

**Centro de Investigación Científica y Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Doctorado en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con
orientación en Instrumentación y Control**

**Generación robusta de movimiento periódico para una clase de
sistemas mecánicos subactuados con actuadores dinámicos y
mediciones parciales**

Tesis para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de Doctor en
Ciencias

Presenta:

Leonardo Esau Herrera

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por
Leonardo Esau Herrera

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Yury Orlov
Director de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez
Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos
Dr. Arturo Zavala Río



Dr. Daniel Saucedo Carvajal
Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Leonardo Esau Herrera © 2018

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Leonardo Esau Herrera como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Generación robusta de movimiento periódico para una clase de sistemas mecánicos subactuados con actuadores dinámicos y mediciones parciales

Resumen aprobado por

Dr. Yury Orlov
Director de tesis

En esta tesis se presenta un procedimiento para generar movimiento periódico en una clase de sistemas mecánicos subactuados. Se consideran sistemas mecánicos Euler-Lagrange con mediciones de posición, manejados con una dinámica adicional correspondiente a los actuadores y sujetos a perturbaciones que afectan tanto al sistema como a los actuadores. El recurso de restricciones virtuales es utilizado para construir un modelo de referencia que en lazo cerrado genere un ciclo límite asintóticamente estable, posteriormente la síntesis H_∞ variante en tiempo es directamente aplicada a una dinámica que resulta de la diferencia entre la dinámica del mecanismo en consideración acoplada con la dinámica de actuadores y la dinámica del modelo de referencia. Aplicar la síntesis H_∞ garantiza la estimación de las variables no medibles del mecanismo acoplado con la dinámica de los actuadores, así como su seguimiento hacia la dinámica del modelo de referencia. Si el mecanismo acoplado con la dinámica de los actuadores es libre de perturbaciones se logra seguimiento asintótico. Por otra parte, si las perturbaciones son presentes, se garantiza su atenuación en sentido de satisfacer que la ganancia L_2 sea menor que $\gamma > 0$.

Palabras clave: control robusto, sistema mecánico, estabilización orbital, atenuación de perturbaciones, dinámica de actuadores.

Abstract of the thesis presented by Leonardo Esau Herrera as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Robust periodic motion generation for a class of underactuated mechanical systems with actuator dynamics and partial measurements.

Abstract approved by

Dr. Yury Orlov
Thesis Director

Robust periodic motion generation is carried out in this thesis for a class of underactuated mechanical systems. The mechanical system under consideration is an Euler-Lagrange system with position measurements, enforced by dynamic actuators and affected by disturbances. The virtual constraint approach is used to construct a reference model which generates an asymptotically stable limit cycle, after that, the time variant H_∞ synthesis is directly applied to the dynamics, resulting from the difference between the dynamics of the underactuated mechanical system coupled to the dynamical actuators and the reference model. The proposed H_∞ synthesis ensures the estimation of the unmeasured variables of the system as well as tracking of the reference model. If the system is disturbance-free, the tracking is accomplished asymptotically, otherwise the disturbance attenuation is guaranteed in the sense that the L_2 gain is less than $\gamma > 0$.

Keywords: robust control, mechanical system, orbital stabilization, disturbance attenuation, actuator dynamics.

Dedicatoria

*Con respeto y admiración para mi mamá María,
a quien siempre recordaré y algún día
volveré a ver en la eternidad.*

Agradecimientos

Ante todo agradezco a Dios por haberme proporcionado los medios para concretar este trabajo de tesis.

A mi familia por el amor y apoyo incondicional que me han proporcionado durante mi odisea de vida.

A mi director de tesis el Dr. Yury Orlov, por su dirección y apoyo incondicional a lo largo de este trabajo.

A los miembros de mi comité de tesis, el Dr. Joaquín Álvarez Gallegos, el Dr. Luis Alejandro Márquez, el Dr. Luis Tupak Aguilar y el Dr. Arturo Zavala Río, por sus invaluable observaciones y comentarios que han sido de gran apoyo para la mejora de este trabajo de tesis.

Al CONACYT por haberme proporcionado la beca, con la cual fue posible lograr este trabajo.

A algunas otras personas que omito en este margen, sin embargo, han sido apoyo incondicional e inspiración para concretar el presente trabajo.

Tabla de contenido

Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Índice de figuras	viii
Índice de cuadros	x
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) y su relación en la teoría de control .	1
1.1.2. Control de sistemas mecánicos actuados y subactuados	1
1.1.3. Recurso de restricciones virtuales para generación de movimiento periódico en sistemas mecánicos subactuados con grado de subactuación uno	3
1.2. Justificación del problema de investigación	3
1.3. Problema de investigación	4
1.4. Hipótesis	5
1.5. Objetivos	5
1.5.1. Objetivo general	5
1.5.2. Objetivos específicos	5
1.6. Sistemas híbridos	6
1.7. Organización de la tesis	6
2. Control H_∞ no lineal y no autónomo para la generación de movimiento pe- riódico	8
2.1. Dinámica de la planta	8
2.2. Construcción del modelo de referencia	10
2.3. Control no lineal H_∞ por retroalimentación de la salida para la generación de movimiento periódico	15
2.4. Conclusiones	18

3. Carro péndulo como caso de estudio	19
3.1. Carro péndulo con actuador dinámico	19
3.2. Modelo de referencia para la planta	20
3.3. Control no lineal H_∞ por retroalimentación de la salida para la generación de movimiento periódico en el carro péndulo con actuador dinámico	21
3.4. Resultados numéricos	22
3.5. Conclusiones	27
4. Helicóptero subactuado como caso de estudio	28
4.1. Helicóptero subactuado con actuadores dinámicos	28
4.1.1. Modelo dinámico del helicóptero subactuado	28
4.2. Modelo de referencia para la planta	31
4.3. Control no lineal H_∞ para la generación de movimiento periódico en el helicóptero subactuado con actuadores dinámicos	33
4.4. Resultados numéricos	34
4.4.1. Modelo de referencia	35
4.4.2. Modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado: caso no perturbado	37
4.4.3. Modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado: caso perturbado	39
4.5. Conclusiones	41
5. Solución al problema de control H_∞ no lineal bajo restricciones unilaterales	43
5.1. Dinámica híbrida de la planta	43
5.2. Dinámica híbrida de errores	44
5.2.1. Dinámica de errores continua	44
5.2.2. Errores durante la etapa de transición	47
5.3. Planteamiento del problema de control H_∞ bajo restricciones unilaterales	48
5.3.1. Solución local	50
5.4. Conclusiones	51
6. Oscilador de Van der Pol híbrido como modelo de referencia	52
6.1. Oscilador de Van der Pol híbrido	54
6.2. Existencia de un ciclo límite híbrido	54
6.3. Análisis numérico de los comportamientos del oscilador híbrido	56
6.4. Análisis de bifurcación de Hopf a través del método de Poincaré	59
6.4.1. Análisis numérico del oscilador híbrido bajo la variación del parámetro α	59

6.4.2. Análisis numérico del oscilador híbrido bajo la variación del parámetro de transición e	61
6.5. Análisis de estabilidad del ciclo límite	62
6.6. Conclusiones	66
7. Control robusto de seguimiento para un sistema péndulo con barrera y actuador dinámico	67
7.1. Modelo dinámico del péndulo con barrera y actuador dinámico	67
7.2. Dinámica híbrida de errores para el péndulo con barrera y actuador dinámico . .	69
7.3. Control de seguimiento H_∞ no lineal con restricciones unilaterales	69
7.4. Resultados numéricos	70
7.5. Conclusiones	73
8. Conclusiones	74
Literatura citada	76

Índice de figuras

1.	Carro péndulo con actuador dinámico	19
2.	Errores de seguimiento entre la planta y el modelo de referencia para el caso libre de perturbaciones	24
3.	Desviación de los errores de seguimiento respecto a sus estimados para el caso libre de perturbaciones.	24
4.	Retratos de fase para el caso libre de perturbaciones	24
5.	Entrada de control ν para el caso libre de perturbaciones	25
6.	Errores de seguimiento entre la planta y el modelo de referencia para el caso con perturbaciones	25
7.	Desviación de los errores de seguimiento respecto a sus estimados para el caso con perturbaciones.	26
8.	Retratos de fase para el caso con perturbaciones	26
9.	Entrada de control ν para el caso con perturbaciones	26
10.	Helicóptero subactuado con actuadores dinámicos	28
11.	Ángulo de alabeo con $q_1^*(0) = 0.2$	35
12.	Ángulo de cabeceo con $q_2^*(0) = 0.45$	35
13.	Ángulo de guiñada con $q_3^*(0) = 0.2$	36
14.	Torque producido por actuador 1 con $\tau_1^*(0) = 0$	36
15.	Torque producido por actuador 2 con $\tau_2^*(0) = 0$	36
16.	Voltaje aplicado al motor 1	37
17.	Voltaje aplicado al motor 2	37
18.	Estados del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado.	38
19.	Estados y entradas de control del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado.	39
20.	Estados del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado, ante perturbaciones.	40
21.	Estados y entradas de control del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado, ante perturbaciones.	41
22.	Retrato de fase del oscilador de Van der Pol	52
23.	Retrato de fase del oscilador de Van der Pol modificado	53

24.	Trayectorias de fase del oscilador híbrido (148), (151), correspondientes a los parámetros $\rho = 1$, $\mu = 1$, $e = 0.5$ y al parámetro de velocidad del transitorio $\varepsilon = 0.3$ (figura a) y $\varepsilon = 0.8$ (figura b). Los cuadrados denotan las condiciones iniciales de las correspondientes trayectorias.	57
25.	Retrato de fase del oscilador híbrido correspondiente a $\varepsilon = 0.8$, $\rho = 0.5$, $\mu = 1$ y $e = 0.5$. El recuadro en el eje vertical indica la condición.	58
26.	Retrato de fase del oscilador híbrido correspondiente a $\varepsilon = 0.8$, $\rho = 0.5$, $\mu = 0.2$ y $e = 0.5$. Los recuadros en el eje vertical denotan las condiciones iniciales de las dos trayectorias: una con velocidad inicial pequeña (línea continua), y otra con velocidad inicial grande (línea discontinua).	58
27.	Retrato de fase del oscilador híbrido correspondiente a $\varepsilon = 0.8$, $\rho = 0.5$, $\mu = 0.2$ y $e = 0.1$. El recuadro en el eje vertical denota la condición inicial de la trayectoria.	59
28.	Intersección del mapeo de Poincaré con el mapeo identidad para diferentes valores de α y para el valor constante $e = 0.5$. Las líneas continuas son para los distintos mapeos de Poincaré $F(y_2)$ con sus correspondientes valores de α , la línea discontinua representa el mapeo identidad y los recuadros negros son los puntos fijos de los mapeos.	60
29.	Diagrama de bifurcación del oscilador de Van der Pol híbrido: puntos fijos del mapeo de Poincaré y^* vs. α . Cada diamante representa un punto fijo que depende del parámetro α . Se aprecia que la bifurcación de Hopf ocurre en $\alpha \approx 0.429$	61
30.	Función de bifurcación $\kappa(e)$, los círculos representan los valores numéricos obtenidos para las bifurcaciones de $\kappa(e)$ y la línea continua su aproximación por mínimos cuadrados. . .	62
31.	Solución del modelo de referencia, iniciada en el punto fijo	65
32.	Planos de fase del oscilador de Van der Pol con restricción unilateral para distintas condiciones iniciales	65
33.	Péndulo con barrera	68
34.	Estados q y $\dot{q}$ del péndulo con barrera y estados q^* y $\dot{q}^*$ del modelo de referencia . . .	72
35.	Retratos de fase	72
36.	Estado τ , iniciado en $\tau(0) = 0.3$	72
37.	Voltaje v , aplicado a el actuador	73
38.	Función de Lyapunov que presenta brinco durante impactos	73

Índice de tablas

1.	Parámetros del motor eléctrico.	9
2.	Parámetros para el carro péndulo en lazo cerrado.	23
3.	Parámetros para el helicóptero subactuado en lazo cerrado.	34
4.	Parámetros del sistema péndulo con barrera.	71
5.	Parámetros para la ecuación diferencial de Riccati.	71

Introducción

1.1. Antecedentes

1.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) y su relación en la teoría de control

Las ecuaciones de E-L han sido empleadas en la teoría de control para modelar sistemas mecánicos sujetos a fuerzas o torques no conservativos. Dichas fuerzas o torques son llamados usualmente entradas de control -controladores- y son producidas por actuadores. Existen en la literatura trabajos relacionados con el diseño de controladores para dichos sistemas, estos diseños consisten en calcular las fuerzas o torques para los sistemas mecánicos, tales que conduzcan las posiciones y/o las velocidades generalizadas hacia algún valor deseado, ya sea constante para el caso de regulación o variante por ejemplo en tiempo, para el caso de seguimiento. Cabe mencionar que la regulación puede verse como un caso particular del seguimiento.

1.1.2. Control de sistemas mecánicos actuados y subactuados

En relación al número de entradas de control y de grados de libertad, los sistemas mecánicos modelados por las ecuaciones de E-L se pueden clasificar como actuados o subactuados. Los primeros se caracterizan por poseer un número de grados de libertad igual que el número de entradas de control. Los segundos son caracterizados por tener un número de grados de libertad mayor que el número de entradas de control.

En general, resulta un mayor desafío el diseñar controladores para sistemas subactuados que para totalmente actuados. Por una parte los sistemas completamente actuados pueden ser manejados arbitrariamente, es decir, su vector de estado a través de una acción de control puede ser manejado hacia cualquier dirección deseada, mientras que en los sistemas subactuados no es posible debido a que el número de entradas de control que poseen solo pueden manejar su equivalente en número de grados de libertad. Por otra parte técnicas clásicas de la teoría de control que aplican a sistemas actuados, resultan inaplicables a sistemas subactuados. Como ejemplo se tiene la técnica de linealización por retroalimentación, la cual a través de las entradas de control cancela términos que consecuentemente producen una linealización exacta en mecanismos com-

pletamente actuados. Esta técnica por el contrario no puede realizar una linealización exacta en mecanismos subactuados debido a que las entradas de control solo pueden cancelar términos en los grados de libertad que son afectados por estas, produciendo solamente una linealización parcial.

A través de la siguiente literatura se puede apreciar la investigación activa dentro del área de mecanismos subactuados. En el trabajo de Fantoni y Lozano (2002), se presenta el modelado y el diseño de controladores para más de una decena de mecanismos subactuados, tales como el carro péndulo, el péndulo de Furuta, y el pendubot, entre otros. Castillo *et al.* (2005b) también presenta el diseño de controladores por retroalimentación para algunos sistemas mecánicos subactuados -vehículos aéreos-, tales como el quadrotor, el PVTOL, y un helicóptero convencional, entre otros. Diferente a linealizar por retroalimentación la parte actuada de un mecanismo, Spong (1994) presenta una condición llamada “Strong Inertial Coupling”, bajo la cual una linealización por retroalimentación de estado para la parte no actuada de sistemas mecánicos subactuados es posible, entonces resultando una dinámica cero formada por la parte actuada del sistema, misma que se estudia su estabilidad. En Spong (1995) se muestra una solución al problema de “swing up” para el acrobot. Se lleva el eslabón no actuado hacia su posición vertical hacia arriba, dejando entonces una dinámica cero oscilatoria para el eslabón actuado alrededor de su posición vertical, posteriormente un controlador linear LQR es diseñado para atraer las oscilaciones hacia el punto de equilibrio inestable, de este sistema. En Lozano *et al.* (2000) un controlador para un carro péndulo subactuado es diseñado con objeto de estabilizar la energía del sistema y la variable de desplazamiento del carro, produciendo entonces en lazo cerrado una dinámica oscilatoria al rededor del punto de equilibrio inestable por parte de la variable angular del péndulo.

El controlar mecanismos subactuados resulta un mayor reto que controlar mecanismos actuados, sin embargo la investigación activa en el control de mecanismos subactuados sigue en progreso. El interés por investigar el control de estos mecanismos resulta de ciertas ventajas que estos presentan ante los mecanismos actuados, estas ventajas serán mencionadas más adelante dentro de este capítulo.

1.1.3. Recurso de restricciones virtuales para generación de movimiento periódico en sistemas mecánicos subactuados con grado de subactuación uno

La técnica basada en restricciones virtuales expuesta en Shiriaev *et al.* (2005), ha resultado útil en la generación de movimiento periódico en sistemas descritos por las ecuaciones de E-L con grado de subactuación uno. Su utilidad se puede apreciar, en los trabajos de Shiriaev *et al.* (2006a), Westerberg *et al.* (2009), Westerberg *et al.* (2010), Freidovich *et al.* (2008), Meza-Sánchez *et al.* (2011), Perram *et al.* (2006) y Pchelkin *et al.* (2017). Dicha técnica tiene la finalidad de construir un controlador, que en lazo cerrado con la dinámica del sistema E-L subactuado produzca un ciclo límite asintóticamente estable -generador de movimiento periódico-. En forma análoga al oscilador de Van der Pol (ver Kelly (2003) y Orlov (2008)), se puede decir que el lazo cerrado del sistema subactuado E-L es un oscilador con su propio ciclo límite asintóticamente estable.

1.2. Justificación del problema de investigación

La importancia de generar movimiento periódico en mecanismos resulta de aplicaciones donde se requiere que estos sistemas realicen tareas repetitivas. Este tipo de tareas se pueden apreciar, por ejemplo, en los robots manipuladores industriales. La industria automotriz los ocupa ampliamente en sus bandas sin fin para el pintado, soldado, y ensamblado, entre otras actividades, mismas que se repiten con un cierto periodo a través de dichas bandas. Otros ejemplos se pueden apreciar en el caminado periódico que se le impone a los robots bípedos, así como a ciertos vehículos aéreos no tripulados que se les asigne alguna misión periódica, ya sea vigilancia, inspección, entre otras.

Se puede apreciar a través de los siguientes ejemplos que la realización de tareas repetitivas por mecanismos subactuados presenta ciertas ventajas ante los mecanismos completamente actuados i.e., ahorro económico en el uso de actuadores para la realización de alguna tarea, ahorro energético debido al menor uso de actuadores o simplemente dotar a un mecanismo completamente actuado de un modo de operación subactuado, es decir, al fallar algún actuador en el mecanismo completamente actuado que este siga ejecutando la misma tarea en modo de operación subactuado o en su defecto alguna tarea que guarde la seguridad del entorno en que opera este mecanismo.

Por otra parte, también se puede apreciar que la técnica ilustrada en Shiriaev *et al.* (2005)

es capaz de generar periodicidad en mecanismos con grado de subactuación uno, sin embargo esta técnica es presentada bajo el siguiente contexto:

- a) bajo condiciones de operación ideales, es decir, no considera el efecto de perturbaciones en las ecuaciones de E-L, las cuales son desconocidas y no se sabe el efecto que puedan causar en el desempeño del sistema en lazo cerrado, pudiendo causar inestabilidad.
- b) considerando medibles todas las variables de estado pertinentes a dichas ecuaciones, lo cual no resulta práctico, debido principalmente al excesivo uso de sensores, mismos que pueden tener un costo elevado, así como imponer restricciones físicas en el mecanismo al momento de realizar movimiento.
- c) considerando el cálculo de torques o fuerzas que permitan llevar al sistema subactuado hacia una dinámica cero con solución periódica, sin embargo los mecanismos que generan los torques o fuerza son los actuadores, tales como motores eléctricos que, a su vez poseen su propia dinámica. El no considerar dicha dinámica genera un modelo matemático inadecuado para el mecanismo en consideración, pudiendo tener problemas al momento de controlarlo.

Debido a las ventajas que presentan los mecanismos subactuados en la generación de movimiento periódico y al contexto en que la técnica de Shiriaev *et al.* (2005) es presentada, se tiene como motivación en el presente trabajo tesis extender dicha técnica hacia un contexto más pragmático que permita ir mas allá de simulaciones numéricas, es decir, que la extensión de esta técnica considere aspectos inherentes del mundo real, donde el mecanismo subactuado involucre el efecto de perturbaciones, mediciones parciales asociadas a sensores de posición y que además la configuración de este mecanismo sea manejada a través de actuadores, los cuales en la práctica son los encargados de producir los torques o fuerzas que mueven dicha configuración. El dotar la técnica ya existente hacia un contexto práctico justifica la presente investigación, proponiendo entonces un nuevo problema de investigación que se define a través de la siguiente pregunta de investigación.

1.3. Problema de investigación

¿Qué efecto se produce en la generación de movimiento periódico de mecanismos con grado de subactuación uno al someterlos a perturbaciones, mediciones parciales y actuadores?. La tentativa respuesta a esta pregunta es presentada en la hipótesis que se menciona en el siguiente apartado.

1.4. Hipótesis

Por un lado se espera que el efecto debido a las perturbaciones sean pequeñas desviaciones en el estado del mecanismo subactuado respecto a su referencia periódica, esto debido a que se utilizará un controlador robusto que tratará de mantener el estado del sistema en las cercanías de su referencia.

Por otro lado se espera que debido a la inclusión de los actuadores y a la disposición de mediciones parciales, se genere un retardo en la generación de periodicidad. Este debido al tiempo que tardan en responder los torques o fuerzas de los actuadores respecto a sus entradas de voltaje y al tiempo de convergencia de un filtro que será utilizada para estimar el estado del sistema en base a las mediciones parciales.

En síntesis, se especula que ante este nuevo esquema práctico se pueda efectuar la generación de periodicidad tal como se efectuó en Shiriaev *et al.* (2005), solo que las desviaciones debidas a perturbaciones y los retardos ocasionados por el filtro y los actuadores ocasionarán desviaciones en el estado del mecanismo subactuado respecto a su referencia, así como un mayor tiempo en la convergencia.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Diseñar una técnica que permita producir periodicidad en mecanismos con grado de subactuación uno, que a su vez sean manejados por actuadores, sujetos a perturbaciones y a mediciones parciales.

1.5.2. Objetivos específicos

- Utilizar el recurso de restricciones virtuales para la construcción de un modelo que sirva como referencia para el mecanismo subactuado manejado por actuadores y sujeto a perturbaciones y a mediciones parciales.
- Acoplar la síntesis H_∞ para llevar el estado del mecanismo subactuado manejado por actuadores y sujeto a perturbaciones y a mediciones parciales hacia las cercanías del estado

del modelo de referencia.

- Validar numéricamente la nueva técnica en un mecanismo carro péndulo.
- Validar numéricamente esta nueva técnica en un modelo de helicóptero con grado de subactuación uno.

1.6. Sistemas híbridos

Hasta el momento se ha hablado de producir periodicidad en mecanismos con grado de subactuación uno que son sujetos a perturbaciones y a mediciones parciales así como a ser manejados por actuadores. Sin embargo, en el presente trabajo de tesis se involucra un estudio que trata sobre el control de seguimiento en una clase de mecanismos híbridos completamente actuados, que a su vez son considerados con perturbaciones y su configuración manejada por medio de actuadores. Estos mecanismos representan una gran cantidad de sistemas físicos y un estudio sobre control de seguimiento de estos sistemas se encuentra en Montano *et al.* (2014). En el presente trabajo de tesis son presentados, ya que son considerados bajo perturbaciones y manejados por actuadores, lo cual se comparte en común con el esquema práctico en que los mecanismos subactuados anteriormente descritos serán abordados, justificando entonces su inclusión dentro del presente trabajo de tesis y contribuyendo en extender la contribución de Montano *et al.* (2014) a un esquema pragmático.

1.7. Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis es distribuido en siete capítulos, como puede apreciarse, el primer capítulo trata sobre la introducción. Por otra parte los capítulos dos, tres y cuatro comprenden un mismo tópico. El capítulo dos presenta la teoría general sobre como generar movimiento periódico en mecanismos con grado de subactuación uno, manejados por actuadores dinámicos, sujetos a perturbaciones y a mediciones parciales. El capítulo tres presenta una aplicación particular de esta teoría genérica a un prototipo particular carro péndulo con actuador dinámico, mostrando resultados numéricos. Análogo al capítulo tres, el capítulo cuatro presenta otra aplicación particular a un mecanismo helicóptero subactuado, el cual consta de tres grados de libertad y dos entradas de control.

Los capítulos cinco, seis y siete tratan sobre la generación robusta de movimiento periódico en mecanismos híbridos completamente actuados que a su vez son manejados por actuadores dinámicos. El capítulo cinco muestra la teoría genérica para diseñar un controlador robusto que en lazo cerrado con el mecanismo híbrido produzca movimiento periódico a través del seguimiento de una solución periódica producida por un modelo de referencia híbrido. El capítulo seis presenta la construcción de este modelo de referencia híbrido, el cual es basado en el oscilador de Van der Pol. Por último el capítulo siete presenta resultados numéricos sobre la teoría genérica desarrollada en el capítulo cinco. Estos resultados son ilustrados a través de un mecanismo péndulo con barrera que sigue la dinámica del modelo de referencia construido en el capítulo seis.

Control H_∞ no lineal y no autónomo para la generación de movimiento periódico

El presente capítulo tiene como objetivo plantear el problema de control no lineal H_∞ variante en el tiempo para una dinámica de errores, así como la solución a este problema en términos de un controlador por retroalimentación de salida basado en la síntesis H_∞ .

La dinámica de errores resulta de la diferencia entre la dinámica de la planta (1) y (2) y la dinámica de un modelo de referencia. Este último será construido con objeto de que en lazo cerrado genere un ciclo límite asintóticamente estable (solución periódica).

La solución al problema, en términos de la síntesis H_∞ implica el seguimiento de la dinámica de la planta hacia la dinámica del modelo de referencia, en sentido asintótico si no existen perturbaciones en la planta o en sentido de satisfacer que la ganancia L_2 del sistema sea menor que $\gamma > 0$ si las perturbaciones están presentes.

2.1. Dinámica de la planta

La dinámica de la planta es descrita por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B\tau + w_q \quad (1)$$

y la dinámica de los actuadores

$$\dot{\tau} = A_\tau\tau + B_\tau\nu + w_\tau. \quad (2)$$

En las relaciones anteriores, los vectores $q \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ describen posiciones y velocidades generalizadas, respectivamente, $\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$ es el vector de torques o fuerzas asociado a las coordenadas generalizadas actuadas, el cual es manejado por las correspondientes componentes de voltaje del vector de entrada $\nu \in \mathbb{R}^{n-1}$. Desde el punto de vista físico, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una ma-

triz de inercia, la cual es positiva definida y de clase C^1 , $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ la aceleración de la gravedad, $B \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ compuesta de escalares especifica las coordenadas generalizadas no actuadas y actuadas, $A_\tau \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ y $B_\tau \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ son matrices diagonales que definen el comportamiento lineal de las dinámicas de los actuadores; A_τ es una matriz Hurwitz. Los vectores $w_q \in \mathbb{R}^n$ y $w_\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$ son perturbaciones.

La dinámica (2) corresponde a una colección de actuadores dinámicos, particularmente a motores eléctricos de corriente continua. De Krishnan (2001), Utkin *et al.* (2009) y Kelly (2003) se tiene que las ecuaciones que gobiernan la dinámica de cada uno de estos dispositivos son

$$\dot{\omega}_i = \frac{1}{J}(\tau_i - f(\omega_i) - T_i) \quad (3)$$

$$\dot{\tau}_i = -\frac{R_a}{L_a}\tau_i - \frac{K_a K_b}{L_a}\omega_i + \frac{K_a}{L_a}\nu_i, \quad (4)$$

donde J es la inercia del rotor. $i = 1, \dots, n-1$ denota al i -ésimo motor. $\omega_i \in \mathbb{R}$ es la velocidad angular del eje del motor. $\tau_i \in \mathbb{R}$ es el par ejercido en el eje del motor. $f(\omega_i) \in \mathbb{R}$ es el par introducido por la fricción del rotor con su soporte que, usualmente modelos lineales han sido considerados para representarlo. $T_i \in \mathbb{R}$ representa el torque transmitido a la carga, por ejemplo a un brazo robótico conectado al eje del motor, mismo que puede ser visto como una perturbación asociada a la ecuación (3). La variable $\nu_i \in \mathbb{R}$ representa una variable de control basada en voltaje. La tabla (1), tomada de Kelly (2003), describe los parámetros correspondientes a (3) y (4).

Tabla 1: Parámetros del motor eléctrico.

Parámetros	Significado	Unidades
R_a	Resistencia de armadura	Ω
L_a	Inductancia de armadura	H
K_a	Constante motor-par	Nm/A
K_b	Constante de contrarreacción electromotriz	Vs/rad

Debido a que en algunos motores eléctricos $K_b \approx 0$, e.g. motores de la marca Pittman, la relación (4), se puede aproximar como

$$\dot{\tau}_i = -\frac{R_a}{L_a}\tau_i + \frac{K_a}{L_a}\nu_i, \quad (5)$$

cuya solución relaciona el torque en el eje del motor τ_i con la variable de control ν_i . En el presente trabajo de tesis este torque es considerado como el torque transmitido a la carga, es decir, va a existir un acoplamiento directo entre el eje del motor y la carga. Por último, la relación (5) corresponde al i -ésimo actuador de (2). Dicho de otra forma (2) representa una colección de

$n - 1$ actuadores dinámicos, descritos por la dinámica de primer orden (5).

2.2. Construcción del modelo de referencia

En esta sección se presenta la extensión del método de Shiriaev *et al.* (2005) al modelo de referencia libre de perturbaciones siguiente

$$M(q^*)\ddot{q}^* + C(q^*, \dot{q}^*)\dot{q}^* + G(q^*) = B\tau^* \quad (6)$$

$$\dot{\tau}^* = -A_\tau \tau^* + B_\tau \nu^* \quad (7)$$

el cual copia la estructura del sistema (1), (2) y es considerado para diseñarle una entrada de referencia

$$\nu^* = F(q^*, \dot{q}^*, \tau^*) \quad (8)$$

tal que el sistema en lazo cerrado (6), (7), (8) posea un ciclo límite asintóticamente estable. Para lograr esto, se aplican las restricciones virtuales

$$q_1^* = r_1(\phi), \dots, q_n^* = r_n(\phi), \quad (9)$$

donde $r_i(\phi)$, $i = 1, \dots, n$ son funciones de un parámetro ϕ , tomadas de Shiriaev *et al.* (2005) para imponer una dinámica cero con solución periódica en el sistema en lazo cerrado a lo largo de dichas restricciones. Usualmente y sin pérdida de generalidad, una de las coordenadas, por decir q_n^* , es una buena selección del parámetro ϕ con $r_n(\phi) = \phi$. El diseño de la entrada de control, es entonces para asegurar que las restricciones de (9) sean consistentes para el sistema en lazo cerrado (6)-(8). Dadas las restricciones virtuales (9), se introducen las nuevas coordenadas

$$\zeta_1 = q_1^* - r_1(\phi), \dots, \zeta_n = q_n^* - r_n(\phi). \quad (10)$$

Las $n + 1$ coordenadas $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ y θ resultan redundantes para el sistema Euler-Lagrange (6), entonces una de estas, siempre puede ser expresada como función de las otras y excluída de la consideración, si se excluye ζ_n , entonces las nuevas coordenadas independientes son dadas por

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})^T \in \mathbf{R}^{n-1} \text{ y } \phi \in \mathbf{R} \quad (11)$$

con $\zeta_1 = q_1^* - r_1(\phi), \dots, \zeta_{n-1} = q_{n-1}^* - r_{n-1}(\phi)$ y ζ siendo un vector transversal a la restricción virtual (9). En términos de estas coordenadas, la dinámica de la planta de acuerdo a Shiriaev *et*

al. (2005) es

$$\ddot{\zeta} = R(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}) + N(\zeta, \phi)\tau^*, \quad (12)$$

$$\alpha(\phi)\ddot{\phi} + \beta(\phi)\dot{\phi}^2 + \gamma(\phi) = \mu(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \tau^*) \quad (13)$$

donde $R, N, \alpha, \beta, \gamma, \mu$ son funciones suaves de dimensión apropiada. Se aprecia de Shiriaev *et al.* (2005) que la función μ en (13) es lineal en τ^* y se anula para $\zeta = \dot{\zeta} = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} \mu(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \tau^*) &= \mu_1(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})\zeta + \mu_2(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})\dot{\zeta} \\ &+ \mu_3(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi})N\tau^* + \mu_3(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi})R \end{aligned} \quad (14)$$

donde μ_1, μ_2, μ_3 son funciones de dimensión apropiadas y $\mu_3(0, 0, \phi, \dot{\phi}) = 0$. Entonces, (13) llega a ser

$$\alpha(\phi)\ddot{\phi} + \beta(\phi)\dot{\phi}^2 + \gamma(\phi) = 0 \quad (15)$$

a lo largo de las restricciones virtuales de (9) y consecuentemente, la dinámica cero en lazo cerrado es gobernada por la ecuación escalar (15), donde

$$\alpha(\phi(t)) \neq 0 \text{ para todo } t, \quad (16)$$

y posee una solución periódica T - $\phi^\Gamma(t)$, que obedece al comportamiento de las funciones utilizadas en las restricciones virtuales de (9).

Una vez que la dinámica de referencia (6) es reescrita en las nuevas coordenadas (11), su linealización parcial por retroalimentación

$$\ddot{\zeta} = v^* \quad (17)$$

se logra con la transformación

$$\tau^*(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, v^*) = N^{-1}(\zeta, \phi)[v^* - R(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi})], \quad (18)$$

determinada del lado derecho de (12), es decir de

$$v^* = R(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}) + N(\zeta, \phi)\tau^*. \quad (19)$$

Suponiendo que la matriz $N(\zeta, \phi)$ en (12) es invertible, la transformación en consideración es

entonces factible. Para complementar la linealización parcial (17), la función integral

$$\mathcal{I}(\phi, \dot{\phi}, \phi_0, \phi_1) = \dot{\phi}^2 - \Psi(\phi, \phi_0) \left[\phi_1^2 - \int_{\phi_0}^{\phi} \Psi(\phi_0, s) \frac{2\gamma(s)}{\alpha(s)} ds \right], \quad (20)$$

donde

$$\Psi(\phi, \phi_0) = \exp \left\{ - \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{2\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \right\}, \quad (21)$$

se involucra para proporcionar una medida de la distancia que existe entre la trayectoria de estado y la trayectoria generada por la órbita

$$\phi^\Gamma(t), \zeta_1^\Gamma(t) = 0, \dots, \zeta_{n-1}^\Gamma(t) = 0, \quad (22)$$

donde $\phi^\Gamma(t)$ es solución periódica de (15). Se sabe de Shiriaev *et al.* (2005) y Shiriaev *et al.* (2006b) que la función $\mathcal{I}(\phi(t), \dot{\phi}(t), \phi_0, \phi_1)$, preserva el valor cero a lo largo de la dinámica cero (15), inicializada con $\phi(0) = \phi_0, \dot{\phi}(0) = \phi_1$. La dinámica de (20), vista a lo largo de la solución de (13), es gobernada por

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I} = \frac{2\dot{\phi}}{\alpha(\phi)} \left[\tilde{\mu}(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, v^*) - \beta(\phi)\mathcal{I} \right] \quad (23)$$

donde

$$\tilde{\mu}(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, v^*) = \mu(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \tau^*(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, v^*)), \quad (24)$$

y μ y τ^* son dados por (14) y (18) respectivamente. El vector ζ y la variable $\mathcal{I}(\phi(t), \dot{\phi}(t), \phi_0, \phi_1)$ forman la base de las nuevas coordenadas, las cuales son transversales a las restricciones virtuales de (9). Para llegar a la linealización transversal, la linealización parcial por realimentación (17) de la dinámica de referencia (6) se completa con la linealización

$$\delta\dot{\mathcal{I}} = \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)} \left[\mu_1^\Gamma(t)\delta\zeta + \mu_2^\Gamma(t)\delta\dot{\zeta} + \mu_3^\Gamma(t)\delta v^* - \beta(\phi^\Gamma)\delta\mathcal{I} \right]. \quad (25)$$

Donde (25) es la linealización de (23) alrededor de la solución periódica de la dinámica cero (22). Aquí y en lo sucesivo la notación

$$\mu_i^\Gamma(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

se usa para las funciones de (14) con período T , evaluadas a lo largo de (22). Hasta el momento sólo el recurso de restricciones virtuales de Shiriaev *et al.* (2005) ha sido aplicado para derivar la linealización transversal (17), (25) de la dinámica de referencia (6). Una extensión no trivial del recurso de restricciones virtuales es posteriormente presentado para incluir las dinámicas de los actuadores (7) en las coordenadas transversales. Derivando respecto al tiempo la relación (19)

y tomando en consideración la dinámica del actuador (7) se tiene

$$\dot{v}^* = \dot{R} + (\dot{N} - NA_\tau)\tau^* + NB_\tau\nu^* \quad (27)$$

donde $\dot{N}$ es dN/dt y $\dot{R}$ es dR/dt . Para linealizar (27) es suficiente considerar

$$V = \dot{R} + (\dot{N} - NA_\tau)\tau^* + NB_\tau\nu^* \quad (28)$$

en su lado derecho y consecuentemente obtener la relación

$$\dot{v}^* = V, \quad (29)$$

misma que es acoplada con (17) y (25), para obtener una linealización transversal aumentada. Esta linealización es llamada transversal debido a que consta de la variable $\mathcal{I}$ linealizada, la cual en un plano transversal a una órbita de referencia, representa la distancia entre esta órbita de referencia y las variables de estado que se desean estabilizar hacia ella. Por otra parte la palabra aumentada se utiliza puesto que a diferencia de la linealización transversal de Shiriaev *et al.* (2005), en el presente trabajo es aumentada con la relación (29), misma que se debe al acoplamiento de la dinámica de los actuadores. Esta linealización transversal aumentada para el modelo de referencia (6) y (7) es descrita por

$$\delta\dot{\eta} = A_\eta(t)\delta\eta + B_\eta\delta V, \quad (30)$$

donde

$$\delta\eta = [\delta\mathcal{I} \quad \delta\zeta \quad \delta\dot{\zeta} \quad \delta v^*]^T \quad (31)$$

$$A_\eta = \begin{bmatrix} -\frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\beta(\phi^\Gamma) & \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\mu_1^\Gamma & \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\mu_2^\Gamma & \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\mu_3^\Gamma \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B_\eta = [0 \quad 0 \quad 0 \quad I]^T. \quad (33)$$

En estas últimas relaciones I define la matriz identidad de dimensión apropiada. Para completar la construcción del modelo de referencia, resta la determinación de la entrada δV , tal que estabilice exponencialmente el sistema linealizado (30) a lo largo de (22). Suponiendo que (30) es completamente controlable en el período T , el controlador para (30) se puede lograr (see, e.g.,

Rugh (1996) y Yakubovich (1986)), minimizando el índice de desempeño

$$J(\delta\eta, \delta V) = \frac{1}{2} \int_0^T [\delta\eta^T D \delta\eta + \delta V^2] dt \quad (34)$$

a lo largo de la trayectoria (30) con alguna matriz definida positiva D . El regulador lineal cuadrático resultante

$$\delta V = -B_\eta^T \delta P(t) \delta\eta \quad (35)$$

es obtenido (por ejemplo véase Anderson y Moore (2007), Colaneri (2000a) y Colaneri (2000b)) con una solución periódica $-T$ -, definida positiva $\delta P(t)$ de la ecuación diferencial periódica de Riccati

$$-\delta\dot{P} = \delta P(t) A_\eta(t) + A_\eta^T \delta P(t) + D^T D - \delta P(t) B_\eta B_\eta^T \delta P(t). \quad (36)$$

La entrada

$$\nu^* = (N B_\tau)^{-1} [V - \dot{R} - (\dot{N} - N A_\tau) \tau^*], \quad (37)$$

se extrae de (28) con $V = -B_\eta^T P(q^*, \dot{q}^*, \tau^*) \eta$ y $\eta = [\mathcal{I} \quad \zeta \quad \dot{\zeta} \quad v^*]^T$, donde

$$P(q^*, \dot{q}^*, \tau^*) = \delta P(t(q^*, \dot{q}^*, \tau^*)) \quad (38)$$

con $t(q^*, \dot{q}^*, \tau^*)$ siendo un operador de proyección construido como en Pchelkin *et al.* (2017) y Shiriaev *et al.* (2010). Para operar la entrada de control (37) en las coordenadas originales $q^*, \dot{q}^*, \tau^*$ del modelo de referencia, se hace uso de las relaciones (11), (19) y (20). El desarrollo realizado en este apartado es sintetizado en la siguiente proposición.

Proposición 1 *Considere el modelo de referencia (6), (7) y suponga que*

- 1.- *Hay una restricción virtual (9) tal que la dinámica cero de referencia (15) posee una solución periódica ϕ^Γ ;*
- 2.- *La matriz $N(\zeta, \phi)$ en (12) es localmente no singular alrededor de la órbita (22), generada por la solución periódica ϕ^Γ de (15) ;*
- 3.- *El sistema lineal variante (30) es completamente controlable sobre el periodo T .*

Entonces el sistema en lazo cerrado (6), (7) alimentado con la entrada de control (37), expresada en las coordenadas originales $q^, \dot{q}^*, \tau^*$ a través de las relaciones (11), (19) y (20) es orbitalmente exponencialmente estable alrededor de la órbita (22).*

Prueba. Se sigue el mismo razonamiento utilizado en el teorema 3 de Shiriaev *et al.* (2010). Por construcción, el sistema lineal variante (30), manejado por (35) representa la linealización transversal del sistema en lazo cerrado (6), (7), (37) alrededor de la órbita (22). Como esta linealización (30), (35) es esponencialmente estable debido al diseño del controlador LQR, el

teorema de Andronov-Vitt (Andronov y Vitt, 1933), (Pchelkin et al., 2017), Leonov (2006), resulta aplicable a el sistema en lazo cerrado en consideración, su matriz de monodromía tiene los valores propios dentro de una bola unitaria pero sólo uno de valor unitario. La estabilidad exponencial orbital del sistema en lazo cerrado es entonces obtenida a través de la aplicación del teorema de Andronov-Vitt.

2.3. Control no lineal H_∞ por retroalimentación de la salida para la generación de movimiento periódico

El sistema construido por (6), (7) y (37) es un modelo de referencia para ser seguido por la dinámica de la planta (1) y (2). Como este modelo posee una solución periódica exponencialmente estable, la generación robusta de movimiento para la planta (1), (2) puede lograrse por medio del uso de la síntesis H_∞ , presentada en Orlov y Aguilar (2014), aplicada a la dinámica de errores, escrita en términos de

$$e^T = [e_p^T, e_v^T, e_a^T] = [(q - q^*)^T, (\dot{q} - \dot{q}^*)^T, (\tau - \tau^*)^T] \text{ y } u = (\nu - \nu^*)^T. \quad (39)$$

y gobernada por

$$\dot{e} = f(e, t) + g_1(e, t)w + g_2u, \quad (40)$$

donde

$$f(e, t) = \begin{bmatrix} e_v \\ M^{-1}(e_p + q^*)[-C(e_p + q^*, e_v + \dot{q}^*)(e_v + \dot{q}^*) - G(e_p + q^*)] \\ A_\tau e_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(e_p + q^*)[M(q^*)\ddot{q}^* + C(q^*, \dot{q}^*)\dot{q}^* + G(q^*)] - \ddot{q}^* + M^{-1}(e_p + q^*)Be_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$g_1(e, t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n-1} & 0_{n \times l} \\ M^{-1}(e_p + q^*) & 0_{n \times n-1} & 0_{n \times l} \\ 0_{n-1 \times n} & I_{n-1 \times n-1} & 0_{n-1 \times l} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n-1} \\ 0_{n \times n-1} \\ B_\tau \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$w = (w_q^T, w_\tau^T, w_y^T)^T. \quad (44)$$

El vector de perturbaciones $w \in \mathbb{R}^{2n-1+l}$ incluye el vector de perturbaciones asociado a las ecuaciones de E-L $w_q \in \mathbb{R}^n$, el asociado a la dinámica de los actuadores $w_\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$ y el asociado a las mediciones proporcionadas por sensores, $w_y \in \mathbb{R}^l$. Nótese que la dinámica (40) no forzada posee un punto de equilibrio en el origen, es decir, $f(0, t) = 0$ para todo t , lo que permite aplicarle la síntesis no lineal H_∞ . La dinámica (40), se acompaña con una salida de desempeño dada en su forma genérica por

$$z(t) = h_1(e(t), t) + k_{12}(e(t), t)u \quad (45)$$

y con una salida medible, dada por

$$y(t) = h_2(e(t), t) + k_{21}(e(t), t)w. \quad (46)$$

Las funciones, $h_1 \in \mathbb{R}^{4n-2}$, $h_2 \in \mathbb{R}^n$, $k_{12} \in \mathbb{R}^{4n-2 \times n-1}$, $k_{21} \in \mathbb{R}^{n \times 3n-1}$ son sujetas a las suposiciones

$$h_1^T(e, t)k_{12}(e, t) \equiv 0_{1 \times n-1}, \quad k_{12}^T(e, t)k_{12}(e, t) \equiv I_{n-1 \times n-1} \quad (47)$$

$$k_{21}(e, t)g_1^T(e, t) \equiv 0_{n \times 3n-1}, \quad k_{21}(e, t)k_{21}^T(e, t) \equiv I_{n \times n}, \quad (48)$$

las cuales son típicamente utilizadas en el diseño de síntesis H_∞ no lineal variante en el tiempo, ver Isidori y Astolfi (1992). El problema de control H_∞ no lineal variante en tiempo consiste en encontrar un controlador por retroalimentación de salida $\mathcal{K}(y)$ que estabilice asintóticamente la dinámica de errores (39), (40) libre de perturbaciones ($w \equiv 0$), mientras que la ganancia L_2 del sistema perturbado (39)-(46) sea menor o igual que $\gamma > 0$, es decir, que la desigualdad

$$\int_{t_0}^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^T \|w(t)\|^2 dt \quad (49)$$

sea satisfecha para todo $T > t_0$ y toda perturbación continua a tramos $w(t)$, para la cual, la trayectoria de estado, del sistema en lazo cerrado, iniciada en $e(t_0) = 0$, permanece en una vecindad $\mathcal{U}$ del origen para todo $t \in [t_0, T]$.

El controlador H_∞ por retroalimentación de salida que proporciona solución al problema en consideración (Orlov y Aguilar (2014)), viene dado por

$$u = -g_2^T P_\epsilon \xi, \quad (50)$$

donde ξ es la estimación del estado, que es solución del filtro H_∞

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + \left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t) g_1^T(\xi, t) - g_2(\xi, t) g_2^T(\xi, t) \right] P_\epsilon(t) \xi + Z_\epsilon(t) C_2^T(t) [y - h_2(\xi, t)], \quad (51)$$

el cual admite como entrada la salida medible (46) y es especificado con la estructura de las funciones f, g_1, g_2 , asociadas a (40) y con P_ϵ y Z_ϵ como soluciones periódicas definidas positivas de las ecuaciones diferenciales de Riccati

$$\begin{aligned} -\dot{P}_\epsilon &= P_\epsilon(t) A(t) + A^T(t) P_\epsilon(t) + C_1^T(t) C_1(t) \\ &+ P_\epsilon(t) \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] (t) P_\epsilon(t) + \epsilon I, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\epsilon &= \tilde{A}(t) Z_\epsilon(t) + Z \tilde{A}^T(t) + B_1(t) B_1^T(t) \\ &+ Z_\epsilon(t) \left[\frac{1}{\gamma^2} P_\epsilon(t) B_2(t) B_2^T(t) P_\epsilon(t) - C_2^T(t) C_2(t) \right] Z_\epsilon(t) + \epsilon I \end{aligned} \quad (53)$$

con

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial e}(0, t), \quad B_1(t) = g_1(0, t), \quad B_2 = g_2, \quad C_1(t) = \frac{\partial h_1}{\partial e}(0, t), \\ C_2(t) &= \frac{\partial h_2}{\partial e}(0, t), \quad \tilde{A}(t) = A(t) + \gamma^{-2} B_1(t) B_1^T(t) P_\epsilon(t), \end{aligned} \quad (54)$$

y algún ϵ positivo. El desarrollo realizado en este apartado se sintetiza en la siguiente proposición.

Proposición 2 *Considere la dinámica de errores (40), descrita en términos de la desviación (39) de la planta (1), (2) con respecto al modelo de referencia (6), (7) y (37). Suponga que existen soluciones periódicas definidas positivas de las ecuaciones diferenciales de Riccati (52) y (53) y que además la dinámica de errores (40) es manejada por el controlador por retroalimentación de salida (50), (51). Entonces el origen del sistema en lazo cerrado (40), (50) y (51) libre de perturbaciones es asintóticamente estable, mientras que cuando es perturbado y considerado con la salida de desempeño (45), posee ganancia L_2 menor que $\gamma > 0$.*

Prueba. Consiste en verificar la factibilidad de aplicar el teorema 25, pagina 94 de Orlov y Aguilar (2014) a las relaciones (39)-(54). Una vez verificado dicha factibilidad, esta proposición resulta justificada.

Debido a que el controlador u especificado en (50), está relacionado con el controlador ν de la planta (1) y (2), a través de la relación indicada en (39), entonces se tiene que el controlador para la planta resulta como

$$\nu = \nu^* + u \quad (55)$$

donde ν^* es especificada como en (37).

2.4. Conclusiones

La técnica de Shiriaev *et al.* (2005) ha sido extendida hacia un esquema pragmático, donde perturbaciones, mediciones parciales y actuadores han sido considerados en interacción con un mecanismo subactuado. A diferencia de lo expuesto en Shiriaev *et al.* (2005), la nueva extensión ha dotado de robustez al mecanismo, así como de un estimador de estado que permite ahorrar el uso de sensores. Por otra parte la dinámica de los actuadores ha permitido un modelo más exacto que captura con mayor detalle la física del mecanismo en consideración.

Debido a que esta nueva técnica se basa en que el mecanismo subactuado sujeto a perturbaciones, mediciones parciales y manejado por actuadores siga, a través de la síntesis H_∞ , un modelo de referencia, entonces la extensión aquí expuesta tiene como alcance el seguimiento de múltiples agentes homogéneos hacia dicho modelo de referencia.

Desde otra perspectiva, al considerar el mecanismo en conjunto con la dinámica de primer orden de los actuadores se tiene un sistema aumentado en número de estados. Por cada actuador considerado el vector de estados aumenta en uno, mientras que el número de entradas de control se mantiene. Esto puede verse como un nuevo sistema con grado de subactuación mayor. Considerando este nuevo sistema, la teoría presentada en Shiriaev *et al.* (2005) se extiende a la generación de movimiento periódico en sistema subactuados con grado de subactuación mayor a uno. Desde esta perspectiva se contribuye a la generación de movimiento periódico en una clase de sistemas mecánicos con grado de subactuación mayor a uno.

Carro péndulo como caso de estudio

En este capítulo se mostrarán los resultados descritos en el capítulo anterior al ser aplicados a un mecanismo carro péndulo con grado de subactuación uno. El cual es manejado por un actuador con su propia dinámica, es sujeto a mediciones parciales asociadas a posición y tanto el carro péndulo como la dinámica de su actuador son considerados con perturbaciones.

3.1. Carro péndulo con actuador dinámico

El carro péndulo con actuador dinámico, -en lo subsecuente llamado planta- es ilustrado en la siguiente figura

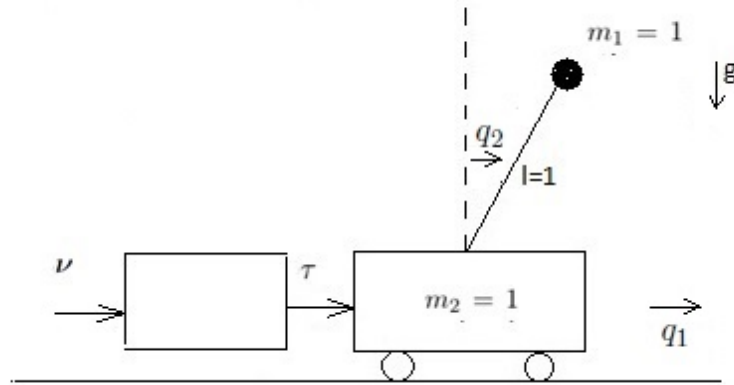


Figura 1: Carro péndulo con actuador dinámico

y su modelo es gobernado por (1) y (2), donde

$$\begin{aligned}
 n = 2, \quad q &= (q_1, q_2)^T, \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T, \quad A_\tau = a, \quad B_\tau = b, \\
 M(q) &= \begin{bmatrix} 2 & \cos q_2 \\ \cos q_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \sin q_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{56}$$

donde q_1 denota el desplazamiento horizontal del carro, mientras que q_2 denota el ángulo entre la vertical y el péndulo, el cual vale cero en la posición vertical del péndulo, τ denota el torque-fuerza generada por el actuador; motor eléctrico, ν describe el voltaje aplicado a dicho motor y g

describe la aceleración de la gravedad. A diferencia de Shiriaev *et al.* (2005), el carro péndulo es manejado por la entrada de control basada en voltaje ν , en vez de la entrada de control basada en torque-fuerza τ .

3.2. Modelo de referencia para la planta

El presente apartado especifica el desarrollo genérico para construcción del modelo de referencia para la planta.

La restricción virtual genérica (9), para el modelo de referencia (6), (7) y (56) es

$$\phi = q_2^* \text{ y } r_1(\phi) = d - L\text{sen}\phi. \quad (57)$$

En las nuevas coordenadas

$$\phi = q_2^*, \quad \zeta = q_1^* - d + L\text{sen}\phi, \quad (58)$$

correspondientes a (11), su dinámica (12) y (13) es especificadas con

$$\begin{aligned} \alpha(\phi) &= 1 - L\cos^2\phi, \\ \beta(\phi) &= L\cos\phi\text{sen}\phi, \\ \gamma(\phi) &= -g\text{sen}\phi, \end{aligned} \quad (59)$$

$$N(\zeta, \phi) = \frac{L\cos^2\phi - 1}{\cos^2\phi - 2}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} R(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}) &= \frac{\text{sen}\phi(-\dot{\phi}^2 + g\cos\phi) + L\cos\phi(-2g\text{sen}\phi + \dot{\phi}^2\text{sen}\phi\cos\phi)}{\cos^2\phi - 2} \\ &\quad - L\dot{\phi}^2\text{sen}\phi \end{aligned} \quad (61)$$

y

$$\mu(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}^*, \tau^*) = -\cos(\phi)v^* \quad (62)$$

la cual puede obtenerse de manera directa al derivar (57) respecto al tiempo. Se puede apreciar que la relación $N(\zeta, \phi)$ en (60) es invertible, así asegurando la condición dos de la proposición 1. Adicionalmente con un valor de $L > 1$, se garantiza que la dinámica cero (15) especificada con (59) posea un centro alrededor del origen. La linealización transversal (17) y (25) resulta

especificada con $\mu_1^\Gamma(t) = \mu_2^\Gamma(t) = 0$ y $\mu_3^\Gamma(t) = -\cos(\phi^\Gamma)$, donde

$$\phi^\Gamma(t) = \phi^\Gamma(t + T) \quad (63)$$

es una solución periódica de (15). La linealización transversal (17) y (25), acoplada con la dinámica (29) de la variable virtual $v^\star$, resulta en la linealización aumentada (30) del modelo de referencia para la planta, la cual es especificada con

$$A_\eta = \begin{bmatrix} -\frac{2L\dot{\phi}^\Gamma \cos\phi^\Gamma \sin\phi^\Gamma}{(1-L\cos^2\phi^\Gamma)} & 0 & 0 & -\frac{2\dot{\phi}^\Gamma \cos\phi^\Gamma}{(1-L\cos^2\phi^\Gamma)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

y además es completamente controlable sobre el período T ya que su modelo de orden reducido

$$\dot{\mathcal{I}} = -\frac{2L\dot{\phi}^\Gamma \cos\phi^\Gamma \sin\phi^\Gamma}{(1-L\cos^2\phi^\Gamma)} \mathcal{I} - \frac{2\dot{\phi}^\Gamma \cos\phi^\Gamma}{(1-L\cos^2\phi^\Gamma)} v^\star, \quad \ddot{\zeta} = v^\star \quad (65)$$

lo es (ver Shiriaev *et al.* (2005)). Entonces, la condición 3 de la proposición 1 se cumple. La entrada de control (35), expresada en las coordenadas originales $q_1^\star$, $\dot{q}_1^\star$, $q_2^\star$, $\dot{q}_2^\star$ y $\tau^\star$ a través de las relaciones (11), (19) y (20), logra la construcción del modelo de referencia. Aplicando la proposición 1 al modelo de referencia de la planta se concluye su generación de movimiento periódico.

3.3. Control no lineal H_∞ por retroalimentación de la salida para la generación de movimiento periódico en el carro péndulo con actuador dinámico

La descripción estándar (40), (45) y (46) utilizada para plantear el problema de control H_∞ variante en tiempo, se desarrolla en esta sección, en términos de los errores (39) para la planta (1), (2) y (56). Una vez que dicha descripción estándar es especificada con la dinámica del carro péndulo, el controlador genérico (50), (51) que resuelve el problema de control para dicha descripción resulta especificado para el caso particular de la dinámica de errores del carro péndulo. La dinámica en errores (40) para dicha planta es especificada con el vector de estado

$$e^T = [e_p^T, \dot{e}_p^T, e_a^T] = [(q_1 - q_1^\star)^T, (q_2 - q_2^\star)^T, (\dot{q}_1 - \dot{q}_1^\star)^T, (\dot{q}_2 - \dot{q}_2^\star)^T, (\tau - \tau^\star)^T], \quad (66)$$

mientras que la salida de desempeño (45) y la salida medible (46) son especificadas con

$$h_1(e, t) = C_1 e, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 \end{bmatrix},$$

$$k_{12}(e, t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (67)$$

y

$$h_2(e, t) = \underbrace{[I_{2 \times 2} \ 0_{2 \times 3}]}_{C_2} e, \quad k_{21}(e, t) = [0_{2 \times 3} \ I_{2 \times 2}], \quad (68)$$

respectivamente. En (67), los parámetros para C_1 fueron seleccionados para obtener una respuesta en lazo cerrado con un transitorio sin sobre impulsos. Por otra parte en (68), h_2 indica que las únicas variables medibles son las que corresponden a las posiciones, q_1 y q_2 .

Considere el vector de errores (66) dado en términos de la diferencia entre los vectores de estado de la planta (1), (2), (56) y de su modelo de referencia (6), (7), (37). Suponga que su dinámica (40) y su correspondiente salida de desempeño (45) y medible (46) generan soluciones periódicas definidas positivas en las ecuaciones diferenciales de Riccati (52) y (53). Entonces el sistema en lazo cerrado libre de perturbaciones (40), (45), (46), (50) y (51) es asintóticamente estable y su versión perturbada posee localmente ganancia L_2 menor o igual que $\gamma > 0$.

3.4. Resultados numéricos

En la presente sección se ilustran resultados numéricos para la planta en lazo cerrado (1), (2), (56), (50) y (51). Los parámetros utilizados en la simulación se presentan en el cuadro (2) y corresponden al carro péndulo con actuador dinámico (1), (2) y (56), a la restricción virtual (9) especificada con (57) y a las ecuaciones diferenciales de Riccati (52) y (53), para estas últimas se verificó numéricamente que poseen soluciones periódicas positivas definidas.

Tabla 2: Parámetros para el carro péndulo en lazo cerrado.

parámetros	valor	unidades
g	9.81	m/s ²
d	0	adimensional
L	1.5	adimensional
b	-5	Nm/HA
a	-5	Ω/H
γ	400	adimensional
ϵ	0.1	adimensional

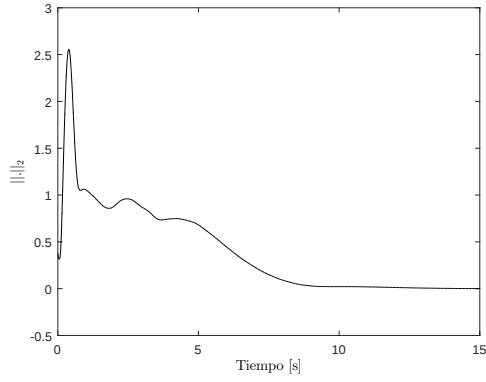
Las perturbaciones para el carro péndulo con actuador dinámico fueron consideradas como $w = [w_q^T, w_\tau^T, w_y^T]^T = [w_x, w_\theta, w_\tau, w_{y1}, w_{y2}]^T = [0.1\text{sen}(t), 0.1\text{sen}(t), 0.1\text{sen}(t), 0.05\text{sen}(2t), 0.05\text{sen}(2t)]^T$, mientras que las condiciones iniciales para sus estados, los del modelo de referencia y los del filtro fueron considerados como $q_1(0) = 0.1$, $\dot{q}_1(0) = -0.1$, $q_2(0) = 0.4$, $\dot{q}_2(0) = -0.2$, $\tau(0) = 0.3$, $q_1^*(0) = 0$, $\dot{q}_1^*(0) = -0.15$, $q_2^*(0) = 0.1$, $\dot{q}_2^*(0) = 0$, $\tau^*(0) = 0.1$, y $\xi(0) = 0$.

La Figura 2 describe el error de seguimiento, dado como la diferencia entre la dinámica de la planta libre de perturbaciones y la de su modelo de referencia. En 2a se muestra la norma 2 de los errores correspondientes al carro péndulo -sin considerar el correspondiente al actuador- mientras que 2b muestra el error de seguimiento correspondiente al actuador. Se puede apreciar que el error de seguimiento converge a cero para un tiempo aproximado de 10 segundos.

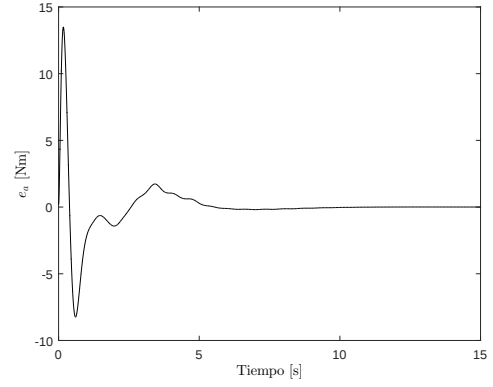
La Figura 3 muestra las desviaciones de los errores de seguimiento respecto a sus estimados, los cuales son proporcionados por el filtro (51), se aprecia que estas desviaciones convergen asintóticamente a cero para un tiempo aproximado de 10 segundos.

La Figura 4 compara los retratos de fase de las variables de estado angulares, es decir, el retrato producido por la planta contra el producido por su modelo de referencia, se puede apreciar la convergencia del retrato de fase producido por la planta hacia el producido por su modelo de referencia.

La entrada de control basada en voltaje muestra un comportamiento periódico después de un tiempo aproximado de 10 segundos, tal como lo ilustra la Figura 5.

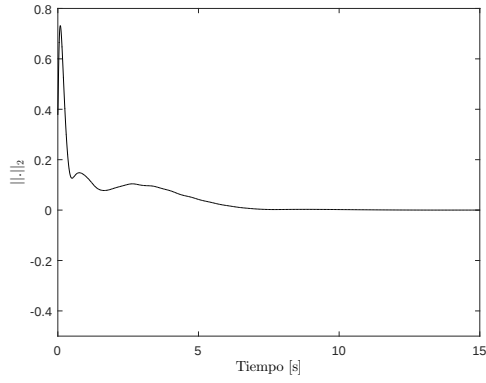


(a) error para la dinámica del carro péndulo
 $\|(e_{p1}, e_{p2}, \dot{e}_{p1}, \dot{e}_{p2})^T\|_2$

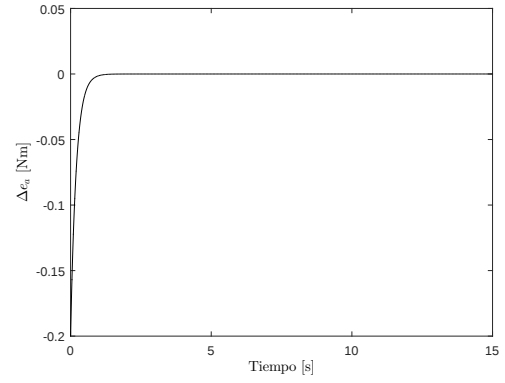


(b) error del actuador $e_a = \tau - \tau^*$

Figura 2: Errores de seguimiento entre la planta y el modelo de referencia para el caso libre de perturbaciones

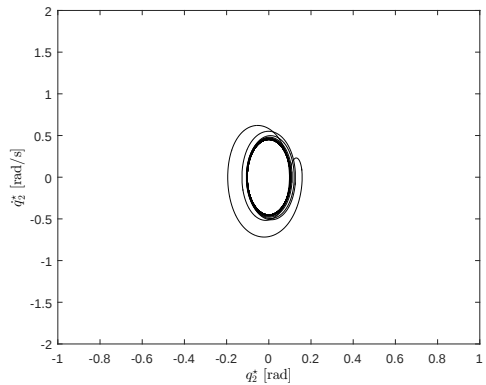


(a) norma de las desviaciones = $\|(\xi_1 - e_{p1}, \xi_2 - e_{p2}, \xi_3 - \dot{e}_{p1}, \xi_4 - \dot{e}_{p2})^T\|_2$

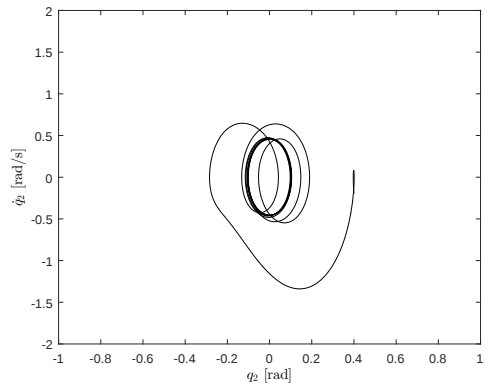


(b) desviación $\Delta e_a = \xi_5 - e_a$ entre el error de torque y su estimado

Figura 3: Desviación de los errores de seguimiento respecto a sus estimados para el caso libre de perturbaciones.



(a) retrato de fase del modelo de referencia, en el plano $(q_2^*, \dot{q}_2^*)$



(b) retrato de fase de la planta, en el plano $(q_2, \dot{q}_2)$, para el caso libre de perturbaciones

Figura 4: Retratos de fase para el caso libre de perturbaciones

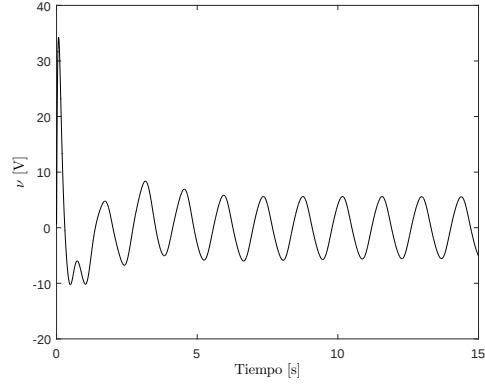
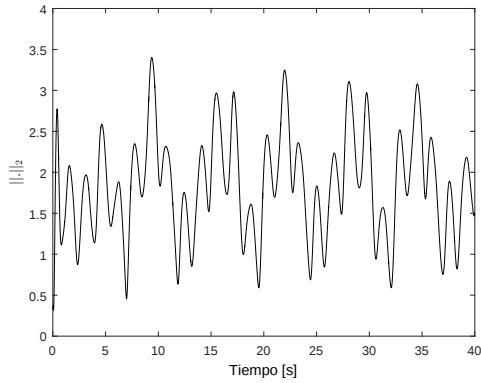
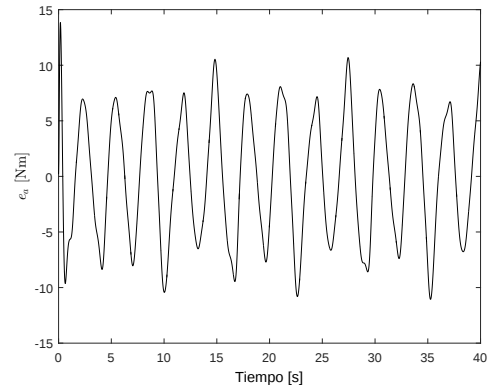


Figura 5: Entrada de control ν para el caso libre de perturbaciones

A continuación resultados en lazo cerrado para cuando las perturbaciones son presentes son ilustrados. En la figura 6 se muestran los errores de seguimiento, los cuales permanecen acotados, tal como la teoría de control H_∞ lo indica. La Figura 7 muestra las desviaciones de los errores de seguimiento respecto a sus estimaciones. El retrato de fase correspondientes a las variables de la planta ($q_2, \dot{q}_2$) es presentado en comparación con las variables correspondiente a su modelo de referencia ($q_2^*, \dot{q}_2^*$), en la Figura 8b, se puede apreciar que el retrato de la planta permanece acotado alrededor del producido por el modelo de referencia. La Figura 9 muestra la entrada de control basada en voltaje.

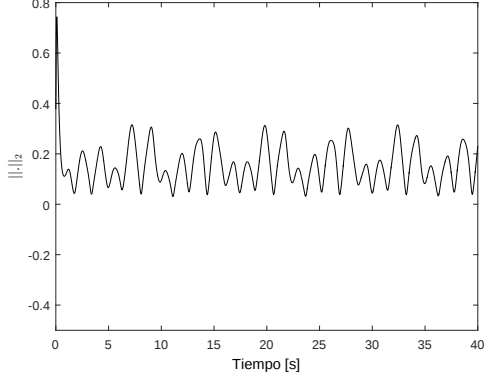


(a) error para la dinámica del carro péndulo
 $\|(e_{p1}, e_{p2}, \dot{e}_{p1}, \dot{e}_{p2})^T\|_2$

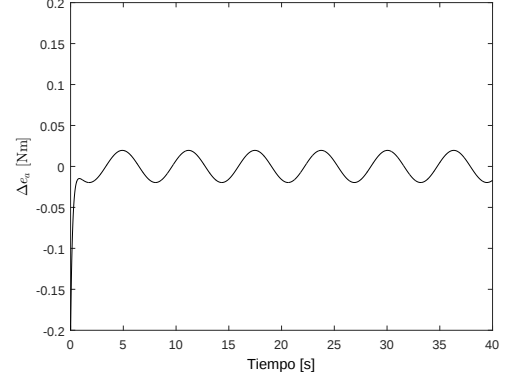


(b) error de seguimiento para el actuador $e_a = \tau - \tau^*$

Figura 6: Errores de seguimiento entre la planta y el modelo de referencia para el caso con perturbaciones

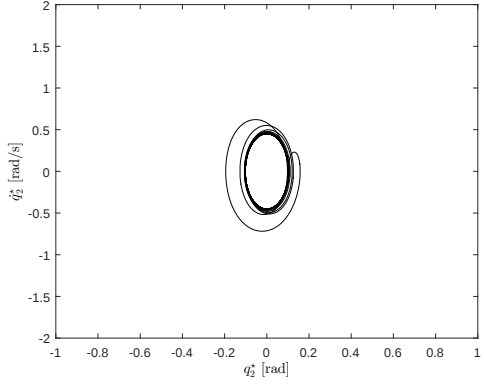


(a) norma de las desviaciones $\|(\xi_1 - e_{p1}, \xi_2 - e_{p2}, \xi_3 - e_{p3}, \xi_4 - e_{p4})^T\|_2$

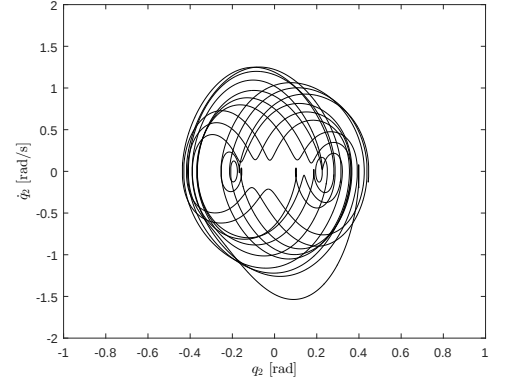


(b) desviación $\Delta e_a = \xi_5 - e_a$ entre el error de torque y su estimado

Figura 7: Desviación de los errores de seguimiento respecto a sus estimados para el caso con perturbaciones.



(a) retrato de fase del modelo de referencia, en el plano $(q_2^*, \dot{q}_2^*)$



(b) retrato de fase de la planta, en el plano $(q_2, \dot{q}_2)$, para el caso con perturbaciones

Figura 8: Retratos de fase para el caso con perturbaciones

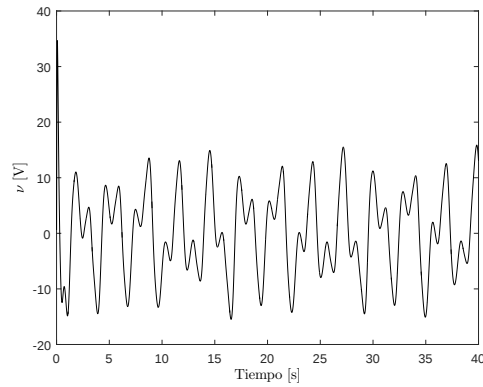


Figura 9: Entrada de control ν para el caso con perturbaciones

3.5. Conclusiones

La teoría genérica desarrollada en el capítulo anterior ha sido numéricamente validada en el presente capítulo a través de un modelo de carro-péndulo. Los resultados muestran que la síntesis H_∞ ha permitido estimar y manejar el estado del sistema carro-péndulo con actuador hacia una órbita periódica. Se puede apreciar que cuando las perturbaciones son nulas, el estado del carro-péndulo con actuador converge asintóticamente a su órbita de referencia, similar al resultado numérico obtenido para el carro péndulo en Shiriaev *et al.* (2005). Esto es de esperarse debido a que la diferencia radica en la inclusión de actuadores, la cual produce un retardo debido al tiempo que tarda en responder los torques ante las entradas de voltaje, sin embargo, la convergencia a la órbita de referencia se mantiene. Por otro lado cuando las perturbaciones son presentes, el estado del carro-péndulo con actuador evoluciona en las cercanías de dicha órbita de referencia, lo cual corrobora lo expuesto en la hipótesis de este trabajo y que además es factible por el uso del controlador robusto H_∞ .

Helicóptero subactuado como caso de estudio

Análogo al capítulo anterior, el presente capítulo tiene como objetivo ilustrar el resultado genérico obtenido en el capítulo 2 a través de un modelo de helicóptero con grado de subactuación uno. Además de que este modelo es considerado con la dinámica de sus actuadores, también es sujeto a mediciones parciales asociadas a posición y tanto el modelo como la dinámica de sus actuadores son considerados con perturbaciones.

4.1. Helicóptero subactuado con actuadores dinámicos

El helicóptero subactuado con actuadores dinámicos, -en lo subsecuente llamado planta- se ilustra en la figura (10) y su modelo dinámico se deduce a continuación

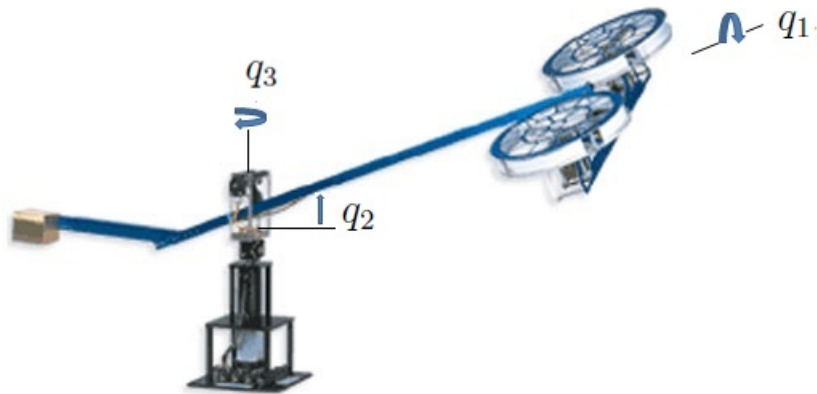


Figura 10: Helicóptero subactuado con actuadores dinámicos

4.1.1. Modelo dinámico del helicóptero subactuado

Para obtener este modelo, se recurre a la formulación de Euler-Lagrange, la cual se basa en el cálculo del Lagrangiano, que a su vez depende de las energías cinéticas y potencial del

helicóptero subactuado. El Lagrangiano es definido como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K_{trans}(q, \dot{q}) + K_{rot}(q, \dot{q}) - U(q), \quad (69)$$

donde K_{trans} representa la energía cinética translacional, K_{rot} la energía cinética rotacional y U la energía potencial. Debido a que este sistema únicamente genera rotaciones respecto a un marco de referencia fijo con el cual comparte el origen tal como se ilustra en Zheng y Zhong (2011), la energía cinética translacional es nula. Por otro lado, la energía potencial para este sistema también es nula debido al contrapeso que se le asigna al helicóptero, tal como lo ilustra la Figura (10), mismo que compensa el efecto gravitatorio.

La energía cinética rotacional es descrita por

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \omega^T I \omega, \quad (70)$$

donde $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ es la velocidad angular a través del eje de rotación instantáneo e $I = \text{diagonal}(I_{xx} \ I_{yy} \ I_{zz})$ es una matriz diagonal de inercia correspondiente al helicóptero. Para describir la energía cinética rotacional en término de coordenadas generalizadas -ángulos de Euler- (ver Castillo *et al.* (2005a)), se hace uso de la relación

$$\omega = A^{-1} \dot{q}, \quad (71)$$

donde la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sin(q_1) \tan(q_2) & \cos(q_1) \tan(q_2) \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) \\ 0 & \frac{\sin(q_1)}{\cos(q_2)} & \frac{\cos(q_1)}{\cos(q_2)} \end{bmatrix} \quad (72)$$

relaciona la velocidad angular $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ instantánea con las razones de cambio de las coordenadas generalizadas $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$ y corresponde a usar la convención de ángulos de Euler $Z - Y - X$ como en Kim (2014), es decir a rotar primeramente el ángulo de guiñada q_3 a lo largo del eje Z , posteriormente el ángulo de cabeceo q_2 a lo largo del eje Y modificado y por último el ángulo de alabeo q_1 a lo largo del eje X modificado.

La energía cinética rotacional en las coordenadas generalizadas es descrita por la relación

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \dot{q}^T J \dot{q} \quad (73)$$

donde $J = A^{-1T} I A^{-1}$ es una matriz simétrica y funge como la matriz de inercia en estas nuevas

coordenadas.

En relación a que únicamente la energía cinética rotacional es considerada, el lagrangiano para este sistema resulta

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T J \dot{q} \quad (74)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = 0, \quad (75)$$

especificadas con

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = [\dot{q}^T J]^T = J \dot{q} \quad (76)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = J \ddot{q} + \dot{J} \dot{q} \quad (77)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial J}{\partial q} \dot{q} \quad (78)$$

proporcionan el modelo dinámico del helicóptero subactuado:

$$\underbrace{J}_{M(q)} \ddot{q} + \underbrace{\left(\dot{J} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial J}{\partial q} \right)}_{C(q, \dot{q})} \dot{q} = 0. \quad (79)$$

Resulta entonces que el modelo dinámico del helicóptero subactuado sujeto a torques externos y a actuadores dinámicos se describe por las relaciones (1) y (2), donde

$$\begin{aligned} n = 3, \quad q = (q_1, q_2, q_3)^T, \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T, \quad M(q) = J, \\ C(q, \dot{q}) = \left(\dot{J} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial J}{\partial q} \right), \quad G(q) = 0_{3 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_\tau = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B_\tau = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (80)$$

El torque generado por los motores es descrito por τ , ν es el voltaje aplicado a dichos motores eléctricos y las perturbaciones que afectan a (1), (2) y (80) son dadas por $w_q = [w_{q_1} \ w_{q_2} \ w_{q_3}]^T$ y $w_\tau = [w_{\tau_1} \ w_{\tau_2}]^T$, respectivamente. Los elementos de la matriz B ($b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$) son constantes de proporcionalidad positivas que definen el acomodo de los torques producidos por los actuadores, este acomodo indica que las variables actuadas son las de alabeo q_1 y cabeceo q_2 .

4.2. Modelo de referencia para la planta

El presente apartado especifica el desarrollo genérico para construcción del modelo de referencia para la planta.

La restricción virtual genérica (9), especificada para el modelo de referencia (6), (7) y (80) es seleccionada como

$$q_1^* = f_1(\phi) = 0, \quad q_2^* = f_2(\phi) = 0.5, \quad q_3^* = \phi. \quad (81)$$

Nótese que las coordenadas generalizadas son asignadas como función del ángulo de guiñada q_3^* , esta selección es con fines de ilustrar el desarrollo genérico del capítulo 2 a través de un caso sencillo que capture la esencia de dicho desarrollo, pudiendo haber seleccionado cualquier otra coordenada generalizada como parámetro. En las nuevas coordenadas

$$\phi = q_3^*, \quad \zeta_1 = q_1^* - 0, \quad \zeta_2 = q_2^* - 0.5 \quad (82)$$

correspondientes a (11), las dinámicas de referencia (12) y (13) son especificadas con

$$\begin{aligned} \alpha(\phi) &= -J_z s(0.5), \\ \beta(\phi) &= 0, \\ \gamma(\phi) &= 0, \\ \mu_1(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) &= [\mu_{11}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \quad \mu_{12}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})]^T, \\ \mu_2(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) &= [\mu_{21}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \quad \mu_{22}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})]^T, \\ \mu_3(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}) &= [\mu_{31}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}), \quad \mu_{32}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi})]^T, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_{11}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) &= (J_y - J_x)c(0.5 + \zeta_2)^2 \dot{\phi}^2, \\ \mu_{12}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) &= J_z c(0.5) \ddot{\phi} + 2(J_y - J_x)s(\zeta_1)c(\zeta_1)c(0.5 + \zeta_2)s(0.5 + \zeta_2)\dot{\phi}^2, \\ \mu_{21}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) &= 0, \\ \mu_{22}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) &= J_z c(0.5 + \zeta_2)\dot{\phi} + (J_y - J_x)c(\zeta_1)s(\zeta_1)\dot{\zeta}_2 - \\ &\quad (J_y - J_x)c(\zeta_1)^2 c(0.5 + \zeta_2)\dot{\phi} + (J_y - J_x)s(\zeta_1)^2 c(0.5 + \zeta_2)\dot{\phi}, \\ \mu_{31}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}) &= -J_z, \\ \mu_{32}(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}) &= 0. \end{aligned}$$

$$N(\zeta, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1)}{J_x \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2})} & \frac{\text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1)}{J_y \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2})} \\ -\frac{\text{sen}(\zeta_1)}{J_x} & \frac{\cos(\zeta_1)}{J_y} \end{bmatrix}, \quad (83)$$

$$R(\zeta, \dot{\zeta}, \phi, \dot{\phi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [-L^{-1}M^{-1}C - L^{-1}\dot{L}\dot{q}_e], \quad (84)$$

$$L^{-1} = I_{3 \times 3}, \quad (85)$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1)}{J_x \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2})} & \frac{\text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1)}{J_y \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2})} & \frac{1}{J_z} \\ -\frac{\text{sen}(\zeta_1)}{J_x} & \frac{\cos(\zeta_1)}{J_y} & 0 \\ \frac{\cos(\zeta_1)}{J_x \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2})} & \frac{\text{sen}(\zeta_1)}{J_y \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2})} & 0 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$C = \begin{bmatrix} -J_x \dot{\phi} \left(\dot{\zeta}_2 \text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1) + \dot{\zeta}_1 \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1) \right) - J_x \dot{\zeta}_2 \dot{\zeta}_1 \cos(\zeta_1) \\ -J_y \dot{\phi} \left(\dot{\zeta}_2 \text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1) - \dot{\zeta}_1 \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1) \right) - J_y \dot{\zeta}_2 \dot{\zeta}_1 \text{sen}(\zeta_1) \\ -J_z \dot{\phi} \dot{\zeta}_2 \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_z \left(\dot{\zeta}_2 \cos(\zeta_1) + \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1) \right) \left(\dot{\zeta}_1 - \dot{\phi} \text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \right) \\ J_z \left(\dot{\zeta}_2 \text{sen}(\zeta_1) - \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1) \right) \left(\dot{\zeta}_1 - \dot{\phi} \text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \right) \\ -J_y \left(\dot{\zeta}_2 \cos(\zeta_1) + \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1) \right) \left(\dot{\zeta}_2 \text{sen}(\zeta_1) - \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1) \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J_y \left(\dot{\zeta}_2 \cos(\zeta_1) + \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1) \right) \left(\dot{\zeta}_1 - \dot{\phi} \text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \right) \\ -J_x \left(\dot{\zeta}_2 \text{sen}(\zeta_1) - \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1) \right) \left(\dot{\zeta}_1 - \dot{\phi} \text{sen}(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \right) \\ J_x \left(\dot{\zeta}_2 \cos(\zeta_1) + \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \text{sen}(\zeta_1) \right) \left(\dot{\zeta}_2 \text{sen}(\zeta_1) - \dot{\phi} \cos(\zeta_2 + \frac{1}{2}) \cos(\zeta_1) \right) \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$\dot{L} = 0_{3 \times 3}, \quad (88)$$

$$\dot{q}_e = \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (89)$$

La linealización transversal (17) y (25), acoplada con la dinámica (29) de la variable virtual v^* , resulta en la linealización aumentada (30) del modelo de referencia para la planta, la cual es

especificada con

$$A_\eta = \begin{bmatrix} \frac{-2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\beta(\phi^\Gamma) & \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\mu_{11} & \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\mu_{21} & \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\mu_{12} & \frac{2\dot{\phi}^\Gamma}{\alpha(\phi^\Gamma)}\mu_{22} & \mu_{31} & \mu_{32} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{21} & H_{22}, \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$B_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = (NA + \dot{N})N^{-1}. \quad (91)$$

La entrada de control (35), expresada en las coordenadas originales $q_1^*, \dot{q}_1^*, q_2^*, \dot{q}_2^*, q_3^*, \dot{q}_3^*, \tau_1^*$ y τ_2^* a través de las relaciones (11), (19) y (20), logra la construcción del modelo de referencia.

4.3. Control no lineal H_∞ para la generación de movimiento periódico en el helicóptero subactuado con actuadores dinámicos

La descripción estándar (40), (45) y (46) utilizada para plantear el problema de control H_∞ variante en tiempo, es especificada en esta sección, en términos de las coordenadas de errores (39) para la planta (1), (2) y (80). Consecuentemente, el controlador (50), (51) que resuelve el problema de control en consideración, resulta especificado. La dinámica de errores (40) para dicha planta es especificada con el vector de estado

$$e^T = [e_p^T, \dot{e}_p^T, e_a^T] = [(q_1 - q_1^*)^T (q_2 - q_2^*)^T (q_3 - q_3^*)^T, (\dot{q}_1 - \dot{q}_1^*)^T (\dot{q}_2 - \dot{q}_2^*)^T (\dot{q}_3 - \dot{q}_3^*)^T, (\tau_1 - \tau_1^*)^T (\tau_2 - \tau_2^*)^T], \quad (92)$$

mientras que la salida de desempeño (45) y la salida medible (46) son especificadas con

$$\begin{aligned} h_1(e, t) &= C_1 e, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 8} \\ I_{8 \times 8} \end{bmatrix}, \\ k_{12}(e, t) &= \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{8 \times 2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (93)$$

y

$$h_2(e, t) = \underbrace{I_{8 \times 8}}_{C_2} e, \quad k_{21}(e, t) = [0_{8 \times 5} \quad I_{8 \times 8}], \quad (94)$$

respectivamente. Considere el vector de errores (92) dado en términos de la diferencia entre los vectores de estado de la planta (1), (2), (80) y de su modelo de referencia (6), (7), (37). Suponga que su dinámica (40) y su correspondiente salida de desempeño (45) y medible (46) generan soluciones periódicas definidas positivas en las ecuaciones diferenciales de Riccati (52) y (53). Entonces el sistema en lazo cerrado libre de perturbaciones (40), (45), (46), (50) y (51) es asintóticamente estable y su versión perturbada posee localmente ganancia L_2 menor que $\gamma > 0$.

4.4. Resultados numéricos

En la presente sección se ilustran resultados numéricos para la planta en lazo cerrado (1), (2), (80), (50) y (51). Los parámetros utilizados en la simulación se muestran en el cuadro (3) y corresponden al helicóptero subactuado con actuador dinámico (1), (2) y (80) y a la ecuación diferencial de Riccati (52), para la cual fue verificado numéricamente que posee solución periódica definida positiva. Los resultados numéricos muestran el caso para cuando las perturbaciones son nulas y el caso para cuando no lo son. Antes de introducir estos dos casos, se muestran el desempeño en lazo cerrado para el modelo de referencia de la planta.

Tabla 3: Parámetros para el helicóptero subactuado en lazo cerrado.

parámetros	valor	unidades
J_x	0.0364	kg m ²
$J_y = J_z$	0.91	kg m ²
$A_1 = A_2$	-5	Ω/H
$B_1 = B_2$	1	Nm/HA
$b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22}$	1	adimensional
γ	100	adimensional
ϵ	0.1	adimensional

4.4.1. Modelo de referencia

Los resultados numéricos de este apartado muestran el desempeño del modelo de referencia del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado (6), (7) y (8). De la Figura 11 a la 15, se muestran los estados q_1^* , q_2^* , q_3^* , τ_1^* y τ_2^* , respectivamente, donde se puede apreciar que los estados q_1^* y q_2^* convergen a sus valores de referencia de 0 y 0.5, respectivamente. Al converger hacen que q_3^* evolucione de acuerdo a la dinámica. τ_1^* y τ_2^* son los estados que corresponden a los torques generados por los actuadores, mismos que contribuyen a lograr la dinámica remanente (15) para q_3^* . Las entradas de control para los actuadores del helicóptero subactuado son dadas por los voltajes ν_1^* y ν_2^* , y son ilustrados en las Figuras 16 y 17. Se puede apreciar que los valores que toman estos voltajes pertenecen al rango de operación de los actuadores que contiene dicho helicóptero, ± 12 volts.

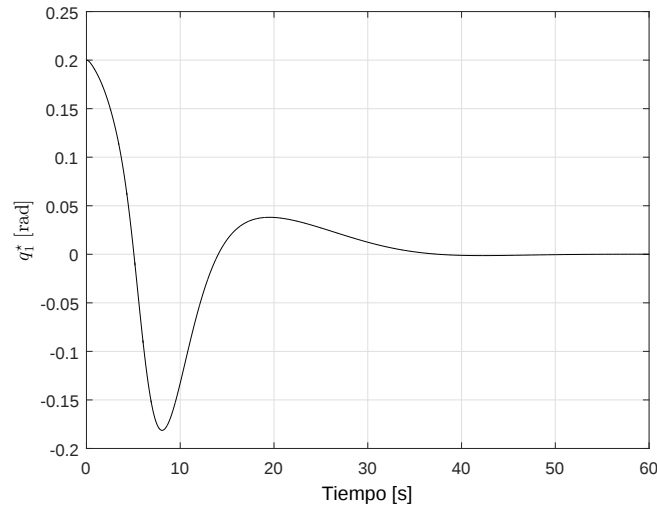


Figura 11: Ángulo de alabeo con $q_1^*(0) = 0.2$

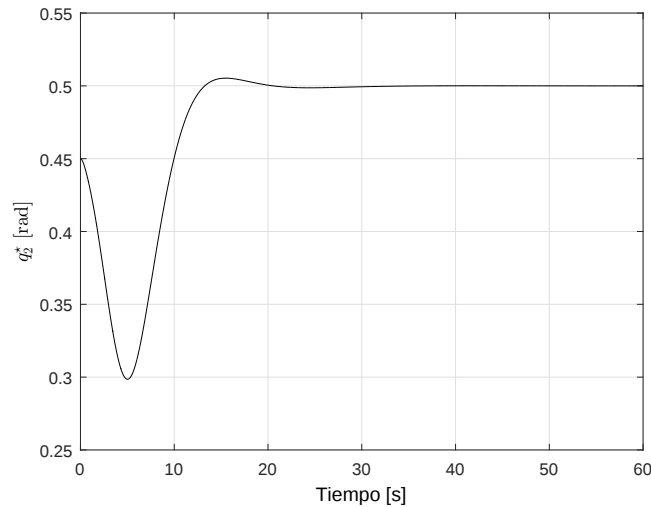


Figura 12: Ángulo de cabeceo con $q_2^*(0) = 0.45$

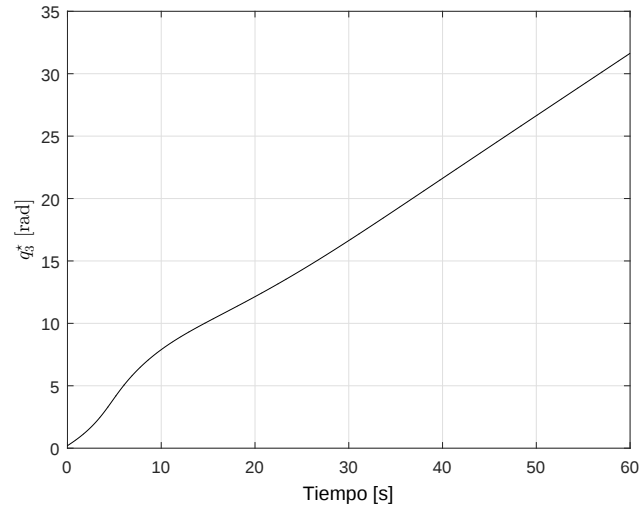


Figura 13: Ángulo de guiñada con $q_3^*(0) = 0.2$

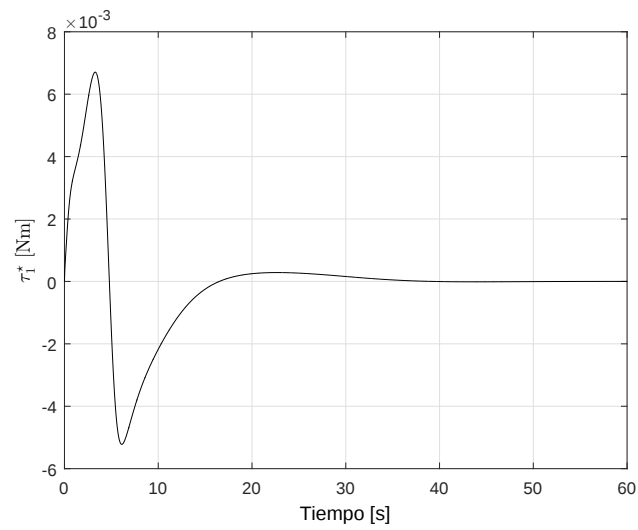


Figura 14: Torque producido por actuador 1 con $\tau_1^*(0) = 0$

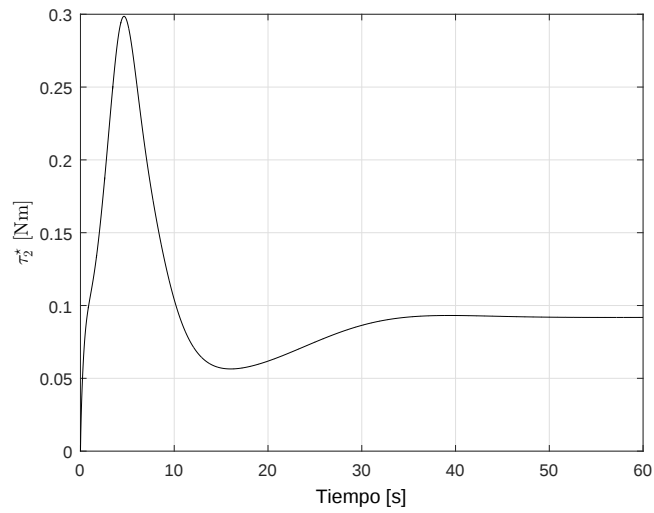


Figura 15: Torque producido por actuador 2 con $\tau_2^*(0) = 0$

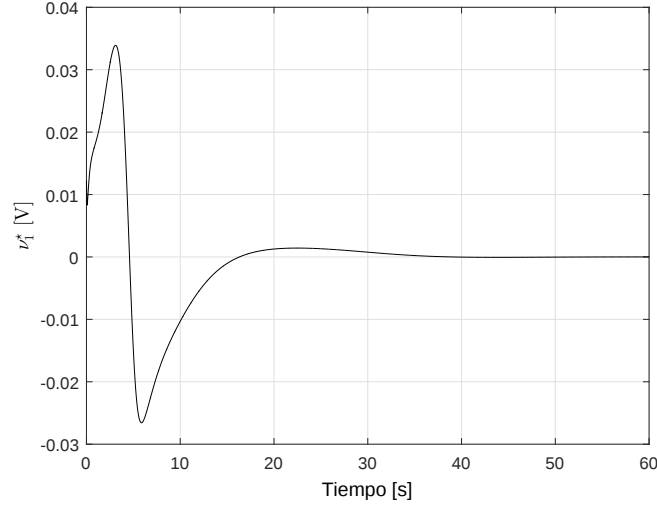


Figura 16: Voltaje aplicado al motor 1

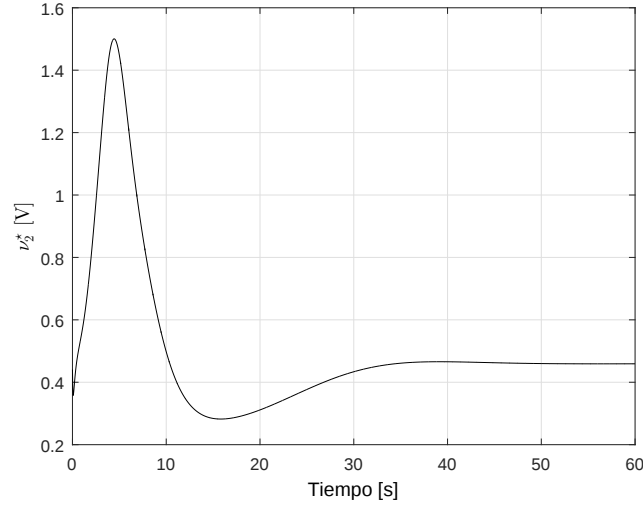


Figura 17: Voltaje aplicado al motor 2

4.4.2. Modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado: caso no perturbado

Los resultados numéricos de este apartado muestran el desempeño del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado (1), (2) y (55). Para este caso las perturbaciones se consideran nulas, es decir $w_q = w_\tau = 0$ para todo $t \geq 0$. Las figuras 18 y 19 muestran los estados y las entradas de control basadas en voltaje del helicóptero subactuado con actuadores dinámicos en lazo cerrado. Se puede apreciar que los estados q_1 , q_2 , q_3 , τ_1 , τ_2 convergen a los mismos valores de los estados de referencia q_1^* , q_2^* , q_3^* , τ_1^* , τ_2^* , lo cual muestra el seguimiento a la dinámica del modelo de referencia. Adicionalmente los estados $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ y las entradas de control ν_1 y ν_2 correspondientes a voltaje son ilustrados en estas figuras.

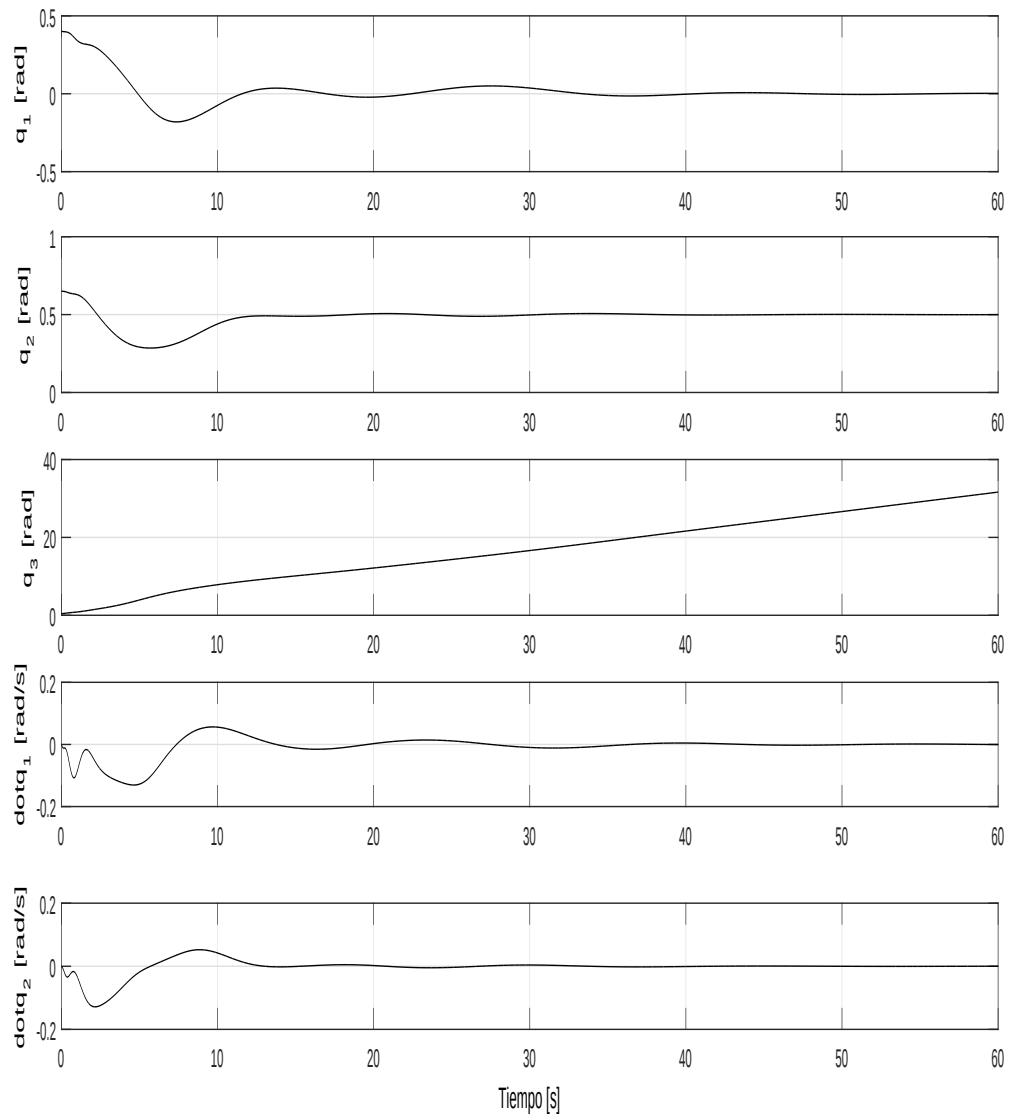


Figura 18: Estados del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado.

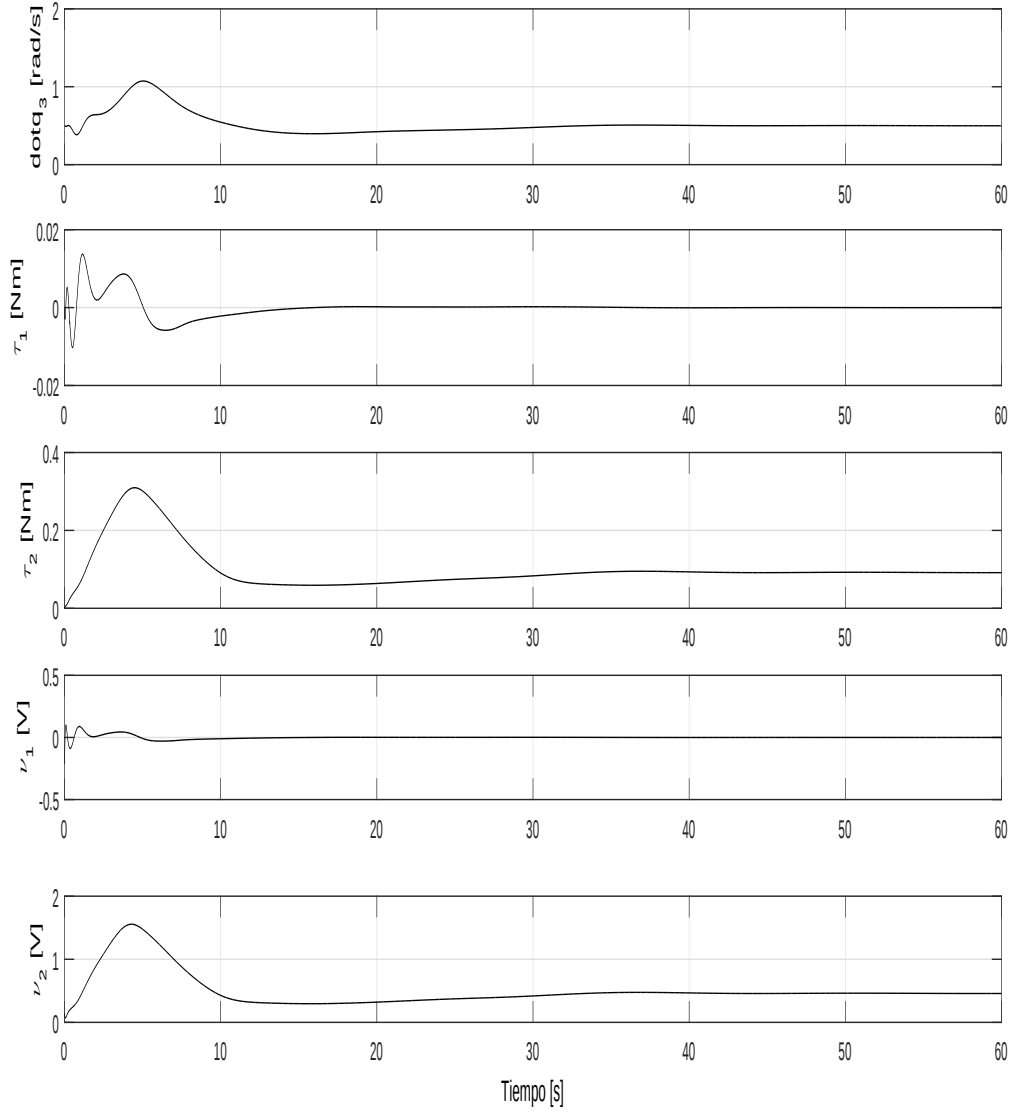


Figura 19: Estados y entradas de control del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado.

4.4.3. Modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado: caso perturbado

Los resultados numéricos de esta subsección muestran el desempeño del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado (1), (2) y (55). Para este caso se consideran las siguientes perturbaciones: $w_q = [w_{q_1} \ w_{q_2} \ w_{q_3}]^T = [0.01\text{sen}(t) \ 0.01\text{sen}(2t) \ 0.02\text{sen}(0.5t)]^T$ y $w_\tau = [w_{\tau_1} \ w_{\tau_2}]^T = [0.02\text{sen}(2t) \ 0.02\text{sen}(2t)]^T$. Las figuras 20 y 21 muestran los estados y las entradas de control basadas en voltaje del helicóptero subactuado con actuadores dinámicos en lazo cerrado. Se puede apreciar que debido a las perturbaciones, los estados $q_1, q_2, q_3, \tau_1, \tau_2$ oscilan alrededor de los valores de los estados de referencia $q_1^*, q_2^*, q_3^*, \tau_1^*, \tau_2^*$, lo cual garantiza

la robustez del controlador H_∞ en el seguimiento de la dinámica de referencia. Adicionalmente los estados $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ y las entradas de control ν_1 y ν_2 correspondientes a voltaje son ilustrados en estas Figuras.

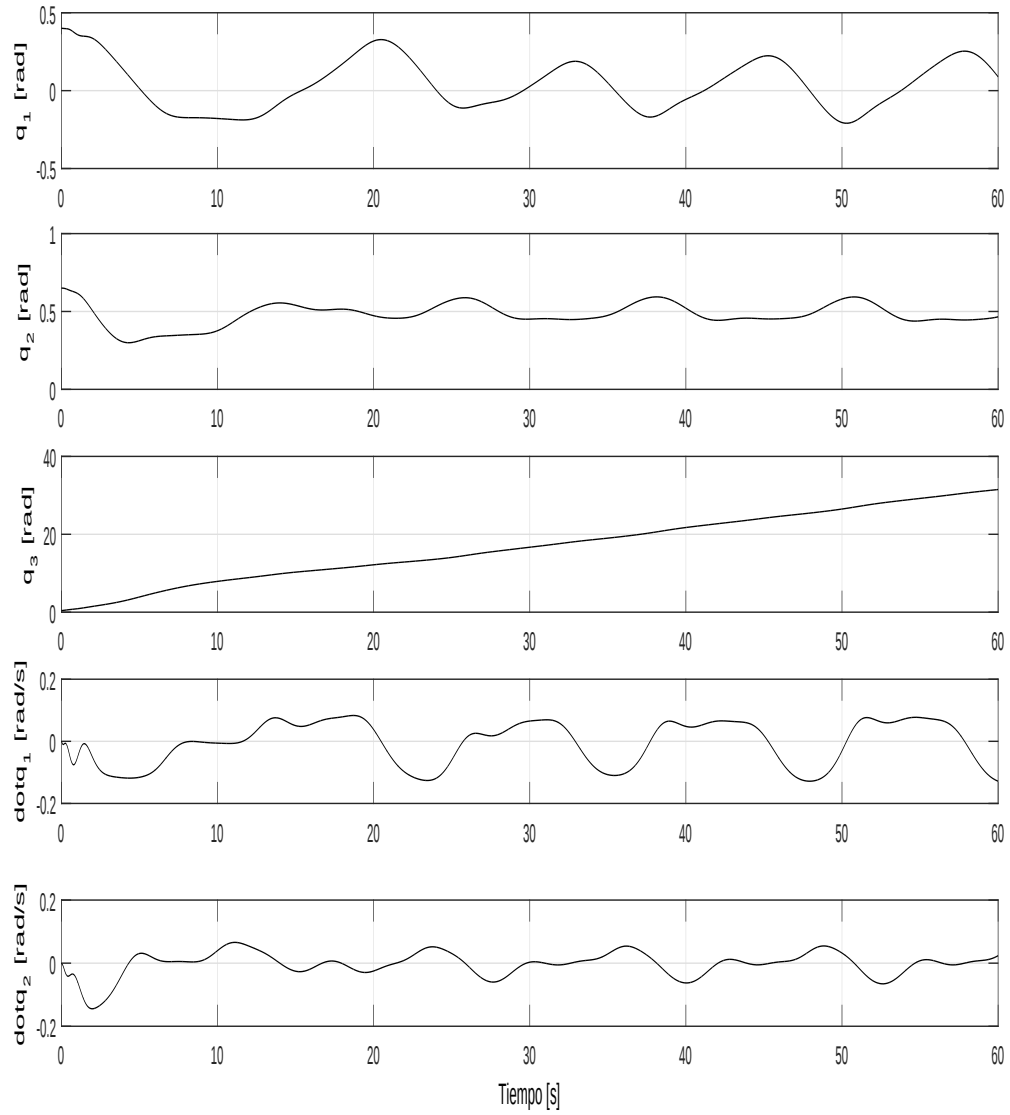


Figura 20: Estados del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado, ante perturbaciones.

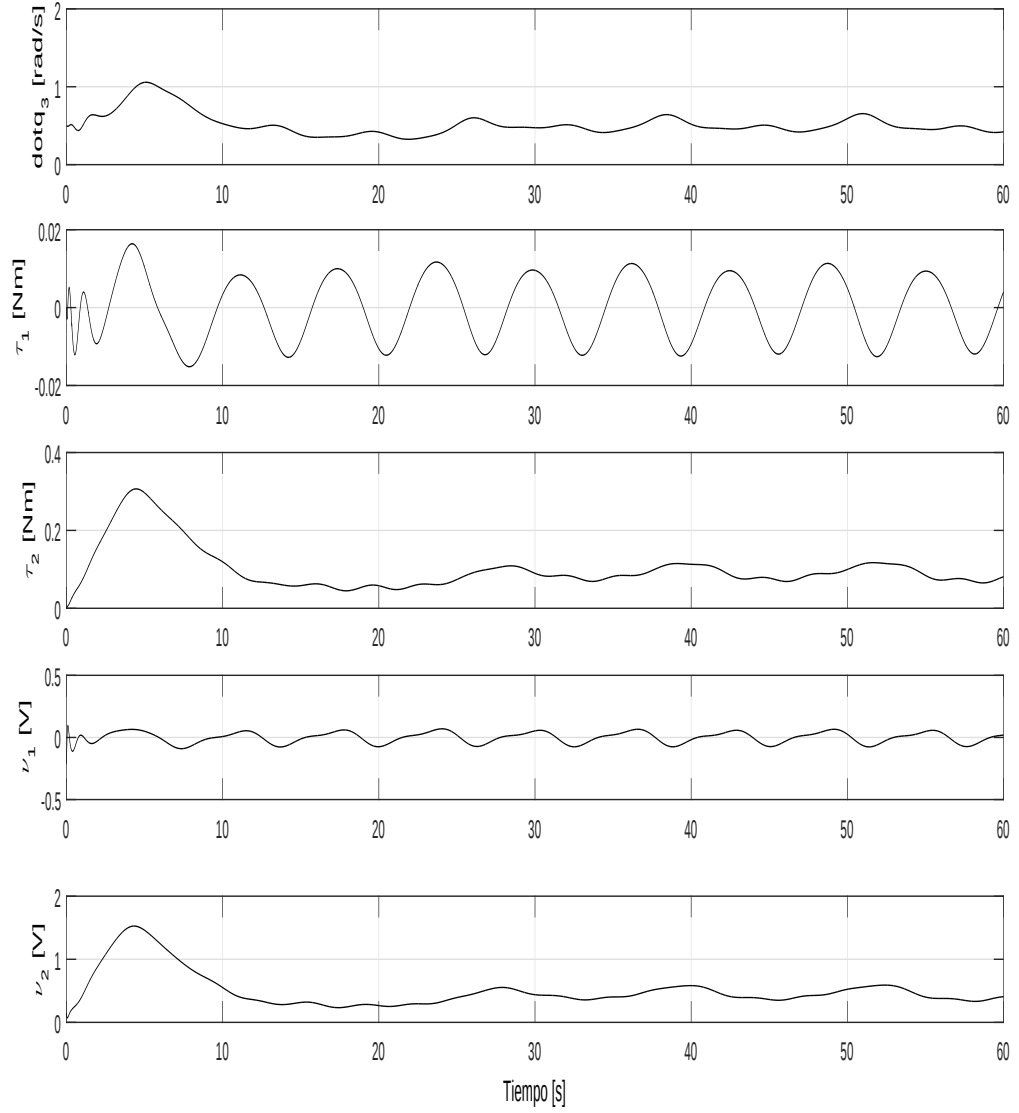


Figura 21: Estados y entradas de control del modelo del helicóptero con actuadores dinámicos en lazo cerrado, ante perturbaciones.

4.5. Conclusiones

La teoría genérica desarrollada en el capítulo dos ha sido numéricamente validada en el presente capítulo a través de un modelo de helicóptero subactuado con tres grados de libertad y dos entradas de control. Los resultados muestran que el controlador robusto aquí utilizado ha permitido manejar el estado del sistema helicóptero subactuado con actuadores hacia una órbita periódica.

Se puede apreciar que cuando las perturbaciones son nulas, el estado del helicóptero subac-

tuado con actuadores converge aintóticamente a su órbita de referencia. Por otro lado cuando las perturbaciones son presentes, el estado del helicóptero subactuado con actuadores evoluciona en las cercanías de dicha órbita de referencia, lo cual corrobora lo expuesto en la hipótesis de este trabajo y que además es factible por el uso del controlador robusto aquí utilizado. En comparación con los resultados obtenidos en Meza-Sánchez *et al.* (2011), donde se diseñó un controlador H_∞ basado en torques para manejar el estado del helicóptero subactuado hacia una órbita de referencia, en el presente capítulo el controlador diseñado para manejar dicho estado hacia la órbita de referencia ha sido basado en voltaje. A pesar de esta diferencia, los resultados de ambos trabajos son similares. Esto debido a que al incluir los actuadores se produce un retardo debido a la respuesta de los torques respecto a los voltajes, sin embargo este retardo no afecta la convergencia hacia la órbita de referencia.

Solución al problema de control H_∞ no lineal bajo restricciones unilaterales

El presente capítulo plantea la solución al problema de control no lineal H_∞ bajo restricciones unilaterales a una dinámica de errores híbrida.

La dinámica de errores híbrida resulta de la diferencia entre la dinámica de una planta híbrida y la dinámica de un modelo de referencia híbrido.

La solución al problema, en términos del controlador H_∞ aquí presentado implica el seguimiento de la dinámica de la planta hacia la dinámica del modelo de referencia en sentido de satisfacer la desigualdad de ganancia L_2 . Cabe mencionar que la desigualdad de ganancia L_2 aquí presentada es una extensión del concepto de desigualdad de ganancia L_2 para sistemas no lineales continuos.

5.1. Dinámica híbrida de la planta

El sistema en consideración es descrito por una dinámica híbrida con parte continua

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B\tau + w_q \quad (95)$$

$$\dot{\tau} = A_\tau \tau + B_\tau \nu + w_\tau. \quad (96)$$

que opera donde se satisface la restricción unilateral $F_0(q) > 0$ y por una transición

$$q(t_i^+) = q(t_i^-) \quad (97)$$

$$\dot{q}(t_i^+) = \theta(q(t_i))\dot{q}(t_i^-) + W_i^d \quad (98)$$

$$\tau(t_i^+) = \tau(t_i^-). \quad (99)$$

que opera durante impactos en la relación $F_0(q(t_i)) = 0$. Se le llama dinámica híbrida puesto que se compone de dos elementos de distinta naturaleza, el primer elemento corresponde a la dinámica continua, mientras que el segundo a la etapa de transición. Por un lado la dinámica continua hace evolucionar al estado de forma continua y por otro, la etapa de transición lo transfiere hacia otro lugar del espacio de fase, produciendo entonces una discontinuidad. En la dinámica continua (95) y (96), los vectores $q \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ describen posiciones y velocidades generalizadas, respectivamente, $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de torques o fuerzas asociado a las coordenadas generalizadas actuadas, el cual es manejado por las correspondientes componentes de voltaje del vector de entrada $\nu \in \mathbb{R}^n$. Desde el punto de vista físico, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de inercia, la cual es positiva definida y de clase C^1 , $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ la aceleración de la gravedad, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ compuesta de 0 y 1 especifica las coordenadas generalizadas actuadas, $A_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales que definen el comportamiento lineal de las dinámicas de los actuadores, particularmente A_τ es una matriz Hurwitz. Los vectores $w_q \in \mathbb{R}^n$ y $w_\tau \in \mathbb{R}^n$ son perturbaciones. Debido a que la dimensión de la posición generalizada q y la dimensión de la entrada de control basada en voltaje ν son iguales, entonces el sistema aquí considerado es totalmente actuado. Los elementos que componen la transición (97)-(99) se describen a continuación: las variables $q(t_i^-)$, $\dot{q}(t_i^-)$ y $\tau(t_i^-)$ denotan los estados un instante antes de pertenecer a la relación $F_0(q(t_i)) = 0$, mientras que $q(t_i^+)$, $\dot{q}(t_i^+)$ y $\tau(t_i^+)$ denotan los estados una vez que se alcanza dicha relación. $W_i^d, i = 1, 2, \dots$ son perturbaciones durante la transición, correspondientes a (98) y $\theta(q(t_i)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de transición dependiente de la posición. La función escalar $F_0(q)$ define la restricción unilateral impuesta al sistema en consideración.

Como paso previo al diseño del controlador, se lleva el sistema híbrido (95)-(99) a una representación dinámica en términos de errores, tal como se ilustrará en el siguiente apartado.

5.2. Dinámica híbrida de errores

5.2.1. Dinámica de errores continua

Los errores para las coordenadas generalizadas q y $\dot{q}$ se definen como error de posición y error de velocidad

$$e_p = q - q^*, \quad e_v = \dot{q} - \dot{q}^* \quad (100)$$

respectivamente, donde q^* y $\dot{q}^*$ son trayectorias que eventualmente pueden provenir de un modelo de referencia híbrido tal como el oscilador de Van der Pol híbrido presentado en Orlov *et al.*

(2016) y Herrera *et al.* (2017), además de ser periódicas y sujetas a impactos que ocurren en el conjunto $F_0(q^*) = 0$. La dinámica para estos errores resulta de derivarlos una vez respecto al tiempo, es decir

$$\dot{e}_p = e_v \quad (101)$$

$$\dot{e}_v = M(e_p + q^*)^{-1}[-C(e_p + q^*, e_v + \dot{q}^*)(e_v + \dot{q}^*) - G(e_p + q^*) + B\tau + w_q] - \ddot{q}^* \quad (102)$$

debido a que esta dinámica no posee un equilibrio en el origen, la entrada de control τ es seleccionada como

$$\tau = B^{-1}[M(q^*)\ddot{q}^* + C(q^*, \dot{q}^*)\dot{q}^* + G(q^*) + u]. \quad (103)$$

Se puede observar que esta entrada lleva a la siguiente representación

$$\dot{e}_p = e_v \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_v = & M(e_p + q^*)^{-1}[-C(e_p + q^*, e_v + \dot{q}^*)(e_v + \dot{q}^*) - G(e_p + q^*) \\ & + M(q^*)\ddot{q}^* + C(q^*, \dot{q}^*)\dot{q}^* + G(q^*) + u + w_q] - \ddot{q}^* \end{aligned} \quad (105)$$

para la dinámica de errores (101) y (102), donde ahora se puede apreciar que el origen es el único punto de equilibrio, así como la introducción de la nueva variable virtual u . Para definir una dinámica en términos de error para la variable τ , se extrae u de (103), la cual funje como su variable de error, es decir

$$u = B[\tau - \underbrace{(B^{-1}M(q^*)\ddot{q}^* + B^{-1}C(q^*, \dot{q}^*)\dot{q}^* + B^{-1}G(q^*))}_{\tau^*}] \quad (106)$$

y su dinámica es gobernada por la expresión

$$\dot{u} = B[\dot{\tau} - \dot{\tau}^*] \quad (107)$$

para la cual se remplaza la relación (96) con motivo de introducir la variable de control basada en voltaje ν , entonces resultando en

$$\dot{u} = B[A_\tau \tau + B_\tau \nu + w_\tau - \dot{\tau}^*], \quad (108)$$

al ser considerada ν como

$$\nu = (BB_\tau)^{-1}[\Omega - BA_\tau \tau + B\dot{\tau}^*] \quad (109)$$

permite la representación lineal autónoma para (108)

$$\dot{u} = \Omega + Bw_\tau. \quad (110)$$

En esta representación Ω es una nueva variable de control virtual a ser diseñada. Hasta el momento, se ha definido la dinámica de errores continua para el sistema (95) y (96), la cual se compone de las relaciones (104), (105) y (110) y es reescrita como

$$\dot{e} = f(e, t) + g_1(e, t)w + g_2(e, t)\Omega, \quad (111)$$

especificado con

$$e = [e_p^T, \quad e_v^T, \quad u^T]^T \quad (112)$$

$$f(e, t) = \begin{bmatrix} e_v \\ M(e_p + q^*)^{-1}[-C(e_p + q^*, e_v + \dot{q}^*)(e_v + \dot{q}^*) - G(e_p + q^*)] \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} + \quad (113)$$

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ M(e_p + q^*)^{-1}[M(q^*)\ddot{q}^* + C(q^*, \dot{q}^*)\dot{q}^* + G(q^*) + u] - \ddot{q}^* \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$g_1(e, t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 3n} \\ M^{-1}(e_p + q^*) & 0_{n \times n} & 0_{n \times 3n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times 3n} \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$g_2(e, t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \\ B \end{bmatrix} \quad (116)$$

$$w = (w_q^T, w_\tau^T, w_y^T)^T. \quad (117)$$

El vector de perturbaciones $w \in \mathbb{R}^{5n}$ incluye el vector de perturbaciones asociado a la ecuación de E-L (95), $w_q \in \mathbb{R}^n$; el asociado a la dinámica de los actuadores (96), $w_\tau \in \mathbb{R}^n$ y el asociado a las mediciones proporcionadas por sensores (119), $w_y \in \mathbb{R}^{3n}$. Es sencillo verificar que la dinámica (111) no forzada posee un punto de equilibrio en el origen, es decir, $f(0, t) = 0$ para todo t . La dinámica (111), se acompaña con una salida de desempeño dada en su forma genérica por

$$z(t) = h_1(e, t) + k_{12}(e, t)\Omega \quad (118)$$

y con una salida medible, dada por

$$y(t) = h_2(e, t) + k_{21}(e, t)w. \quad (119)$$

En (118) $z(t)$ es especificada con

$$h_1(e, t) = [0_{n \times 1} \quad \rho_1 e_p^T \quad \rho_2 e_v^T \quad \rho_3 u^T]^T, \quad (120)$$

$$k_{12}(e, t) = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times n} \quad 0_{n \times n} \quad 0_{n \times n}]^T \quad (121)$$

y ρ_1, ρ_2 y ρ_3 como matrices diagonales de pesos de dimensión $n \times n$. Por otro lado la medición completa del estado $y(t)$ es especificada con

$$h_2(e, t) = [e_p^T \quad e_v^T \quad u^T]^T \quad (122)$$

$$k_{21}(e, t) = [0_{3n \times 2n} \quad I_{3n \times 3n}]. \quad (123)$$

Las funciones, h_1, h_2, k_{12}, k_{21} son de dimension apropiada y son sujetas a las suposiciones

$$h_1^T(e, t)k_{12}(e, t) \equiv 0, \quad k_{12}^T(e, t)k_{12}(e, t) \equiv I \quad (124)$$

$$k_{21}(e, t)g_1^T(e, t) \equiv 0, \quad k_{21}(e, t)k_{21}^T(e, t) \equiv I, \quad (125)$$

las cuales son típicamente utilizadas en el diseño de síntesis H_∞ no lineal variante en el tiempo, ver Isidori y Astolfi (1992).

5.2.2. Errores durante la etapa de transición

Los errores para las relaciones (97) y (98) son dados por su diferencia respecto a una transición producida por un modelo de referencia híbrido sujeto a impactos, que idealmente ocurren en sincronía con los que experimentan las relaciones de transición (97) y (98), es decir, cuando se satisface $F_0(q^*(t_i)) = 0$. La transición para dicho modelo de referencia es dada por

$$q^*(t_i^+) = q^*(t_i^-) \quad (126)$$

$$\dot{q}^*(t_i^+) = \theta(q^*(t_i))\dot{q}^*(t_i^-), \quad i = 1, 2, \dots \quad (127)$$

y por tanto los errores para la etapa de transición son

$$e_p(t_i^+) = e_p(t_i^-) \quad (128)$$

$$e_v(t_i^+) = \mu_0(e_p(t_i), e_v(t_i^-), t_i) + \omega(e_p(t_i), e_v(t_i^-), t_i)W_{1i}^d, \quad (129)$$

donde W_i^d representa una perturbación durante la transición y μ_0 es una función descrita por

$$\mu_0(e_p(t_i), e_v(t_i^-)) = \theta(e_p + q^*(t))[e_v + \dot{q}^*(t^-)] - \theta(q^*(t))\dot{q}^*(t^-). \quad (130)$$

Debido a (99), el torque τ no varía durante instantes de impacto, entonces de (106) es sencillo verificar la veracidad de la relación

$$B^{-1}u(t_i^+) + \tau^*(t_i^+) = B^{-1}u(t_i^-) + \tau^*(t_i^-) \quad (131)$$

la cual reescrita en la forma

$$u(t_i^+) = u(t_i^-) + \underbrace{B(\tau^*(t_i^-) - \tau^*(t_i^+))}_{W_{2i}^d} \quad (132)$$

representa el error para la variable τ durante los momentos de impacto. Es de gran interés notar que esta última relación involucra el término aditivo $B(\tau^*(t_i^-) - \tau^*(t_i^+))$, mismo que para la variable u representa una perturbación durante la dinámica de transición. Debido a este término que se produce de manera inherente al realizar la transformación (103), el objetivo de control se plantea en términos de satisfacer únicamente la desigualdad de ganancia L_2 en lazo cerrado, tal como se ilustrará en el siguiente apartado.

5.3. Planteamiento del problema de control H_∞ bajo restricciones unilaterales

En esta sección se plantea el problema de control no lineal H_∞ bajo restricciones unilaterales para el sistema (111), (118), (119), (128), (129) y (132), el cual es reescrito como:

- dinámica continua: evoluciona durante la relación $F(e_p, t) > 0$

$$\dot{e} = f(e, t) + g_1(e, t)w + g_2(e, t)\Omega \quad (133)$$

$$z = h_1(e, t) + k_{12}(e, t)\Omega \quad (134)$$

$$y = h_2(e, t) + k_{21}(e, t)w, \quad (135)$$

- etapa de transición: evoluciona durante la relación $F(e_p, t) = 0$

$$e_p(t_i^+) = e_p(t_i^-) \quad (136)$$

$$e_v(t_i^+) = \mu_0(e_p(t_i), e_v(t_i^-), t_i) + \omega(e_p(t_i), e_v(t_i^-), t_i) W_{1i}^d \quad (137)$$

$$u(t_i^+) = u(t_i^-) + B \underbrace{(\tau^*(t_i^-) - \tau^*(t_i^+))}_{W_{2i}^d} \quad (138)$$

$$z_i^d = [e_v(t_i^+) \ u(t_i^+)]^T \quad (139)$$

donde $e^T = [e_p^T, e_v^T, u^T] \in \mathbb{R}^{3n}$ representa el vector de estados, cuyas componentes e_p , e_v y u pertenecen a $\mathbb{R}^n$; $\Omega \in \mathbb{R}^n$ representa la entrada de control; $w \in \mathbb{R}^{5n}$ y $W_i^d \in \mathbb{R}^n$ las perturbaciones que afectan a esta dinámica; la variable $y \in \mathbb{R}^{3n}$ representa la medición del estado, mientras que las variables $z \in \mathbb{R}^{4n}$ y $z_i^d \in \mathbb{R}^n$ representan las salidas del sistema a ser controladas. Las funciones $f, g_1, g_2, h_1, k_{12}, h_2, k_{21}, F, \mu_0$ y ω son de dimensión apropiada y son continuamente diferenciables en sus argumentos, así como uniformemente acotadas en t . El hecho de que estas funciones sean variantes en tiempo implica atender un problema de seguimiento, donde las relaciones (133)- (139) son especificadas en términos de las desviaciones de la planta y de alguna trayectoria de referencia. Se puede apreciar que el sistema antes descrito, al no ser forzado, posee un punto de equilibrio en el origen, es decir, $f(0, t) = 0, h_1(0, t) = 0, h_2(0, t) = 0$ y $\mu_0(0, 0, t) = 0$. Para propósitos del presente trabajo de tesis, este sistema es considerado como completamente actuado, es decir la dimensión de la entrada de control es igual que la dimensión de la variable de estado.

El problema de control para el sistema híbrido en términos de errores consiste en encontrar un controlador

$$\Omega = \phi(\xi, t), \quad (140)$$

tal que la ganancia L_2 de este sistema en lazo cerrado sea menor o igual que $\gamma > 0$, es decir, que la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \|z(t)\|^2 dt + \sum_{i=1}^{N_T} \|z(t)_i^d\|^2 &\leq \gamma^2 \left[\int_{t_0}^T \|w(t)\|^2 dt + \sum_{i=1}^{N_T} \|w(t)_i^d\|^2 \right] + \\ &\sum_{k=0}^{N_T} \beta_k(e(t_k^-), \xi(t_k^-), t_k) \end{aligned} \quad (141)$$

sea satisfecha para alguna función definida positiva $\beta_k(e(t_k^-), \xi(t_k^-), t_k)$, $k = 0, \dots, N_T$. Para toda perturbación $w(t)$ continua a tramos dentro del intervalo $[t_0, T]$ y discreta $w_i^d, i = 1, 2, \dots$, en el intervalo N_T tal que $t_{N_T} \leq T < t_{N_T+1}$. Considerando dichas perturbaciones, la trayectoria de estado del sistema en lazo cerrado iniciada en $(e(t_0), \xi(t_0)) = (e_0, \xi_0) \in U$ permanece en alguna vecindad $U \in \mathbb{R}^{3(n+s)}$ del origen, para todo $t \in [t_0, T]$.

En la relación (140) $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T \in \mathbb{R}^{3s}$ es el estado estimado proporcionado por el filtro

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \eta(\xi, y, t), \quad \dot{\xi}_3 = \eta(\xi, y, t) \\ \xi(t_j^+) &= \nu(\xi(t_j^-), y(t_j^-), t_j),\end{aligned}\tag{142}$$

el cual copia la estructura de la planta y sus funciones son uniformemente acotadas en t .

Observación. A diferencia del planteamiento presentado en (Montano *et al.*, 2014) y (Montano *et al.*, 2016) se puede apreciar que en este planteamiento sólo se busca satisfacer la desigualdad de ganancia L_2 , dejando de lado la estabilización asintótica uniforme para cuando las perturbaciones son nulas. Como consecuencia de manejar las coordenadas generalizadas del sistema E-L híbrido a través de voltajes en vez de torques o fuerzas, la dinámica E-L híbrida es aumentada con una dinámica adicional correspondiente a actuadores dinámicos. Debido a esta dinámica adicional, se refleja un término inherente asociado a perturbación en su correspondiente dinámica de errores híbrida, este término se puede apreciar en (132) y es el motivo por el cual la dinámica de errores nunca va a ser libre de perturbaciones y por tanto el planteamiento aquí presentado difiere del planteamiento presentado en (Montano *et al.*, 2014) y (Montano *et al.*, 2016).

5.3.1. Solución local

Bajo la condiciones siguientes:

C_1) Existe una constante positiva ϵ_0 tal que la ecuación diferencial de Riccati

$$-\dot{P}_\epsilon = P_\epsilon(t)A(t) + A^T(t)P_\epsilon(t) + C^T(t)C(t) + P_\epsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P_\epsilon(t) + \epsilon I, \tag{143}$$

posee una solución simétrica definida positiva uniformemente acotada $P_\epsilon(t)$ para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, donde

$$A(t) = \frac{\partial f(e, t)}{\partial e}\bigg|_{e=0}, \quad B_1(t) = g_1(0, t), \quad B_2(t) = g_2(0, t), \quad C(t) = \frac{\partial h(e, t)}{\partial e}\bigg|_{e=0};$$

C_2) La norma de la función matricial α está acotada superiormente por $\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma$, esto es,

$$\|\alpha\| < \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma, \tag{144}$$

donde

$$\alpha = \begin{bmatrix} \omega(e, t) & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (145)$$

Es posible enunciar la siguiente proposición, la cual proporciona solución al problema de control en consideración.

Proposición 3 *Sean las condiciones C_1 y C_2 satisfechas con algún $\gamma > 0$. Entonces el sistema en lazo cerrado manejado por el controlador por retroalimentación de salida*

$$\Omega = -g_2(e, t)^T P_\epsilon(t) \xi \quad (146)$$

localmente posee la ganancia L_2 menor que γ .

Prueba. Se restringe a satisfacer únicamente que la ganancia L_2 sea menor $\gamma > 0$, en el teorema 4.1 de Montano et al. (2016).

Hasta el momento se ha calculado el controlador Ω para la dinámica de errores, el cual esta relacionado con el controlador ν de la planta, a través de (109). Entonces el controlador basado el voltaje para la planta es dado por (109).

5.4. Conclusiones

El diseño de un controlador no lineal H_∞ de seguimiento para un sistema híbrido completamente actuado, sujeto a perturbaciones y manejado a través de actuadores ha sido realizado en el presente capítulo. A diferencia de Montano et al. (2016) y Montano et al. (2014), donde los actuadores no son considerados y los controladores para lograr el objetivo de seguimiento son basados en torques o fuerzas, en el presente trabajo los actuadores que producen dichos torques o fuerzas han sido considerados y las entradas de estos actuadores fueron las entradas de control basadas en voltaje. Al no existir perturbaciones en el sistema híbrido, dicha literatura presenta resultados de seguimiento asintótico. Por otra parte la adición del modelo de actuadores permite el manejo del sistema por medio de voltaje. Dicha adición provocó la introducción de un término aditivo en la etapa de transición del sistema híbrido, el cual es asociado a una perturbación. Entonces destruyendo la propiedad de seguimiento asintótico, sin embargo logrando un seguimiento robusto, es decir, en sentido de satisfacer que la desigualdad de ganancia L_2 sea menor que $\gamma > 0$. Esto se apreció en los resultados a través de la desviación del estado respecto a su referencia.

Oscilador de Van der Pol híbrido como modelo de referencia

El oscilador de Van der Pol es un sistema dinámico de segundo orden bien reconocido dentro del área de sistemas dinámicos. El oscilador posee un ciclo límite asintóticamente estable que atrae todas sus soluciones que inician fuera del origen, excepto aquella que inicia en el origen, la cual permanece en el mismo origen durante toda su evolución, ver Khalil (2002). Este oscilador se describe por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{q}^* = -\varepsilon[q^{*2} - \rho^2]\dot{q}^* - \mu^2 q^*, \quad (147)$$

donde ε , ρ y μ son parámetros positivos. En la Figura 22 se muestra el retrato de fase producido por este oscilador para los valores paramétricos $\varepsilon = \rho = \mu = 1$. Se aprecia en esta Figura su convergencia hacia el ciclo límite para cuando este oscilador se inicia tanto del interior como del exterior del ciclo.

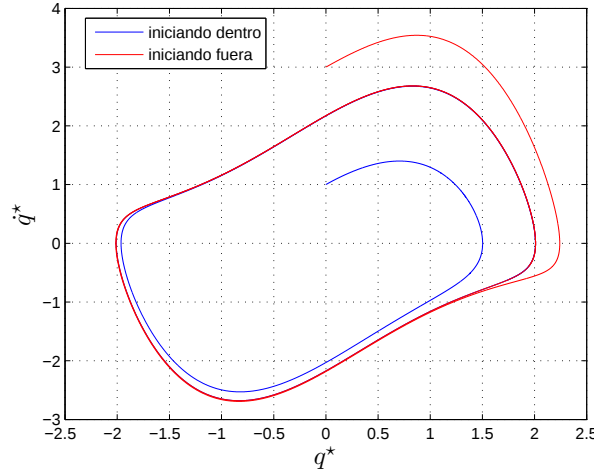


Figura 22: Retrato de fase del oscilador de Van der Pol

En Roup y Bernstein (2001) se ha reportado una modificación al oscilador de Van Der Pol con objeto de modificar la geometría de su ciclo límite al de una elipse. Esta modificación ha llevado a producir el llamado oscilador de Van der Pol modificado

$$\ddot{q}^* = -\varepsilon[(q^{*2} + \frac{\dot{q}^{*2}}{\mu^2}) - \rho^2]\dot{q}^* - \mu^2 q^*, \quad (148)$$

para el cual su ciclo límite es gobernado por la ecuación de la elipse

$$q^{\star 2} + \frac{\dot{q}^{\star 2}}{\mu^2} = \rho^2. \quad (149)$$

Para una selección paramétrica de $\varepsilon = 1000$, $\rho = 0.01$ y $\mu = 1$, el oscilador de Van der Pol modificado genera el retrato de fase mostrado en la Figura 23, se puede apreciar que este oscilador, al igual que el descrito en (147), posee su ciclo límite asintóticamente estable.

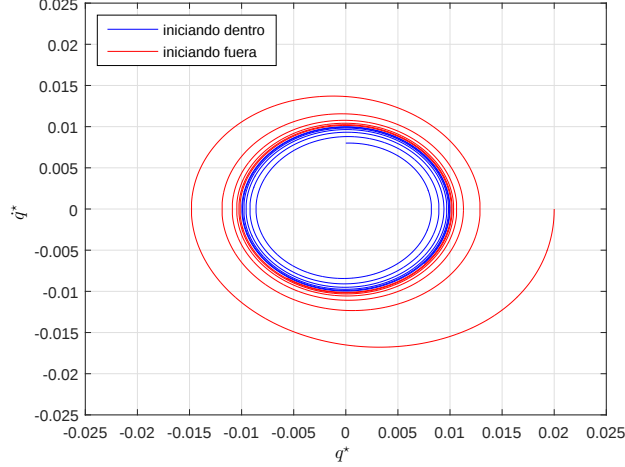


Figura 23: Retrato de fase del oscilador de Van der Pol modificado

Cabe notar que al escalar la variable de tiempo $t = \mu^{-1}\tau$ y las variables de estado $q^{\star} = \rho y_1$ y $\dot{q}^{\star} = \rho \mu y_2$, este oscilador modificado es re-parametrizado con el único parámetro $\alpha = \varepsilon \rho^2 \mu^{-1}$. Se aprecia que al ser representado en las nuevas variables de estado y_1 y $y_2 = \frac{dy_1}{d\tau}$, donde la derivación se realiza con respecto a τ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -\alpha[(y_1^2 + y_2^2) - 1]y_2 - y_1, \quad \alpha = \frac{\varepsilon \rho^2}{\mu} > 0. \end{aligned} \quad (150)$$

El oscilador de Van der Pol modificado genera oscilaciones armónicas estables de magnitud ρ , frecuencia μ y velocidad de transitorio ε . Debido a sus características, este oscilador ha resultado bastante adecuado para su uso en control adaptable por modelo de referencia, ver Roup y Bernstein (2001), Orlov *et al.* (2008) y Aguilar *et al.* (2015), donde la magnitud y frecuencia deseadas de las oscilaciones pueden ser modificadas en línea.

En lo posterior del presente capítulo, se diseñará un oscilador de Van der Pol modificado híbrido, para el cual se buscaran condiciones paramétricas tales que produzcan en su dinámica un comportamiento de ciclo límite o convergencia asintótica hacia el origen. Debido a que el análisis presentado en el oscilador híbrido se restringe al estudio de dos comportamientos en

función de los parámetros, se dice que este nuevo oscilador posee una bifurcación de Hopf. De forma análoga al oscilador de Van der Pol convencional, la motivación para diseñar este nuevo oscilador es para que sea utilizado como modelo de referencia en mecanismos que presentan comportamientos con impactos, tales como robots bípedos que impactan con la superficie del suelo a través de su caminado, para los cuales resultaría factible modificar en línea su amplitud y frecuencia de caminado con el hecho de manipular los parámetros del oscilador híbrido.

6.1. Oscilador de Van der Pol híbrido

Con base al oscilador de Van der Pol modificado, en Herrera *et al.* (2017) se ha construido un oscilador híbrido que se describe por la dinámica continua (148) y por las relaciones de transición

$$\begin{aligned} q^*(t^+) &= q^*(t^-), \\ \dot{q}^*(t^+) &= -e\dot{q}^*(t^-), \end{aligned} \tag{151}$$

donde $e \in (0, 1)$ es un parámetro de transición, $q^*(t^-)$ y $\dot{q}^*(t^-)$ son los estados un instante antes de pertenecer al conjunto $S = \{[q^* \ \dot{q}^*]^T \in \mathbb{R}^2 : q^* = 0 \cup \dot{q}^* \leq 0\}$ y $q^*(t^+)$ y $\dot{q}^*(t^+)$ son los estados una vez alcanzado este conjunto. La relación (148) opera cuando q^* y $\dot{q}^*$ no pertenecen al conjunto S mientras que las relaciones (151) operan una vez que se toca este conjunto. En el caso de un robot bípedo, el conjunto S correspondería a la superficie del suelo.

6.2. Existencia de un ciclo límite híbrido

Similar al oscilador de Van der Pol modificado, el oscilador híbrido (148), (151) posee un equilibrio en el origen que puede ser sencillamente verificado por inspección. Adicionalmente, es de interés saber si este oscilador híbrido es capaz de generar un ciclo límite estable. Para saberlo, en la presente sección se deducen condiciones suficientes que consecuentemente evidencien la existencia del ciclo límite estable.

Sin pérdida de generalidad, el análisis de estabilidad posterior para el oscilador (148), (151) es restringido a la condición inicial $q^*(0) = 0$ y $\dot{q}^*(0) = v_0$ con $v_0 > 0$ y su trayectoria para esta condición inicial es descrita por

$$\bar{q}^*(v_0, t) = (q^*(v_0, t), \dot{q}^*(v_0, t))^T. \tag{152}$$

Los instantes en que la trayectoria toca el conjunto S son descritos por la secuencia de tiempo $t_k, k = 1, 2, \dots$

Dependiendo de la selección paramétrica para este oscilador, los siguientes dos escenarios se derivan de manera heurística.

e_1) Las desigualdades

$$\dot{q}^*(v_0, t_1^+) \leq v_0, \quad \dot{q}^*(v_0, t_{k+1}^+) \leq \dot{q}^*(v_0, t_k^+) \quad (153)$$

se satisfacen para todo $k = 1, 2, \dots$ y todo $v_0 > 0$.

e_2) Existe un escalar $x^* > 0$ tal que las desigualdades (153) se satisfacen para todo $k = 1, 2, \dots$ y todo $v_0 > x^*$ mientras que las desigualdades inversas

$$\dot{q}^*(v_0, t_1^+) > v_0, \quad \dot{q}^*(v_0, t_{k+1}^+) > \dot{q}^*(v_0, t_k^+) \quad (154)$$

se satisfacen para todo $k = 1, 2, \dots$ y todo $v_0 \in (0, x^*)$.

Cabe notar que el escenario e_2) se cumple para el oscilador de Van der Pol modificado (148), donde los instantes $t_k, k = 1, 2, \dots$ son aquellos que ocurren cuando la trayectoria dependiente del estado coincide con el eje vertical $q^* = 0, \dot{q}^* > 0$. Para reproducir esta conclusión se puede apreciar de Orlov (2008) que al diferenciar la función candidata de Lyapunov

$$V(\bar{q}^*) = \frac{1}{2}q^{*2} + \frac{1}{2\mu^2}\dot{q}^{*2} \quad (155)$$

a lo largo de las trayectorias de (148) se obtiene

$$\dot{V}(\bar{q}^*) = \frac{\varepsilon}{\mu^2}[\rho^2 - (q^{*2} + \frac{\dot{q}^{*2}}{\mu^2})]\dot{q}^{*2} \quad (156)$$

lo cual proporciona

$$\dot{V}(\bar{q}^*) \begin{cases} > 0, & \text{if } (q^{*2} + \frac{\dot{q}^{*2}}{\mu^2} < \rho^2), \quad \dot{q}^* \neq 0 \\ < 0, & \text{if } (q^{*2} + \frac{\dot{q}^{*2}}{\mu^2} > \rho^2), \quad \dot{q}^* \neq 0 \\ = 0, & \text{if } (q^{*2} + \frac{\dot{q}^{*2}}{\mu^2} - \rho^2)\dot{q}^{*2} = 0. \end{cases} \quad (157)$$

Entonces el escenario dos propiamente adaptado para el oscilador de Van der Pol modificado (148), resulta de (157). La función (155) no es adecuada para detectar un ciclo límite en el oscilador híbrido (148), (151) ya que en contraste a la variación de signo (157) de su derivada temporal (156), calculada entre instantes de impacto $t_k, k = 1, 2, \dots$, su cambio instantáneo $\Delta V(\bar{q}^*(v_0, t_k)) = V(\bar{q}^*(v_0, t_k^+)) - V(\bar{q}^*(v_0, t_k^-))$ en los instantes de impacto t_k es gobernado por la transición (151) y por lo tanto permanece negativa definida $\Delta V(\bar{q}^*(v_0, t_k)) = \frac{1}{2\mu^2}[\dot{q}^{*2}(v_0, t_k^+) - \dot{q}^{*2}(v_0, t_k^-)] = \frac{\varepsilon^2 - 1}{2\mu^2}\dot{q}^{*2}(v_0, t_k^-) < 0$ a pesar de la selección de las condiciones

iniciales.

Observación. Otros posibles escenarios donde, por ejemplo, (154) se satisface para todo $k = 1, 2, \dots$ y todo v_0 que lleven a inestabilidad o a convergencias no monotónicas de la secuencia $\dot{q}^*(v_0, t_k^+)$, $k = 1, 2, \dots$ hacia el valor fijo x^* (posiblemente cero), fueron despreciadas debido al estudio numérico presentado en los apartados siguientes. El estudio aquí realizado deduce que solo los escenarios e_1 y e_2 son destacados para varias condiciones iniciales y combinaciones admisibles de los parámetros de el oscilador híbrido. De acuerdo al teorema, mostrado a continuación, los escenarios e_1 y e_2 representan condiciones suficientes para que el oscilador híbrido posea un punto de equilibrio asintóticamente estable o que respectivamente genere un ciclo límite estable.

Teorema (Herrera *et al.* (2017), pag. 229). Considere el oscilador de Van der Pol híbrido (148), (151). Sea el escenario e_1 efectivo. Entonces (148), (151) es globalmente asintóticamente estable en el origen. Por otra parte, sea el escenario e_2 efectivo. Entonces (148), (151) posee un ciclo límite estable γ^* generado por la trayectoria $\bar{q}^*(x^*, t)$ tal que cualquier trayectoria de (148), (151) iniciada fuera del origen converge hacia γ^* .

6.3. Análisis numérico de los comportamientos del oscilador híbrido

En esta sección, los diferentes comportamientos del oscilador (148), (151) son numéricamente presentados. Claramente, estos comportamientos también ocurren para su versión re-escalada (150), sujeta a la transición

$$\begin{aligned} y_1(\tau^+) &= y_1(\tau^-), \\ y_2(\tau^+) &= -ey_2(\tau^-) \text{ si } y(\tau) \in S_y, \end{aligned} \tag{158}$$

sobre la correspondiente superficie de impacto

$$S_y = \{y_1 = 0 \cup y_2 \leq 0\}. \tag{159}$$

A diferencia del oscilador de Van der Pol modificado, en el cual su ciclo límite puede variarse en amplitud, frecuencia y velocidad de transitorio bajo una variación paramétrica, pero no degradarse a cero para cualquiera de sus parámetros positivos ρ, μ y ε , el oscilador híbrido exhibe una bifurcación de Hopf para sus parámetros positivos.

De Orlov *et al.* (2016) es sabido que dados los valores paramétricos $\rho = 1$, $\mu = 1$, y $e = 0.5$, la bifurcación de Hopf para el oscilador híbrido ocurre para el parámetro de velocidad del transitorio ε en su valor específico de $\varepsilon_b \approx 0.429$ que corresponde a $\alpha = \varepsilon \rho^2 \mu^{-1}$ en $\alpha_b \approx 0.429$. Estos valores son llamados valores de bifurcación. El comportamiento asintótico de este oscilador hacia el origen es ilustrado en la Figura 24 (a) para un valor del parámetro $\varepsilon \leq \varepsilon_b$ ($\alpha \leq \alpha_b$), por otra parte para el valor paramétrico $\varepsilon > \varepsilon_b$ ($\alpha > \alpha_b$) el oscilador híbrido es capaz de generar un ciclo límite asintóticamente estable, ver figura 24 b.

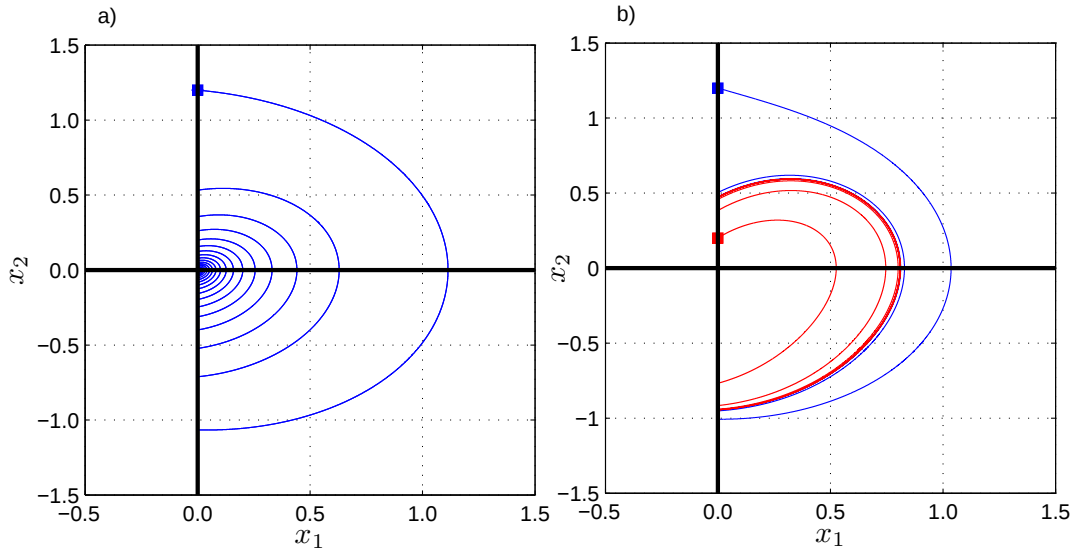


Figura 24: Trayectorias de fase del oscilador híbrido (148), (151), correspondientes a los parámetros $\rho = 1$, $\mu = 1$, $e = 0.5$ y al parámetro de velocidad del transitorio $\varepsilon = 0.3$ (figura a) y $\varepsilon = 0.8$ (figura b). Los cuadrados denotan las condiciones iniciales de las correspondientes trayectorias.

En la figura 25 se puede observar que cuando el parámetro $e = 0.5$ permanece fijo, mientras que $\alpha = \varepsilon \rho^2 \mu^{-1}$ se reduce a $\alpha = 0.2$ (que corresponde por ejemplo a los parámetros $\varepsilon = 0.8, \rho = 0.5, \mu = 1$), el ciclo límite se degrada hacia el origen. Por otra parte, la figura 26 muestra que al incrementar el valor de α a $\alpha = 1$, es decir ajustar $\mu = 0.2$ sin modificar los parámetros $\rho = 0.5, \varepsilon = 0.8$ y $e = 0.5$ nuevamente se genera un ciclo límite.

Finamente se puede apreciar en la figura 27 que al reducir el parámetro de transición e a $e = 0.1$, el ciclo límite se degrada nuevamente hacia el origen. De esto se concluye que la bifurcación de Hopf para el oscilador híbrido resulta de las variaciones paramétricas de α y e . Las relaciones entre los parámetros de bifurcación α_b y e_b resultantes de la bifurcación de Hopf son numéricamente determinados en la siguiente sección.

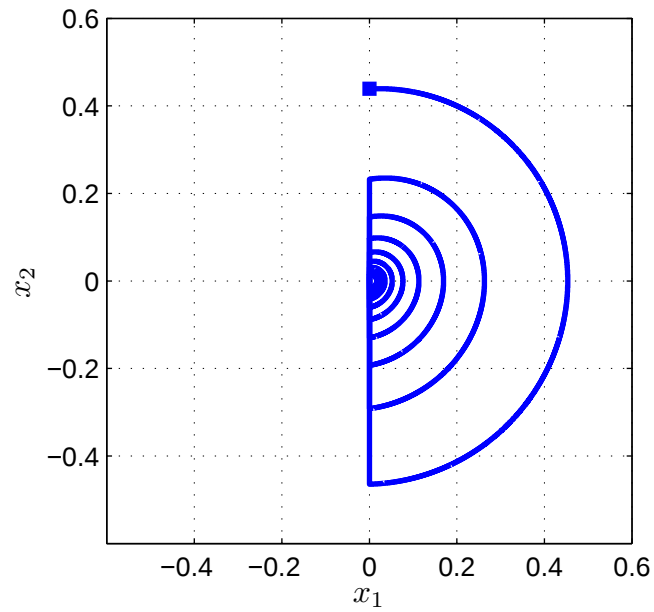


Figura 25: Retrato de fase del oscilador híbrido correspondiente a $\varepsilon = 0.8$, $\rho = 0.5$, $\mu = 1$ y $e = 0.5$. El recuadro en el eje vertical indica la condición.

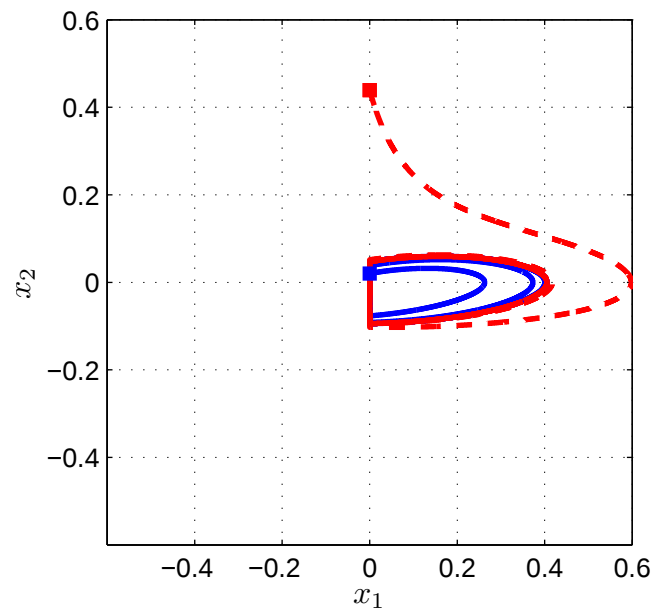


Figura 26: Retrato de fase del oscilador híbrido correspondiente a $\varepsilon = 0.8$, $\rho = 0.5$, $\mu = 0.2$ y $e = 0.5$. Los recuadros en el eje vertical denotan las condiciones iniciales de las dos trayectorias: una con velocidad inicial pequeña (línea continua), y otra con velocidad inicial grande (línea discontinua).

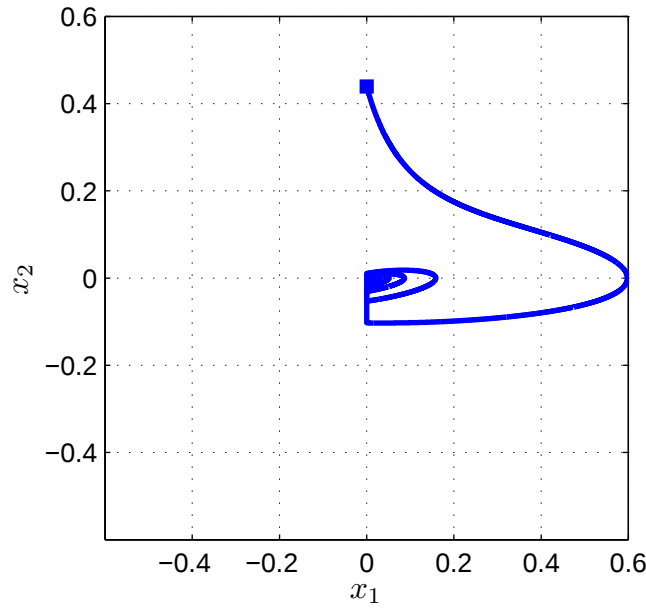


Figura 27: Retrato de fase del oscilador híbrido correspondiente a $\varepsilon = 0.8$, $\rho = 0.5$, $\mu = 0.2$ y $e = 0.1$. El recuadro en el eje vertical denota la condición inicial de la trayectoria.

6.4. Análisis de bifurcación de Hopf a través del método de Poincaré

En esta sección el método de Poincaré se utiliza para determinar la relación existente entre los parámetros del oscilador de Van der Pol híbrido y su bifurcación de Hopf. Este método permite obtener resultados cualitativamente novedosos sobre las bifurcaciones en osciladores híbridos no lineales, ahorrando entonces dificultades analíticas que usualmente resultan de un estudio teórico.

La sección de Poincaré

$$y_2(t_{k+1}^+) = F(y_2(t_k^+)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (160)$$

especificada inmediatamente después de cada impacto que experimenta el oscilador híbrido, similar a Goswami *et al.* (1996).

6.4.1. Análisis numérico del oscilador híbrido bajo la variación del parámetro α

Para mostrar el valor de bifurcación del parámetro α mientras $e = 0.5$, se utiliza el mapeo de Poincaré para distintos valores de α . La figura 28 muestra la intersección de los mapeos de Poincaré con el mapeo identidad. Se puede apreciar que conforme α es más pequeño, el mapeo

identidad pierde intersecciones con el mapeo -puntos fijos expresados con recuadros negros- de Poincaré, resultando entonces el origen como único punto fijo. Para determinar la estabilidad de los puntos fijos, basta con saber que los valores propios del gradiente ∇F se encuentren dentro del círculo unitario. Este análisis será tratado mas adelante.

La figura 29 muestra los puntos fijos y^* calculados para diferentes valores de α . Esta figura permite identificar la bifurcación del parámetro α en

$$\alpha_b = 0.429. \quad (161)$$

Representando el valor de bifurcación (161) en los términos originales

$$\frac{\varepsilon_b \rho_b^2}{\mu_b} \approx 0.429, \quad (162)$$

se concluye que para cualquier combinación de los parámetros $\varepsilon \rho^2 \mu^{-1}$ del oscilador híbrido que excedan este valor, el oscilador híbrido generará un ciclo límite asintóticamente estable, de otra forma presentará convergencia asintótica hacia el origen. Para completar este estudio numérico, el parámetro e será variado para analizar su contribución en el estudio de la bifurcación.

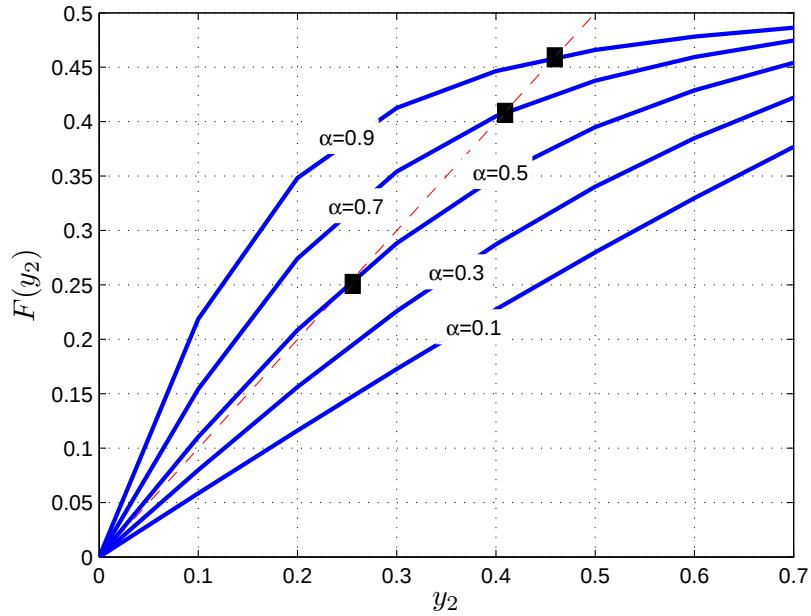


Figura 28: Intersección del mapeo de Poincaré con el mapeo identidad para diferentes valores de α y para el valor constante $e = 0.5$. Las líneas continuas son para los distintos mapeos de Poincaré $F(y_2)$ con sus correspondientes valores de α , la línea discontinua representa el mapeo identidad y los recuadros negros son los puntos fijos de los mapeos.

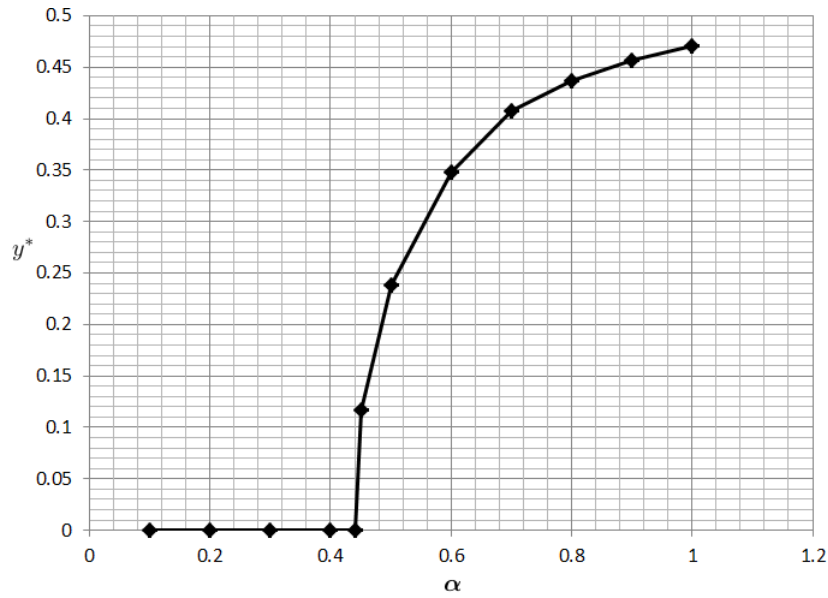


Figura 29: Diagrama de bifurcación del oscilador de Van der Pol híbrido: puntos fijos del mapeo de Poincaré y^* vs. α . Cada diamante representa un punto fijo que depende del parámetro α . Se aprecia que la bifurcación de Hopf ocurre en $\alpha \approx 0.429$

6.4.2. Análisis numérico del oscilador híbrido bajo la variación del parámetro de transición e

Los experimentos numéricos previamente realizados son ahora repetidos pero variando el parámetro de transición e dentro de su dominio de definición $e \in (0, 1)$ con una resolución de 0.05. En este caso, un nuevo valor de bifurcación $\alpha_b(e)$ se obtiene para cada valor de e . Entonces, cada valor de bifurcación puede verse como función del parámetro de transición

$$\alpha_b = \kappa(e). \quad (163)$$

Siguiendo el procedimiento numérico previamente realizado para el valor de $e = 0.5$, los valores de bifurcación son evaluados y graficados en la figura 30

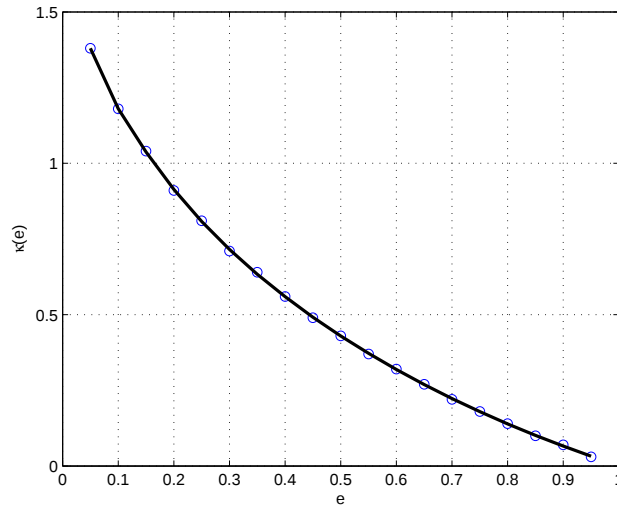


Figura 30: Función de bifurcación $\kappa(e)$, los círculos representan los valores numéricos obtenidos para las bifurcaciones de $\kappa(e)$ y la línea continua su aproximación por mínimos cuadrados.

Una función de la forma

$$\kappa(e) = \frac{k_1}{e^3} + \frac{k_2}{e^2} + \frac{k_3}{e} + k_4 + k_5e + k_6e^2 + k_7e^3 \quad (164)$$

se propone para representar la gráfica de la figura 30. Utilizando un método de ajuste por mínimos cuadrados los coeficientes para esta función son especificados como $k_1 = 0.0001$, $k_2 = -0.0053$, $k_3 = 0.0848$, $k_4 = 0.8808$, $k_5 = -1.4953$, $k_6 = 0.64$, y $k_7 = -0.1035$, resultando la aproximación con un error medio cuadrático de 0.012 y cumpliendo con $\kappa(0) = \infty$ y $\kappa(1) = 0$.

Las relaciones (163) y (164) permiten determinar bajo específicos valores de los parámetros α y e la producción de un ciclo límite asintóticamente estable o convergencia asintótica hacia el origen.

6.5. Análisis de estabilidad del ciclo límite

El mapeo de Poincaré ha sido una herramienta utilizada para determinar la existencia y estabilidad de órbitas periódicas en sistemas suaves, así como en sistemas híbridos (ver Shiriaev y Freidovich (2009), Morris y Grizzle (2005) y Goswami *et al.* (1996)). A través de este mapeo se reduce el problema de encontrar órbitas periódicas al de encontrar puntos fijos en este. El determinar dicho mapeo para cualquier sistema resulta analíticamente imposible ya que este requiere la solución de la ecuación diferencial que representa al sistema. A pesar de esto, esquemas numéricos han sido utilizados para encontrar puntos fijos en este mapeo y consecuentemente calcular sus valores propios para así poder calcular su estabilidad.

Determinar la estabilidad de órbitas periódicas resulta de interés en aplicaciones donde se

desea que el modo de operación sea periódico, como ejemplo se tiene al robot bípedo para el cual se desea que siga un caminado periódico, es decir, que produzca sus propias órbitas periódicas estables.

Para sistemas híbridos usualmente y sin pérdida de generalidad, este mapeo se define dentro de una sección de Poincaré correspondiente a la superficie de impacto. Debido a que esta superficie es transversal al flujo solución, resulta factible seleccionarla como la sección de Poincaré. Dicha sección es requerida para poder definir el mapeo de Poincaré, el cual es un sistema discreto que relaciona las intersecciones que se dan entre el flujo solución y dicha sección.

En la presente sección se plantea este mapeo para determinar la estabilidad de una órbita periódica producida por el oscilador de Van der Pol híbrido. El mapeo de Poincaré Γ , correspondiente a la sección de Poincaré $q^* = 0$, es dado en términos del valor post impacto $\mathbf{q}_k^* = [q_k^* \ \dot{q}_k^*]^T$ de la solución de (148) y (151) en el instante de impacto $t_k, k = 1, 2, \dots$, es decir como

$$\mathbf{q}_{k+1}^* = \Gamma(\mathbf{q}_k^*). \quad (165)$$

Debido que la componente de posición q_k^* del vector de estado es cero en la sección de Poincaré $q^* = 0$, solo la componente de velocidad $\dot{q}_k^*$ en dicha sección es considerada. En términos de la velocidad, el mapeo de Poincaré (165), es proyectado como

$$\dot{q}_{k+1}^* = F(\dot{q}_k^*). \quad (166)$$

El ciclo límite a tratar en esta sección es generado por el oscilador híbrido (147) y (151), especificado con $\varepsilon = \rho = \mu = 1$ y $e = 0.5$.

Bajo el análisis numérico presentado en Montano *et al.* (2016), el punto fijo para este mapeo, resulta en

$$x^* = 1.012 \quad (167)$$

mismo que resuelve la ecuación

$$x^* = F(x^*). \quad (168)$$

La figura 31 muestra en fase y tiempo que la solución del sistema (147) y (151) iniciada en dicho punto para un instante k , vuelve a tocar ese mismo punto para un instante $k + 1$, lo cual corrobora la relación (168).

Para demostrar que el punto fijo es localmente asintóticamente estable primero se aproxima

el mapeo de Poincaré F en serie de Taylor, alrededor del punto fijo, como

$$F(x^* + \delta x^*) \approx F(x^*) + (\nabla F)\delta x^* \quad (169)$$

donde δx^* representa una pequeña desviación respecto al punto fijo y ∇F el gradiente de F respecto a el estado. Debido a que x^* es el punto fijo, la relación (169) se puede rescribir como

$$F(x^* + \delta x^*) \approx x^* + (\nabla F)\delta x^*. \quad (170)$$

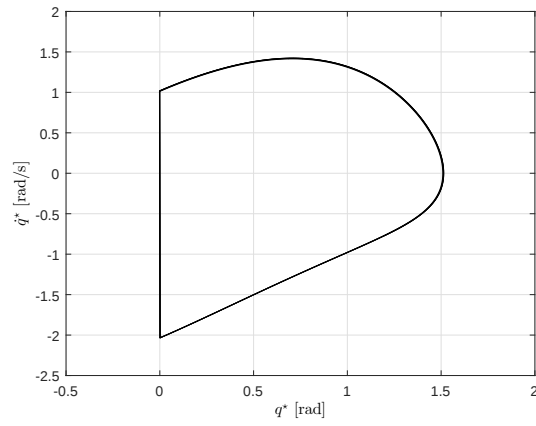
El punto fijo x^* es estable si el primer retorno del punto fijo perturbado es cercano al mismo punto fijo. Esta propiedad puede ser vista como la contracción del espacio de fase alrededor del ciclo límite. Matemáticamente significa que la magnitud del valor propio de ∇F evaluado en x^* sea menor a uno. Para calcular numéricamente el valor propio de ∇F , de (170) se aprecia

$$\nabla F \approx [F(x^* + \delta x^*) - x^*](\delta x^*)^{-1} = \Pi\beta^{-1}, \quad (171)$$

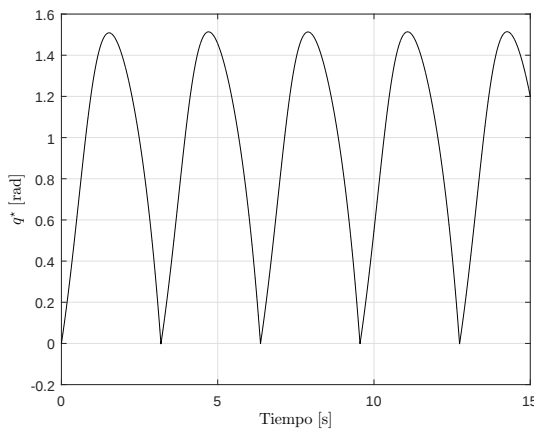
donde $F(x^* + \delta x^*)$ es el primer retorno de Poincaré del punto fijo perturbado $x^* + \delta x^*$ y β la desviación de dicho punto. Considerando $\beta = 0.3$, el primer retorno de Poincaré resulta como $F(x^* + \delta x^*) = 1.052$ y por tanto $\Pi = 0.04$. En base al calculo de Π y β , el valor propio de ∇F resulta como

$$eig(\nabla F) = 0.13, \quad (172)$$

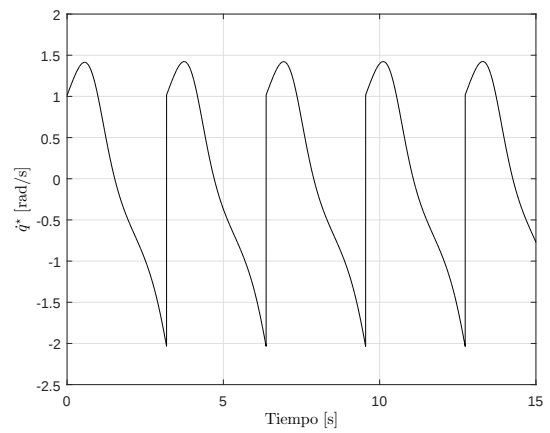
el cual se encuentra dentro del círculo unitario y por tanto se concluye estabilidad asintótica local para x^* , así como para la órbita que pasa por este punto. Partiendo de las condiciones iniciales $[q^*(0) = 0, \quad \dot{q}^*(0) = 1.3]$ y $[q^*(0) = 0, \quad \dot{q}^*(0) = 0.7]$, las figuras (32a) y (32b) respectivamente muestran la convergencia asintótica de la solución producida por (147) y (151) hacia el ciclo límite, las cuales corroboran la estabilidad asintótica de la órbita.



(a) retrato de fase q^* vs. $\dot{q}^*$ iniciado en el punto fijo;
 $q^*(0) = 0$ y $\dot{q}^*(0) = 1.012$

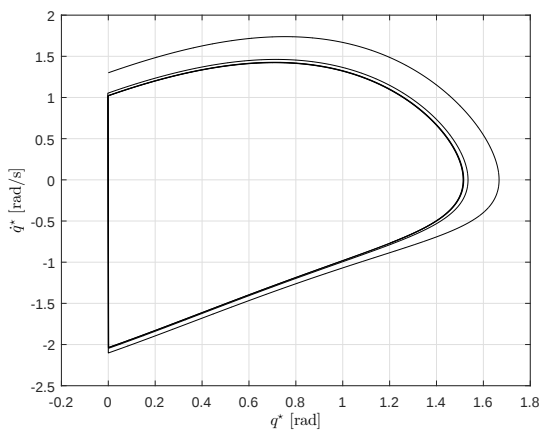


(b) estado de referencia q^* , iniciado en $q^*(0) = 0$

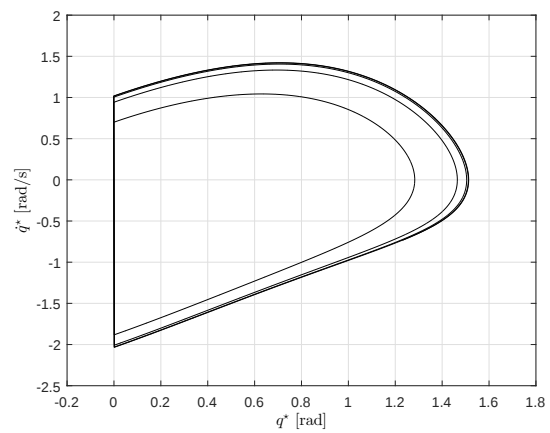


(c) estado de referencia $\dot{q}^*$, iniciado en $\dot{q}^*(0) = 1.012$

Figura 31: Solución del modelo de referencia, iniciada en el punto fijo



(a) retrato de fase q^* vs. $\dot{q}^*$ iniciado fuera del ciclo; $q^*(0) = 0$ y $\dot{q}^*(0) = 1.3$



(b) retrato de fase q^* vs. $\dot{q}^*$ iniciado dentro del ciclo;
 $q^*(0) = 0$ y $\dot{q}^*(0) = 0.7$

Figura 32: Planos de fase del oscilador de Van der Pol con restricción unilateral para distintas condiciones iniciales

6.6. Conclusiones

En el presente capítulo ha sido presentado el oscilador de Van der Pol híbrido, el cual ha sido inspirado del conocido oscilador de Van der Pol, se mostró numéricamente que en función de una selección paramétrica, este oscilador híbrido posee un ciclo límite discontinuo y su punto de equilibrio inestable o convergencia asintótica hacia el origen. El mapeo de Poincaré fue empleado para determinar la existencia de ciclos límite producidos por este oscilador, así como para determinar su estabilidad. Ya que este oscilador híbrido exhibe dos comportamientos, es decir, ciclo límite o convergencia asintótica hacia el origen, este posee una bifurcación de Hopf. El oscilador híbrido aquí presentado puede ser utilizado como modelo de referencia en mecanismos híbridos tal como lo es un robot bípedo. Los parámetros de este oscilador pueden ser variados en línea, produciendo entonces modificaciones de amplitud y frecuencia. Estas modificaciones pueden ser reflejan, por ejemplo, en la amplitud y rapidez de los pasos del robot bípedo.

Control robusto de seguimiento para un sistema péndulo con barrera y actuador dinámico

El objetivo del presente capítulo es ilustrar resultados numéricos de la teoría genérica desarrollada en el capítulo 5; esto a través de un sistema péndulo con barrera y actuador dinámico. De acuerdo con el desarrollo genérico, se busca que el mecanismo, bajo la acción de control, ejecute el seguimiento de una dinámica de referencia. Esta dinámica se ilustró en el capítulo anterior y como se mostró, es inspirada del ya conocido oscilador de Van der Pol convencional. A la dinámica de referencia se le adoptó el nombre de oscilador de Van der Pol híbrido y a través de simulaciones numéricas se mostró que esta posee una bifurcación de Hopf, en función de una selección paramétrica, es decir, su dinámica converge hacia un ciclo límite asintóticamente estable o asintóticamente hacia el origen. Para fines del presente capítulo, los parámetros de la dinámica de referencia se seleccionaron de tal manera que ésta genere un ciclo límite discontinuo asintóticamente estable. Cabe mencionar que un ciclo límite discontinuo es producido por el estado de una dinámica continua sujeta a una transición, es decir, el estado evoluciona de forma continua hasta que la transición se hace presente y lo transfiere hacia otra región del espacio de fase, dicha transferencia da lugar a una discontinuidad. Por ello el nombre de ciclo límite discontinuo.

7.1. Modelo dinámico del péndulo con barrera y actuador dinámico

El sistema péndulo con barrera y actuador dinámico se ilustra en la figura 33 y su modelo dinámico es proporcionado por la dinámica híbrida con parte continua (95) y (96), que para este caso de estudio resulta especificada a continuación

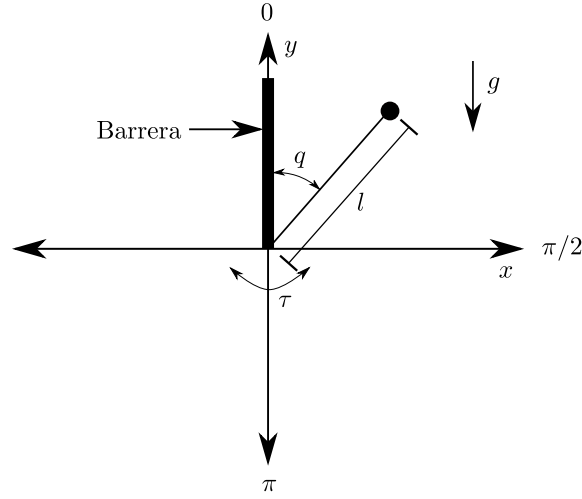


Figura 33: Péndulo con barrera

$$n = 1, \quad M(q) = (ml^2 + J), \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = -k\dot{q}, \quad (173)$$

$$G(q) = mgl\sin(q) \quad B = 1, \quad A_\tau = -a, \quad B_\tau = 1 \quad (174)$$

para $q = F_0(q) \in (0, 2\pi)$ y por la transición (97)-(99), especificada con

$$\theta(q(t_i)) = -\kappa \quad (175)$$

para $q(t_i) = F_0(q(t_i)) = 0$, es decir, cuando el péndulo toca la barrera. En (173) y (174), q denota la coordenada correspondiente al ángulo que forma el péndulo con la vertical y vale cero en la posición hacia arriba, $\dot{q}$ y $\ddot{q}$ describen las coordenadas correspondientes a la primera y segunda derivada temporal de q respectivamente, τ es el torque producido por el actuador, v la entrada de control basada en voltaje, m la masa del péndulo, l la distancia de su eje de rotación hacia su centro de masa, J el momento de inercia del péndulo respecto a su centro de masa, g la aceleración de la gravedad, k el coeficiente de fricción viscosa y a un parámetro que define la dinámica del actuador. Durante la transición κ denota la amplitud del salto para la velocidad angular, una vez efectuado el impacto.

Para proceder con el diseño del controlador basado en voltaje v , se lleva el sistema dinámico del péndulo con barrera a su representación dinámica de errores.

7.2. Dinámica híbrida de errores para el péndulo con barrera y actuador dinámico

Esta dinámica se describe por las relaciones (133)-(139), especificadas con

$$e = [e_p \ e_v \ u]^T = [q - q^* \ \dot{q} - \dot{q}^* \ \tau - \tau^*]^T \quad (176)$$

$$f(e(t), t) = \begin{bmatrix} e_v \\ \frac{mgl}{(ml^2+J)}[\text{sen}(e_p + q^*) - \text{sen}(q^*)] - \frac{k}{(ml^2+J)}e_v + u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

$$g_1(e(t), t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{(ml^2+J)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ml^2+J)} \end{bmatrix} \quad (178)$$

$$g_2(e(t), t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (179)$$

$$w(t) = [w_1 \ w_2]^T \quad (180)$$

$$h_1(e(t), t) = [0 \ \rho_1 e_p \ \rho_2 e_v \ \rho_3 u]^T \quad (181)$$

$$k_{12}(e(t), t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (182)$$

para la dinámica continua (133)-(135) que opera en la relación $F(e, t) = e_p + q^* \in (0, 2\pi)$ y por la transición (136)-(139) que opera en la relación $F(e, t) = e_p + q^* = 0$. Esta transición se especifica con $\mu_0 = -\kappa e_v(t_i)$, $\omega = 0$ y B como en (174). Las variables q^* y $\dot{q}^*$ son los estados de referencia producidos por el oscilador de Van der Pol híbrido (147) y (151), donde $\varepsilon = \rho = \mu = 1$ y $e = 0.5$ y τ^* es el torque de referencia descrito en (106). Para el sistema péndulo con barrera (95)-(99), (173)-(175) se especifica su controlador (109), lo cual se mostrará en el siguiente apartado.

7.3. Control de seguimiento H_∞ no lineal con restricciones unilaterales

Para el sistema péndulo con barrera y actuador dinámico (95)-(99), (173)-(175) se utiliza el controlador (109), para el cual Ω es descrita por la relación (146), donde P_ε es solución a la ecuación diferencial de Riccati (143), especificada con

$$\begin{aligned}
A(t) = \frac{\partial f(e(t), t)}{\partial e} \Big|_{e=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{mgl}{(ml^2+J)} \cos(q^*) & -\frac{k}{(ml^2+J)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_1(t) = g_1(0, t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{(ml^2+J)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ml^2+J)} \end{bmatrix}, \\
B_2(t) = g_2(0, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
C(t) = \frac{\partial h(e(t), t)}{\partial e} \Big|_{e=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Bajo esta especificación la ecuación diferencial de Riccati posee solución periódica definida positiva, entonces satisfaciendo la primera condición de la proposición 3. Por otro lado, la segunda condición de esta proposición también es satisfecha para el valor seleccionado de γ . Los valores numéricos de los parámetros utilizados en la ecuación diferencial de Riccati son mostrados en la tabla 5. Como consecuencia de satisfacer las dos condiciones y de acuerdo a la proposición 3 se tiene que el sistema péndulo con barrera en lazo cerrado, posee la ganancia L_2 menor que γ .

7.4. Resultados numéricos

En esta sección se realizan simulaciones numéricas para el sistema dinámico péndulo con barrera y actuador dinámico (95)-(99), (173)-(175). Dichos resultados se obtienen para el caso cuando las perturbaciones son nulas ($w = [w_1^T \ w_2^T] = w_i^d = 0$). Los parámetros utilizados en la simulación se muestran en los cuadros 4 y 5. El cuadro 4 muestra los parámetros correspondientes a el sistema péndulo con barrera y actuador dinámico mientras que el cuadro 5 muestra los correspondientes a la ecuación diferencial de Riccati (143).

Dichos resultados son ilustrados en las figuras 34, 35, 36, 37 y 38. El controlador basado en voltaje (109), es operado en lazo cerrado en términos de las coordenadas del péndulo con barrera.

La figura 34 muestra los estados q y $\dot{q}$ del péndulo con barrera, ambos estados son mostrados

en comparación con su referencia q^* y $\dot{q}^*$, producida por el oscilador de Van der Pol híbrido, se puede apreciar que el estado q converge a su referencia, mientras que el estado $\dot{q}$ presenta una pequeña desviación respecto a su referencia en el instante post impacto, dicha desviación es mayormente apreciada en la figura 35, donde se muestra, la comparación del retrato de fase producido por los estados de referencia, figura 35a con el retrato de fase producido por los estados del péndulo con barrera, figura 35b.

La causa de dicha desviación es debida al término inherente que aparece en (138), el cual corresponde a una perturbación en la representación estándar de sistemas con impactos presentada en Montano *et al.* (2014). La figura 36 muestra la evolución del estado torque y la figura 37 el voltaje aplicado al actuador, los picos que aparecen en estas dos últimas figuras son generados como consecuencia de la perturbación inherente presente en (138).

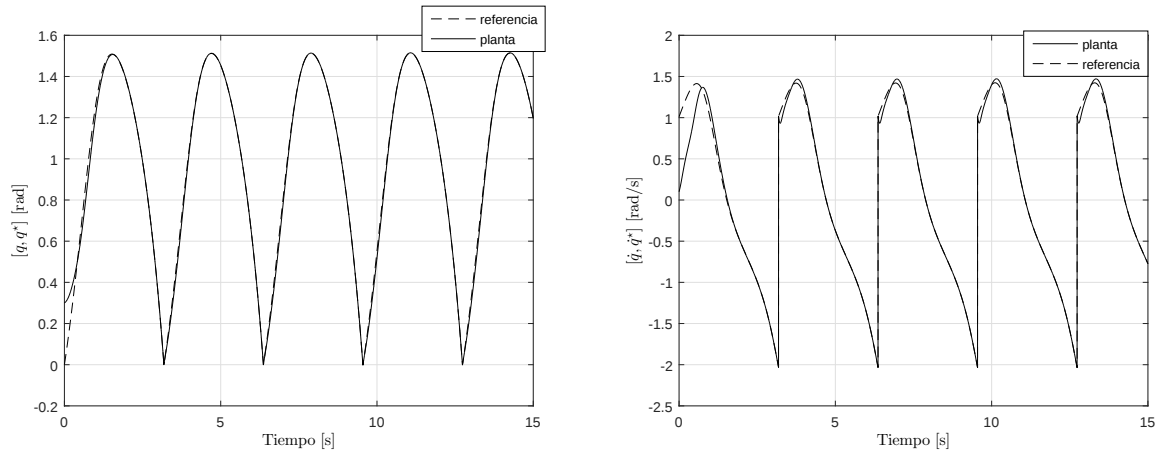
La figura 38 muestra la función de Lyapunov, se puede apreciar que presenta brincos durante instantes de impacto, razón por la cual no se logran resultados asintóticos en el seguimiento del modelo de referencia.

Tabla 4: Parámetros del sistema péndulo con barrera.

parámetros	valor	unidades
m	1	kg
l	1	m
J	1	kg m ²
g	9.81	m/s ²
k	1	N s/rad
a	5	adimensional
κ	0.5	adimensional
ω	1	adimensional

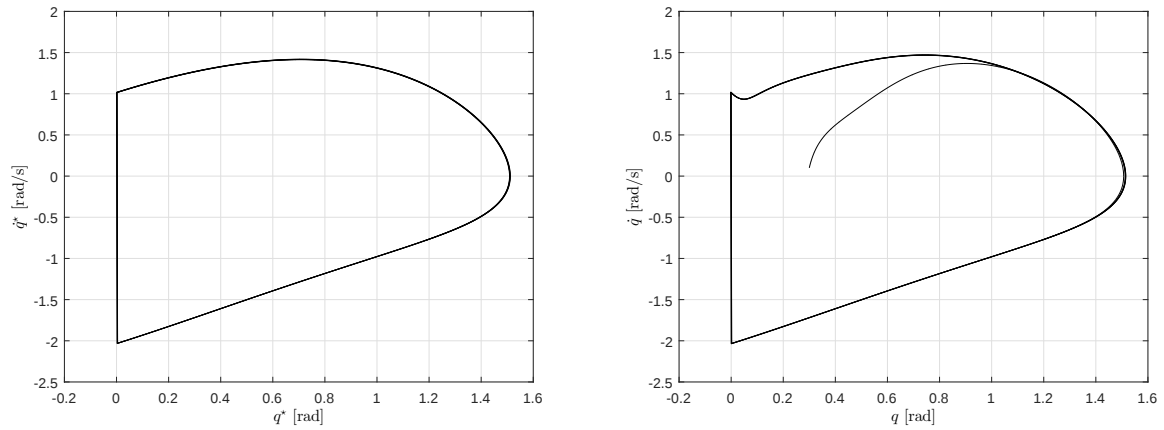
Tabla 5: Parámetros para la ecuación diferencial de Riccati.

parámetros	valor	unidades
γ	150	adimensional
ρ_1	300	adimensional
ρ_2	20	adimensional
ρ_3	20	adimensional
ϵ	0.01	adimensional



(a) estados q y q^* iniciados en $q(0) = 0.3$ y $q^*(0) = 0$ (b) estados $\dot{q}$ y $\dot{q}^*$ iniciados en $\dot{q}(0) = 0.1$ y $\dot{q}^*(0) = 1.012$

Figura 34: Estados q y $\dot{q}$ del péndulo con barrera y estados q^* y $\dot{q}^*$ del modelo de referencia



(a) retrato de fase q^* vs. $\dot{q}^*$, iniciado en $q^*(0) = 0$ y $\dot{q}^* = 1.012$ (b) retrato de fase q vs. $\dot{q}$, iniciado en $q(0) = 0.3$ y $\dot{q}(0) = 0.1$

Figura 35: Retratos de fase

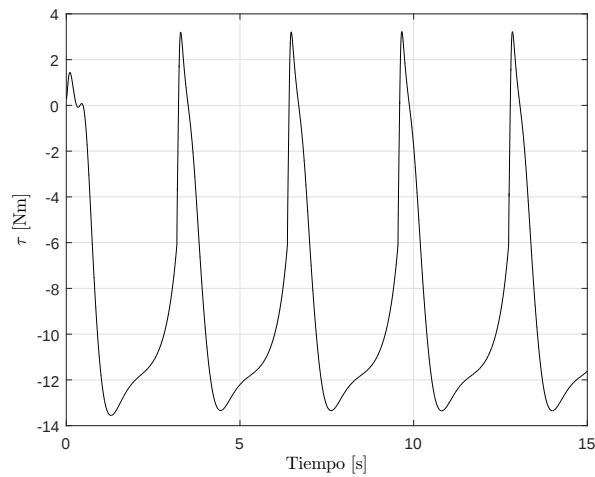


Figura 36: Estado τ , iniciado en $\tau(0) = 0.3$

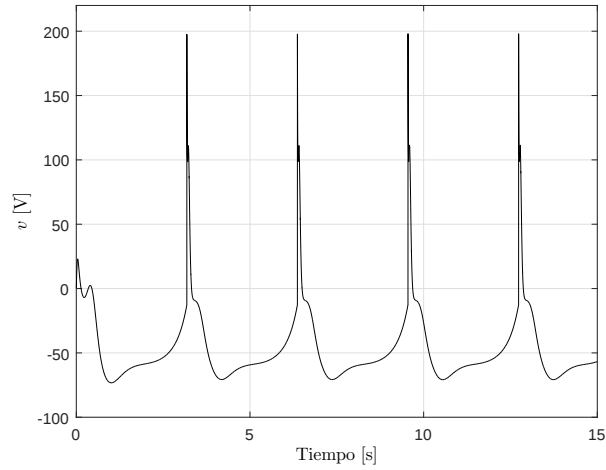


Figura 37: Voltaje v , aplicado a el actuador

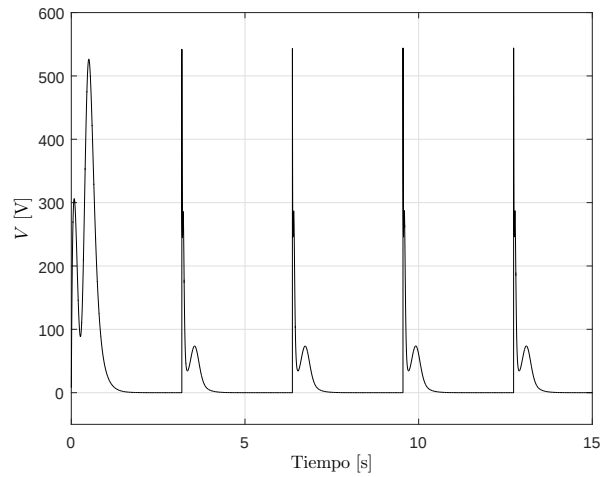


Figura 38: Función de Lyapunov que presenta brincos durante impactos

7.5. Conclusiones

El lazo cerrado del sistema péndulo con barrera y actuador dinámico no logró el seguimiento asintótico de la trayectoria generada por el oscilador de Vander Pol con impactos, esto debido a que en la etapa de transición existe un término inherente asociado a perturbación, debido a una transformación realizada. Por otro lado, el seguimiento que se logra es en sentido de que la desigualdad de gnanancia L_2 sea menor que $\gamma > 0$, el cual en vez de ser asintótico presenta desviaciones respecto a la trayectoria de referencia.

Conclusiones

- Una extensión de la técnica basada en el recuso de restricciones virtuales para la generación de movimiento periódico en sistemas Euler-Lagrange con grado de subactuación uno ha sido realizada en el presente trabajo de tesis. La nueva extensión involucró el modelo dinámico de los actuadores para manejar la configuración de dichos sistemas. Esto resultó práctico, ya que en la realidad los actuadores a través de voltajes son los encargados de producir torques o fuerzas que manejan la configuración de los mecanismos. Aunado a la practicidad, involucrar la dinámica de los actuadores proporcionó un model más exacto y evitó una dinámica no modelada que pudiera traer consecuencias de mal desempeño en lazo cerrado, incluyendo inestabilidad.

Desde una perspectiva matemática, donde un grado de libertad se equipara a dos estados, la extensión aquí presentada contribuye a la generación de movimiento periódico en sistemas con grado de subactuación mayor a uno, debiéndose el aumento en grados de subactuación a la consideración de los actuadores. Debido a que los actuadores considerados fueron modelados por una dinámica del primer orden, se tiene que por cada dos de ellos los sistemas Euler-Lagrange manejados por actuadores aumentan en un grado de subactuación.

Adicional a involucrar la dinámica de actuadores y para proporcionar un esquema aún más práctico, perturbaciones que son inminentes en aspectos prácticos fueron consideradas en los sistemas Euler-Lagrange, en la dinámica de los actuadores y en las mediciones correspondientes a posición. Para poder lidiar con las perturbaciones, así como para obtener el estado completo de los sistema Euler-Lagrange con actuadores dinámicos, la síntesis no lineal de H_∞ fue utilizada. Esta síntesis permitió estimar el estado a partir de medir las posiciones así como mitigar el efecto de perturbaciones durante la evolución del estado. Ya que la síntesis H_∞ se compone de un filtro y de un controlador, el filtro permitió estimar el estado de estos sistemas, mismo que fue utilizado por el controlador basado en voltaje, para así cumplir con la tarea de mitigar las perturbaciones y de generar movimiento periódico en los sistemas bajo consideración.

Esta nueva extensión, la cual se ilustra en su forma genérica en el capítulo dos, aplica a una gran cantidad de mecanismos con grado de subactuación uno, que a su vez son manejados por actuadores dinámicos, sujetos a perturbaciones y con mediciones parciales, tal como se apreció la aplicación y evaluación numérica para el sistema carro péndulo presentado en el capítulo tres y el helicóptero subactuado presentado en el capítulo cuatro. Alcances de esta extensión a otros mecanismos como el pendubot, el acrobot, el péndulo de Furuta, entre otros también es factible. Contribuyendo entonces, en la generación de movimiento periódico en mecanismos subactuados.

- Como contribución adicional se ha logrado el diseño de controladores no lineales H_∞ de seguimiento para sistemas Euler-Lagrange híbridos completamente actuados y manejados con actuadores que poseen su propia dinámica. A diferencia de trabajo reportado en la literatura, donde los actuadores no son considerados y los controladores para lograr el objetivo de seguimiento son basados en torques o fuerzas, en la presente contribución los actuadores que producen dichos torques o fuerzas han sido considerados y las entradas de estos actuadores fueron las entradas de control basadas en voltaje a ser calculadas.

Por una parte la literatura presenta resultados de seguimiento asintótico al manejar estos sistemas híbrido con controladores basados en torques o fuerzas. Por otra parte, la adición de los actuadores y el manejo de dichos sistemas por medio de voltajes causo la introducción de un término aditivo en la etapa de transición de estos, el cual es asociado a una perturbación, entonces destruyendo la propiedad de seguimiento asintótico, sin embargo logrando un seguimiento robusto, es decir, en sentido de satisfacer que la desigualdad de ganancia L_2 sea menor o igual que γ .

Este resultado es presentado en el capítulo cinco, por otra parte el capítulo seis presenta la construcción de un oscilador de Van der Pol híbrido, mismo que es utilizado en el capítulo siete como modelo de referencia a ser seguido. Por último el capítulo siete presenta resultados numéricos sobre la teoría genérica desarrollada en el capítulo cinco, estos resultados son ilustrados a través de un mecanismo péndulo con barrera que al ser manejado por su propio actuador, este sigue la dinámica del modelo de referencia híbrido construido en el capítulo seis en sentido de satisfacer que la desigualdad de ganancia L_2 sea menor o igual que γ .

Literatura citada

- Aguilar, L., Boiko, I., Fridman, L., e Iriatre, R. (2015). *Self-oscillations in dynamic systems*. Springer.
- Anderson, B. D. y Moore, J. B. (2007). *Optimal control: linear quadratic methods*. Courier Corporation.
- Andronov, A. y Vitt, A. (1933). On Lyapunov stability. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 5:381–382.
- Castillo, P., Lozano, R., y Dzul, A. (2005a). Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors. *IEEE control systems*, 25(6):45–55.
- Castillo, P., Lozano, R., y Dzul, A. E. (2005b). *Modelling and control of mini-flying machines*. Physica-Verlag.
- Colaneri, P. (2000a). Continuous-time periodic systems in H_2 and H_∞ . Part I: Theoretical aspects. *Kybernetika*, 36(2):211–242.
- Colaneri, P. (2000b). Continuous-time periodic systems in H_2 and H_∞ . Part II: State feedback problems. *Kybernetika*, 36(3):329–350.
- Crowe, M. J. (2007). *Mechanics from Aristotle to Einstein*. Green Lion Press.
- Fantoni, I. y Lozano, R. (2002). *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media.
- Freidovich, L., Robertsson, A., Shiriaev, A., y Johansson, R. (2008). Periodic motions of the pendubot via virtual holonomic constraints: Theory and experiments. *Automatica*, 44(3):785–791.
- Goldstein, H. (1965). *Classical mechanics*. Pearson Education India.
- Goswami, A., Espiau, B., y Keramane, A. (1996). Limit cycles and their stability in a passive bipedal gait. En *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, volumen 1, pp. 246–251. IEEE.
- Herrera, L., Montano, O., y Orlov, Y. (2017). Hopf bifurcation of hybrid Van der Pol oscillators. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 26:225–238.
- Isidori, A. y Astolfi, A. (1992). Disturbance attenuation and H_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE transactions on automatic control*, 37(9):1283–1293.
- Kelly, Rafael y Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Educación, SA.
- Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems, (3rd ed.). *New Jersey, Prentice Hall*, 9.
- Kim, P. (2014). *Rigid body dynamics for beginners: Euler angles & Quaternions*. CreateSpace.
- Krishnan, R. (2001). *Electric motor drives: modeling, analysis, and control*. Prentice Hall.
- Leonov, G. A. (2006). Generalization of the Andronov-Vitt theorem. *Regular and chaotic dynamics*, 11(2):281–289.
- Liu, Y. y Yu, H. (2013). A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory & Applications*, 7(7):921–935.
- Lozano, R., Fantoni, I., y Block, D. J. (2000). Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Systems & control letters*, 40(3):197–204.

- Marion, J. B. (2013). *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press.
- Meza-Sánchez, I. M., Aguilar, L. T., Shiriaev, A., Freidovich, L., y Orlov, Y. (2011). Periodic motion planning and nonlinear H_∞ tracking control of a 3-DOF underactuated helicopter. *International Journal of Systems Science*, 42(5):829–838.
- Montano, O., Orlov, Y., y Aoustin, Y. (2014). Nonlinear state feedback H_∞ -control of mechanical systems under unilateral constraints. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):3833–3838.
- Montano, O. E., Orlov, Y., y Aoustin, Y. (2016). Nonlinear H_∞ -control under unilateral constraints. *International Journal of Control*, 89(12):2549–2571.
- Morris, B. y Grizzle, J. W. (2005). A restricted Poincaré map for determining exponentially stable periodic orbits in systems with impulse effects: Application to bipedal robots. En *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pp. 4199–4206. IEEE.
- Newton, I. (1995). Motta, Andrew (translator),(1729), The Principia (Great Minds).
- Orlov, Y., Aguilar, L. T., Acho, L., y Ortiz, A. (2008). Asymptotic harmonic generator and its application to finite time orbital stabilization of a friction pendulum with experimental verification. *International Journal of Control*, 81(2):227–234.
- Orlov, Y., Montano, O., y Herrera, L. (2016). Hopf bifurcation of Van der Pol oscillators operating under unilateral constraints. En *American Control Conference (ACC), 2016*, pp. 5148–5153. IEEE.
- Orlov, Y. V. (2008). *Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer Science & Business Media.
- Orlov, Y. V. y Aguilar, L. T. (2014). *Advanced H_∞ control: Towards nonsmooth theory and applications*. Springer Science & Business Media.
- Pchelkin, S. S., Shiriaev, A. S., Robertsson, A., Freidovich, L. B., Kolyubin, S. A., Paramonov, L. V., y Gusev, S. V. (2017). On Orbital Stabilization for Industrial Manipulators: Case Study in Evaluating Performances of Modified PD+ and Inverse Dynamics Controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(1):101–117.
- Perram, J., Robertsson, A., Sandberg, A., y Shiriaev, A. (2006). Periodic motion planning for virtually constrained mechanical system. *Systems & Control Lett*, 55(11):900–907.
- Roup, A. V. y Bernstein, D. S. (2001). Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems with nonparametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(11):1821–1825.
- Rugh, W. J. (1996). *Linear system theory*, volumen 2. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Shiriaev, A., Freidovich, L., Robertsson, A., y Johansson, R. (2006a). Virtual-constraints-based design of stable oscillations of Furuta pendulum: Theory and experiments. En *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pp. 6144–6149. IEEE.
- Shiriaev, A., Perram, J. W., y Canudas-de Wit, C. (2005). Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: Virtual constraints approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(8):1164–1176.
- Shiriaev, A., Robertsson, A., Perram, J., y Sandberg, A. (2006b). Periodic motion planning for virtually constrained Euler–Lagrange systems. *Systems & control letters*, 55(11):900–907.
- Shiriaev, A. S. y Freidovich, L. B. (2009). Transverse linearization for impulsive mechanical systems with one passive link. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(12):2882–2888.

- Shiriaev, A. S., Freidovich, L. B., y Gusev, S. V. (2010). Transverse linearization for controlled mechanical systems with several passive degrees of freedom. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4):893–906.
- Spong, M. W. (1994). Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. En *Intelligent Robots and Systems' 94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS'94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on*, volumen 1, pp. 314–321. IEEE.
- Spong, M. W. (1995). The swing up control problem for the acrobot. *IEEE control systems*, 15(1):49–55.
- Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, volumen 34. CRC press.
- van der Schaft, A. J. (1991). On a state space approach to nonlinear H_∞ control. *Systems & Control Letters*, 16(1):1–8.
- Westerberg, S., Mettin, U., y Shiriaev, A. (2010). Motion planning and control of an underactuated 3dof helicopter. En *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, pp. 3759–3764. IEEE.
- Westerberg, S., Mettin, U., Shiriaev, A. S., Freidovich, L. B., y Orlov, Y. (2009). Motion planning and control of a simplified helicopter model based on virtual holonomic constraints. En *Advanced Robotics, 2009. ICAR 2009. International Conference on*, pp. 1–6. IEEE.
- Yakubovich, V. (1986). A linear-quadratic optimization problem and the frequency theorem for nonperiodic systems. I. *Siberian Mathematical Journal*, 27(4):614–630.
- Zheng, B. y Zhong, Y. (2011). Robust attitude regulation of a 3-dof helicopter benchmark: theory and experiments. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(2):660–670.