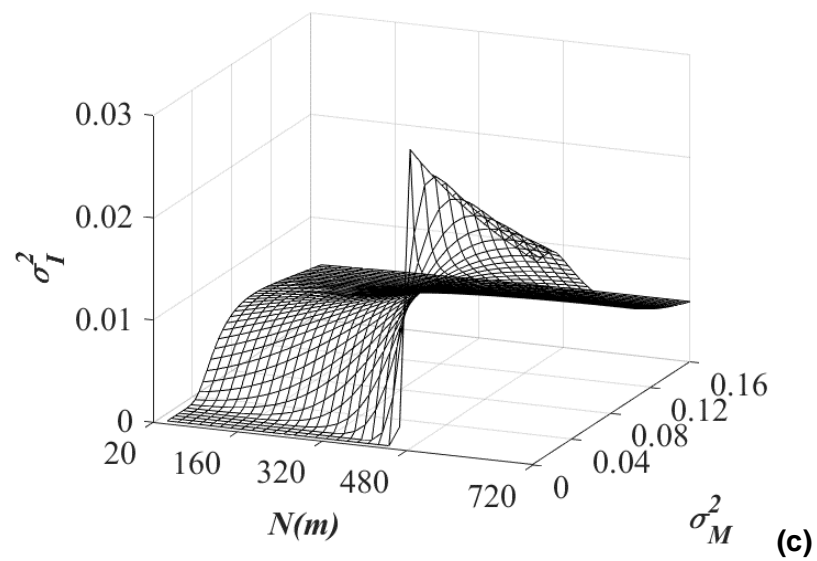
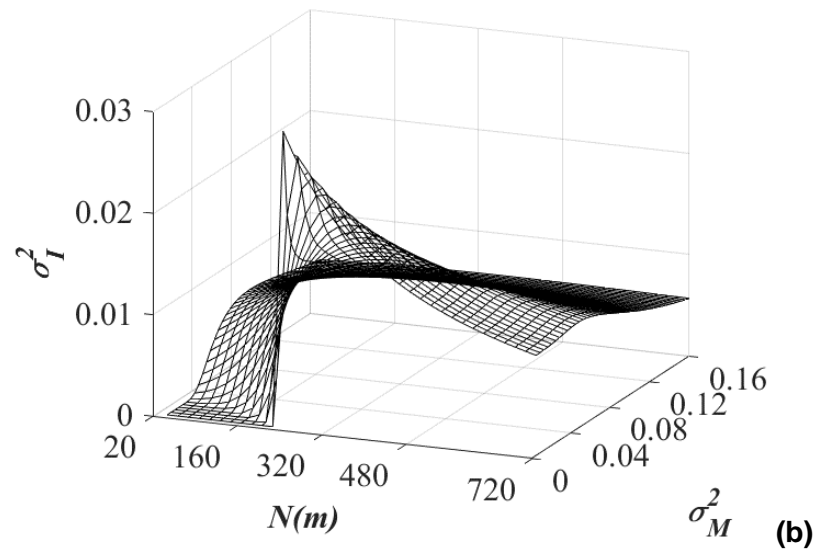
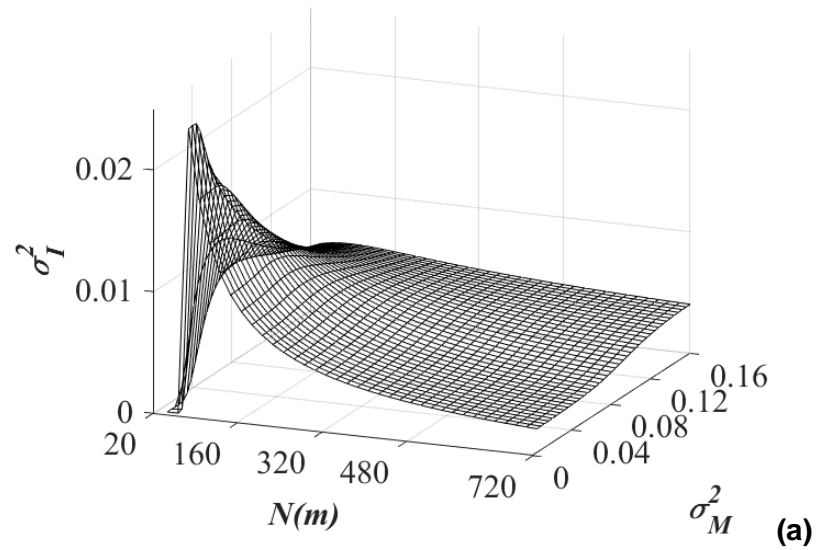
**Figura 12.** Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para 100m de altura del detector a diferentes ángulos de incidencia para una longitud del perfil de (a) 20m, (b) 40m y (c) 80m, respectivamente. Función de brillo Rect y estadística Gaussiana.



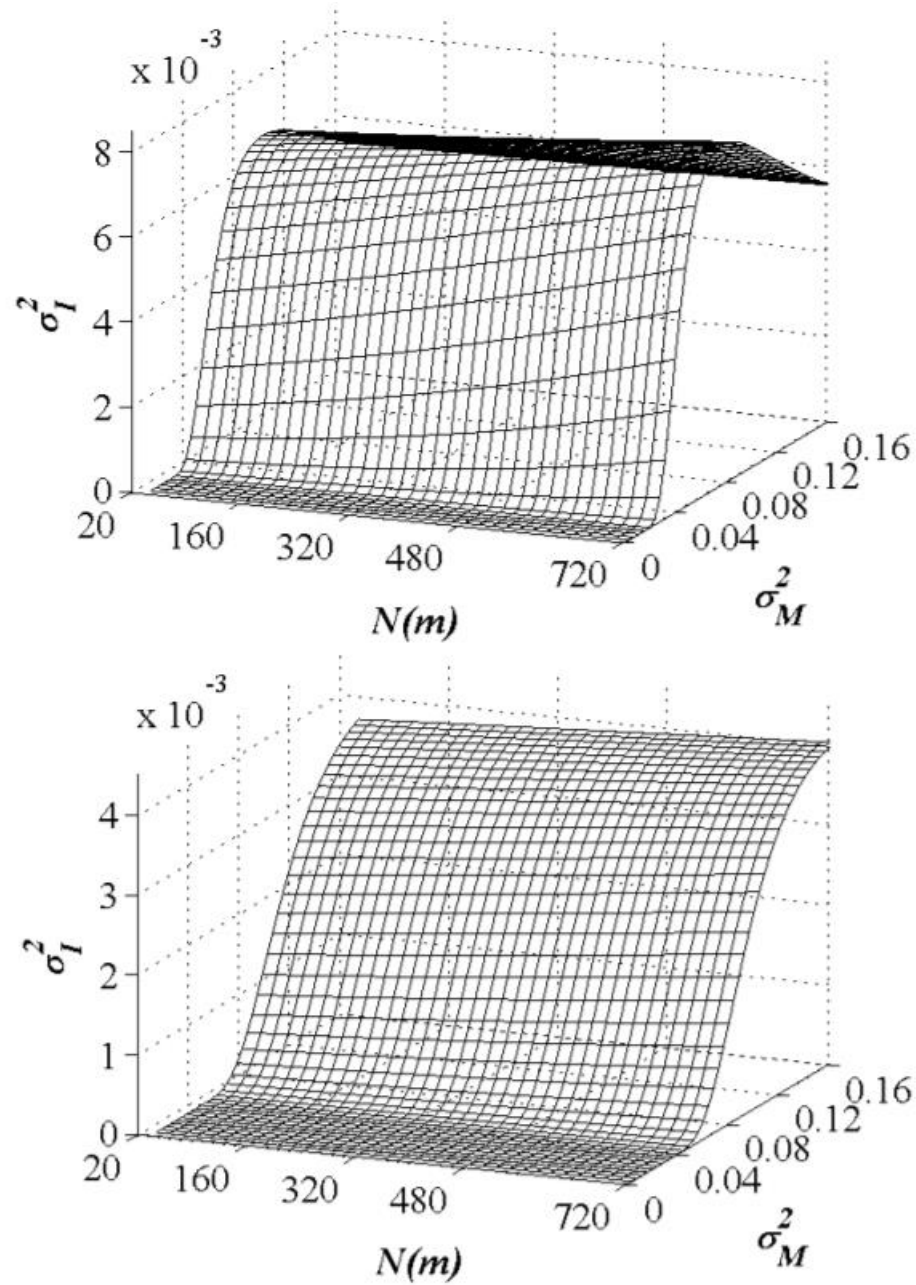


**Figura 13.** Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para 100m de altura del detector a diferentes ángulos de incidencia para una longitud del perfil de (a) 160m, (b) 320m y (c) 720m, respectivamente. Para función de brillo Rect estadística Gaussiana.

En general, las curvas obtenidas en los resultados proporcionan la geometría óptima del problema antes de realizar el experimento. Por ejemplo, en la figura 12 y figura 13, se muestran los valores de las varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie marina para una altura del detector de 100m sobre la superficie del mar, en donde se pretende averiguar qué ángulo de incidencia (hora del día) será el apropiado dependiendo de cuánta porción de la superficie se pretende analizar. Para una longitud del perfil de superficie de 160 m (Fig. 13a) los ángulos apropiados estarán entre 50° y 60° para  $\sigma_M^2 \in [0,0.04]$  después de éste intervalo de las varianzas de pendientes se tiene que los valores teóricos esperados para las varianzas en las intensidades de la imagen tienden a ser una valor constante, lo cual no es viable para realizar el proceso inverso a menos que se conozca con exactitud la velocidad del viento con lo que se evita la ambigüedad en la relación de las varianzas. Mientras que para una longitud del perfil de superficie de 40m (Fig. 12b) los ángulos de incidencia están entre 1° y 20°, donde se esperan valores más altos para las varianzas de las intensidades de la imagen que para la longitud del perfil de 160m debidos a la geometría, de forma que mayor cantidad de luz es captada por el detector. En el caso de longitudes de perfil mayores, como ejemplo 720m (Fig. 13c) se tiene que el rango de ángulos disminuye y se carga hacia ángulos mayores entre 80° y 85°. De la figura 14, se muestra que conforme aumenta la altura del detector, se esperan valores teóricos más grandes para las varianzas de las intensidades en la imagen a mayores longitudes de perfil para ángulo de incidencia igual a 25°. Para un detector situado a 100m sobre la superficie marina, se esperan valores más elevados en las varianzas de las intensidades al analizar longitudes de perfil de superficie marina comprendidas entre 30m y 100m para  $\sigma_M^2 \in [0,0.04]$ , por lo que si el objetivo es analizar ondas con longitudes de onda iguales o menores a 100m o regiones del mar comprendidas dentro de éste intervalo, se debe realizar la toma de las imágenes aéreas considerando la geometría indicada de tal forma que el proceso inverso efectuado será exitoso si no se conoce información sobre la velocidad del viento en ése momento. Se espera un desplazamiento de los valores máximos hacia mayores longitudes de perfil conforme la altura del detector aumenta. De Fig. 14b y Fig. 14c existen longitudes de perfil que no proporcionan información para el intervalo  $\sigma_M^2 \in [0,0.16]$  con excepción de aquellas que son mayores a 300m y 490m, respectivamente. Para  $\sigma_M^2 \in [0.05,0.16]$  todas las curvas de la relación de varianzas para las diferentes longitudes de perfil son similares, por lo que para una superficie marina con las condiciones dentro de éste intervalo de varianzas de superficies las longitudes de perfil más largas pueden ser obtenidas al analizar las longitudes de perfil marino más cortas, lo cual implica un menor tiempo de ejecución. Lo anterior también se cumple para determinadas alturas del detector, por ejemplo, a partir de 5000m para ángulos de incidencia de 25° y 50° (Fig. 15), las curvas de las varianzas son iguales para cualquier longitud de perfil sea corta o larga.



**Figura 14.** Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes longitudes del perfil con un ángulo de incidencia de  $25^\circ$  y una altura del detector de (a) 100m, (b) 500m y (c) 1000m, respectivamente. Usando función de brillo Rect y estadística Gaussiana.

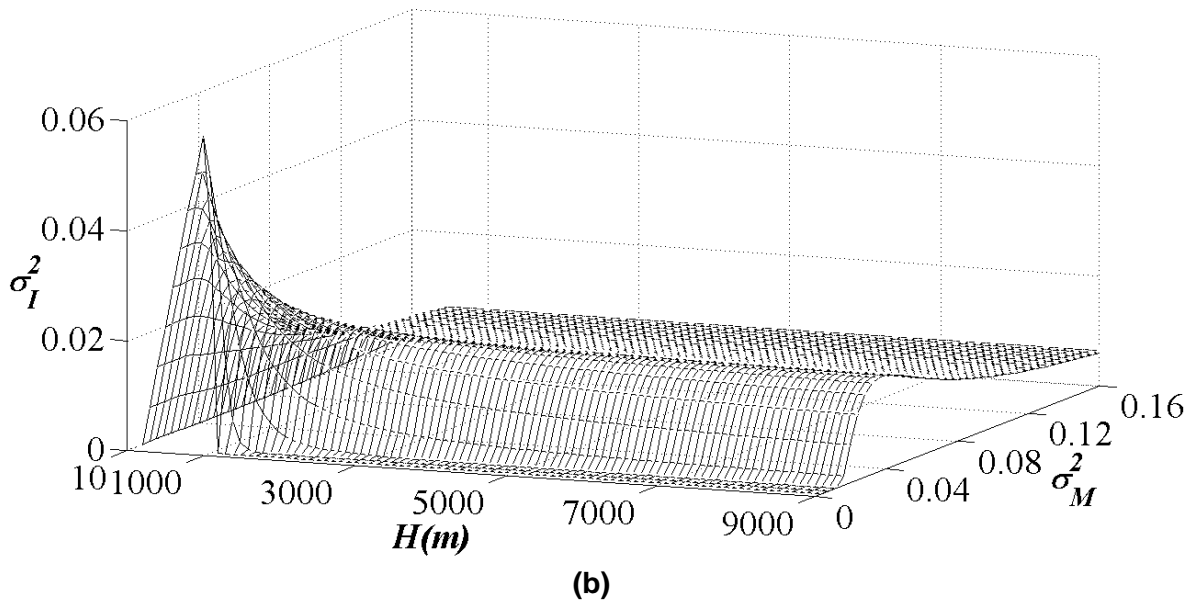
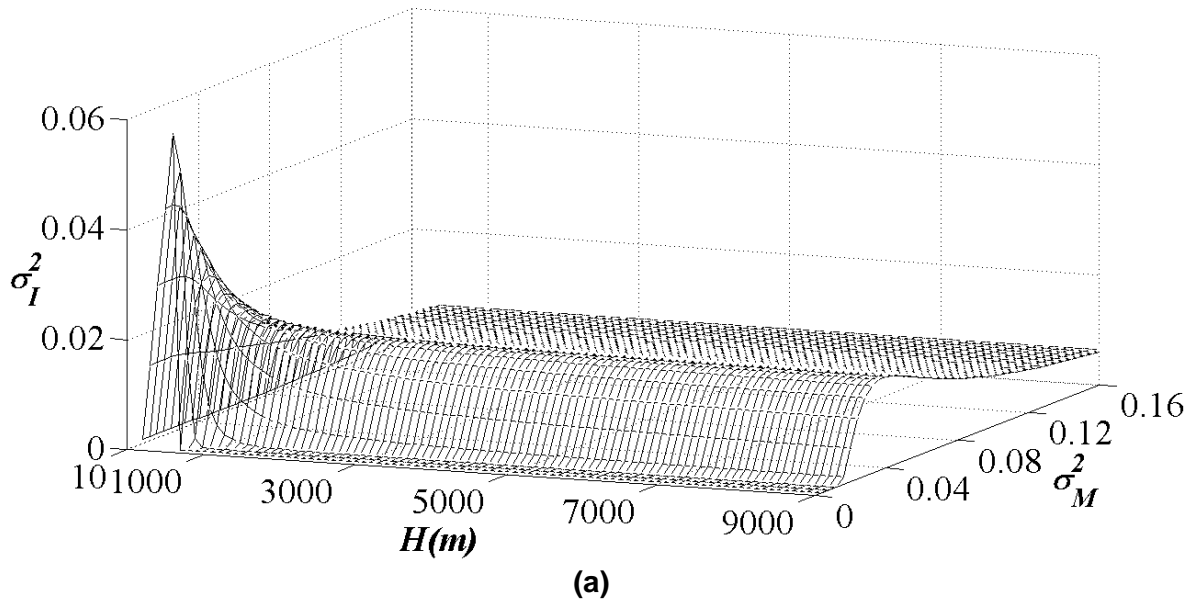


**Figura 15.** Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes longitudes del perfil para una altura del detector de 5000m y un ángulo de incidencia de 25° (figura superior) y 50° (figura inferior). Tomada de Vidales-Basaruto et al., 2017

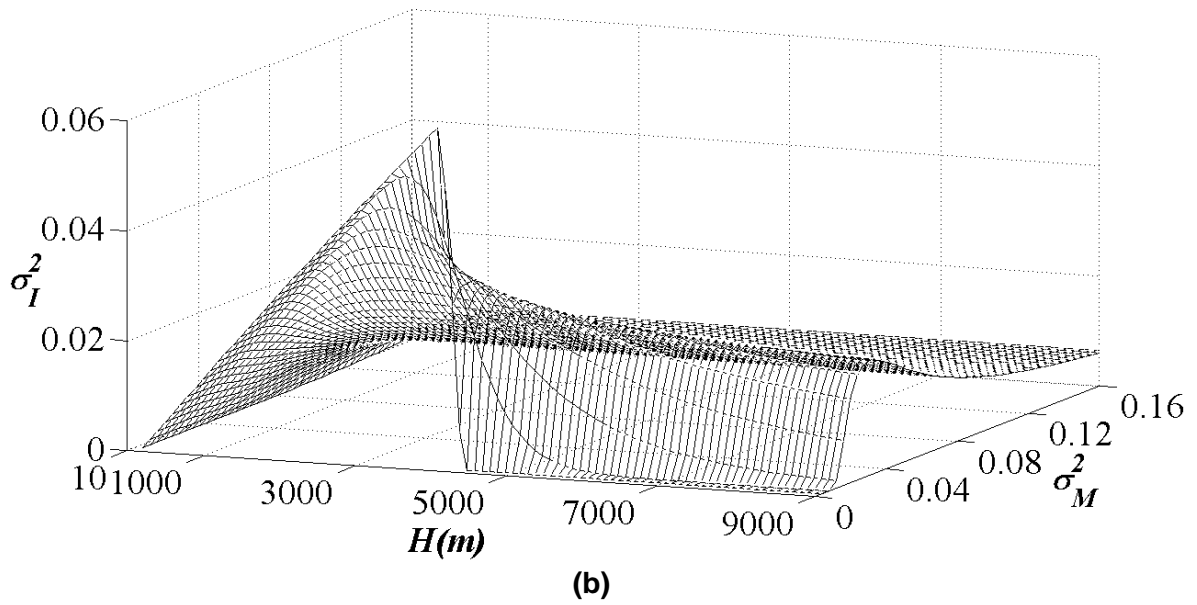
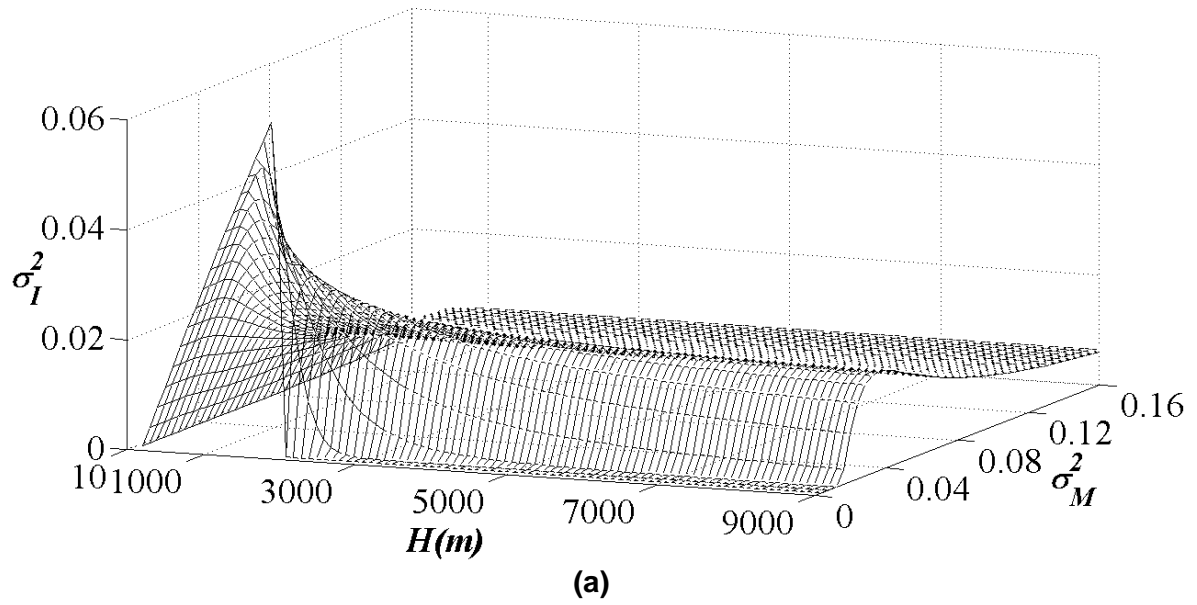
En teoría, es posible analizar todas las longitudes del perfil marino a cualquier altura del detector (Fig. 16 y Fig.17). No obstante, sólo algunas geometrías aportarán información de las varianzas de las intensidades en la imagen para  $\sigma_M^2 \in [0, 0.16]$ . Por ejemplo para estudiar 80m de la superficie marina (Fig. 16a), el rango

de alturas del detector estará entre 10m y 80 m, para alturas del detector mayores a 80 m, se tiene que las curvas de las varianzas son similares pero no contienen información para  $\sigma_M^2 \in [0,0.01]$ . De modo que conforme aumenta la región marina de estudio, se requiere aumentar la altura del detector, lo cual es físicamente lógico debido a que conforme aumenta la altura del detector, se logra abarcar mayor porción de la superficie. Por lo tanto, la geometría óptima del experimento para lograr el proceso inverso exitosamente es determinada.

Los valores de las varianzas de las intensidades en la imagen del patrón de brillo registrado en el detector para diferentes geometrías son muy pequeños. Lo cual indica que las intensidades en valor son similares e implica que no existirán escala de grises en la imagen, por lo tanto, éstos valores de las varianzas de las intensidades en la imagen proporcionan la medida del contraste de la misma, donde a menor varianza mayor contraste y viceversa. Entonces, el mayor contraste para cualquier geometría es cuando tenemos que las pendientes son igual a cero, es decir, la función de densidad de probabilidad es una función delta, esto ocurre para mar tranquilo  $\sigma_M = 0$ , sin ninguna alteración por lo que a la superficie se le puede considerar como un espejo que refleja el Sol.

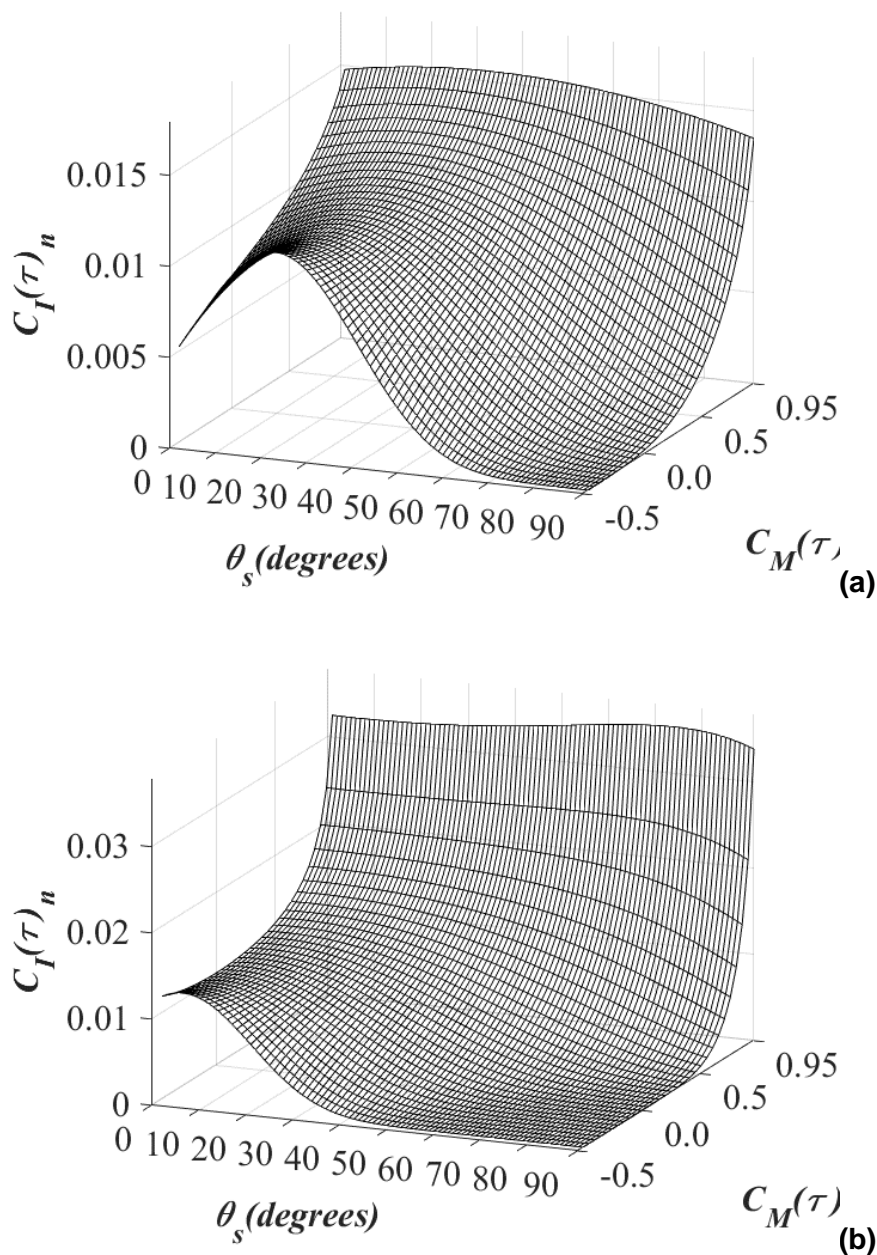


**Figura 16.** Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes alturas del detector a un ángulo de incidencia de  $10^\circ$  y longitud de perfil de (a) 80m y (b) 160m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.



**Figura 17.** Varianzas de las intensidades en la imagen en función de las varianzas de pendientes de superficie para diferentes alturas del detector a un ángulo de incidencia de  $10^\circ$  y longitud de perfil de (a) 320m y (b) 720m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.

## 4.2 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 1D



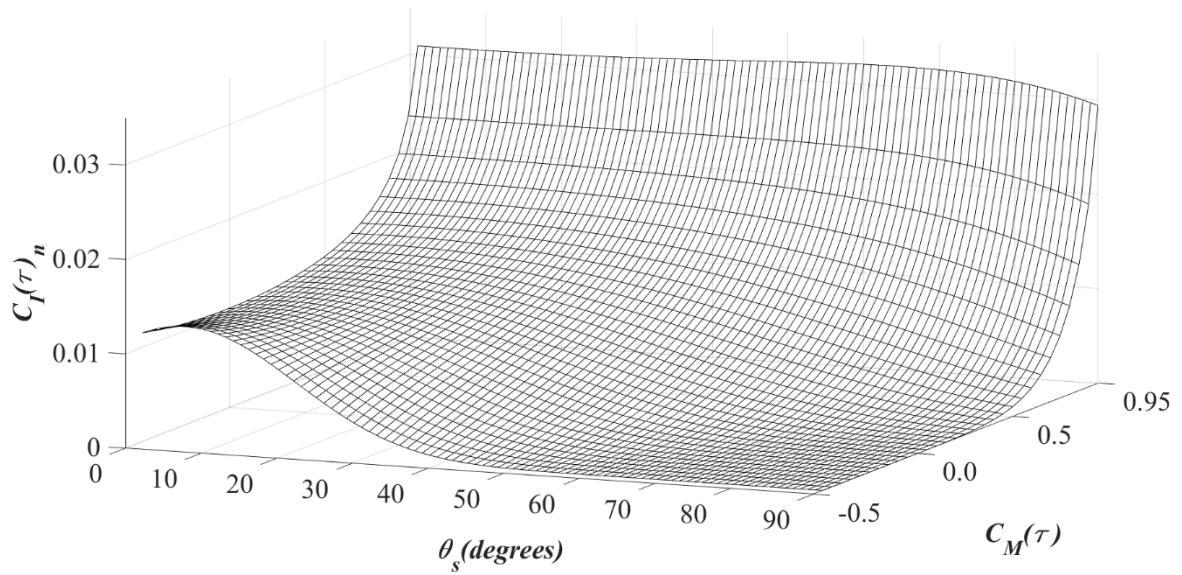
**Figura 18.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para diversos ángulos de incidencia de los rayos del sol sobre una longitud del perfil de 80m a una altura del detector de (a) 100m y (b) 500m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.

Para obtener las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen, se partió del vector de correlaciones de las pendientes de la superficie marina  $C_M \in [-0.5, 0.95]$ . El rango de pendientes alrededor

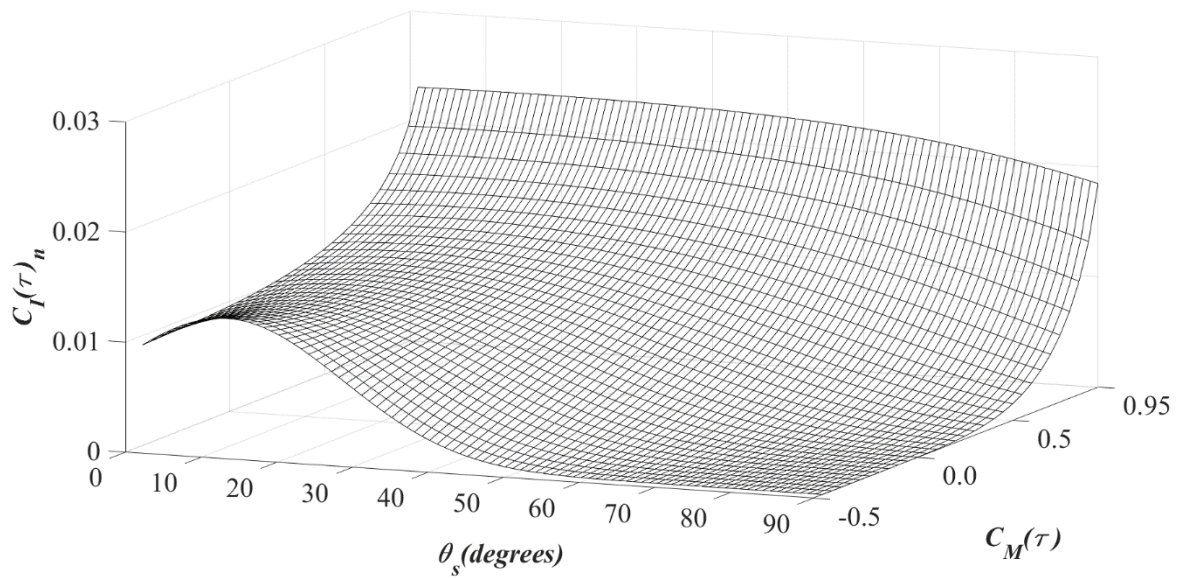


del punto  $i$  en estudio donde ocurre la reflexión especular está determinado por la ecuación (16), por lo que a partir de un punto de la superficie marina se realiza un barrido sobre los demás puntos de la longitud del perfil analizada para obtener las correlaciones de la superficie marina, por lo que cada valor de pendiente del intervalo de pendientes alrededor del punto  $i$  tendrá a  $C_M \in [-0.5, 0.95]$  como el vector de correlaciones de las pendientes de superficie marina con el intervalo de pendientes alrededor del punto  $j$ , donde el valor mínimo de correlación de las pendientes corresponde cuando existe un ángulo grande entre las normales a las tangentes en los puntos (sin llegar a ser anti paralelas  $<180^\circ$ ), mientras que el valor máximo nos indica un ángulo muy pequeño (sin llegar a ser paralelas, muy próximo a  $0^\circ$ ) entre éstas. Entonces para  $i$  y  $j$  muy próximos  $C_M = -0.5$  indica una forma de onda muy irregular, ya que de la forma de la superficie marina cambia de manera abrupta, lo contrario sucede para  $C_M = 0.95$ . Para  $i$  y  $j$  muy lejanos, no se puede intuir la forma de la superficie marina como se hizo con anterioridad. Sin embargo, se incluyen crestas y valles de la superposición de todas las ondas que conforman el oleaje. Las pendientes de la superficie del mar tienen una función de densidad de probabilidad conjunta Gaussiana para estadística Gaussiana y una función de densidad de probabilidad conjunta no Gaussiana para estadística no Gaussiana. Las curvas de las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen con respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie marina, determinan las condiciones óptimas para realizar el proceso inverso para obtener el modelado de la superficie marina usando el espectro de energía unidimensional como se indica en la ecuación (55). Para lo anterior, es necesario utilizar las curvas que contengan mayor gradiente en cada punto y evitar a toda costa las geometrías del problema que den como resultado curvas con valores constantes.

Si se necesita analizar una longitud de perfil es útil encontrar el ángulo de incidencia de la luz solar óptimo, así como la altura del detector más adecuada. Un ejemplo considerando una longitud del perfil de 80m a 4 alturas del detector, se presenta en la figura 18. Teóricamente para una altura del detector de 100m (Fig. 18a), para los 80m del perfil oceánico el proceso inverso puede realizarse para la mayoría de los ángulos de incidencia. No obstante, los ángulos de incidencia óptimos van desde  $30^\circ$  hasta  $70^\circ$  para una superficie marina con  $C_M \in [-0.5, 0.95]$ . Para  $C_M \in [0, 0.95]$  todos los ángulos de incidencia son óptimos. Al aumentar la altura del detector a 500m, el intervalo de los ángulos óptimos disminuye ( $[25^\circ, 40^\circ]$ ) para  $C_M \in [-0.5, 0.95]$ , mientras que para  $C_M \in [0.5, 0.95]$  cualquier ángulo proporciona las condiciones apropiadas para realizar el proceso inverso.

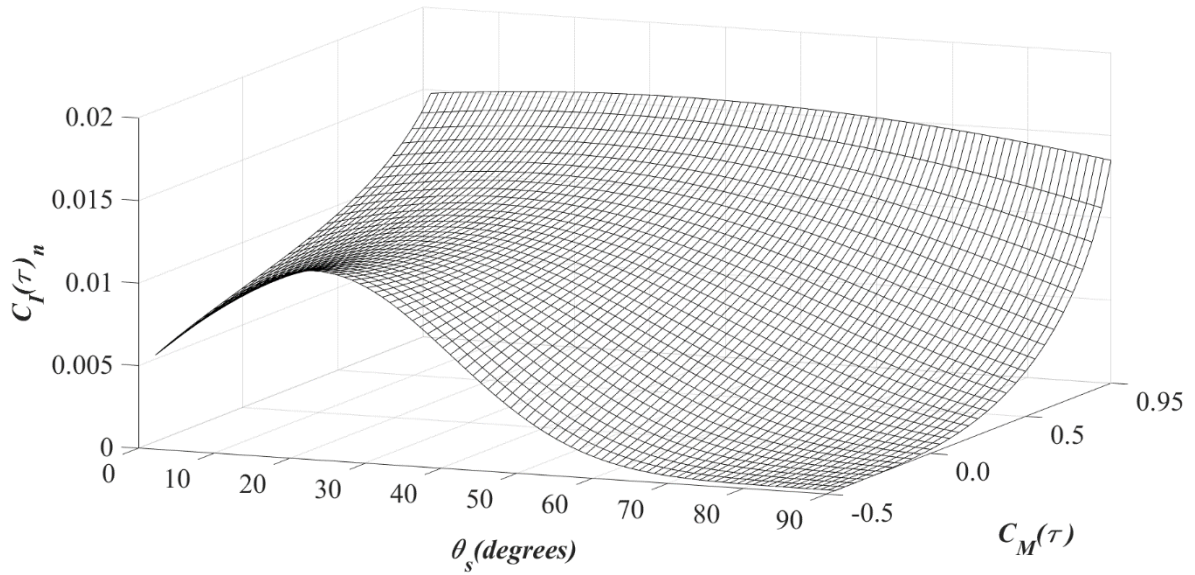


(a)

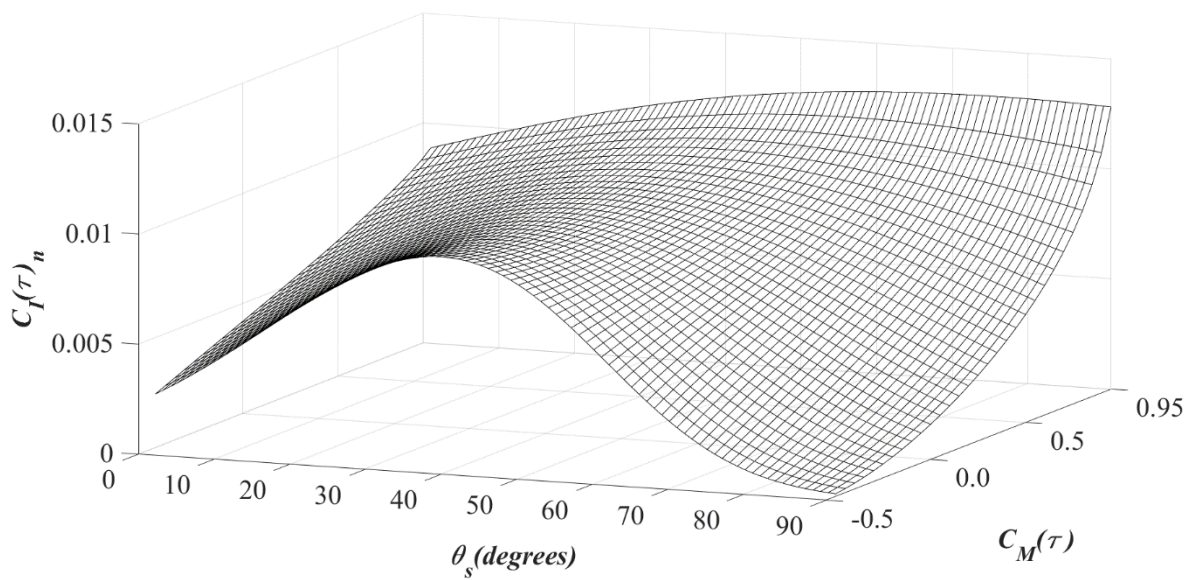


(b)

**Figura 19.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para diversos ángulos de incidencia a una altura del detector de 100 m para longitudes del perfil de (a) 20m y (b) 40m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.



(a)



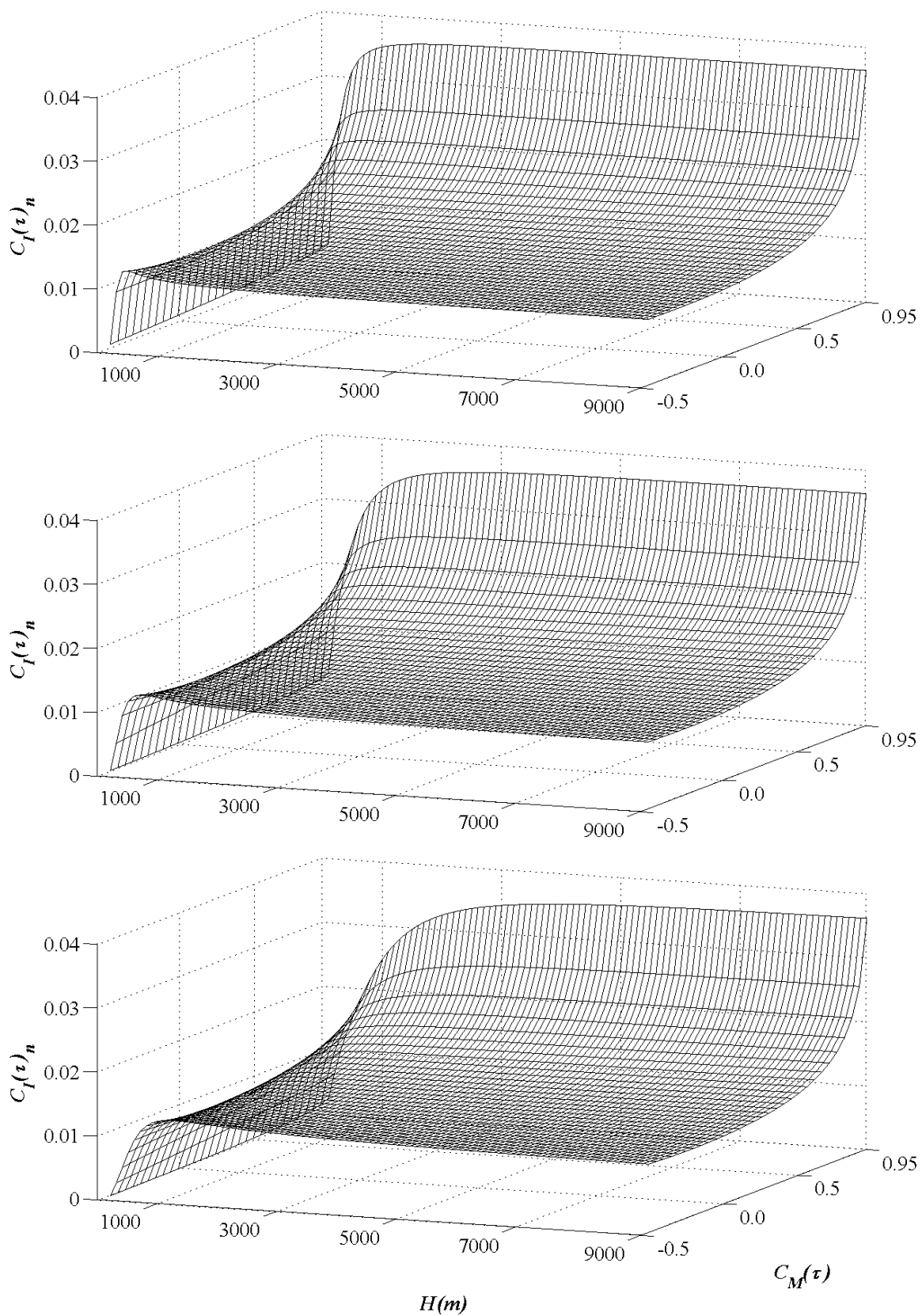
(b)

**Figura 20.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para diversos ángulos de incidencia a una altura del detector de 100 m para longitudes del perfil de (a) 80m y (b) 160m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.

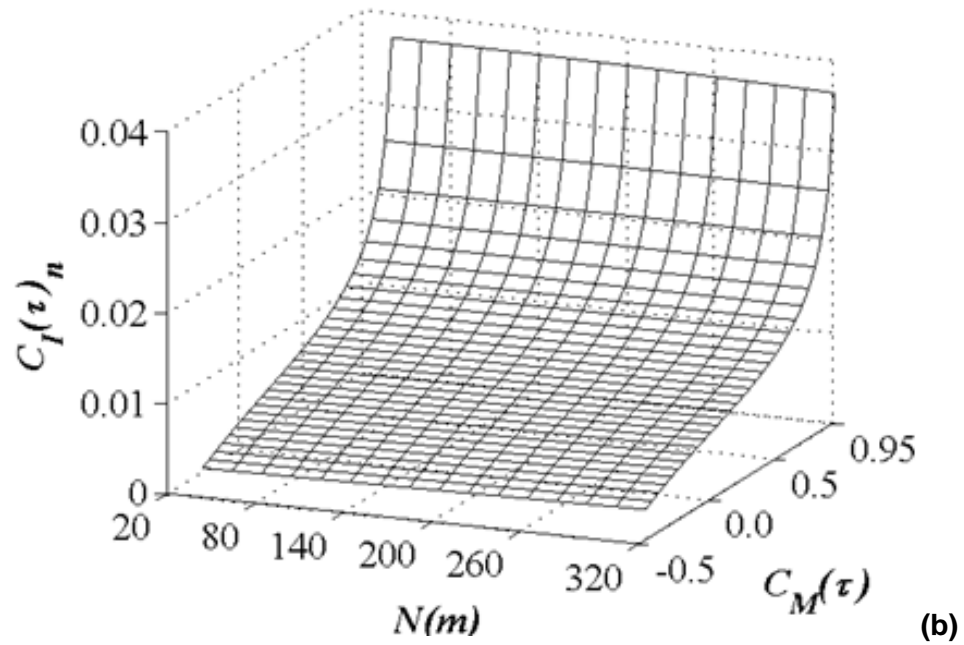
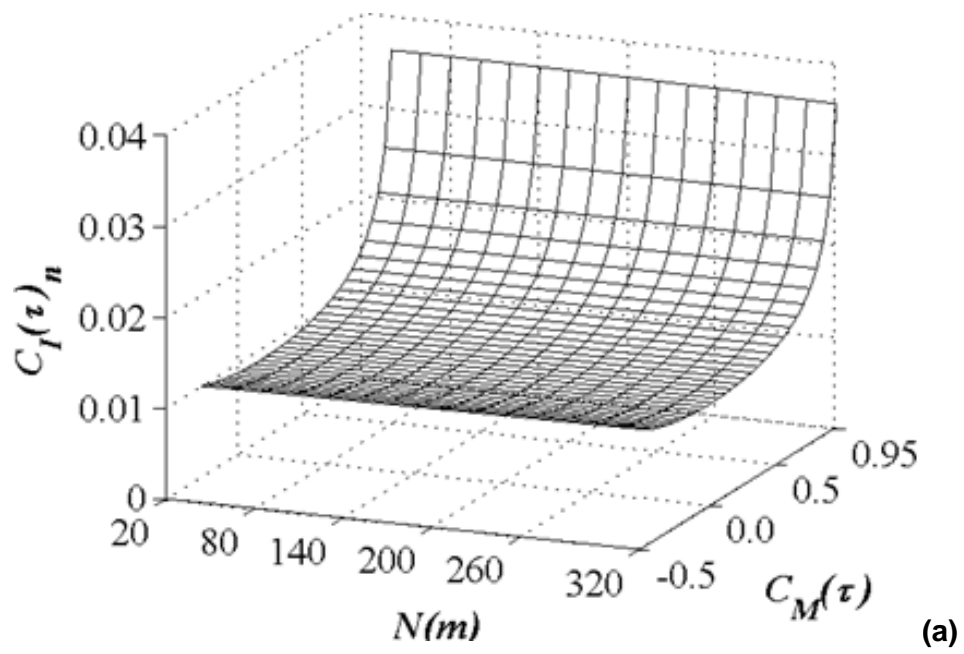
Para obtener el modelado de la superficie marina a partir del espectro de energía unidimensional, teniendo como parámetro fijo la altura del detector, requerimos averiguar qué región oceánica se puede

abarcar para realizar el análisis, así como el ángulo de incidencia óptimo, suponiendo que la altura del detector está a 100m y las longitudes del perfil oceánico que se pretenden analizar son 20m, 40m, 80m y 160m como se muestra en las figuras 19 y 20, se observa que conforme aumenta la longitud del perfil, las curvas que proporcionan las condiciones adecuadas para el proceso inverso se van situando a ángulos de incidencia de los rayos solares cada vez mayores. Por ejemplo, la figura 19 corresponde a una longitud de perfil de la superficie marina de 20m y 40m en la que los ángulos de incidencia van entre  $20^\circ$  y  $40^\circ$  y  $30^\circ$  y  $50^\circ$ , respectivamente, para todo el vector de correlaciones de pendientes de la superficie marina ( $C_M \in [-0.5, 0.95]$ ). La figura 20 muestra las longitudes de perfil de 80m y 160m en los que los intervalos de los ángulos de incidencia de la luz solar están dados por  $[40^\circ, 60^\circ]$  y  $[65^\circ, 90^\circ]$ , respectivamente. Para 160m (Fig. 20b) los ángulos ineficaces se encuentran entre  $15^\circ$  y  $35^\circ$ .

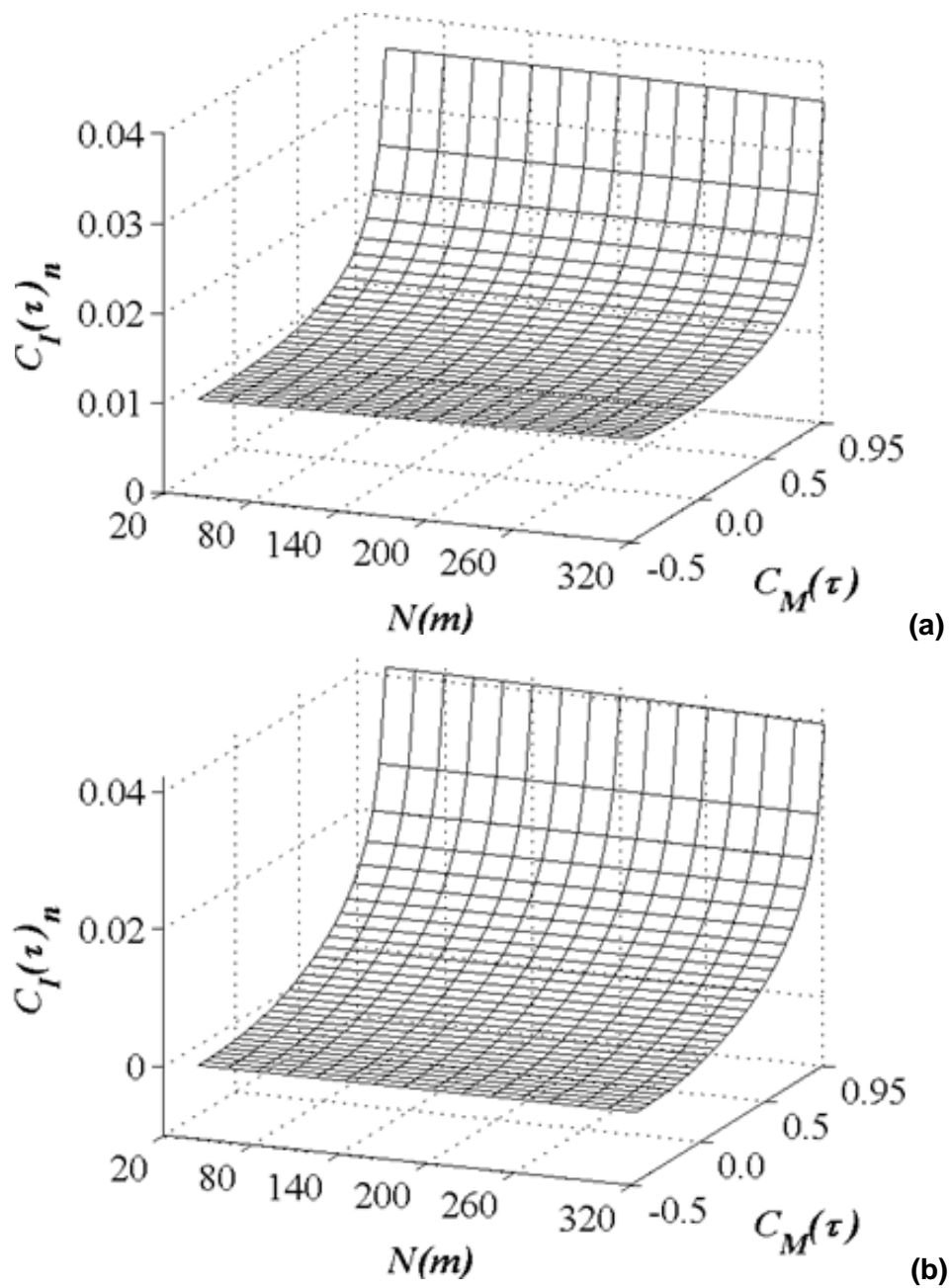
La figura 21 muestra algunos ejemplos de curvas de la relación entre las funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen y las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie marina para distintas alturas del detector cuando los rayos solares inciden sobre la superficie a un ángulo de reflexión de  $10^\circ$ . Se observa que para una altura de detector mayor o igual a 1000m, las curvas tienen el mismo comportamiento para una longitud del perfil de 80m (Fig. 21a). Cuando la altura del detector es mayor a 1300m se obtienen las mismas curvas de las funciones de auto-correlación para 160m de longitud de perfil (Fig. 21b) y al aumentar la longitud del perfil hasta 320m, la altura del detector a partir de la cual se tiene el mismo comportamiento de las curvas corresponde a 3000m (Fig. 21c). Teóricamente se muestra que para cualquier altura del detector las funciones de auto-correlación quedan determinadas. No obstante, las curvas que proporcionan las condiciones óptimas para realizar el procesamiento de inversión quedan determinadas para las alturas del detector mencionadas con anterioridad, ya que para 80, 160m y 320m de longitud de perfil analizada desde una altura menor que 1000m, 1300m y 3000m, respectivamente, las curvas de las funciones de auto-correlación son mayormente constantes, lo cual no es viable para obtener las funciones de auto-correlación de la superficie marina descritas en la ecuación (55).



**Figura 21.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para distintas alturas del detector a un ángulo de incidencia de  $10^\circ$  para longitudes del perfil de (a) 80m, (b) 160m y (c) 320m, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.



**Figura 22.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para distintas longitudes del perfil marino a una altura de 5000m del detector a un ángulo de incidencia de (a) 5° y (b) 10°, respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.



**Figura 23.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen respecto a las funciones de auto-correlación de las pendientes marinas para distintas longitudes del perfil marino a una altura de 5000m del detector a un ángulo de incidencia de (a)  $25^\circ$  y (b)  $50^\circ$ , respectivamente. Considerando función de brillo Rect estadística Gaussiana.

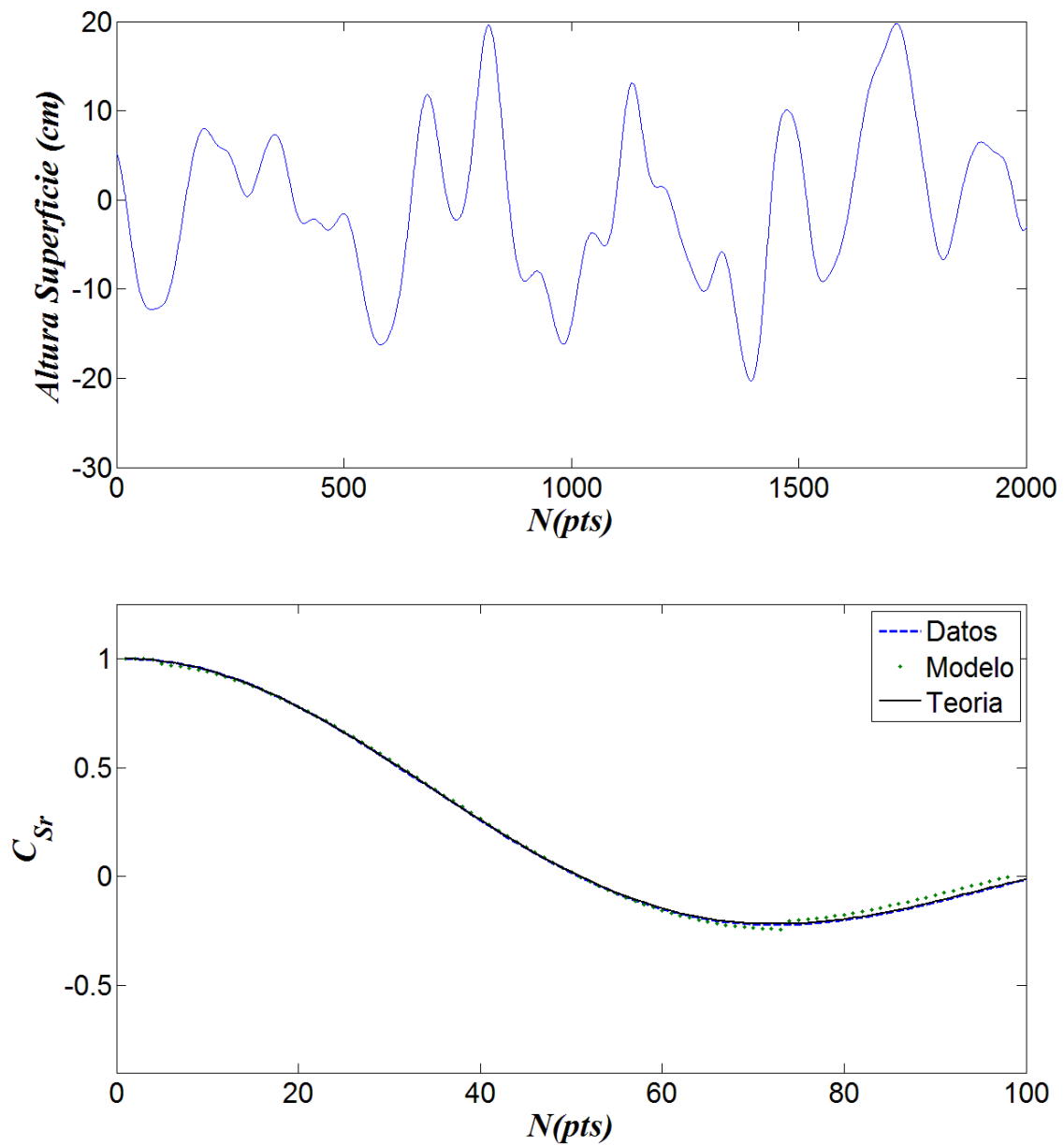
De las figuras 22 y 23, cada ángulo de incidencia considerado para 5000m de altura del detector proporciona los mismos valores de las curvas de las funciones de auto-correlación sin importar la longitud del perfil del mar considerado, esto es muy útil en términos de procesamiento de tiempo. Para realizar un proceso inverso óptimo, los ángulos de incidencia superiores a  $25^\circ$  son la mejor opción, donde se esperan

valores negativos para ángulos de incidencia cercanos o superiores a  $50^\circ$ , como se muestra en la figura 23b.

En general, los valores de la relación entre las funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen y las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie marina para distintas geometrías del problema, corresponden a valores muy pequeños donde los máximos valores ocurren para  $C_M = 0.95$  que al normalizar, se tiene que  $C_I = 1 \leftrightarrow C_M = 0.95$  y así sucesivamente, de tal forma que es posible encontrar el vector de las pendientes de superficie marina para luego realizar el procedimiento que indica la ecuación (55) y obtener la auto-correlación de la superficie marina (proceso inverso). Para el proceso inverso, se realizaron los cálculos para  $C_M = [-1,1]$  y los resultados se muestran en la siguiente sección.



### 4.3 Proceso inverso 1D

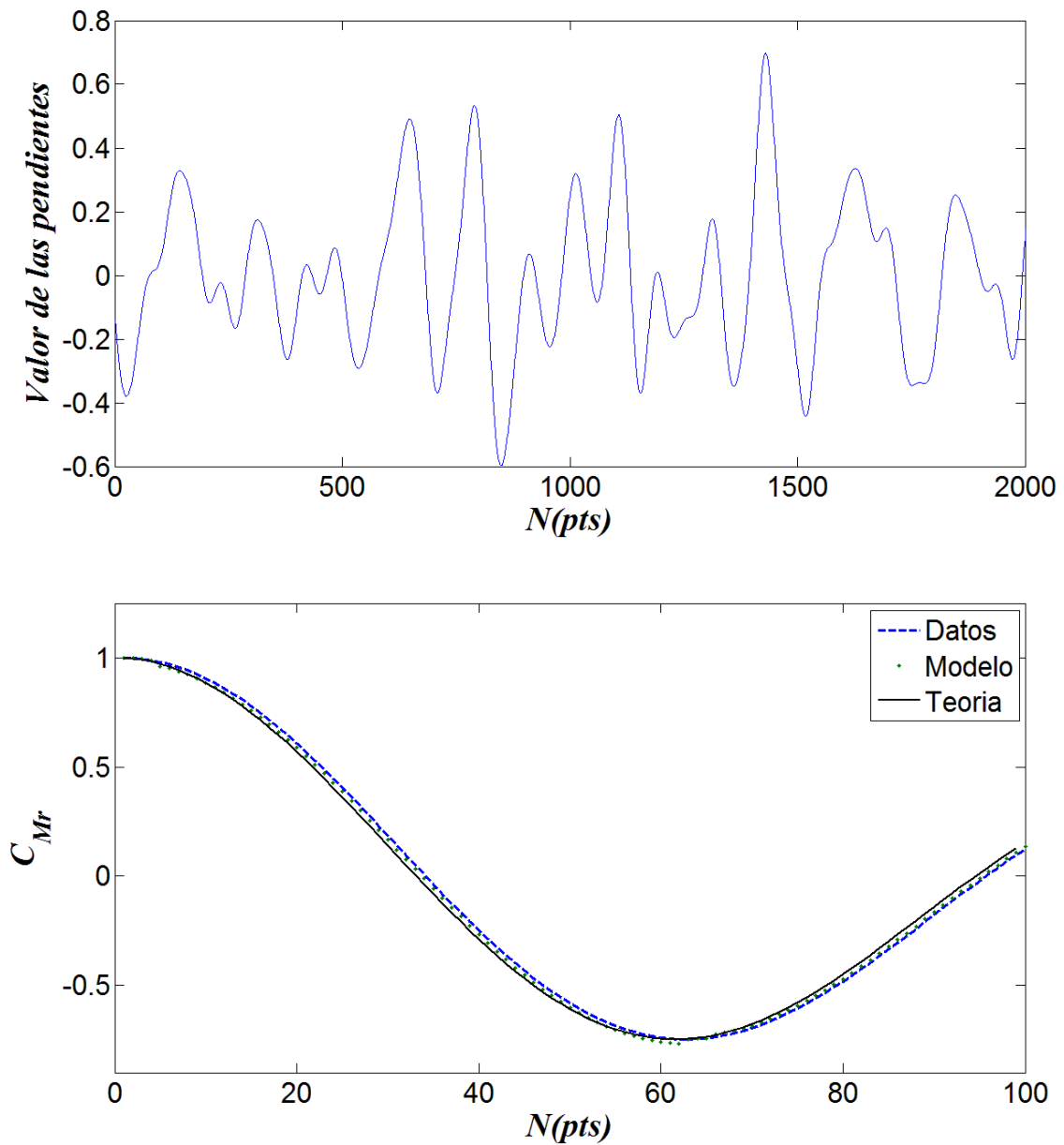


**Figura 24.** Superficie marina numéricamente generada para un espectro Rect, estadística Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).

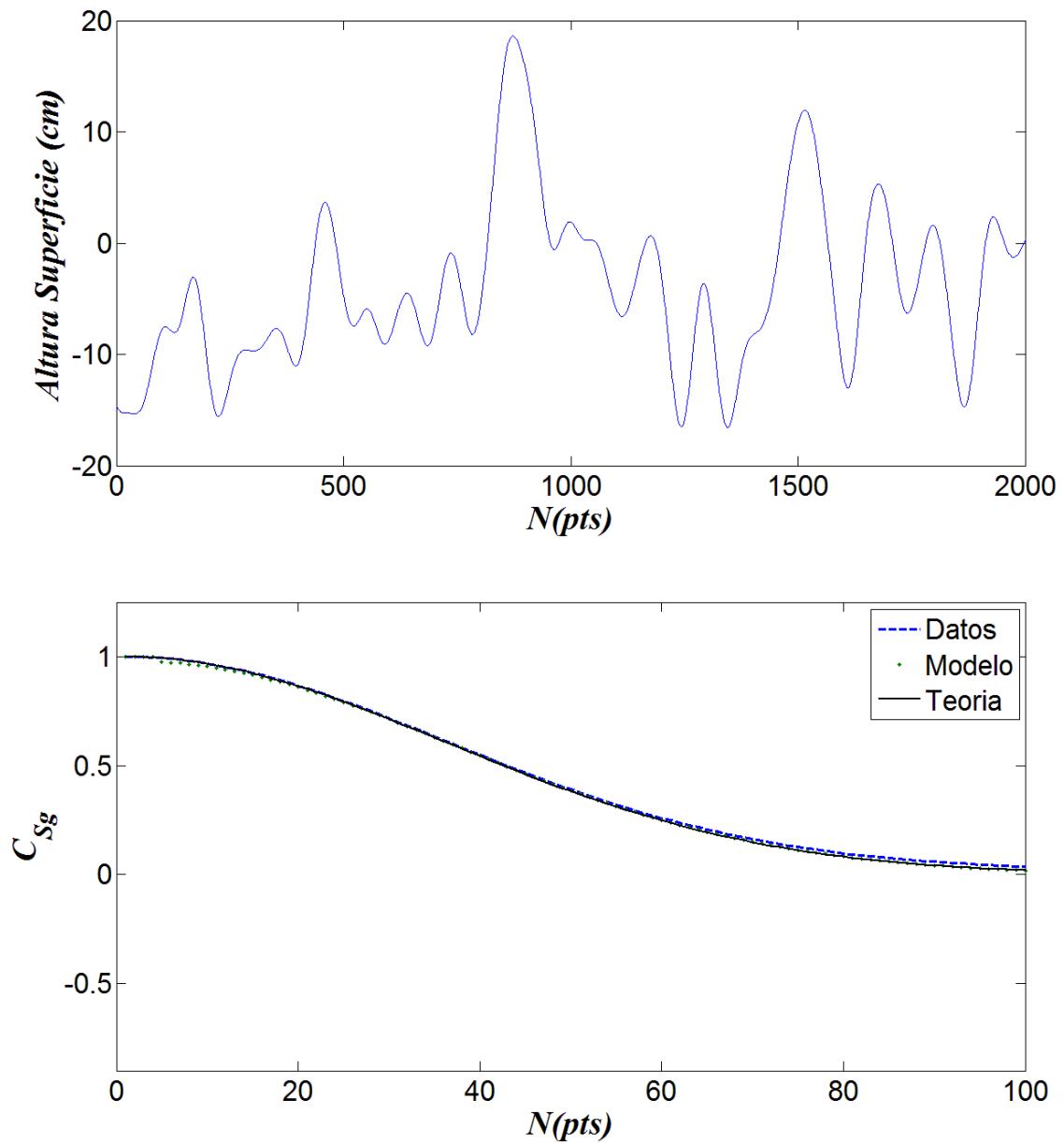
En las figuras 24 y 25, se presentan la superficie marina generada numéricamente y las alturas de las pendientes de la superficie generada con sus espectros de energía correspondientes. Se comparan las

correlaciones teórica, numérica y la que se obtiene a partir de realizar el proceso inverso utilizando las curvas de las relaciones entre las funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen y las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie calculadas al hacer uso de la función de brillo rect y asumiendo que las pendientes tienen una función de densidad de probabilidad gaussiana para una longitud de perfil de 320m o bien 16000 puntos, un ángulo de incidencia de  $25^\circ$  y una altura del detector de 100m. Para el espectro numérico se realizaron 5000 generaciones de superficies aleatorias con 16384 puntos y se realizó el promedio con lo que se obtuvo la curva espectral punteada de las figuras. Se observa que la correlación numérica y la del modelo son similares a la teórica, lo cual nos indica que tanto la metodología implementada, así como la generación de superficies son válidas y fiables. Las figuras 26 y 27, muestran la superficie generada y las pendientes de dicha superficie, respectivamente, así como las correspondientes correlaciones: teórica, numérica y la obtenida mediante el proceso inverso realizado a las curvas de las funciones de auto-correlación utilizando función de brillo gaussiana y estadística gaussiana para las pendientes de superficie. De igual forma, se observa que las correlaciones son idénticas.

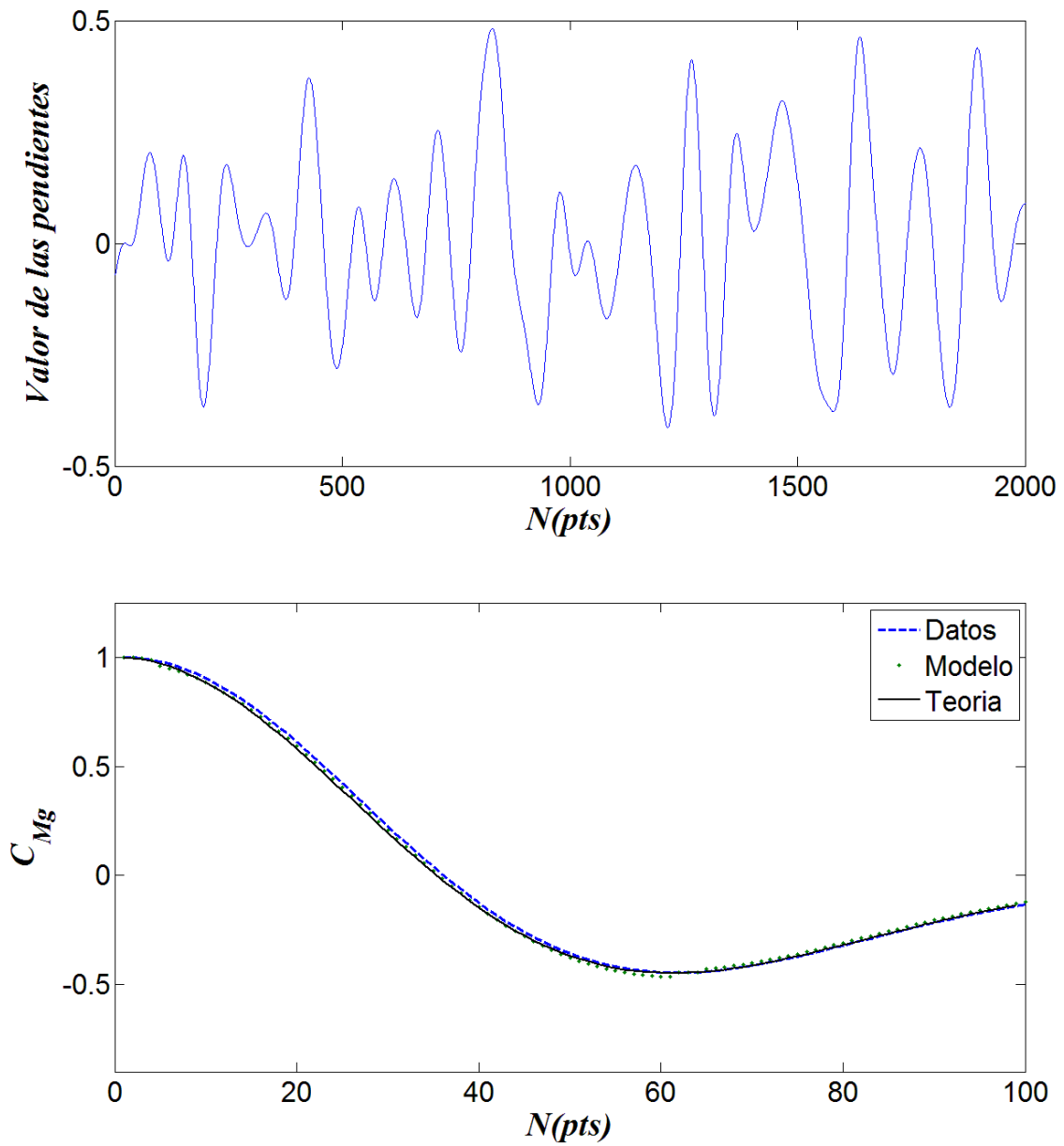
Las figuras 28, 29, 30 y 31 corresponden a los resultados al suponer que las pendientes de la superficie obedecen una estadística no gaussiana, donde las figuras 28 y 30 corresponden a las superficies generadas utilizando un espectro rect y gaussiano, respectivamente, además se muestran las curvas de las correlaciones de superficie: teórica, numérica obtenida a partir de 5000 realizaciones con 16384 puntos cada una y la calculada con el proceso inverso implementado sobre la metodología unidimensional entre las relaciones de las funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen y las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie marina para un ángulo de incidencia de los rayos solares de  $25^\circ$  y 16384 puntos de longitud de perfil marino. Las figuras 29 y 31 son las pendientes de la superficie generada con su respectiva correlación teórica, numérica y la que se obtiene al implementar la ecuación (55) en las curvas de las funciones de auto-correlación calculadas. Se observa que las correlaciones numéricas y la obtenida con el proceso inverso son similares a la correlación teórica tanto para la superficie como para sus pendientes (ec. 56 y 57 para gaussiano y ec. 57 y 59 para rect).



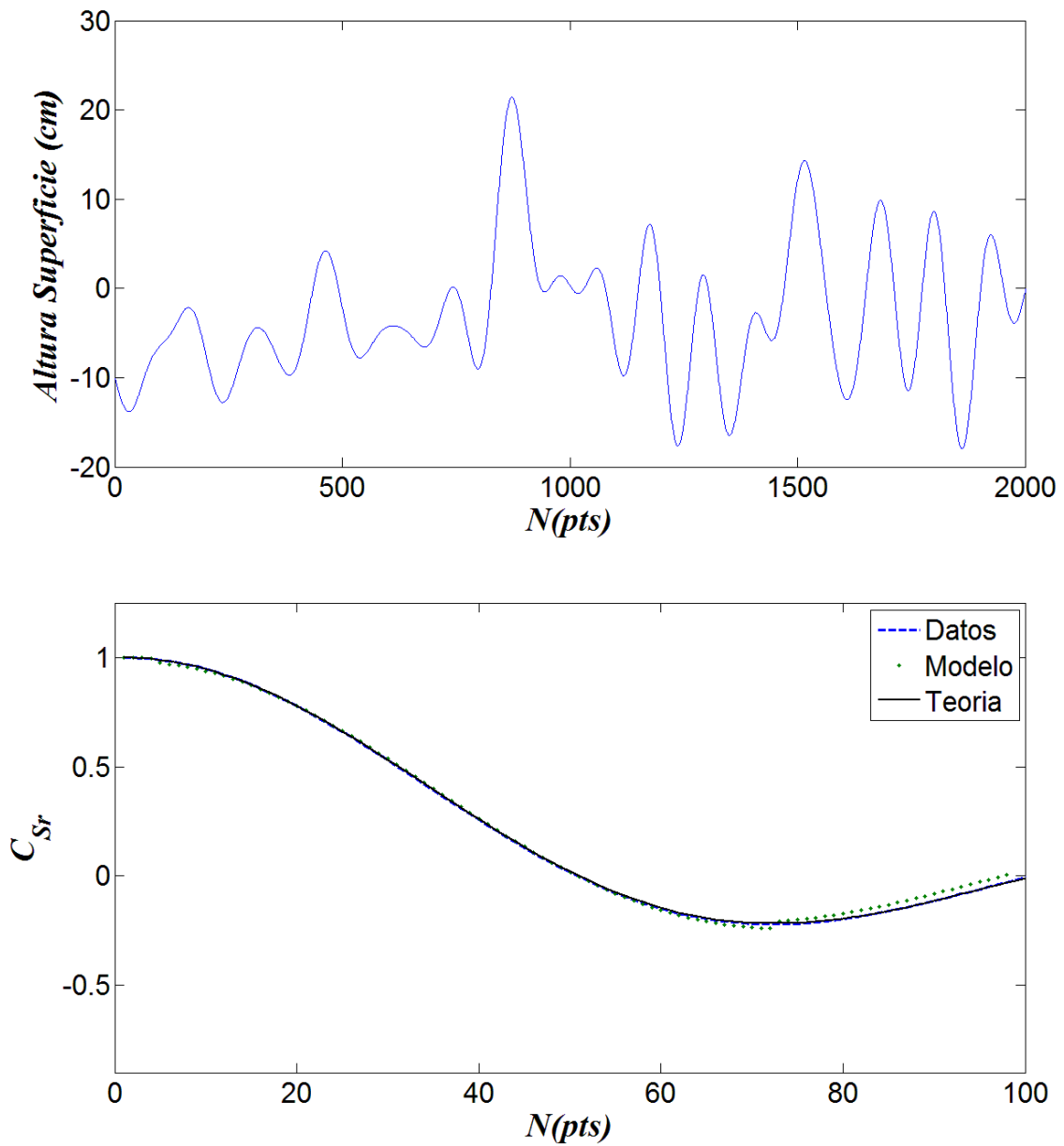
**Figura 25.** Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 24 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).



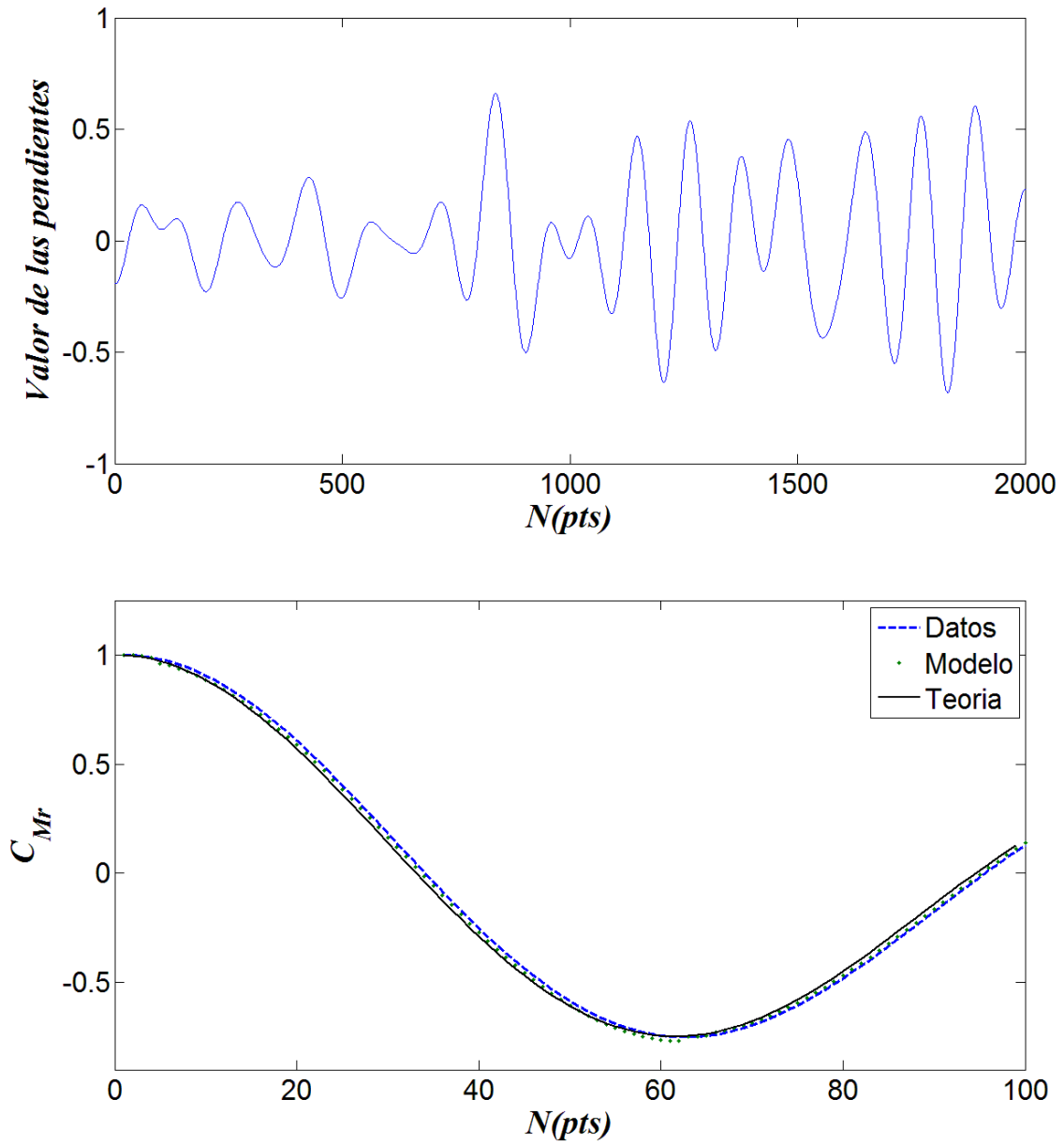
**Figura 26.** Superficie marina numéricamente generada para un espectro Gaussiano, estadística Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).



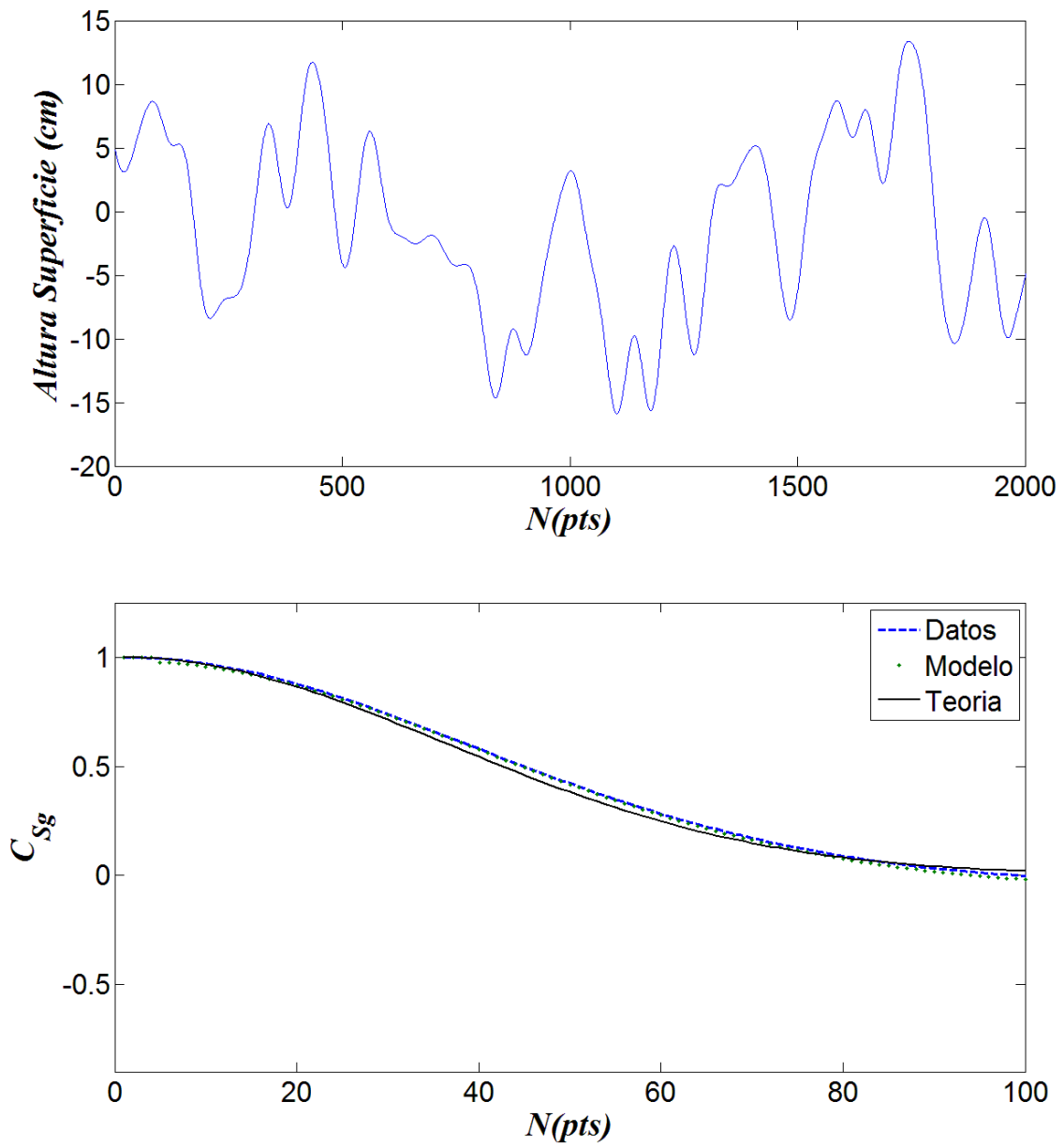
**Figura 27.** Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 26 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).



**Figura 28.** Superficie marina numéricamente generada para un espectro Rect, estadística no Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).

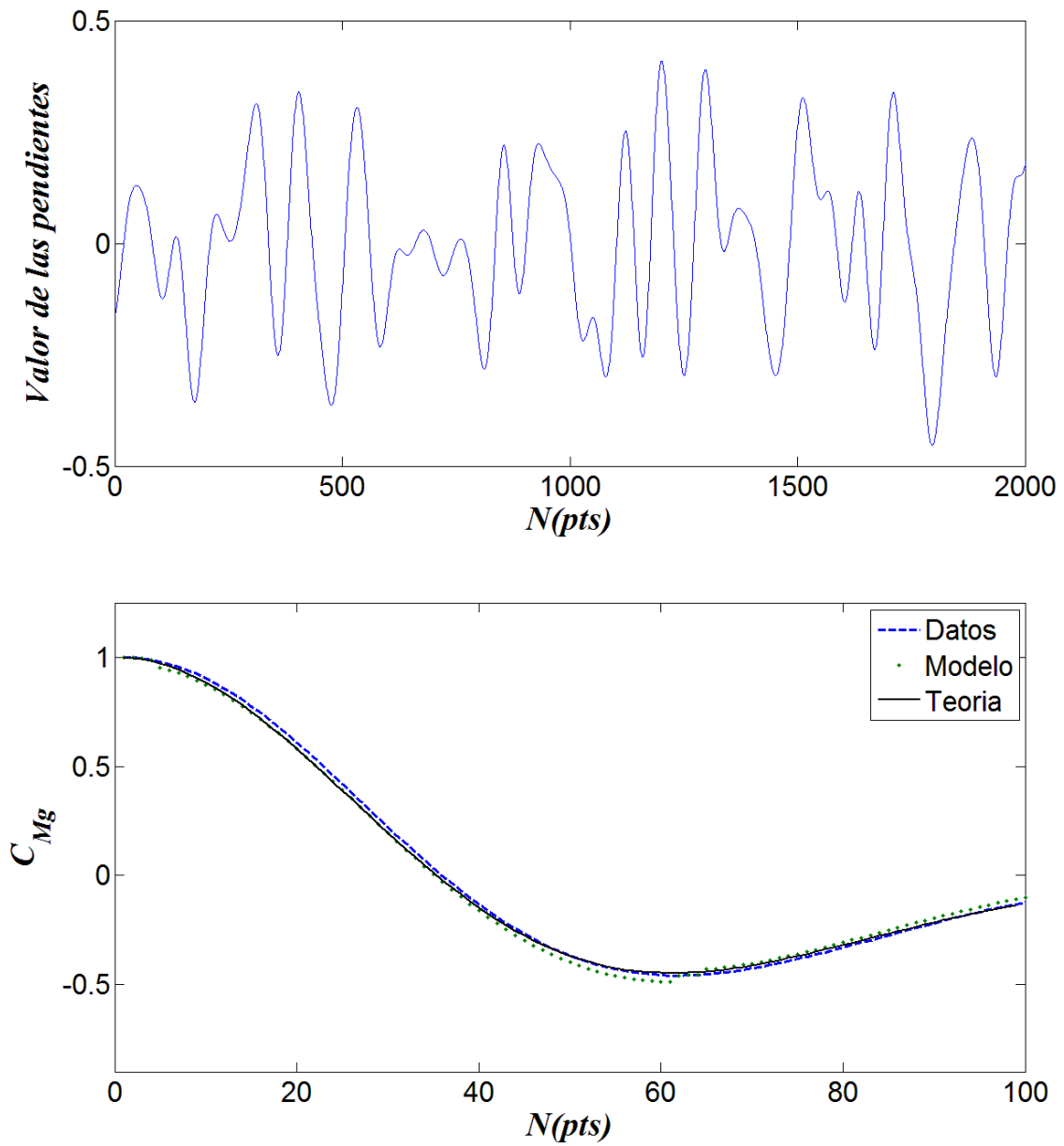


**Figura 29.** Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 28 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).



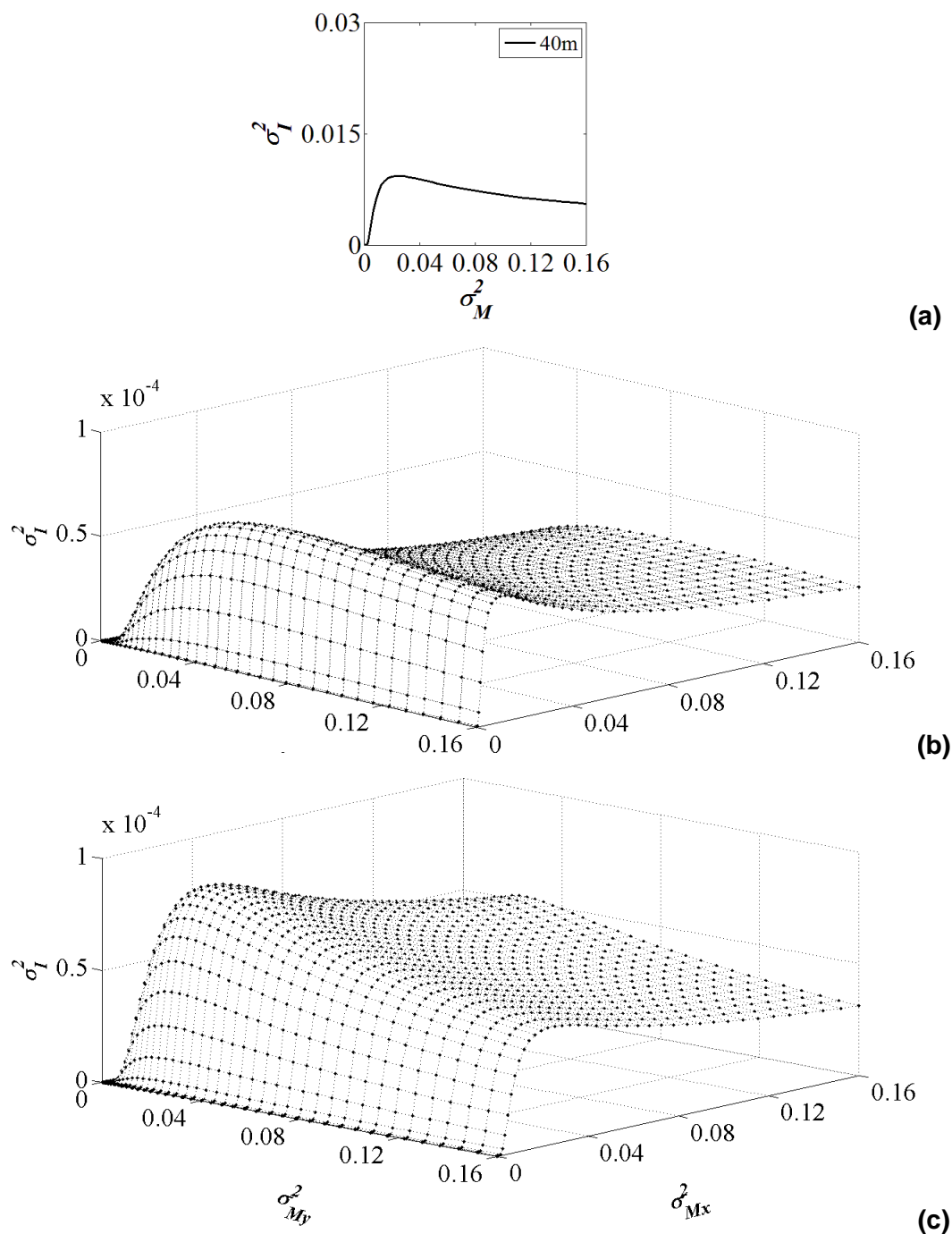
**Figura 30.** Superficie marina numéricamente generada para un espectro Gaussiano, estadística no Gaussiana (figura superior). Comparación de las correlaciones de la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).





**Figura 31.** Pendiente de la superficie marina numéricamente generada de la figura 30 (figura superior). Comparación de las correlaciones de las pendientes en la superficie marina teórico (línea sólida), numérico (línea punteada) y del modelo unidimensional (puntos), proceso inverso (figura inferior).

#### 4.4 Varianzas de las intensidades en la imagen 2D

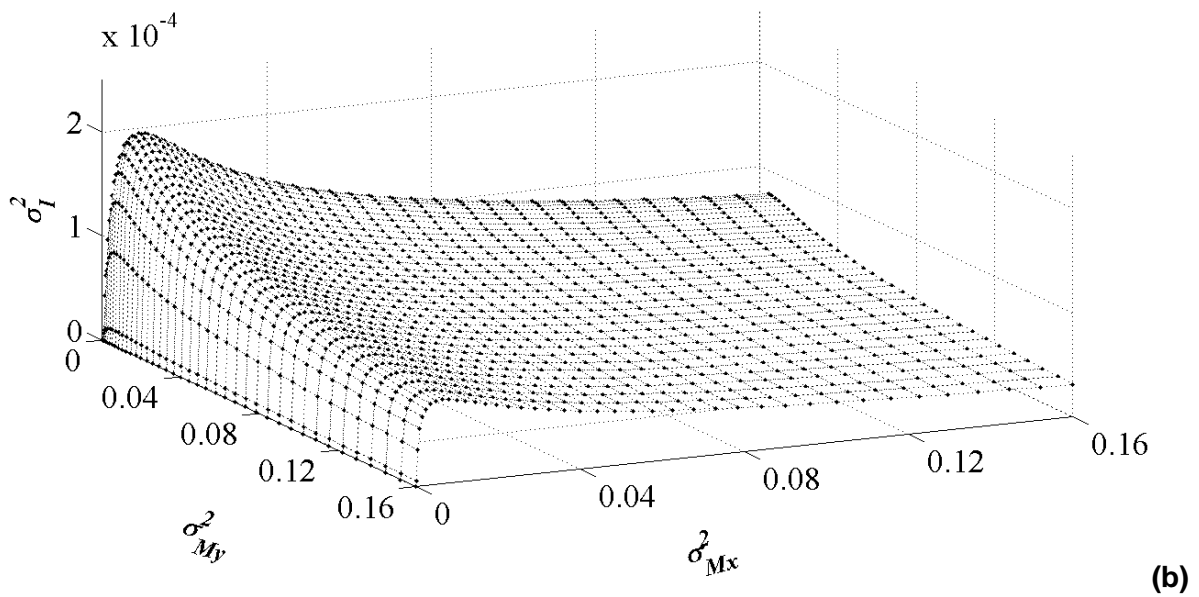
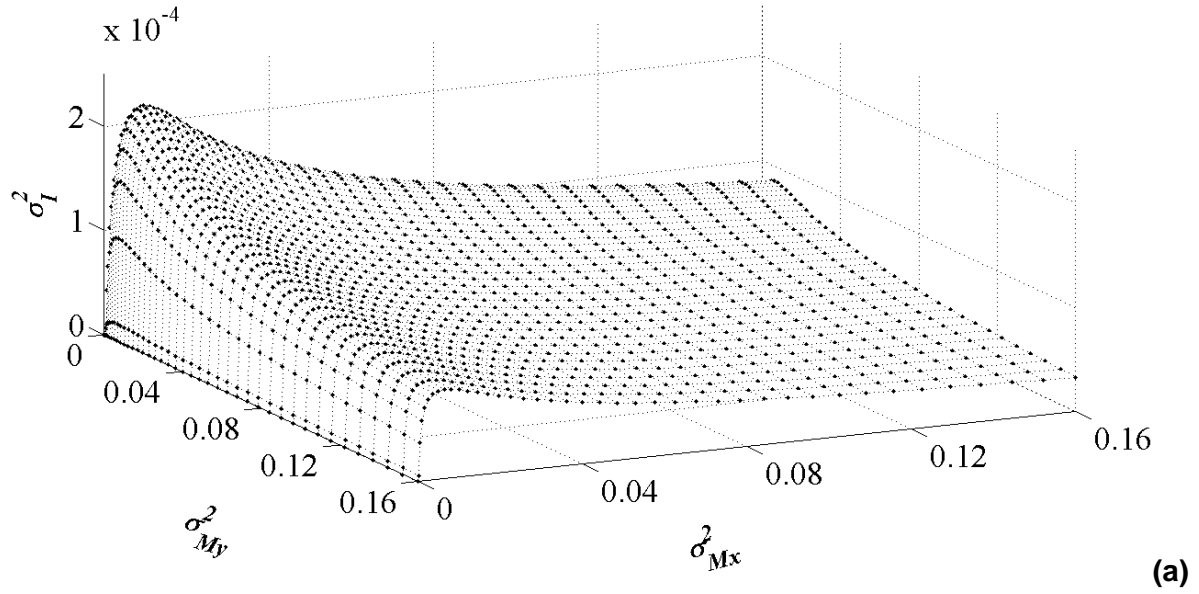


**Figura 32.** Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso unidimensional (a), altura del detector de 100m, ángulo de incidencia de  $30^\circ$  y longitud de perfil de 40m sobre la superficie marina. Así mismo, para el caso bidimensional usando la metodología anterior (Martín-Atienza y Álvarez- Borrego, 2013) y la metodología implementada en éste trabajo (b) y (c), respectivamente.

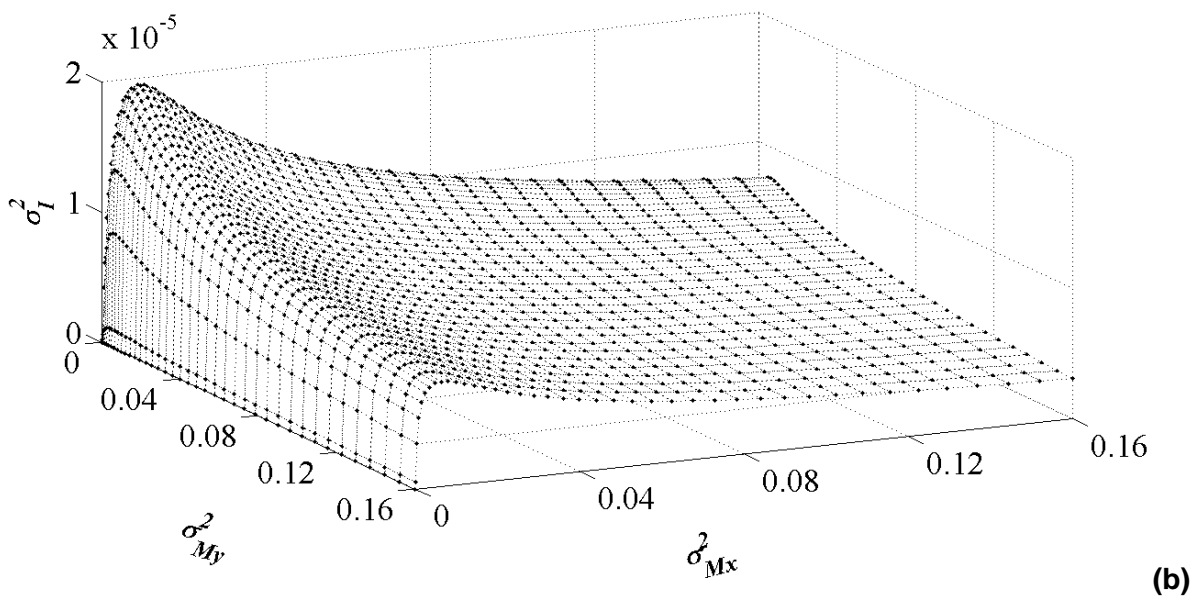
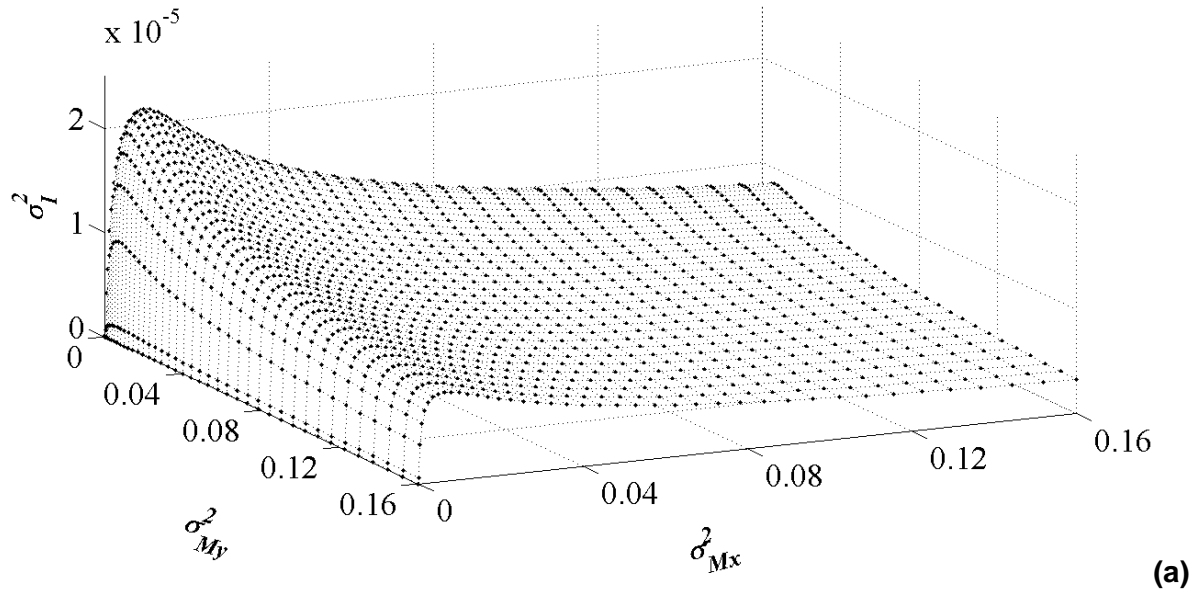
La figura 32 muestra las curvas de varianza en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para un detector situado a 100m sobre la superficie marina con un ángulo de incidencia de los rayos solares de  $30^\circ$  y una longitud de perfil de 40m. La figura 32a muestra el caso unidimensional. La figura 32b representa los resultados que se obtuvieron al implementar la metodología bidimensional descrita por Martín-Atienza y Álvarez-Borrego (2013). La figura 32c corresponde a las curvas de varianza que fueron calculadas a partir de la metodología bidimensional desarrollada en éste trabajo de Tesis. Las curvas en la figura 32c tienen valores mayores con respecto a las curvas de la figura 32b debido a que la rect bidimensional proporciona una mayor contribución energética en comparación con la función de brillo circ dada su forma matemática. Además, las curvas presentadas en la figura 32c son una clara extensión de la curva unidimensional mostrada en 32a, donde los valores que alcanzan son en consecuencia de la contribución al añadir el eje y a los cálculos. No obstante, la forma de las curvas son idénticas a las que se obtuvieron en el caso 1D, de tal forma que la discusión de los resultados es análoga a la que realizó con anterioridad. Las diferencias principales entre utilizar una función de brillo rect bidimensional en lugar de una función de brillo circ radican en el tiempo de ejecución para la realización de una geometría del problema, dado que para la circ los ejes x y y son dependientes uno del otro, mientras que para la rect ambos ejes permaneces independientes entre sí, con lo que las expresiones matemáticas se simplifican considerablemente así como su cálculo, lo cual se refleja en el tiempo de ejecución y razón por la cual 40m correspondió a la longitud del perfil que se logró obtener en un tiempo aproximado de dos semanas al hacer uso de las directivas OpenMP de la programación paralela para cuando el patrón de brillo plasmado en la imagen se supone queda modelado por la función de brillo circ, en contra parte, al usar la rect bidimensional éste tiempo de ejecución fue mucho menor (unas cuantas horas).

Las figuras 33 y 34, representan las curvas de varianzas para una función de brillo rect bidimensional y una gaussiana bidimensional, respectivamente, para 500m de altura del detector a  $20^\circ$  de incidencia de los rayos solares sobre un área marina de 180m x 180m. Se observa que para una estadística gaussiana los valores esperados son mayores que con la estadística no gaussiana al hacer uso de la misma función de brillo (Fig. 33a y Fig. 33b para rect 2D; Fig 34a y Fig. 34b para gaussiana 2D). Sin embargo, los valores son muy similares con lo que, implementando una estadística ésta representará a ambas.

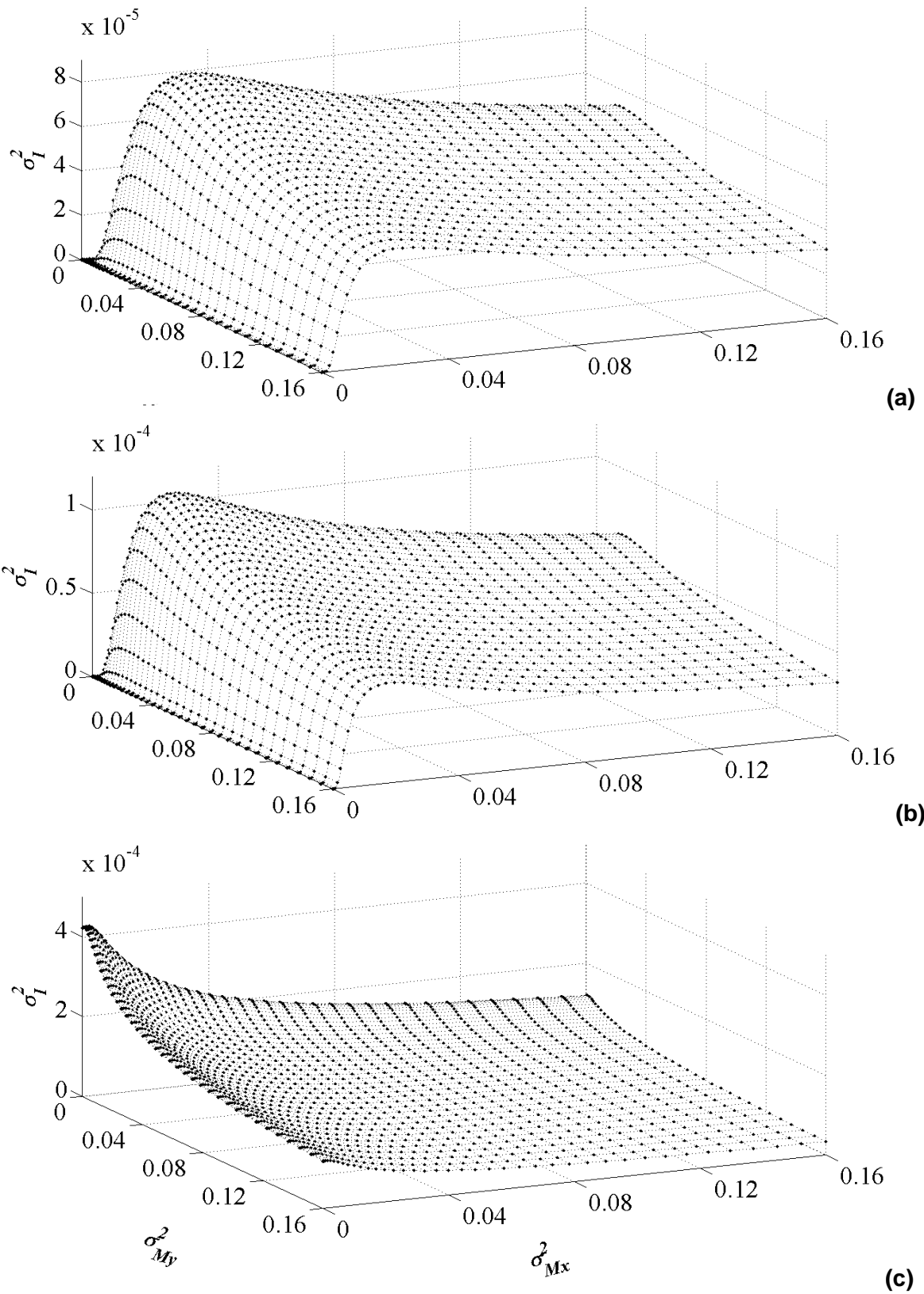
La figura 35 muestra la geometría del problema para una altura del detector de 500m con rayos solares inciden a  $20^\circ$  sobre una longitud del perfil de 40m, 80m y 320m sobre cada eje, conforme la longitud del perfil aumenta también aumentan los valores de las varianzas en las intensidades de la imagen y los máximos se van situando a valores de las varianzas de superficies de pendientes en eje x menores.



**Figura 33.** Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 500m a un ángulo de incidencia de  $20^\circ$  sobre un perfil de superficie de 160m en cada eje con una función de brillo modelada por la función Rect 2D para estadística Gaussiana y estadística no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.

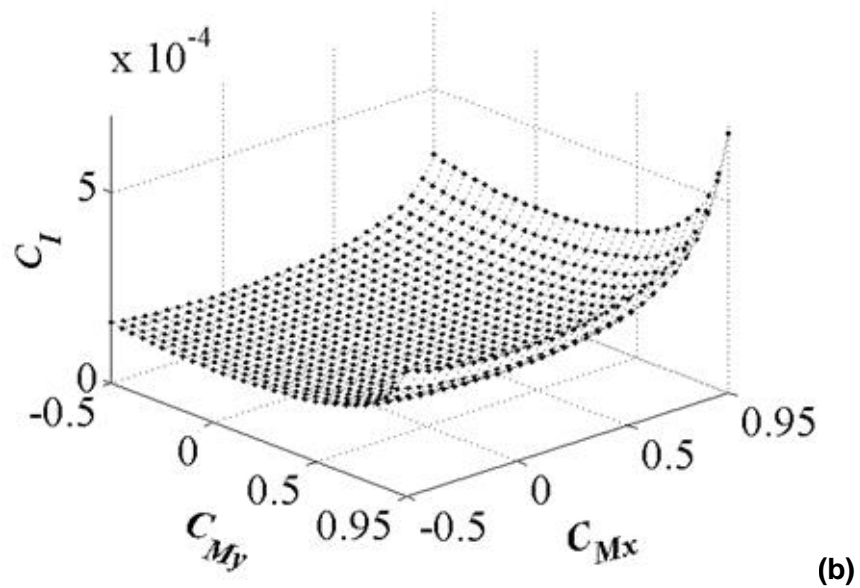
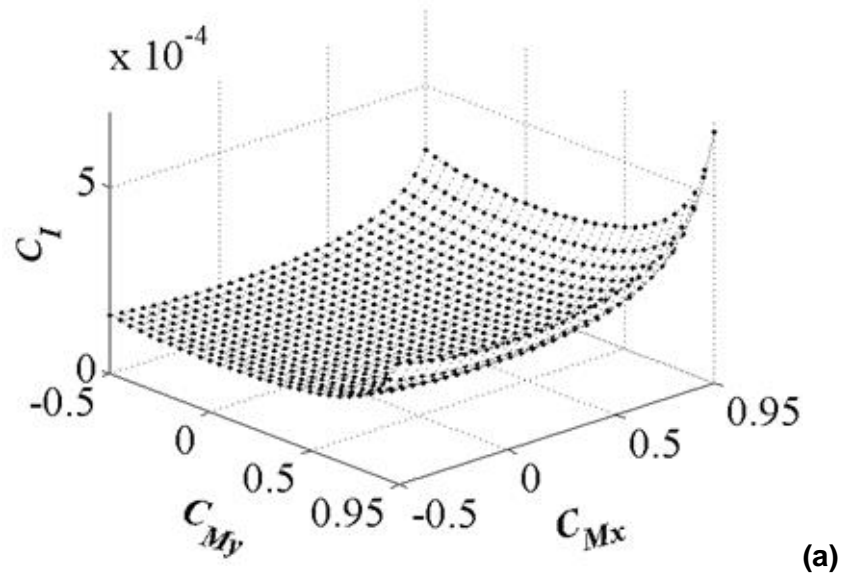


**Figura 34.** Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 500m a un ángulo de incidencia de  $20^\circ$  sobre un perfil de superficie de 160m en cada eje con una función de brillo modelada por la función Gaussiana 2D para estadística Gaussiana y estadística no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.

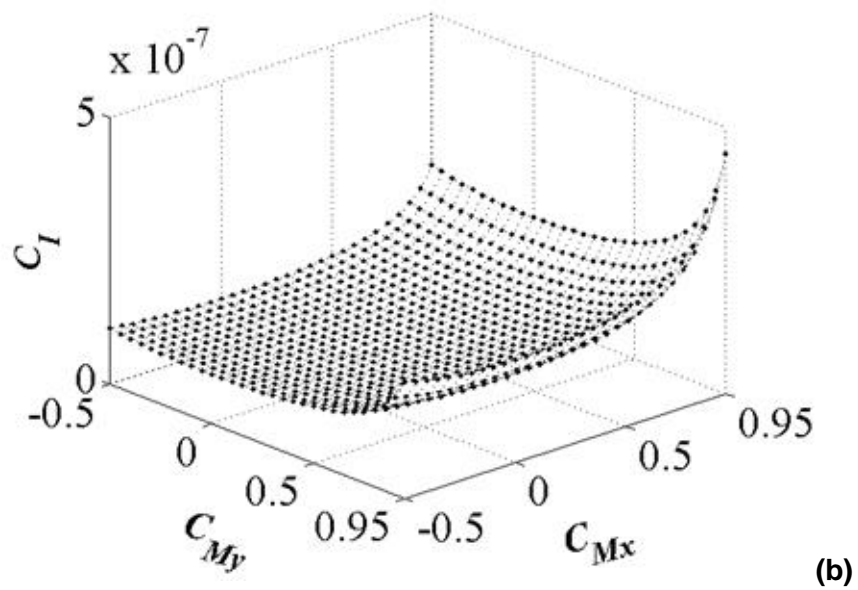
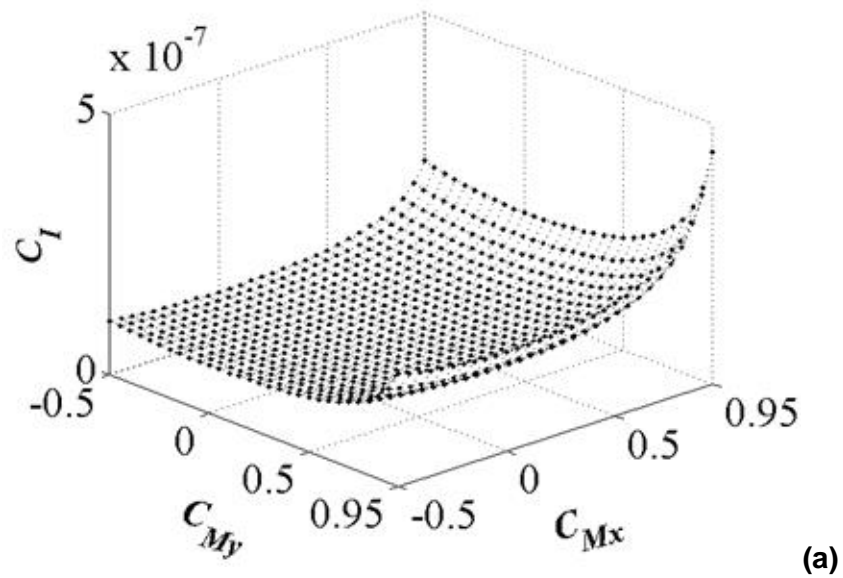


**Figura 35.** Varianzas en las intensidades de la imagen con respecto a las varianzas en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 500m a un ángulo de incidencia de  $20^\circ$  sobre un perfil de superficie de 40m, 80m y 320m en cada eje ((a), (b) y (c), respectivamente), con una función de brillo modelada por la función Rect 2D para estadística Gaussiana.

#### 4.5 Funciones de auto-correlación de las intensidades en la imagen 2D



**Figura 36.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen con respecto a las funciones de auto-correlación en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 800m a un ángulo de incidencia de  $10^\circ$  sobre un perfil de superficie de 160m en cada para una función de brillo Rect 2D con estadística Gaussiana y no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.



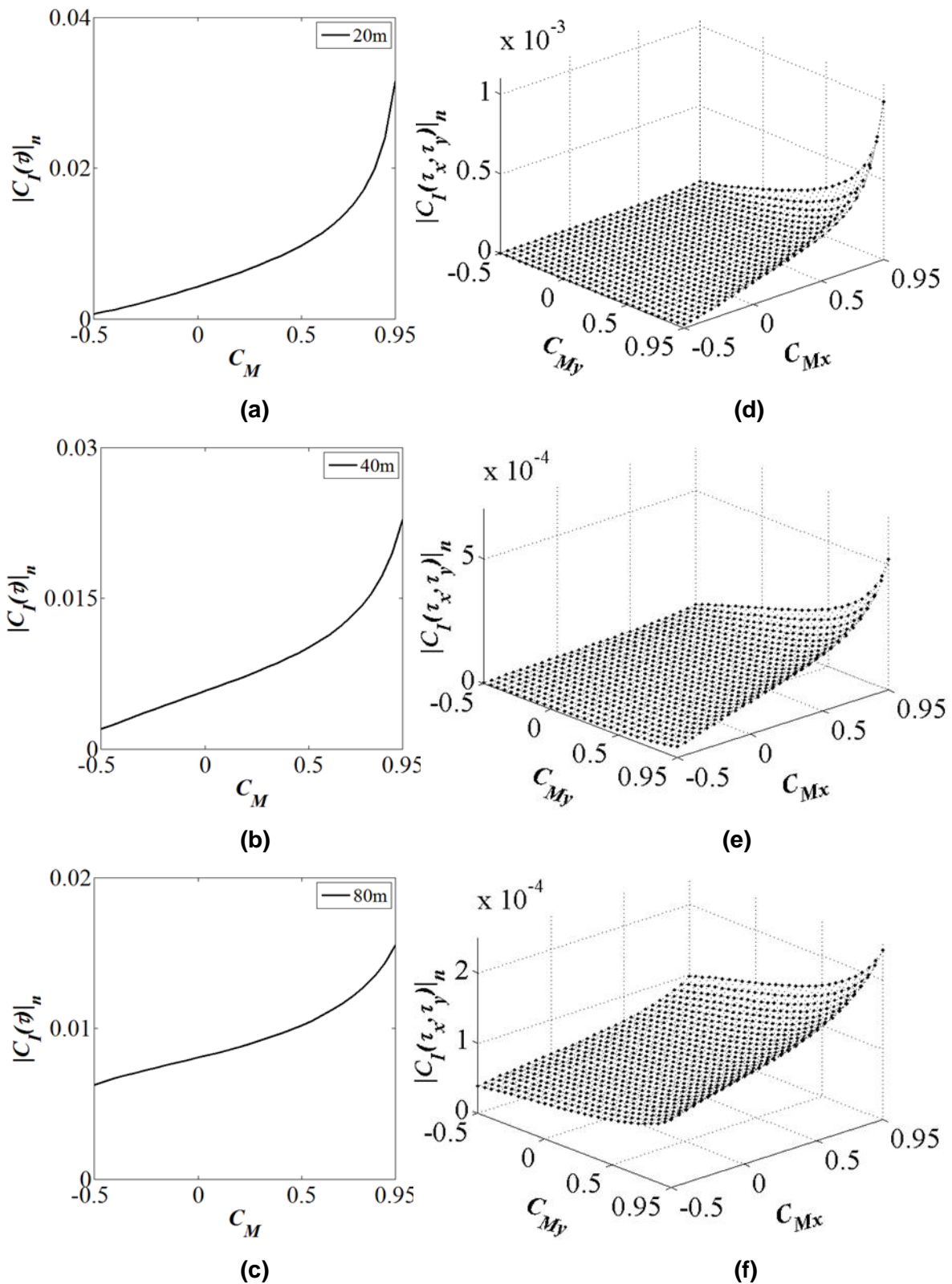
**Figura 37.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen con respecto a las funciones de auto-correlación en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 800m a un ángulo de incidencia de  $10^\circ$  sobre un perfil de superficie de 160m en cada eje para una función de brillo Gaussiana 2D con estadística Gaussiana y no Gaussiana (a) y (b), respectivamente.



En este trabajo teórico, las funciones de auto-correlación bidimensionales en las intensidades de la imagen  $C_{I,x,y}$  se calcularon para las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie contenidas en  $C_{M,x,y} \in [-0.5, 0.95]$  para 30 intervalos iguales, con  $\Delta x = \Delta y = 2$  cm para el número de puntos en el perfil de cada eje, utilizando diferentes alturas del detector, ángulos de incidencia que van desde  $0^\circ$  hasta  $90^\circ$  y realizando una normalización de las funciones de auto-correlación para  $\sigma_{M,x,y} = 0.04$ . Las pendientes de superficie tienen una función de densidad de probabilidad no gaussiana con un valor de -0.463 para el sesgo y 0.0 para la curtosis.

En las figuras 36 y 37, se muestran los valores de la relación entre las funciones de auto-correlación en las intensidades en la imagen y las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie presentando la geometría para el estudio de un área sobre el mar de 160m x 160m sobre la cual inciden los rayos solares a un ángulo de  $10^\circ$  y considerando que el detector se sitúa a 800m sobre la superficie del mar. Para la función de brillo rect bidimensional utilizando una función de densidad de probabilidad gaussiana se obtienen valores muy similares que para la estadística no gaussiana (figura 36a y figura 36b, respectivamente), lo mismo ocurre al hacer uso de la función de brillo gaussiana bidimensional (figura 37a y figura 37b). Al igual que para los valores de varianza, la contribución energética debida a la forma matemática entre las funciones de brillo rect y gaussiana es evidente (valores de varianza más altos para rect).

Se muestra que las curvas de las funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen a partir de las funciones de auto-correlación de las pendientes de superficie para el caso 2D, tienen el mismo comportamiento que para las funciones de auto-correlación unidimensionales tal y como se muestra en la figura 38, por lo que la metodología bidimensional desarrollada e implementada en éste trabajo es fiable.



**Figura 38.** Funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen con respecto a las funciones de auto-correlación en las pendientes de superficie para el caso bidimensional a una altura del detector de 100m a un ángulo de incidencia de  $40^\circ$  sobre un perfil de superficie de 20m, 40m y 80m para el caso unidimensional ((a), (b) y (c), respectivamente), y para el caso bidimensional ((d), (e) y (f), respectivamente). Función de brillo modelada por la función Rect 2D para estadística Gaussiana.

## Capítulo 5. Conclusiones

---

El oleaje real es impredecible, es un proceso estocástico donde la altura de la ola es una variable aleatoria que evoluciona en el tiempo y varía en el espacio. La mejor manera de caracterizar el oleaje es a través de modelos estadísticos.

El enfoque vectorial implementado sobre la metodología unidimensional ya conocida contribuyó para obtener el modelo geométrico y las relaciones entre las varianzas y funciones de auto-correlación en las intensidades de la imagen y las pendientes de superficies. Los resultados obtenidos muestran congruencia entre el modelo unidimensional y el bidimensional. La función de brillo rect bidimensional es una aproximación de la función de brillo circ, donde la contribución energética de la rect 2D será mayor en comparación con la función de brillo circ debido a la forma matemática de dichas funciones. Así mismo, cuando las pendientes de superficie obedecen una estadística gaussiana las funciones de brillo rect aportarán valores mayores en las varianzas que los valores obtenidos al hacer uso de una función de brillo gaussiana debido a la diferencia entre la geometría de ambas funciones, donde el hacer uso de la función de brillo rect hace referencia a los brillos, mientras que la función de brillo gaussiana corresponden a escalas de grises de la imagen. Para una misma función de brillo, las funciones de densidad de probabilidad gaussiana y no gaussiana para las pendientes de la superficie marina arrojan valores muy similares por lo que una de éstas puede representar a ambas. Para la simplificación de las ecuaciones, lo que conlleva a un menor tiempo de ejecución, se tiene que la estadística gaussiana es la más recomendable.

Las curvas de las varianzas en las intensidades en la imagen proporcionan información teórica sobre la intensidad registrada en la imagen dependiendo del estado de desarrollo de la superficie marina, y sus valores representan el contraste. Entonces, el mayor contraste para cualquier geometría es cuando tenemos que las pendientes son igual a cero, es decir, la función de densidad de probabilidad es una función delta, esto ocurre para mar tranquilo  $\sigma_M = 0$ , sin ninguna alteración por lo que a la superficie se le puede considerar como un espejo que refleja el Sol. Conforme la velocidad del viento aumenta, la superficie se vuelve más rugosa de tal forma que las intensidades registradas en la imagen corresponden a reflexiones difusas de la imagen del Sol sobre la superficie, donde los valores de las varianzas para cualquier geometría serán similares y muy pequeños.

En teoría, es posible analizar todas las longitudes del perfil y áreas de la superficie marina para cualquier ángulo de incidencia de los rayos solares a una determinada altura del detector y debido a que la intensidad que llega al detector depende de la geometría, es importante realizar una estimación de los valores que se esperan antes de realizar el experimento, de tal forma que el proceso inverso sea eficiente. Las funciones de auto-correlación proporcionan las condiciones óptimas para realizar el proceso inverso y así, obtener el espectro energético de la porción del mar analizado para posteriormente realizar el modelado de la superficie marina logrando la descripción cuantitativa de la misma.

## Literatura citada

---

- Álvarez-Borrego, J. (1993a). Wave height spectrum from sun glint patterns: an inverse problem. *Journal of Geophysical Research*. 98 (C6), 10245-10258.
- Álvarez-Borrego, J. (1993b). Two-dimensional glitter function in the study of rough surfaces via remote sensing. *Journal of Modern Optics*. 40 (11), 2081-2086.
- Álvarez-Borrego, J. (1995a). 1-d rough surfaces: glitter function for remote sensing. *Optics Communications*. 113, 353-356.
- Álvarez-Borrego, J. (1995b). Some statistical properties of surface heights via remote sensing. *Journal of Modern Optics*. 42 (2), 279-288.
- Álvarez-Borrego, J. (1995c). Función de brillo: superficies rugosas en una y dos dimensiones. *Revista Mexicana de Física*. 41 (4), 524-532.
- Álvarez-Borrego, J., Martínez-García, A. (1995). Statistics of rough surfaces via remote sensing: an experiment. *Journal of Modern Optics*. 42, (11), 2347-2355.
- Álvarez-Borrego, J., Martín-Atienza, B. (2010). An improved model to obtain some statistical properties of surface slopes via remote sensing using variable reflection angle. *IEEE Transactions on Geosciences Remote Sensing*. 48 (10), 3647-3651.
- Álvarez-Borrego, J., Martín-Atienza, B. (2013). Some statistical properties of surface slopes via remote sensing using variable reflection angle considering a non-Gaussian probability density function. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. 10 (2), 246-250.
- Barber, N. F. (1954). Finding the direction of travel of sea waves. *Nature*. 174, 1048-10450.
- Brzezniak, Z., Zastawniak, T. (1999). *Basic stochastic processes*. Springer.
- Chapman, R. (1980). The directional nature of attenuation of sound due to scattering at a rough ocean surface. *Journal of Acoustical Society of America*. 68 (5), 1475-1481.
- Chapman, R., Irani, G. B. (1982). Errors in estimating slope spectra from wave images. Preprint, Applied Physics Laboratory Johns Hopkins University, Laurel, Md.
- Cox, C., Munk, W. (1954a). Statistics of the sea surface derived from sun glitter. *Journal of Marine Research*. 13 (2), 198-227.
- Cox, C., Munk, W. (1954b). Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. *Journal of the Optical Society of America*. 44 (11), 838-850.
- Cox, C., Munk, W. (1955). Some problems in optical oceanography. *Journal of Marine Research*. 14, 381-396.
- Cox, C., Munk, W. (1956). Slopes of the sea surface deduced from photographs of sun glitter. *Bulletin Scripps Institution of Oceanography*. 6 (5), 397-487.

- Cureton, G. P., Anderson, S. J., Lynch, M. J., McGann, B. T. (2007). Retrieval of wind wave elevation spectra from sunglint data. *IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing*. 45 (9), 2829–2836.
- Cureton, G. P. (2010). Retrieval of nonlinear spectral information from ocean sunglint. Ph.D. thesis, Curtin University Technology.
- Kasevich, R. S. (1975). Directional wave spectra from daylight scattering. *Journal of Geophysical Research*. 80 (33), 4535–4541.
- Kivelson, M. G., Moszkowski, S. A. (1965). Reflection of electromagnetic waves from a rough surface. *Journal of Applied Physics*. 36 (11), 3609-3612.
- Martín-Atienza, B., Álvarez-Borrego, J. (2013). Two-dimensional geometric model of the sunlight reflections in the study of statistical properties of ocean surface slopes using remote sensors. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 1645-1648.
- Papoulis, A. (1981). *Probability, random variables and stochastic process*. McGraw-Hill, New York.
- Poom-Medina, J. L., Álvarez-Borrego, J., Martín-Atienza, B., Coronel-Beltrán, A. (2014). Theoretical statistical relationships between the intensities of an image of the sea surface and its slopes: a result comparison of rect and Gaussian glitter functions. *Optical Engineering*. 54 (4), 75-92.
- Stilwell, D. Jr. (1969). Directional energy spectra of the sea from photographs. *Journal of Geophysical Research*. 74 (8), 1974–1986.
- Stilwell, D. Jr., Pilon, R. O. (1974). Directional energy spectra of surface waves from photographs. *Journal of Geophysical Research*. 79, 1277–1284.
- Vidales-Basurto, C. A., Álvarez-Borrego, J., Poom-Medina, J. L. (2017). Statistical properties of marine surface slopes from its glitter patterns: The 1-D case. *IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing*. 55 (7), 4211-4219.