

TESIS DEFENDIDA POR

Daniel Escobedo Mitre

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité

Dr. Roque Martínez Ortiz

Miembro del Comité

Dr. Yury Orlov Kuchina

Miembro del Comité

Dr. Ervin Jesús Álvarez Sánchez

Miembro del Comité

Dr. Anatoly Khomenko Filatova

Miembro del Comité

Dr. Roberto Conte Galván

*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

21 de mayo de 2010

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**EVALUACIÓN DE ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS
SUBACTUADOS**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

DANIEL ESCOBEDO MITRE

Ensenada, Baja California, México, mayo de 2010

RESUMEN de la tesis de **DANIEL ESCOBEDO MITRE**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, mayo de 2010.

EVALUACIÓN DE ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS SUBACTUADOS

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de Tesis

Los sistemas mecánicos subactuados forman una clase importante de mecanismos, presentes frecuentemente en diversos campos de la industria como la industria de manufactura, la industria de transporte, la industria de procesos, etc. Un buen desempeño de los mismos es esencial para una buena operación del sistema del que forman parte; dicho desempeño depende del sistema de control asociado. El control de sistemas subactuados no es una tarea trivial, y constituye actualmente una activa línea de investigación en teoría e ingeniería de control.

En este documento se presenta una evaluación numérica y experimental de dos algoritmos de control propuestos recientemente (Martínez Ortiz, 2007) para una clase de sistemas subactuados de dos grados de libertad, que presentan fricción seca en la articulación no actuada. Se evalúa el desempeño de los algoritmos mediante sus respuestas de error en estado estacionario, el tiempo de respuesta y el esfuerzo de la señal de control, así como el número de parámetros del controlador y la dificultad para sintonizarlos. Los algoritmos se comparan con dos controladores clásicos: un controlador con acciones proporcional, integral y derivativa (PID) y un control por ubicación de polos (retroalimentación de estado), mediante experimentos tanto numéricos como físicos. Estos últimos se realizaron con dos sistemas mecánicos disponibles en el laboratorio de control del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE. Igualmente, se estableció un procedimiento para realizar el diseño y la aplicación de los algoritmos evaluados. Los resultados obtenidos muestran que los algoritmos bajo evaluación no solo llegan al valor deseado sino que lo hacen en poco tiempo mientras que los algoritmos clásicos no llegan al valor deseado o les toma un tiempo mayor llegar. Sin embargo, la acción de control de los algoritmos bajo evaluación es más activa que la de los algoritmos clásicos.

Palabras Clave: Subactuado, fricción discontinua.

ABSTRACT of the thesis presented by **DANIEL ESCOBEDO MITRE**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of MASTER IN SCIENCES in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS with orientation in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California, mayo 2010.

EVALUATION OF CONTROL ALGORITHMS FOR UNDERACTUATED SYSTEMS

Underactuated mechanical systems are an important class of mechanisms, frequently present in different industry field such as manufacture industry, transport industry, process industry, etc. A good performance of those mechanisms is essential for the well operation of the systems they belong to, such performance depends on the control system associated. The control of underactuated systems is not a trivial task, and currently constitutes an active line of inquiry in control theory and engineering.

This document presents a numerical and experimental evaluation of two recently proposed control algorithms (Martínez Ortiz, 2007) for a class of two degrees of freedom underactuated mechanical systems, such class present dry friction on the non actuated joint. The controlled system performance is evaluated by means of the steady state error, response time and control signal effort, as well as the controllers number of parameters, and the difficulty to adjust them.

Both algorithms are compared against two classical controllers: a controller with proportional, integral and derivative actions (PID) and a pole location controller (state feedback) by means of numerical and physical experiments. The latter were done on two mechanical systems available on the control laboratory in CICESE's Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones (Electronics and Telecommunications Department). Also, a procedure to design and apply the evaluated algorithms was established. The obtained results show that the algorithms under evaluation not only reach the desired value but they do so in a small amount of time while the classical algorithms do not reach the desired value or they do it in a longer time. However, the control action from the algorithms under evaluation is more active than that of the classical algorithms.

Keywords: Underactuated, discontinuous friction

A mis padres:

Micaela Mitre

Rogelio Escobedo

Agradecimientos

Al CONACYT por su apoyo económico. Al CICESE por la oportunidad de realizar mi posgrado.

Al Dr. Joaquín Álvarez por su apoyo, guía y amistad. A los doctores Ervin Jesús Álvarez Sánchez, Anatoly Khomenko Filatova, Roque Martínez Ortiz y Yuri Orlov Kuchina por su ayuda y sus valiosos comentarios.

A los profesores/instructores: Moisés Castro, Ricardo Núñez, Ricardo Cuesta, Carmen Maya, Alejandro Márquez, Pedro Negrete, Roberto Conte, Luis Villaseñor.

A los compañeros de la maestría: Cecilia Coria Calvario, Juan Carlos González Islas, Jacobo Montoya Becerra, Miguel Ángel Vázquez Olguín, Paulino de Jesús Mendoza Valencia, Israel Oropeza Pérez, Daniel García Briones, Jesús Alfredo Flores Osorio, Eduardo José Patrón Aguilar, Alejandro Pérez de la Cruz, Iván Ulises Herrera y especialmente a los compañeros del cubo: Elva Naihvy Mandujano García, Jaquelin Estrada Mendoza y Adán Sepúlveda Fierro. A todos gracias por su amistad, compañía y por los buenos tiempos.

También a los amigos: Noemí, Flor, Marlén y Paul.

También gracias a los Tulicanos, en especial a David, Abimael, Rodrigo e Irak.

Finalmente, gracias a mi familia: “Son la parte más importante de mi vida”. *Los quiero.*

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	x
I. Introducción	1
I.1 Objetivos	5
I.2 Panorama del documento	5
II. Antecedentes	7
II.1 Fricción	7
II.1.1 Fricción estática máxima	7
II.1.2 Fricción Cinética	8
II.1.3 Fricción Viscosa	8
II.1.4 Efecto Stribeck	9
II.1.5 Efectos de la fricción	10
II.2 Control por Modos Deslizantes	12
II.3 Conclusiones	15
III. Control de Sistemas Subactuados con Fricción Seca	17
III.1 Modelo de una clase de sistemas mecánicos subactuados	18
III.2 Procedimiento general de diseño	20
III.3 Algoritmo I	21
III.3.1 Procedimiento de diseño	21
III.4 Algoritmo II	23
III.5 Ejemplo motivacional	24
III.6 Lineamientos de comparación	26
III.7 Conclusiones	28
IV. Control de un Sistema Mecánico Rectilíneo	30

Contenido (continuación)

	Página
IV.1 Configuración del sistema	31
IV.2 Ajuste de parámetros	32
IV.3 Cálculo del control con el Algoritmo I	34
IV.3.1 Robustez ante incertidumbre paramétrica en $\frac{f_b}{m_2}$	37
IV.4 Cálculo del control con el Algoritmo II	38
IV.5 Control por ubicación de polos	42
IV.6 Control PID del sistema rectilíneo	44
IV.7 Evaluación del desempeño	46
IV.8 Conclusiones	53
V. Control de un Sistema Torsional	55
V.1 Configuración del sistema	57
V.2 Ajuste de parámetros	58
V.3 Cálculo del control con el Algoritmo I	60
V.3.1 Robustez ante incertidumbre paramétrica en $\frac{c_2}{J_2}$	62
V.4 Cálculo del control con el Algoritmo II	64
V.5 Control por ubicación de polos	65
V.6 Control PID del sistema torsional	68
V.7 Evaluación del desempeño	69
V.8 Conclusiones	75
VI. Conclusiones y Trabajo a Futuro	77
VI.1 Conclusiones generales.	77
VI.2 Trabajo a futuro.	78
REFERENCIAS	79

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Comportamiento de la fuerza de fricción de acuerdo con diferentes modelos. (a) Modelo de fricción viscosa. (b) Modelo de fricción de Coulomb. (c) Modelo clásico. (d) Efecto Stribeck.	10
2	Diagrama a cuadros de un sistema no-lineal representado como un sistema lineal retroalimentado por una no-linealidad.	11
3	Nyquist de un sistema no-lineal de cuarto orden (similar a los que se tratarán posteriormente) y cuya no-linealidad se describe por medio de la función signo.	12
4	Sistema masa-resorte-amortiguador subactuado de dos grados de libertad con fricción seca en m_2	19
5	Respuesta.	26
6	Sistema mecánico rectilíneo ECP210.	30
7	Configuración del sistema masa-resorte-amortiguador.	32
8	Resultados numéricos y experimentales del sistema MRA en lazo abierto con un escalón como entrada de control.	34
9	Resultados de simulación del “Algoritmo I” para dos juegos de constantes k_1 y k_2	37
10	Resultados de simulación que muestran la robustez del Algoritmo I a variaciones en el parámetro f_b (1).	39
11	Resultados de simulación que muestran la robustez del Algoritmo I a variaciones en el parámetro f_b (2).	40
12	Respuesta para dos valores de k_4 del Algoritmo II aplicado al MRA.	41
13	Resultado de aplicar el control por ubicación de polos a los modelos lineal (43) y no lineal (35-36) del sistema masa-resorte-amortiguador.	44
14	Resultado de aplicar el controlador PID a los modelos lineal y no lineal del sistema rectilíneo.	45
15	Resultados de simulación obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al modelo no lineal del sistema rectilíneo.	47

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
16	Respuestas del Algoritmo I utilizando las funciones saturación y tangente hiperbólica en lugar de la función signo.	49
17	Respuestas del Algoritmo II utilizando las funciones saturación y tangente hiperbólica en lugar de la función signo.	50
18	Resultados experimentales obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al sistema rectilíneo.	51
19	Respuesta de los algoritmos de control cuando se tiene una señal rectangular como señal de referencia.	52
20	Sistema mecánico rotacional ECP205.	56
21	Configuración de 2 gdl “libre”. Al sistema en esta configuración se le aplicarán los controladores en secciones posteriores.	57
22	Configuración del sistema con 1 gdl, utilizado en el ajuste de parámetros.	58
23	Resultado experimental del sistema de 1gdl con $T = 3$ y $p = 5$	59
24	Resultados experimental y numérico ante una entrada de 3 Nm.	61
25	Respuesta del sistema para valores del parámetro de c_2 correspondientes al valor nominal y valores menores a éste.	63
26	Respuesta del sistema para valores del parámetro de c_2 correspondientes al valor nominal y valores mayores a éste.	64
27	Respuesta del segundo algoritmo con $k_4 = 100$	66
28	Respuesta del control por ubicación de polos al ser aplicado a los modelos lineal y no lineal del sistema torsional.	69
29	Controlador PID aplicado al sistema torsional.	70
30	Resultados de simulación obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al modelo no lineal del sistema torsional.	71
31	Acercamiento en la respuesta de simulación.	72

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
32 Primer algoritmo, resultados cuando se utiliza la función signo, y cuando se utilizan sus aproximaciones: funciones saturación y tangente hiperbólica. <i>Arriba izquierda.</i> Respuesta de la salida con cada función. <i>Arriba derecha.</i> Entrada cuando se utiliza la función signo. <i>Abajo izquierda.</i> Entrada cuando se utiliza la función saturación. <i>Abajo derecha.</i> Entrada cuando se utiliza la función tangente hiperbólica.	73
33 Segundo algoritmo, resultados cuando se utiliza la función signo, y cuando se utilizan sus aproximaciones: funciones saturación y tangente hiperbólica. <i>Arriba izquierda.</i> Respuesta de la salida con cada función. <i>Arriba derecha.</i> Entrada cuando se utiliza la función signo. <i>Abajo izquierda.</i> Entrada cuando se utiliza la función saturación. <i>Abajo derecha.</i> Entrada cuando se utiliza la función tangente hiperbólica	74
34 Resultados experimentales obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al sistema torsional.	75

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Ganancias empleadas en los diferentes algoritmos	51
II	Lineamientos de comparación aplicados a los diferentes algoritmos . . .	53
III	Ganancias empleadas en los diferentes algoritmos	72
IV	Criterios de evaluación	76

Capítulo I

Introducción

Un sistema mecánico es un conjunto de elementos dinámicamente relacionados cuyos movimientos son el resultado de la aplicación de fuerzas o pares externos. Dicho conjunto se puede ver como un sistema de control donde las fuerzas externas son las entradas de control y de perturbación, las variables que describen los movimientos de los elementos del sistema son los estados y las salidas son funciones de los estados. Al número mínimo de variables necesarias para describir completamente la posición y orientación de todos los elementos del sistema se le conoce como número de grados de libertad (GDL). En Seto y Baillieul (1994) se define un sistema subactuado como aquel sistema controlado en el cual el número de GDL es mayor al número de entradas de control.

Los sistemas mecánicos subactuados se presentan en aplicaciones tales como robots espaciales y submarinos, móviles y flexibles, caminadores y gimnastas. Los sistemas mecánicos subactuados surgen de diversas formas, por ejemplo diseñándolos, como sucede con el Acrobot (Spong, 1995) y en el Pendubot (Spong y Block, 1995); otro ejemplo es cuando un brazo manipulador se sujeta a una plataforma móvil sobre la cual no se tiene control; un ejemplo más es un sistema en el que la articulación presente flexibilidad. De lo anterior se concluye que la clase de sistemas mecánicos subactuados abarca un gran número de aplicaciones y problemas de control.

Para el caso de sistemas completamente actuados existen técnicas para el diseño de controladores óptimos, robustos, adaptivos y con aprendizaje (Spong *et al.*, 1992),

cuya aplicación es posible debido a que los sistemas completamente actuados poseen propiedades que facilitan el diseño de controladores tales como linealizabilidad por retroalimentación, pasividad, condiciones de igualación (*matching*) y parametrizabilidad lineal. En sistemas subactuados sin embargo una o más de las propiedades mencionadas se pierde, por ejemplo, un sistema subactuado con una no-linealidad en la articulación no actuada en general no es linealizable. Además se presentan propiedades no deseadas como fase no mínima y grado relativo grande. Por tales razones el diseño de controladores para sistemas subactuados se vuelve complicado.

Existen artículos representativos que analizan algunos problemas acerca de sistemas subactuados, estos análisis incluyen el estudio de accesibilidad (Reyhanoglu *et al.*, 1999), estabilización del equilibrio por medio de técnicas de pasividad (Ortega *et al.*, 2002) y moldeo de energía (Bloch *et al.*, 2000), estabilización y seguimiento de trayectorias por medio de control “backstepping” (Seto y Baillieul, 1994), el uso de restricciones virtuales para producir oscilaciones estables (Shiriaev *et al.*, 2005), planificación de trayectorias (Bullo y Lynch, 2001), y control de sistemas mecánicos con una variable no actuada cíclica (Grizzle *et al.*, 2005), entre otros.

Normalmente, en el diseño de controladores para sistemas subactuados se considera despreciable la fuerza de fricción, o a lo sumo, se considera que ésta es proporcional a la velocidad (fricción viscosa). En años recientes algunos trabajos se han dirigido al control de sistemas mecánicos con fricción. En Gómez-Estern y van der Schaft (2004), Woolsey *et al.* (2001) y Woolsey *et al.* (2004) se considera fricción lineal (fricción viscosa) en las articulaciones de sistemas subactuados. Sin embargo, esta fuerza es un fenómeno físico que generalmente es no lineal y no suave.

La fricción seca se define como un fuerza que se opone al movimiento relativo entre dos superficies de diferentes cuerpos en contacto. Los cuerpos se “atascan” (“stick”)

cuando la velocidad relativa entre las superficies es cero. Si los cuerpos se deslizan, se dice que se “resbalan” (“slip”). Un modelo de fricción seca debe describir la fase de stick y slip (Leine, 2000). Para sistemas mecánicos subactuados con fricción discontinua sólo en las articulaciones actuadas el problema de compensación, en algunos casos, puede ser resuelto usando control discontinuo (Riachy *et al.*, 2006).

Recientemente se propusieron algoritmos de control para algunas clases de sistemas mecánicos subactuados de dos grados de libertad con fricción discontinua en la articulación no actuada (Martínez Ortiz, 2007). Los algoritmos propuestos trabajan con sistemas como los siguientes:

- Un manipulador planar subactuado con fricción viscosa y de Coulomb en ambas articulaciones, con movimiento sólo en el plano horizontal y donde el objetivo de control es llevar la articulación no actuada a una posición deseada, mientras que la actuada es acotada y converge a una posición desconocida.
- Un sistema masa-resorte-amortiguador con fricción discontinua sólo en la articulación no actuada, donde el objetivo de control es llevar la articulación no actuada a una posición deseada, manteniendo acotadas la posición y velocidad de la articulación actuada.
- Sistemas como el péndulo invertido y el péndulo con disco inercial con fricción discontinua en la articulación no actuada, donde el objetivo de control es la regulación de ambas articulaciones.

Si bien los algoritmos propuestos en Martínez Ortiz (2007) son aplicables solamente a una clase restringida de sistemas subactuados de dos grados de libertad, muestran propiedades interesantes sobre convergencia del error de regulación a cero, así como

robustez frente a cierto tipo de incertidumbres paramétricas. Particularmente trabajamos con controladores para una clase de sistemas subactuados de 2 GDL con fricción discontinua en la articulación no actuada. El objetivo de control es la regulación de la articulación no actuada mientras que la posición y la velocidad de la articulación actuada permanecen acotadas. Ya que la articulación no actuada es perturbada (“controlada”) únicamente por la posición y velocidad de la actuada, las cuales son consideradas continuas, la articulación no actuada puede ser considerada como un sistema mecánico con fricción discontinua pero con una entrada de control artificial continua dada por un término que depende de la posición y la velocidad de la articulación actuada. Este “control” debe ser dinámico para poder eliminar el error en estado estacionario. En Martínez Ortiz (2007) se propone un método para el diseño de un control virtual dinámico ideal que garantiza un error cero en estado estacionario y además propone utilizar un control por modos deslizantes para calcular la entrada de control física en la articulación actuada que lleve el control virtual a su valor ideal en tiempo finito.

Siendo nuevos estos algoritmos de control para sistemas subactuados, es importante realizar una evaluación experimental de su desempeño y compararlos con otros controladores. Para ello, en este trabajo de tesis se hace una comparación de su desempeño con el desempeño de algoritmos de control bien conocidos, como lo son el control por retroalimentación de estado y el control con acciones proporcional, integral y derivativa (PID). La comparación se hace aplicando los diferentes controladores a dos sistemas mecánicos del laboratorio de control del CICESE: el sistema rectilíneo (planta rectilínea modelo 210) y el sistema torsional (aparato torsional modelo 205), ambos de la compañía ECP. Dicha comparación se realiza tanto con simulaciones numéricas como mediante resultados experimentales.

I.1 Objetivos

El objetivo general de este trabajo de tesis es evaluar el desempeño de dos controladores para sistemas subactuados con fricción discontinua en la articulación no actuada propuestos en Martínez Ortiz (2007) y a los cuales llamaremos Algoritmo I y Algoritmo II.

Dicho objetivo se realizará cumpliendo con los siguientes objetivos particulares:

- Establecer el procedimiento para diseñar y aplicar los algoritmos bajo evaluación.
- Establecer los lineamientos de comparación.
- Aplicar los diferentes algoritmos al modelo matemático de dos sistemas mecánicos del laboratorio de control y comprobar su funcionamiento por medio de simulaciones.
- Aplicar los diferentes algoritmos a los dispositivos mecánicos.
- Comparar resultados numéricos y desempeño experimental de los diferentes algoritmos.

I.2 Panorama del documento

A continuación se presenta brevemente el orden y el contenido del documento. El capítulo I contiene el material introductorio a la tesis. En el capítulo II se presentan algunos antecedentes importantes relacionados con los mecanismos con que se trabaja. En el capítulo III presenta el modelo que tiene la clase de sistemas a los cuales se pueden aplicar los algoritmos bajo evaluación (sección III.1), en la sección III.2 se expone la idea general del diseño de los algoritmos, en las secciones III.3 y III.4 se

expone el procedimiento para el cálculo del control con el Algoritmo I y el Algoritmo II respectivamente. La sección III.5 reproduce resultados con los cuales se dieron a conocer los algoritmos bajo evaluación (presentados originalmente en Martínez Ortiz (2007)). En la sección III.6 se exponen los aspectos que se tomarán en cuenta para llevar a cabo la evaluación de los algoritmos y, finalmente, en la sección III.7 se mencionan algunas conclusiones sobre el capítulo. En los capítulos IV y V se trabaja con el sistema rectilíneo y el sistema torsional respectivamente, y tienen la misma estructura, que es la siguiente: La sección 1 presenta la configuración con que se trabaja el sistema; la configuración elegida cumple con los requisitos para aplicar los algoritmos. En la sección 2 se ajustan los parámetros del modelo de manera que los resultados numéricos y los datos experimentales tengan respuestas similares en lazo abierto, ante una entrada de referencia arbitraria. En la sección 3 se aplica el procedimiento establecido en el capítulo III para el Algoritmo I. El Algoritmo II se aplica en la sección 4. Un control por ubicación de polos y un control con acciones PID se aplican en las secciones 5 y 6, respectivamente. En la sección 7 se evalúa el desempeño de los diferentes algoritmos de control por medio de comparaciones numérica y experimental. Los capítulos terminan con algunas conclusiones derivadas de la evaluación presentadas en la sección 8. Las conclusiones del documento se exponen en el capítulo VI.

Capítulo II

Antecedentes

En este capítulo se exponen algunos conceptos y resultados que permiten un mejor entendimiento de la importancia que tienen los algoritmos que se expondrán en el capítulo siguiente.

II.1 Fricción

“La fricción es un fenómeno físico inevitable, éste se manifiesta como una fuerza que se opone al movimiento entre dos superficies en contacto” González Elías (2000).

II.1.1 Fricción estática máxima

Es la fuerza mínima necesaria para iniciar el desplazamiento macroscopico entre dos superficies en contacto (Olsson, 1996). El modelo matemático que se utiliza para representar este tipo de fricción considera que la fuerza de fricción es una proporción de la fuerza normal que ejerce una superficie sobre la otra

$$f_s = \mu_s n, \quad (1)$$

donde f_s es la fricción estática máxima, μ_s es el coeficiente de fricción estática y n es la fuerza normal. La idea de esta fuerza de fricción fue introducida por Leonardo Da Vinci en el siglo XV, además introdujo la idea de que la fuerza de fricción es independiente del área de la superficie en contacto.

II.1.2 Fricción Cinética

La fricción entre dos superficies que están en “reposo” (no hay movimiento entre ellas) no es igual a la fricción cuando hay un desplazamiento entre ellas (Olsson, 1996). De acuerdo con los experimentos que realizaron Charles A. Coulomb y G. Amontons en el siglo XVIII, una vez que se ha establecido un desplazamiento entre las superficies, este movimiento se puede sostener a velocidad constante con una fuerza menor a la necesaria para iniciar el movimiento. Un modelo de fricción cinética es el siguiente:

$$f_k = \mu_k n, \quad (2)$$

donde f_k es la fricción cinética, μ_k es el coeficiente de fricción cinética y n es la fuerza normal. Otro modelo, conocido como modelo de fricción de Coulomb, es el siguiente

$$F_c = f_c \text{sign}(\dot{q}), \quad (3)$$

donde F_c es la fricción de Coulomb, f_c es el coeficiente de fricción de Coulomb y \dot{q} es la velocidad y la función $\text{sign}(\cdot)$, llamada función signo está definida de la siguiente forma

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & \text{para } z > 0, \\ \in [-1, 1] & \text{para } z = 0, \\ -1, & \text{para } z < 0. \end{cases} \quad (4)$$

II.1.3 Fricción Viscosa

Aunque se podría suponer que el uso de lubricantes es para reducir la fricción, esto no es del todo cierto, los lubricantes forman una película entre las superficies, reduciendo así el desgaste de las partes que están en continuo rozamiento. La fricción debida a la viscosidad del lubricante se genera de la siguiente forma: conforme las superficies se deslizan en dirección contraria, cada una trata de jalar la cara correspondiente de la

película formada por el lubricante, produciendo un corte transversal en ella que trata de ser evitado por la misma viscosidad del lubricante, generando de esta forma una fuerza que se opone al movimiento. La fuerza viscosa se representa como una función directamente proporcional a la velocidad de desplazamiento, esto se debe a que, entre mayor es la velocidad de desplazamiento mayor es la fuerza generada por la viscosidad:

$$F_v = f_v \dot{q}, \quad (5)$$

donde F_v es la fuerza de fricción generada por la viscosidad del lubricante, f_v es el coeficiente de fricción viscosa y \dot{q} es la velocidad.

A diferencia de μ_s y f_c (o μ_k), el coeficiente f_v depende del área de las superficies en contacto, además depende de la geometría de las superficies y de la temperatura del lubricante.

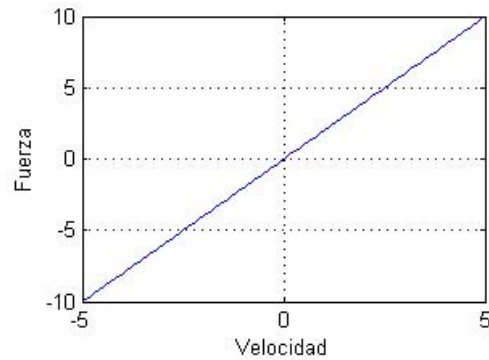
II.1.4 Efecto Stribeck

En 1902 R. Stribeck llevó a cabo experimentos a velocidad constante de baja amplitud (Olsson, 1996), mostrando que para esas velocidades la fricción tiene un comportamiento como el que se muestra en la figura 1d. Este fenómeno, conocido como efecto Stribeck, describe la transición entre fricción estática máxima y la fricción cinética (o de Coulomb). De acuerdo a modelos propuestos en algunos trabajos (Bartolini y Punta, 2000), el efecto Stribeck puede ser aproximado por la siguiente expresión

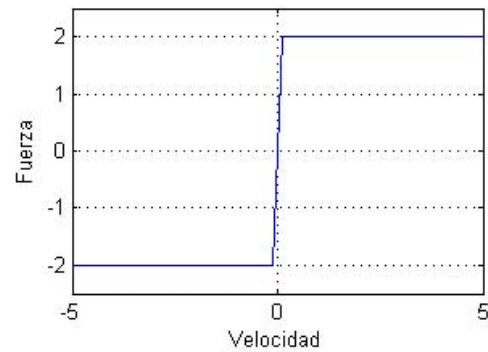
$$F = \left[f_c + (f_s - f_c) \exp\left(-\frac{\dot{q}^2}{v_s^2}\right) \right] \text{sign}(\dot{q}), \quad (6)$$

donde F es la fuerza de fricción, f_s es la fricción estática máxima, f_c es el coeficiente de fricción de Coulomb, \dot{q} es la velocidad entre las superficies y v_s es el coeficiente de velocidad de Stribeck.

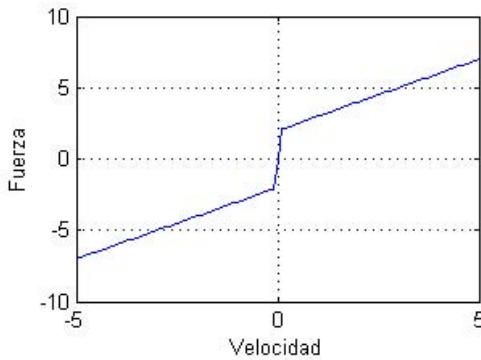
La figura 1 muestra el comportamiento de la fuerza de fricción de acuerdo con los modelos de fricción viscosa (a); fricción de Coulomb (b); modelo clásico (c), que es la combinación de fricciones viscosa y de Coulomb; y efecto Stribeck (d).



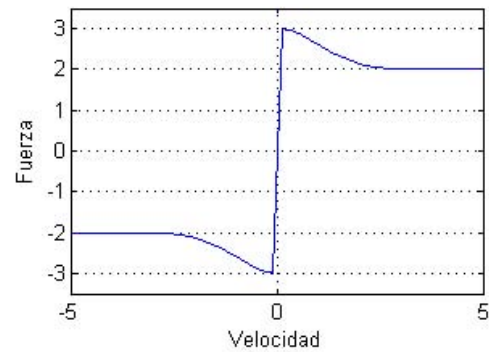
(a) Fricción viscosa.



(b) Fricción de Coulomb.



(c) Combinación de fricciones viscosa y de Coulomb.



(d) Modelo Stribeck

Figura 1. Comportamiento de la fuerza de fricción de acuerdo con diferentes modelos. (a) Modelo de fricción viscosa. (b) Modelo de fricción de Coulomb. (c) Modelo clásico. (d) Efecto Stribeck.

II.1.5 Efectos de la fricción

La presencia de fricción puede producir comportamientos dinámicos no tradicionales como intervalos de equilibrio, variedades deslizantes, ciclos límite, bifurcaciones y caos.

Esto se puede ver si se utiliza el método de la función descriptiva (Khalil, 2002), en el cual un sistema no lineal se representa como un sistema lineal $G(s)$ retroalimentado por medio de una no linealidad $\psi(\cdot)$ (figura 2). Para el caso particular de fricción seca, la no linealidad se representa de la siguiente forma

$$\psi(y) = \text{sign}(y), \quad (7)$$

donde la función $\text{sign}(\cdot)$ tiene la forma dada por (4) y cuya función descriptiva es

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}. \quad (8)$$

El sistema exhibirá un ciclo límite si el grado relativo de $G(s)$ es mayor o igual a 3. Esto se concluye de la figura 3, que muestra que la gráfica de Nyquist de $G(s)$ siempre interseca el inverso negativo de la función descriptiva correspondiente a la no linealidad (7). Es claro que estas condiciones pueden satisfacerse fácilmente cuando se tiene un sistema mecánico con fricción de Coulomb, controlado por un algoritmo de control lineal tipo PID o similar.

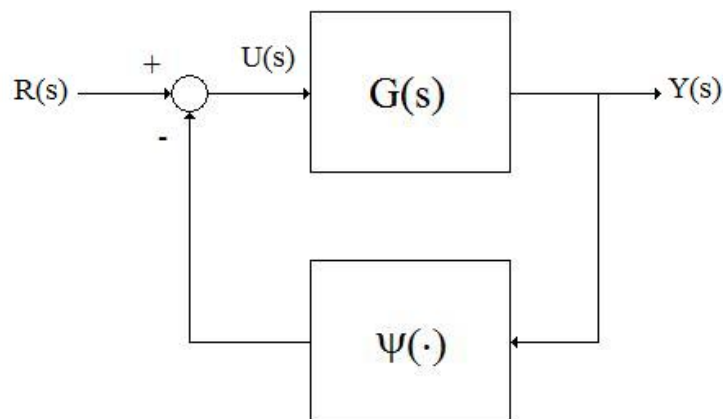


Figura 2. Diagrama a cuadros de un sistema no-lineal representado como un sistema lineal retroalimentado por una no-linealidad.

Por otra parte la aplicación directa de la condición de Breckett (Liberzon, 2003) permite concluir que la presencia de términos discontinuos puede conducir a la imposibilidad de estabilizar un sistema mediante controles estáticos y continuos. Esta situación puede complicarse todavía más para el caso de sistemas subactuados. Como conclusión, es muy posible que un control eficiente pueda realizarse solamente con controladores discontinuos, dinámicos variantes en el tiempo.

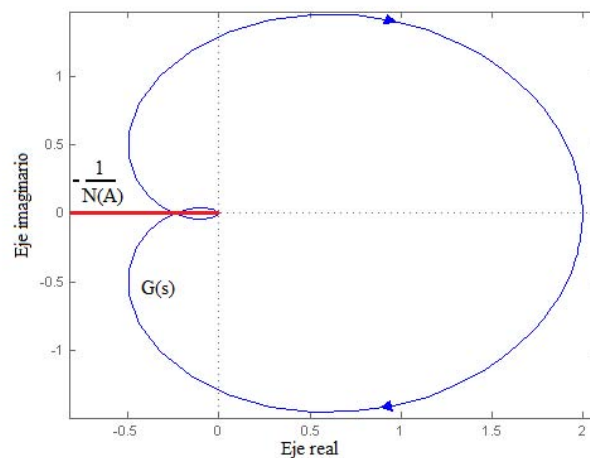


Figura 3. Nyquist de un sistema no-lineal de cuarto orden (similar a los que se tratarán posteriormente) y cuya no-linealidad se describe por medio de la función signo.

Dada la naturaleza discontinua tanto de los sistemas como de los controladores, la presencia de modos deslizantes se convierte en un factor importante a analizar. En la siguiente sección se expondrán algunos conceptos básicos sobre modos deslizantes y su uso para el diseño de controladores robustos.

II.2 Control por Modos Deslizantes

En el control por modos deslizantes se busca un controlador que lleve el estado del sistema, con el cual se trabaja, a una superficie (llamada superficie de deslizamiento o

superficie de discontinuidad), predefinida dentro del espacio del estado, y mantenga el estado dentro de esa superficie. El comportamiento dinámico del sistema cuando está dentro de la superficie se describe como un modo deslizante ideal. Una ventaja que se tiene al obtener este comportamiento es que hay una reducción en el orden; es decir, el sistema se comporta como uno de orden menor, y la otra ventaja que se obtiene es la insensibilidad del sistema a variaciones paramétricas implícitas en la entrada. Con esta segunda ventaja se tiene en el Control por Modos Deslizantes una metodología para diseñar controladores robustos para sistemas con incertidumbres acotadas en la entrada.

El diseño del control consta de dos partes, primero está el diseño de una superficie en el espacio de estado que cumpla con el objetivo de control y segundo, determinar una ley de control, discontinua con respecto a la superficie, que lleve el estado del sistema retroalimentado a la superficie de deslizamiento.

Una vez que se aplica el control, se tiene primero una etapa de alcance, en la cual el estado del sistema se lleva a la superficie, durante esta etapa el sistema se ve afectado por las incertidumbres; y después se tiene una segunda etapa, que es cuando el estado llega a la superficie de deslizamiento, sólo entonces el sistema se vuelve insensible a las incertidumbres. Idealmente el control se diseña de tal forma que la etapa de alcance sea lo más corta posible.

En sistemas mecánicos, el uso de una ley de control discontinua no producirá un deslizamiento ideal. Debido a efectos como retardo e histéresis se inducirá una dinámica de alta frecuencia en el sistema, conocida como chattering, esto ocurre debido a que el estado conmuta de un lado al otro de la superficie en lugar de mantenerse dentro de ella. Tal comportamiento es no deseable debido al desgaste que provoca.

Debido a que la ley de control es discontinua, la ecuación diferencial que representa

al sistema retroalimentado presenta una discontinuidad del lado derecho. Estrictamente hablando, la teoría clásica de ecuaciones diferenciales no se puede aplicar a este tipo de sistemas debido a que no cumple con la condición de Lipschitz, que se utiliza para garantizar la existencia de una solución única. El concepto de solución de ecuaciones diferenciales con discontinuidad del lado derecho fue propuesto por Filippov (1964), en él construye una solución que es el “promedio” de las soluciones obtenidas al acercarse al punto de discontinuidad por diferentes direcciones. Si x_0 es un punto de discontinuidad en la superficie de deslizamiento S y, $F^-(t, x_0)$ y $F^+(t, x_0)$ representan los límites de $F(t, x)$ al acercarse a x_0 de lados opuestos del “plano” tangente a S en x_0 , la solución se obtiene de

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha) F^-(t, x_0) + \alpha F^+(t, x_0),$$

donde el escalar $0 < \alpha < 1$ es tal que el vector

$$F_a = (1 - \alpha) F^- + \alpha F^+$$

es tangente a la superficie S .

En la práctica no se puede obtener un modo deslizante ideal, debido a histeresis, retardos y errores en el modelado se produce chattering alrededor de la superficie de deslizamiento. La idea de un *Control Equivalente* que mantenga el estado dentro de S , es decir, un control que produzca un modo deslizante ideal fue propuesta por Utkin (1977).

La superficie de deslizamiento¹ debe atraer hacia sí al estado del sistema, al menos localmente, esto se expresa matemáticamente como

$$\dot{s} < 0 \text{ cuando } s \rightarrow 0^+ \text{ y } \dot{s} > 0 \text{ cuando } s \rightarrow 0^-, \quad (9)$$

¹Ejemplo de cómo proponer una superficie de deslizamiento pueden encontrarse en Edwards y Spurgeon (1998)

dentro de un conjunto $\Omega \subset R^n$. Otra forma de escribir esto es

$$\dot{s}s < 0, \quad (10)$$

y es llamada condición de alcance. Si la condición de alcance se satisface globalmente, esto es, $\Omega = R^n$, entonces, ya que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s\dot{s},$$

la función

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2,$$

es una función de Lyapunov. Sin embargo, la condición de alcance no garantiza un modo deslizante ideal, sólo garantiza que la superficie de deslizamiento se alcanza de forma asintótica, esto es, s tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Una condición más estricta para garantizar que se alcanza un modo deslizante ideal es:

$$\dot{s}s \leq \eta|s|,$$

donde η es una constante positiva. Recordando que $\dot{s} = ds/dt$ e integrado de 0 a t_a , se tiene que

$$|s(t_a)| - |s(0)| \leq -\eta t_a,$$

por lo tanto el tiempo que tarda el estado en llegar a $s = 0$, representado por t_a , satisface

$$t_a \leq \frac{|s(0)|}{\eta}.$$

II.3 Conclusiones

La fricción es un fenómeno presente en todos los sistemas mecánicos. En presencia de fricción seca un control tipo PID o similar puede producir un ciclo límite. Sin embargo,

es posible que un control por modos deslizantes sea eficiente al ser aplicado a sistemas con fricción seca. En el siguiente capítulo se presenta un procedimiento para el cálculo del control con los algoritmos bajo evaluación, en estos algoritmos se tiene una forma para calcular una superficie de deslizamiento que después se utiliza para aplicar el control por modos deslizantes.

Capítulo III

Control de Sistemas Subactuados con Fricción Seca

En este capítulo se describe el modelo de la clase de sistemas mecánicos subactuados para los cuales es posible diseñar un control por medio de los algoritmos bajo evaluación. El objetivo es regular la posición de la unión subactuada, manteniendo acotadas la posición y la velocidad de la unión actuada.

Se describen igualmente dos algoritmos de control: un algoritmo básico, cuyo diseño se explica con detalle, y otro algoritmo muy similar, pero que mejora el desempeño del primero para ciertos casos. Para ambos algoritmos se establece un procedimiento que facilita el diseño del mismo. Igualmente, se establecen los criterios que permitirán evaluar el desempeño de los algoritmos propuestos, mediante una comparación con algoritmos de control bien conocidos, en particular el controlador con acciones Proporcional-Integral-Derivativa (PID) y el controlador por ubicación de polos. Estos controladores son “básicos” en la teoría de control y además no toman en cuenta la fricción, el PID sólo se basa en el error del sistema y el de ubicación de polos trabaja con modelos lineales.

En la sección 1 de este capítulo se establece el modelo matemático de la clase de sistemas subactuados para los que es posible diseñar un controlador. En la sección 2 se presenta la idea general de diseño de los controladores, la sección 3 presenta un procedimiento de diseño establecido para el primer algoritmo bajo evaluación y en la sección 4 se presenta lo propio para el segundo algoritmo. La sección 5 expone

resultados de simulación obtenidos con los algoritmos bajo evaluación. En la sección 6 se establecen los elementos de comparación para llevar a cabo la evaluación de los algoritmos.

III.1 Modelo de una clase de sistemas mecánicos subactuados

Los algoritmos de control que se evalúan en este documento son aplicables a sistemas mecánicos subactuados de dos grados de libertad con fricción discontinua en la articulación no actuada y cuyo modelo matemático cumple con la estructura que a continuación se muestra,

$$\ddot{q}_1 = f_0(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + g_0(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)u_1, \quad (11)$$

$$\ddot{q}_2 = f_1(q_2, \dot{q}_2) - C(\dot{q}_2)\text{sign}(\dot{q}_2) + g_1q_1 + g_2\dot{q}_1, \quad (12)$$

donde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, f_0, g_0, f_1 son funciones suaves, $g_0 \neq 0$, y u_1 es la entrada de control. $C(\dot{q}_2)$ es el módulo de los términos de fricción (propuesto en Bartolini y Punta (2000)), descrito por

$$C(\dot{q}_2) = C_{2c} + (C_{2s} - C_{2c}) \exp\left(-\frac{\dot{q}_2^2}{v_{2s}^2}\right), \quad (13)$$

donde C_{2s} y C_{2c} son el nivel de fricción de Coulomb y el nivel de fricción estática divididos por una masa constante, con $0 \leq C_{2c} \leq C_{2s}$, y v_{2s} es la velocidad de Stribeck.

Se consideran las suposiciones siguientes:

S1 La derivada de la función f_1 , denotada por $f_2(q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2) = df_1(q_2, \dot{q}_2)/dt$, es continua en sus argumentos.

S2 Los coeficientes g_1 y g_2 son tales que $g_1 \neq 0$ y, si $g_2 \neq 0$, entonces $\text{sign}(g_2) = \text{sign}(g_1)$.

Al término $g_1q_1 + g_2\dot{q}_1$, que corresponde a una combinación lineal de la posición y la velocidad de la parte actuada, se denotará como σ , al que se llamará “control virtual”.

$$\sigma = g_1q_1 + g_2\dot{q}_1. \quad (14)$$

Un ejemplo de un sistema cuyo modelo cumple con la estructura dada por (11), (12) es el mostrado en la figura 4, que es un sistema masa-resorte-amortiguador de 2 GDL y un actuador, con un resorte que une la articulación actuada a tierra y otro uniendo las dos articulaciones. El modelo del sistema es el siguiente.

$$\ddot{q}_1 = -\frac{k_a}{m_1}q_1 - \frac{k_b}{m_1}(q_1 - q_2) + \frac{f_b}{m_1}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{1}{m_1}u_1, \quad (15)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{k_b}{m_2}q_2 + \frac{f_b}{m_2}\dot{q}_2 - C(\dot{q}_2)\text{sign}(\dot{q}_2) - \frac{k_b}{m_2}q_1 - \frac{f_b}{m_2}\dot{q}_1, \quad (16)$$

donde m_1 y m_2 representan las masas de los bloques 1 y 2 respectivamente; q_1 , \dot{q}_1 y \ddot{q}_1 representan la posición, velocidad y aceleración de m_1 ; q_2 , \dot{q}_2 y \ddot{q}_2 representan la posición, velocidad y aceleración de m_2 ; k_a y k_b son las constantes de los resortes, f_b la constante del amortiguador y u_1 la acción de control.

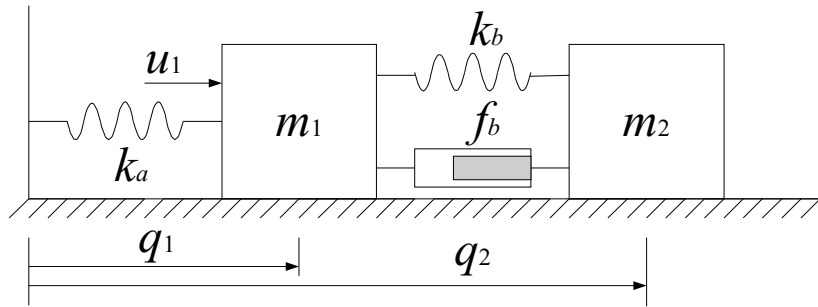


Figura 4. Sistema masa-resorte-amortiguador subactuado de dos grados de libertad con fricción seca en m_2 .

III.2 Procedimiento general de diseño

La idea general del procedimiento de diseño para el control de un sistema subactuado de dos grados de libertad es dividir el diseño en dos etapas. Considere que el sistema está descrito por el modelo siguiente:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 - \phi_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) &= u_1, \\ \ddot{q}_2 - \phi_2(q_2, \dot{q}_2) - \sigma(q_1, \dot{q}_1) &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Entonces, dado que la parte actuada afecta la no actuada mediante el término σ , éste puede utilizarse como acción para controlar la posición q_2 . Si denotamos $u = \sigma$, entonces la parte subactuada estará descrita por

$$\ddot{q}_2 = \phi_2(q_2, \dot{q}_2) + \sigma.\tag{18}$$

Se propone entonces el procedimiento general siguiente:

1. Diseñar un control continuo $\hat{\sigma}$ para (18) tal que, si $\sigma = \hat{\sigma}$, se satisfaga que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_2 = q_{2d}.$$
2. Diseñar un control u_1 mediante el cual se logre que el control virtual σ converja en tiempo finito a $\hat{\sigma}$.

El requerimiento de continuidad del control virtual σ es una consecuencia de suponer continuidad de las trayectorias de estado, condición razonable particularmente en sistemas mecánicos. Por otra parte, el requerimiento de convergencia en tiempo finito T es importante para asegurar que, para $t \geq T$, el sistema (18) es activado por una entrada $\sigma = \hat{\sigma}$, por lo que q_2 será llevada al valor deseado q_{2d} .

III.3 Algoritmo I

Los algoritmos con que se trabaja son los propuestos en *Control de sistemas mecánicos subactuados con fricción discontinua* (Martínez Ortiz, 2007) y en *A Controller for 2-DOF Underactuated Mechanical Systems with Discontinuous Friction* (Martínez Ortiz y Álvarez Gallegos, 2009).

III.3.1 Procedimiento de diseño

Consideremos el sistema mecánico subactuado representado por (11) y (12). Este tiene la forma (17), con $\phi_1 = f_0$, $\tau_1 = g_0 u_1$, $\phi_2 = f_1 - C(\cdot)\text{sgn}(\dot{q}_2)$ y $\sigma = g_1 q_1 + g_2 \dot{q}_1$.

Siguiendo el procedimiento general de diseño, la articulación no actuada es considerada como un sistema mecánico de un grado de libertad, en este caso con fricción discontinua, cuya entrada de control (llamada “control virtual”) depende de la posición y la velocidad de la articulación actuada, q_1 y \dot{q}_1 , respectivamente.

Si se definen

$$x_1 = q_2 - q_{2d}, \quad x_2 = \dot{q}_2, \quad x_3 = \ddot{q}_2 = f_1(q_2, \dot{q}_2) - C(\dot{q}_2)\text{sign}(\dot{q}_2) + \sigma, \quad (19)$$

entonces este subsistema puede representarse, para $\dot{q}_2 \neq 0$, mediante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= f_2(x_1 + q_{2d}, x_2, x_3) + \frac{2(C_{2s} - C_{2c})}{v_{2s}^2} |x_2| \exp\left(-\frac{x_2^2}{v_{2s}^2}\right) x_3 + \dot{\sigma}, \end{aligned} \quad (20)$$

donde $f_2 = \dot{f}_1$. Obsérvese que si $x = (x_1, x_2, x_3)^T = 0$, entonces $q_2 = q_{2d}$, por lo que se busca ahora una forma de garantizar un diseño para σ de tal forma que $\dot{\sigma}$ asegure la convergencia de las trayectorias de x del sistema (20) al origen.

Una forma de llevar el sistema (20) al origen es propuesta en Martínez Ortiz (2007). Para ello, se supone que existe una expresión para σ , que denotaremos como $\hat{\sigma}(x)$, de tal forma que si $\dot{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}}(x)$ en (20), éste adquiere la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 + \frac{2(C_{2s}-C_{2c})}{v_{2s}^2} |x_2| \exp\left(-\frac{x_2^2}{v_{2s}^2}\right) x_3 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Para ello, considérense las matrices P and $Q(x)$ dadas por

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad Q(x_2) = \begin{bmatrix} k_{q22}(x_2) & k_{q23}(x_2) \\ k_{q23}(x_2) & k_{q33}(x_2) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

donde los elementos de $Q(x)$ están definidos por

$$\begin{aligned} k_{q22} &= -2p_{12} + 2p_{23}k_2, \\ k_{q23} &= -p_{22} + p_{23} [k_3 - f_4] + p_{33}k_2, \\ k_{q33} &= -2p_{23} + 2p_{33} [k_3 - f_4], \end{aligned}$$

donde f_4 está dada por

$$f_4 = \frac{2(C_{2s} - C_{2c})}{v_{2s}^2} |x_2| \exp\left(-\frac{x_2^2}{v_{2s}^2}\right).$$

Entonces se tiene el siguiente teorema, demostrado en Martínez Ortiz (2007).

Theorem 1 *Supóngase que la matriz Q es definida positiva para toda $x_2 \in \mathbb{R}$, que la matriz P es también definida positiva y satisface*

$$p_{13} = 0, \quad \frac{p_{11}}{p_{23}} = \frac{p_{12}}{p_{33}} = k_1. \quad (23)$$

Entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable del sistema (21).

Una forma de $\dot{\hat{\sigma}}$ que convierte el sistema (20) al sistema (21) es la siguiente,

$$\dot{\hat{\sigma}} = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 - f_2(x_1 + q_{2d}, x_2, x_3). \quad (24)$$

Una vez calculada $\hat{\sigma}$ de acuerdo a (24), es posible diseñar un control por modos deslizantes para τ_1 (Edwards y Spurgeon, 1998) que asegure la convergencia de σ a $\hat{\sigma}$ en tiempo finito.

III.4 Algoritmo II

Como se verá más adelante, el algoritmo de control de la sección anterior tiene en general un buen desempeño y proporciona un error cero en estado estacionario, aún cuando la fricción discontinua produzca atascamientos del sistema mecánico. Sin embargo, en ocasiones el tiempo que le lleva al controlador sacar al sistema de la zona de atascamiento puede ser largo. Para mejorar la respuesta ofrecida por este controlador y tener la posibilidad de disminuir el tiempo de atascamiento, en Martínez Ortiz (2007) se propone una ligera modificación de este algoritmo. Para ello se propone que el control virtual “ideal” $\hat{\sigma}$ lleve el sistema (20) a la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 + \frac{2(C_{2s}-C_{2e})}{v_{2s}^2} |x_2| \exp\left(-\frac{x_2^2}{v_{2s}^2}\right) x_3 + \tau_1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

$\dot{\hat{\sigma}}$ está dado ahora por

$$\dot{\hat{\sigma}} = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 - f_2(x_1 + q_{2d}, x_2, x_3) + \tau_1, \quad (26)$$

donde τ_1 se propone que tenga la forma

$$\tau_1 = k_4 (-1 + |\beta(x_2)|) \beta(x_1), \quad (27)$$

con

$$\beta(z) = \begin{cases} 1, & \text{para } z > 0, \\ 0, & \text{para } z = 0, \\ -1, & \text{para } z < 0; \end{cases} \quad (28)$$

y k_4 una constante.

En este caso, el término τ_1 es diferente de cero solamente cuando $x_2 = 0$ (*i.e.* el sistema está atascado) y toma el signo adecuado, basándose en el signo de x_1 , para reducir el tiempo de atascamiento.

III.5 Ejemplo motivacional

En esta sección se repiten los resultados de simulación presentados en Martínez Ortiz (2007) al aplicar los algoritmos I y II al sistema de la figura 4. Con este ejemplo se pretende mostrar que los algoritmos funcionan al ser aplicados a un sistema con fricción seca en la articulación no actuada y que el Algoritmo II mejora el desempeño del Algoritmo I. Los valores de los parámetros son: $k_a = k_b = 1\text{N/m}$, $f_b = 1\text{N}/(\text{m/s})$, $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$, $C_{2s} = 1\text{N/kg}$, $C_{2c} = 0.75\text{N/kg}$, $v_{2s} = 0.143\text{m/s}$.

Control con el Algoritmo I

El aplicar el Algoritmo I produce la siguiente superficie de deslizamiento

$$s = \frac{f_b}{m_2} \dot{q}_1 + \frac{k_b}{m_2} q_1 + k_1 \int_{t_0}^t (q_2(\tau) - q_{2d}) d\tau + k_2 (q_2 - q_{2d}) + k_{c3} \dot{q}_2 - \frac{k_b}{m_2} q_2, \quad (29)$$

donde $k_{c3} = k_3 - f_b/m_2$. El control u_1 es

$$u_{1a} = m_1 \left(\frac{k_a}{m_1} q_1 + \frac{k_b}{m_1} (q_1 - q_2) + \frac{f_b}{m_1} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \tau_x \right), \quad (30)$$

donde

$$\tau_x = -\frac{m_2}{f_b} \left[\frac{k_b}{m_2} \dot{q}_1 + \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2} \right) \dot{q}_2 - \frac{f_b k_{c3}}{m_2} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - \frac{k_b k_{c3}}{m_2} (q_2 - q_1) + \tau_y \right], \quad (31)$$

con $\tau_y = k \text{sign}(s) + k_1(q_2 - q_{2d})$ y $k > |k_{c3}|C_{2s}$. Las ganancias del controlador son: $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1.5$ y $k_3 = 3$.

Control con el Algoritmo II

Al aplicar el Algoritmo II se tiene que el control u_1 es

$$u_{1b} = m_1 \left(\frac{k_a}{m_1} q_1 + \frac{k_b}{m_1} (q_1 - q_2) + \frac{f_b}{m_1} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \tau_a \right), \quad (32)$$

donde

$$\tau_a = -\frac{m_2}{f_b} \left[\frac{k_b}{m_2} \dot{q}_1 + \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2} \right) \dot{q}_2 - \frac{f_b k_{c3}}{m_2} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - \frac{k_b k_{c3}}{m_2} (q_2 - q_1) + \tau_b \right], \quad (33)$$

con $\tau_b = k_5 \text{sign}(s) + k_1(q_2 - q_{2d})$, $k_5 > |k_{c3}|C_{2s} + k_4$. La superficie de deslizamiento para dicho control es

$$s = \frac{f_b}{m_2} \dot{q}_1 + \frac{k_b}{m_2} q_1 + \int_{t_0}^t [k_1(q_2(\tau) - q_{2d}) - \tau_1(\tau)] d\tau + k_{c2}(q_2 - q_{2d}) + k_{c3} \dot{q}_2, \quad (34)$$

donde $k_{c2} = k_2 - k_b/m_2$, $k_{c3} = k_3 - f_b/m_2$ y

$$\tau_1(t) = -k_4 \text{sign}(q_2(t) - q_{2d}) + k_4 |\beta(\dot{q}_2(t))| \text{sign}(q_2(t) - q_{2d}).$$

Las ganancias del controlador son: $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1.5$, $k_3 = 3$ y $k_4 = 20$.

La figura 5 muestra los resultados obtenidos al aplicar los controles u_{1a} y u_{1b} , en ella se ve que ambos controladores llevan la salida al valor deseado aún a pesar de la fricción seca, además se tiene que con el Algoritmo I la salida se “atasca” durante aproximadamente 5 segundos, cosa que no sucede con el Algoritmo II.

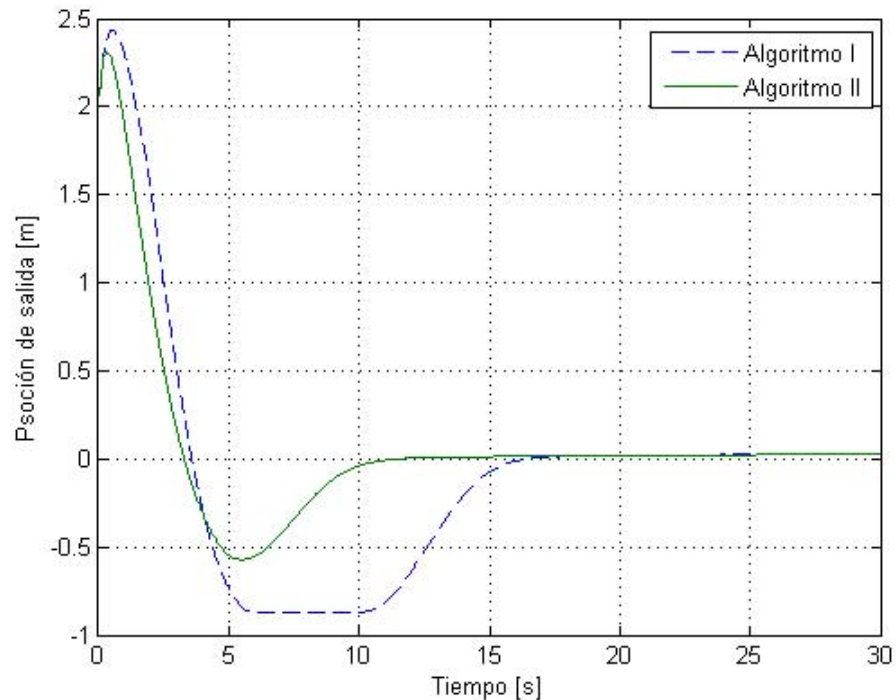


Figura 5. Respuesta.

III.6 Lineamientos de comparación

Considerando los objetivos de esta tesis, en esta sección se especifican algunos criterios que serán utilizados para evaluar el desempeño de los controladores descritos en las secciones anteriores.

Es importante comparar el desempeño de los dos algoritmos con otros controladores ya conocidos (el controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) y el controlador por ubicación de polos), al ser aplicados específicamente a sistemas subactuados de dos grados de libertad que presenten fricción discontinua en la articulación no actuada. La comparación se realizará analizando diferentes aspectos importantes en el desempeño, como son los siguientes:

Número de parámetros Uno de los factores que determinan la complejidad de aplicar

un algoritmo es el número de parámetros (“ganancias”) que se necesita sintonizar. Mientras mayor sea el número de parámetros por determinar, mayor será el número de operaciones necesarias para determinarlos, complicando el desarrollo del algoritmo e incrementando el tiempo que toma aplicarlo.

Rapidez de respuesta Como ya se ha mencionado, el objetivo de control de los algoritmos analizados es el de regulación, en este caso, llevar la articulación no actuada a una posición deseada. Uno de los aspectos más importantes es “qué tan rápido” un sistema llega a la posición deseada al estar bajo la acción de un controlador. Puede definirse el **tiempo de estabilización** o **tiempo de asentamiento** como el tiempo que se requiere para que el valor que se desea regular alcance el valor deseado con cierto margen de error especificado y se mantenga dentro de ese margen.

Error en estado estacionario Para un sistema de control de posición, la respuesta en estado estacionario cuando se compara con la posición de referencia deseada da una indicación de la exactitud final del sistema. En general, si la respuesta en estado estacionario de la salida no concuerda exactamente con la referencia deseada, se dice que el sistema tiene un **error en estado estable**. En el mundo real, debido a la fricción y otras imperfecciones, así como a la composición natural del sistema, la respuesta de salida en estado estable rara vez concuerda exactamente con la referencia. En consecuencia, los errores en estado estable en sistemas de control son casi inevitables. En un problema de diseño, uno de los objetivos es mantener el error en estado estable al mínimo, o por debajo de cierto valor tolerable.

Entrada de control Es importante considerar el esfuerzo de control, medido por la

amplitud, por el contenido energético y por el contenido de alta frecuencia. El primer valor define la factibilidad de aplicación, puesto que la magnitud de esta variable debe permanecer dentro de los límites físicos impuestos por la infraestructura tecnológica utilizada. A su vez, la energía y el contenido de alta frecuencia definen el costo de operación del sistema controlado y afectan la vida media de los dispositivos del controlador.

Sobrepaso máximo Es la desviación máxima que toma la salida (posición de la articulación no actuada), con respecto a su valor en estado estacionario, después del instante inicial.

Complejidad Es un criterio cualitativo que considera la dificultad de entendimiento de las metodologías utilizadas en el diseño del controlador, así como el esfuerzo de cálculo de los parámetros de sintonización.

III.7 Conclusiones

En este capítulo se vió el modelo de los sistemas a los cuales se puede aplicar los algoritmos I y II. También se presentó un procedimiento para aplicar cada algoritmo, lo cual permitirá llevar cabo el cálculo del control con cada algoritmo de forma metódica en los siguientes capítulos.

Además se presentaron resultados que muestran que tanto el Algoritmo I como el Algoritmo II son capaces de vencer la fricción seca y llevar la posición de la articulación no actuada al valor deseado.

Por último se presentaron los criterios que se tomarán en cuenta para hacer una evaluación objetiva de los algoritmos I y II. En el siguiente capítulo se hace una e-

valuación de los algoritmos al ser aplicados a un sistema masa-resorte-amortiguador y posteriormente, en el capítulo V se hace una segunda evaluación de los algoritmos al ser aplicados a un sistema torsional, en ambos capítulos se hace uso tanto del procedimiento establecido como de los lineamientos de evaluación.

Capítulo IV

Control de un Sistema Mecánico Rectilíneo

En este capítulo se presenta la aplicación de los algoritmos de control descritos en el capítulo anterior a un sistema mecánico rectilíneo, model 210, de la compañía ECP (Educational Control Products), mostrado en la figura 6. Este sistema puede ser uti-

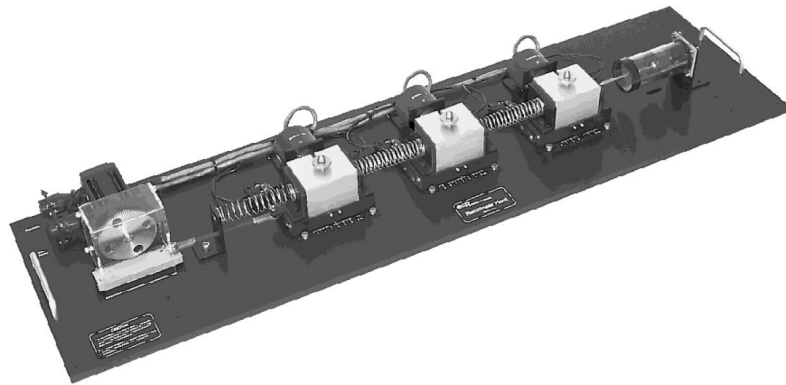


Figura 6. Sistema mecánico rectilíneo ECP210.

lizado en una variedad de configuraciones dinámicas que representan clases importantes de sistemas reales. Entre esos sistemas se incluyen: sistemas de cuerpo rígido; transductores lineales flexibles, engranes y bandas flexibles; etc. El sistema consiste de tres partes, que son:

Parte electromecánica. Consiste del actuador, sensores y el mecanismo masa-resorte-amortiguador, el cual tiene una variedad de configuraciones que va de uno hasta tres grados de libertad.

Unidad de control en tiempo real. Contiene un procesador digital de señales, interfaces, amplificadores, fuentes auxiliares y convertidores digital-analógico.

Interface. Es el programa de interface entre el usuario y el sistema. Para todos los casos estudiados, tanto en este capítulo como en el siguiente, el programa utilizado es Simulink®.

En la primera sección de este capítulo se describe la configuración del sistema que será utilizada. El modelo de esta configuración debe cumplir con la estructura dada por (11) y (12). La sección 2 presenta el procedimiento que se siguió para ajustar los parámetros del sistema, tomando como base los proporcionados por el manual del proveedor (Parks, 1999b). En la sección 3 se lleva a cabo el diseño del Algoritmo I y se exponen algunos resultados numéricos, mientras la sección 4 presenta lo propio para el Algoritmo II. Las secciones 5 y 6 presentan los resultados numéricos para el control por retroalimentación de estado y control PID. En la sección 7 se hacen las comparaciones entre los diferentes algoritmos, con resultados tanto numéricos como los obtenidos mediante la aplicación al sistema físico. Finalmente, en la sección 8 se exponen algunas conclusiones de acuerdo con los resultados obtenidos.

IV.1 Configuración del sistema

Al elegir la configuración del sistema se debe asegurar que el modelo de dicha configuración cumpla con la estructura dada por (11) y (12). La configuración elegida se muestra en la figura 7.

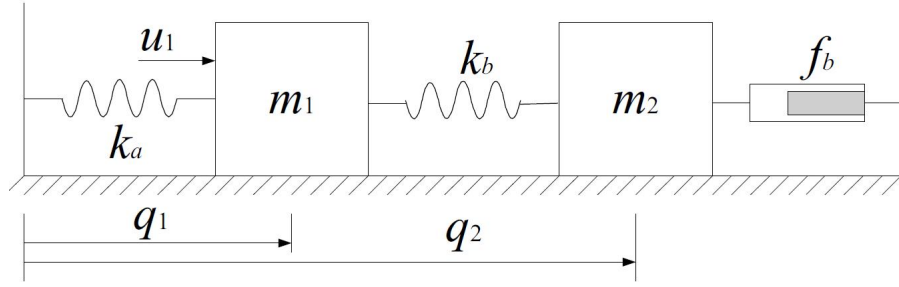


Figura 7. Configuración del sistema masa-resorte-amortiguador.

El modelo matemático correspondiente al sistema de la figura 7 es

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \frac{k_a}{m_1}q_1 + \frac{k_b}{m_1}(q_1 - q_2) &= \frac{1}{m_1}u_1, \\ \ddot{q}_2 - \frac{k_b}{m_2}(q_1 - q_2) + \frac{f_b}{m_2}\dot{q}_2 + C_2(\dot{q}_2)\text{sign}(\dot{q}_2) &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$C(\dot{q}_2) = C_{2c} + (C_{2s} - C_{2c}) \exp\left(-\frac{\dot{q}_2^2}{v_{2s}^2}\right), \quad (36)$$

q_1 , \dot{q}_1 y \ddot{q}_1 son la posición, velocidad y aceleración de la articulación actuada; q_2 , \dot{q}_2 y \ddot{q}_2 son la posición, velocidad y aceleración de la articulación no actuada; k_a y k_b son las constantes de los resortes, m_1 y m_2 son las masas de las articulaciones actuada y no actuada, respectivamente; C_{2c} y C_{2s} son los niveles de fricción de Coulomb y estática divididos entre una masa constante, y v_{2s} es la velocidad de Stribeck.

IV.2 Ajuste de parámetros

El manual del sistema rectilíneo (Parks, 1999b) indica ciertos valores de parámetros; sin embargo, en el mismo se menciona que dichos valores son aproximaciones y recomienda determinar esos parámetros por medio de mediciones especificadas en el mismo manual. No obstante, en lugar de llevar a cabo la determinación de los parámetros, se optó

por ajustar los indicadores en el manual por medio del procedimiento especificado a continuación.

1. Se tomaron mediciones de las posiciones para el sistema en lazo abierto, excitado con entradas tipo escalón, de diferente amplitud.
2. Se graficaron las respuestas utilizando la paquetería de Matlab®.
3. Se hizo un programa, utilizando la paquetería Simnon®, para simular el sistema con diferentes entradas tipo escalón.
4. Se ajustaron los parámetros utilizados en el programa para aproximar los resultados obtenidos de la simulación a las mediciones realizadas.

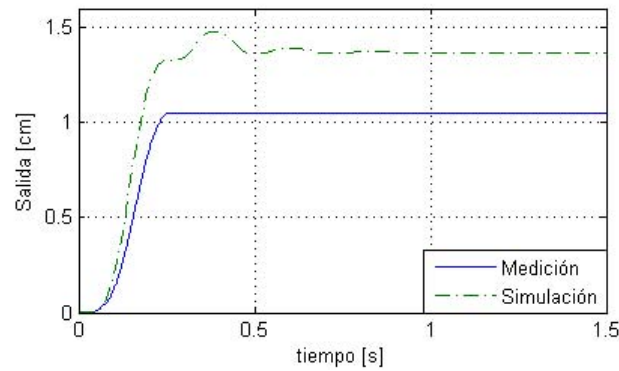
La figura 8 muestra las respuestas numéricas, obtenidas de la simulación del sistema, comparadas con la respuesta experimental para entradas tipo escalón de 3N y 4N, respectivamente. De las gráficas de la figura 8 se puede ver que hay una diferencia notable entre la respuesta del sistema real (medición) y la respuesta del sistema simulado, tanto por el error en estado estacionario como por el sobretiro y tiempo de estabilización, si bien tienen un tiempo de estabilización parecido. Aún así, los errores en el modelo permitirán mostrar la robustez de los controladores frente a incertidumbres paramétricas, ya que, como se verá posteriormente, aún con las diferencias entre el sistema real y el simulado, el Algoritmo I y el Algoritmo II llevan al sistema al valor deseado.

Después de hacer los ajustes se obtuvieron los siguientes valores de parámetros:

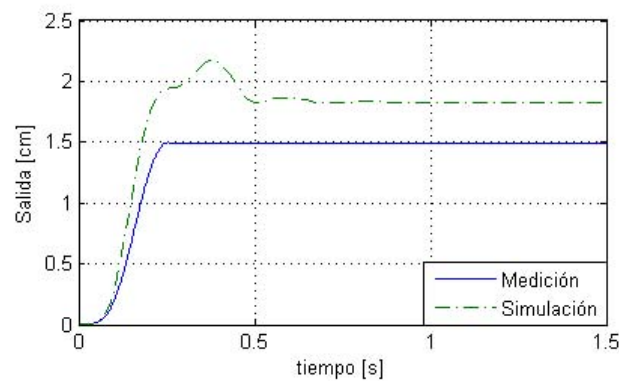
$$f_b = 7.5\text{N}/(\text{m/s}), \quad k_a = 220\text{N/m}, \quad k_b = 440\text{N/m}, \quad m_1 = 0.95\text{kg},$$

$$m_2 = 1.11\text{kg}, \quad C_{2c} = 0.5\text{N/kg}, \quad C_{2s} = 0.6\text{N/kg}, \quad v_{2s} = 0.1\text{m/s}.$$

Una vez que se determinaron los valores de los parámetros que serían utilizados en los cálculos se procedió a aplicar el Algoritmo I al sistema Masa-Resorte-Amortiguador



(a) Escalón de 3N



(b) Escalón de 4N

Figura 8. Resultados numéricos y experimentales del sistema MRA en lazo abierto con un escalón como entrada de control.

de la figura 7, esto se presenta en la siguiente sección.

IV.3 Cálculo del control con el Algoritmo I

En esta sección se aplica el controlador llamado Algoritmo I al sistema de la figura 7. Primero se calcula el control resultante, posteriormente se eligen los valores de las ganancias y por último se muestra la robustez del sistema controlado ante variaciones en el parámetro f_b , utilizado para proponer el valor de una de las ganancias que simplifique el cálculo del control. A continuación se aplica el procedimiento establecido en el

capítulo anterior.

1. Se escribe (35) en la forma de (11)

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= -\frac{k_a}{m_1}q_1 - \frac{k_b}{m_1}(q_1 - q_2) + \frac{1}{m_1}u_1, \\ \ddot{q}_2 &= -\frac{k_b}{m_2}q_2 - \frac{f_b}{m_2}\dot{q}_2 - C_2(\dot{q}_2)\text{sign}(\dot{q}_2) + \frac{k_b}{m_2}q_2,\end{aligned}$$

donde se identifican $\sigma = \frac{k_b}{m_2}$ y $f_1(q_2, \dot{q}_2) = -\frac{k_b}{m_2}q_2 - \frac{f_b}{m_2}\dot{q}_2$. El sistema para la parte no actuada es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\frac{k_b}{m_2}x_2 - \frac{f_b}{m_2}x_3 + \frac{2(C_{2s}-C_{2c})}{v_{2s}^2}|x_2|\exp\left(-\frac{x_2^2}{v_{2s}^2}\right)x_3 + \dot{\hat{\sigma}} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

donde se identifica $f_2(x_1 + q_{2d}, x_2, x_3) = -\frac{k_b}{m_2}x_2 - \frac{f_b}{m_2}x_3$.

2. La derivada del control virtual $\dot{\hat{\sigma}}$ debe ser tal que el sistema llegue a la forma dada por (21), es decir,

$$\dot{\hat{\sigma}} = -k_1x_1 - \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2}\right)x_2 - \left(k_3 - \frac{f_b}{m_2}\right)x_3.$$

3. El control por modos deslizantes se calcula utilizando la superficie de discontinuidad

$$\begin{aligned}s &= \dot{\sigma} - \dot{\hat{\sigma}}, \\ &= \frac{k_b}{m_2}\dot{q}_1 + k_1x_1 + \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2}\right)x_2 + \left(k_3 - \frac{f_b}{m_2}\right)x_3.\end{aligned} \quad (38)$$

Por simplicidad, se propone $k_3 = \frac{f_b}{m_2}$, por lo tanto la superficie de deslizamiento queda

$$s = \frac{k_b}{m_2}\dot{q}_1 + k_1x_1 + \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2}\right)x_2, \quad (39)$$

y el control resultante es

$$\begin{aligned} u_1 &= k_a q_1 + k_b (q_1 - q_2) + \frac{m_1 m_2}{k_b} (-k_1 \dot{q}_2 - \gamma \text{sign}(s) + \tau), \\ \tau &= - \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2} \right) \left(-\frac{k_b}{m_2} q_2 - \frac{f_b}{m_2} \dot{q}_2 + \frac{k_b}{m_2} q_1 \right), \end{aligned}$$

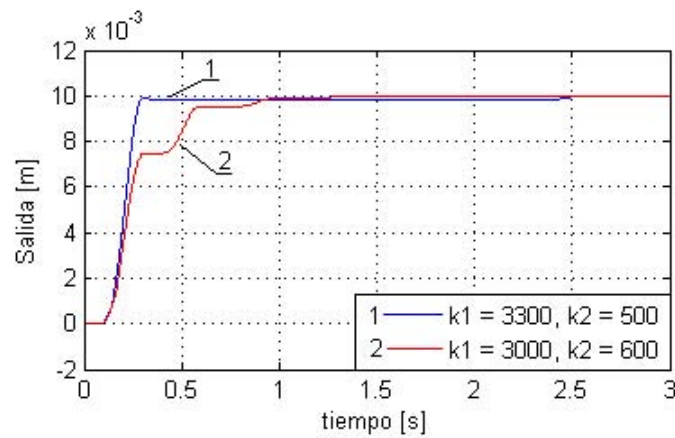
donde $\gamma > \left| k_2 - \frac{k_b}{m_2} \right| C_{2s}$ para asegurar la convergencia a la superficie $s = 0$.

4. Para simplificar la sintonización de los parámetros del controlador (constantes k_i), las cuales deben satisfacer las condiciones del Teorema 1, se propone calcular dichas constantes que establezcan la parte lineal del modelo del sistema para la articulación no actuada. Éste tiene la forma

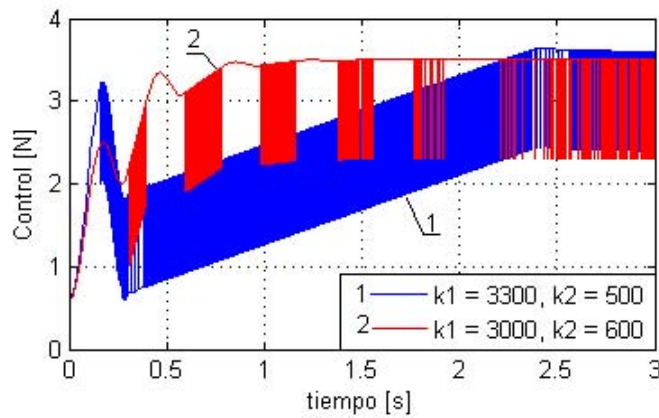
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

y se propone utilizar el método de Routh-Hurwitz (Ogata, 1997) para el cálculo de las ganancias k_i . Lo anterior da como resultado que los parámetros del controlador deben satisfacer las restricciones $k_1 < k_2 k_3 = 6.7567 k_2$ y $k_1, k_2 > 0$. De esta gama de valores se seleccionan las k_i que satisfagan el Teorema 1.

De acuerdo con las simulaciones realizadas, algunos de los mejores resultados se obtuvieron para los valores $(k_1, k_2) = (3300, 500)$ y $(k_1, k_2) = (3000, 600)$. En la figura 9 se muestran los resultados obtenidos con dichos valores, de esta figura se puede ver que los valores $(k_1, k_2) = (3300, 500)$ producen una respuesta más rápida, de ahí que se eligieran estos valores para, posteriormente, realizar experimentos.



(a) Respuesta de la salida



(b) Entrada de control

Figura 9. Resultados de simulación del “Algoritmo I” para dos juegos de constantes k_1 y k_2 .

IV.3.1 Robustez ante incertidumbre paramétrica en $\frac{f_b}{m_2}$

En el cálculo del control se propuso el valor del parámetro $k_3 = f_b/m_2$, reduciendo así el número de constantes por calcular y simplificando además el cálculo del control (se simplificó la expresión para la superficie deslizante, s , de (38) a (39)). Sin embargo, los valores de f_b y m_2 obtenidos en la parte de *ajuste de parámetros* (sección 2 de este capítulo) son una aproximación a los valores reales, de ahí que sea necesario comprobar la robustez del controlador ante variaciones en la relación f_b/m_2 .

En las figuras 10 y 11 se muestra la sensibilidad del sistema en lazo cerrado ante variaciones en el término f_b/m_2 . En los casos mostrados se dejó fijo m_2 y se varió f_b , cuyo valor identificado es 7.5 y con el cual se hacen las comparaciones. En la figura 10 se muestran la respuesta del sistema y la entrada de control, respectivamente, para valores de f_b igual a 0 y 1; y en la figura 11 se muestran los resultados para f_b igual a 15 y 20. Nótese que, aún cuando esta variación es bastante amplia, el error en estado estacionario es cero en todos los casos, y la respuesta transitoria es muy parecida. Esto muestra la robustez del controlador frente a incertidumbres en este parámetro.

IV.4 Cálculo del control con el Algoritmo II

En esta sección se describe la aplicación del controlador llamado Algoritmo II al sistema rectilíneo y se presentan algunos resultados de simulación. El cálculo del control se lleva a cabo aplicando el procedimiento descrito en el capítulo anterior.

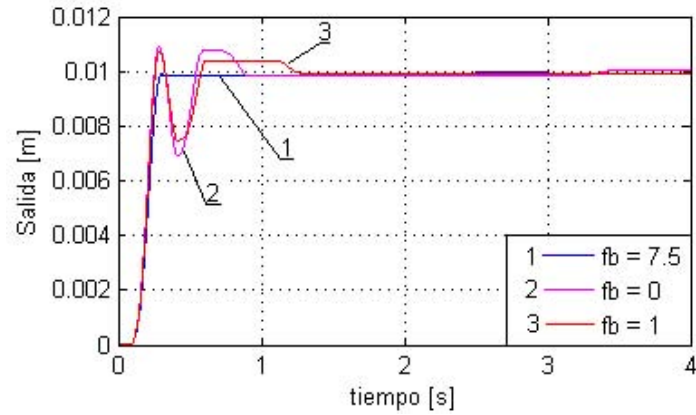
1. Este punto es igual al de la sección anterior.
2. La derivada del control virtual $\dot{\hat{\sigma}}$ está dada por (26), esto es

$$\dot{\hat{\sigma}} = -k_1 x_1 - \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2}\right) x_2 - \left(k_3 - \frac{f_b}{m_2}\right) x_3 + \tau_1,$$

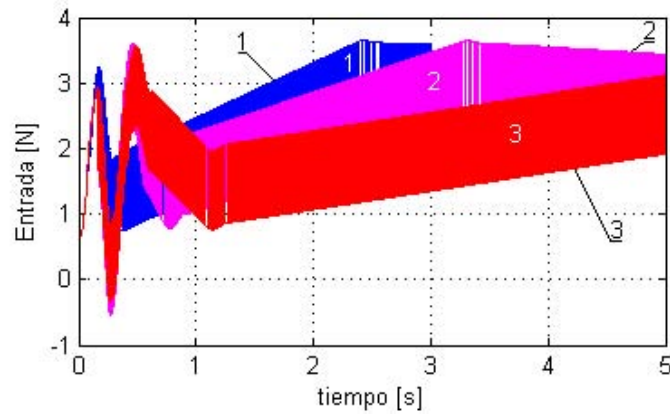
donde τ_1 está dado por (27).

3. El control por modos deslizantes se calcula utilizando la superficie de discontinuidad

$$\begin{aligned} s &= \dot{\sigma} - \dot{\hat{\sigma}}, \\ &= \frac{k_b}{m_2} \dot{q}_1 + k_1 x_1 + \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2}\right) x_2 + \left(k_3 - \frac{f_b}{m_2}\right) x_3 - \tau_1, \end{aligned} \quad (41)$$



(a) Respuesta de la salida



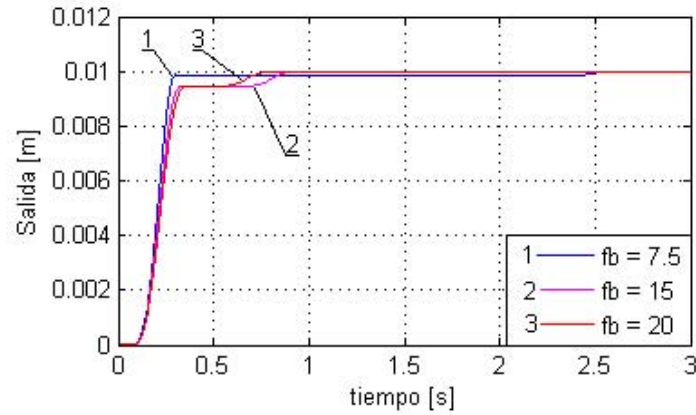
(b) Entrada de control

Figura 10. Resultados de simulación que muestran la robustez del Algoritmo I a variaciones en el parámetro f_b (1).

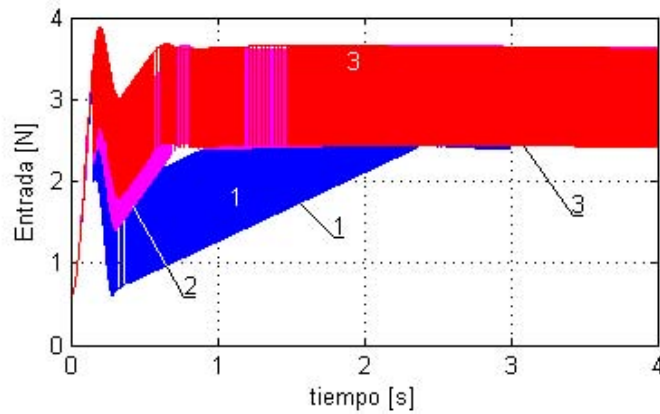
donde igualmente se propone $k_3 = \frac{f_b}{m_2}$, por lo tanto la superficie s queda de la forma

$$s = \frac{k_b}{m_2} \dot{q}_1 + k_1 x_1 + \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2} \right) x_2 - \tau_1. \quad (42)$$

Nótese que la “superficie” de deslizamiento es discontinua. Si bien los problemas tratados en este documento de tesis dan buenos resultados tanto numéricos como experimentales al calcular \dot{s} alrededor de $x_2 = 0$, es decir cuando el sistema no está atascado; El problema de garantizar que una “superficie” de deslizamiento



(a) Respuesta de la salida



(b) Entrada de control

Figura 11. Resultados de simulación que muestran la robustez del Algoritmo I a variaciones en el parámetro f_b (2).

discontinua lleve el estado del sistema aún sigue abierto.

El control resultante es

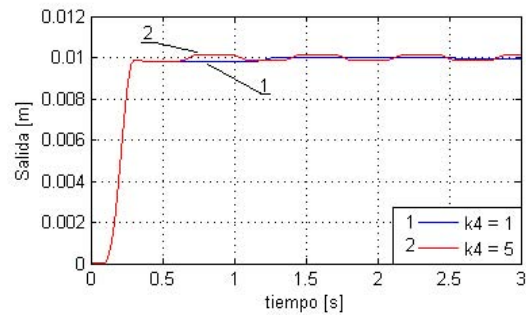
$$u_1 = k_a q_1 + k_b (q_1 - q_2) + \frac{m_1 m_2}{k_b} (-k_1 \dot{q}_2 - \gamma \text{sign}(s) + \tau),$$

$$\tau = - \left(k_2 - \frac{k_b}{m_2} \right) \left(-\frac{k_b}{m_2} q_2 - \frac{f_b}{m_2} \dot{q}_2 + \frac{k_b}{m_2} q_1 \right),$$

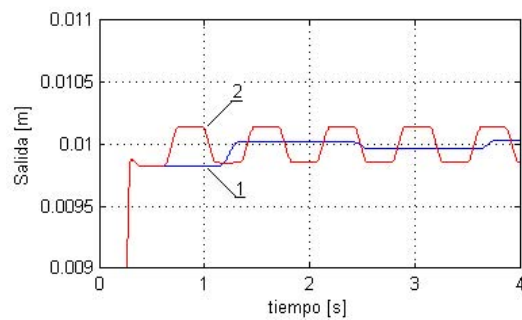
donde $\gamma > \left| k_2 - \frac{k_b}{m_2} \right| C_{2s}$.

4. Se utilizan las constantes seleccionadas en el primer algoritmo ($k_1 = 3300$, $k_2 =$

500 y $k_3 = 6.7567$) y se busca, por medio de simulaciones numéricas, el mejor valor para k_4 (ver ecuación (27)). La figura 12 muestra los resultados obtenidos para valores de $k_4 = 1$ y $k_4 = 5$, cuando se tiene una referencia de 1 cm para la posición no actuada.



(a) Respuesta de la salida



(b) Acercamiento en la respuesta de la salida

Figura 12. Respuesta para dos valores de k_4 del Algoritmo II aplicado al MRA.

Note que un valor grande de k_4 genera una oscilación en la respuesta del sistema (figura 12), por lo que el mejor desempeño se obtiene con valores de este coeficiente cercanos a la unidad.

IV.5 Control por ubicación de polos

Este tipo de control se aplica a sistemas lineales, por lo que utiliza el modelo lineal del sistema (Parks, 1999b). El procedimiento general de diseño consiste en describir primero al sistema en forma de ecuaciones de estado, después realizar una transformación de variables para llevarlo a su forma controlable. Enseguida se proponen los polos deseados para el sistema en lazo cerrado y por último se calculan las ganancias necesarias para obtener dichos polos.

El sistema escrito en forma de ecuaciones de estado es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_a+k_b}{m_1} & \frac{k_b}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_b}{m_2} & -\frac{k_b}{m_2} & 0 & \frac{f_b}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad (43)$$

donde x_1 y x_3 son la posición y la velocidad de la articulación actuada, y x_2 y x_4 son la posición y velocidad de la articulación no actuada.

En el control por ubicación de polos (Ogata, 1997, p. 787) se modifican los polos del sistema en lazo cerrado de tal manera que la dinámica del sistema sea más rápida, es decir, el sistema llegue más rápido al valor deseado. Los polos del modelo lineal del sistema son:

$$p_{1,2} = -1.1 \pm 31.4i,$$

$$p_{3,4} = -2.27 \pm 9.37i.$$

Para que la dinámica del sistema en lazo cerrado sea más rápida se seleccionan polos que estén más a la izquierda del origen, es decir con parte real más negativa. Además, se debe tomar en cuenta que la ley de control que se obtenga será aplicada a un sistema

físico real, y por consiguiente no debe exceder cierto valor (8N). Después de intentar con varios valores de polos, se seleccionaron los siguientes:

$$p_{1,2} = -23 \pm 5i,$$

$$p_{3,4} = -20,$$

para los cuales, el vector de ganancias resultante es

$$K = \begin{pmatrix} 1109.1 & -798 & 74.031 & 35.9 \end{pmatrix}$$

La entrada de referencia necesaria para llevar la articulación no actuada a la posición deseada se determina retroalimentando el sistema con las ganancias calculadas y evaluando en estado estacionario, es decir, se hacen: $q_2 = q_{2d}$ (posición deseada), las derivadas de q_1 y q_2 se hacen cero, y q_1 está por determinarse.

El sistema retroalimentado sobre el cual se hace la evaluación es

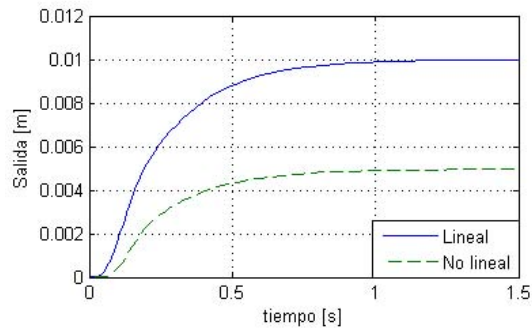
$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1862.2 & 1303.1 & -79.2 & 8.7 \\ 396.4 & -396.4 & 0 & -6.7568 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.053 \\ 0 \end{pmatrix} u_2,$$

donde u_2 es la entrada de referencia. Resolviendo para q_1 y u_2 se tiene que:

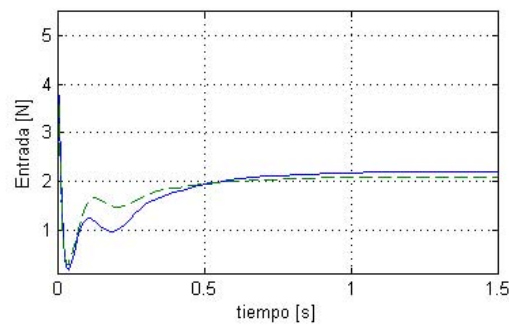
$$q_1 = q_{2d}$$

$$u_2 = 531.085q_{2d}.$$

La figura 13 muestra los resultados de simulación del control por ubicación de polos aplicado a los modelos lineal (43) y no-lineal (35)-(36) del sistema MRA. Debe notarse que, debido a que se toma como base el modelo linealizado en el origen, el simple hecho de que q_{2d} sea diferente de cero producirá errores. Por otra parte se utiliza el sistema linealizado en el origen debido a que lo posición deseada puede ser positiva o negativa.



(a) Respuesta de la salida



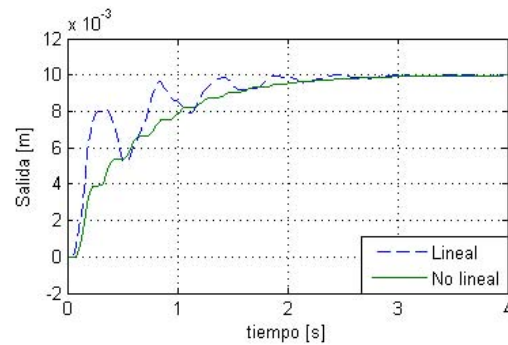
(b) Entrada

Figura 13. Resultado de aplicar el control por ubicación de polos a los modelos lineal (43) y no lineal (35-36) del sistema masa-resorte-amortiguador.

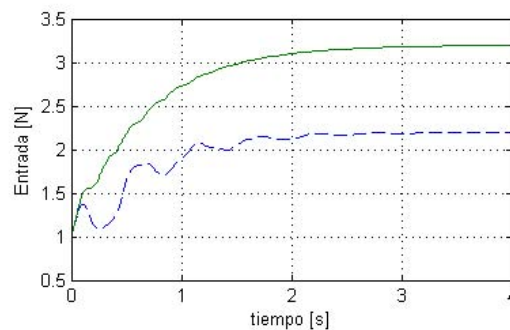
IV.6 Control PID del sistema rectilíneo

El segundo algoritmo de control con el que se compararán los algoritmos para sistemas subactuados es el control con acciones proporcional, integral y derivativa (PID). Este controlador corrige el error entre el valor medido y el valor que se desea obtener mediante acciones correctivas de tres tipos: una acción proporcional al error actual; una acción integral, que depende de la integral del error en el tiempo, y una acción derivativa, la cual depende de la derivada del mismo error. Para elegir las ganancias del controlador primero se propusieron valores utilizando el modelo lineal del sistema, después se seleccionaron las que tuvieran el mejor desempeño al ser aplicadas al modelo no-lineal. Los valores de constantes elegidos son: $k_p = 100$, $k_i = 500$ y $k_d = 0.1$. La respuesta de los

modelos lineal y no lineal se muestran en la figura 14, donde se ve un comportamiento similar en la salida, si bien el sistema no lineal no presenta las oscilaciones que presenta el lineal.



(a) Respuesta de la salida



(b) Entrada

Figura 14. Resultado de aplicar el controlador PID a los modelos lineal y no lineal del sistema rectilíneo.

De acuerdo con los resultados obtenidos ambos sistemas (el lineal y el no-lineal) llegan al valor deseado, sin embargo la entrada de control necesaria para llevar el no-lineal a la posición deseada es mayor a la entrada que se necesita en el lineal.

Hasta ahora se han aplicado los 4 algoritmos de control al modelo del sistema (dado por (35)-(36)) y se han mostrado los resultados de simulación por separado. En la siguiente sección se lleva a cabo una comparación de los resultados ya mostrados para después hacer la comparación de los resultados obtenidos experimentalmente.

IV.7 Evaluación del desempeño

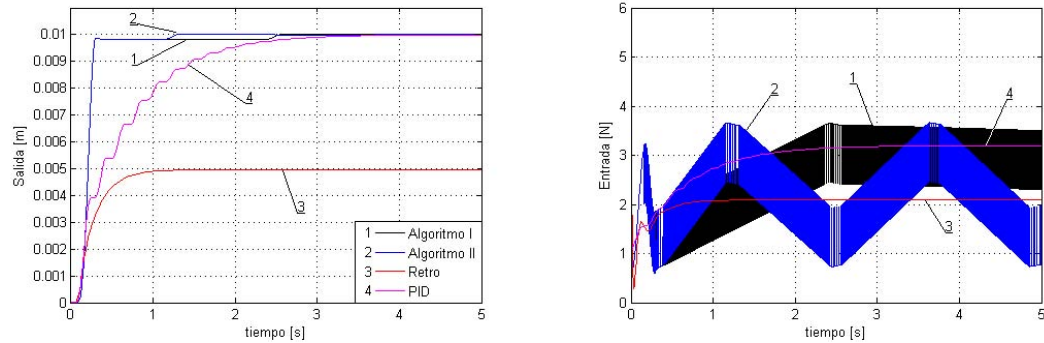
Esta sección junto con la sección V.7 forman la parte principal de este documento de tesis, en ellas se avalúa el desempeño del Algoritmos I y del Algoritmo II. La evaluación se hace comparando los resultados obtenidos con estos algoritmos con los resultados obtenidos con el PID y el control por ubicación de polos tanto de forma numérica (simulaciones) como experimental.

Resultados numéricos

La primera parte en la evaluación del desempeño es comparar los resultados obtenidos numéricamente en los algoritmos de control. La figura 15 muestra el comportamiento del sistema bajo la acción de cada uno de los controladores. La gráfica 15a presenta el comportamiento de la salida, en ella se puede ver que el Algoritmo I y el Algoritmo II se acercan rápidamente al valor deseado pero se “atascan”, el Algoritmo I durante aproximadamente 2 segundos y el Algoritmo II durante 1 segundo, mientras que el Retro de estado *no llega* al valor deseado. La gráfica 15c muestra un acercamiento de la gráfica 15a, en ella se ve que el Algoritmo II es el primero en llegar al valor deseado, llega entre 1 y 1.5 segundos, si bien oscila alrededor del valor deseado; el Algoritmo I llega al valor deseado aproximadamente a los 2.5 segundos y el PID llega después de los 4 segundos.

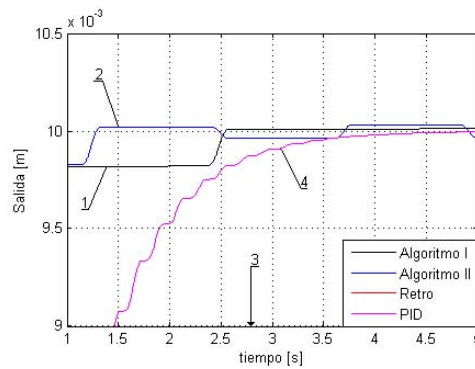
La figura 15b presenta la gráfica de la acción de control de los diferentes controladores, en ella se ve que el PID y el Retro de estado producen una acción de control continua y suave mientras el Algoritmo I y el Algoritmo II producen una acción de control que conmuta a alta frecuencia. Una forma de reducir la conmutación de alta frecuencia en este controlador es utilizar una aproximación a la función signo que

aparece en la ley de control, en el siguiente apartado se presentan resultados en que se utilizan las funciones saturación y tangente hiperbólica como aproximaciones a la función signo.



(a) Respuesta de la salida

(b) Entrada



(c) Acercamiento en la respuesta de la salida

Figura 15. Resultados de simulación obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al modelo no lineal del sistema rectilíneo.

Resultados experimentales

Antes de hacer la comparación experimental entre algoritmos es de gran interés hacer una comparación interna en cada algoritmo, i.e., puesto que en los algoritmos evaluados se utiliza un controlador por modos deslizantes, en el control real aparece una función signo, la cual produce una entrada de control de alta frecuencia. Para reducir ese

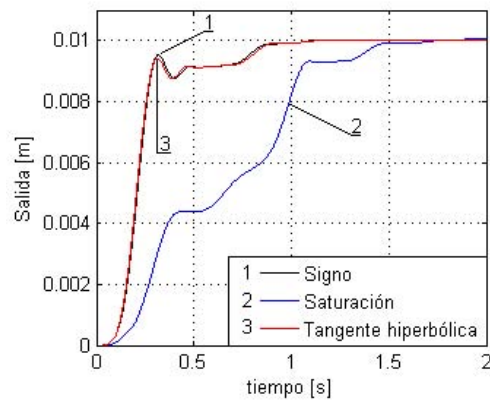
contenido de alta frecuencia se puede utilizar una aproximación a la función signo, dos funciones con las que se puede llevar a cabo esta aproximación son la función saturación y la función tangente hiperbólica.

La figura 16 presenta los resultados experimentales del Algoritmo I, para los casos en que se utiliza la función signo, la función saturación y la función tangente hiperbólica, la figura 17 presenta lo mismo para el Algoritmo II. En la gráfica 16a se ve que la aproximación con la función tangente hiperbólica produce una respuesta muy parecida a la obtenida con la función signo, es decir sin aproximación, mientras que la aproximación con la función saturación perjudica el desempeño del Algoritmo I. Las figuras 16b, 16c y 16d muestran las gráficas de la acción de control que se obtuvo con cada función, en ellas se ve que con la función saturación se logra atenuar, en gran medida, la amplitud de la acción de control mientras que la función tangente hiperbólica reduce sólo un poco la amplitud. En cuanto a frecuencia, ambas aproximaciones reducen ligeramente la frecuencia de conmutación durante pequeños intervalos de tiempo. En la figura 17 se tiene la misma situación para el Algoritmo II. De acuerdo con estas observaciones se eligió utilizar la función tangente hiperbólica en lugar de la función signo para llevar a cabo la comparación entre resultados experimentales de los diferentes algoritmos de control.

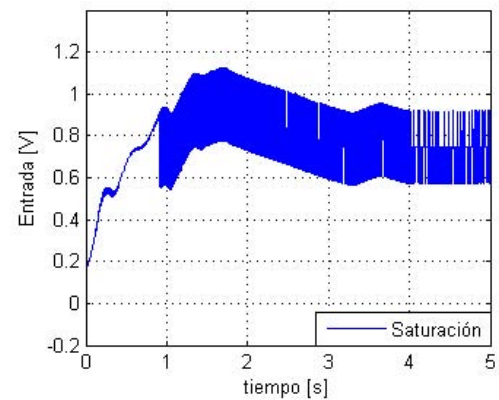
Nota: La comparación entre el signo y sus aproximaciones se hizo con resultados experimentales, sin embargo es recomendable que esta comparación se realice antes de hacer experimentos, es decir con resultados experimentales.

A continuación se prosigió a aplicar los diferentes controladores al sistema físico. La tabla I muestra las ganancias utilizadas con cada controlador.

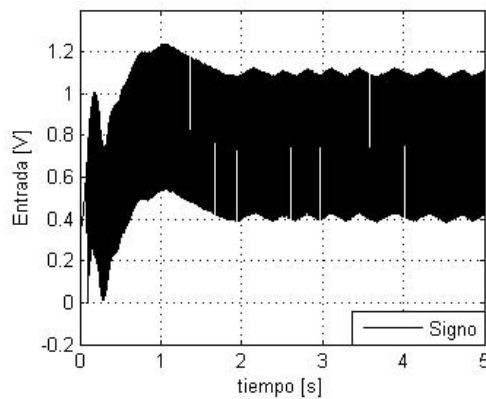
La figura 18 muestra el desempeño de los diferentes algoritmos cuando la posición de referencia es 1cm. De acuerdo con la figura, el Algoritmo II es el que lleva la salida



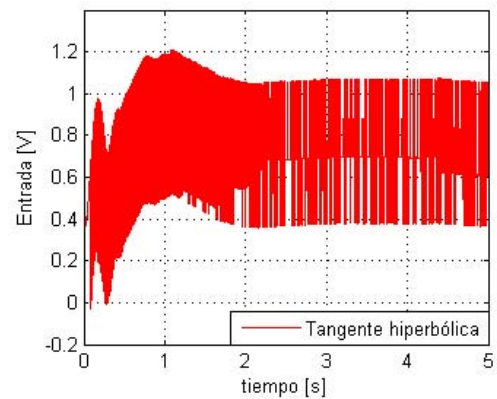
(a) Respuesta de la salida



(b) Entrada con función saturación



(c) Entrada con función signo

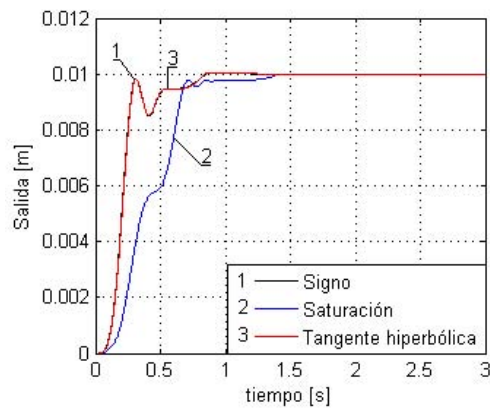


(d) Entrada con función tangente hiperbólica

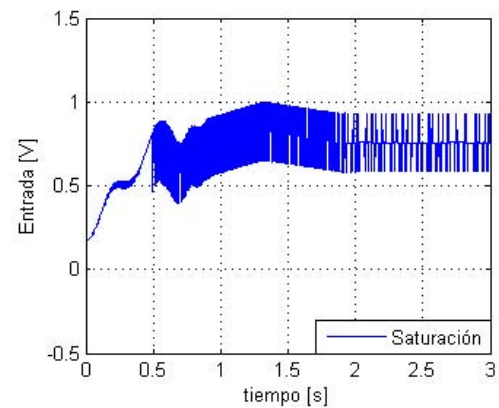
Figura 16. Respuestas del Algoritmo I utilizando las funciones saturación y tangente hiperbólica en lugar de la función signo.

a la posición de referencia en menos tiempo mientras que, con el control por ubicación de polos no se alcanza el valor deseado. En cuanto a la entrada de control, el PID es el que tiene menor contenido de alta frecuencia y el Algoritmo I es el que tiene mayor contenido de alta frecuencia.

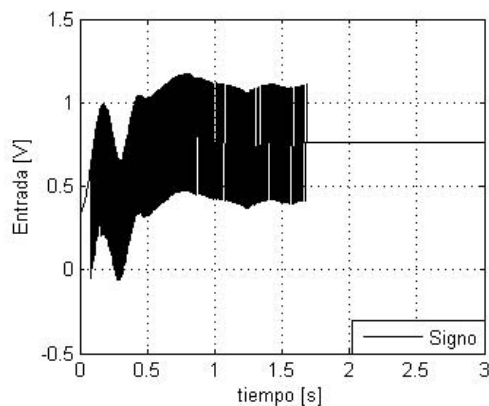
Si bien los Algoritmos I y II están diseñados para llevar a cabo la regulación, resulta interesante ver su desempeño cuando la referencia no es un valor constante sino una señal variante en tiempo. La figura 19 muestra los resultados cuando la referencia es



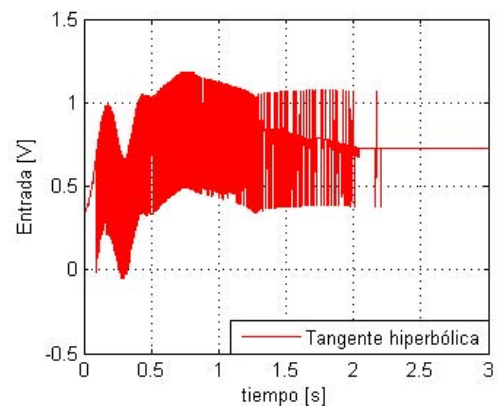
(a) Respuesta de la salida



(b) Entrada con función saturación



(c) Entrada con función signo



(d) Entrada con función tangente hiperbólica

Figura 17. Respuestas del Algoritmo II utilizando las funciones saturación y tangente hiperbólica en lugar de la función signo.

una señal cuadrada que va de 1cm a -1cm. Nuevamente los algoritmos I y II hacen que la articulación no actuada llegue a la posición deseada en menos tiempo que los otros dos controladores, mientras con el control por ubicación de polos no se alcanza la posición deseada. Igual que antes, el controlador PID es el que tiene menor contenido de alta frecuencia en la entrada de control.

En la tabla II se muestra la evaluación de los diferentes algoritmos de acuerdo con los lineamientos de comparación descritos en el capítulo III, en ella se presentan: a) El

Tabla I. Ganancias empleadas en los diferentes algoritmos

Algoritmo	Ganancias			
	k_1	k_2	k_3	
Primer algoritmo	3300	500	6.7567	$G = 600$
Segundo algoritmo	3300	500	6.7567	$G = 600$ $k_4 = 1$
Retro de estado	109.1	-798	74.031	$k_4 = 35.9$ $G = 531.08$
PID	$k_p = 100$		$k_i = 500$	$k_d = 0.1$

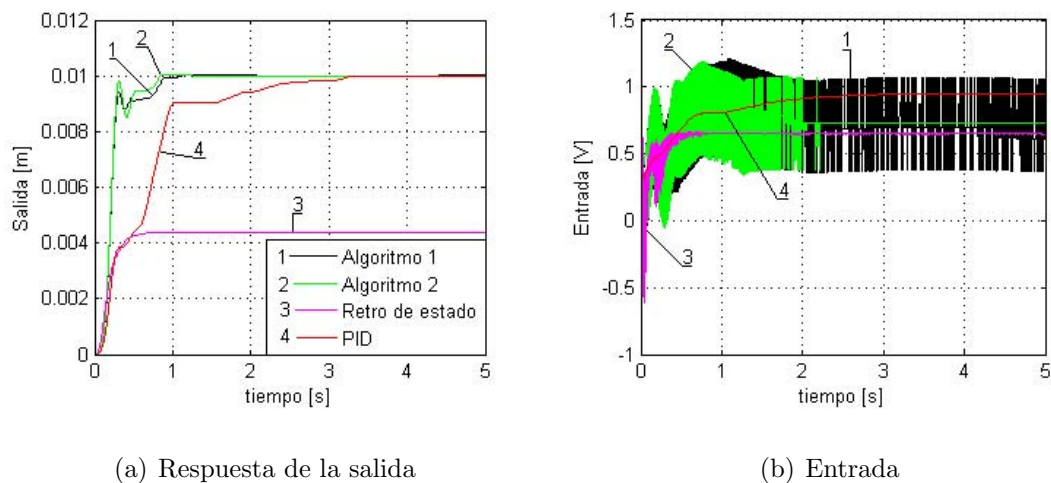


Figura 18. Resultados experimentales obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al sistema rectilíneo.

número de parámetros que requiere cada controlador para ser aplicado. b) La rapidez de cada controlador, donde se midió el tiempo que le tomó a cada controlador llevar la salida a una posición con un error dentro de un margen de 1% de su valor final (± 0.01 cm del valor final) y la mantuviera dentro de ese margen. c) El error en estado estable, éste se calculó utilizando la siguiente expresión

$$Error = \frac{q_{2d} - q_{2fin}}{q_{2d}} * 100\%. \quad (44)$$

d) Energía del control. Las acciones de control mostradas, tanto en la figura 18 como en

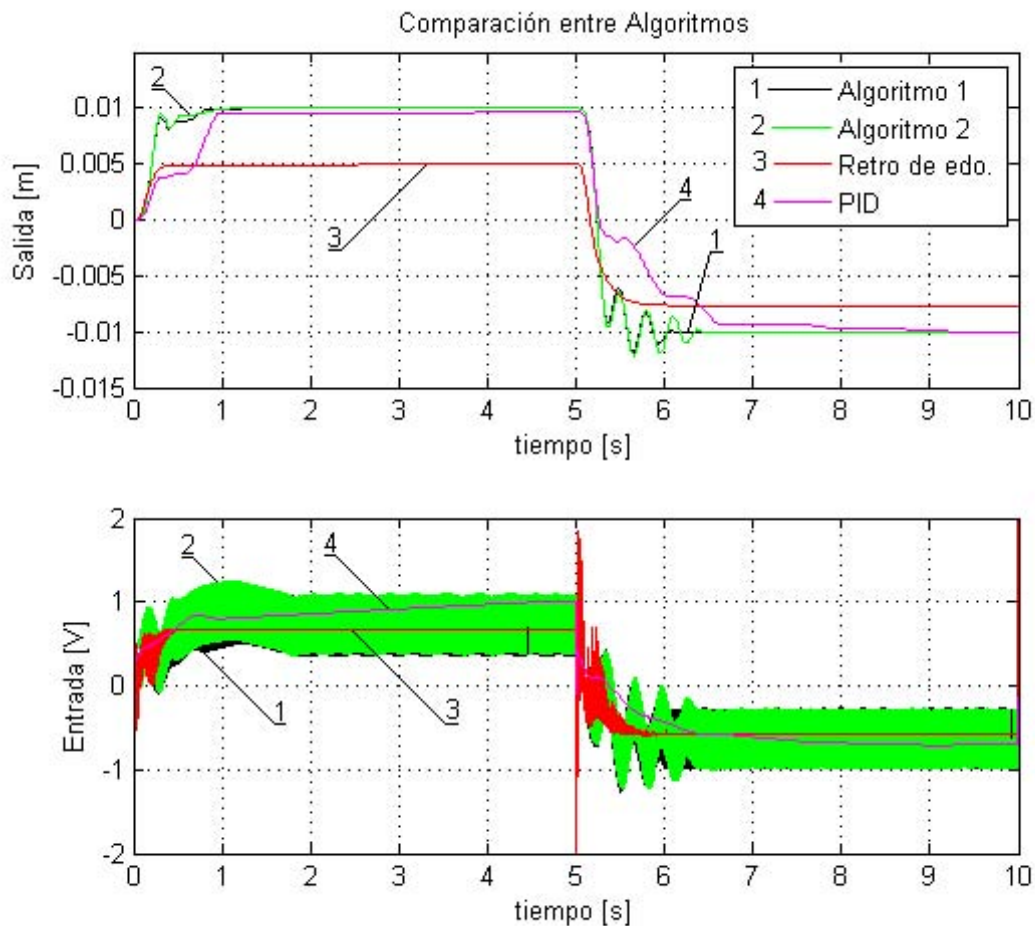


Figura 19. Respuesta de los algoritmos de control cuando se tiene una señal rectangular como señal de referencia.

la 19, son señales de energía infinita (Ambardar, 2002), por lo tanto se calculó la energía por unidad de tiempo (Potencia), esto se hace por medio de la siguiente expresión

$$P = \frac{1}{T} \int_T |u^2(t)| dt, \quad (45)$$

donde T es el periodo de integración y u es la señal de entrada en volts, como se muestra en la figura 19. Se calculó la potencia de la acción de control obtenida con la señal cuadrada (figura 19), integrando de $t = 0s$ a $t = 10s$ ($T = 10s$). e) El control máximo, que es el valor máximo que presentó la acción de control y se expresa en N (La etapa de potencia del sistema rectilíneo tiene la siguiente equivalencia: $1V = 3.57N$).

f) Frecuencia alta, donde se hace notar si la acción de control presenta conmutación de alta frecuencia y de ser así, si la presenta en gran medida. g) Por último se hace mención sobre la complejidad de los algoritmos.

Tabla II. Lineamientos de comparación aplicados a los diferentes algoritmos

Criterio	Algoritmo I	Algoritmo II	Ubicación de polos	PID
Número de parámetros	4	5	5	3
Rapidez (s)	1	1	0.9	2.7
Error en estado estable	0	0	50%	<5%
Control máx. (V)	1.25	1.25	1.5	1
Potencia	525	537	385	559
Frecuencia alta	si	si	bajo	no
Complejidad	Alta	Alta	Regular	baja

Otro criterio de evaluación que se mencionó sería tomado en cuenta es el sobrepaso, éste no se muestra en la tabla debido a que, como se puede ver en las figuras, ningún algoritmo presentó esta característica.

IV.8 Conclusiones

Los algoritmos I y II presentan una respuesta rápida y además son robustos a la variación de cierto parámetro (f_b) que se utiliza para proponer el valor de una de las ganancias y simplificar así el cálculo del control. El control por ubicación de polos es el menos adecuado para este tipo de sistemas, si bien se puede mejorar su desempeño llevando a cabo la linealización del sistema alrededor del valor de referencia deseado,

se tendría que calcular un juego de ganancias para cada posición deseada, lo que complicaría el diseño.

El PID es una buena opción para llevar a cabo el control de este tipo de sistemas ya que no requiere mucho conocimiento técnico matemático y además sólo requiere la especificación de 3 parámetros, sin embargo, el tiempo necesario para determinar los “mejores” valores para esos 3 parámetros varía, aunque podría ser corto no siempre es el caso. Además, los algoritmos I y II son los que ofrecen mejores resultados en cuanto a tiempo de respuesta (rapidez) y error en estado estable.

De la tabla y la figura 18 se puede apreciar que la única diferencia notable entre el Algoritmo I y el Algoritmo II es que el primero requiere de 4 parámetros mientras que el segundo requiere 5. De acuerdo con esto la mejor elección para este sistema es el Algoritmo I.

Nótese que si se hace un acercamiento de 0 a los 2 segundos de la gráfica de la salida en la figura 19, se ve que el Algoritmo II es un poco más rápido, además en la figura 18 también se ve que el Algoritmo II es un poco más rápido, sin embargo en la figura 19, cuando la posición de referencia es -1cm, el Algoritmo I se estabiliza más rápidamente en el valor deseado. Aún sin tomar en cuenta la última parte, el Algoritmo II mejora sólo un poco el tiempo de respuesta.

Puesto que los resultados de los algoritmos I y II fueron similares, cuando se esperaba que el algoritmo 2 diera mejores resultados, se decidió aplicar los algoritmos a otro sistema, un sistema de torsión, si bien tiene el modelo del sistema torsional es muy parecido al del MRA, sobre el torsional se tiene algo de control sobre la fricción, con lo cual se espera hacer más notoria la diferencia entre el algoritmo I y el algoritmo II.

La rapidez del controlador es el tiempo de estabilización, aunque el control por ubicación de polos es el que se estabiliza en menos tiempo, su error es grande.

Capítulo V

Control de un Sistema Torsional

En este capítulo se presenta la aplicación de los algoritmos de control descritos anteriormente a un sistema mecánico rotacional, model 205, de la compañía ECP (Educational Control Products), mostrado en la figura 20. A diferencia del sistema MRA del capítulo anterior, el sistema rotacional cuenta con un motor que se puede adaptar para incorporar una perturbación al sistema, este motor se utiliza para incorporarle fricción al sistema, ya que se tiene control sobre el motor, se intentará dar un valor alto de fricción seca a la articulación no actuada, esto dentro de los límites de operación del motor, para de esta manera hacer notar las diferencias entre los algoritmos I y II. El sistema consiste de las siguientes partes:

Parte electromecánica. Consiste del actuador, sensores y el mecanismo de torsión, cuyas configuraciones representan clases importantes de sistemas reales, como por ejemplo cuerpos rígidos; ejes flexibles de actuadores, engranes y banda, etc. que van de uno hasta tres grados de libertad.

Unidad de control en tiempo real. Contiene un procesador digital de señales, interfaces, amplificadores, fuentes auxiliares y convertidores digital-analógico.

Interface. El tercer componente es el programa de interface entre el usuario y el sistema.

En la primera sección de este capítulo se establece la configuración con que se trabajará el sistema; el modelo de esta configuración debe cumplir con la estructura dada

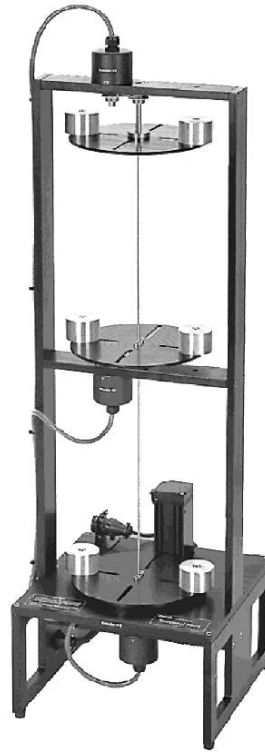


Figura 20. Sistema mecánico rotacional ECP205.

por (11) y (12). La sección 2 presenta el procedimiento que se siguió para ajustar los parámetros del sistema, tomando como base los proporcionados por el manual del proveedor. En la sección 3 se lleva a cabo el diseño del Algoritmo I y se exponen algunos resultados numéricos, mientras que la sección 4 presenta lo propio para el Algoritmo II. Las secciones 5 y 6 presentan los resultados numéricos para el control por retroalimentación de estado y control PID. En la sección 7 se hacen las comparaciones entre los diferentes algoritmos, presentándose primero los resultados numéricos y posteriormente obtenidos de aplicar los diferentes controladores al sistema físico. Finalmente, en la sección 8 se exponen algunas conclusiones de acuerdo con los resultados obtenidos.

V.1 Configuración del sistema

De las configuraciones mostradas en el manual del sistema (Parks, 1999a) se eligió la llamada “Free-free, 2 DOF” que es de 2gdl “libre”, *i.e.* el sistema puede girar indefinidamente. La figura 21 muestra la configuración elegida.

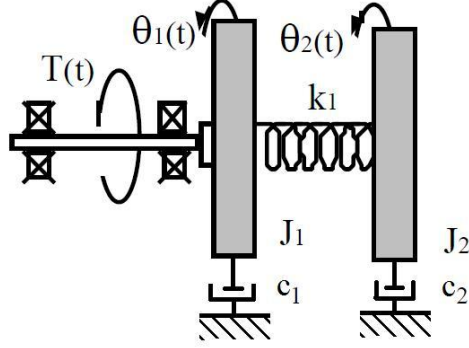


Figura 21. Configuración de 2 gdl “libre”. Al sistema en esta configuración se le aplicarán los controladores en secciones posteriores.

El modelo matemático correspondiente está dado por

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \frac{k_{d1}}{J_1} (\theta_1 - \theta_2) - \frac{c_1}{J_1} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{J_1} u, \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{k_{d1}}{J_2} (\theta_1 - \theta_2) - \frac{c_2}{J_2} \dot{\theta}_2 - C(\dot{\theta}_2) \text{sign}(\dot{\theta}_2),\end{aligned}\quad (46)$$

con

$$C(\dot{\theta}_2) = C_{2c} + (C_{2s} - C_{2c}) \exp\left(-\frac{\dot{\theta}_2^2}{v_{2s}^2}\right),\quad (47)$$

y donde θ_1 , $\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1$ son la posición, velocidad y aceleración angulares de la articulación actuada; θ_2 , $\dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_2$ son la posición, velocidad y aceleración angulares de la articulación no actuada; k_1 es la constante de torsión; c_1 y J_1 son la fricción viscosa y la inercia de la parte actuada; c_2 y J_2 son la fricción viscosa y la inercia de la parte no actuada; C_{2c} y C_{2s} son los niveles de fricción de Coulomb y estática divididos entre una inercia constante, y v_{2s} es la velocidad de Stribeck.

V.2 Ajuste de parámetros

La configuración con que se trabaja el sistema le permite a éste girar indefinidamente complicando así el “ajuste de parámetros”. Esto es, no se puede aplicar una entrada escalón ya que; aplicar un torque constante implicaría que, en estado estable, el sistema tendría una aceleración constante, lo cual podría producir una velocidad de giro tan elevada que la integridad del equipo se vería comprometida. A continuación se muestra el procedimiento para el ajuste de parámetros.

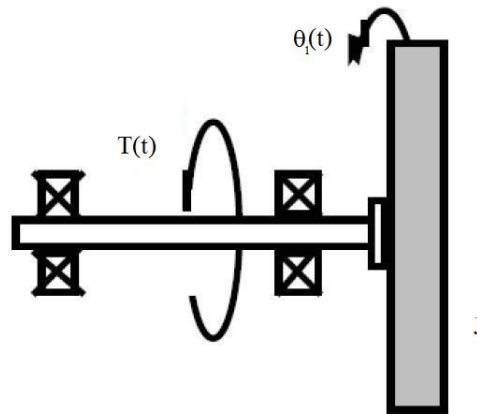


Figura 22. Configuración del sistema con 1 gdl, utilizado en el ajuste de parámetros.

1. Se realizó un experimento en el cual no se aplica la señal de control al sistema, se giró manualmente un disco a 180° y se tomó la lectura de la posición de dicho disco (lectura que proporcionan los encoders) por medio del paquete simulink®. Con estos datos se calculó el factor con el cual dicho valor medido debe ser multiplicado de tal forma que el resultado sea 3.14 ya que este valor es una aproximación al valor π y además se tiene que $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, y así, los valores medidos posteriormente se multiplicarán por ese factor para obtener los resultados en radianes.
2. Se hicieron experimentos para verificar que la entrada de control especificada en simulink® corresponda al equivalente en Nm (unidades de torque). Antes de

hacer los experimentos se decidió que para evitar que el sistema se desboque se aplicaría una entrada retroalimentada dada por $u = T - p\theta_1$, donde $T = 3$, $p > 0$ es una constante (ganancia proporcional) y θ_1 es la posición del disco inferior (véase figura 20). Se trabajó el aparato torsional con una configuración de 1gdl que utiliza únicamente el disco inferior (ver figura 22). El modelo del sistema para esta configuración es

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{c_1}{J_1}\dot{\theta}_1 + \frac{1}{J_1}u,$$

donde $\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1$ son la velocidad y aceleración angulares del disco, c_1 es la fricción viscosa, J_1 es la inercia del disco y u es la entrada de control. Si se aplica la entrada antes propuesta el sistema debe estabilizarse en $\theta_1 = T/p$. La figura 23 muestra los resultados obtenidos para $p = 5$. Nótese que si la parte retroalimentada ($-p\theta_1$) se considera como parte del sistema, entonces T corresponde al torque de entrada del sistema.

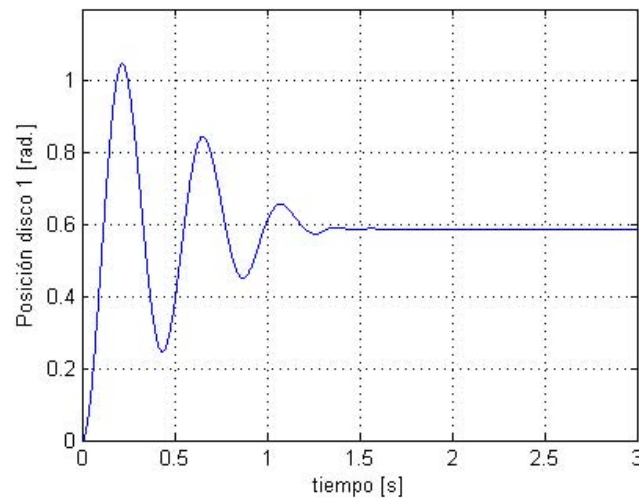


Figura 23. Resultado experimental del sistema de 1gdl con $T = 3$ y $p = 5$.

- Posteriormente se hicieron los experimentos para el ajuste de parámetros. Para tales experimentos se utilizó el aparato en la configuración mostrada en la sección

1 de este capítulo. Nuevamente, para evitar que el sistema se desboque se emplea la retroalimentación antes utilizada y, como se mencionó antes, en este sistema retroalimentado T corresponde a la entrada de control en Nm. Se hicieron experimentos aplicando entradas escalón de diferente amplitud. Después se hicieron simulaciones numéricas tomando como base los proporcionados en el manual del aparato (Parks, 1999a). Luego se ajustaron los valores de los parámetros de tal forma que los resultados de simulación y los experimentales sean lo más parecido posible. La figura 24 muestra los resultados experimental y numérico cuando la entrada es de 3 N-rad. Aunque el resultado experimental presenta un sobretiro y el resultado de simulación no lo presenta, el tiempo de estabilización de ambos es parecido, además el error en estado estacionario no es muy grande. Los parámetros ajustados con los cuales se obtuvo el resultado de simulación mostrado en la figura 24 son los siguientes.

$$\begin{aligned}
 k_{d1} &= 2.8 & c_1 &= 0.1373 & c_2 &= 0.3 & J_1 &= 0.022 \\
 J_2 &= 0.0019 & C_{2s} &= 5 & C_{2c} &= 3 & v_{2s} &= 0.15
 \end{aligned}$$

V.3 Cálculo del control con el Algoritmo I

En esta sección se muestran los resultados obtenidos al aplicar el Algoritmo I al sistema rotacional. Primero se diseña el control, posteriormente se eligen los valores de las ganancias y por último se muestra que tan robusto es el sistema retroalimentado frente a la variación de un parámetro (f_b), utilizado para proponer una ganancia que simplifica el cálculo del control. A continuación se aplica el procedimiento establecido en la sección III.3:

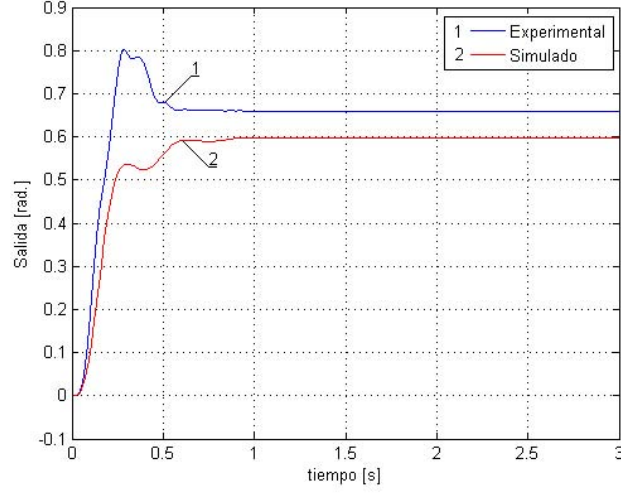


Figura 24. Resultados experimental y numérico ante una entrada de 3 Nm.

1. Se escribe (46) en la forma dada por (11)

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= -\frac{k_{d1}}{J_1}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{c_1}{J_1}\dot{\theta}_1 + \frac{1}{J_1}u, \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{k_{d1}}{J_2}\theta_2 - \frac{c_2}{J_2}\dot{\theta}_2 - C_2(\dot{\theta}_2)\text{sign}(\dot{\theta}_2) + \frac{k_{d1}}{J_2}\theta_1,\end{aligned}$$

donde se identifican $\sigma = \frac{k_{d1}}{J_1}\theta_1$ y $f(q_2, \dot{q}_2) = -\frac{k_{d1}}{J_1}\theta_2 - \frac{c_2}{J_2}\dot{\theta}_2$.

El sistema para la parte no actuada es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\frac{k_{d1}}{J_2}x_2 - \frac{c_2}{J_2}x_3 + \frac{2(C_{2s}-C_{2c})}{v_{2s}^2}|x_2|\exp\left(-\frac{x_2^2}{v_{2s}^2}\right)x_3 + \dot{\sigma} \end{pmatrix},$$

donde se tiene que $f_2(x_1 + q_{2d}, x_2, x_3) = -\frac{k_{d1}}{J_2}x_2 - \frac{c_2}{J_2}x_3$.

2. La derivada del control virtual $\dot{\hat{\sigma}}$ debe ser tal que el sistema llegue a la forma dada por (21), esto es

$$\dot{\hat{\sigma}} = -k_1x_1 - \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2}\right)x_2 - \left(k_3 - \frac{c_2}{J_2}\right)x_3.$$

3. El control por modos deslizantes se calcula utilizando la superficie de discon-

tinuidad

$$\begin{aligned} s &= \dot{\sigma} - \dot{\hat{\sigma}}, \\ &= \frac{k_{d1}}{J_2} \dot{\theta}_1 + k_1 x_1 + \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2}\right) x_2 + \left(k_3 - \frac{c_2}{J_2}\right) x_3, \end{aligned} \quad (48)$$

donde, por simplicidad se propone $k_3 = \frac{c_2}{J_2}$. Por lo tanto, la superficie de deslizamiento adquiere la forma

$$s = \frac{k_{d1}}{J_2} \dot{\theta}_1 + k_1 x_1 + \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2}\right) x_2, \quad (49)$$

y el control resultante es

$$\begin{aligned} u &= J_1 \left[\frac{k_{d1}}{J_1} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{c_1}{J_1} \dot{\theta}_1 + \frac{J_2}{k_{d1}} u_1 \right], \\ u_1 &= -\gamma \text{sign}(s) - k_1 \dot{\theta}_2 - \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2}\right) \left(-\frac{k_{d1}}{J_2} \theta_2 - \frac{c_2}{J_2} \dot{\theta}_2 + \frac{k_{d1}}{J_2} \theta_1 \right), \end{aligned}$$

donde $\gamma > \left| k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2} \right| C_{2s}$.

4. Al igual que con el sistema anterior y por las mismas razones, se aplica el criterio de Routh-Hurwitz al sistema simplificado de la articulación no actuada, es decir al sistema dado por (40), lo que da como resultado las restricciones $k_1 < k_2 k_3 = 157.9 k_2$ y $k_1, k_2 > 0$. De esta gama de valores se seleccionan los coeficientes k_i que satisfagan el Teorema 1. Los valores elegidos son $k_1 = 4500$, $k_2 = 1500$ y $k_3 = 157.9$, $\gamma = 90000$

V.3.1 Robustez ante incertidumbre paramétrica en $\frac{c_2}{J_2}$

En cálculo del control se propuso $k_3 = c_2/J_2 = 157.9$, reduciendo así el número de constantes por calcular y simplificando así el cálculo del control (se simplificó s de (48) a (49)). Sin embargo, los valores de c_2 y J_2 obtenidos en la parte de *ajuste de parámetros*

(la sección 2 de este capítulo) son sólo una aproximación a los valores reales. Con el fin de saber el grado de robustez del controlador ante variaciones en c_2/J_2 , se dejó fijo el valor de J_2 y se hizo variar el de c_2 en el modelo del sistema (el valor de k_3 se dejó en 157.9). El valor identificado de c_2 es 0.3. Aunque se hicieron comparaciones con varios valores de c_2 , sólo se muestran las realizadas con los valores “extremo” utilizados. La figura 25 muestra la comparación con $c_2 = 0.1$ y $c_2 = 0.01$, y la figura 26 muestra la comparación con $c_2 = 0.9$ y $c_2 = 1.5$.

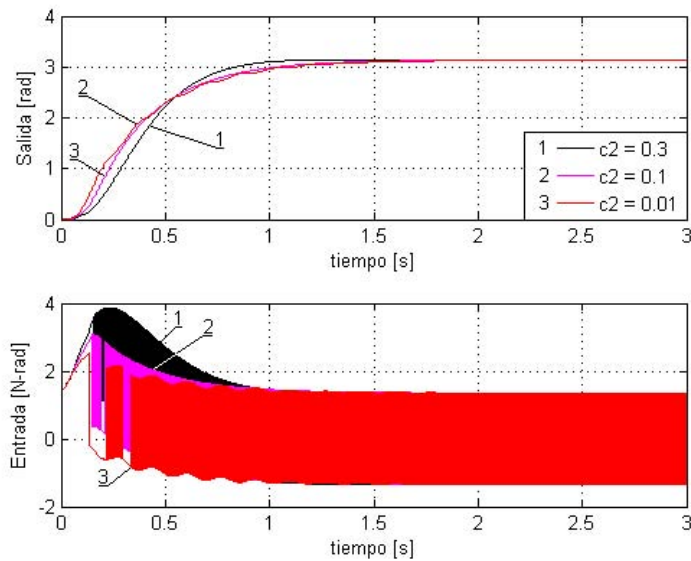


Figura 25. Respuesta del sistema para valores del parámetro de c_2 correspondientes al valor nominal y valores menores a éste.

Nótese que, aún cuando esta variación es bastante amplia, el error en estado estacionario es cero en todos los casos, y la respuesta transitoria es muy parecida. Esto muestra la robustez del controlador frente a incertidumbres en estos parámetros.

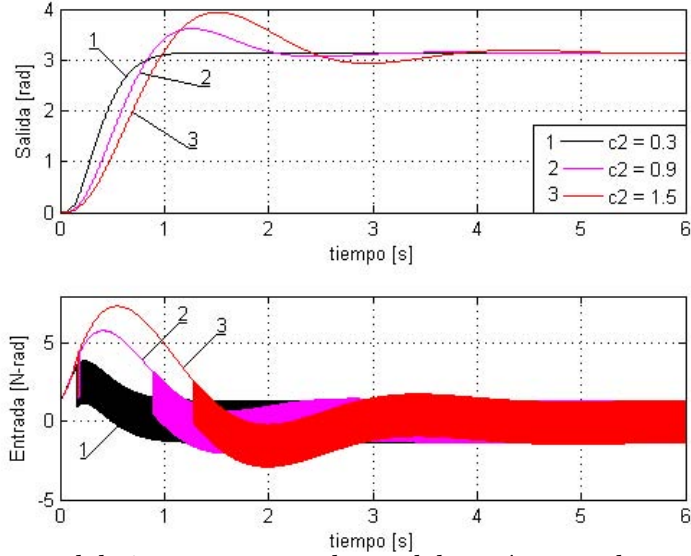


Figura 26. Respuesta del sistema para valores del parámetro de c_2 correspondientes al valor nominal y valores mayores a éste.

V.4 Cálculo del control con el Algoritmo II

En esta sección se describe la aplicación del controlador llamado Algoritmo II al sistema torsional y se obtienen algunos resultados numéricos. El cálculo del control se lleva a cabo aplicando el procedimiento descrito en el capítulo III.

1. Este punto es igual al de la sección anterior.
2. La derivada del control virtual $\dot{\hat{\sigma}}$ está dada por (26), esto es

$$\dot{\hat{\sigma}} = -k_1 x_1 - \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2}\right) x_2 - \left(k_3 - \frac{c_2}{J_2}\right) x_3 + \tau_1,$$

donde τ_1 está dado por (27).

3. El control por modos deslizantes se calcula utilizando la superficie de discontinuidad

$$\begin{aligned} s &= \dot{\sigma} - \dot{\hat{\sigma}}, \\ &= \frac{k_{d1}}{J_2} \dot{\theta}_1 + k_1 x_1 + \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2}\right) x_2 + \left(k_3 - \frac{c_2}{J_2}\right) x_3 - \tau_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Si se propone $k_3 = \frac{c_2}{J_2}$, entonces

$$s = \frac{k_{d1}}{J_2} \dot{\theta}_1 + k_1 x_1 + \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2} \right) x_2 - \tau_1. \quad (51)$$

Nótese que la “superficie” de deslizamiento es discontinua. Si bien los problemas tratados en este documento de tesis dan buenos resultados tanto numéricos como experimentales al calcular \dot{s} alrededor de $x_2 = 0$, es decir cuando el sistema no está atascado; El problema de garantizar que una “superficie” de deslizamiento discontinua lleve el estado del sistema aún sigue abierto. El control resultante es

$$\begin{aligned} u &= J_1 \left[\frac{k_{d1}}{J_1} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{c_1}{J_1} \dot{\theta}_1 + \frac{J_2}{k_{d1}} u_1 \right], \\ u_1 &= -\gamma \text{sign}(s) - k_1 \dot{\theta}_2 - \left(k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2} \right) \left(-\frac{k_{d1}}{J_2} \theta_2 - \frac{c_2}{J_2} \dot{\theta}_2 + \frac{k_{d1}}{J_2} \theta_1 \right), \end{aligned}$$

donde $\gamma > \left| k_2 - \frac{k_{d1}}{J_2} \right| C_{2s}$.

4. Se utilizan las constantes seleccionadas en el primer algoritmo ($k_1 = 4500$, $k_2 = 1500$, $k_3 = 157.9$ y $\gamma = 90000$) y se busca, por medio de simulaciones, el mejor valor para k_4 (ver ecuación 27). La figura 27 muestra los resultados obtenidos para $k_4 = 100$, donde la posición de referencia es $q_{2d} = 3.14$.

Aunque sólo se presenta el resultado con $k_4 = 100$, el incrementar valor provoca el mismo comportamiento que se mostró en el capítulo anterior (figura 12), es decir, hay una oscilación en la salida. Más adelante se presenta la comparación del resultado obtenido con este algoritmo y el obtenido con el algoritmo I.

V.5 Control por ubicación de polos

Este tipo de control se aplica a sistemas lineales, por lo que utiliza el modelo lineal del sistema (Parks, 1999a). El procedimiento general de diseño consiste en describir primero

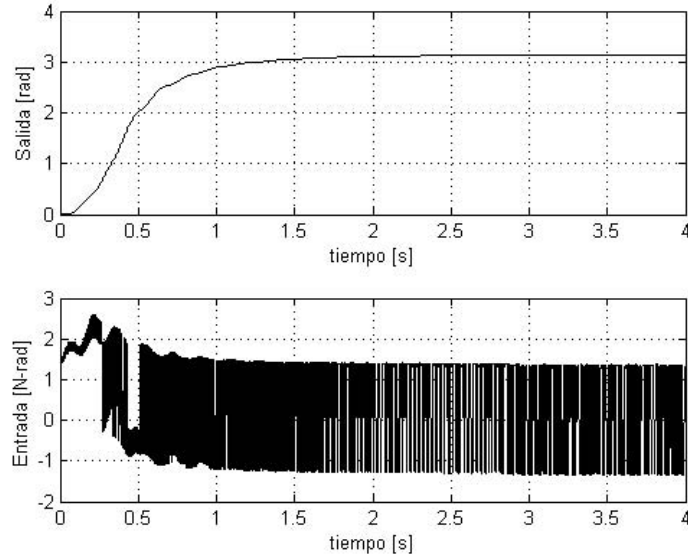


Figura 27. Respuesta del segundo algoritmo con $k_4 = 100$.

al sistema en forma de ecuaciones de estado, después realizar una transformación de variables para llevarlo a su forma controlable. Enseguida se proponen los polos deseados para el sistema en lazo cerrado y por último se calculan las ganancias necesarias para obtener dichos polos. El sistema escrito en forma de ecuaciones de estado es

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{d1}}{J_1} & \frac{k_{d1}}{J_1} & -\frac{c_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_{d1}}{J_2} & -\frac{k_{d1}}{J_2} & 0 & -\frac{c_2}{J_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (52)$$

En el control por ubicación de polos (Ogata, 1997, p. 787) se modifican los polos del sistema en lazo cerrado de tal manera que la dinámica del sistema sea más rápida, es decir, el sistema llegue más rápido al valor deseado. Los polos del modelo lineal del

sistema son:

$$\begin{aligned} p_1 &= -148, \\ p_2 &= -8.07 \pm 11.52i, \\ p_{3,4} &= 0. \end{aligned}$$

Para que la dinámica del sistema en lazo cerrado sea más rápida se seleccionan polos que estén más a la izquierda del origen, es decir con parte real más negativa. Además, se debe tomar en cuenta que la ley de control que se obtenga será aplicada a un sistema físico real, y por consiguiente no debe exceder cierto valor (8N). Para el caso del sistema torsional, se tomó en cuenta la expresión dada por (55), se propuso que el resultado del término $k_1 + k_2$ sea 0.75. Después se asignaron valores a k_1 y k_2 que cumplieran con esta condición y por último se calcularon los polos correspondientes, que son los mostrados a continuación

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -5.25 \pm 20.94i, \\ p_3 &= -148.43, \\ p_4 &= -0.73, \end{aligned}$$

para los cuales el vector de ganancias resultante es

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.75 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La entrada de referencia necesaria para llevar la articulación no actuada a la posición deseada se determina retroalimentando el sistema utilizando las ganancias calculadas y evaluando en estado estacionario, es decir, se hacen: $\theta_2 = \theta_{2d}$ (posición deseada), las derivadas de θ_1 y θ_2 se hacen cero, y θ_1 está por determinarse.

El sistema retroalimentado sobre el cual se hace la evaluación es

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{d1}+k_1}{J_1} & \frac{k_{d1}+k_2}{J_1} & \frac{c_1+k_3}{J_1} & \frac{k_4}{J_1} \\ \frac{k_{d1}}{J_2} & -\frac{k_{d1}}{J_2} & 0 & -\frac{c_2}{J_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{pmatrix} r, \quad (53)$$

donde r es la entrada de referencia. Se resuelve para θ_1 y r y se llega a

$$\theta_1 = \theta_{2d} \quad (54)$$

$$r = (k_1 + k_2)\theta_{2d}. \quad (55)$$

La figura 28 muestra el resultado de simulación obtenido de aplicar el control por ubicación de polos a los modelos lineal y no lineal del sistema torsional. La gráfica de arriba muestra la respuesta de la salida y la gráfica de abajo muestra un acercamiento de la misma, en la gráfica de arriba no se ve diferencia en el comportamiento mientras que la gráfica de abajo muestra que sólo hay un error mínimo entre la respuesta del modelo lineal y la del modelo no lineal.

V.6 Control PID del sistema torsional

Las ganancias para el PID se obtuvieron tomando como base resultados experimentales, el procedimiento fue el siguiente: se propuso primero la ganancia proporcional y después se asignaron valores a las ganancias integral y derivativa de forma arbitraria para realizar experimentos, este procedimiento se siguió varias veces y se compararon los resultados obtenidos. De acuerdo con esos resultados se eligieron las ganancias $k_p = 0.75$, $k_i = 0.75$ y $k_d = 0.2$. Una vez determinadas las ganancias se hicieron simulaciones. La figura 29 muestra el resultado obtenido de la simulación con una referencia constante de valor

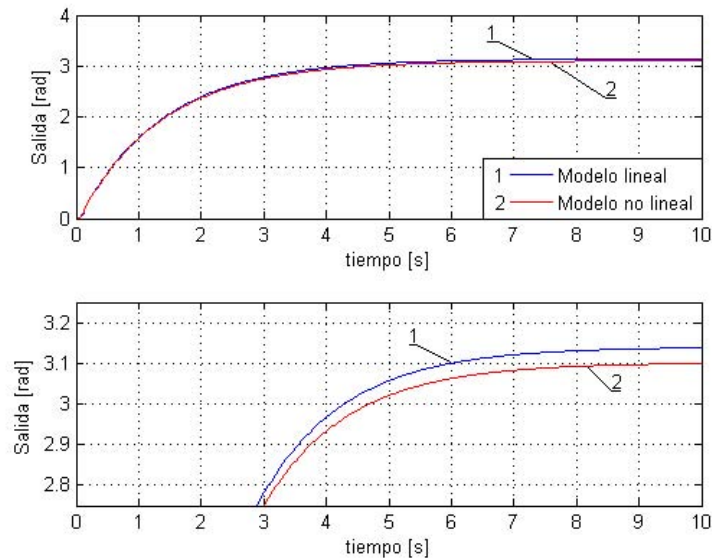


Figura 28. Respuesta del control por ubicación de polos al ser aplicado a los modelos lineal y no lineal del sistema torsional.

3.14 utilizando el modelo no lineal del sistema, en ella se puede apreciar que el PID produce un sobrepaso en la salida.

V.7 Evaluación del desempeño

Esta sección es una de las más importantes del presente documento de tesis, es aquí donde se evalúa el desempeño del Algoritmo I y del Algoritmo II, esto se hace primero comparando los resultados numéricos obtenidos con cada algoritmo (los cuales fueron presentados en secciones pasadas) para después comparar los resultados obtenidos de forma experimental.

Resultados numéricos

La primera parte en la evaluación del desempeño es comparar los resultados obtenidos numéricamente con los algoritmos de control. La figura 30 muestra esta comparación,

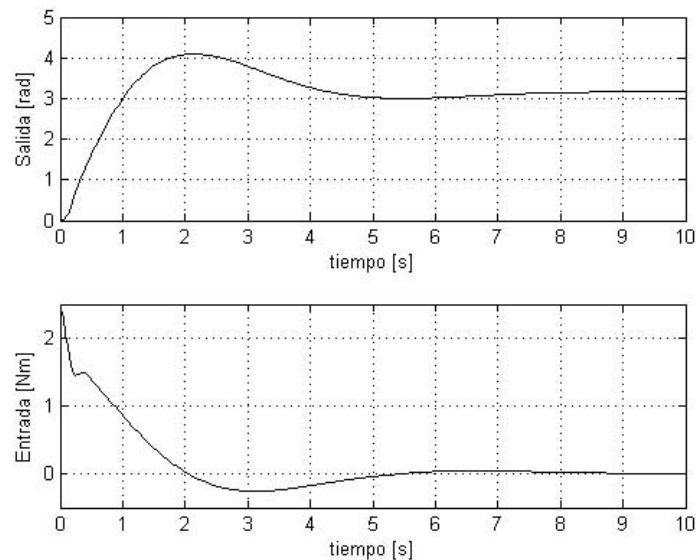


Figura 29. Controlador PID aplicado al sistema torsional.

en ella se ve que los algoritmos I y II se acercan al valor deseado mucho más rápido que los otros dos controladores, sin embargo, al igual que con el sistema MRA, los algoritmos I y II producen una conmutación de alta frecuencia en la entrada de control. El control PID y el de ubicación de polos (Retro de estado) requieren una acción de control continua suave (figura 30, gráfica superior derecha) sin embargo, tanto al PID como al Retro de estado les toma más de 6 segundos llevar la salida al valor deseado.

La figura 31 muestra un acercamiento en las respuestas de salida, en ella se ve que los algoritmos I y II producen prácticamente el mismo resultado.

Resultados experimentales

Antes de hacer la comparación experimental entre algoritmos es de gran interés hacer una comparación interna en cada algoritmo, i.e., puesto que en los algoritmos evaluados se utiliza un controlador por modos deslizantes, en el control real aparece una función signo, la cual se puede aproximar por medio de la función saturación o la función

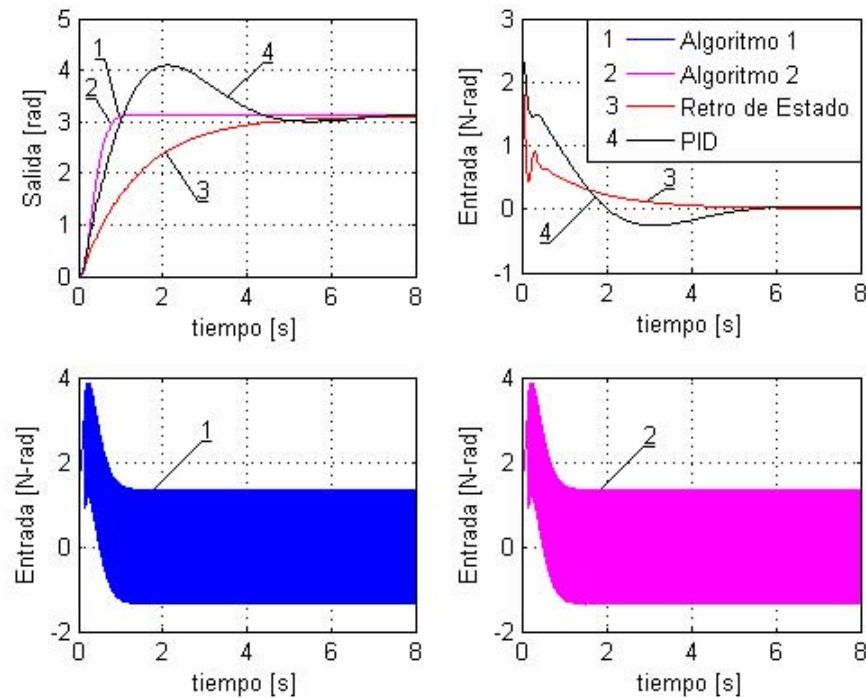


Figura 30. Resultados de simulación obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al modelo no lineal del sistema torsional.

tangente hiperbólica. La figura 32 presenta las respuestas del algoritmo I utilizando la función signo, saturación y tangente hiperbólica, y la figura 33 presenta lo mismo para el algoritmo II, en ambas figuras se tiene la respuesta de la salida en la gráfica izquierda superior, en la gráfica superior derecha se tiene la entrada cuando se utiliza la función signo y en las gráficas inferior izquierda e inferior derecha las entradas con las funciones saturación y tangente hiperbólica respectivamente. Puesto que para ambos algoritmos se tiene una respuesta idéntica en la salida y en cuanto a la señal de entrada, no se tiene mejora alguna, se decidió utilizar la función signo en lugar de una de sus aproximaciones para llevar a cabo la comparación entre algoritmos.

Nota: nuevamente la comparación entre usar el signo y usar sus aproximaciones se hizo con resultados experimentales, es recomendable sin embargo, que esta comparación se realice con resultados numéricos, antes de realizar experimentos.

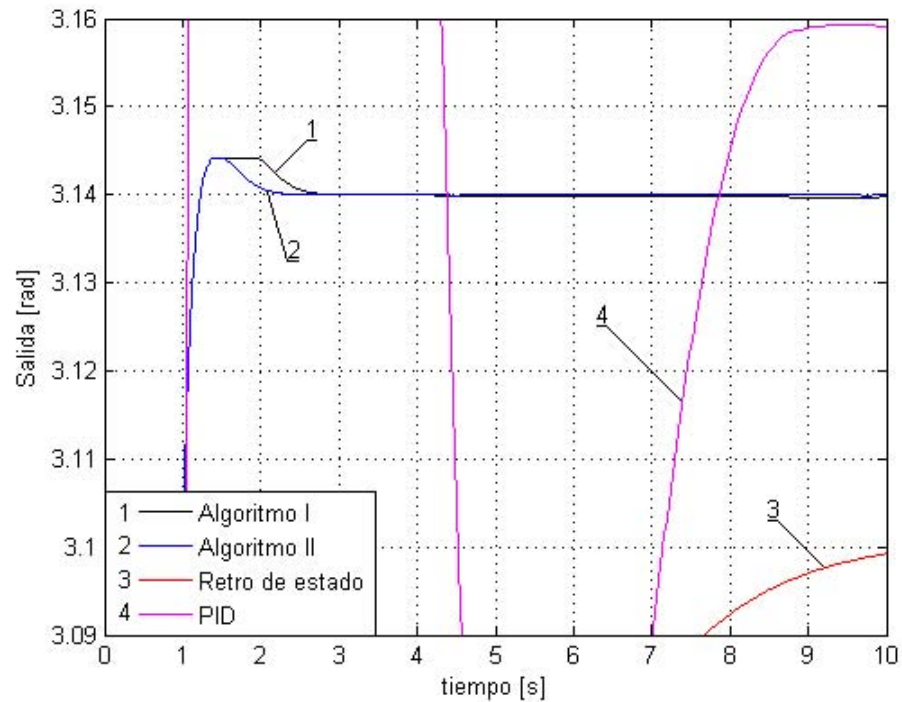


Figura 31. Acercamiento en la respuesta de simulación.

A continuación se siguió con la comparación entre algoritmos, las ganancias utilizadas en los diferentes controladores se muestran en la tabla III

Tabla III. Ganancias empleadas en los diferentes algoritmos

Algoritmo	Ganancias				
Primer algoritmo	$k_1 = 4500$	$k_2 = 1500$	$k_3 = 157.9$	$G = 90000$	
Segundo algoritmo	$k_1 = 4500$	$k_2 = 1500$	$k_3 = 157.9$	$G = 90000$	$k_4 = 100$
Retro de estado	$k_1 = 5.75$	$k_2 = -5$	$k_3 = 0$	$k_4 = 0$	$G = 0.75\theta_{2d}$
PID	$k_p = 0.75$		$k_i = 0.75$		$k_d = 0.2$

La figura 34 muestra el desempeño de los diferentes algoritmos cuando la señal de referencia es un pulso de 5 segundos de duración y 3.14 radianes amplitud. En la figura

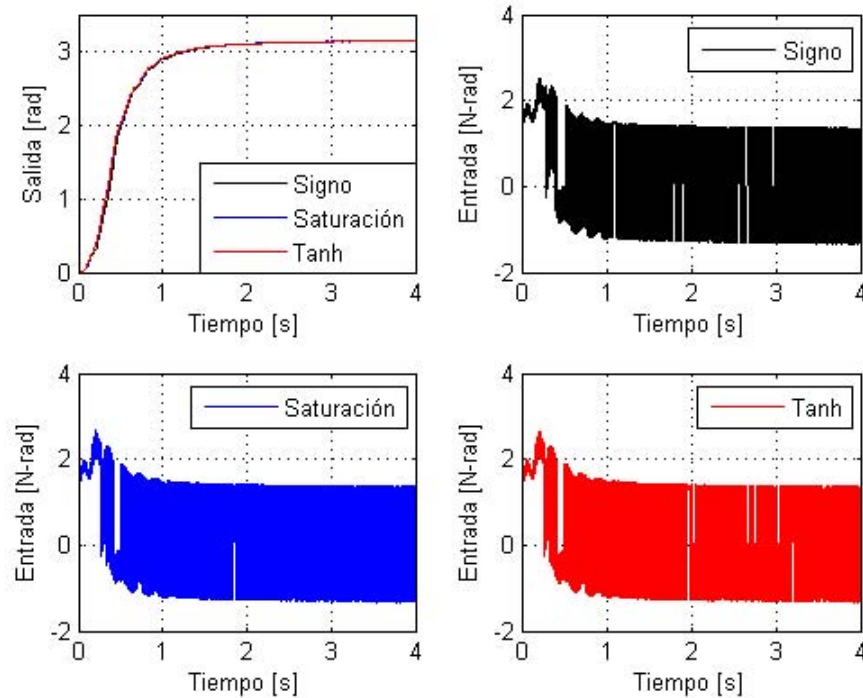


Figura 32. Primer algoritmo, resultados cuando se utiliza la función signo, y cuando se utilizan sus aproximaciones: funciones saturación y tangente hiperbólica. *Arriba izquierda.* Respuesta de la salida con cada función. *Arriba derecha.* Entrada cuando se utiliza la función signo. *Abajo izquierda.* Entrada cuando se utiliza la función saturación. *Abajo derecha.* Entrada cuando se utiliza la función tangente hiperbólica.

se muestra el comportamiento durante los primeros 10 segundos, durante los primeros 5 segundos la señal de referencia es 3.14 y durante los siguientes 5 segundos la referencia es cero. En la tabla IV se muestra la evaluación de los diferentes algoritmos de acuerdo con los lineamientos de comparación descritos en el capítulo III, en ella se presentan:

- El número de parámetros que requiere cada controlador para ser aplicado.
- La rapidez de cada controlador, donde se midió el tiempo que le tomó a cada controlador llevar la salida a una posición con un error dentro de un margen de 1% de su valor final (± 0.01 cm del valor final) y la mantuviera dentro de ese margen.
- El error en estado estable, éste se calculó utilizando la siguiente expresión

$$Error = \frac{q_{2d} - q_{2fin}}{q_{2d}} * 100\%. \quad (56)$$

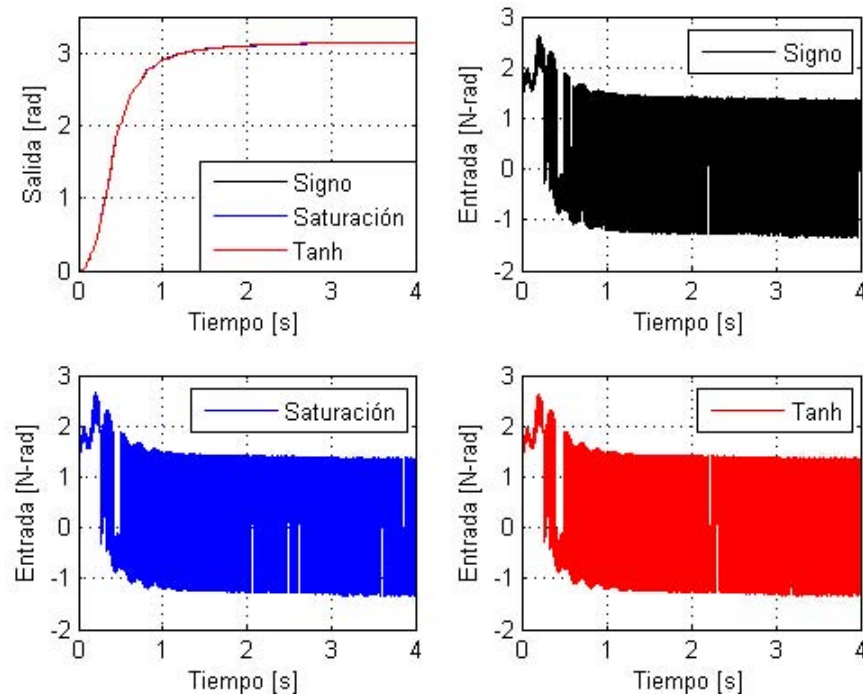


Figura 33. Segundo algoritmo, resultados cuando se utiliza la función signo, y cuando se utilizan sus aproximaciones: funciones saturación y tangente hiperbólica. *Arriba izquierda.* Respuesta de la salida con cada función. *Arriba derecha.* Entrada cuando se utiliza la función signo. *Abajo izquierda.* Entrada cuando se utiliza la función saturación. *Abajo derecha.* Entrada cuando se utiliza la función tangente hiperbólica

d) Energía del control. La acción de control mostrada, la figura 34 son señales de energía infinita (Ambardar, 2002), por lo tanto se calculó la energía por unidad de tiempo (Potencia), esto se hace por medio de la siguiente expresión

$$P = \frac{1}{T} \int_T |u^2(t)| dt, \quad (57)$$

donde T es el periodo de integración y u es la señal de entrada en volts, ($1V = 3.57Nm$).

e) Control máximo, que es el valor máximo que presentó la acción de control y se expresa en Nm. f) Frecuencia alta, donde se hace notar si la acción de control presenta conmutación de alta frecuencia y de ser así, si la presenta en gran medida. g) Por último se hace mención sobre la complejidad de los algoritmos.

Otro criterio de evaluación que se mencionó sería tomado en cuenta es el sobrepaso,

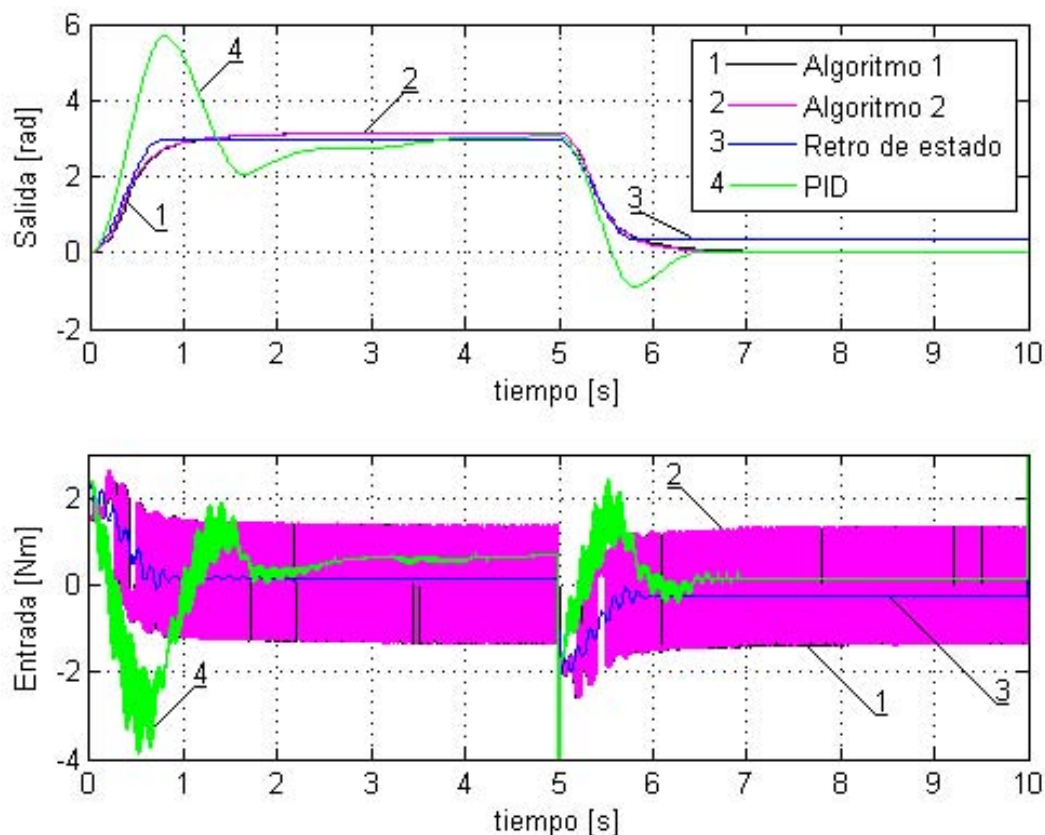


Figura 34. Resultados experimentales obtenidos con los diferentes algoritmos al ser aplicados al sistema torsional.

éste no se muestra en la tabla debido a que, como se puede ver en la figura 34, únicamente el controlador PID presentó esta característica.

V.8 Conclusiones

Aunque lo que se esperaba era hacer más notoria la diferencia entre los algoritmos I y II, los resultados mostraron lo contrario, es decir, los resultados obtenidos con ambos algoritmos son idénticos. Sin embargo, los resultados permiten mostrar la gran diferencia que hay entre el PID y los algoritmos I y II, mientras que éstos llegan al valor deseado en 2s el PID llega al valor deseado después de los 4s y además tiene un sobre tiro de

Tabla IV. Criterios de evaluación

Criterio	Algoritmo I	Algoritmo II	Ubicación de polos	PID
Número de parámetros	4	5	5	3
Rapidez de respuesta	2	2	0.8	4
Error en estado estable	0	0	12%	3%
Control máx. (Nm)	2.6	2.6	2.2	4
Potencia	1922	1922	252	514
Frecuencia alta	si	si	no	bajo
Complejidad	Alta	Alta	Regular	baja

más del 50% en un caso y del 20% en el otro.

Nuevamente, el control por ubicación de polos es el que tiene el menor tiempo de estabilización, aunque este controlador sigue siendo el que tiene el mayor error en estado estable, sin embargo, al ser aplicado en el sistema torsional el error no es tan grande como el que presentó al ser aplicado al sistema rectilíneo del capítulo anterior.

Si bien el PID sí llega al valor deseado, si se le da el tiempo suficiente, gracias a la acción integral, este tiempo es grande comparado con los algoritmos I y II.

Aunque se tuvo control sobre el motor que incorpora la fricción seca, su valor no fue muy grande dadas las limitaciones del motor.

Capítulo VI

Conclusiones y Trabajo a Futuro

VI.1 Conclusiones generales.

La principal aportación de este trabajo de tesis fue llevar a cabo una evaluación, tanto numérica como experimental, de algoritmos de control propuestos recientemente para el control de sistemas subactuados con fricción discontinua en la articulación no actuada. De acuerdo con los resultados obtenidos, los algoritmos bajo evaluación presentaron un error cero en estado estacionario, llegando al valor deseado en tiempo finito aún a pesar de la fricción seca, además el tiempo en que llegan al valor deseado es corto comparado con el PID y el control por ubicación de polos, aún más, los resultados son favorables a pesar del error en el ajuste de parámetros (véase las figura 8 y 24). Desafortunadamente los algoritmos cuentan con ciertas características no deseadas, siendo la principal el gran contenido de alta frecuencia presente en la acción de control. Otra desventaja sería el número de ganancias a sintonizar y el tiempo que lleva sintonizarlos, si bien podría tomar algún tiempo elegir las ganancias, este tiempo se puede reducir siguiendo la metodología mostrada en la sección 3 de los capítulos IV y V, donde se utiliza el sistema lineal dado por (40) para obtener restricciones para dos de las ganancias k_i , habiendo propuesto una de ellas antes (k_3 en ambos sistemas), esto es posible ya que siempre se llega a un sistema de la forma dada por (21).

El Algoritmo II fue mejor que el Algoritmo I sólo en algunos casos y la diferencia no fue muy notable, pero esto se debe a que los niveles de fricción seca presente en los sis-

temas tratados no es suficientemente grande para resaltar la diferencia en el desempeño de los algoritmos, en el ejemplo del capítulo III se puede ver la gran diferencia entre su desempeño cuando la fricción seca es grande.

En ambos sistemas, al aplicar el Algoritmo II se llegó a una “superficie” de deslizamiento discontinua, debe notarse que si bien los resultados obtenidos fueron satisfactorios en ambos casos, el que este tipo de “superficie” sea aplicable para calcular el control por modos deslizantes es un problema abierto (no está comprobado matemáticamente que este tipo de superficie sea aplicable a modos deslizantes).

Se recomienda el uso de este tipo de algoritmos para casos en que se requiere rapidez de respuesta y una gran precisión y exactitud en la salida, aun cuando tenga incertidumbre en los parámetros utilizados en el modelo del sistema.

VI.2 Trabajo a futuro.

El trabajo futuro por realizar se describe en los siguientes puntos:

1. Implementar el uso de observadores para mejorar el desempeño de los Algoritmos.
2. Hacer la comparación utilizando otros sistemas mecánicos en los cuales se tenga una estructura diferente, por ejemplo el sistema bola-viga.
3. Utilizar sistemas en los que la fricción seca sea mayor a la que presentaron los sistemas rectilíneo y torsional para que sea más notoria la ventaja del algoritmo II sobre el algoritmo I.
4. Comparar la robustez de los 4 algoritmos a entradas de perturbación.

Referencias

- Ambardar, A. (2002). *Procesamiento de señales analógicas y digitales*. Thomson Learning, Traducción: Edmundo Urbina y Gabriel Nagore, Michigan Techological University, segunda edición. 811 pp.
- Bartolini, G. y Punta, E. (2000). Second order sliding mode control of systems with nonlinear friction. *En: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney. del 12 al 15 de diciembre.
- Bloch, A. M., Leonard, N. E., y Marsden, J. E. (2000). Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems i: The first matching theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, (45): 2253–2270.
- Bullo, F. y Lynch, K. M. (2001). Kinematic controllability for decoupled trajectory planning in underactuated mechanical systems. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, (17): 402–412.
- Edwards, C. y Spurgeon, S. K. (1998). *Sliding Mode Control: theory and applications*. Taylor And Francis Ltd. 237 pp.
- Filippov, A. (1964). Differential equations with discontinuous right hand-sides. *American Mathematical Society Translations*, **42**: 199–231.
- Gómez-Estern, F. y van der Schaft, A. J. (2004). Physical damping in ida-pbc controlled underactuated mechanical systems. *European Journal of Control*, **10**(5): 451–468.
- González Elías, M. E. (2000). *Modelos de Fricción con Aplicación al Control de Mecanismos*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México. 196 pp.
- Grizzle, J. W., Mogg, C. H., y Chevallereau, C. (2005). Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, (50): 559–576.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, tercera edición. 750 pp.
- Leine, R. I. (2000). *Bifurcations in discontinuous mechanical systems of Filippov-type*. Tesis de doctorado, Technische Universiteit Eindhoven., Eindhoven. 143 pp.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston. 229 pp.
- Martínez Ortiz, R. (2007). *Control de sistemas mecánicos subactuados con fricción discontinua*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México. 73 pp.

- Martínez Ortiz, R. y Álvarez Gallegos, J. (2009). A continuous controller for mechanical systems with dry friction. *En: Congreso Nacional de Control Automático 2009, 30 de septiembre al 02 de octubre. Zacatecas, Zacatecas.*
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineer*. Prentice Hall. Traducido por: Martínez Sarmiento Miguel Ángel, Edo. de México. 997 pp.
- Olsson, H. (1996). *Control Systems with Friction*. Tesis de doctorado, Lund Institute of Technology, Suecia. 169 pp.
- Ortega, R., Spong, M. W., Gomez-Estern, F., y Blankenstein, G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnections and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, (47): 1218–1233.
- Parks, T. R. (1999a). *Manual For Model 205 Torsional Control System*. ECP Educational Control Products, Bell Canyon, CA, primera edición. 117pp.
- Parks, T. R. (1999b). *Manual For Model 210 Rectilinear Control System*. ECP Educational Control Products, Bell Canyon, CA, primera edición. 199pp.
- Reyhanoglu, M., van der Schaft, A., McClamroch, M. H., y Kolmanovsky, I. (1999). Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9): 1663–1671.
- Riachy, S., Floquet, T., Orlov, I., y Richard, J. P. (2006). Stabilization of the cart-pendulum system via quasi-homogeneous switched control. *En: Proceedings of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems. Alghero. 5-7 de junio.*
- Seto, D. y Baillieul, J. (1994). Control problems in super-articulated mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12): 2442–2453.
- Shiriaev, A., Perram, J. W., y Canudas de Wit, C. (2005). Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: Virtual constraints approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, (50): 1164–1176.
- Spong, M. W. (1995). The swingup control problem of the acrobot. *IEEE Control Systems*, 15(1): 49–55.
- Spong, M. W. y Block, D. (1995). The pendubot: A mechatronic system for control research and education. *En: IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, December 1995, 555-557.*
- Spong, M. W., Lewis, F. L., y Abdallah, C. T. (1992). *Robot Control: Dynamics, Motion Planning, Analysis*. Institute of Electrical and Electronics Engineers. 539.
- Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22: 212–222.

- Woolsey, C. A., Bloch, A. M., Leonard, N. E., y Marsen, J. E. (2001). Physical dissipation and the method of controlled lagrangians. *En: Proceedings of the European Control Conference. Porto. 4 al 7 de septiembre.*
- Woolsey, C. A., Bloch, A. M., Leonard, N. E., Reddy, C. K., Chang, D. E., y Marsen, J. E. (2004). Controlled lagrangian systems with gyroscopic forcing and dissipation. *European Journal of Control*, **10**(5): 478–496.