

**Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de
Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones con Orientación en
Instrumentación y Control**

Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Rolando Díaz Castillo

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por

Rolando Díaz Castillo

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Adrian Arellano Delgado

Codirector de tesis

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Vassili Spirine

Dr. Víctor Ruiz Cortés



Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Coordinador del Programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Rolando Díaz Castillo © 2018

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Rolando Díaz Castillo como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con Orientación en Instrumentación y Control.

Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados

Resumen aprobado por:

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Adrian Arellano Delgado

Codirector de tesis

En esta tesis se afrontan los problemas de sincronización y formación de vehículos aéreos no tripulados *UVAs* por su siglas en inglés, de tipo cuadracóptero. Empleando como metodología de trabajo la teoría de sistemas complejos, además de la teoría de grafos y control backstepping para generar los comportamientos colectivos de interés. Los resultados obtenidos de sincronización y formación de un grupo de robots aéreos se ilustran mediante simulaciones numéricas. Este estudio es importante, ya que en futuro se pretende aplicarse en labores de búsqueda, rescate o patrullaje.

Palabras clave: Sincronización, Formación, Cuadracóptero, Teoría de grafos, Backstepping.

Abstract of the thesis presented by Rolando Díaz Castillo as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Flight in formation of unmanned aerial vehicles

Abstract approved by:

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

Dr. Adrian Arellano Delgado

Thesis Co-Director

In this thesis, the problems of synchronization and formation of unmanned aerial vehicles UAVs for its acronym in english of quadrotor type is studied. To reach the main objective of this thesis, theory of complex systems, graph theory and backstepping control as working methodologies to generate the collective behaviors of interest was used. The results obtained of Synchronization and formation of a group aerial robots are shown by numerical simulations. This study is important, since in the future it is applied in a specific workforce in search, patrol, or rescue.

Keywords: Synchronization, Formation, Quadrotor, Graph Theory, Backstepping.

Dedicatoria

A mi familia por el apoyo incondicional para lograr todas mis metas, a Dios por darme la oportunidad de conocer a buenas personas y a mis compañeros por brindarme su amistad.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por permitirme realizar una maestría en ciencias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo a través del proyecto de investigación en ciencia básica entre instituciones, Ref. 166654.

A toda mi familia por el apoyo incondicional a lo largo de este camino, en especial a mi mamá Elida, a mi papá José, mi hermana Elida y Jahaziel, también a mi hermanito Antelmo.

A mis directores de tesis, el Dr. César Cruz Hernández y Dr. Adrian Arellano Delgado, quienes con su paciencia, sus consejos y sobre todo con su apoyo me ayudaron a culminar este trabajo.

A los miembros del comité de tesis, el Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez, Dr. Vassili Spirine y Dr. Víctor Ruiz Cortes, por el tiempo dedicado a su servidor, sugerencias y aportaciones para realizar un buen trabajo de investigación.

A todos los investigadores que compartieron sus conocimientos y consejos en el salón de clases a lo largo de la maestría.

A los integrantes del grupo de sincronización y sistemas complejos, por aceptarme y hacerme sentir como parte de una gran familia, así como disfrutar de momentos agradables y obtener nuevas amistades, en especial con Rigo, Meranza y Miguel.

A mis compañeros de las generaciones anteriores y nuevas, en especial a Roilhi, René y Fernando por compartir su tiempo, la cancha de fútbol y brindarme su amistad.

A mis compañeros de generación, a Heberto Molina Villamil por recomendarnos buenos lugares donde comer como los cotoños, a mi estimado Alan Arturo Calderón Velderrain por ser un buen anfitrión en la ciudad de Ensenada, al jefe Isaí Cabral Violante por ser un ejemplo a seguir para su servidor, a Manuel Alberto Lizárraga Lizárraga por tantos buenos consejos y todos escritos en el pizarrón de la sabiduría, a Mikhail Ramos Domínguez por cada momento chusco que hizo amena la convivencia, a Luis Ángel Reyes Cruz por brindarme su amistad sincera y a Luis Antonio Mizquez Corona por ser una buena persona y un gran amigo, gracias a todos ustedes por compartir la cancha de fútbol como equipo Culy-Tuqui y también cada instante en que convivimos como una gran familia. Les deseo de todo corazón mucho éxito en cada proyecto nuevo que emprendan.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xi
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Introducción	1
1.1.1. Comportamientos colectivos en la naturaleza	2
1.2. Planteamiento del problema de estudio	6
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivo general	6
1.3.2. Objetivos particulares	6
1.3.3. Antecedentes de solución del problema de estudio	7
1.3.4. Solución al problema de estudio	21
1.3.5. Contribuciones de la tesis	21
1.3.6. Organización de la memoria de tesis	21
Capítulo 2. Preliminares	
2.1. Sistemas complejos	23
2.2. Teoría de grafos	24
2.3. Tipos de grafos	25
2.3.0.1. Grafo dirigido	25
2.3.0.2. Grafo no dirigido	25
2.3.0.3. Grafo mixto	26
2.4. Matrices asociadas a un grafo	26
2.4.0.1. Matriz de adyacencia $A(G)$	26
2.4.0.2. Matriz de grado $D(G)$	27
2.4.0.3. Matriz laplaciana $L(G)$	27
2.4.0.4. Matriz de acoplamiento $A_c(G)$	27
Capítulo 3. Comportamientos colectivos de interés	
3.1. Sincronización	29
3.2. Formación	31
Capítulo 4. Modelo matemático del cuadracóptero	
4.1. Historia del helicóptero	33
4.2. Micro Aerial Vehicle	34
4.3. Cuadracóptero	36

Tabla de contenido (continuación)

4.4.	Modelo dinámico utilizando el formalismo de Euler-Lagrange	37
4.4.1.	Cinemática	38
4.4.2.	Energía	39
4.4.3.	Ecuación de movimiento	39
4.4.4.	El modelo dinámico derivado	40
4.5.	Control backstepping para seguimiento de trayectorias	44
4.5.1.	Sincronización de cuadracópteros	49
4.5.2.	Formación de cuadracópteros	51

Capítulo 5. Resultados numéricos

Capítulo 6. Conclusiones

Literatura citada	70
Apéndice A	72
Apéndice B	89

Lista de figuras

Figura	Página
1. Comportamiento colectivo en las hormigas.	3
2. Comportamiento colectivo de las aves.	3
3. Comportamiento colectivo de los peces.	4
4. a) Zonas que gobiernan a un pez. b) Cardumen estacionario. c) Torus. d) Grupo paralelo moviéndose en la misma dirección. Fuente: Couzin <i>et al.</i> (2002)	5
5. Configuración de un cuadracóptero	8
6. Simulación de seguimiento de trayectoria de un grupo de 3 cuadracópteros.	12
7. Simulación de seguimiento de trayectoria de una espiral.	14
8. Esquema del seguimiento de trayectoria para múltiples cuadracópteros.	15
9. Simulación de una trayectoria circular.	16
10. Localización del punto $p_2(x_2, y_2)$	18
11. Localización del punto $p_3(x_3, y_3)$ de la posición v_3	19
12. Localización del punto $p_4(x_4, y_4)$ de la posición v_4	20
13. Demostración experimental de un grupo de 3 cuadracópteros.	20
14. Los siete puentes de Königsberg en la ciudad de Königsberg en 1976.	24
15. Abstracción de la ciudad de Königsberg.	25
16. Grafo dirigido.	25
17. Grafo no dirigido.	26
18. Experimento de Huygens en 1665. Fuente: Pikovsky <i>et al.</i> (2003)	29
19. Helical Air Screw. Fuente: Histoire de l'Aviation	33
20. Gyroplane n:01. Fuente: www.aviastar.org	34
21. Clasificación general de aeronaves.	35
22. Sentido de giro de las hélices para el desplazamiento de un cuadracóptero.	37
23. Cuadracóptero con respecto al marco inercial.	38
24. Cuadracóptero con respecto al marco inercial.	41
25. Sistema dinámico dividido en dos subsistemas interconectados.	44
26. Esquema de control diseñado para el seguimiento de trayectorias de un cuadracóptero.	48
27. Grafo utilizado para la sincronización.	49
28. Respuesta de los estados del cuadracóptero.	53
29. Cuadracóptero en la posición deseada.	54

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
30. Respuesta de los estados del cuadracóptero.	54
31. Cuadracóptero en la trayectoria deseada.	55
32. Seguimiento de los cuadracópteros esclavos S_1 y S_2 al cuadracóptero líder a una posición deseada.	56
33. Seguimiento de los esclavos al líder a una trayectoria deseada.	57
34. Cuadracópteros separados en el eje x	57
35. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.	58
36. Cuadracópteros separados en el eje y	58
37. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.	59
38. Cuadracópteros separados en el eje x y y	59
39. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.	60
40. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.	60
41. Cuadracópteros separados en el eje x, y, z	61
42. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.	61
43. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.	62
44. Cuadracópteros separados en el eje z con respecto al tiempo.	62
45. Cuadracópteros separados en el eje x, y, z	63
46. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.	64
47. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.	64
48. Cuadracópteros separados en el eje z con respecto al tiempo.	65
49. Señal de control U_1 respecto al tiempo.	65
50. Señal de control U_2 respecto al tiempo.	66
51. Señal de control U_3 respecto al tiempo.	66
52. Señal de control U_4 respecto al tiempo.	67

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Tabla de parámetros físicos del modelo del cuadracóptero (60).	43

Capítulo 1. Introducción

En este primer capítulo de la tesis, se proporciona una breve introducción de los comportamientos colectivos presentes en la naturaleza, así como también se planteará el problema a resolver y se describirán los objetivos generales y específicos de la tesis.

1.1. Introducción

Desde la formación de algunas aves para prolongar el tiempo de vuelo, hasta la agrupación de peces para evitar el ataque de los depredadores, diferentes grupos de animales suelen asociarse de manera natural para lograr un propósito o beneficio común, que de manera individual no podrían lograr y por lo tanto llegar a sobrevivir, ver por ejemplo (Couzin *et al.*, 2002) y (Sumpter, 2006, 2010).

El intercambio de información debido a las interacciones entre los miembros de estos grupos, da lugar a comportamientos distintos a los que presenta un individuo aislado, denominados *comportamientos colectivos emergentes*. Debido a esto, la comunidad científica se ha dado a la tarea de diseñar sistemas que emulen las actividades de diferentes comunidades de organismos presentes en la naturaleza, con el fin de aprovechar las ventajas creadas por las interacciones en un sistema complejo. En los sistemas complejos el comportamiento de los miembros que los componen, no describe el comportamiento global del sistema, es decir, estos sistemas no pueden ser comprendidos estudiando las partes que lo componen de manera aislada. La esencia del sistema complejo está en la interacción de cada una de las partes que lo componen y del comportamiento global que surge de sus interacciones. Así pues, el sistema debe ser visto y analizado como un todo, ver por ejemplo (Alvarez, 1997), (Bar-Yam, 1997) (Ottino, 2003), (Martínez Clark, 2014) y (Munné, 2005).

La forma en que se interconectan o relacionan los individuos en los grupos, se denomina *topología*. Existen diferentes configuraciones de acoplamiento entre individuos que producen características particulares, donde cada una de estas topologías ofrecer ventajas y desventajas en el desempeño de comportamientos colectivos sobre todo para aplicaciones ingenieriles. Los científicos se han interesado en estudiar estas interacciones y en clasificar los tipos de conductas que se presentan en estas agrupaciones, logrando reproducir de manera artificial comportamientos colectivos como sincronización, cohesión, formación y coordinación con robots móviles o dispositivos electrónicos. Los comportamientos colectivos observados en la naturaleza son una forma

que puede aplicarse al control de sistemas con múltiples robots, ver por ejemplo (Martínez Clark, 2014; Martínez Clark *et al.*, 2015), (López Parra, 2017), (Cetina Denis, 2017). En la actualidad, los avances en robótica permiten llevar a cabo tareas peligrosas, repetitivas y difíciles para los humanos.

1.1.1. Comportamientos colectivos en la naturaleza

► Hormigas

Uno de los ejemplos de comportamientos colectivos de los animales es la formación de rutas con feromonas como las hormigas. Muchas de estas especies depositan sustancias químicas llamadas feromonas, para trazar una ruta de su alimento hacia el nido. Después de encontrar una fuente de alimento, la hormiga regresa al nido, deteniéndose en intervalos regulares en su camino para dejar pequeñas cantidades de feromonas. La hormiga hace el recorrido de la comida hacia el nido varias veces, reforzando la ruta dejando cada vez que pasa por él más feromonas. A través de este refuerzo positivo, el rastro de feromonas se acumula y después de un corto período de tiempo vemos un camino constante de hormigas entre comida y el nido, ver la figura 1.

A pesar de su simplicidad, los caminos o rastros de feromonas se pueden utilizar para dirigir a la mayoría de las hormigas desde la comida hacia el nido, moviéndose por el camino más corto y beneficiando a la colonia. Beckers en 1992 realizó un experimento con colonias de hormigas hambrientas, en el cual, colocó 2 caminos alternativos del nido a la fuente de comida. Después de 30 minutos desde que la primera hormiga encontró la fuente de alimento, contó el número de hormigas en el camino 1 y 2. Uno de los caminos era 40% más largo que el otro, Beckers observó que más del 80% de las hormigas tomaron el camino más corto en 16 de los 20 experimentos realizados, ver (Beckers *et al.*, 1992).



Figura 1. Comportamiento colectivo en las hormigas.

► Aves y peces

Otro de los ejemplos de comportamientos colectivos más comunes que nos encontramos en la naturaleza, son las formaciones en forma de “ V ” de algunas aves (que les ayuda a prolongar el vuelo en las migraciones), ver la figura 2.



Figura 2. Comportamiento colectivo de las aves.

Por otro lado, tenemos las formaciones que se dan en los bancos de peces, estos vienen en diferentes tamaños y formas que les ayudan a evadir el ataque de depredadores, ver la figura 3. Estos grupos generalmente se ven conformados por más de 5000 individuos.



Figura 3. Comportamiento colectivo de los peces.

A pesar de las varias formas y movimientos de los grupos de animales, es posible que los patrones colectivos sean generados por pequeñas variaciones en las reglas que sigue cada uno de los miembros del grupo. Iain D. Couzin propone un modelo en el cual los animales individualmente siguen tres reglas simples, ver (Couzin *et al.*, 2002):

1. Distanciarse de los vecinos muy cercanos.
2. Adoptar la misma dirección de los que están cerca.
3. Evitar aislarse.

Por lo tanto, cada individuo tiene tres zonas, la zona de repulsión, la zona de alineación y la zona de atracción, ver figura 4(a). Manteniendo el radio de repulsión y atracción constantes, encontró que a medida que el radio de alineación incrementaba tenían diferente comportamiento colectivo.

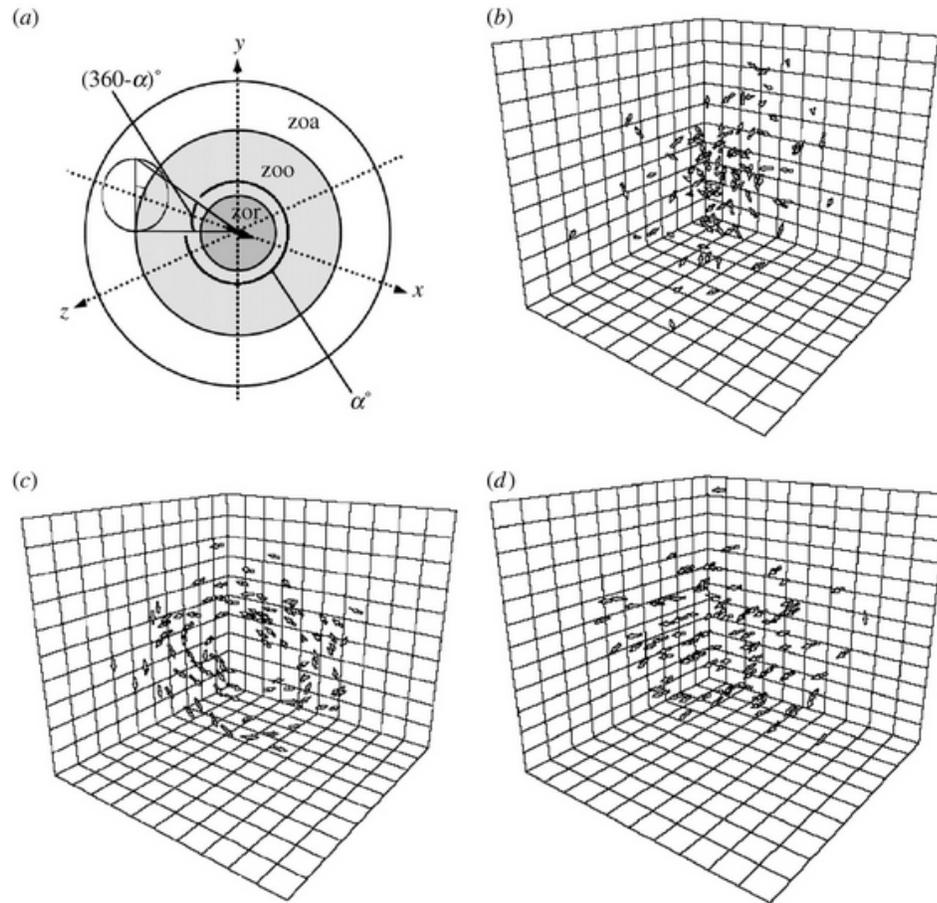


Figura 4. a) Zonas que gobiernan a un pez. b) Cardumen estacionario. c) Torus. d) Grupo paralelo moviéndose en la misma dirección. Fuente: Couzin *et al.* (2002)

Los comportamientos colectivos fueron desde un enjambre estacionario, hasta un “torus”, ver figura 4(c), donde los individuos formaban un círculo alrededor de su centro de masa y finalmente a un grupo paralelo que se movía en la misma dirección. Estos tres diferentes patrones colectivos se realizan en respuesta a pequeños ajustes de un solo factor, que es el radio en el cual, los individuos se alinean uno con otro, ver (Couzin *et al.*, 2002).

Si estos comportamientos colectivos que son realizados por diferentes grupos de animales, pueden explicarse en términos matemáticos, es posible representarlos mediante modelos que se puede simular y aplicar control. Posteriormente, se trata de recrear estos tipos de comportamiento con grupos de robots móviles.

1.2. Planteamiento del problema de estudio

En las últimas décadas, muchas propuestas han surgido para el control en la formación de robots móviles, la formación de vehículos aéreos no tripulados (UAV) ha recibido considerable interés, debido a sus amplias aplicaciones potenciales en el ámbito militar, civil y aplicaciones agrícolas. Todo esto con el fin de preservar la movilidad al mismo tiempo que un grupo compacto, lo que genera ventajas como reducción de costos en implementación, aumento en la robustez, eficiencia del sistema etc. El cuadracóptero se utiliza para acceder a entornos hostiles, donde no se garantiza la seguridad de los pilotos. El cuadracóptero tiene una configuración que es capaz de despegar verticalmente, un buen aterrizaje, además de una gran maniobrabilidad, esta ventaja atrae el interés de muchos investigadores en los últimos años. Se pueden aplicar diferentes técnicas de control sobre el cuadracóptero, como puede ser control no lineal, utilizando PID, Backstepping, linealización por realimentación dinámica, modos deslizantes, ver por ejemplo (Abbas y Wu, 2013), (Bouabdallah *et al.*, 2004), (Dong *et al.*, 2017) y (Ivanov *et al.*, 2014). El estudio de los comportamientos colectivos en la naturaleza y su representación en forma de ecuaciones matemáticas, abre la puerta para aplicaciones en el área de robótica, en nuestro caso particular con vehículos aéreos no tripulados. El propósito de la tesis es lograr reproducir los comportamientos colectivos de los animales como son: sincronización y formación, utilizando redes de vehículos aéreos no tripulados, con fines de aplicaciones en labores de búsqueda, rescate o patrullaje.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Aplicar la teoría de sistemas complejos para generar comportamientos colectivos en grupos de vehículos aéreos no tripulados. En particular, la formación de grupos de robots aéreos tipo cuadracóptero.

1.3.2. Objetivos particulares

- ◆ Sincronizar redes de cuadracópteros empleando la teoría de sistemas complejos.
- ◆ Formar redes de cuadracópteros empleando la teoría de sistemas complejos.
- ◆ Sincronizar y formar grupos de cuadracópteros con diferentes topologías de conexión.

1.3.3. Antecedentes de solución del problema de estudio

Para afrontar el problema a resolver, se han utilizado varias técnicas de control no lineal. A continuación se hace un pequeño resumen de trabajos relevantes reportados en la literatura.

En el trabajo realizado por R. Abbas y Wu (2013), se utiliza el modelo dinámico del cuadracóptero mediante el método de Newton-Euler,

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= U_1(\cos\phi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\varphi), \\
 \ddot{y} &= U_1(\cos\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\phi \cos\varphi), \\
 \ddot{z} &= U_1(\cos\phi \cos\theta) - g + d(t), \\
 \ddot{\phi} &= U_2 l, \\
 \ddot{\theta} &= U_3 l, \\
 \ddot{\psi} &= U_4,
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde (x, y, z) corresponde a la posición del centro de masa con respecto al marco inercial de origen, (ϕ, θ, φ) representan los tres ángulos de orientación del cuadracóptero, U_1 es el vector de fuerza de empuje sobre el cuerpo del cuadracóptero, U_2 , U_3 y U_4 , corresponde a las entradas de control de los momentos de “roll”, “pitch” y “yaw” respectivamente, g es la aceleración gravitacional, $d(t)$ es una perturbación externa y l es la distancia del centro de masa al motor, ver la figura 5.

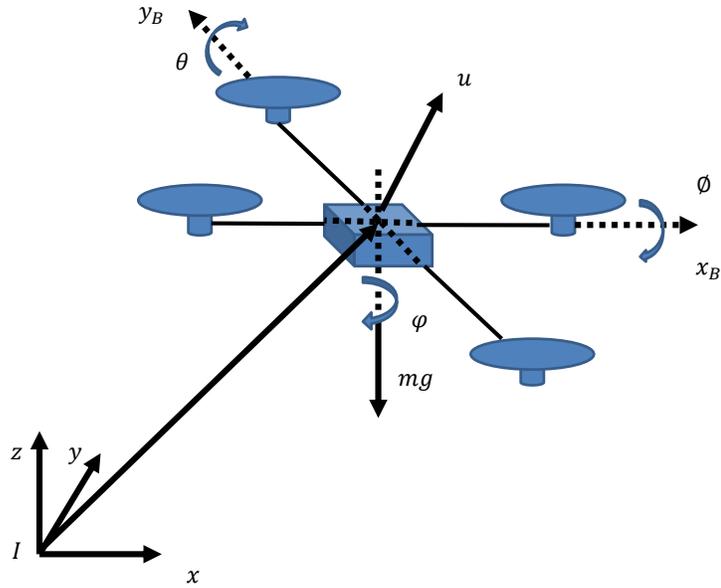


Figura 5. Configuración de un cuadracóptero

La estrategia de control utilizada para el seguimiento de trayectorias es por modos deslizantes, para esto se considera N-cuadracópteros con el modelo descrito por (1). Se utiliza el vector de estados $X = [x_{1i} \ x_{2i} \ x_{3i} \ x_{4i} \ x_{5i} \ x_{6i} \ x_{7i} \ x_{8i} \ x_{9i} \ x_{10i} \ x_{11i} \ x_{12i}]^T$ y se reescribe el sistema en espacio de estados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \\
 \dot{x}_{2i} &= U_{1i}U_{xi}, \\
 \dot{x}_{3i} &= x_{4i}, \\
 \dot{x}_{4i} &= U_{1i}U_{yi}, \\
 \dot{x}_{5i} &= x_{6i}, \\
 \dot{x}_{6i} &= x_{4i}\cos x_{7i}\cos x_{9i} - g + d_i(t), \\
 \dot{x}_{7i} &= x_{8i}, \\
 \dot{x}_{8i} &= IU_{2i}, \\
 \dot{x}_{9i} &= x_{10i}, \\
 \dot{x}_{10i} &= IU_{3i}, \\
 \dot{x}_{11i} &= x_{12i}, \\
 \dot{x}_{12i} &= U_{4i}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

En el cual U_{xi} y U_{yi} son el control virtual que gira el vector U_{1i} para el i -esimo cuadracóptero y se describe como sigue:

$$\begin{aligned} U_{xi} &= \cos x_{7i} \operatorname{sen} x_{9i} \cos x_{11i} + \operatorname{sen} x_{7i} \operatorname{sen} x_{11i}, \\ U_{yi} &= \cos x_{7i} \operatorname{sen} x_{9i} \operatorname{sen} x_{11i} - \operatorname{sen} x_{7i} \cos x_{11i}. \end{aligned} \quad (3)$$

Se supone que todas las trayectorias están disponibles para todos los cuadracópteros y se considera primero el movimiento vertical. Se define una nueva superficie de deslizamiento para el sistema anterior de segundo orden y esta definida por

$$S_{zi} = e_{6i} + \alpha_i e_{5i} + \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_{5i} - x_{5j}), \quad (4)$$

donde e_{5i} es la altitud de seguimiento definida por $e_{5i} = x_{5i} - x_{5i}^d$, α_i es una constante de valor positivo, e_{6i} es la velocidad de seguimiento definida por: $e_{6i} = \dot{x}_{6i} - \dot{x}_{6i}^d$, a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ es (i, j) th de la matriz de adyacencia. Se considera que la trayectoria deseada para todos los cuadracópteros ($x_{5i}^d = x_{5j}^d$), se reescribe la superficie deslizante (4) como,

$$S_{zi} = e_{6i} + \alpha_i e_{5i} + \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_{5i} - e_{5j}). \quad (5)$$

Se toma en cuenta que una vez que todos los agentes lleguen a su superficie deslizante $S_i = \dot{S}_i = 0$, se obtiene

$$\dot{e}_{6i} + \alpha_i e_{6i} + \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_{6i} - e_{6j}) = 0. \quad (6)$$

Para obtener la condición suficiente de existencia de la superficie deslizante del sistema (1), se utiliza el siguiente teorema.

Teorema 1.1 *Considere el sistema (1). Si la entrada de control se diseña como*

$$U_{1i} = \frac{1}{\cos x_{7i} \cos x_{9i}} (-k_i \operatorname{sgn}(S_{zi}) + g + \dot{x}_{6i}^d - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_{6i} - e_{6j})), \quad (7)$$

donde $sgn(\cdot)$ es la función signo y $k_i > 0$. La superficie de deslizamiento $S = \dot{S} = 0$ se alcanza cuando $t \rightarrow +\infty$ y $x_i \rightarrow x_1^d, \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d$ y $x_i \rightarrow x_j$.

Se define una función de Lyapunov como

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_{zi}^T S_{zi}, \quad (8)$$

con S_{zi} la superficie de deslizamiento sobre el eje z. Derivando V con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n S_{zi}^T \dot{S}_{zi}, \quad (9)$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n S_{zi}^T \dot{S}_{zi} = \sum_{i=1}^n S_{zi}^T [\dot{e}_{6i} + \alpha_i e_{6i} + \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_{6i} - e_{6j})], \quad (10)$$

entonces

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n S_{zi}^T [k_i sgn(S_{zi}) - d_i(t)] \leq \sum_{i=1}^n k S_{zi}^T [sgn(S_{zi}) - C] \leq - \sum_{i=1}^n S_{zi}^T [k - C], \quad (11)$$

y C es el límite de las perturbaciones externas $d(t)$. Así que suponiendo y haciendo $k > C$ entonces

$$\dot{V} \leq 0. \quad (12)$$

Se puede decir que \dot{V} se satisface y que el modo deslizante ocurre. El control (7) es discontinuo, esto debido a la función signo que causará “chattering”. Con el fin de eliminar este fenómeno, una aproximación de esta función se da como: $sgn(x) = \frac{2}{\pi} \tanh(\eta x)$, donde η es una constante positiva y la aproximación del error puede disminuir incrementando η . Se reescribe (7) como

$$U_{1i} = \frac{1}{\cos x_{7i} \cos x_{9i}} (-k_i \tanh(\eta S_{zi}) + g + \dot{x}_{6i}^d - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_{6i} - e_{6j})). \quad (13)$$

Se siguen los mismos pasos para obtener $U_{xi}, U_{yi}, U_{2i}, U_{3i}, U_{4i}$ que son dados por:

$$\begin{aligned} U_{xi} &= \frac{1}{U_{1i}} (-k_{xi} \tanh(\eta S_{xi}) + \dot{x}_{2i}^d - \alpha_{xi} e_{2i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_{2i} - x_{2j})) \\ U_{yi} &= \frac{1}{U_{1i}} (-k_{yi} \tanh(\eta S_{yi}) + \dot{x}_{4i}^d - \alpha_{yi} e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_{4i} - x_{4j})) \\ U_{2i} &= \frac{1}{l} (-k_{\phi i} \tanh(\eta S_{\phi i}) + \dot{x}_{8i}^d - \alpha_{\phi i} e_{8i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_{8i} - x_{8j})) \quad , \\ U_{3i} &= \frac{1}{l} (-k_{\theta i} \tanh(\eta S_{\theta i}) + \dot{x}_{10i}^d - \alpha_{\theta i} e_{10i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_{10i} - x_{10j})) \\ U_{4i} &= -k_{\varphi i} \tanh(\eta S_{\varphi i}) + \dot{x}_{12i}^d - \alpha_{\varphi i} e_{12i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_{12i} - x_{12j}) \end{aligned} \quad (14)$$

$S_{xi}, S_{yi}, S_{\phi i}, S_{\theta i}$ y $S_{\varphi i}$ tienen la misma forma que S_{zi} en (4). Para el control de seguimiento en la formación, se extiende el control de (7). La superficie de deslizamiento se describe por

$$S_{zi} = (x_{6i} - x_{6i}^d) + \alpha_i(x_{5i} - x_{5i}^d) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{5i} - x_{5i}^d) - (x_{5j} - x_{5j}^d). \quad (15)$$

Se define d_{ij} como la distancia entre los cuadracópteros i y j tal que $d_{5ij} = x_{5i}^d - x_{5j}^d$ a si que (15) se reescribe como

$$S_{zi} = (x_{6i} - x_{6i}^d) + \alpha_i(x_{5i} - x_{5i}^d) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{5i} - x_{5j} - d_{5ij}), \quad (16)$$

y el control correspondiente esta dado por

$$U_{1i} = \frac{1}{\cos x_{7i} \cos x_{9i}} (-k_i \tanh(\eta S_{zi}) + g + \dot{x}_{6i}^d - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_{6i} - e_{6j})). \quad (17)$$

La superficie deslizante S alcanzará el modo deslizante cuando $S = \dot{S} = 0$ y $x_i \rightarrow x_1^d, \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d, x_i - x_j \rightarrow d_{ij}$. Se sabe que d_{ij} es constante, entonces se puede escribir la derivada como

$$\dot{e}_{6i} - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^N a_{ij}(e_{6i} - e_{6j}) = 0. \quad (18)$$

Por lo tanto es similar a lo que se realizó en el Teorema 1.1 que nos dice que $x_i \rightarrow x_1^d, \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d, x_i - x_j \rightarrow d_{ij}$ con el fin de lograr la formación de múltiples cuadracópteros, se siguen los pasos anteriores para obtener $U_{xi}, U_{yi}, U_{2i}, U_{3i}, U_{4i}$.

Se afrontó el problema resolviendo primero el seguimiento de trayectorias, diseñando la ley de control por modos deslizantes y se calculan las entradas necesarias para el seguimiento de trayectorias, para realizar la formación se define una función que mantenga la distancia entre los cuadracópteros. Al realizar la formación se modifica la ley de control obtenida para el seguimiento de trayectorias, en cuanto a las perturbaciones que pudieran presentarse, son rechazadas eligiendo valores de parámetros adecuados en la ley de control para el seguimiento. Las simulaciones numéricas mostraron que el control diseñado es eficiente. Se muestra en al figura 6 una simulación numérica de la sincronización de 3 cuadracópteros, que se desplazan sobre el eje z con respecto al tiempo y esto valida los resultados teóricos del artículo.

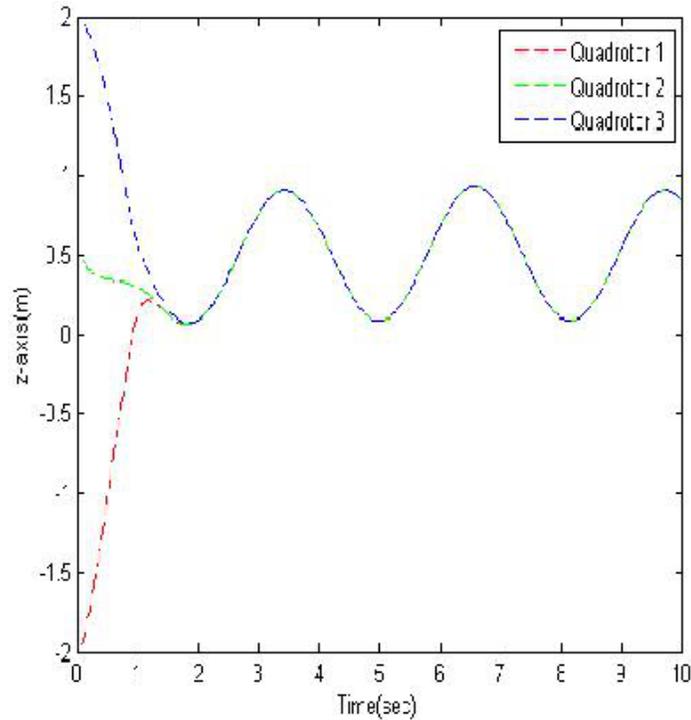


Figura 6. Simulación de seguimiento de trayectoria de un grupo de 3 cuadracópteros.

En el trabajo realizado por N. Köksal *et al.* (2015), se considera el modelo del cuadracóptero Qball-X4. Este modelo simplificado se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_c &= \frac{(T_1+T_2+T_3+T_4)(\cos\phi\text{sen}\theta\cos\psi+\text{sen}\phi\text{sen}\psi)}{m}, \\
 \ddot{y}_c &= \frac{(T_1+T_2+T_3+T_4)(\cos\phi\text{sen}\theta\text{sen}\psi-\text{sen}\phi\cos\psi)}{m}, \\
 \ddot{z}_c &= \frac{(T_1+T_2+T_3+T_4)(\cos\phi\cos\theta)}{m} - g, \\
 \ddot{\phi} &= \frac{L(T_1-T_2)}{J_x}, \\
 \ddot{\theta} &= \frac{L(T_3-T_4)}{J_y}, \\
 \ddot{\psi} &= \frac{K_\psi(T_1+T_2-T_3-T_4)}{J_z}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

donde $J = [J_x \ J_y \ J_z]^T$ es la matriz de rotación inercial con respecto al marco de origen, L es la distancia entre el centro de gravedad y los motores, K_ψ es el impulso positivo a ganancia momentánea, g es la gravedad y m es la masa del cuadracóptero. T_i es la fuerza de empuje

generada por cada motor. Se considera un sistema formado por 3 cuadracópteros A_1, A_2, A_3 . La arquitectura global del controlador se compone de bloques, donde el sub bloque $S_i, i = 1, 2, 3$ representa la dinámica y control de un solo cuadracóptero. Se hacen las siguientes suposiciones:

1. Los cuadracópteros establecen formación antes de empezar a moverse.
2. Todos los cuadracópteros se mueven a una altura constante z_c durante su desplazamiento y que la formación esta en plano $x, y \in \mathbb{R}^2$. Además la trayectoria diseñada para los cuadracópteros es considerando la altura constante z_c y el movimiento en $P_i(t) = (x_{ci}(t), y_{ci}(t))$.

Considerando las suposiciones 1 y 2, se generan las posiciones deseadas $P_{id}(t)$ y ángulos deseados $U_i = (\phi_{di}, \theta_{di}, \psi_{di}), i = 1, 2, 3$ con respecto a la trayectoria predefinida mediante el líder y manteniendo la distancia entre la formación D_F . Además, se generan las señales de control $U_\zeta(t), U_\psi(t)$ y $U_z(t) \forall(t)$, para cada cuadracóptero considerando las incertidumbres del sistema como que $P_i(t)$ siga a $P_{id}(t)$ para mantener la distancia y forma triangular asintóticamente. Posteriormente, la ley de control para la formación debe satisfacer la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\|r_{ij}\| - \|r_{dij}\|\| = 0, \quad (20)$$

donde r_{ij} es la posición relativa, $r_{ij} = -r_{ji}, i = j = 1, 2, 3$ como $r_{12}(t) = (x_{c1}(t) - x_{c2}(t), y_{c1}(t) - y_{c2}(t))$ y r_{dij} es la posición deseada entre los otros cuadracópteros. Para lograr la formación se diseñó en dos niveles, jerárquico y distribuido con control adaptativo, lo anterior con el fin de mantener la formación de los cuadracópteros enfocándose en tiempo real, para eliminar los errores en las incertidumbres se utiliza control LQR para estimar los parámetros en lazo cerrado. Para el desplazamiento en altitud se utilizó un control proporcional-integral-derivativo (PID), para el movimiento de rotación se utilizó un controlador proporcional (P) y utilizando el esquema de altitud y posición se pueden generar las entradas de control que se combinan para mandar una señal PWM a cada motor del cuadracóptero. El desempeño de este algoritmo es exitoso ya que se logró la formación, en la figura 7 muestran los resultados simulados del seguimiento de una trayectoria en espiral por 3 cuadracópteros.

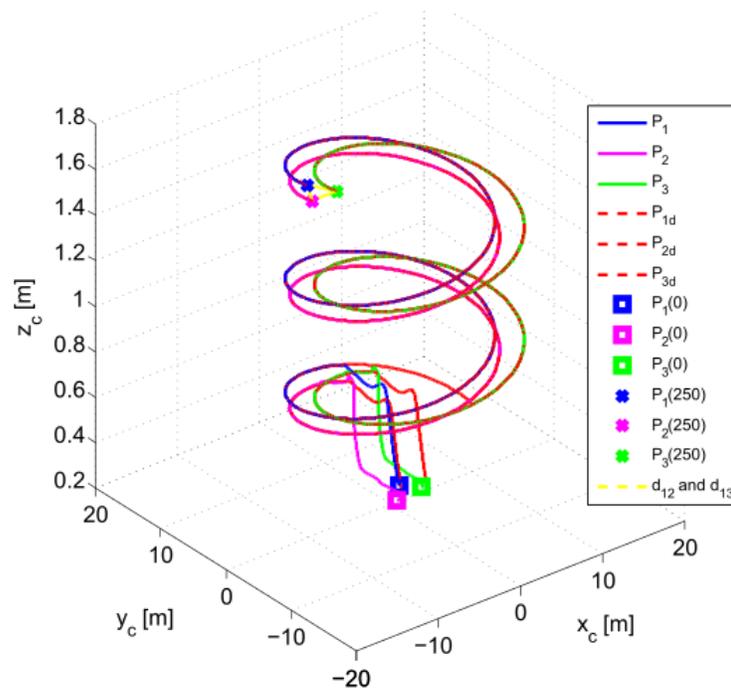


Figura 7. Simulación de seguimiento de trayectoria de una espiral.

En el trabajo realizado por X. Dong *et al.* (2017), se considera que existe un líder y que los demás cuadracópteros tienen una formación predefinida que varía en el tiempo mientras siguen la trayectoria del líder. La dinámica del líder se describe como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= v_1(t), \\ \dot{v}_1(t) &= \alpha_x x_1(t) + \alpha_v v_1(t)\end{aligned}\tag{21}$$

donde $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$ y $v_1(t) \in \mathbb{R}^n$ que es la posición y el vector de velocidad del líder, con $n \geq 1$ la dimensión del espacio, α_x y α_v las constantes de amortiguamiento. La dinámica de los cuadracópteros seguidores puede ser modelada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \alpha_x x_i(t) + \alpha_v v_i(t) + u_i(t)\end{aligned}\tag{22}$$

donde $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $v_i(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u_i(t) \in \mathbb{R}^n$ corresponde a la posición, velocidad y el vector de entrada de control de seguimiento i ($i \in F$), respectivamente. Se realizó la formación con ayuda

de la teoría de grafos para la sincronización y el seguimiento de trayectorias en tiempo real con interacción de conmutación entre los cuadracópteros. En la figura 8 se muestra el esquema de lazo cerrado para la formación en lazo cerrado con los cuadracópteros.

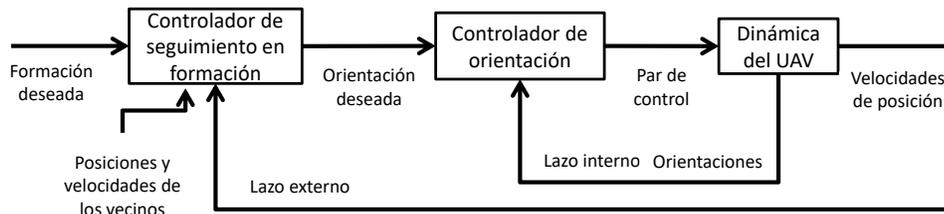


Figura 8. Esquema del seguimiento de trayectoria para múltiples cuadracópteros.

El protocolo de comunicación se basó en la información del vecino más cercano de los agentes. La posición de cada uno de los cuadracópteros se mide utilizando el GPS que tiene integrado, también sensores ultrasonicos y un barómetro se utilizan para medir la altura de cada cuadracóptero cuando está volando cerca y lejos del suelo. La ley de control utilizada para realizar estos experimentos es mediante un control PID. Con esto, se logró que los cuadracópteros interactúen entre ellos y se lograra el objetivo. Se muestran en la figura (9) resultados simulados que validan la teoría.

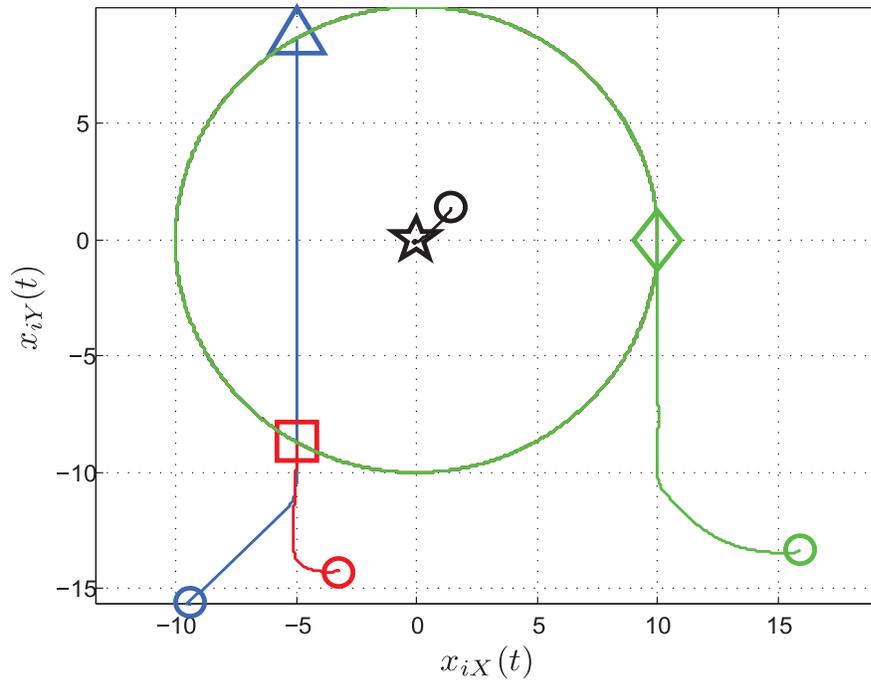


Figura 9. Simulación de una trayectoria circular.

En el trabajo realizado por D. Ivanov *et al.* (2014), se realiza la formación de un grupo de UAVs considerando que existe un conjunto \mathbf{R} de cuadracópteros controlados $r_i \in \mathbf{R}$ ($i = \overline{1, N}$), donde N es el número de cuadracópteros en un grupo. El estado de cada cuadracóptero $r_i \in \mathbf{R}$ es descrito por el vector de estado $s_i(t) = [s_{i,1}(t), s_{i,2}(t), \dots, s_{i,h}(t)]^T$, donde la variable de estado $s_{i,h}(t)$ corresponde a las coordenadas del cuadracóptero $x_i(t), y_i(t), Z_i(y)$, velocidad, aceleración, “roll” $\phi_i(t)$, “pitch” $\theta_i(t)$ y “yaw” $\psi_i(t)$ son los ángulos de orientación. La fuerza de acoplamiento de un grupo de cuadracópteros se describe por la siguiente matriz,

$$D(t) = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,2}(t) & d_{1,3}(t) & \cdots & d_{1,N}(t) \\ - & 0 & d_{2,3}(t) & \cdots & d_{2,N}(t) \\ - & - & 0 & \ddots & \vdots \\ - & - & - & 0 & d_{N-1,N}(t) \\ - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

donde los elementos $d_{i,j}(t)$ de la matriz $D(t)$ representan la distancia entre los cuadracópteros r_i y r_j en el tiempo. Cada cuadracóptero tiene su propio control, con el cual es posible cambiar las coordenadas dependiendo de la entrada de control $u_i(t)$. Con el fin de evitar colisiones y una

interferencia mutua entre los cuadracópteros, se introduce un límite en las posiciones

$$|x_i(t) - x_j(t)| \geq \Delta_r, (i \neq j; i, j = \overline{1, N}), \quad (24)$$

donde Δ_r es la distancia mínima aceptada entre los cuadracópteros, sin contar con la interferencia entre ellos. La formación deseada V pertenece a las formaciones $V_\mu \in V(\mu = \overline{1, N})$ de un simple cuadracóptero. Cada posición $v_\mu \in V$ es descrita por un punto $P_\mu(\mu = \overline{1, N})$ con coordenadas (x_μ, y_μ, z_μ) . No hay información sobre estos puntos, coordenadas y asignaciones entre los cuadracópteros y su posición, la única información disponible es la de la matriz de formación

$$D_f = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots & d_{1,N} \\ - & 0 & d_{2,3} & \cdots & d_{2,N} \\ - & - & 0 & \ddots & \vdots \\ - & - & - & 0 & d_{N-1,N} \\ - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde cada variable $d_{i,j}$ de D_f es la distancia entre los puntos p_i y p_j de la posición v_i y v_j en la formación. Se propone un método para la formación de los cuadracópteros “método de círculos”. En el cual, se elige primero una posición v_μ y un cuadracóptero r_i , que se utiliza para el principio de la formación. El punto p_c es el centro del grupo. El punto p_c se describe por el vector de radio \vec{l}_c .

$$\vec{l}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{l}_i. \quad (26)$$

En el segundo paso se asigna una posición deseada v_2 y se determina la posición p_2 . Para esto se formó un círculo $c_{1,2}$ con el centro en el punto p_1 y radio $d_{1,2}$ de la matriz D_f , como se muestra en la figura 10. Entonces se construyen $N - 1$ líneas rectas, que pasan a través del punto p_1 y la posición actual de los cuadracópteros $r_i(i = \overline{2, N})$. Para poder determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las líneas y el círculo $c_{1,2}$ para cada cuadracóptero $r_i(i = \overline{2, N})$ se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (y_1 - y_i)x_2 - (x_1 - x_i)y_2 + (x_1y_i - x_iy_1) &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= d_{1,2}^2 \end{aligned} \quad i \in \overline{2, N}, \quad (27)$$

y se obtiene la raíz de (x_2, y_2) para cada $r_i (i \in \overline{2, N})$. Entonces se calcula la distancia entre los cuadracópteros $r_i (i \in \overline{2, N})$ y sus puntos (x_2, Y_2) como

$$l_{1,2} = \sqrt{(x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2}, \quad i \in \overline{2, N}. \quad (28)$$

Al cuadracóptero con la mínima distancia $\min(l_{2,i}), i \in \overline{2, N}$ se le asigna la posición deseada v_2 y el punto p_2 con las coordenadas (x_2, y_2) como se muestra en la figura 10.

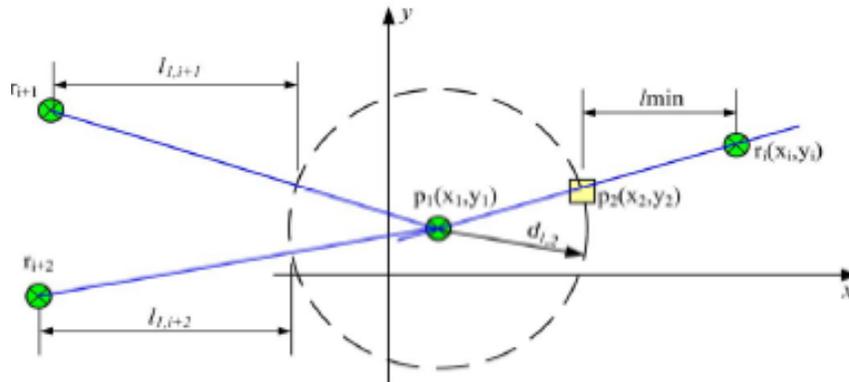


Figura 10. Localización del punto $p_2(x_2, y_2)$.

En el tercer paso se determina las coordenadas del punto $p_3(x_3, y_3)$ con la posición v_3 . Para lograr esto, se construyen dos círculos $c_{1,3}$ y $c_{2,3}$, el primer círculo tiene su centro en el punto p_1 y su radio en $d_{1,3}$, el segundo círculo tiene su centro en p_2 y su radio en $d_{2,3}$. Se encuentran los puntos de intersección que generalmente son dos. Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de los dos círculos para cada cuadracóptero $r_i (i \in \overline{3, N})$ se usan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 &= d_{1,3}^2, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 &= d_{2,3}^2, \end{aligned} \quad i \in \overline{3, N}. \quad (29)$$

Generalmente, hay dos raíces para (x_3, y_3) . Se calcula la distancia $l_{3,1} [i \in \overline{3, N}]$ entre los cuadracópteros $r_i (i \in \overline{3, N})$ y cada una de las raíces de (x_3, y_3) .

$$l_{3,i} = \sqrt{(x_i - x_3)^2 + (y_i - y_3)^2} \quad i \in \overline{3, N}. \quad (30)$$

Al cuadracóptero con la mínima distancia $\min(l_{3,i}), i \in \overline{3, N}$ se le asigna la posición deseada

v_3 y el punto p_3 con las coordenadas (x_3, y_3) como se muestra en la figura 11.

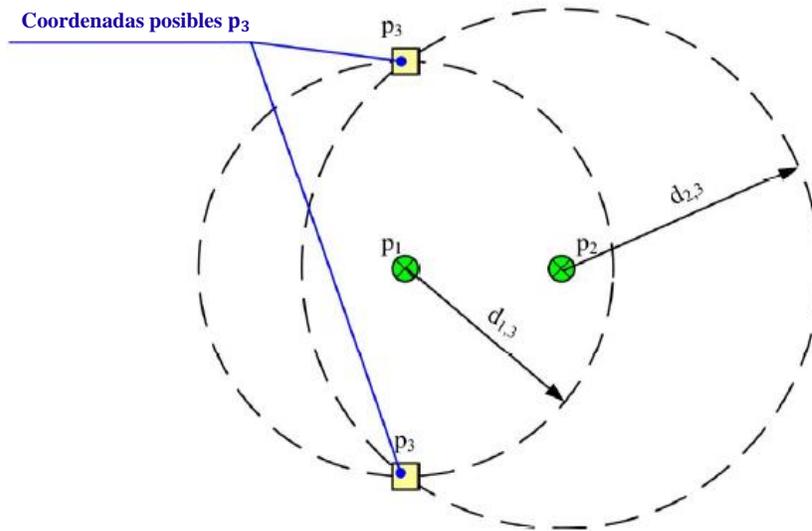


Figura 11. Localización del punto $p_3(x_3, y_3)$ de la posición v_3 .

En cada paso, se determinan las coordenadas $p_\mu (\mu = \overline{4, N})$ de la posición v_μ se construyeron tres círculos $c_{\mu-3,\mu}, c_{\mu-2,\mu}, c_{\mu-1,\mu}$. El primer círculo $c_{\mu-3,\mu}$ tiene su centro en el punto $p_{\mu-3}$ y su radio en $d_{\mu-3,\mu}$, el segundo círculo $c_{\mu-2,\mu}$ tiene su centro en el punto $p_{\mu-2}$ y su radio en $d_{\mu-2,\mu}$ y el tercer círculo $c_{\mu-1,\mu}$ tiene su centro en el punto $p_{\mu-1}$ y su radio en $d_{\mu-1,\mu}$. Se encuentran los puntos de intersección entre los círculos pero, generalmente existen solo dos. Se determina las coordenadas de intersección de los círculos con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 &= d_{k-1,k}^2 \\ (x_k - x_{k-2})^2 + (y_k - y_{k-2})^2 &= d_{k-2,k}^2, \\ (x_k - x_{k-3})^2 + (y_k - y_{k-3})^2 &= d_{k-3,k}^2 \end{aligned} \quad (31)$$

se calcula la distancia $l_{k,i} [i = \overline{k, N}]$ entre los cuadracópteros $r_i (i = \overline{k, N})$ y las raíces de (x_k, y_k)

$$l_{k,i} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}, \quad i \in [\overline{k, N}]. \quad (32)$$

Al cuadracóptero con la mínima distancia $\min(l_{k,i}), i \in \overline{k, N}$ se le asigna la posición deseada v_k y el punto p_k con las coordenadas (x_k, y_k) . En la figura 12 se muestra la definición de punto $p_4(x_4, y_4)$ y la posición v_4 .

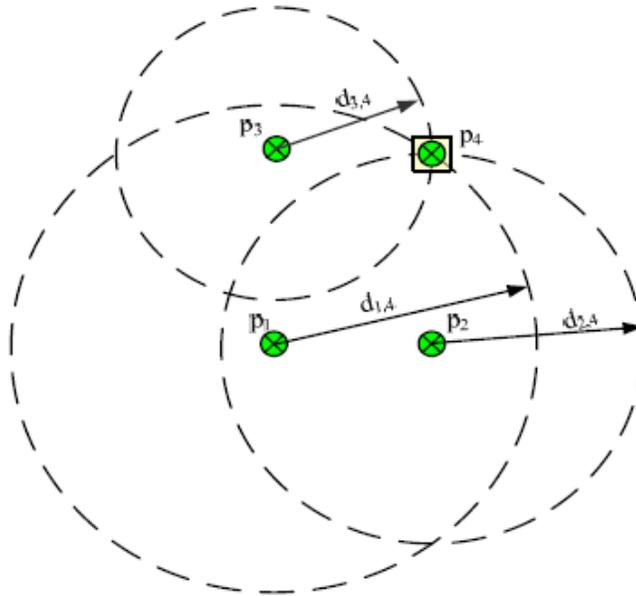


Figura 12. Localización del punto $p_4(x_4, y_4)$ de la posición v_4 .

El cálculo de las posiciones (v_5, v_6, \dots, v_N) para un número mayor de cuadracópteros se realiza de manera similar. Los cuadracópteros se comunican unos con otros mediante Wi-Fi y usando su sistema de navegación para saber dónde están localizados uno con respecto al otro, todo con ayuda de un programa que incluye la ley de control. Es necesario saber las coordenadas de cada cuadracóptero en el espacio, el algoritmo es complejo computacionalmente además permite crear diversas formaciones y puede ser utilizado para controlar varios cuadracópteros. Se muestran resultados experimentales con un grupo de tres cuadracópteros en un plano horizontal cuando vuelan a una altitud de 1 metro como se muestra en la figura 13.



Figura 13. Demostración experimental de un grupo de 3 cuadracópteros.

1.3.4. Solución al problema de estudio

Con la consulta que se ha hecho mediante el estado del arte de algunos trabajos que se han realizado sobre la formación de vehículos aéreos no tripulados (UVAs), se considera que con ayuda de la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos se puede construir una ley de control utilizando Backstepping para poder realizar la formación de un grupo de agentes, en este caso cuadracópteros.

1.3.5. Contribuciones de la tesis

En esta tesis se pretende realizar la formación de cuadracópteros a nivel simulación para posteriormente (trabajo a futuro) ser implementadas en el laboratorio de *Sincronización y sistemas complejos* del Departamento Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE.

En la literatura consultada, cada artículo emplea un modelo de cuadracóptero diferente, el modelo del cuadracóptero que se utiliza en esta tesis no se ha empleado para realizar la sincronización y formación a nivel simulación.

El análisis matemático que se desea aplicar es para N-agentes en formación. Posteriormente, las formaciones implementadas pueden utilizarse para una tarea en específico como puede ser, exploración, patrullaje o rescate.

Se redactó un artículo con los resultados numéricos obtenidos en esta tesis, el cual fue presentado en el Congreso Nacional de Control Automático 2017, celebrado en la ciudad de Monterrey, Nuevo León, del 4 a 8 de octubre del 2017.

1.3.6. Organización de la memoria de tesis

El contenido de esta tesis se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el **capítulo 2** se exponen los fundamentos principales en el que se basa la tesis, así como también la teoría que se conoce sobre estos tópicos, los cuales, se utilizarán para lograr los objetivos general y particulares.

En el **capítulo 3** se detallan los comportamientos colectivos de interés que se desean reproducir en vehículos aéreos no tripulados.

En el **capítulo 4** se describe una breve historia del cuadracóptero, así como también su principio de funcionamiento. En particular el desarrollo del modelo que lo caracteriza y el cual es empleado en esta tesis para el desarrollo en la formación de vehículos aéreos no tripulado.

En el **capítulo 5** se reportan los resultados numéricos obtenidos en esta tesis, utilizando el modelo del cuadracóptero y la ley de control diseñada, además de los parámetros expuestos en el capítulo 4.

En el **capítulo 6** se informa sobre las conclusiones obtenidas en el desarrollo y a lo largo de esta tesis, así como también el trabajo que se pretende realizar en un futuro.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo se exponen las bases en que se fundamenta la tesis. Se tocan tópicos que abarcan a los sistemas complejos, teoría de grafos y matrices de asociación a cada tipo de grafo.

2.1. Sistemas complejos

En la actualidad, el ser humano está acostumbrado a ver todo de manera muy simple y no desde un enfoque de complejidad, en los últimos años se ha cambiado esa perspectiva, ya que con las investigaciones se ha observado que las cosas no son tan simples como se creían. Von Bertalanffy fue el introductor de la teoría de sistemas, el definió un sistema como un “complejo” de componentes interactuantes, añadiendo que constituye una totalidad organizada que se caracteriza por la interacción, suma, mecanización, centralización, competencia y la finalidad. Se deduce que todo sistema, por el hecho de serlo, es complejo. Un sistema complejo es un sistema con un gran número de elementos, bloques de construcción o agentes, capaz de intercambiar estímulos uno con el otro y su ambiente.

La interacción entre los elementos solo se puede producir entre los vecinos inmediatos o con los distantes; los agentes pueden ser todos idénticos o diferentes, además pueden moverse en el espacio u ocupar posiciones fijas, estar en un solo estado o múltiples estados. La característica común es que los sistemas complejos muestran organización sin ningún principio de algún tipo de formación externa aplicada. En la mayoría de los ejemplos, los agentes pueden aprender la historia pasada y modificar sus estados en consecuencia. La adaptación y robustez a menudo son el subproducto. Parte del sistema se puede alterar y aun así ser capaz de seguir funcionando.

Para poder analizar el comportamiento de los sistemas complejos, se han utilizado modelos dinámicos no lineales, ecuaciones diferenciales y análisis de series de tiempo. También la teoría de redes y dependiendo del problema se han utilizado modelos de otras disciplinas como la economía, la biología e incluso la sociología. Existen algoritmos matemáticos que sustituyen a las ecuaciones diferenciales, estos no son tan precisos pero pueden aproximar el modelo original, ver por ejemplo (Lakin *et al.*, 2012), (Ottino, 2003), (Munné, 2005), (Adleman, 1998) y (Bar-Yam, 1997).

2.2. Teoría de grafos

La teoría de grafos comenzó con la solución del problema de los siete puentes de Königsberg, un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convertiría en la ciudad rusa de Kaliningrado. Esta ciudad es atravesada por el río Pregel, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo la ciudad en cuatro regiones, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados puente del herrero, puente conector, puente verde, puente del mercado, puente de madera, puente alto y puente de la miel, ver la figura 14.

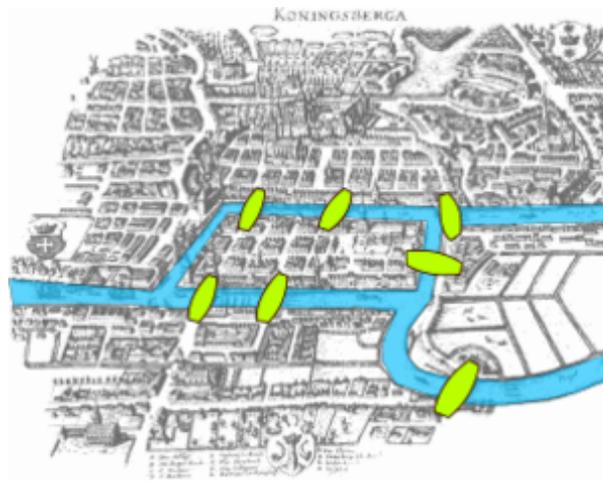


Figura 14. Los siete puentes de Königsberg en la ciudad de Königsberg en 1976.

El problema fue formulado en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo punto de inicio. El problema puede resolverse aplicando un método de fuerza bruta, lo que implica probar todos los posibles recorridos existentes. Sin embargo, Euler en el año 1736 en su publicación “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” demostró una solución generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en que ciertos accesos estén restringidos a ciertas conexiones, tales como los puentes de Königsberg. A los puntos se les llama nodos y a las líneas conexiones. Euler recurre a una abstracción del mapa, enfocándose exclusivamente en las regiones terrestres y las conexiones entre ellas. Cada puente lo representó mediante una línea que unía a dos puntos, cada uno de los cuales representaba una región diferente. Así el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos, transite por todas las líneas una única vez, y regrese al mismo punto de partida, ver figura 15.

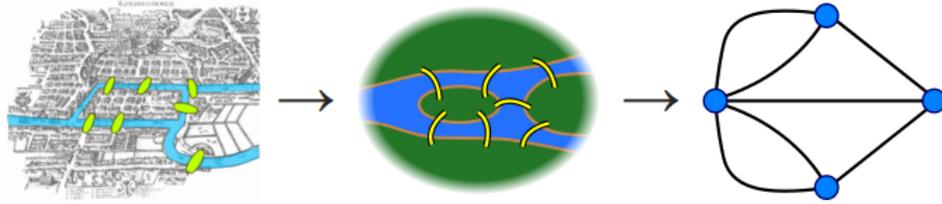


Figura 15. Abstracción de la ciudad de Königsberg.

La publicación que realizó Euler fue la primera que hizo alusión a una geometría en que sólo interesan las propiedades estructurales de los objetos y no sus medidas, como tradicionalmente se hacía. De aquí el nacimiento de la rama de las matemáticas, llamada *topología*.

2.3. Tipos de grafos

2.3.0.1. Grafo dirigido

Es un tipo de grafo donde las conexiones que unen dos nodos entre si se encuentra con dirección (flecha), ver la figura 16.

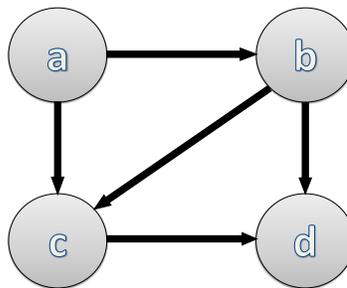


Figura 16. Grafo dirigido.

2.3.0.2. Grafo no dirigido

Es simplemente grafo, es aquel que acepta una sola conexión uniendo dos nodos cualesquiera. Es la definición estándar de un grafo, ver la figura 17.

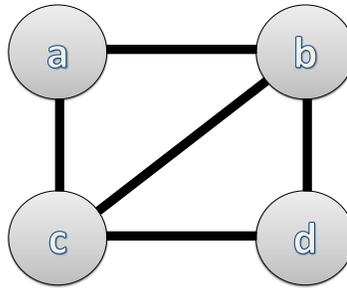


Figura 17. Grafo no dirigido.

2.3.0.3. Grafo mixto

Es un grafo que contiene tanto conexiones dirigidas y no dirigidas, se denomina grafo mixto.

2.4. Matrices asociadas a un grafo

La teoría de grafos es una herramienta utilizada para el análisis y descripción de grafos. Existen diferentes matrices que describen la forma de las conexiones, el grado y otras características correspondientes a un grafo. A continuación se describen estas:

2.4.0.1. Matriz de adyacencia $A(G)$

Es una matriz de $n \times n$ donde n representa el número de nodos del grafo. Se forma con unos y ceros, representa las conexiones entre los nodos y está dada de la siguiente manera,

$$E(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (ij) \in E(G) \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (34)$$

2.4.0.2. Matriz de grado $D(G)$

Es una matriz con solo valores en la diagonal de dimensión $n \times n$, representa el número de vecinos que tiene cada nodo. Los elementos de la diagonal d_{ij} para $i, j = 1, 2, \dots, n$, están dados por

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } (i = j) \in E(G) \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (35)$$

donde d_i es el grado del nodo i .

2.4.0.3. Matriz laplaciana $L(G)$

Es igual a la matriz de grado menos la matriz de adyacencia

$$L(G) = D(G) - A(G), \quad (36)$$

en el cual, los elementos de $L(G)$ son l_{ij} y están determinados por

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (ij) \in E(G) \\ d_i, & \text{si } (i = j) \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (37)$$

2.4.0.4. Matriz de acoplamiento $A_c(G)$

Es una matriz en la cual, todos los valores de la diagonal son negativos o cero en caso de no contener ninguna conexión. Es utilizada para describir un grafo y se forma de la siguiente manera,

$$A_c(G) = A(G) - D(G) = -L(G) \quad (38)$$

Conclusiones del capítulo

Los sistemas complejos se caracterizan por la interacción de las partes que lo conforman y del comportamiento nuevo que surge de sus interacciones. El tratar de entender las partes que conforman al sistema no necesariamente explicaría el comportamiento colectivo de todo el grupo. La teoría de sistemas complejos proporciona una herramienta matemática para representar y estudiar las redes donde no importan las propiedades estructurales de los nodos ni sus medidas, sino las conexiones que existen entre los nodos, y como consecuencia, las interacciones que se producen entre los nodos pueden dar origen a comportamientos colectivos. Una forma de representar las conexiones es mediante un grafo y la matriz de acoplamiento, dicha matriz se puede emplear para el cálculo del control de comportamientos colectivos como sincronización y formación en redes complejas dinámicas. En particular, como se mostrará en capítulos siguientes con grupos de cuadracópteros.

Capítulo 3. Comportamientos colectivos de interés

En este tercer capítulo de la tesis, se habla de los comportamientos de interés que se desean reproducir con los cuadracópteros, además de la teoría que ya se ha utilizado.

3.1. Sincronización

Reconocida por Christiaan Huygens en 1665, el fenómeno de sincronización es muy abundante en la naturaleza, ciencia, ingeniería y vida social. Él descubrió que un par de relojes de péndulo colgando de un soporte común, sincronizaban sus oscilaciones haciéndolas coincidir perfectamente, mientras que los péndulos se movían siempre en sentidos contrarios, ver la figura 18.

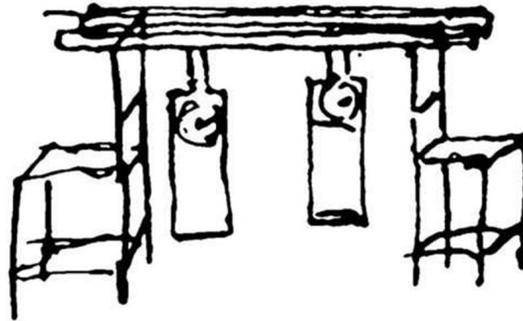


Figura 18. Experimento de Huygens en 1665. Fuente: Pikovsky *et al.* (2003)

Además Huygens definió de forma breve pero extremadamente precisa su observación de la sincronización de la siguiente manera: “Vale la pena notar, que cuando suspendemos dos relojes contruidos con 2 ganchos incrustados en la misma viga de madera, los movimientos de cada péndulo oscilando en sentidos contrarios estaban tan de acuerdo que nunca han disminuido en lo más mínimo uno del otro y el sonido de cada uno siempre se escuchó simultáneamente. Además, si este acuerdo es perturbado por alguna inferencia, es restablecido en un corto tiempo. Durante mucho tiempo me quede sorprendido por este resultado inesperado, pero después de un examen cuidadoso, finalmente encontré que la causa de esto es debido al movimiento de la viga, a pesar de que esto es apenas perceptible. La causa es que las oscilaciones del péndulo, en proporción a su peso, comunican algún movimiento a los relojes. Este movimiento es transferido a la viga, que tiene el efecto de hacer a los péndulos llegar a un estado exactamente donde uno va en sentido contrario al otro, aun si no estuvieran así en un principio. Finalmente, el movimiento de la viga cesa. Pero esto no ocurre hasta que los relojes tienen movimientos opuestos exactamente iguales”,

ver (Pikovsky *et al.*, 2003).

La sincronización ocurre cuando varios individuos se coordinan para actuar al unísono, es decir, comportamientos iguales a través del tiempo. Muchos tipos diferentes de comportamientos colectivos son ejemplos de sincronización. Por ejemplo, un gran grupo de aves alineadas, un cardumen de peces o partículas se dice que están sincronizados en la dirección del movimiento. Así como otros comportamientos colectivos, la sincronización puede describirse, con ayuda de modelos matemáticos que describen como emerge el comportamiento colectivo de las interacciones entre los individuos, pudiéndose así aplicar al control. El grupo de estos individuos se representa como sigue

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + \mathbf{u}_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (39)$$

Wang en (Wang, 2002) establece que un grupo de N nodos sincroniza completa y asintóticamente si,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (40)$$

donde $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^n$ representa los estados del nodo i . Si se define el error de sincronía entre los nodos i y j como $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ con $i \neq j$, se puede decir que los nodos \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j *sincronizan completamente y asintóticamente* cuando,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{ij}(t)\| = 0. \quad (41)$$

Para lograr la sincronización en un grupo formado por N nodos idénticos, con acoplamiento lineal y difusivo a través de la primera variable de estado de cada nodo se recurre a las ecuaciones de estado de cada nodo i como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= f_1(\mathbf{x}_i) + u_{i1}, \\ \dot{x}_{i2} &= f_2(\mathbf{x}_i), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{in} &= f_n(\mathbf{x}_i), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (42)$$

donde $\mathbf{x}_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in})^T \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados del nodo i , la ley de control u_{i1} queda

de la siguiente forma

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad (43)$$

donde $c > 0$ representa la fuerza de acoplamiento y $\Gamma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz constante de conexiones que indica cuales variables de estado de los nodos están acoplados.

3.2. Formación

De forma natural, varias especies de animales utilizan la formación para aumentar su eficiencia en grupo. Se piensa que las aves vuelan en formación en “V” para ahorrar energía al volar, ya que aprovechan el empuje generado por los vórtices del extremo alar producido por el animal que vuela delante de ellos en la formación. Se ha demostrado también, que los patos ahorran energía al nadar en una formación en fila. Además se han propuesto varias funciones anti depredadores de las formaciones de animales. El problema de formación de robots consiste en establecer el movimiento de un grupo de robots para que, de una manera coordinada o colaborativa, lleven a cabo una tarea específica. Entre los ejemplos de esas tareas tenemos: vigilancia, búsqueda de objetos, exploración, rescate y transportación de objetos; las cuales pueden realizarse en ambientes diversos utilizando robots móviles terrestres, aéreos, espaciales, marinos o submarinos ver por ejemplo, (Martínez Clark, 2014). Para el caso de la formación se propone el uso de un controlador para una de las componentes del nodo, donde cada componente es independiente de las demás con la forma,

$$\dot{x}_i^x = f(x_i) + u_i, \quad (44)$$

donde $x_i^x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados correspondiente al eje x , donde se desenvuelve el robot i -ésimo y $u_i = (u_{ij} \ 0 \ 0)^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entradas de control. Para este caso en particular el controlador que actúa únicamente sobre la primer variable de estado de cada nodo tendría la siguiente forma,

$$u_{ij} = \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} x_{ij} + \delta_{ij} (a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}), \quad (45)$$

donde c_{ij} es la fuerza de acoplamiento entre los robots i y j , a_{ij} es un elemento de la matriz de acoplamiento $A = [a_{ij}]$, Δ_{ij} es la distancia esperada entre los robots i y j , δ_{ij} es el coeficiente de

repulsión, el cual, puede tomar los siguientes valores,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| > \Delta_{ij}, \\ \delta, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| \leq \Delta_{ij}. \end{cases} \quad (46)$$

El controlador (45) puede dividirse en dos partes para analizar el efecto de cada una de ellas, las cuales son delimitadas por el operador suma. La primera parte del controlador trata de sincronizar los estados del robot j con los del robot i cuando se encuentran suficientemente alejados entre sí. Cuando la diferencia entre el primer estado asociado a la posición del robot es más pequeña que la distancia esperada entre ellos, entonces el coeficiente de repulsión δ_{ij} de la segunda parte del controlador toma un valor diferente de cero para mantener la distancia Δ_{ij} esperada (Martínez Clark, 2014).

Conclusiones del capítulo

Los comportamientos colectivos de interés se han observado en la naturaleza por algún grupo de animales, como lo son la sincronización y la formación, estos comportamientos ya han sido analizados desde hace mucho tiempo y se han creado modelos matemáticos que representan un comportamiento en particular, estos métodos matemáticos se describen mediante ecuaciones las cuales se han aplicado a un grupo de robots o sistemas para recrear los comportamientos colectivos y emplearlos en una labor en específico.

Capítulo 4. Modelo matemático del cuadracóptero

En este cuarto capítulo de la tesis, se proporciona una breve historia del helicóptero así como una introducción del cuadracóptero, también su funcionamiento y el modelo matemático que lo caracteriza para posteriormente utilizarlo en la formación y sincronización de grupo de cuadracópteros, tema de esta tesis.

4.1. Historia del helicóptero

La atracción de los seres humanos por volar se ha expresado a lo largo de la historia en todo el mundo. Tomando forma de leyendas, mitos o de incluso cuentos religiosos, como la visión de una nave espacial en el libro del profeta Ezequiel o los intrigantes Vimanas en la antigua mitología india, o incluso la hazaña de Daedalus e Icar en la mitología griega. El sueño de volar es uno de los mayores desafíos para los humanos que ha generado cientos de intentos fallidos.

La historia del helicóptero es muy corta en comparación con aviones de ala fija. En el año de 1490, Leonardo Da Vinci creó el Helical Air Screw, el cual ha sido citado a menudo como el primer intento serio de producir un helicóptero que funcione como se muestra en la figura 19.

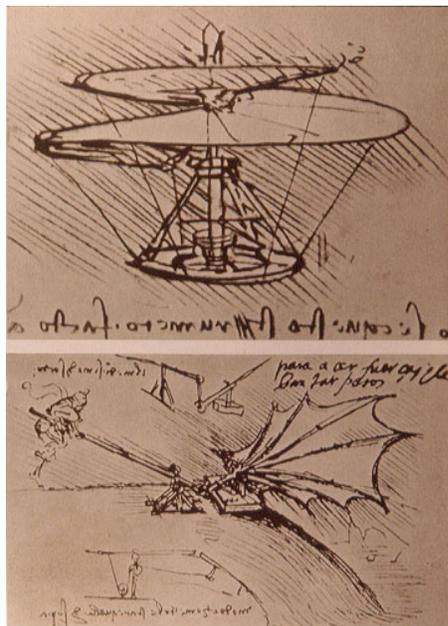


Figura 19. Helical Air Screw. Fuente: Histoire de l'Aviation

Gustave Ponton d'Amécourt fue el primero en usar la palabra "Helicóptero" que proviene de dos palabras griegas antiguas: *Helix* = hélice y *Pteron*= ala en 1863. Muchos años después, el 29

de septiembre de 1907, los franceses Louis y Jacques Breguet y el profesor Richet demostraron el primer vuelo tripulado con su *Gyroplane n : 01*, un gran quadrotor con doble capa de hélices y sin superficies de control, ver la figura 20. El primer vuelo libre controlado manualmente se logró el 13 de noviembre de 1907 por Paul Cornu en su helicóptero.

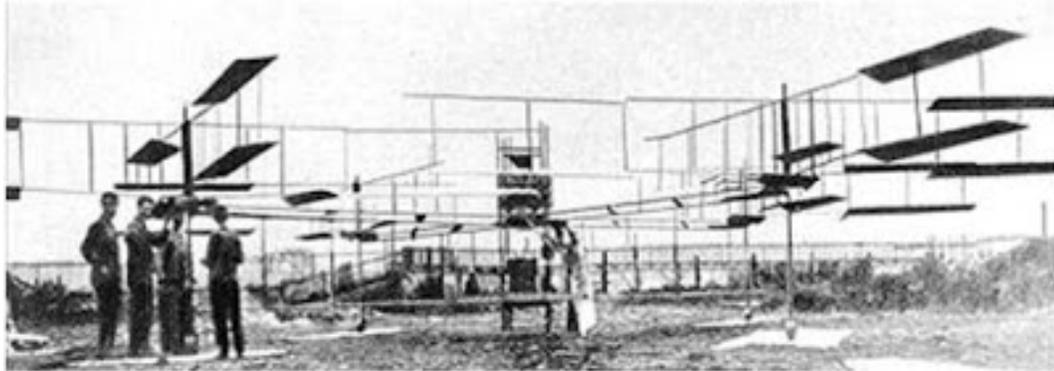


Figura 20. Gyroplane n:01. Fuente: www.aviastar.org

4.2. Micro Aerial Vehicle

Los objetos voladores siempre han ejercido una gran fascinación en el hombre de todo tipo mediante la investigación y desarrollo. La comunidad de investigación en robótica muestra un interés creciente en el desarrollo de *Micro Aerial Vehicle* (MAV). El desafío científico en el diseño de MAV y el control en los entornos desordenados y la falta de soluciones existentes es muy motivador. Por otro lado, el amplio campo de aplicaciones en los mercados militares y civiles está propulsando el desarrollo y creación de nuevos MAV.

En general, los vehículos aéreos se pueden dividir en dos categorías: *Lighter Than Air* (LTA) y *Heavier Than Air* (HTA), en la figura 21 se presenta una clasificación general de aeronaves según el principio de vuelo y el modo de propulsión.

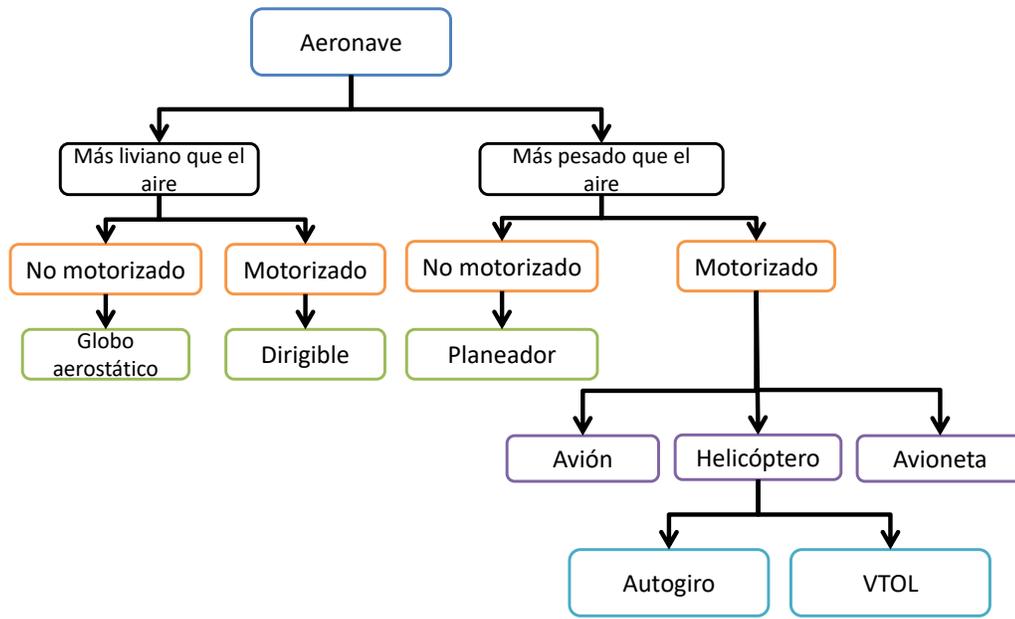


Figura 21. Clasificación general de aeronaves.

Se puede ver fácilmente que los sistemas VTOL como helicópteros o dirigibles tienen la ventaja en comparación con los otros conceptos. Esta característica se debe a su capacidad única para el vuelo vertical, estacionario y de baja velocidad. La ventaja de los dirigibles es la auto-elevación y simplicidad de control que puede ser muy esencial para aplicaciones críticas, como la vigilancia aérea.

Unos años después del primer vuelo del avión tripulado, el Dr. Cooper y Elmer Sperry inventaron el estabilizador giroscópico automático, que ayuda a mantener un avión volando recto y nivelado. Esta tecnología se usó para convertir a U.S. Navi Curtiss N-9 en el primer avión de entrenamiento con radio control, es decir, el primer *Vehículo Aéreo no Tripulado* (UAV). Los primeros UAVs fueron probados en los Estados Unidos durante la primera guerra mundial pero nunca desplegados en combate. Durante la segunda guerra mundial, Alemania tomó una gran ventaja y demostró el potencial de los vehículos aéreos no tripulados en los campos de batalla.

Después de las dos guerras, los militares reconocieron el potencial de los UAV en combate y comenzaron programas para el desarrollo de estos, que condujeron pocas décadas después a sistemas sofisticados, especialmente en los Estados Unidos e Israel, como el General Atomics

MQ-1 (Predator) o el AAI RQ-2 (Pioneer). El primer helicóptero no tripulado fue construido por Forlanini en 1877. No se podía estabilizar ni orientar, con los avances tecnológicos sobresalientes después de la segunda guerra mundial se hizo posible construir y controlar helicópteros no tripulados. Los investigadores y la industria han mostrado su interés en el desarrollo de helicópteros autónomos en las últimas décadas. Se está llevando a cabo un extenso esfuerzo de investigación sobre VTOL, UAVs y MAVs.

4.3. Cuadracóptero

El cuadracóptero es un helicóptero que consta de cuatro motores para que se mantenga elevado con ayuda de su propulsión. Los cuatro motores están generalmente colocados en las extremidades del cuadracóptero en forma de una cruz. Con la finalidad de que el cuadracóptero no se caiga al suelo, es necesario que dos de sus hélices giren en un sentido y las otras dos en sentido contrario para mantenerse en un punto elevado, si se desea que se mueva hacia algún lado, la velocidad de sus hélices tiene que cambiar, ver (Bouabdallah *et al.*, 2004), (Bouabdallah y Siegwart, 2005) (Saif *et al.*, 2012) y (Swarup y Sudhir, 2014).

El desplazamiento de un cuadracóptero se realiza variando la velocidad de al menos una de las hélices que se encuentra en los motores, el aumento o disminución de la velocidad de las 4 hélices genera un movimiento vertical, cambiando la velocidad de dos de las hélices que giran en un sentido se produce un desplazamiento rotacional. Para que el cuadracóptero tenga un desplazamiento lateral es necesario que la velocidad de dos de sus hélices sean iguales en un sentido y las otras sean de diferentes velocidades en el otro sentido, en las hélices de diferente velocidad en un sentido, de la mayor velocidad dará la dirección en que se desplace el cuadracóptero ya sea en el eje x o en el eje y , esto se puede ver en la figura 22.

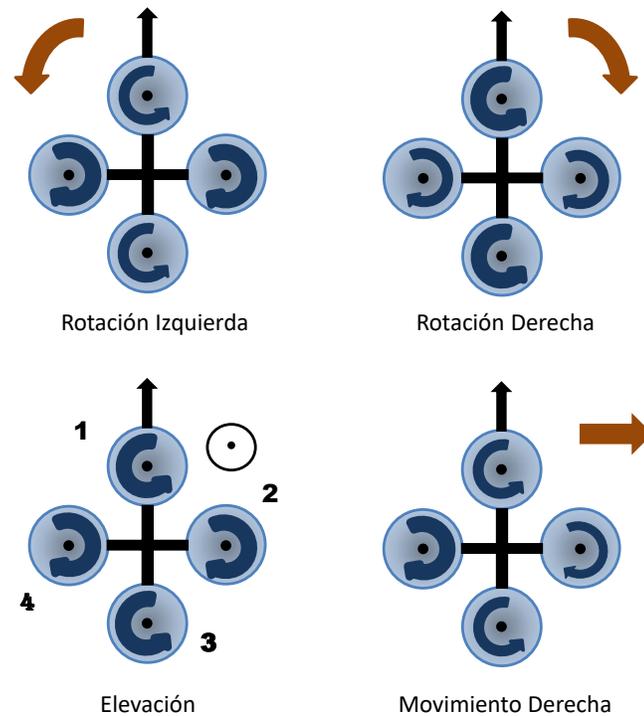


Figura 22. Sentido de giro de las hélices para el desplazamiento de un cuadricóptero.

El cuadricóptero se clasifica en un VTOL (Vertical Take-Off and Landing) debido al principio de vuelo y de propulsión.

4.4. Modelo dinámico utilizando el formalismo de Euler-Lagrange

En primera instancia se considera el marco inercial de la tierra E y el marco fijo del cuerpo B como se muestra en la figura 23. La orientación del cuadricóptero en el espacio está dado por una rotación R de B a E , donde $R \in SO3$ es la matriz de rotación.

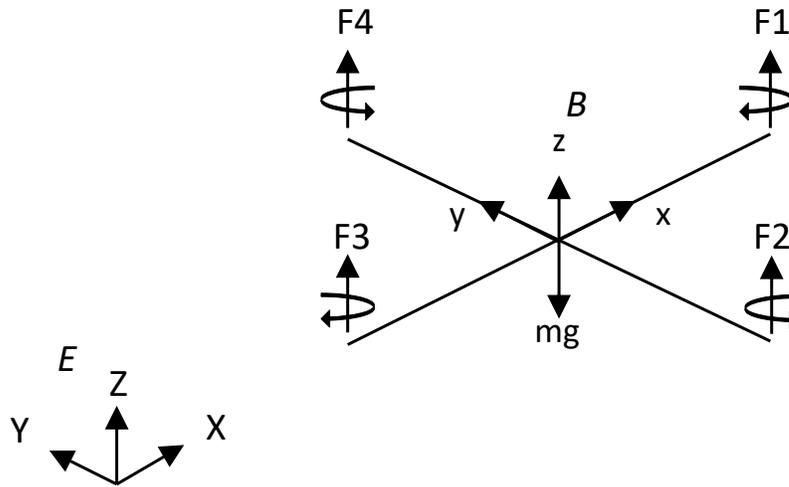


Figura 23. Cuadracóptero con respecto al marco inercial.

4.4.1. Cinemática

Para cualquier punto fijo en el que se encuentra el cuadracóptero referido con respecto al marco inercial de la tierra, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 r_x &= (c\psi c\theta)x + (c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi)y + (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi)z, \\
 r_y &= (s\psi c\theta)x + (s\psi s\theta s\phi + s\psi c\phi)y + (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi)z, \\
 r_z &= (-s\theta)x + (c\theta s\phi)y + (c\theta c\phi)z,
 \end{aligned} \tag{47}$$

donde, ϕ = orientación en el eje x , θ = orientación en el eje y , ψ = orientación en el eje z , $c = \cos$ y $s = \sin$.

Las velocidades correspondientes se obtienen con la diferenciación de (47), y el cuadrado de la magnitud de la velocidad para cualquier punto es dada por

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \tag{48}$$

4.4.2. Energía

De la ecuación (48) y asumiendo que la matriz de inercia es diagonal, se obtiene la expresión de energía cinética

$$T = \frac{1}{2}I_{xx}(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta)^2 + \frac{1}{2}I_{yy}(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}s\phi c\theta)^2 + \frac{1}{2}I_{zz}(\dot{\theta}s\phi - \dot{\psi}c\phi). \quad (49)$$

Utilizando la conocida fórmula de energía potencial, se puede expresar (49) en el marco fijo de la tierra como

$$V = \int x dm(x)(-gs\theta) + \int y dm(y)(gs\phi c\theta) + \int z dm(z)(gc\phi c\theta). \quad (50)$$

4.4.3. Ecuación de movimiento

Utilizando el lagrangiano y la fórmula derivada para la ecuación de movimiento,

$$L = T - V, \quad \Gamma_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (51)$$

donde q_i son las coordenadas generalizadas y Γ_i las fuerzas generalizadas. Las tres ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} I_{xx}\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}), \\ I_{yy}\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx}), \\ I_{zz}\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}(I_{xx} - I_{yy}). \end{aligned} \quad (52)$$

Por otra parte los pares no conservados que actúan sobre el cuerpo, son el resultado de la diferencia en el empuje de cada par:

$$\begin{aligned}
T_x &= bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \\
T_y &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \\
T_z &= d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2).
\end{aligned} \tag{53}$$

4.4.4. El modelo dinámico derivado

El modelo dinámico del cuadracóptero presenta los ángulos “*roll*”, “*pitch*” y “*yaw*” constantes, tres términos que son el resultado del giroscopio de la rotación del cuerpo rígido, el efecto giroscópico resultante del giro de la hélice acoplado con la rotación del cuerpo y finalmente la acción de los actuadores:

$$\begin{aligned}
I_{xx}\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) - J\dot{\theta}\Omega_r + T_x, \\
I_{yy}\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx}) + J\dot{\phi}\Omega_r + T_y, \\
I_{zz}\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}(I_{xx} - I_{yy}) + T_z.
\end{aligned} \tag{54}$$

El modelo dinámico general de un cuadracóptero con los movimientos en el plano x, y, z además de sus ángulos de orientación (“*roll*”, “*pitch*”, “*yaw*”), se describe a continuación, ver por ejemplo (Bouabdallah *et al.*, 2004), (Bouabdallah y Siegwart, 2005), (Bouabdallah, 2007) y (Swarup y Sudhir, 2014) (Para más detalle ver el apéndice B):

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta}\Omega + \frac{l}{I_x} U_2, \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi}\Omega + \frac{l}{I_y} U_3, \\
\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{l}{I_z} U_4, \\
\ddot{z} &= -g + (\cos\phi \cos\theta) \frac{1}{m} U_1, \\
\ddot{x} &= (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) \frac{1}{m} U_1, \\
\ddot{y} &= (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) \frac{1}{m} U_1.
\end{aligned} \tag{55}$$

Las primeras tres ecuaciones hacen referencia a la orientación del cuadracóptero $(\phi, \theta, \psi)^T$, las segundas tres ecuaciones hacen referencia a la posición del cuadracóptero con respecto al origen del marco inercial $(x, y, z)^T$.

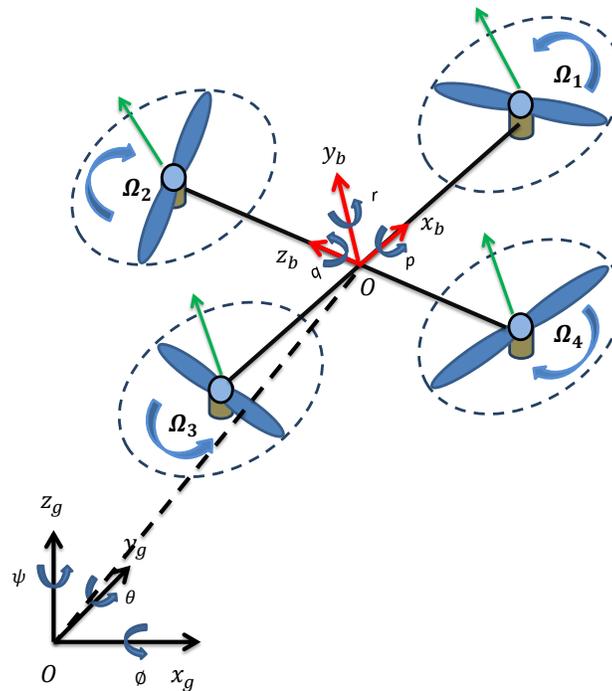


Figura 24. Cuadracóptero con respecto al marco inercial.

En la figura 24 se ilustra el esquema del cuadracóptero con respecto al marco inercial de

origen. Las entradas del sistema están denotadas por U_1, U_2, U_3, U_4 y Ω es una perturbación, las cuales corresponden a la siguiente descripción:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \\
 U_2 &= b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \\
 U_3 &= b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \\
 U_4 &= d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \\
 \Omega &= \Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3,
 \end{aligned} \tag{56}$$

donde $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ y Ω_4 son las velocidades angulares de las hélices en cada motor.

El modelo dinámico descrito en (55) se puede reescribir en espacio de estados de la forma

$$\dot{X} = f(X, U), \tag{57}$$

introduciendo un vector de estados.

$$X = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}, x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T, \tag{58}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \phi, & x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\phi}, \\
 x_3 &= \theta, & x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{\theta}, \\
 x_5 &= \psi, & x_6 &= \dot{x}_5 = \dot{\psi}, \\
 x_7 &= z, & x_8 &= \dot{x}_7 = \dot{z}, \\
 x_9 &= x, & x_{10} &= \dot{x}_9 = \dot{x}, \\
 x_{11} &= y, & x_{12} &= \dot{x}_{11} = \dot{y}.
 \end{aligned} \tag{59}$$

De las ecuaciones (55) y (59) se obtiene finalmente el modelo dinámico del cuadracóptero en

espacio de estados,

$$\dot{X} = f(X, U) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 x_6 a_1 + x_4 a_2 \Omega + b_1 U_2 \\ x_4 \\ x_2 x_6 a_3 + x_2 a_4 \Omega + b_2 U_3 \\ x_6 \\ x_4 x_2 a_5 + b_3 U_4 \\ x_8 \\ -g + (\cos x_1 \cos x_3) \frac{1}{m} U_1 \\ x_{10} \\ u_x \frac{1}{m} U_1 \\ x_{12} \\ u_y \frac{1}{m} U_1 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

donde:

$$a_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \quad a_2 = -\frac{J_r}{I_x}, \quad a_3 = \frac{I_z - I_x}{I_y}, \quad a_4 = \frac{J_r}{I_y}, \quad a_5 = \frac{I_x - I_y}{I_z},$$

$$b_1 = \frac{l}{I_x}, \quad b_2 = \frac{l}{I_y}, \quad b_3 = \frac{l}{I_z},$$

$$u_x = (\cos x_1 \operatorname{sen} x_3 \cos x_5 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_5),$$

$$u_y = (\cos x_1 \operatorname{sen} x_3 \cos x_5 - \operatorname{sen} x_1 \cos x_5).$$

Los parámetros físicos del modelo (60) se describen a continuación en la tabla 1.

Tabla 1. Tabla de parámetros físicos del modelo del cuadracóptero (60).

Símbolo	Definición	Valor
m	Masa	0.650 kg
I_x	Inercia en el eje x	$7.5e^{-3} \text{ kgm}^2$
I_y	Inercia en el eje y	$7.5e^{-3} \text{ kgm}^2$
I_z	Inercia en el eje z	$1.3e^{-2} \text{ kgm}^2$
b	Coficiente de empuje	$3.13e^{-3} \text{ N s}^2$
d	Coficiente de arrastre	$7.5e^{-7} \text{ Nm s}^2$
J_r	Inercia del rotor	$6e^{-5} \text{ kgm}^2$
l	Largo del brazo	0.23 m
g	Gravedad	9.8 N/kg

Por último, en la figura 25 se muestra como el sistema puede ser dividido en dos subsistemas interconectados

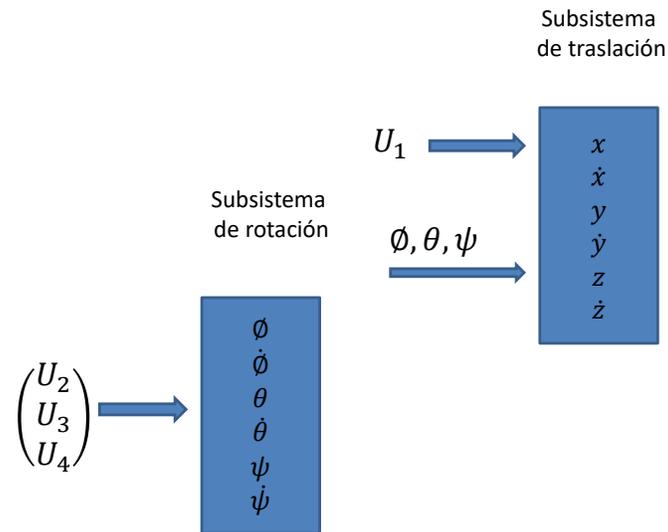


Figura 25. Sistema dinámico dividido en dos subsistemas interconectados.

El subsistema de rotación, cuyas salidas serán los tres ángulos de Tait-Bryan que fijan la orientación del vehículo serán controladas por los tres pares U_2, U_3 y U_4 que permiten girarlo.

El subsistema de traslación, cuyas salidas son la posición del vehículo en el espacio (x, y, z) dependerá del empuje total de U_1 además de la orientación del sistema.

4.5. Control backstepping para seguimiento de trayectorias

En la teoría de control, el backstepping es una técnica desarrollada alrededor de 1990 por Petar V. Kokotovic, Miroslav Krstiv e Ioannis Kanellakopoulos, para diseñar controles estabilizadores para una clase especial de sistemas dinámicos no lineales, ver (Krstic *et al.*, 1995).

En el enfoque backstepping, se diseña la ley de control para que el sistema pueda seguir la trayectoria deseada. Para esto se considera el modelo del cuadracóptero (60). Este se puede dividir en dos subsistemas, uno que es el de orientación y el otro de posición. Debido a que el segundo subsistema es controlado solo por la entrada de control U_1 y el primer subsistema por las entradas

de control U_2, U_3, U_4 , ver la figura 25, en primera instancia se considera la entrada de control para el subsistema de rotaciones angulares y luego se deriva la entrada de control de posición. Se diseña la ley de control para que un cuadracóptero sea capaz de seguir una trayectoria deseada, ver (Bouabdallah *et al.*, 2004), (Bouabdallah, 2007) y (Saif *et al.*, 2012). Para ello, se define una trayectoria deseada en la cual el error de seguimiento está dado por

$$z_1 := x_{1d} - x_1, \quad (61)$$

Derivando (61) se obtiene

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1. \quad (62)$$

Del modelo del cuadracóptero sabemos que $\dot{x}_1 = x_2$. Sustituyendo esto en (62) se obtiene

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2. \quad (63)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2. \quad (64)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1\dot{z}_1. \quad (65)$$

Sustituyendo la ecuación (63) en (65) se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1(\dot{x}_{1d} - x_2). \quad (66)$$

Se considera a x_2 como un control virtual para estabilizar z_1 , de este modo tenemos

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1, \quad (67)$$

donde $\alpha_1 > 0$ para que sea definida negativa la derivada de la función de Lyapunov y sustituyendo (67) en (66) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(z_1) &= z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\ &= z_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1), \\ &= -\alpha_1 z_1^2.\end{aligned}\tag{68}$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1.\tag{69}$$

Derivando (69) se obtiene

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1.\tag{70}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2).\tag{71}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo nos queda

$$\begin{aligned}\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2 \dot{z}_2 + z_1 \dot{z}_1, \\ &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\ &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2).\end{aligned}\tag{72}$$

Despejando x_2 de la ecuación (69) se obtiene $x_2 = z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\
&= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1))) + z_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1)), \\
&= z_2\dot{x}_2 - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2, \\
&= z_2(a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \Omega + b_1 U_2) - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2.
\end{aligned} \tag{73}$$

Considerando que $\ddot{x}_{1d,3d,5d} = 0$ y satisfaciendo que $\dot{V}(z_1, z_2) < 0$ se diseña el control virtual U_2 quedando

$$U_2 = \frac{1}{b_1}(z_1 - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2). \tag{74}$$

El cálculo de las entradas U_3, U_4 y U_1 se pueden calcular utilizando el mismo procedimiento anterior, el cual es mostrado en el Apéndice A y se muestra el cálculo de los siguientes controles virtuales correspondiente a cada una de las entradas:

$$U_3 = \frac{1}{b_2}(z_3 - a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \Omega - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3) - \alpha_4 z_4), \tag{75}$$

$$U_4 = \frac{1}{b_3}(z_5 - a_5 x_2 x_4 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6). \tag{76}$$

La entrada de control para el subsistema de posición es:

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3}(z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) - \alpha_8 z_8 + \ddot{x}_{7d}), \tag{77}$$

$$u_x = \frac{m}{U_1}(z_9 - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10} + \ddot{x}_{9d}), \tag{78}$$

$$u_y = \frac{m}{U_1}(z_{11} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11} z_{11}) - \alpha_{12} z_{12} + \ddot{x}_{11d}), \tag{79}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 z_3 &= x_{3d} - x_3, \\
 z_4 &= x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3, \\
 z_5 &= x_{5d} - x_5, \\
 z_6 &= x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 z_5, \\
 z_7 &= x_{7d} - x_7, \\
 z_8 &= x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 z_7, \\
 z_9 &= x_{9d} - x_9, \\
 z_{10} &= x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 z_9, \\
 z_{11} &= x_{11d} - x_{11}, \\
 z_{12} &= x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11} z_{11}.
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

En el diseño de la ley de control 80, se considera el uso de un solo cuadracóptero, la figura 26 muestra el esquema de funcionamiento del control diseñado.

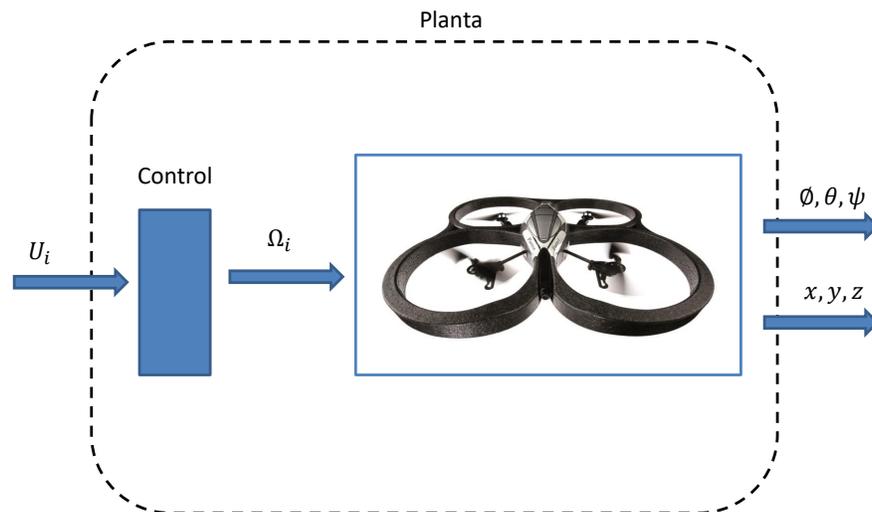


Figura 26. Esquema de control diseñado para el seguimiento de trayectorias de un cuadracóptero.

Por otra parte, dentro de los objetivos principales de esta tesis es el de controlar y formar un grupo de cuadracópteros. Para ello, se presenta el análisis en las siguientes secciones.

4.5.1. Sincronización de cuadracópteros

La sincronización ocurre cuando varios individuos se coordinan para actuar iguales a través del tiempo. El grupo de estos individuos se representa como sigue

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + \mathbf{u}_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (81)$$

donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados correspondiente al eje x , donde se desenvuelve el robot i -ésimo y $\mathbf{u}_i = (u_{ij} \ 0 \ 0)^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entradas de control. Se establece que un grupo de N nodos logra la sincronización completa y asintóticamente si:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (82)$$

donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ representa los estados del nodo i , ver (Wang, 2002).

La comunicación en una topología entre multi-agentes se puede representar directamente o indirectamente mediante un grafo. Donde cada nodo es un agente y las aristas son el sentido de la comunicación que existe entre ellos.

Sincronización de 3 cuadracópteros

Para la realización de la sincronización de tres cuadracópteros, siendo uno de ellos maestro y los otros dos siendo esclavos como se muestra en el grafo de la figura 27.

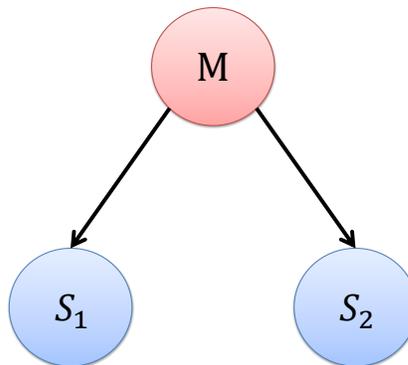


Figura 27. Grafo utilizado para la sincronización.

La sincronización se realizó mediante un acoplamiento en el que los cuadracópteros esclavos sigan al líder, en la cual los estados de los esclavos tenderán a los estados del cuadracóptero líder. Las variables auxiliares para cada cuadracóptero esclavo quedaron de la siguiente forma, para el primer cuadracóptero esclavo S_1 :

$$\begin{aligned}
 z_{13} &= x_1 - x_{13}, \\
 z_{14} &= x_{14} - \dot{x}_1 - \alpha_{13}z_{13}, \\
 z_{15} &= x_3 - x_{15}, \\
 z_{16} &= x_{16} - \dot{x}_3 - \alpha_{15}z_{15}, \\
 z_{17} &= x_5 - x_{17}, \\
 z_{18} &= x_{18} - \dot{x}_5 - \alpha_{17}z_{17}, \\
 z_{19} &= x_7 - x_{19}, \\
 z_{20} &= x_{20} - \dot{x}_7 - \alpha_{19}z_{19}, \\
 z_{21} &= x_9 - x_{21}, \\
 z_{22} &= x_{22} - \dot{x}_9 - \alpha_{21}z_{21}, \\
 z_{23} &= x_{11} - x_{23}, \\
 z_{24} &= x_{24} - \dot{x}_{11} - \alpha_{23}z_{23}.
 \end{aligned} \tag{83}$$

Variables auxiliares para el segundo cuadracóptero esclavo S_2 :

$$\begin{aligned}
 z_{25} &= x_1 - x_{25}, \\
 z_{26} &= x_{26} - \dot{x}_1 - \alpha_{25}z_{25}, \\
 z_{27} &= x_3 - x_{27}, \\
 z_{28} &= x_{28} - \dot{x}_3 - \alpha_{27}z_{27}, \\
 z_{29} &= x_5 - x_{29}, \\
 z_{30} &= x_{30} - \dot{x}_5 - \alpha_{29}z_{29}, \\
 z_{31} &= x_7 - x_{31}, \\
 z_{32} &= x_{32} - \dot{x}_7 - \alpha_{31}z_{31}, \\
 z_{33} &= x_9 - x_{33}, \\
 z_{34} &= x_{34} - \dot{x}_9 - \alpha_{33}z_{33}, \\
 z_{35} &= x_{11} - x_{35}, \\
 z_{36} &= x_{36} - \dot{x}_{11} - \alpha_{35}z_{35}.
 \end{aligned} \tag{84}$$

4.5.2. Formación de cuadracópteros

Para realizar la formación se utilizó un vector $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ en el controlador para cada cuadracóptero esclavo, ver (Martínez Clark, 2014) y (Martínez Clark *et al.*, 2015).

Este vector separa a cada seguidor de su líder mediante una distancia correspondiente a cada eje en el plano (x, y, z) .

Las variables auxiliares para realizar la formación quedaron de la siguiente manera,

Variables auxiliares para el primer cuadracóptero esclavo S_1 :

$$\begin{aligned}
 z_{13} &= x_1 - x_{13}, \\
 z_{14} &= x_{14} - \dot{x}_1 - \alpha_{13}z_{13}, \\
 z_{15} &= x_3 - x_{15}, \\
 z_{16} &= x_{16} - \dot{x}_3 - \alpha_{15}z_{15}, \\
 z_{17} &= x_5 - x_{17}, \\
 z_{18} &= x_{18} - \dot{x}_5 - \alpha_{17}z_{17}, \\
 z_{19} &= x_7 - x_{19} + \Delta_z, \\
 z_{20} &= x_{20} - \dot{x}_7 - \alpha_{19}z_{19}, \\
 z_{21} &= x_9 - x_{21} + \Delta_x, \\
 z_{22} &= x_{22} - \dot{x}_9 - \alpha_{21}z_{21}, \\
 z_{23} &= x_{11} - x_{23} + \Delta_y, \\
 z_{24} &= x_{24} - \dot{x}_{11} - \alpha_{23}z_{23}.
 \end{aligned} \tag{85}$$

Variables auxiliares para el segundo cuadracóptero esclavo S_2 :

$$\begin{aligned}
 z_{25} &= x_1 - x_{25}, \\
 z_{26} &= x_{26} - \dot{x}_1 - \alpha_{25} z_{25}, \\
 z_{27} &= x_3 - x_{27}, \\
 z_{28} &= x_{28} - \dot{x}_3 - \alpha_{27} z_{27}, \\
 z_{29} &= x_5 - x_{29}, \\
 z_{30} &= x_{30} - \dot{x}_5 - \alpha_{29} z_{29}, \\
 z_{31} &= x_7 - x_{31} + \Delta_{z2}, \\
 z_{32} &= x_{32} - \dot{x}_7 - \alpha_{31} z_{31}, \\
 z_{33} &= x_9 - x_{33} + \Delta_{x2}, \\
 z_{34} &= x_{34} - \dot{x}_9 - \alpha_{33} z_{33}, \\
 z_{35} &= x_{11} - x_{35} + \Delta_{y2}, \\
 z_{36} &= x_{36} - \dot{x}_{11} - \alpha_{35} z_{35}.
 \end{aligned} \tag{86}$$

En el siguiente capítulo se mostrarán los resultados numéricos de la formación de un grupo de cuadracópteros conectados como en la figura 27.

Conclusiones del capítulo

Los vehículos aéreos no tripulados (UAVs) son de particular interés debido a sus amplias aplicaciones potenciales, como por ejemplo en operaciones de búsqueda y rescate, tareas de inspección y reconocimiento en el ámbito militar, civil y agrícola. Un problema de interés es la formación de UAVs con el fin de hacer que se desplacen uniformemente y preservar al mismo tiempo un grupo compacto, esto reduce el costo de energía utilizada para trasladarse, aumenta la robustez y eficiencia de la tarea realizada. El cuadracóptero tiene la ventaja de despegar y aterrizar verticalmente, acceso a zonas de alto riesgo o aisladas, así como a grandes elevaciones.

Capítulo 5. Resultados numéricos

En este quinto capítulo de la tesis, se reportan algunas simulaciones con el modelo del cuadracóptero que se presentó en el capítulo anterior, también se realiza la sincronización y formación de un grupo de cuadracópteros.

Para las siguientes simulaciones realizadas se utilizó el modelo dinámico del cuadracóptero (60) y los parámetros de la tabla 1. Se utiliza la ley de control diseñada en el capítulo anterior para llevar un cuadracóptero a una posición deseada, en este caso: $x_d = 2m$, $y_d = 2m$ y $z_d = 2m$, las condiciones iniciales del cuadracóptero son $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0, 0, 0)$, además que los ángulos de orientación $(\phi_1(0), \theta_1(0), \psi_1(0)) = (0, 0, 0)$. La simulación se muestran en las figuras 28 y 29.

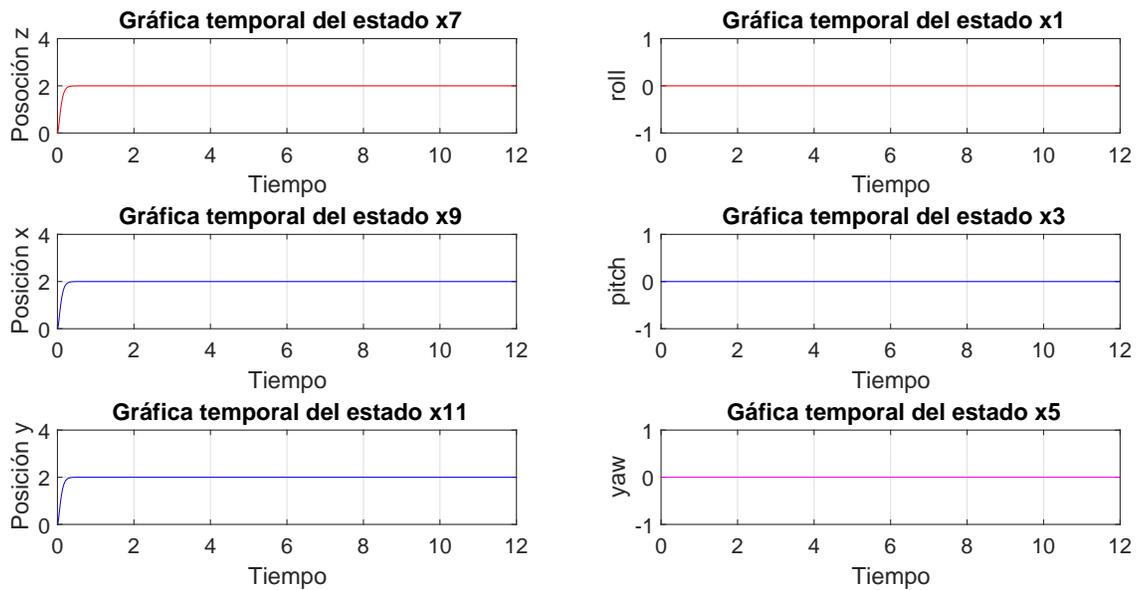


Figura 28. Respuesta de los estados del cuadracóptero.

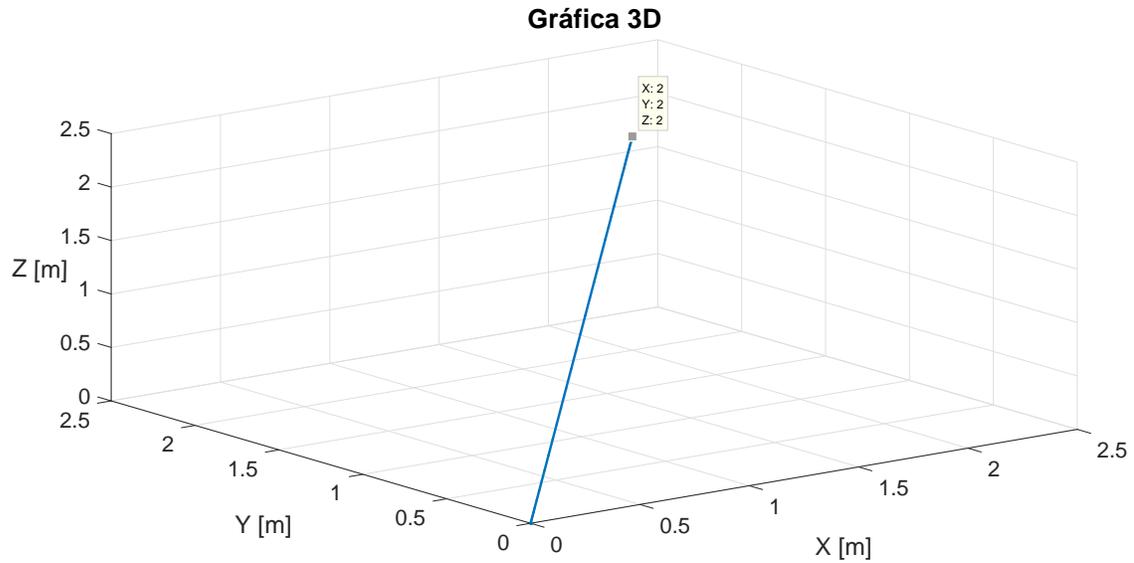


Figura 29. Cuadracóptero en la posición deseada.

También, se propone que siga una trayectoria de un círculo con radio de 3 metros a una altura de 2 metros. La trayectoria deseada quedo definida por $x_d = 3\cos(\pi t)$, $y_d = 3\sin(\pi t)$ y $z_d = 2m$, se utilizaron las mismas condiciones iniciales del ejemplo anterior, tanto en posición como en orientación. En las figuras 30 y 31 se puede observar que el cuadracóptero llega a la trayectoria deseada.

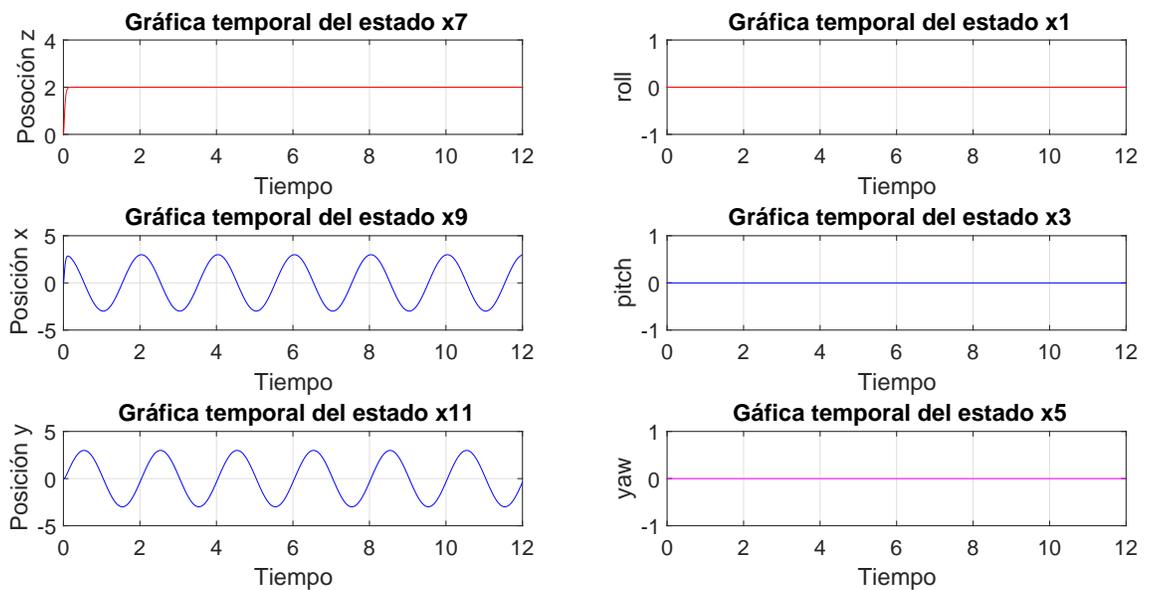


Figura 30. Respuesta de los estados del cuadracóptero.

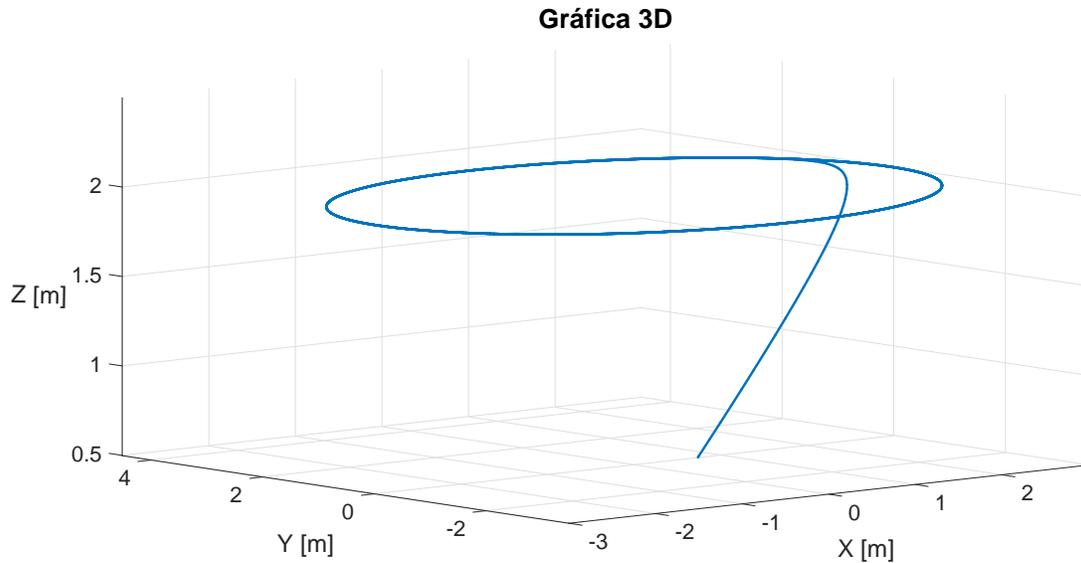


Figura 31. Cuadracóptero en la trayectoria deseada.

Ahora se procederá a hacer una simulación tomando en cuenta 3 cuadracópteros, uno siendo el líder y los otros son los esclavos. Para ellos, primero se mostrará que están sincronizados, es decir, que los estados de los esclavos convergen a los estados del cuadracóptero maestro. Se desea que los cuadracópteros lleguen a dos posiciones deseadas, en este caso la primera posición es $x_d = 2m, y_d = 2m, z_d = 2m$, posteriormente de haber llegado a esta posición, se desea que siga a la segunda posición $x_d = 5m, y_d = 2m, z_d = 2m$, el líder empieza de la posición inicial $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0, 0, 0)$ con los ángulos de orientación en $(\phi_1(0), \theta_1(0), \psi_1(0)) = (0, 0, 0)$ los cuadracópteros esclavos inician en otra posición, el primero en la posición $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0, 0.5, 0)$ el segundo en la posición $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (0, -0.5, 0)$, además de que los ángulos empiezan también en la posición $(0, 0, 0)$ para ambos cuadracópteros esclavos. En la figura 32 se observa la sincronización de los cuadracópteros a la posición deseada.

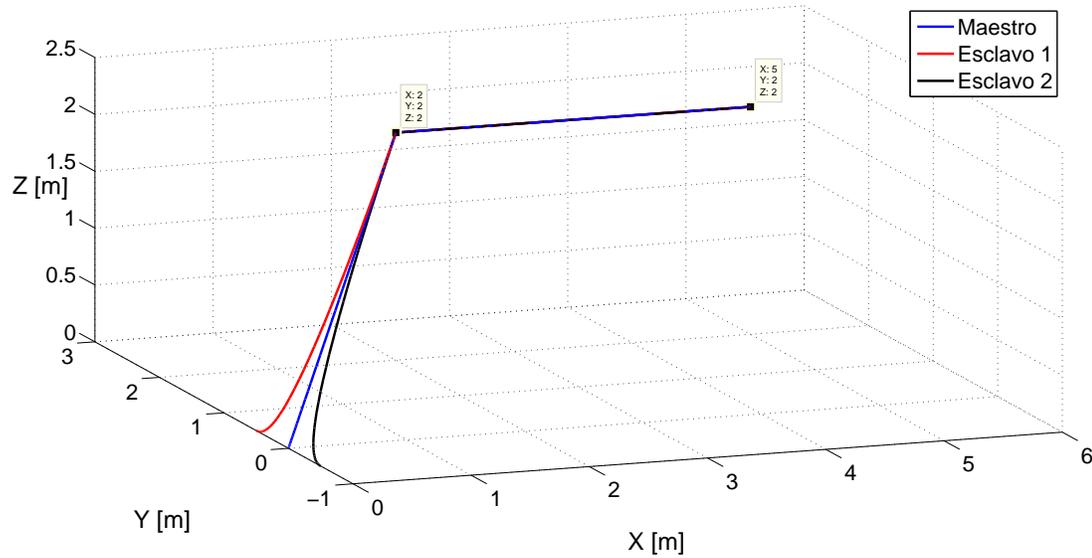


Figura 32. Seguimiento de los cuadracópteros esclavos S_1 y S_2 al cuadracóptero líder a una posición deseada.

Se realiza una nueva simulación, donde el objetivo de control es que sigan una trayectoria deseada, la cual, es un círculo de radio 3 metros a una altura de 2 metros donde $x_d = 3\cos(\pi t)$, $y_d = 3\sin(\pi t)$, $z_d = 2m$, las condiciones iniciales son $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0, 0, 0)$ con los ángulos de orientación en $(\phi_1(0), \theta_1(0), \psi_1(0)) = (0, 0, 0)$ los cuadracópteros esclavos inician en otra posición, el primero en la posición $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0, 0.5, 0)$ el segundo en la posición $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (0.5, 0, 0)$, además de que los ángulos empiezan también en la posición $(0, 0, 0)$ para ambos cuadracópteros esclavos. En la figura 33 se observa la sincronización de los cuadracópteros a la trayectoria deseada.

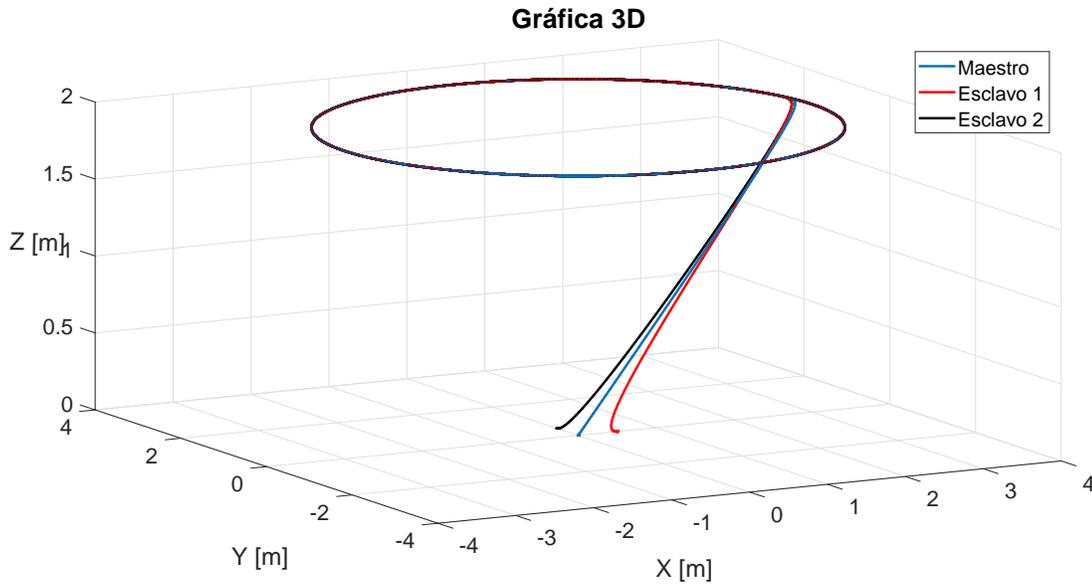


Figura 33. Seguimiento de los esclavos al líder a una trayectoria deseada.

Para separar a los cuadracópteros en el espacio, se realiza una simulación donde los cuadracópteros esclavos se desean separar del cuadracóptero maestro por una distancia $\Delta_x = 0.4$ metros para el eje x , las condiciones iniciales para el cuadracóptero maestro de $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$, para el primer esclavo las condiciones son $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.5, 0)$, para el segundo cuadracóptero esclavo sus condiciones iniciales son $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, -0.5, 0)$ respectivamente en el eje x, y, z . El desplazamiento en el plano (x, y) se muestra en la figura 34 y el desplazamiento en el eje x con respecto al tiempo se puede observar en la figura 35.

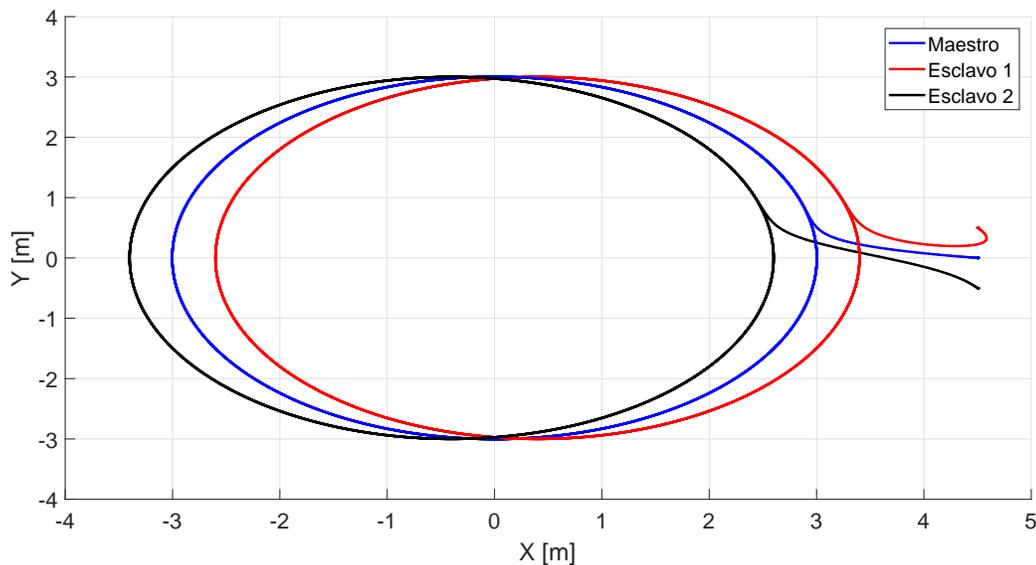


Figura 34. Cuadracópteros separados en el eje x .

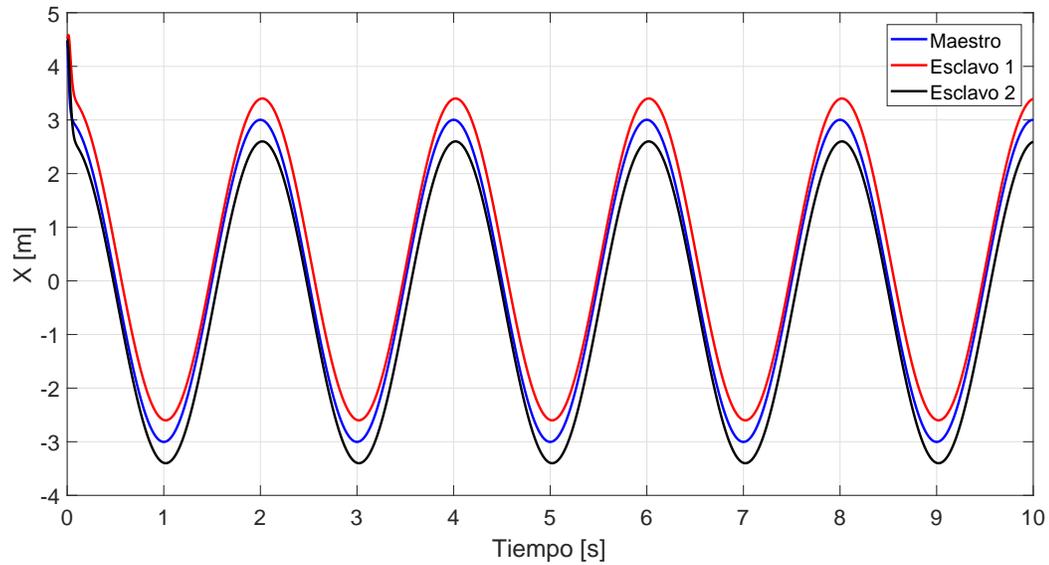


Figura 35. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.

Ahora se procederá a dar una distancia $\Delta_y = 0.4 \text{ m}$ entre los cuadracópteros esclavos y el maestro correspondiente para el eje y . El desplazamiento en el plano (x, y) se muestra en la figura 36 y el desplazamiento en el eje y con respecto al tiempo se puede observar en la figura 37.

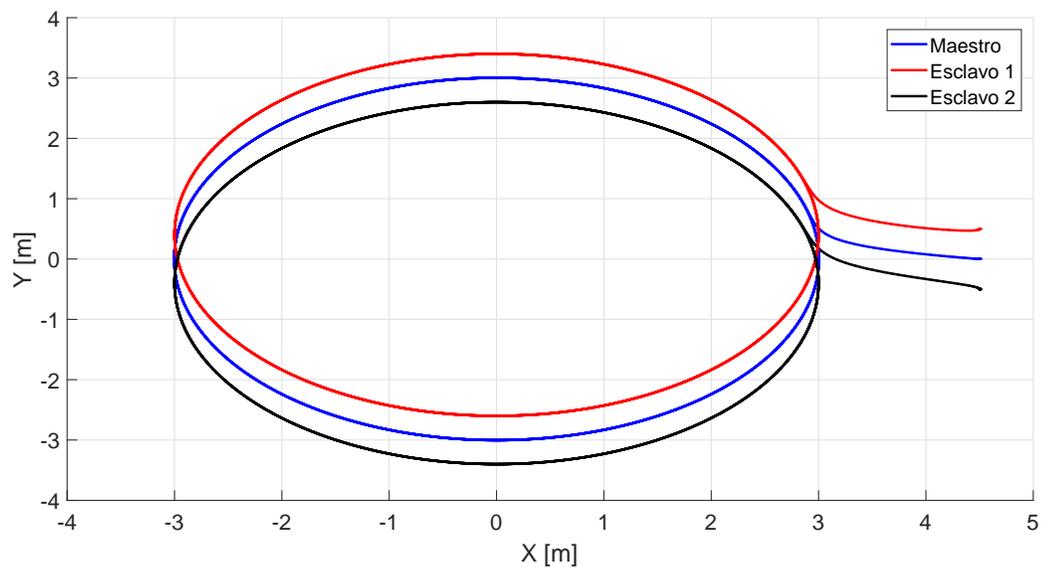


Figura 36. Cuadracópteros separados en el eje y .

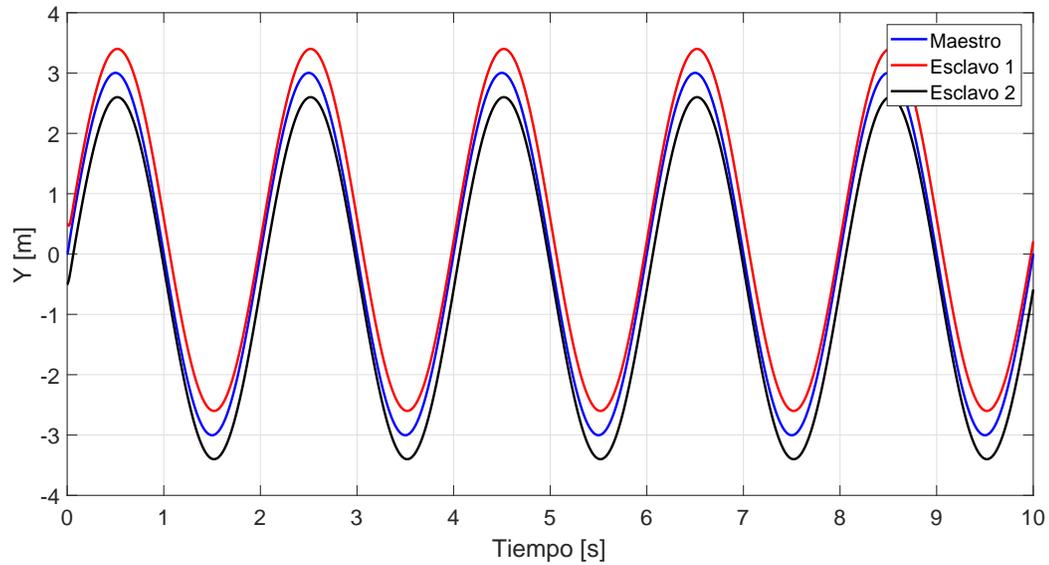


Figura 37. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.

A continuación se realizará la separación mediante una $\Delta_x, \Delta_y = 0.4 \text{ m}$ para cada uno de los cuadracópteros esclavos, el desplazamiento en el plano (x, y) se muestra en la figura 38, el desplazamiento en el eje y con respecto al tiempo se puede observar en la figura 39 y el desplazamiento en el eje x con respecto al tiempo se puede observar en la figura 40.

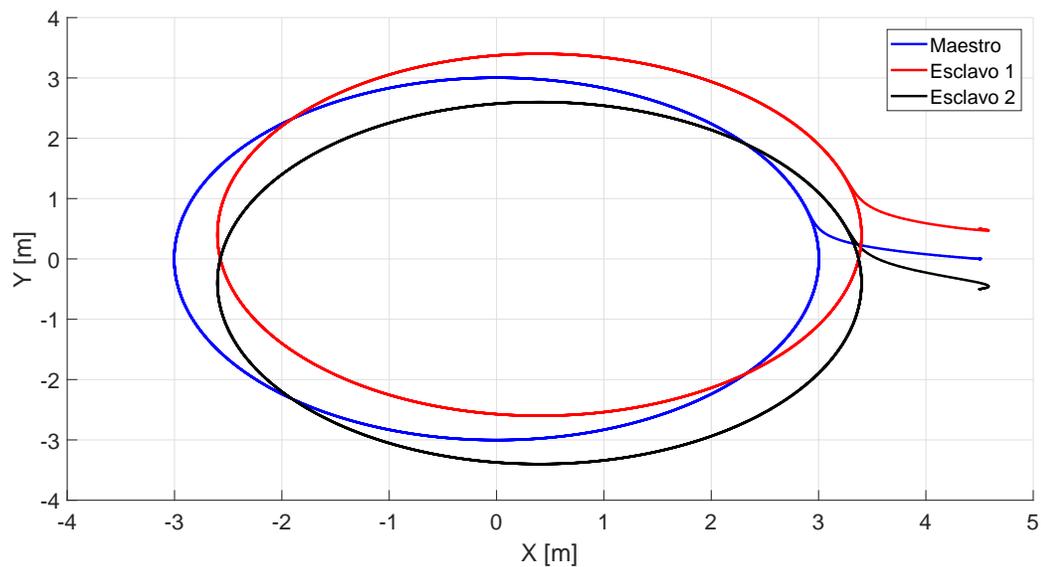


Figura 38. Cuadracópteros separados en el eje x y y .

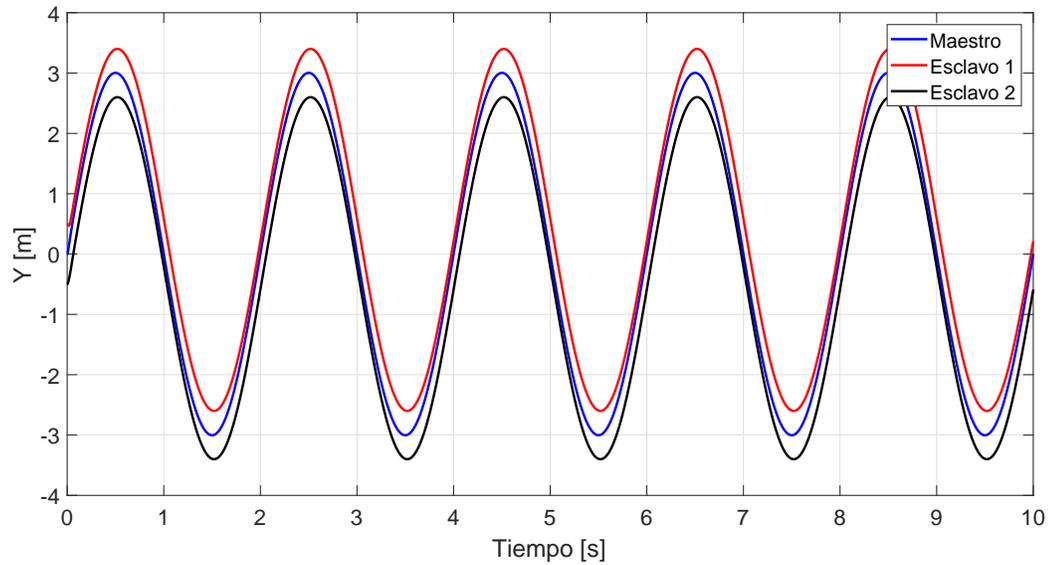


Figura 39. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.

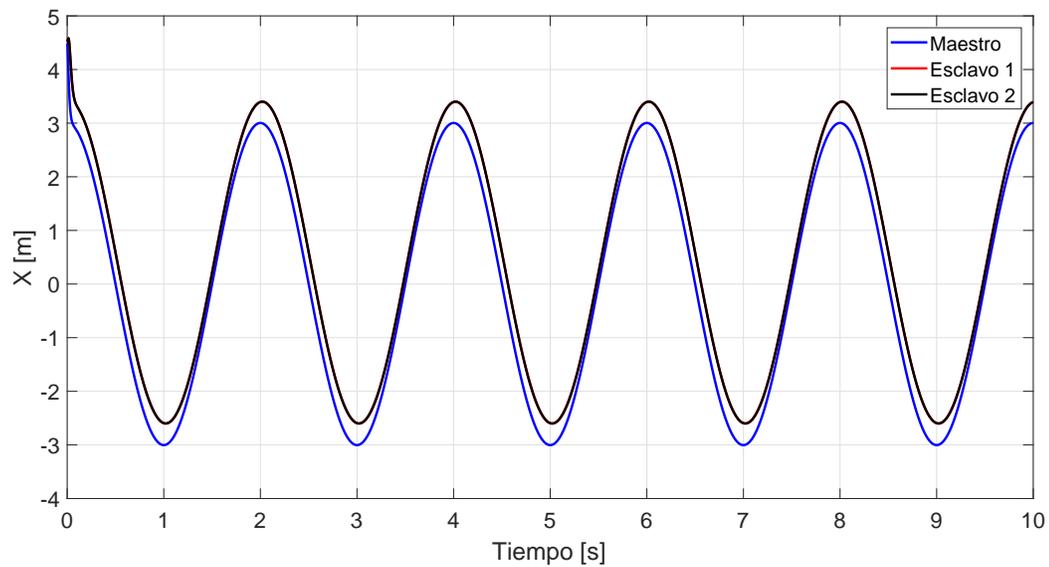


Figura 40. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.

En la figura 40 se pueden ver solo dos líneas, en la cual, una corresponde a la trayectoria del cuadracóptero maestro y la otra es la trayectoria de los esclavos que se encuentran encimadas ya que se encuentran a la misma distancia de separación del cuadracóptero líder.

A continuación se realiza otra simulación con las condiciones iniciales para el cuadracóptero maestro de $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (5, 0, 0)$, para el primer cuadracóptero esclavo las condiciones son $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (5, 0.5, 0)$, para el segundo cuadracóptero esclavo sus condiciones ini-

ciales son $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (5, -0.5, 0)$ respectivamente en el eje x, y, z . Se propone una separación Δ con las componentes $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z = 0.4 \text{ m}$ para los esclavos. El primer cuadracóptero esclavo inicia después de 25 segundos de haber empezado a moverse el cuadracóptero líder, el segundo cuadracóptero esclavo inicia a moverse después de 35 segundos.

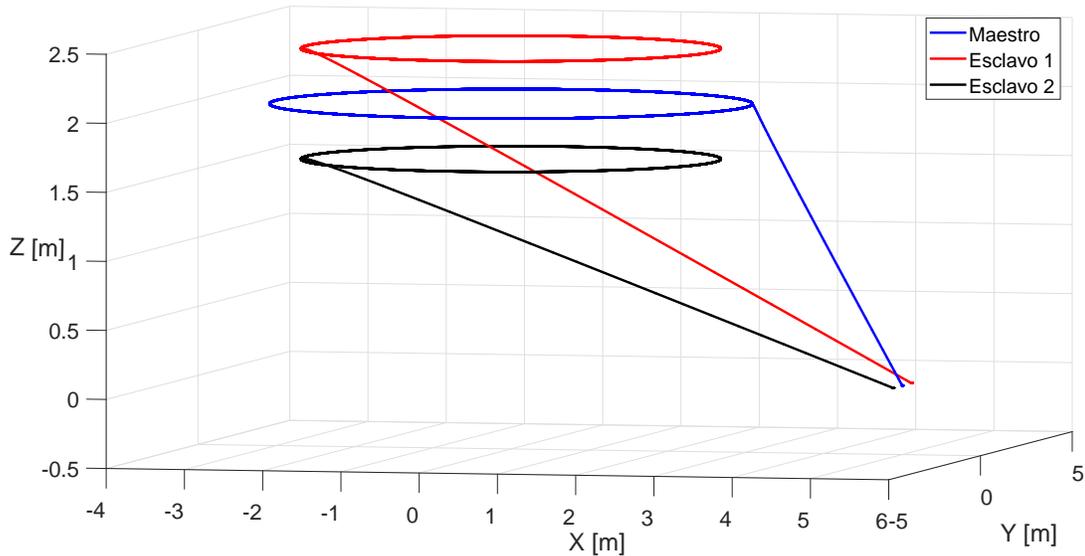


Figura 41. Cuadracópteros separados en el eje x, y, z .

El desplazamiento de los cuadracópteros en el espacio se puede ver en la figura 41, el desplazamiento del cuadracóptero líder y los cuadracópteros esclavos en el eje x con respecto al tiempo se puede observar en la figura 42.

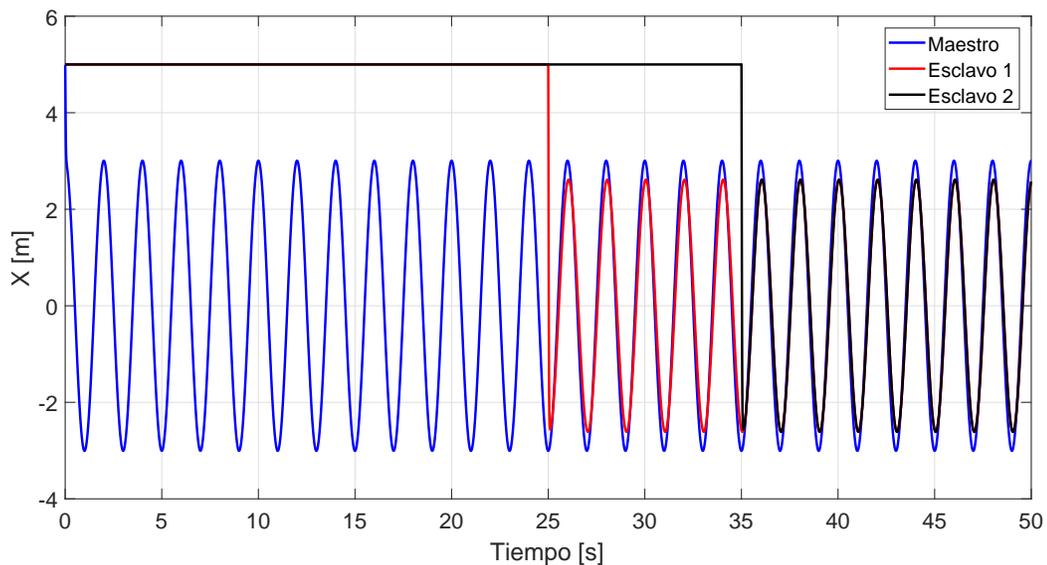


Figura 42. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.

El desplazamiento del cuadracóptero líder y los cuadracópteros esclavos en el eje y con respecto al tiempo se puede observar en la figura 43 y el desplazamiento correspondiente en el eje z se observa en la figura 44.

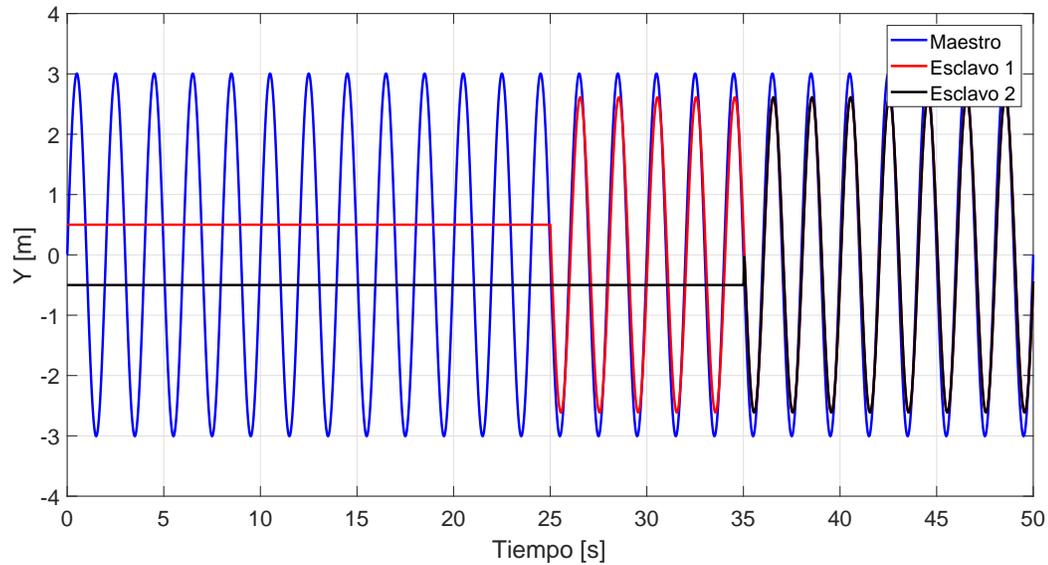


Figura 43. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.

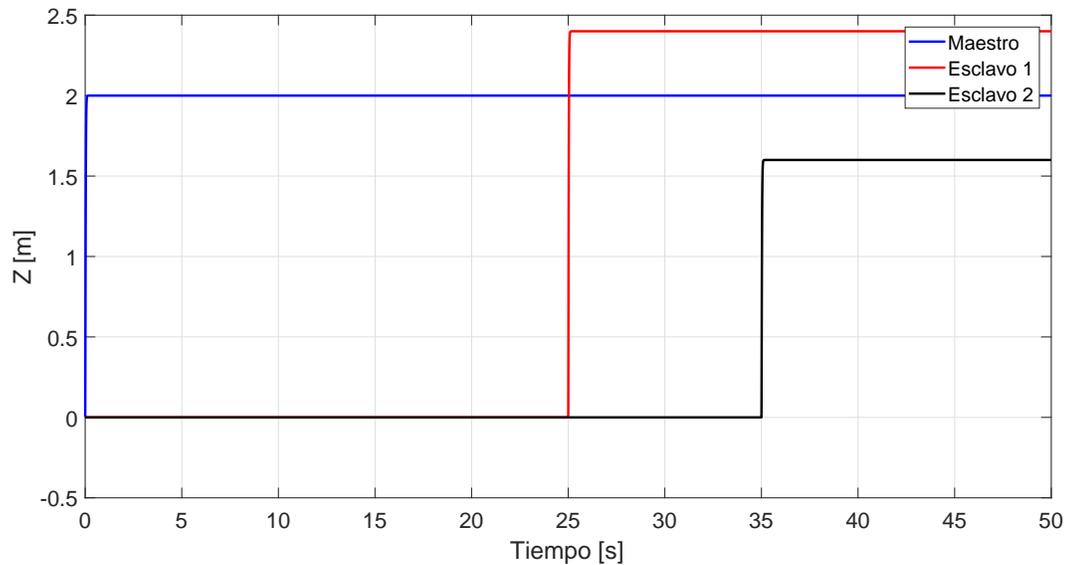


Figura 44. Cuadracópteros separados en el eje z con respecto al tiempo.

Ahora se realiza otra simulación, donde las condiciones iniciales para el cuadracóptero maestro son $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (5, 0, 0)$, para el primer cuadracóptero esclavo las condiciones iniciales son $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (5, 0.5, 0)$, para el segundo cuadracóptero esclavo las condiciones iniciales son $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (5, -0.5, 0)$ respectivamente en el eje x, y, z . Uno de

los cuadrcópteros esclavos se desea que este separado una distancia Δ con las componentes $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z = 0.4 \text{ m}$ con respecto al líder, el otro cuadrcóptero esclavo se desea con una separación $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z = -0.4 \text{ m}$ con respecto al cuadrcóptero líder. El primer cuadrcóptero esclavo inicia después de 2 segundos de haber empezado a moverse el cuadrcóptero líder, el segundo cuadrcóptero esclavo empieza a moverse después de 4 segundos.

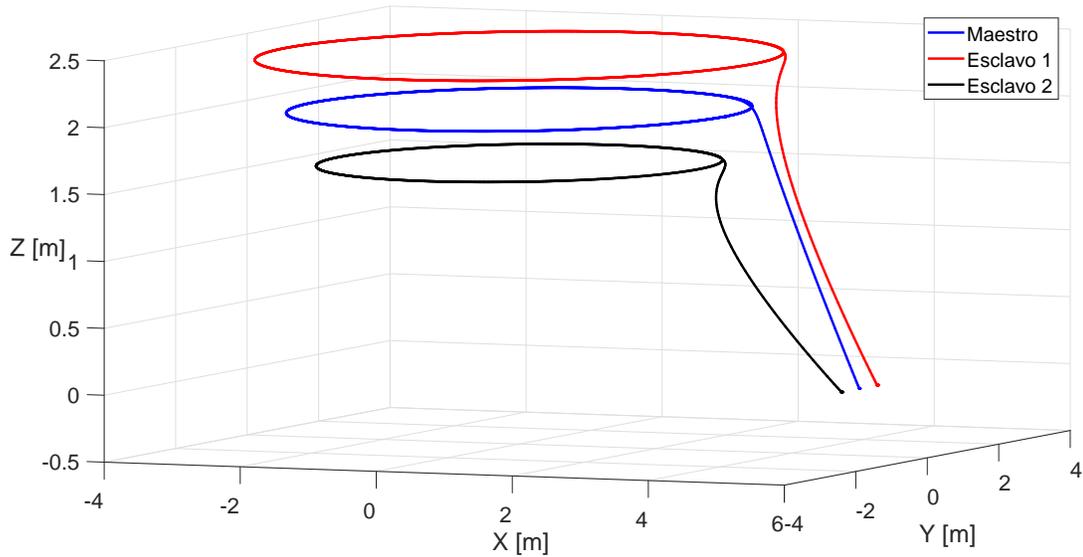


Figura 45. Cuadrcópteros separados en el eje x, y, z .

El desplazamiento de los cuadrcópteros en el espacio se puede ver en la figura 45, el desplazamiento del cuadrcóptero líder y los cuadrcópteros esclavos en el eje x con respecto al tiempo se puede observar en la figura 46.

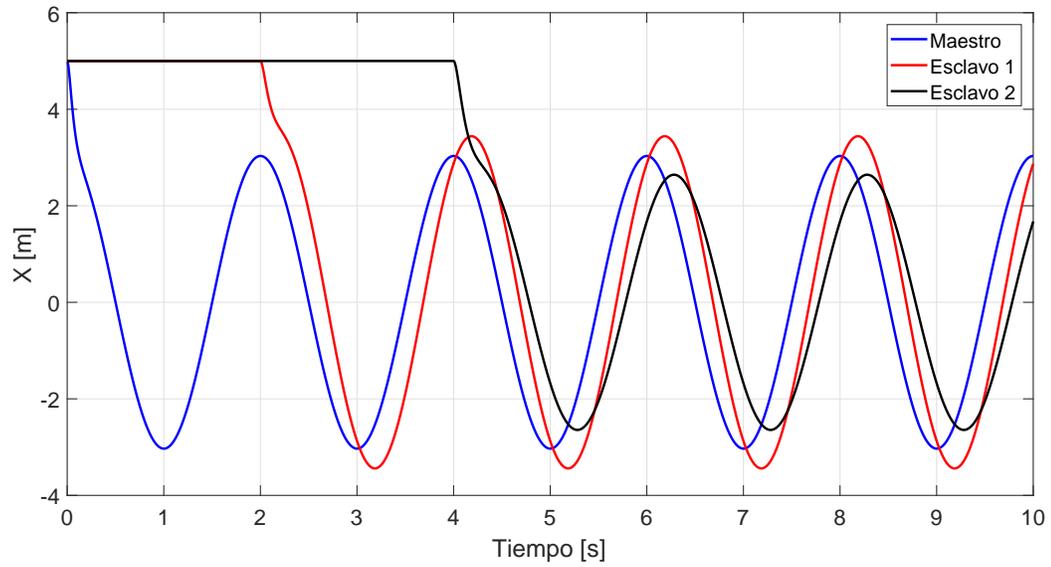


Figura 46. Cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.

El desplazamiento del cuadracóptero líder y los cuadracópteros esclavos en el eje y con respecto al tiempo se puede observar en la figura 47 y el desplazamiento correspondiente en el eje z se observa en la figura 48.

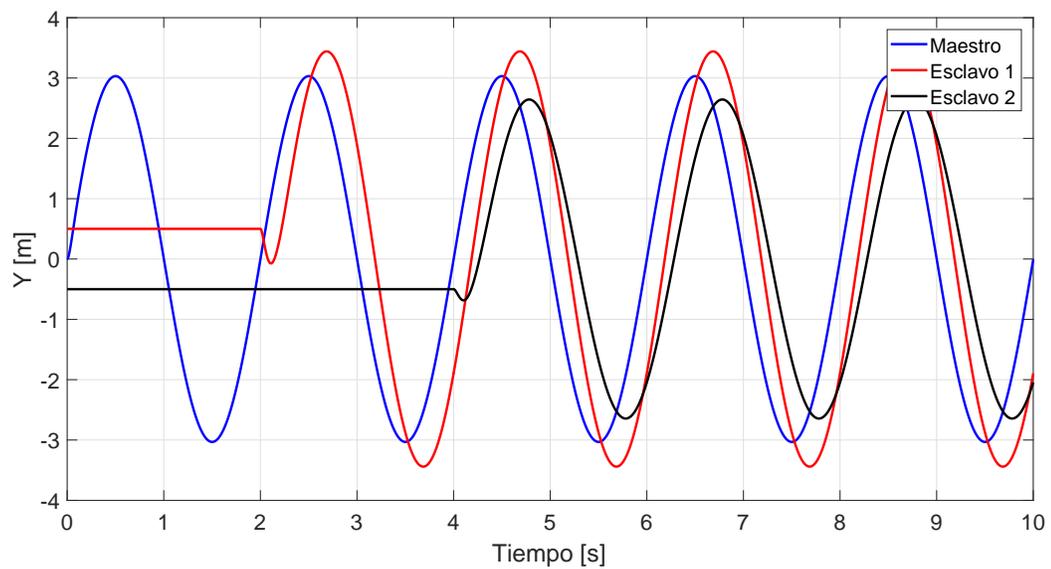


Figura 47. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.

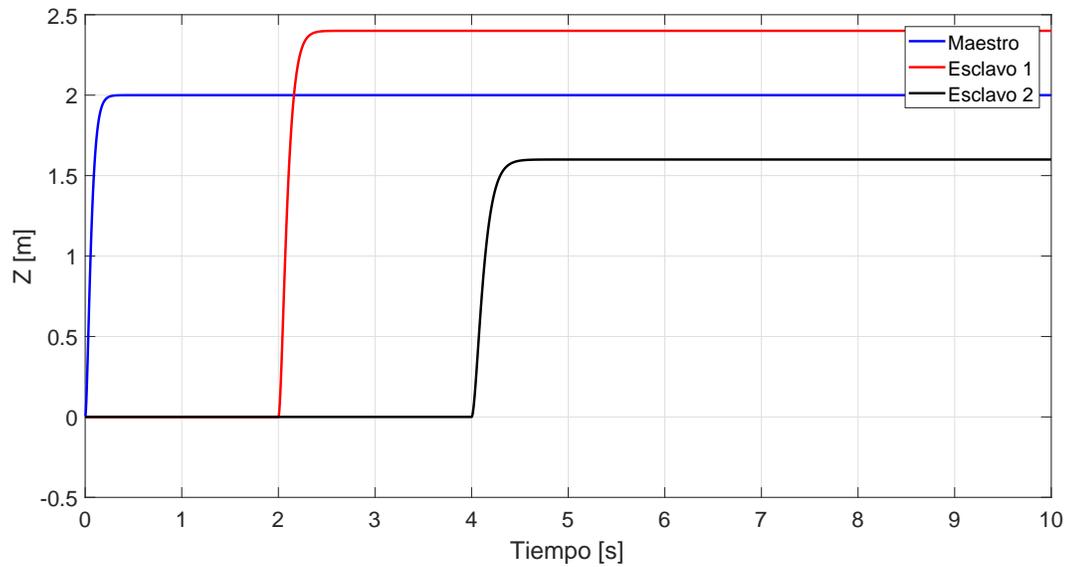


Figura 48. Cuadracópteros separados en el eje z con respecto al tiempo.

Con el fin de verificar el comportamiento de la señal de control, se obtienen las gráficas de cada una de las señales de control correspondientes para cada cuadracóptero. La señal de control U_1 con respecto al tiempo del cuadracóptero líder y de los cuadracópteros esclavos se puede observar en la figura 49.

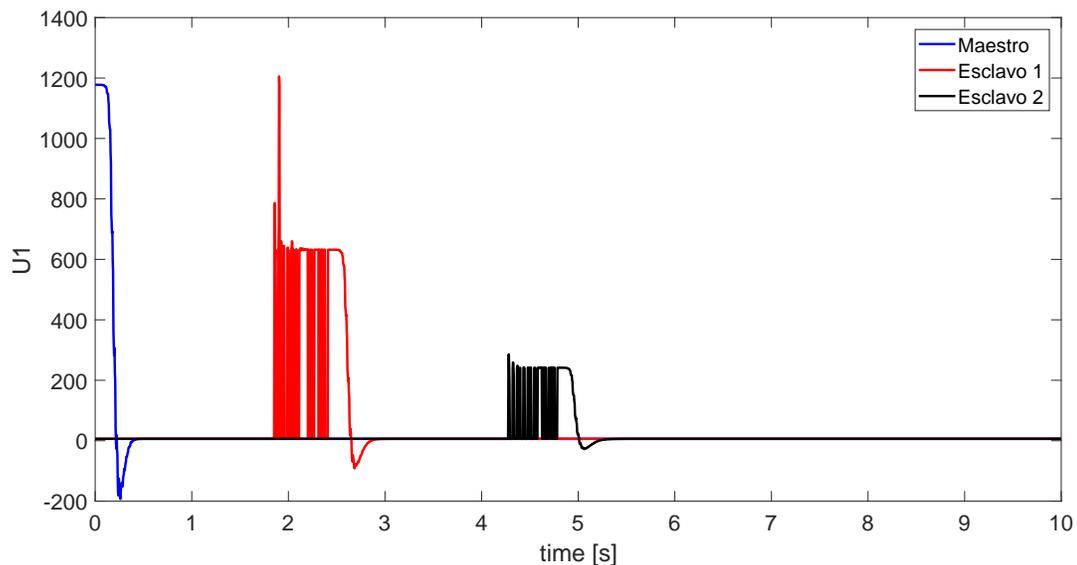


Figura 49. Señal de control U_1 respecto al tiempo.

La señal de control U_2 con respecto al tiempo del cuadracóptero líder y de los cuadracópteros esclavos se puede observar en la figura 50.

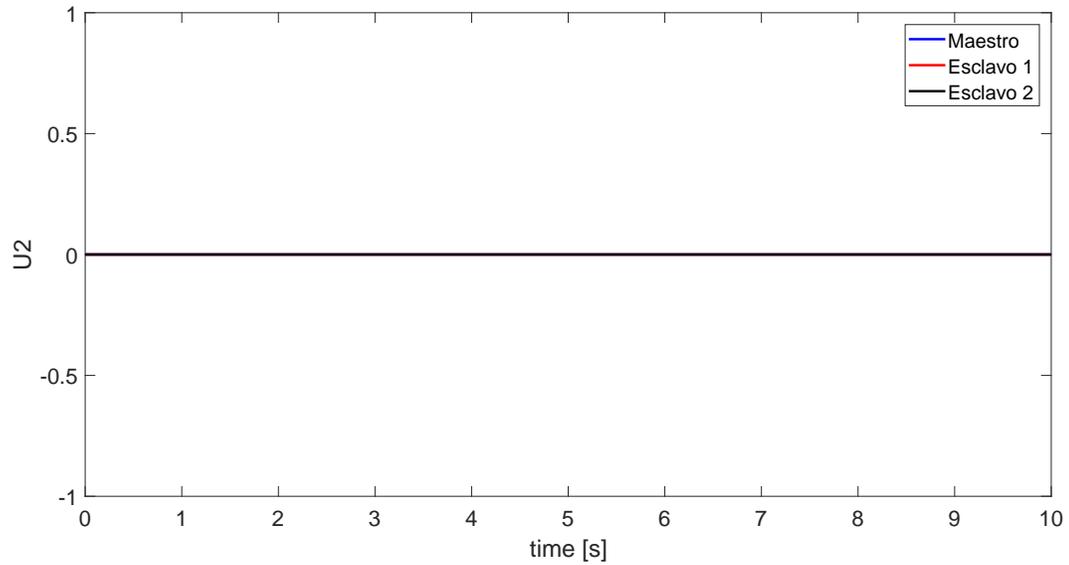


Figura 50. Señal de control U_2 respecto al tiempo.

La señal de control U_3 con respecto al tiempo del cuadracóptero líder y de los cuadracópteros esclavos se puede observar en la figura 51.

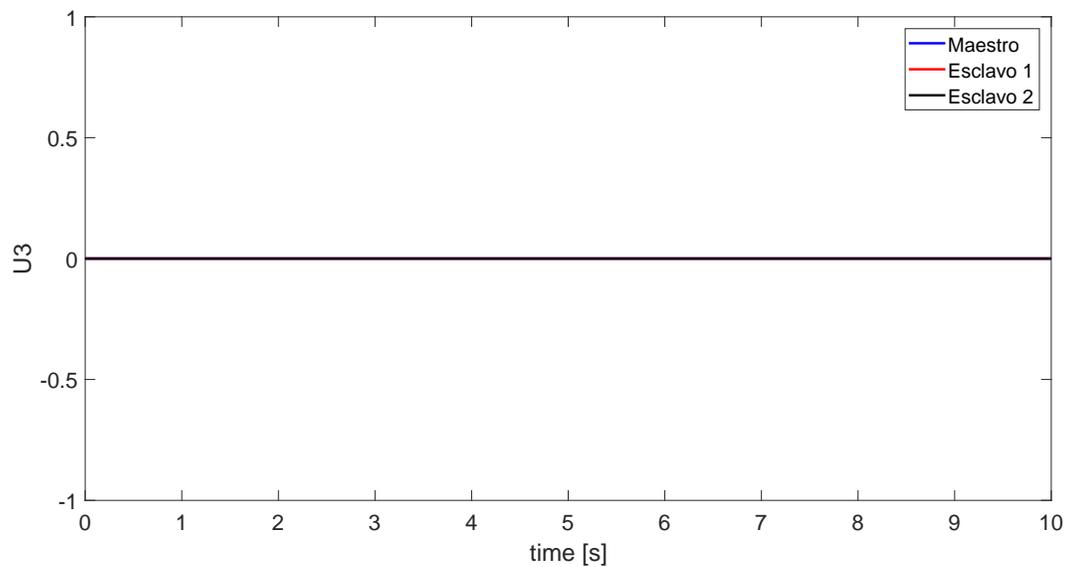


Figura 51. Señal de control U_3 respecto al tiempo.

La señal de control U_4 con respecto al tiempo del cuadracóptero líder y de los cuadracópteros esclavos se puede observar en la figura 52.

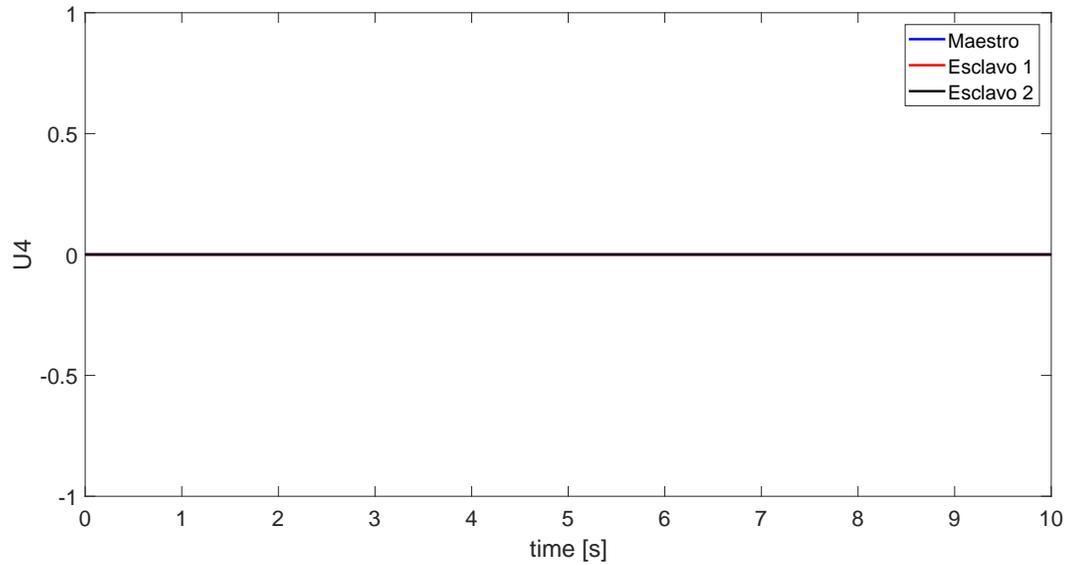


Figura 52. Señal de control U_4 respecto al tiempo.

Conclusiones del capítulo

Los resultados obtenidos con las simulaciones numéricas para la sincronización y la formación con un grupo de 3 cuadracópteros, uno siendo el cuadracóptero líder y los otros dos cuadracópteros esclavos, mostraron que la metodología utilizada y el análisis para afrontar esta problemática que se planteaba en esta tesis fueron adecuados para resolver los objetivos planteados.

Capítulo 6. Conclusiones

En este capítulo final de la tesis, se reportan las principales conclusiones que arrojan los resultados numéricos. También, se habla sobre algunos trabajos futuros que se desprenden de la realización de este trabajo. Con los resultados obtenidos en las simulaciones tanto para la sincronización y formación en grupo de cuadracópteros, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

Para poder llegar a sincronizar los tres cuadracópteros se tomó en cuenta que la comunicación entre ellos es unidireccional, es decir, un cuadracóptero es el líder.

La ley de control diseñada fue utilizando un controlador no lineal Backstepping, el cual, fue capaz de llevar al cuadracóptero líder a la trayectoria deseada y que los cuadracópteros esclavos pudieran seguir los estados del cuadracóptero líder.

Para la formación del grupo de cuadracópteros se usó un vector $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ en cada cuadracóptero esclavo. Este vector separa a cada seguidor de su líder una distancia correspondiente a cada eje en el plano (x, y, z) .

Las ganancias α_i para cada controlador tiene que ser elegidas adecuadamente con el propósito de que el transitorio sea pequeño, si estos parámetros no se eligen adecuadamente, la respuesta de los cuadracópteros será más lenta, lo que provoca que tarden más en llegar a la trayectoria deseada.

Trabajo futuro

Se desea realizar experimentos en el Laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos con los drones que se adquirieron para su posible implementación, ya que las simulaciones de los controladores implementados arrojaron buenos resultados.

Probar otras leyes de control diferentes a la utilizada en esta tesis para comparar la respuesta de los drones en experimentos, todo esto con ayuda de las cámaras para obtener la posición en tiempo real de los drones.

Diseñar un sistema anticollisiones con el fin de evitar que los cuadracópteros sufran algún posible daño.

Implementar la formación de cuadracópteros experimentalmente para una labor en específico

ya sea de exploración, patrullaje, transporte o rescate dentro del laboratorio.

Literatura citada

- Abbas, R. y Wu, Q. (2013). Formation tracking for multiple quadrotor based on sliding mode and fixed communication topology. En: *Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics (IHMSC), 2013 5th International Conference on*. IEEE, Vol. 2, pp. 233–238.
- Adleman, L. M. (1998). Computing with DNA. *Scientific American*, **279**(8): 34–41.
- Alvarez, A. C. (1997). *Complejidad y caos guía para la administración del siglo XXI*. Ediciones Castillo.
- Bar-Yam, Y. (1997). *Dynamics of complex systems*, Vol. 213. Addison-Wesley Reading, MA.
- Beckers, R., Deneubourg, J.-L., y Goss, S. (1992). Trails and u-turns in the selection of a path by the ant *Iasius niger*. *Journal of theoretical biology*, **159**(4): 397–415.
- Bouabdallah, S. (2007). *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. Tesis de doctorado, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausana.
- Bouabdallah, S. y Siegwart, R. (2005). Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. En: *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on IEEE*. pp. 2247–2252.
- Bouabdallah, S., Murrieri, P., y Siegwart, R. (2004). Design and control of an indoor micro quadrotor. En: *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*. IEEE, Vol. 5, pp. 4393–4398.
- Castillo, P., García, P., Lozano, R., y Albertos, P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, **4**(1): 41–57.
- Cetina Denis, J. J. (2017). *Diseño de trayectorias caóticas en robots móviles*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Couzin, I. D., Krause, J., James, R., Ruxton, G. D., y Franks, N. R. (2002). Collective memory and spatial sorting in animal groups. *Journal of Theoretical Biology*, **218**(1): 1–11.
- Deng, Z. y Zhang, Y. (2007). Collective behavior of a small-world recurrent neural system with scale-free distribution. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **18**(5): 1364–1375.
- Dong, X., Zhou, Y., Ren, Z., y Zhong, Y. (2017). Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **64**(6): 5014–5024.
- Fu, K., Gonzales, R., y Lee, C. (1987). *Robotics: Control, sensing, vision, and intelligence*. mc-grawhill. Inc., Singapore.
- Ivanov, D., Kalyaev, I., y Kapustyan, S. (2014). Method of circles for solving formation task in a group of quadrotor uavs. En: *Systems and Informatics (ICSAI), 2014 2nd International Conference on*. IEEE, pp. 236–240.
- Köksal, N., Fidan, B., y Büyükkabasakal, K. (2015). Real-time implementation of decentralized adaptive formation control on multi-quadrotor systems. En: *Control Conference (ECC), 2015 European*. IEEE, pp. 3162–3167.
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I., y Kokotovic, P. V. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley.

- Lakin, M. R., Youssef, S., Cardelli, L., y Phillips, A. (2012). Abstractions for DNA circuit design. *Journal of The Royal Society Interface*, **9**(68): 470–486.
- López Parra, A. (2017). *Formación en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Martínez Clark, R. (2014). *Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Martínez Clark, R., Cruz Hernández, C., Reyes De la Cruz, D., Arellano Delgado, A., y Pinedo Lomelí, L. F. (2015). Formación de agentes: una aplicación al patrullaje. *Congreso Nacional de Control Automático AMCA*, pp. 483–488.
- Munné, F. (2005). ¿qué es la complejidad? what's complexity? *Encuentros de psicología social*, **3**(2): 6–17.
- Ottino, J. M. (2003). Complex systems. *AIChE Journal*, **49**(2): 292–299.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2003). *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Vol. 12. Cambridge University Press.
- Saif, A., Dhaifullah, M., Al-Malki, M., y Shafie, M. (2012). Modified backstepping control of quadrotor. En: *9th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD)*. pp. 1–6.
- Sumpter, D. J. (2006). The principles of collective animal behaviour. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, **361**(1465): 5–22.
- Sumpter, D. J. (2010). *Collective animal behavior*. Princeton University Press.
- Swarup, A. y Sudhir (2014). Comparison of quadrotor performance using backstepping and sliding mode control. *International Conference on Circuits, Systems and Control*, **1**(1): 79–82.
- Wang, X. F. (2002). Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(05): 885–916.
- Watts, D. J. y Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, **393**(6684): 440.
- Yu, B., Dong, X., Shi, Z., y Zhong, Y. (2013). Formation control for quadrotor swarm systems: Algorithms and experiments. En: *Control Conference (CCC), 2013 32nd Chinese*. IEEE, pp. 7099–7104.

Apéndice A

En este anexo se presenta como se obtuvieron las entradas de control que se reportaron en el capítulo 4, siguiendo la misma metodología del diseño de control backstepping para el seguimiento de trayectorias de un cuadracóptero. Para ello, se define una trayectoria deseada, en la cual, el error de seguimiento está dado por

$$z_1 := x_{1d} - x_1, \quad (87)$$

Derivando la expresión (87) se obtiene

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1. \quad (88)$$

Del modelo del cuadracóptero (60) sabemos que $\dot{x}_1 = x_2$. Sustituyendo esto en (88) se obtiene

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2. \quad (89)$$

Ahora, se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de z_1 ,

$$V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2. \quad (90)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1 \dot{z}_1. \quad (91)$$

Sustituyendo la ecuación (89) en (91) se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1(\dot{x}_{1d} - x_2). \quad (92)$$

Se considera a x_2 como un control virtual para estabilizar z_1 , de este modo tenemos

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1, \quad (93)$$

donde $\alpha_1 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (93) en (92) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(z_1) &= z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\ &= z_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1), \\ &= -\alpha_1 z_1^2.\end{aligned}\tag{94}$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1.\tag{95}$$

Derivando la expresión (95) se obtiene

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1.\tag{96}$$

Ahora, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de (z_1, z_2) ,

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2).\tag{97}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2 \dot{z}_2 + z_1 \dot{z}_1, \\ &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\ &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2).\end{aligned}\tag{98}$$

Despejando x_2 de la ecuación (95) se obtiene $x_2 = z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1$, con esto tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\
&= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1))) + z_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1)), \\
&= z_2\dot{x}_2 - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2, \\
&= z_2(a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \Omega + b_1 U_2) - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2.
\end{aligned} \tag{99}$$

Se considera a U_2 como un control virtual para estabilizar z_2 , de este modo tenemos

$$U_2 = \frac{1}{b_1}(z_1 - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2), \tag{100}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (100) en (99) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\
&= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1))) + z_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1)), \\
&= z_2\dot{x}_2 - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2, \\
&= z_2(a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \Omega + b_1(\frac{1}{b_1}(z_1 - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2))) \\
&\quad - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2, \\
&= -\alpha_1 z_1^2 - \alpha_2 z_2^2.
\end{aligned} \tag{101}$$

Se sigue diseñando el control para seguimiento de trayectorias y se define a

$$z_3 = x_{3d} - x_3, \tag{102}$$

Derivando la expresión (102) se obtiene

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_{3d} - \dot{x}_3. \tag{103}$$

Del modelo del cuadracóptero (60) sabemos que $\dot{x}_3 = x_4$. Sustituyendo esto en (103) se obtiene

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_{3d} - x_4. \quad (104)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de z_3

$$V(z_1) = \frac{1}{2}z_3^2. \quad (105)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_3) = z_3\dot{z}_3. \quad (106)$$

Sustituyendo la ecuación (104) en (106) se obtiene

$$\dot{V}(z_3) = z_3(\dot{x}_{3d} - x_4). \quad (107)$$

Se considera a x_4 como un control virtual para estabilizar z_3 , de este modo tenemos

$$x_4 = \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3, \quad (108)$$

donde $\alpha_3 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (108) en (107) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_3) &= z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\ &= z_3(\dot{x}_{3d} - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3), \\ &= -\alpha_3 z_3^2. \end{aligned} \quad (109)$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3. \quad (110)$$

Derivando la expresión (110) se obtiene

$$\dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3 \dot{z}_3. \quad (111)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de (z_3, z_4)

$$V(z_3, z_4) = \frac{1}{2}(z_3^2 + z_4^2). \quad (112)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov (112) y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_3, z_4) &= z_4 \dot{z}_4 + z_3 \dot{z}_3, \\ &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3 \dot{z}_3) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\ &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - x_4)) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4). \end{aligned} \quad (113)$$

Despejando x_4 de la ecuación (110) se obtiene $x_4 = z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3$, con esto tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_3, z_4) &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - x_4)) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\ &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3))) + z_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3)), \\ &= z_4 \dot{x}_4 - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3)) - z_3 z_4 - \alpha_3 z_3^2, \\ &= z_4(x_2 x_6 a_3 + x_2 a_4 \Omega + b_2 U_3) - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3)) - z_3 z_4 - \alpha_3 z_3^2. \end{aligned} \quad (114)$$

Se considera a U_3 como un control virtual para estabilizar z_4 , de este modo tenemos

$$U_3 = \frac{1}{b_2}(z_3 - a_3x_2x_6 - a_4x_2\Omega - \alpha_3(z_4 + \alpha_3z_3) - \alpha_4z_4), \quad (115)$$

donde $\alpha_3, \alpha_4 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (115) en (114) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_3, z_4) &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - x_4)) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\ &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3z_3))) + z_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3z_3)), \\ &= z_4\dot{x}_4 - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3z_3)) - z_3z_4 - \alpha_3z_3^2, \\ &= z_4(x_2x_6a_3 + x_2a_4\Omega + b_2(\frac{1}{b_2}(z_3 - a_3x_2x_6 - a_4x_2\Omega - \alpha_3(z_4 + \alpha_3z_3) - \alpha_4z_4))) \\ &\quad - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3z_3)) - z_3z_4 - \alpha_3z_3^2, \\ &= -\alpha_3z_3^2 - \alpha_4z_4^2. \end{aligned} \quad (116)$$

Se continua con el diseñando del control para seguimiento de trayectorias y se define a

$$z_5 = x_{5d} - x_5, \quad (117)$$

Derivando la expresión (117) se obtiene

$$\dot{z}_5 = \dot{x}_{5d} - \dot{x}_5. \quad (118)$$

Del modelo del cuadracóptero (60) sabemos que $\dot{x}_5 = x_6$. Sustituyendo esto en la expresión (118) se obtiene

$$\dot{z}_5 = \dot{x}_{5d} - x_6. \quad (119)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de z_5

$$V(z_5) = \frac{1}{2}z_5^2. \quad (120)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_5) = z_5 \dot{z}_5. \quad (121)$$

Sustituyendo la ecuación (119) en (121) se obtiene

$$\dot{V}(z_5) = z_5(\dot{x}_{5d} - x_6). \quad (122)$$

Se considera a x_6 como un control virtual para estabilizar z_5 , de este modo tenemos

$$x_6 = \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5, \quad (123)$$

donde $\alpha_5 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (123) en (122) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_5) &= z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\ &= z_5(\dot{x}_{5d} - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 z_5), \\ &= -\alpha_5 z_5^2. \end{aligned} \quad (124)$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_6 = x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 z_5. \quad (125)$$

Derivando la expresión (125) se obtiene

$$\dot{z}_6 = \dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5 \dot{z}_5. \quad (126)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de (z_5, z_6)

$$V(z_5, z_6) = \frac{1}{2}(z_5^2 + z_6^2). \quad (127)$$

Derivando la anterior función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z_5, z_6) &= z_6 \dot{z}_6 + z_5 \dot{z}_5, \\
 &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5 \dot{z}_5) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\
 &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - x_6)) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6).
 \end{aligned} \tag{128}$$

Despejando x_6 de la ecuación (125) se obtiene $x_6 = z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z_5, z_6) &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - x_6)) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\
 &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5))) + z_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5)), \\
 &= z_6 \dot{x}_6 - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2, \\
 &= z_6(x_4 x_2 a_5 + b_3 U_4) - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2.
 \end{aligned} \tag{129}$$

Se considera a U_4 como un control virtual para estabilizar z_6 , de este modo tenemos

$$U_4 = \frac{1}{b_3}(z_5 - a_5 x_2 x_4 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6), \tag{130}$$

donde $\alpha_5, \alpha_6 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (130) en (129) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_5, z_6) &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - x_6)) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\
&= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5))) + z_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5)), \\
&= z_6 \dot{x}_6 - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2, \\
&= z_6(x_4 x_2 a_5 + b_3 \left(\frac{1}{b_3}(z_5 - a_5 x_2 x_4 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6)\right)) - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) \\
&\quad - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2. \\
&= -\alpha_5 z_5^2 - \alpha_6 z_6^2.
\end{aligned} \tag{131}$$

Se continua con el diseñando del control para seguimiento de trayectorias, ahora para el sistema de posición y se define a

$$z_7 = x_{7d} - x_7, \tag{132}$$

Derivando la expresión (132) se obtiene

$$\dot{z}_7 = \dot{x}_{7d} - \dot{x}_7. \tag{133}$$

Del modelo del cuadracóptero (60) sabemos que $\dot{x}_7 = x_8$. Sustituyendo esto en la expresión (133) se obtiene

$$\dot{z}_7 = \dot{x}_{7d} - x_8. \tag{134}$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de z_7

$$V(z_7) = \frac{1}{2} z_7^2. \tag{135}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_7) = z_7 \dot{z}_7. \tag{136}$$

Sustituyendo la ecuación (134) en (136) se obtiene

$$\dot{V}(z_7) = z_7(\dot{x}_{7d} - x_8). \quad (137)$$

Se considera a x_8 como un control virtual para estabilizar z_7 , de este modo tenemos

$$x_8 = \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7, \quad (138)$$

donde $\alpha_7 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (138) en (137) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_7) &= z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\ &= z_7(\dot{x}_{7d} - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 z_7), \\ &= -\alpha_7 z_7^2. \end{aligned} \quad (139)$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_8 = x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 z_7. \quad (140)$$

Derivando la expresión (140) se obtiene

$$\dot{z}_8 = \dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7 \dot{z}_7. \quad (141)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de (z_7, z_8)

$$V(z_7, z_8) = \frac{1}{2}(z_7^2 + z_8^2). \quad (142)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_7, z_8) &= z_8 \dot{z}_8 + z_7 \dot{z}_7, \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7 \dot{z}_7) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - x_8)) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8).
\end{aligned} \tag{143}$$

Despejando x_8 de la ecuación (140) se obtiene $x_8 = z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7$, con lo cual, tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_7, z_8) &= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - x_8)) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7))) + z_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7)), \\
&= z_8 \dot{x}_8 - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2, \\
&= z_8(-g + (\cos x_1 \cos x_3) \frac{1}{m} U_1) - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2.
\end{aligned} \tag{144}$$

Se considera a U_1 como un control virtual para estabilizar z_8 , de este modo tenemos

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} (z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) - \alpha_8 z_8 + \ddot{x}_{7d}), \tag{145}$$

donde $\alpha_7, \alpha_8 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (145) en (144) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_7, z_8) &= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - x_8)) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7))) + z_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7)), \\
&= z_8 \dot{x}_8 - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2, \\
&= z_8(-g + (\cos x_1 \cos x_3) \frac{1}{m} (\frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} (z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) - \alpha_8 z_8 + \ddot{x}_{7d}))) \\
&\quad - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2, \\
&= -\alpha_7 z_7^2 - \alpha_8 z_8^2.
\end{aligned} \tag{146}$$

Se continua con el diseñando del control para seguimiento de trayectorias ahora para el sistema de posición y se define a

$$z_9 = x_{9d} - x_9, \quad (147)$$

Derivando la expresión (147) se obtiene

$$\dot{z}_9 = \dot{x}_{9d} - \dot{x}_9. \quad (148)$$

Del modelo del cuadracóptero sabemos que $\dot{x}_9 = x_{10}$. Sustituyendo esto en (148) se obtiene

$$\dot{z}_9 = \dot{x}_{9d} - x_{10}. \quad (149)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de z_9)

$$V(z_9) = \frac{1}{2}z_9^2. \quad (150)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_9) = z_9\dot{z}_9. \quad (151)$$

Sustituyendo la ecuación (149) en (151) se obtiene

$$\dot{V}(z_9) = z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}). \quad (152)$$

Se considera a x_{10} como un control virtual para estabilizar z_9 , de este modo tenemos

$$x_{10} = \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9, \quad (153)$$

donde $\alpha_9 > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (153) en (152) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9) &= z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_9(\dot{x}_{9d} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 z_9), \\
&= -\alpha_9 z_9^2.
\end{aligned} \tag{154}$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_{10} = x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 z_9. \tag{155}$$

Derivando la expresión (155) se obtiene

$$\dot{z}_{10} = \dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9 \dot{z}_9. \tag{156}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de (z_9, z_{10})

$$V(z_9, z_{10}) = \frac{1}{2}(z_9^2 + z_{10}^2). \tag{157}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9, z_{10}) &= z_{10} \dot{z}_{10} + z_9 \dot{z}_9, \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9 \dot{z}_9) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - x_{10})) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}).
\end{aligned} \tag{158}$$

Despejando x_{10} de la ecuación (155) se obtiene $x_{10} = z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9, z_{10}) &= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - x_{10})) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9))) + z_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9)), \\
&= z_{10}\dot{x}_{10} - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2, \\
&= z_{10}\left(u_x \frac{1}{m} U_1\right) - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2.
\end{aligned} \tag{159}$$

Se considera a u_x como un control virtual para estabilizar z_{10} , de este modo tenemos

$$u_x = \frac{m}{U_1}(z_9 - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10} + \ddot{x}_{9d}), \tag{160}$$

donde $\alpha_9, \alpha_{10} > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (160) en (159) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9, z_{10}) &= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - x_{10})) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9))) + z_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9)), \\
&= z_{10}\dot{x}_{10} - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2, \\
&= z_{10}\left(\frac{m}{U_1}(z_9 - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10} + \ddot{x}_{9d}) \frac{1}{m} U_1\right) - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) \\
&\quad - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2, \\
&= -\alpha_9 z_9^2 - \alpha_{10} z_{10}^2.
\end{aligned} \tag{161}$$

Se continua con el diseñando del control para seguimiento de trayectorias ahora para el sistema de posición y se define a

$$z_{11} = x_{11d} - x_{11}, \tag{162}$$

Derivando la expresión (162) se obtiene

$$\dot{z}_{11} = \dot{x}_{11d} - \dot{x}_{11}. \tag{163}$$

Del modelo del cuadracóptero (60) sabemos que $\dot{x}_{11} = x_{12}$. Sustituyendo esto en (163) se obtiene

$$\dot{z}_{11} = \dot{x}_{11d} - x_{12}. \quad (164)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de z_{11}

$$V(z_{11}) = \frac{1}{2}z_{11}^2. \quad (165)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_{11}) = z_{11}\dot{z}_{11}. \quad (166)$$

Sustituyendo la ecuación (164) en (166) se obtiene

$$\dot{V}(z_{11}) = z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}). \quad (167)$$

Se considera a x_{12} como un control virtual para estabilizar z_{11} , de este modo tenemos

$$x_{12} = \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}, \quad (168)$$

donde $\alpha_{11} > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (168) en (167) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_{11}) &= z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\ &= z_{11}(\dot{x}_{11d} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11}z_{11}), \\ &= -\alpha_{11}z_{11}^2. \end{aligned} \quad (169)$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11}z_{11}. \quad (170)$$

Derivando la expresión (170) se obtiene

$$\dot{z}_{12} = \dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}\dot{z}_{11}. \quad (171)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de (z_{11}, z_{12})

$$V(z_{11}, z_{12}) = \frac{1}{2}(z_{11}^2 + z_{12}^2). \quad (172)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_{11}, z_{12}) &= z_{12}\dot{z}_{12} + z_{11}\dot{z}_{11}, \\ &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}\dot{z}_{11}) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\ &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12})) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}). \end{aligned} \quad (173)$$

Despejando x_{12} de la ecuación (170) se obtiene $x_{12} = z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}$

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_{11}, z_{12}) &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12})) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\ &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}))) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11})), \\ &= z_{12}\dot{x}_{12} - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2, \\ &= z_{12}(u_y \frac{1}{m}U_1) - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2. \end{aligned} \quad (174)$$

Se considera a u_y como un control virtual para estabilizar z_{12} , de este modo tenemos

$$u_y = \frac{m}{U_1}(z_{11} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11}) - \alpha_{12}z_{12} + \ddot{x}_{11d}), \quad (175)$$

donde $\alpha_{11}, \alpha_{12} > 0$ para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (175) en (174) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_{11}, z_{12}) &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12})) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\ &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}))) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11})), \\ &= z_{12}\dot{x}_{12} - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2, \\ &= z_{12}\left(\frac{m}{U_1}(z_{11} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11}) - \alpha_{12}z_{12} + \ddot{x}_{11d})\frac{1}{m}U_1\right) - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) \\ &\quad - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2, \\ &= -\alpha_{11}z_{11}^2 - \alpha_{12}z_{12}^2. \end{aligned} \quad (176)$$

Apéndice B

En este anexo se presenta el desarrollo para la obtención del modelo de un cuadracóptero, en el cual, se utiliza el formalismo de Euler-Lagrange.

Matriz de rotación

La rotación de un cuerpo rígido en el espacio se puede parametrizar usando varios métodos como *ángulos de Euler*, *cuaterniones* y *ángulos de Tait-Bryan*. Los ángulos de Tait-Bryan (también llamados *ángulos de Cardano*) se usan ampliamente en la ingeniería aeroespacial, donde se les llama ángulos de Euler. Esto entra en conflicto con el uso de ángulos de Euler, que es una representación matemática de tres rotaciones sobre diferentes ejes posibles. En ingeniería aeroespacial, los ejes están dirigidos a una nave que se mueve en dirección x positiva, con el lado derecho correspondiente a la dirección y positiva y la parte inferior vertical correspondiente a la dirección z positiva. Estos tres ángulos se denominan individualmente *roll*, *pitch* y *yaw*. Considerando un sistema de coordenadas orientado a la derecha, las tres rotaciones individuales se describen como sigue:

- $R(x, \phi)$ rotación sobre el eje x .
- $R(y, \theta)$ rotación sobre el eje y .
- $R(z, \psi)$ rotación sobre el eje z .

Estas se representan mediante las siguientes expresiones:

$$R(x, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad (177)$$

$$R(y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (178)$$

$$R(z, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (179)$$

La matriz de rotación completa es el producto de las tres rotaciones anteriores

$$R(\phi, \theta, \psi) = R(x, \phi)R(y, \theta)R(z, \psi), \quad (180)$$

como se muestra continuación

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\psi\cos\theta & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\cos\phi - \cos\psi\operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}. \quad (181)$$

La variación en tiempo de los ángulos Tait-Bryan $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ es una función discontinua. Estas derivadas son distintas de las velocidades angulares en el sistema de coordenadas del cuerpo rígido (p, q, r) , las cuales se miden físicamente con giroscopios, por ejemplo, generalmente se utilizan *Unidades de Medición Inercial* (IMU) por su acrónimo en inglés: *Inertial Measurement Unit*, para medir las rotaciones y calcular directamente los ángulos de Tait-Bryan, la relación entre las velocidades angulares en el sistema fijado al cuerpo y la variación en el tiempo de los ángulos Tait-Bryan, se obtiene a través de

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \cos\phi & \operatorname{sen}\phi\cos\phi \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (182)$$

El movimiento de rotación del helicóptero viene dado por las componentes de las velocidades angulares en los tres ejes: velocidad angular de balanceo (p) , velocidad angular de cabeceo (q) y velocidad angular de guiñada (r) , sobre los ejes \vec{x}_L, \vec{y}_L y \vec{z}_L respectivamente.

El movimiento de traslación viene dado por las componentes de la velocidad $v = [u_0 \ v_0 \ w_0]^T$

en los tres ejes inerciales con relación a la velocidad absoluta del helicóptero expresada en B , $V = [u_L \ v_L \ w_L]^T$. Las velocidades v y V están relacionadas por la expresión,

$$v = R_I \cdot V. \quad (183)$$

Formulación Euler-Lagrange

Las ecuaciones de movimiento del helicóptero se pueden expresar mediante la aplicación directa de la formulación de Euler-Lagrange, la cual está basada en el concepto de energía mecánica (cinética y potencial):

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (184)$$

$$L = E_c - E_p,$$

donde:

- L es la función lagrangiana,
- E_c es la energía cinética total,
- E_p es la energía potencial total,
- q_i es la coordenada generalizada,
- \dot{q}_i es la primera derivada de la coordenada generalizada,
- Γ_i son la fuerzas generalizadas.

Para desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange, se vuelve a considerar el sistema de coordenadas inercial $I = [\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z}]$ y el sistema de coordenadas ligado al helicóptero $B = [\vec{x}_L \ \vec{y}_L \ \vec{z}_L]$. Para un cuerpo rígido moviéndose en el espacio tridimensional, las coordenadas generalizadas se pueden escribir como (Castillo *et al.*, 2007),

$$q = [x \ y \ z \ \psi \ \theta \ \psi]^T \in \mathfrak{R}^6, \quad (185)$$

donde $\xi = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ es la posición del centro de masa del helicóptero expresada en I y $\eta = [\psi \ \theta \ \phi]^T \in \mathbb{R}^3$ son los ángulos de Tait-Bryan. El langragiano para el helicóptero esta dado por

$$L(q, \dot{q}) = E_{cTrans} + E_{cRot} - E_p, \quad (186)$$

donde E_{cTrans} es la energía cinética traslacional y E_{cRot} es la energía cinética rotacional.

En principio, se va a desarrollar el término de la energía cinética traslacional, para lo cual se requiere el conocimiento de la velocidad en cada coordenada generalizada. La velocidad lineal viene dada por la ecuación (183), donde $\dot{\xi} = v$ y por lo tanto, el cuadrado de la velocidad es

$$\dot{\xi}^2(x, y, z) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \dot{\xi}^T \dot{\xi}. \quad (187)$$

Así, la energía cinética traslacional puede ser escrita mediante la siguiente expresión

$$E_{cTrans} = \frac{1}{2} \int \dot{\xi}^2(x, y, z) dm = \frac{m}{2} \dot{\xi}^2(x, y, z) = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi}. \quad (188)$$

Para desarrollar el término de la energía cinética rotacional, se considera un punto ${}^B r_B$ fijo y en reposo en el sistema de coordenadas B . Sea ${}^I r_B$ el mismo punto ${}^B r_B$ con respecto al sistema de coordenadas inercial I y R_I la matriz de rotación que relaciona el desplazamiento espacial del sistema de coordenadas B con respecto a I . El vector ${}^I r_B$ vendrá dado por (Fu *et al.*, 1987),

$${}^I r_B = R_I^B r_B, \quad (189)$$

$$\begin{aligned} {}^I r_{Bx} &= (\cos\psi\cos\theta)x_L + (\cos\psi\sen\theta\sen\phi - \sen\psi\cos\phi)y_L + (\cos\psi\sen\theta\cos\phi + \sen\psi\sen\phi)z_L, \\ {}^I r_{By} &= (\sen\psi\cos\theta)x_L + (\sen\psi\sen\theta\sen\phi + \sen\psi\cos\phi)y_L + (\sen\psi\sen\theta\cos\phi - \cos\psi\sen\phi)z_L, \\ {}^I r_{Bz} &= (-\sen\theta)x_L + (\cos\theta\sen\phi)y_L + (\cos\theta\cos\phi)z_L. \end{aligned} \quad (190)$$

Así la velocidad de ${}^B r_B$ expresada en I se obtiene de la derivada con respecto al tiempo de ${}^I r_B$ como sigue:

$${}^I v_B = \frac{d}{dt}({}^I r_B) = \frac{d}{dt}({}^{R_I} \cdot {}^B r_B) = \dot{{}^R_I} \cdot {}^B r_B, \quad (191)$$

$$\begin{aligned} {}^I v_{Bx} &= (-\operatorname{sen}\psi \cos\theta \dot{\psi} - \cos\psi \operatorname{sen}\theta \dot{\theta})x_L + \\ &\quad (-\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\psi} + \cos\psi \cos\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\theta} + \cos\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi \dot{\phi} \\ &\quad - \cos\psi \cos\phi \dot{\psi} + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi \dot{\phi})y_L + \\ &\quad (-\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi \dot{\psi} + \cos\psi \cos\theta \cos\phi \dot{\theta} - \cos\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\phi} \\ &\quad + \cos\psi \operatorname{sen}\phi \dot{\psi} + \operatorname{sen}\psi \cos\phi \dot{\phi})z_L, \\ {}^I v_{By} &= (\cos\psi \cos\theta \dot{\psi} - \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \dot{\theta})x_L + \\ &\quad (\cos\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\psi} + \operatorname{sen}\psi \cos\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\theta} + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi \dot{\phi} \\ &\quad - \operatorname{sen}\psi \cos\phi \dot{\psi} - \cos\psi \operatorname{sen}\phi \dot{\phi})y_L + \\ &\quad (\cos\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi \dot{\psi} + \operatorname{sen}\psi \cos\theta \cos\phi \dot{\theta} - \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\phi} \\ &\quad + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi \dot{\psi} - \cos\psi \cos\phi \dot{\phi})z_L, \\ {}^I v_{Bz} &= (-\cos\theta \dot{\theta})x_L + \\ &\quad (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\theta} + \cos\theta \cos\phi \dot{\phi})y_L + \\ &\quad (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \dot{\theta} - \cos\theta \cos\phi \dot{\phi})z_L. \end{aligned} \quad (192)$$

Tras obtener la velocidad del punto ${}^I r_B$, se puede calcular la energía cinética de rotación. Sea E_{cRot} la energía cinética de rotación en B expresada en I , y sea dE_{cRot} la energía cinética de una partícula con masa diferencial dm en B , entonces

$$dE_{cRot} = \frac{1}{2}({}^I v_B^2) = \frac{1}{2}({}^I v_{Bx}^2 + {}^I v_{By}^2 + {}^I v_{Bz}^2)dm. \quad (193)$$

Así que el cuadrado de la velocidad del punto ${}^I v_B$ es:

$${}^I v_B^2 = ({}^I v_{Bx}^2 + {}^I v_{By}^2 + {}^I v_{Bz}^2), \quad (194)$$

$$\begin{aligned}
I v_B^2 = & x_L^2(\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) \\
& + y_L^2(\dot{\psi}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \phi) + \dot{\psi}(-2\dot{\phi} \sin \theta - 2\dot{\theta} \cos \phi \sin \phi \cos \theta) + \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + \dot{\phi}^2) \\
& + z_L^2(\dot{\psi}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \phi) + \dot{\psi}(-2\dot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\theta} \cos \phi \sin \phi \cos \theta) + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2) \\
& + 2x_{LyL}(\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi}(\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi) \\
& + 2x_{LzL}(\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi}(-\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi) \\
& + 2y_{LzL}(-\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi}(\dot{\theta} \cos \theta - 2\dot{\theta} \cos \theta \cos^2 \phi) + \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi).
\end{aligned} \tag{195}$$

Reescribiendo la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
I v_B^2 = & (y_L^2 + z_L^2)(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2\dot{\psi} \dot{\phi} + \dot{\phi}^2) + \\
& (x_L^2 + z_L^2)(\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \phi \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi) + \\
& (x_L^2 + y_L^2)(\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta - 2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \phi \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi) + \\
& 2x_{LyL}(\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi}(\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi) + \\
& 2x_{LzL}(\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi}(-\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi) + \\
& 2y_{LzL}(-\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi}(\dot{\theta} \cos \theta - 2\dot{\theta} \cos \theta \cos^2 \phi) + \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi),
\end{aligned} \tag{196}$$

por lo tanto, resolviendo la ecuación (193) con el cuadrado de la velocidad se obtiene la energía cinética de la rotación como sigue:

$$E_{cRot} = \frac{1}{2} \int^I v_B^2 dm \tag{197}$$

$$\begin{aligned}
E_{cRot} = & \frac{1}{2} \int (y_L^2 + z_L^2) dm (\dot{\psi}^2 \text{sen}^2 \theta - 2\dot{\psi}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2) + \\
& \frac{1}{2} \int (x_L^2 + z_L^2) dm (\dot{\psi}^2 \text{sen}^2 \phi \text{cos}^2 \theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \text{cos} \phi \text{sen} \phi \text{cos} \theta + \dot{\theta}^2 \text{cos}^2 \phi) + \\
& \frac{1}{2} \int (x_L^2 + y_L^2) dm (\dot{\psi}^2 \text{cos}^2 \phi \text{cos}^2 \theta - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \text{cos} \phi \text{sen} \phi \text{cos} \theta + \dot{\theta}^2 \text{sen}^2 \phi) + \\
& \int x_{LyL} dm (\dot{\psi}^2 \text{cos} \theta \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \dot{\psi}(\dot{\theta} \text{sen} \theta \text{cos} \phi - \dot{\phi} \text{cos} \theta \text{sen} \phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \text{cos} \phi) + \\
& \int x_{LzL} dm (\dot{\psi}^2 \text{cos} \theta \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \dot{\psi}(-\dot{\theta} \text{sen} \theta \text{cos} \phi - \dot{\phi} \text{cos} \theta \text{sen} \phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \text{sen} \phi) + \\
& \int y_{LzL} dm (-\dot{\psi}^2 \text{cos}^2 \theta \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \dot{\psi}(\dot{\theta} \text{cos} \theta - 2\dot{\theta} \text{cos} \theta \text{cos}^2 \phi) + \dot{\theta}^2 \text{sen} \phi \text{cos} \phi).
\end{aligned} \tag{198}$$

A partir de las hipótesis realizadas anteriormente, los términos de los productos cruzados de la matriz de inercia pueden ser considerados nulos y la matriz de inercia es diagonal:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int (y_L^2 + z_L^2) dm, \\
I_{yy} &= \int (x_L^2 + z_L^2) dm, \\
I_{zz} &= \int (x_L^2 + y_L^2) dm, \\
I_{xy} &= \int (x_L y_L) dm = 0, \\
I_{xz} &= \int (x_L z_L) dm = 0, \\
I_{yz} &= \int (y_L z_L) dm = 0.
\end{aligned} \tag{199}$$

La energía cinética puede ser reescrita de la siguiente forma

$$E_{cRot} = \frac{1}{2} I_{xx} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \text{sen} \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{yy} (\dot{\theta} \text{cos} \phi + \dot{\psi} \text{sen} \phi \text{cos} \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{zz} (\dot{\theta} \text{sen} \phi - \dot{\psi} \text{cos} \phi \text{cos} \theta)^2, \tag{200}$$

O de una forma más compacta

$$E_{cRot} = \frac{1}{2} I_{xx} p^2 + \frac{1}{2} I_{yy} q^2 + \frac{1}{2} I_{zz} r^2 = \frac{1}{2} w^T J w. \tag{201}$$

Denominando W_η como el Jacobiano que relaciona w con η en la ecuación (182) se puede definir la siguiente matriz,

$$J = J(\eta) = W_\eta^T J W_\eta, \quad (202)$$

por lo que la ecuación de energía cinética (201) se puede reescribir en función de coordenadas generalizadas η como sigue,

$$E_{cRot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta}. \quad (203)$$

La energía potencial E_p expresada en términos de las coordenadas generalizadas viene dada por

$$E_p = mgz. \quad (204)$$

Las ecuaciones del movimiento completo se obtienen a partir del lagrangiano y se obtiene a partir de la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} F_\xi &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \\ \tau_\eta & \end{aligned} \quad (205)$$

donde $\tau_\eta \in \mathbb{R}^3$ representa los momentos de balanceo, cabeceo y guiñada y $F_\xi = R_I \hat{F}$ es la fuerza traslacional aplicada al helicóptero debido principalmente a la entrada de control principal U_1 en dirección al eje z , con

$$R_I \hat{F} = R_{IE3} U_1 + A_T. \quad (206)$$

Puesto que el lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando $\dot{\xi}$ con $\dot{\eta}$, las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser divididas en dinámica de traslación y dinámica de rotación, siendo la ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento de traslación

$$L(\xi, \dot{\xi}) = E_{cTrans} - E_p, \quad (207)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \xi} &= -mgE_3, & \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} &= m\dot{\xi}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} \right) &= m\ddot{\xi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \xi} &= F_\xi, \end{aligned} \quad (208)$$

$$m\ddot{\xi} + mgE_3 = F_\xi, \quad (209)$$

Reescribiendo (209) en función del vector de estado ξ se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m}U_1(\cos\phi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\varphi) + \frac{A_x}{m}, \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m}U_1(\cos\phi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\phi \cos\varphi) + \frac{A_y}{m}, \\ \ddot{z} &= -g + \frac{1}{m}U_1(\cos\phi \cos\theta) + \frac{A_z}{m}. \end{aligned} \quad (210)$$

Para las coordenadas de η las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \eta} &= \tau_\eta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \phi} &= \tau_\phi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \theta} &= \tau_\theta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \psi} &= \tau_\psi, \end{aligned} \quad (211)$$

resolviendo las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \phi} &= I_{yy}(-\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin^2\phi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi + \dot{\psi}^2\sin^2\phi\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi) + \\
&\quad I_{zz}(-\dot{\psi}^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin^2\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos^2\phi + \dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi), \\
\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \theta} &= I_{xx}(-\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta) + I_{yy}(-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\phi\cos\phi\sin\theta - \dot{\psi}^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta) \\
&\quad + I_{zz}(-\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi\cos\phi), \\
\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \psi} &= 0, \\
\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\phi}} &= I_{xx}(\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta), \\
\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\theta}} &= \dot{\theta}(I_{yy}\cos^2\phi + I_{zz}\sin^2\phi) + \dot{\psi}(I_{yy}\cos\phi\sin\phi\cos\theta - I_{zz}\cos\phi\sin\phi\cos\theta), \\
\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\psi}} &= -\dot{\phi}I_{xx}\sin\theta + \dot{\theta}((I_{yy} - I_{zz})\cos\phi\sin\phi\cos\theta) \\
&\quad + \dot{\psi}I_{xx}\sin^2\theta + \dot{\psi}I_{yy}\sin^2\phi\cos^2\theta + \dot{\psi}I_{zz}\cos^2\phi\cos^2\theta.
\end{aligned} \tag{212}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\phi}} \right) &= I_{xx}(\ddot{\phi} - \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta), \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\theta}} \right) &= I_{yy}(\ddot{\theta}\cos^2\phi - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi + \ddot{\psi}\cos\phi\sin\phi\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\phi}\sin^2\phi\cos\theta \\
&\quad + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos^2\phi\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\phi\sin\phi\sin\theta) \\
&\quad + I_{zz}(\ddot{\theta}\sin^2\phi + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi - \ddot{\psi}\cos\phi\sin\phi\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\phi}\sin^2\phi\cos\theta \\
&\quad - \dot{\psi}\dot{\phi}\cos^2\phi\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\phi\sin\phi\sin\theta), \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\psi}} \right) &= I_{xx}(-\ddot{\phi}\sin\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{\psi}\sin^2\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta) + \\
&\quad I_{yy}(\ddot{\theta}\cos\phi\sin\phi\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin^2\phi\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos^2\phi\cos\theta - \dot{\theta}^2\cos\phi\sin\phi\sin\theta \\
&\quad + \ddot{\psi}\sin^2\phi\cos^2\theta + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta - 2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta) \\
&\quad + I_{zz}(-\ddot{\theta}\cos\phi\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\phi}\sin^2\phi\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\phi}\cos^2\phi\cos\theta + \dot{\theta}^2\cos\phi\sin\phi\sin\theta \\
&\quad + \ddot{\psi}\cos^2\phi\cos^2\theta - 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi\cos^2\theta - 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi),
\end{aligned} \tag{213}$$

y así se reescriben las ecuaciones de Euler-Lagrange para el movimiento de rotación como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \eta} &= \tau_{\eta}, \\ \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L(\eta, \dot{\eta})}{\partial \psi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tau_{\eta} \\ \tau_{\phi} \\ \tau_{\psi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (214)$$

El modelo matemático se puede presentar en la forma general, donde (Castillo *et al.*, 2007),

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau_{\eta}\eta, \quad (215)$$

con $M(\eta) = J(\eta)$ es decir,

$$M(\eta) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}\text{sen}\theta \\ 0 & I_{xx}\text{cos}^2\phi + I_{zz}\text{sen}^2\phi & (I_{yy} - I_{zz})\text{cos}\phi\text{sen}\phi\text{cos}\theta \\ -I_{xx}\text{sen}\theta & (I_{yy} - I_{zz})\text{cos}\phi\text{sen}\phi\text{cos}\theta & I_{xx}\text{sen}^2\theta + I_{yy}\text{sen}^2\phi\text{cos}^2\theta + I_{zz}\text{cos}^2\phi\text{cos}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (216)$$

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad (217)$$

donde

$$c_{11} = 0,$$

$$c_{12} = (I_{yy} - I_{zz})(\dot{\theta}\text{cos}\phi\text{sen}\phi + \dot{\psi}\text{sen}^2\phi\text{cos}\theta) + (I_{zz} - I_{yy})\dot{\psi}\text{cos}^2\phi\text{cos}\theta - I_{xx}\dot{\psi}\text{cos}\theta,$$

$$c_{13} = (I_{zz} - I_{yy})\dot{\psi}\text{cos}\phi\text{sen}\phi\text{cos}^2\theta,$$

$$c_{21} = (I_{zz} - I_{yy})(\dot{\theta}\text{cos}\phi\text{sen}\phi + \dot{\psi}\text{sen}^2\phi\text{cos}\theta) + (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi}\text{cos}^2\phi\text{cos}\theta + I_{xx}\dot{\psi}\text{cos}\theta,$$

$$c_{22} = (I_{zz} - I_{yy})\dot{\phi}\text{cos}\phi\text{sen}\phi,$$

$$c_{23} = -I_{xx}\dot{\psi}\text{sen}\theta\text{cos}\theta + I_{yy}\dot{\psi}\text{sen}^2\phi\text{cos}\theta\text{sen}\theta + I_{zz}\dot{\psi}\text{cos}^2\phi\text{sen}\theta\text{cos}\theta,$$

$$c_{31} = (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi}\text{cos}^2\theta\text{sen}\phi\text{cos}\phi - I_{xx}\dot{\theta}\text{cos}\theta,$$

$$c_{32} = (I_{zz} - I_{yy})(\dot{\theta}\text{cos}\phi\text{sen}\phi\text{sen}\theta + \dot{\psi}\text{sen}^2\phi\text{cos}\theta) + (I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\text{cos}^2\phi\text{cos}\theta + I_{xx}\dot{\psi}\text{sen}\theta\text{cos}\theta - I_{yy}\dot{\psi}\text{sen}^2\phi\text{sen}\theta\text{cos}\theta - I_{zz}\dot{\psi}\text{cos}^2\phi\text{sen}\theta\text{cos}\theta,$$

$$c_{33} = (I_{yy} - I_{zz})\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi\cos^2\theta - I_{yy}\dot{\theta}\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta - I_{zz}\dot{\theta}\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta + I_{xx}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta.$$

Las ecuaciones del movimiento de rotación del helicóptero obtenidas a partir de la formulación de Euler-Lagrange pueden ser reescritas mediante la siguiente expresión matricial,

$$\ddot{\eta} = M(\eta)^{-1}(\tau_{\eta} - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}). \quad (218)$$