

TESIS DEFENDIDA POR

David Adrián Hernández Fregoso

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Miembro del Comité

Dr. David Isaías Rosas Almeida

Miembro del Comité

Dr. Ervín Jesús Álvarez Sánchez

Miembro del Comité

Dr. Raúl Rangel Rojo

Miembro del Comité

Dr. Roberto Conte Galván

*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

14 de Abril del 2011

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS, UN ESTUDIO
EXPERIMENTAL**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

DAVID ADRIÁN HERNÁNDEZ FREGOSO

Ensenada, Baja California, México. Abril 2011

RESUMEN de la tesis de **DAVID ADRIÁN HERNÁNDEZ FREGOSO**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, Abril 2011.

SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS, UN ESTUDIO EXPERIMENTAL

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de Tesis

Se analiza y evalúa una metodología recientemente propuesta para sincronizar la posición de arreglos de sistemas mecánicos de un solo grado de libertad, bajo diferentes configuraciones. Las características del método propuesto son, entre otras, las siguientes: no se necesita una matriz de conectividad simétrica, los mecanismos pueden tener estructura diferente, ser inciertos y sólo se necesita medición de la posición en cada mecanismo. En este trabajo se realiza un análisis de la matriz de conectividad, ya que si se satisface una condición de rango establecida, entonces se garantiza la existencia de señales de acoplamiento que se requieren para llegar al objetivo de sincronización. También se analiza el desempeño de un conjunto de observadores discontinuos con resultados simulados y experimentales que estiman las velocidades y los términos de perturbación en cada nodo, los cuales son utilizados en la generación de dichas señales de acoplamiento para considerar sus ventajas y desventajas y utilizar el que mas se adecue a nuestras necesidades. En este trabajo se presentan resultados experimentales sobre la sincronización de arreglos de el mayor número de sistemas mecánicos de diferentes estructuras disponibles en el laboratorio de control del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, en particular sistemas rotacionales, translacionales, péndulos y sistemas virtuales.

Palabras Clave: Sincronización, experimental, sistemas mecánicos.

ABSTRACT of the thesis presented by **DAVID ADRIÁN HERNÁNDEZ - FREGOSO**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of MASTER IN SCIENCES in ELECTRONICS AND TELECOMUNICATIONS with orientation in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California, April 2011.

**SYNCHRONIZATION OF MECHANICALS SYSTEMS, AN
EXPERIMENTAL RESEARCH.**

We analyze and evaluate a methodology recently proposed to synchronize the position of arrangements of one degree-of-freedom mechanical systems, under different configurations.. The characteristics of the method are, among others, the following: no need for a symmetric connectivity matrix, the mechanisms may have different structure, to be uncertain and is only required measurement of the position in each mechanism. In this work, we analyze the connectivity matrix, because if we meet a condition set range, then guarantees the existence of coupling signals that are required to reach the objective of synchronization. We also analyze the performance of a set of discontinuous observers with simulated and experimental results, estimated speeds and the terms of disturbance on each node, which are used in the generation of such coupling signals to consider their advantages and disadvantages and use the that best fits our needs. In this work we present experimental results on synchronization of the largest amount of mechanical systems arrangements of different structures available in the control laboratory of the electronics and telecommunications department of CICESE, in particular rotational systems, translational, pendulums and virtual systems.

Keywords: synchronization, experimental, mechanical systems.

*A Dios, a mi familia y
amigos que aunque lejos
siempre han estado con-
migo.*

Agradecimientos

Al doctor Joaquín Álvarez que me ayudó en todo este proceso con sus enseñanzas, mucha paciencia y apoyo. A los miembros del comité, por su colaboración y gran ayuda en este trabajo de tesis. A todos los investigadores y personal del departamento que impartieron sus clases y que estuvieron al pendiente de mi trabajo y a CICESE por darme la oportunidad de estudiar en sus instalaciones.

A mi familia que siempre han estado al pendiente de mi. A mi amigos, los que conozco desde hace tiempo y los que acabo de conocer, con los cuales he pasado muy gratos momentos. A mis amigos y compañeros de casa, que han soportado y compartido bastante durante este tiempo.

Al CONACyT por su apoyo económico recibido a lo largo de mis estudios de maestría.

Contenido

| | Página |
|---|-----------|
| Resumen en español | i |
| Resumen en inglés | ii |
| Dedicatoria | iii |
| Agradecimientos | iv |
| Contenido | v |
| Lista de Figuras | vii |
| Lista de Tablas | x |
| I. Sincronización | 1 |
| II. Topología del arreglo | 9 |
| II.1 Arreglos de dos nodos | 10 |
| II.2 Arreglos de tres nodos | 13 |
| II.2.1 Configuración de tres nodos: un maestro y dos esclavos . . . | 16 |
| II.2.2 Configuración de tres nodos: un maestro y dos esclavos inter- conectados | 17 |
| II.2.3 Configuración de tres nodos: dos maestros y un esclavo . . . | 18 |
| II.3 Arreglos de n nodos | 20 |
| III. Diseño de las señales de acoplamiento | 25 |
| III.1 Señales de control y de acoplamiento para dos sistemas interconectados | 27 |
| III.2 Señales de control y de acoplamiento para tres sistemas interconectados | 31 |
| III.3 Señales de control y de acoplamiento para n sistemas interconectados | 36 |
| IV. Observadores discontinuos | 40 |
| IV.1 Observador discontinuo | 41 |
| IV.2 Observador discontinuo para sistemas no lineales en su forma normal | 45 |
| IV.3 Observación y estimación en tiempo finito de una clase de sistemas no lineales de fase mínima | 49 |
| IV.4 Simulaciones numéricas de los observadores | 53 |
| IV.5 Resultados experimentales de los observadores | 55 |
| IV.6 Discusión del capítulo | 58 |

Contenido (continuación)

| | Página |
|---|------------|
| V. Sincronización de arreglos, resultados experimentales | 65 |
| V.1 Arreglos de tres sistemas | 65 |
| V.1.1 Caso 1: tres sistemas sin conexión | 67 |
| V.1.2 Caso 2: un maestro, dos esclavos | 68 |
| V.1.3 Caso 3: un maestro, dos esclavos interconectados | 71 |
| V.1.4 Caso 4: tres sistemas interconectados | 72 |
| V.1.5 Caso 5: Conexión tres sistemas en anillo | 73 |
| V.1.6 Caso 6: dos maestros, un esclavo | 75 |
| V.1.7 Caso 7: pesos de interconexiones distintos (Caso 2) | 78 |
| V.1.8 Caso 8: pesos de interconexiones distintos (Caso 4) | 80 |
| V.2 Arreglos de cinco sistemas | 82 |
| V.2.1 Caso 1: cinco sistemas sin conexión. | 84 |
| V.2.2 Caso 2: un maestro, cuatro esclavos. | 85 |
| V.2.3 Caso 3: un maestro, cuatro esclavos interconectados. | 87 |
| V.2.4 Caso 4: configuración cascada | 90 |
| V.2.5 Caso 5: tres sistemas como maestro, dos esclavos | 92 |
| V.2.6 Caso 6: tres maestros, dos esclavos | 93 |
| V.3 Arreglos de 7 sistemas | 96 |
| V.3.1 Caso 1: un maestro, seis esclavos | 98 |
| V.3.2 Caso 2: pesos de interconexiones distintos (Caso 1) | 100 |
| V.3.3 Caso 3: variación de cadena doble | 103 |
| V.3.4 Caso 4: tres sistemas como maestro, cuatro esclavos | 105 |
| VI. CONCLUSIONES | 109 |
| VI.1 Trabajo a futuro | 111 |
| REFERENCIAS | 113 |
| A. IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL | 115 |

Lista de Figuras

| Figura | | Página |
|--------|---|--------|
| 1 | Conexión bi-direccional y conexión maestro-esclavo. | 10 |
| 2 | Conexión general para tres sistemas interconectados. | 14 |
| 3 | Conexión un maestro, dos esclavos. | 16 |
| 4 | Conexión un maestro, dos esclavos interconectados. | 17 |
| 5 | Conexión dos maestros, un esclavo. | 19 |
| 6 | Conexión general para dos sistemas interconectados. | 27 |
| 7 | Conexión para tres sistemas interconectados. | 32 |
| 8 | Sistema físico Emulador industrial ECP modelo 220. | 57 |
| 9 | Posición real y observada del sistema simulado. | 60 |
| 10 | Velocidad real y observada del sistema simulado. | 61 |
| 11 | Perturbación real y observada en el sistema simulado. | 61 |
| 12 | Error de posición respecto al sistema simulado. | 62 |
| 13 | Error de velocidad respecto al sistema simulado. | 62 |
| 14 | Posición real y observada del sistema experimental. | 63 |
| 15 | Velocidad real y observada del sistema experimental. | 63 |
| 16 | Perturbación real y observada en el sistema experimental. | 64 |
| 17 | Error de posición respecto al sistema experimental. | 64 |
| 18 | Sistema virtual, péndulo simple. | 66 |
| 19 | Posiciones de los tres sistemas caso 1. | 68 |
| 20 | Configuraciones para tres sistemas. | 68 |
| 21 | Señales de control de los tres sistemas caso 2. | 69 |
| 22 | Posiciones de los tres sistemas caso 2. | 70 |
| 23 | Señales de control de los tres sistemas caso 3. | 72 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 24 | Posiciones de los tres sistemas caso 3. | 73 |
| 25 | Señales de control de los tres sistemas caso 4. | 74 |
| 26 | Posiciones de los tres sistemas caso 4. | 75 |
| 27 | Señales de control de los tres sistemas caso 5. | 76 |
| 28 | Posiciones de los tres sistemas caso 5. | 77 |
| 29 | Señales de control de los tres sistemas caso 6. | 78 |
| 30 | Posiciones de los tres sistemas caso 6. | 79 |
| 31 | Señales de control de los tres sistemas caso 7. | 80 |
| 32 | Posiciones de los tres sistemas caso 7. | 81 |
| 33 | Señales de control de los tres sistemas caso 8. | 82 |
| 34 | Posiciones de los tres sistemas caso 8. | 83 |
| 35 | Sistema rectilíneo ECP modelo 210. | 84 |
| 36 | Configuraciones para cinco sistemas.. . . . | 85 |
| 37 | Posiciones de los cinco sistemas caso 1. | 86 |
| 38 | Señales de control de los cinco sistemas caso 2. | 87 |
| 39 | Posiciones de los cinco sistemas caso 2. | 88 |
| 40 | Señales de control de los cinco sistemas caso 3. | 89 |
| 41 | Posiciones de los cinco sistemas caso 3. | 90 |
| 42 | Señales de control de los cinco sistemas caso 4. | 91 |
| 43 | Posiciones de los cinco sistemas caso 4. | 92 |
| 44 | Señales de control de los cinco sistemas caso 5. | 94 |
| 45 | Posiciones de los cinco sistemas caso 5. | 95 |
| 46 | Señales de control de los cinco sistemas caso 6. | 96 |
| 47 | Posiciones de los cinco sistemas caso 6. | 97 |
| 48 | Sistema torsional ECP modelo 205 y péndulo invertido ECP modelo 505. | 98 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | | Página |
|--------|---|--------|
| 49 | Configuraciones para siete sistemas.. | 99 |
| 50 | Señales de control de los siete sistemas caso 1. | 101 |
| 51 | Posiciones de los siete sistemas caso 1. | 102 |
| 52 | Señales de control de los siete sistemas caso 2. | 103 |
| 53 | Posiciones de los siete sistemas caso 2. | 104 |
| 54 | Señales de control de los siete sistemas caso 3. | 105 |
| 55 | Posiciones de los siete sistemas caso 3. | 106 |
| 56 | Señales de control de los siete sistemas caso 4. | 107 |
| 57 | Posiciones de los siete sistemas caso 4. | 108 |
| 58 | Esquema general de la programación del algoritmo para arreglos de tres sistemas. | 116 |
| 59 | Asignación de los parámetros beta para arreglos de tres sistemas. . . . | 117 |
| 60 | Esquema general del algoritmo del observador. | 117 |
| 61 | Esquema de control para arreglos de tres sistemas. | 118 |
| 62 | Asignación de las ganancias de control para arreglos de tres sistemas. . | 118 |
| 63 | Esquema general de la programación del algoritmo para arreglos de cinco sistemas. | 119 |
| 64 | Asignación de los parámetros beta para arreglos de cinco sistemas. . . . | 119 |
| 65 | Esquema de control para arreglos de cinco sistemas. | 120 |
| 66 | Asignación de las ganancias de control para arreglos de cinco sistemas. | 121 |
| 67 | Implementación para arreglos de tres sistemas. | 121 |
| 68 | Implementación para arreglos de cinco sistemas. | 122 |
| 69 | Implementación para arreglos de siete sistemas. | 122 |

Lista de Tablas

| Tabla | | Página |
|-------|---|--------|
| I | Configuraciones típicas de cuatro sistemas 1. | 23 |
| II | Configuraciones típicas de cuatro sistemas 2. | 24 |
| III | Características del sistema a simular. | 53 |
| IV | Parámetros de los observadores a simular. | 55 |
| V | Características de los observadores, simulados. | 56 |
| VI | Parámetros de los resultados experimentales. | 58 |
| VII | Características de los observadores, experimental. | 59 |
| VIII | Parámetros de los experimentos para tres sistemas. | 67 |
| IX | Parámetros de los experimentos para arreglos de cinco sistemas. | 84 |
| X | Parámetros de los experimentos para siete sistemas. | 99 |

Capítulo I

Sincronización

El concepto de sincronización, en el caso más general, se refiere a la correlación o correspondencia en tiempo del comportamiento de dos o más procesos (Blekhman *et al.*, 1997). En la naturaleza se pueden encontrar muchos ejemplos en donde este fenómeno se presenta; algunos de ellos podrían ser, las millones de células que conforman el corazón, que se contraen y se relajan al mismo tiempo para realizar una función específica, o como la luna, cuyo desplazamiento y giro están sincronizados de tal forma que siempre muestra la misma cara en dirección a la tierra. Igualmente se puede mencionar el caso de algunos insectos que coordinan sus actividades, como el chirrido de los grillos o el brillo de las luciérnagas. En éstos y otros casos mencionados se produce una sincronización natural de varios elementos sin que exista, al menos en apariencia, una conexión entre ellos o introducida en forma artificial por el hombre.

Christiaan Huygens, un reconocido astrónomo, físico y matemático del siglo XVII, fue uno de los primeros científicos en interesarse en el fenómeno de la sincronización y abordarlo con las herramientas de la ciencia. Él colocó dos relojes de péndulo, hechos por él mismo, en una de las paredes de su dormitorio. Al cabo de un tiempo notó que los péndulos de cada uno de los relojes estaban perfectamente sincronizados. Este hecho llamó profundamente su atención; si los detenía y volvía a ponerlos en marcha, los péndulos iniciaban su movimiento de forma descompasada, pero al cabo de un tiempo volvían a sincronizarse. Huygens llegó a la conclusión de que de alguna extraña forma,

los relojes estaban interconectados.

Viendo estos casos de sincronización natural se puede observar que la sincronización es una herramienta que podría ser muy útil en la vida diaria. El problema es que la sincronización no siempre se da de esa manera natural en todos los sistemas, de ahí que resulta de interés estudiar la posibilidad de forzar a los sistemas a sincronizarse, acoplando otro sistema o agregando las conexiones necesarias para lograr esta sincronización. A este proceso de lograr una sincronización forzada le llamaremos sincronización controlada.

La definición de sincronización que se utilizará a lo largo de este trabajo será la siguiente: se suponen k sistemas dinámicos de la siguiente manera:

$$\Sigma_i = \{T, U_i, X_i, Y_i, \phi_i, h_i\}, \quad i = 1, \dots, k$$

donde T es el vector de los instantes de tiempo; U_i, X_i y Y_i son los vectores de entrada, estados y salidas respectivamente; $\phi_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow X_i$ es el mapeo de transición de estados y $h_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ es el mapeo de transición de salidas.

Suponga que se tienen l funcionales $g_j : y_1 \times y_2 \times \dots \times y_k \times T \rightarrow \mathfrak{R}^1$, $j = 1, \dots, l$, se dice que los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ con condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están sincronizados con respecto a las funcionales g_j si:

$$g_j(t, y_1, \dots, y_k) \equiv 0 \quad j = 1, \dots, l$$

para toda $t \in T$.

Se dice que los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ con condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están aproximadamente sincronizados con respecto a las funcionales g_j si existe una $\varepsilon > 0$ tal que:

$$g_j(t, y_1, \dots, y_k) \leq \varepsilon \quad j = 1, \dots, l$$

Se dice que los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ con condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están asintóticamente sincronizados con respecto a las funcionales g_j si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(T, y_1, \dots, y_k) = 0 \quad j = 1, \dots, l$$

La sincronización controlada se ha vuelto un tópico importante en los últimos años debido a su aplicación en tele-operación, procesos de manufactura, sistemas trabajando en esquemas coordinados, tareas de ensamble, sistemas multi-robot, etc. El comportamiento colaborativo ofrece flexibilidad y maniobrabilidad que difícilmente puede obtenerse con un sistema individual.

Un campo importante dentro del tema de la sincronización, es la sincronización de

sistemas mecánicos. Podemos definir un sistema mecánico como un conjunto de elementos dinámicamente relacionados que permiten producir, regular, transmitir o modificar movimiento. Los primeros sistemas mecánicos se basaban en utilizar la fuerza del cuerpo humano; después fueron apareciendo otras formas de energía que ayudaba a generar el movimiento que requerían estos mecanismos para operar. Un ejemplo de estas formas de energía es la fuerza tomada de los animales, tales como los caballos o perros, así como la energía térmica obtenida del carbón o la energía eléctrica utilizada comúnmente en los tiempos actuales. Estos sistemas mecánicos pueden identificarse fácilmente pues tienen elementos tales como manivelas, levas, poleas, bielas, palancas, engranes, etc. Algunos ejemplos de sistemas mecánicos podrían ser los relojes mecánicos, ascensores, trenes, grúas, etc.

Sin embargo dentro del campo de la sincronización controlada de sistemas en general, existen problemas no del todo resueltos, como no tener acceso al vector completo de estados, la influencia de perturbaciones externas sobre los sistemas, no contar con modelos exactos de los sistemas, tener un gran número de sistemas a sincronizar, como están conectados entre ellos, y encontrar la ley de control que se encargue de llevar a todos estos sistemas a la sincronización. El problema de no tener acceso completo al vector de estados se debe a que, en la actualidad los mecanismos no cuentan normalmente con sensores de velocidad, ya que éstos, por su alto costo aumentan de manera considerable el costo de instrumentación de estos. Para hacer frente a esta clase de problemas se ha propuesto utilizar un sistema virtual que se encarga de estimar el valor de la velocidad a partir de la medición de la posición la cual normalmente se encuentra disponible.

Otro problema importante es el ocasionado por perturbaciones externas y la incertidumbre de los parámetros y modelado de los sistemas a sincronizar. Esto puede ser ocasionado por varios factores: por ejemplo es común que los sistemas que se intentan sincronizar se encuentran en lugares expuestos a condiciones no ideales de operación, en consecuencia, sometidas a perturbaciones externas. Por otra parte, estas condiciones pueden provocar que los elementos de dichos sistemas sufran de desgaste lo que ocasiona que los parámetros incluidos en los modelos que describen su comportamiento sufran variaciones, haciendo que el modelo que se tenía inicialmente, se aleje cada vez más del modelo real del sistema, provocando que el desempeño de los controladores se degrade o, en ciertos casos, no cumplan con el objetivo de la sincronización.

La configuración más utilizada para la sincronización consiste solamente de dos sistemas conectados unidireccionalmente (maestro-esclavo). Esta es la configuración más sencilla, para la cual el problema de la sincronización ya ha sido prácticamente resuelto para una amplia gama de sistemas dinámicos. Sin embargo, el problema de sincronizar arreglos de un número mayor de sistemas interconectados es más complicado, pues se tiene que diseñar la propia interconexión de los sistemas para que la información necesaria para la sincronización llegue adecuadamente a todos los sistemas que constituyen el arreglo. Dentro de esta problemática general se ubica el presente trabajo de tesis.

En los últimos años se han propuesto diferentes técnicas de sincronización. Algunas de ellas se basan en técnicas de control clásico, como retroalimentación lineal de estados, modos deslizantes y sincronización basada en observadores, donde algunos de ellos están enfocados a la sincronización de sistemas caóticos (Boccaletti *et al.*, 2002), (Tang *et al.*, 2002), (Pecora y Carroll, 1990).

Generalmente, cuando se trabaja con sistemas físicos, se presentan discrepancias entre el sistema físico y el modelo matemático que lo representa. Estas discrepancias se presentan principalmente por dinámicas no modeladas, incertidumbres en los parámetros utilizados, alteraciones de los sistemas y/o perturbaciones externas.

Para hacer frente a estos problemas se han desarrollado y utilizado técnicas de control robusto como por ejemplo control de estructura variable (Huang *et al.*, 1993) y control por modos deslizantes (Utkin, 1992). Un enfoque particular del control por modos deslizantes es que efectivamente insensibiliza al sistema ante cierta clase de perturbaciones; sin embargo, se tiene el problema de las conmutaciones de alta frecuencia que puede ser dañino para cierta clase de sistemas.

El problema de incertidumbres paramétricas es abordado en (Sun y Mills, 2002), en donde se propone un control adaptativo para sincronizar dos mecanismos con restricciones cinemáticas bajo una conexión bi-direccional, pero en este trabajo se utilizaron mecanismos con la misma estructura y suponían la medición completa del vector de estados.

Otro antecedente de este trabajo de tesis es el presentado en (Rosas Almeida, 2005) en donde se consideran incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas acotadas al sistema. Algunas de las ventajas que presenta este algoritmo es que considera que no se cuenta con el vector de estados completo. La parte medular de este trabajo mencionado es un observador discontinuo que presenta modos deslizantes de segundo orden. Este observador no solo realiza una estimación del vector de estados, también,

empleando el concepto del control equivalente utilizado en modos deslizantes, se puede obtener una estimación del término de perturbación presente en la planta por medio de un filtro pasa bajas. Dicho término de perturbación identificado es agregado al controlador para darle robustez al sistema en lazo cerrado. Como el término discontinuo aparece en el observador y no en el controlador, los efectos de las altas frecuencias son reducidos a niveles aceptables para el sistema físico.

Posteriormente en (Hernández Arango, 2007) se realizó el seguimiento de este trabajo utilizando estos algoritmos para un arreglo de mayor dimensión. Entre los sistemas incluidos destacan, péndulos mecánicos, péndulos virtuales y circuitos electrónicos.

En (Peña Ramirez, 2007) se implementó con circuitos electrónicos una estructura de control robusto para sistemas lagrangianos con estimación de perturbaciones, diseñada con propósitos de regulación y seguimiento. Este contenía un observador para la estimación del vector de estados y un filtro que proporcionaba la estimación de la perturbación presente en el sistema.

Una ventaja de los algoritmos que se presentan en este trabajo y se desean evaluar es la incorporación de un observador, que estima las velocidades y las perturbaciones en cada uno de los nodos del arreglo. De esta manera se tiene un vector de estados completo, y la estimación de las perturbaciones obtenidas se puede incorporar a las señales de acoplamiento para compensar las perturbaciones reales. Esto mejora notablemente la robustez del sistema en lazo cerrado mediante señales de acoplamiento suaves. En este sentido, el objetivo general de este trabajo de tesis es de utilizar el mayor número de sistemas disponibles para evaluar el desempeño de algoritmos recientes de sincronización

mediante su aplicación a arreglos de sistemas mecánicos diversos. En particular se evaluará su desempeño en robustez frente a dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas y estimación del estado, para arreglos de varios sistemas en diversas configuraciones.

Estos algoritmos pueden ser utilizados en una clase de sistemas más amplia, por ejemplo a aquellos sistemas que puedan ser llevados a su forma normal, en donde se encuentran contenidos los sistemas de estructura lagrangiana. También se realiza un análisis de la topología del arreglo, esto para asegurar que el arreglo cumpla con las condiciones necesarias para la sincronización. La evaluación y desempeño de estos algoritmos se realizará mediante su aplicación a arreglos de sistemas mecánicos disponibles en el laboratorio de control del DET, en particular sistemas rotacionales, masa-resorte y péndulos interconectados.

Capítulo II

Topología del arreglo

Un problema importante dentro de el campo de la sincronización, se refiere a la topología del arreglo con la cual se está trabajando, esto puede ser un problema trivial para el caso mínimo de dos sistemas interconectados en uno o dos sentidos. Sin embargo, el problema se complica cuando se tienen más de dos sistemas, ya que entre más sistemas contenga el arreglo, existirá un mayor número de configuraciones posibles y no todas cumplen con las condiciones necesarias para el objetivo de sincronización que se haya definido. Además, un número mayor de sistemas interconectados introduce un número mayor de trayectorias de retroalimentación, volviendo crítico el problema de estabilidad del arreglo y complicado.

En este capítulo se realiza un estudio de la topología de los arreglos que se desean sincronizar, tomando en cuenta la cantidad de sistemas y las conexiones entre ellos. Como resultado de este análisis se escogerán algunas configuraciones que ilustren nuestros resultados de manera numérica y se seleccionarán aquéllos que sea viable llevarlos a la práctica. Este estudio se basa principalmente en la obtención y análisis de la llamada matriz de conectividad, algunas de cuyas propiedades y estructura pueden indicar la posibilidad de sincronización.

De manera general, la matriz de conectividad se puede definir como una matriz que contiene información del número y la forma como están conectados los sistemas. La im-

portancia de esta matriz radica en que, dependiendo de su estructura y propiedades, se podrá o no cumplir con los objetivos de sincronización independientemente del número de sistemas del arreglo.

Para comprender mejor el análisis de la matriz de conectividad, se muestran conexiones típicas para arreglos de dos y tres nodos, la obtención de su matriz de conectividad para el caso de sistemas de un grado de libertad, una breve descripción de su comportamiento y, para finalizar, una generalización para arreglos de n nodos a sincronizar que se utilizará en capítulos posteriores.

II.1 Arreglos de dos nodos

Nuestro estudio empieza analizando las configuraciones más sencillas, siendo éstas de sólo dos sistemas a sincronizar. En este caso se puede tener la configuración maestro-esclavo y la configuración bi-direccional. En la figura 1 se muestra la topología de cada una de ellas.

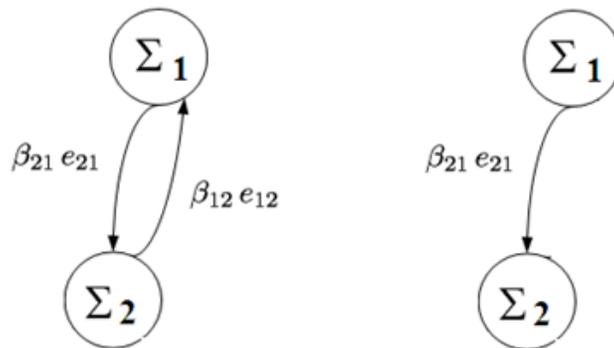


Figura 1. Conexión bi-direccional y conexión maestro-esclavo.

A Σ_1 y Σ_2 se les conocerá como nodos, cada nodo representa un sistema. Para el caso de este trabajo un nodo es un sistema mecánico. e_{12} y e_{21} representan los errores que se tienen entre los nodos, definidos básicamente como la diferencia del vector generalizado de posiciones de un nodo con respecto a otro. β_{12} y β_{21} son valores positivos que representan la fuerza del acoplamiento entre los nodos. Cuando β es igual a cero significa que no hay acoplamiento en ese sentido de un nodo a otro. Con esta definición se puede observar que la configuración maestro-esclavo es un caso particular de la configuración bi-direccional donde β_{12} es igual a cero.

A continuación, ya que se tiene definido los elementos del arreglo, se procede a la obtención de la matriz de conectividad. Se empieza definiendo el error entre los nodos con respecto a las posiciones generalizadas de cada uno de ellos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_{12} &= q_1 - q_2, \\ e_{21} &= q_2 - q_1, \end{aligned} \tag{1}$$

donde q_1 es la posición generalizada del nodo Σ_1 y q_2 la del nodo Σ_2 . Posteriormente se define una variable nueva que denotamos ε y que se denota como error auxiliar, el cual ayudará a sincronizar el arreglo cuando se tengan más de dos nodos. Esta variable incluirá todos los errores de un solo nodo con respecto a los demás. Para el caso de dos nodos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \beta_{12}e_{12}, \\ \varepsilon_2 &= \beta_{21}e_{21}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1) en (2) se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \beta_{12}(q_1 - q_2) \\ \varepsilon_2 &= \beta_{21}(q_2 - q_1)\end{aligned}\tag{3}$$

Ahora, desarrollando las ecuaciones (3), se expresa en una forma matricial que ayudará a visualizar mejor la matriz de conectividad:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{12} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Aquí se puede ver que la estructura matricial de las ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$\varepsilon = \Theta q$$

donde ε es el vector de los errores auxiliares, q es el vector de posiciones generalizadas y Θ es la matriz de conectividad. Por lo tanto, la matriz de conectividad para el caso general de una configuración de dos nodos es la siguiente:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \beta_{12} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix}$$

Como se mencionó anteriormente, la configuración maestro-esclavo es un caso par-

particular de la configuración bi-direccional cuando β_{12} o β_{21} es igual a cero. Para el caso $\beta_{12} = 0$, y sustituyendo este valor en la matriz de conectividad, obtendríamos lo siguiente:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix}$$

Aquí se puede observar que la fila de ceros corresponde al sistema maestro, el cual no depende para nada del sistema esclavo, lo cual nos sirve para detectar inmediatamente si el arreglo contiene un maestro e identificar cual es.

II.2 Arreglos de tres nodos

A continuación se realiza el análisis para arreglos de tres nodos. A diferencia de los arreglos de dos nodos, donde sólo se cuenta con dos posibles conexiones, aquí se puede incluir hasta seis conexiones, de aquí que la cantidad de configuraciones posibles aumenta considerablemente con respecto al caso anterior. De igual manera, para este caso se hará uso de la matriz de conectividad para saber si el arreglo podrá ser sincronizado. La figura 2 muestra el esquema general de un arreglo de tres nodos y sus conexiones.

Ya que se tiene el diagrama general, se empezará definiendo los errores entre los nodos como:

$$e_{i,j} = q_i - q_j \quad i \neq j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (4)$$

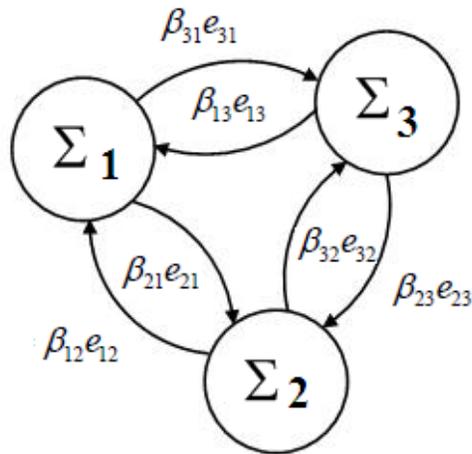


Figura 2. Conexión general para tres sistemas interconectados.

Como se puede observar, hasta este punto se tienen seis errores. El uso de errores auxiliares ayudará a reducir los errores que queremos controlar. Estos errores auxiliares ε , para el caso de arreglos de 3 nodos, se proponen de la forma:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \beta_{12}e_{12} + \beta_{13}e_{13} \\
 \varepsilon_2 &= \beta_{21}e_{21} + \beta_{23}e_{23} \\
 \varepsilon_3 &= \beta_{31}e_{31} + \beta_{32}e_{32}
 \end{aligned} \tag{5}$$

De esta forma se disminuyen las variables a controlar, de seis que eran inicialmente, a solo tres. Además, al incluir las conexiones β , también se considera la fuerza del acoplamiento entre los nodos. Al sustituir los errores de las ecuaciones (4) en las ecuaciones correspondientes de (5), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \beta_{12}(q_1 - q_2) + \beta_{13}(q_1 - q_3) \\
\varepsilon_2 &= \beta_{21}(q_2 - q_1) + \beta_{23}(q_2 - q_3) \\
\varepsilon_3 &= \beta_{31}(q_3 - q_1) + \beta_{32}(q_3 - q_2)
\end{aligned} \tag{6}$$

Agrupando los términos comunes y llevando a la forma matricial $\varepsilon = \Theta q$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{12} + \beta_{13} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

de donde se puede extraer la matriz de conectividad Θ para el caso en que todos los nodos están interconectados como se muestra en la figura 2:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \beta_{12} + \beta_{13} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Esta matriz, para el caso $\beta \neq 0$, tiene rango $(n-1)$, como se menciona posteriormente en este capítulo, el rango de la matriz de conectividad define si una configuración puede o no llegar a ser sincronizable. De esta matriz general se puede obtener la matriz de conectividad para cualquier caso particular de tres nodos. A continuación se muestran algunos ejemplos:

II.2.1 Configuración de tres nodos: un maestro y dos esclavos

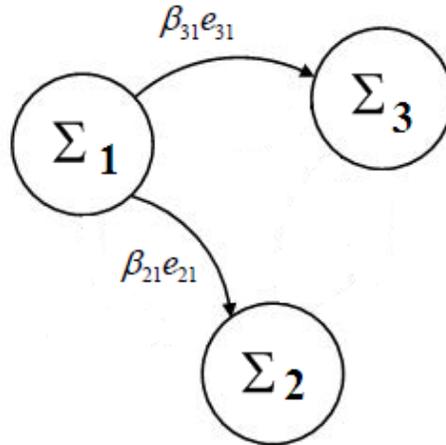


Figura 3. Conexión un maestro, dos esclavos.

Este es el caso más sencillo para arreglos de tres nodos. En éste sólo se tienen dos conexiones, β_{21} y β_{31} , por lo tanto al sustituir todas las demás conexiones β la ecuación (8) queda como sigue:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} & 0 \\ -\beta_{31} & 0 & \beta_{31} \end{pmatrix}$$

Observe que esta matriz tiene rango $(n - 1) = 2$ lo cual indica que el arreglo es sincronizable. Sin embargo, se puede aumentar la robustez del arreglo con respecto a la pérdida de conexiones si además de las conexiones existentes agregamos conexiones entre los esclavos, como se muestra en la figura 4, ya que si esta matriz por alguna razón pierde una conexión, su rango disminuiría a $(n - 2)$, siendo la matriz resultante

la siguiente:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{31} & 0 & \beta_{31} \end{pmatrix}$$

II.2.2 Configuración de tres nodos: un maestro y dos esclavos interconectados

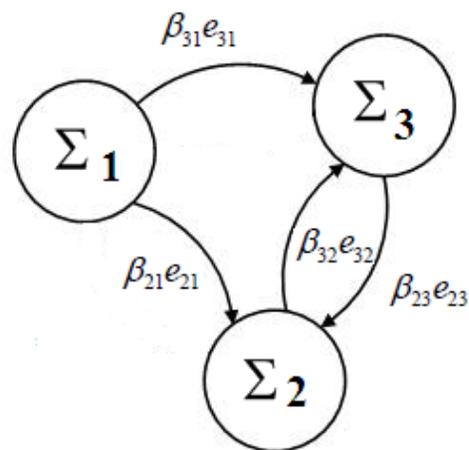


Figura 4. Conexión un maestro, dos esclavos interconectados.

En este caso se agregan dos conexiones, β_{23} y β_{32} , entre los nodos esclavos. En este caso la matriz queda como sigue:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} \end{pmatrix}$$

Esta matriz conserva la condición de tener rango $(n - 1) = 2$ y, por lo tanto, indica que el arreglo es sincronizable. Ambos arreglos son sincronizables con respecto al nodo maestro. La diferencia radica en que, si por alguna razón se llegara a perder una conexión entre los nodos, aun así podríamos asegurar la sincronización con el maestro para el arreglo de la figura 4. Esto no sucedería para el caso de la figura 3, ya que la pérdida de una conexión reduciría el rango de la matriz de $(n - 1) = 2$ a $(n - 2) = 1$. Suponga el caso en que se pierde la conexión de β_{21} , la matriz resultante es la siguiente:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{23} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} \end{pmatrix}$$

Esta matriz conserva el rango $(n - 1)$ a pesar de haber perdido una conexión y mantiene la condición para la sincronización.

II.2.3 Configuración de tres nodos: dos maestros y un esclavo

Otro ejemplo de arreglos de tres nodos es el caso en el que se tienen dos maestros como se muestra en la figura 5 :

Para este caso también se tienen solo dos conexiones, β_{31} y β_{32} , por lo que la matriz

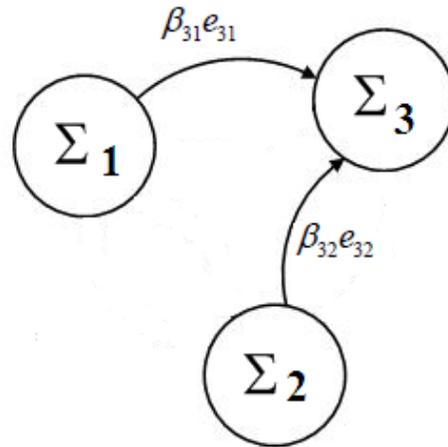


Figura 5. Conexión dos maestros, un esclavo.

resultante sería la siguiente:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} \end{pmatrix}$$

Esta matriz contiene dos renglones de ceros que corresponden a los dos maestros. El rango de la matriz es $(n - 2) = 1$, con lo cual no se puede asegurar la sincronización de los nodos. Esto se debe a que al no haber una retroalimentación para los maestros, éstos siguen su propia dinámica sin importar el comportamiento de los demás nodos, haciendo imposible lograr que los errores se vayan a cero y conseguir la sincronización del arreglo.

Para finalizar, se mostrará la forma generalizada para arreglos de n nodos. Esto servirá para simplificar algunas operaciones en capítulos posteriores.

II.3 Arreglos de n nodos

El primer paso, como en los casos anteriores, será definir los errores entre los nodos. Siendo n el número de nodos a sincronizar se tendrá que el número de errores será de $n(n - 1)$, expresados generalizadamente como:

$$e_{ij} = q_i - q_j \quad (i \neq j) \quad (9)$$

Debido a que se tienen $n(n - 1)$ errores, se hará uso de los errores auxiliares ε para reducir el número de ecuaciones a solo n , quedando de la siguiente manera:

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \beta_{ij} e_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

Sustituyendo los errores de (9) en (10) y llevándolo a su forma matricial $\varepsilon = \Theta q$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n \beta_{1i} & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n} \\ -\beta_{21} & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n \beta_{2i} & \cdots & -\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n,1} & -\beta_{n,2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

La matriz de conectividad Θ está dada por:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \beta_{12} + \cdots + \beta_{1n} & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n} \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \cdots + \beta_{2n} & \cdots & -\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n,1} & -\beta_{n,2} & \cdots & \beta_{n,1} + \cdots + \beta_{n,n-1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Esta matriz $n \times n$ tiene la propiedad de que la suma de renglones es igual a cero. Así también, otra propiedad de la matriz de conectividad es que el determinante de la matriz cuando se encuentran todos los nodos interconectados debe ser igual a cero, de aquí que el rango de la matriz cuando todos están interconectados es $(n - 1)$. De esta forma será posible determinar de manera rápida si un arreglo podrá ser sincronizable sustituyendo los valores de las β correspondientes y verificar el rango de la matriz obtenida.

Ahora se describe el análisis de si un arreglo puede llegar a ser sincronizable. Recordemos la ecuación de la forma matricial de las variables auxiliares es:

$$\varepsilon = \Theta q$$

Supongamos que se tiene el siguiente objetivo de sincronización:

$$e_{ij} = q_i - q_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (13)$$

donde se busca que todas las posiciones generalizadas q de los sistemas sean iguales. Esto se consigue resolviendo la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = \Theta q = 0, \quad (14)$$

donde la única condición que se pide es que el rango de la matriz Θ sea igual a $(n - 1)$ para poder asegurar que se cumple el objetivo de sincronización.

En las tablas (I) y (II) se incluyen algunas configuraciones de cuatro sistemas, su respectiva matriz de conectividad, así como el rango de la matriz. Se escogieron configuraciones de cuatro sistemas ya que con éstos es suficiente para observar las configuraciones más representativas que se pueden aplicar a arreglos de más nodos.

Entre las configuraciones más representativas se tienen las de un solo maestro con esclavos interconectados, anillo simple, anillo doble, cascada, ramificada o de árbol, dos maestros y variaciones de esas mismas.

El análisis de este capítulo será de ayuda para los capítulos posteriores para saber si un arreglo será sincronizable estudiando su matriz de conectividad y como encontrar las señales de acoplamiento necesarias para ello. También apoyará los resultados experimentales de los cuales se espera su sincronización o su falta de ella.

Tabla I. Configuraciones típicas de cuatro sistemas 1.

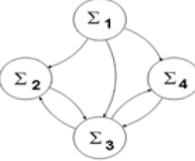
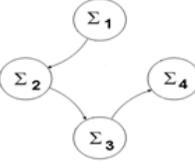
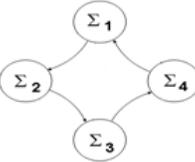
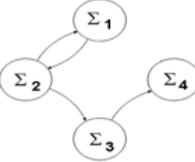
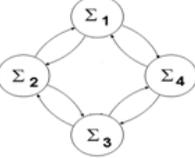
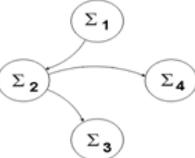
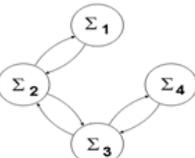
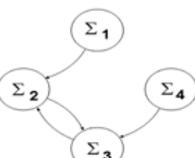
| Configuración | Matriz de conectividad | Rango de Θ |
|---|---|-------------------|
|  | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} & 0 \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{34} & -\beta_{34} \\ -\beta_{41} & 0 & -\beta_{43} & \beta_{41} + \beta_{43} \end{pmatrix}$ | 3 |
|  | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{43} & \beta_{43} \end{pmatrix}$ | 3 |
|  | $\begin{pmatrix} \beta_{14} & 0 & 0 & -\beta_{14} \\ -\beta_{21} & \beta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{43} & \beta_{43} \end{pmatrix}$ | 3 |
|  | $\begin{pmatrix} \beta_{12} & -\beta_{12} & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{43} & \beta_{43} \end{pmatrix}$ | 3 |

Tabla II. Configuraciones típicas de cuatro sistemas 2.

| Configuración | Matriz de conectividad | Rango de Θ |
|---|--|-------------------|
|  | $\begin{pmatrix} \beta_{12} + \beta_{14} & -\beta_{12} & 0 & -\beta_{14} \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} + \beta_{34} & -\beta_{34} \\ -\beta_{41} & 0 & -\beta_{43} & \beta_{41} + \beta_{43} \end{pmatrix}$ | 3 |
|  | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} & 0 \\ 0 & -\beta_{42} & 0 & \beta_{43} \end{pmatrix}$ | 3 |
|  | $\begin{pmatrix} \beta_{12} & -\beta_{12} & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} + \beta_{34} & -\beta_{34} \\ 0 & 0 & -\beta_{43} & \beta_{43} \end{pmatrix}$ | 3 |
|  | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} + \beta_{34} & -\beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 2 |

Capítulo III

Diseño de las señales de acoplamiento

Como se vió en el capítulo anterior, se puede conocer si un arreglo puede o no ser sincronizable debido a las conexiones del arreglo que forman la matriz de conectividad, aunque no se discutió como llevar a los sistemas a dicha sincronización. Como se sabe, hay muchos ejemplos en la naturaleza de sincronización, la mayoría de ellos sin una conexión aparente, pero aún así sincronizados para realizar una función en específico, de aquí el interés de estudiarla para aprovechar todas las ventajas que nos puede ofrecer. Sin embargo, la sincronización de estos ejemplos que se dan en la naturaleza ocurren de forma natural, lo cual no sucede con todos los sistemas que comúnmente se usan en las industrias y en las aplicaciones de la vida diaria. Por eso es necesario agregar esas conexiones encargadas de llevar la información necesaria a todos los sistemas y diseñar la estrategia de procesamiento de dicha información.

En este capítulo se incluye el diseño de la señal de control y las señales de acoplamiento para sincronizar un arreglo de sistemas. Las señales de control y de acoplamiento se diseñan con base en el número de nodos a sincronizar y la dinámica que estos tengan, ya que los sistemas que se propone sincronizar tienen estructuras, parámetros y comportamientos distintos. Los sistemas que se manejan en este trabajo son sistemas mecánicos, los cuales tienen una estructura lagrangiana que puede expresarse con el siguiente modelo matemático:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(\dot{q})\dot{q} + G(q) + \xi(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = \tau$$

donde q es el vector de posiciones generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $D(\dot{q})$ es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa de cada articulación, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales, τ es el vector de pares de entrada, que se considera acotado y tal que produce un comportamiento acotado y finalmente, $\xi(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ es un vector que contiene los términos producidos por incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas el cual se considera acotado. Una manera simplificada de expresar los sistemas con los que se trabajará es en su forma de ecuación de estados, en donde se puede apreciar también su comportamiento y la dinámica del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi(\cdot) \end{pmatrix}$$

En esta ecuación $x_1 = q$ representa la posición del sistema, $x_2 = \dot{q}$ la velocidad, u_1 la entrada de control y los términos restantes definidos como:

$$f_1(x) = (C(q, \dot{q})\dot{q} + D(\dot{q}) + G(q))M(q)^{-1}$$

$$g_1(x) = M(q)^{-1}$$

$$\xi(\cdot) = \xi(t, q, \dot{q}, \ddot{q})M(q)^{-1}$$

Con la definición general del sistema, se diseñaran las señales de acoplamiento para el caso de dos sistemas.

III.1 Señales de control y de acoplamiento para dos sistemas interconectados

Se empezará con el caso más sencillo: el caso de dos sistemas interconectados que, como se vió en el capítulo anterior, pueden ser sincronizables bajo dos diferentes arreglos, el maestro-esclavo y el bi-direccional. En la figura 6 se muestra su topología:

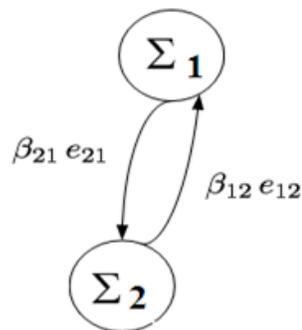


Figura 6. Conexión general para dos sistemas interconectados.

En la figura 6 Σ_1 y Σ_2 están definidos en su forma general de ecuaciones de estado:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi_1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ f_2(x) + g_2(x)u_2 + \xi_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

De la figura 6 se definen los errores que se muestran en función de las variables de estado de nuestros dos sistemas:

$$e_{12} = x_1 - x_3 \quad (17)$$

$$e_{21} = x_3 - x_1$$

También se definen las variables auxiliares que ayudan a simplificar las variables de error:

$$\varepsilon_1 = \beta_{12}e_{12} \quad (18)$$

$$\varepsilon_2 = \beta_{21}e_{21}$$

Para poder analizar estas variables auxiliares y ver su comportamiento dinámico, se utilizará la segunda derivada de las mismas, quedando de la siguiente forma:

$$\ddot{\tilde{e}}_1 = \beta_{12}\ddot{e}_{12} \quad (19)$$

$$\ddot{\tilde{e}}_2 = \beta_{21}\ddot{e}_{21}$$

Como se puede observar, también se necesita la segunda derivada de los errores definidos con anterioridad en las ecuaciones (17). Realizando la derivada y sustituyendo en las ecuaciones (19) obtenemos lo siguiente:

$$\ddot{\tilde{e}}_1 = \beta_{12}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3) = \beta_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_4) \quad (20)$$

$$\ddot{\tilde{e}}_2 = \beta_{21}(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_1) = \beta_{21}(\dot{x}_4 - \dot{x}_2)$$

En estas ecuaciones (20) podemos introducir la dinámica de los sistemas que se muestran en las ecuaciones (15) y (16) dando como resultado las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$\ddot{\tilde{e}}_1 = \beta_{12}((f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi_1) - (f_2(x) + g_2(x)u_2 + \xi_2)) \quad (21)$$

$$\ddot{\tilde{e}}_2 = \beta_{21}((f_2(x) + g_2(x)u_2 + \xi_2) - (f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi_1))$$

En las ecuaciones (21) se observan las derivadas de los dos errores auxiliares que se quieren llevar a cero para lograr la sincronización y dos entradas de control. Para el caso de dos sistemas a sincronizar, la conexión bi-direccional requiere de las dos señales de

acoplamiento, mientras que la conexión maestro-esclavo puede sincronizarse teniendo sólo una. Esto se debe a que se puede llevar ε_1 a cero por medio de una señal de control y, ya que ε_1 y ε_2 son dependientes una de la otra, ε_2 también es llevado a cero logrando la sincronización. Una forma de demostrar esto es proponiendo las señales de control de la siguiente manera:

$$u_1 = -g_1^{-1}(f_1(x) + \xi_1 + v_1)$$

$$u_2 = -g_2^{-1}(f_2(x) + \xi_2 + v_2)$$
(22)

Aquí se incluyen las señales de acoplamiento v_1 y v_2 , las cuales se propone que tengan la siguiente forma:

$$v_1 = \beta_{12}(k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4))$$

$$v_2 = \beta_{21}(k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2))$$

Aquí se muestra la estructura de un controlador PD donde las ganancias del controlador, k_p y k_d , son la ganancia proporcional y la ganancia derivativa respectivamente. Al sustituir las señales de control de las ecuaciones (22) en las variables auxiliares de error de (21), y desarrollando la expresión, se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = -\beta_{12}(v_1 - v_2)$$

$$\ddot{\varepsilon}_2 = -\beta_{21}(v_2 - v_1)$$

Analizando cada ecuación de estado por separado se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{1,1} \\ \dot{\varepsilon}_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{2,1} \\ -\beta_{12}(\beta_{12}(k_{p1}(e_{12}) + k_{d1}(\dot{e}_{12})) + \beta_{21}(k_{p2}(e_{21}) + k_{d2}(\dot{e}_{21}))) \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{1,2} \\ \dot{\varepsilon}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{2,2} \\ -\beta_{21}(\beta_{21}(k_{p2}(e_{21}) + k_{d2}(\dot{e}_{21})) + \beta_{12}(k_{p1}(e_{12}) + k_{d1}(\dot{e}_{12}))) \end{pmatrix}$$

Con la correcta elección de las ganancias del controlador, y la condición vista anteriormente donde el rango de la matriz de conectividad debe tener rango (n-1), se puede lograr que la dinámica de las variables auxiliares de error de las ecuaciones (23) tenga un único equilibrio asintóticamente estable en el origen (Khalil y Grizzle, 2002); es decir, x_1 converja a x_3 y x_2 converja a x_4 logrando el objetivo de sincronización.

III.2 Señales de control y de acoplamiento para tres sistemas interconectados

Ahora se presenta el caso de tres sistemas, esto para pasar del caso más sencillo que son dos sistemas, a uno más complejo, y poder analizar diferencias entre los dos casos:

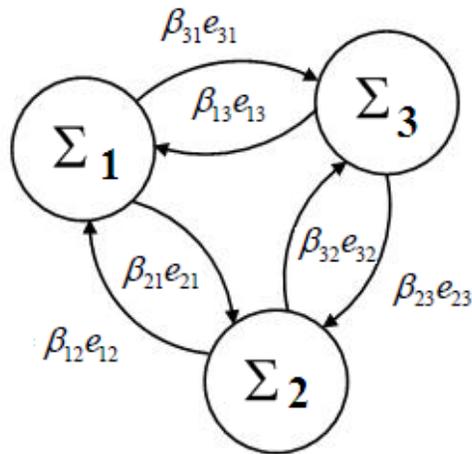


Figura 7. Conexión para tres sistemas interconectados.

En la figura 7 se muestra el esquema general de tres sistemas con todas sus conexiones, esto por ser el caso más general donde no se cuenta con un maestro. Como se mencionó anteriormente, cada sistema tiene su propia dinámica, la cual representaremos con las siguientes ecuaciones de estado:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ f_2(x) + g_2(x)u_2 + \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ f_3(x) + g_3(x)u_3 + \xi_3 \end{pmatrix}$$

Ya teniendo los tres sistemas y la forma en que están conectados se procederá a

plantear nuestro objetivo de control el cual se propone como $q_i \rightarrow q_j$, siendo q_i y q_j las posiciones generalizadas de los sistemas. En la figura 7 también se muestran los errores de sincronización, los cuales pasan de dos en el caso de ser dos sistemas, a seis para el caso de tres sistemas. Se definen a continuación:

$$e_{12} = x_1 - x_3$$

$$e_{13} = x_1 - x_5$$

$$e_{23} = x_3 - x_5$$

$$e_{21} = x_3 - x_1$$

$$e_{31} = x_5 - x_1$$

$$e_{32} = x_5 - x_3$$

Ahora se hace uso de las variables auxiliares ε que, para este caso, son tres, una por cada sistema a sincronizar. Tienen la siguiente estructura:

$$\varepsilon_1 = \beta_{12}e_{12} + \beta_{13}e_{13}$$

$$\varepsilon_2 = \beta_{21}e_{21} + \beta_{23}e_{23}$$

$$\varepsilon_3 = \beta_{31}e_{31} + \beta_{32}e_{32}$$

Para analizar la dinámica de estas variables auxiliares se deriva dos veces cada ecuación, obteniendo lo siguiente:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = \beta_{12}\ddot{e}_{12} + \beta_{13}\ddot{e}_{13}$$

$$\ddot{\varepsilon}_2 = \beta_{21}\ddot{e}_{21} + \beta_{23}\ddot{e}_{23} \quad (24)$$

$$\ddot{\varepsilon}_3 = \beta_{31}\ddot{e}_{31} + \beta_{32}\ddot{e}_{32}$$

Se sustituye las segundas derivadas de los errores en las ecuaciones (24), para posteriormente incluir las dinámicas pertenecientes a los sistemas a sincronizar:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = \beta_{12}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3) + \beta_{13}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_5)$$

$$\ddot{\varepsilon}_2 = \beta_{21}(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_1) + \beta_{23}(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_5)$$

$$\ddot{\varepsilon}_3 = \beta_{31}(\ddot{x}_5 - \ddot{x}_1) + \beta_{32}(\ddot{x}_5 - \ddot{x}_3)$$

\ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 y \ddot{x}_3 están definidas en donde se muestran los sistemas a sincronizar y tienen la siguiente forma:

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi_1$$

$$\ddot{x}_3 = \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u_2 + \xi_2$$

$$\ddot{x}_5 = \dot{x}_6 = f_3(x) + g_3(x)u_3 + \xi_3$$

Ahora se proponen las siguientes señales de control, las cuales se proponen así con la intención de compensar tanto la dinámica de los sistemas a sincronizar así como la perturbación que estas puedan presentar:

$$u_1 = -g_1^{-1}(f_1(\hat{x}) + \xi_1 + v_1)$$

$$u_2 = -g_2^{-1}(f_2(\hat{x}) + \xi_2 + v_2)$$

$$u_3 = -g_3^{-1}(f_3(\hat{x}) + \xi_3 + v_3)$$

v_1 , v_2 y v_3 que son las señales de acoplamiento se propone que tengan la siguiente forma (Alvarez *et al.*, 2008):

$$v_1 = \beta_{12}(k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + \beta_{13}(k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = \beta_{21}(k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + \beta_{23}(k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = \beta_{31}(k_{p3}(x_5 - x_1) + k_{d3}(x_6 - x_2)) + \beta_{32}(k_{p3}(x_5 - x_3) + k_{d3}(x_6 - x_4))$$

Sustituyendo las señales de control en las ecuaciones de las variables auxiliares se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = -\beta_{12}(v_1 - v_2) - \beta_{13}(v_1 - v_3)$$

$$\ddot{\varepsilon}_2 = -\beta_{21}(v_2 - v_1) - \beta_{23}(v_2 - v_3)$$

$$\ddot{\varepsilon}_3 = -\beta_{31}(v_3 - v_1) - \beta_{32}(v_3 - v_2)$$

La condición para que estas ecuaciones tengan un único equilibrio asintóticamente estable en el origen es que la matriz de conectividad tenga rango $(n - 1)$ ya que si no se cumple puede haber otras soluciones que no cumplan con los objetivos de sincronización (Alvarez *et al.*, 2008).

Para el caso en donde se tenga una matriz de conectividad de rango $(n - 1)$ y con la elección correcta de las ganancias del controlador k_p y k_d se puede conseguir que se tenga un equilibrio único en el origen para cada ecuación, es decir, que se cumpla con el objetivo de sincronización $q_i = q_j$ definido con anterioridad (Khalil y Grizzle, 2002).

III.3 Señales de control y de acoplamiento para n sistemas interconectados

Ahora se analizará el caso de tener n sistemas interconectados, cada uno con su respectiva dinámica, representada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi_1 \end{pmatrix} \\
\Sigma_2 &= \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ f_2(x) + g_2(x)u_2 + \xi_2 \end{pmatrix} \\
&\quad \vdots \\
\Sigma_n &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{2n-1} \\ \dot{x}_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2n} \\ f_n(x) + g_n(x)u_n + \xi_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{25}$$

Se tienen las siguientes variables auxiliares, que se proponen con base en los errores que existen entre los sistemas, reduciendo la cantidad de ecuaciones a controlar y quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \beta_{12}e_{12} + \beta_{13}e_{13} + \dots + \beta_{1n}e_{1n} \\
\varepsilon_2 &= \beta_{21}e_{21} + \beta_{23}e_{23} + \dots + \beta_{2n}e_{2n} \\
&\quad \vdots \\
\varepsilon_n &= \beta_{n1}e_{n1} + \beta_{n2}e_{n2} + \dots + \beta_{n,n-1}e_{n,n-1}
\end{aligned}$$

En estas ecuaciones se ven todos los errores agrupados para cada sistema en una sola ecuación, la cual derivamos dos veces para poder observar su comportamiento en relación con las dinámicas mostradas en las ecuaciones (25) y obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varepsilon}_1 &= \beta_{12}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3) + \beta_{13}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_5) + \dots + \beta_{1n}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_{2n-1}) \\
\ddot{\varepsilon}_2 &= \beta_{21}(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_1) + \beta_{23}(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_5) + \dots + \beta_{2n}(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_{2n-1}) \\
&\vdots \\
\ddot{\varepsilon}_n &= \beta_{n1}(\ddot{x}_{2n-1} - \ddot{x}_1) + \beta_{n2}(\ddot{x}_{2n-1} - \ddot{x}_3) + \dots + \beta_{n,n-1}(\ddot{x}_{2n-1} - \ddot{x}_{2n-3})
\end{aligned}$$

Las señales de control propuestas para estas dinámicas de los errores auxiliares quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -g_1^{-1}(f_1(x) + \xi_1 + v_1) \\
u_2 &= -g_2^{-1}(f_2(x) + \xi_2 + v_2) \\
u_3 &= -g_3^{-1}(f_3(x) + \xi_3 + v_3) \\
&\vdots \\
u_n &= -g_n^{-1}(f_n(x) + \xi_n + v_n)
\end{aligned}$$

en donde se tienen las señales de acoplamiento que tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \beta_{12}(k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + \dots + \beta_{1n}(k_{p1}(x_1 - x_{2n-1}) + k_{d1}(x_2 - x_{2n})) \\
v_2 &= \beta_{21}(k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + \dots + \beta_{2n}(k_{p2}(x_3 - x_{2n-1}) + k_{d2}(x_4 - x_{2n})) \\
v_3 &= \beta_{31}(k_{p3}(x_5 - x_1) + k_{d3}(x_6 - x_2)) + \dots + \beta_{3n}(k_{p3}(x_5 - x_{2n-1}) + k_{d3}(x_6 - x_{2n})) \\
&\vdots \\
v_n &= \beta_{n1}(k_{pn}(e_{n1}) + k_{dn}(\dot{e}_{n1})) + \dots + \beta_{n,n-1}(k_{pn}(e_{n,n-1}) + k_{dn}(\dot{e}_{n,n-1}))
\end{aligned}$$

Si se sustituyen estas señales de control y de acoplamiento en estas ecuaciones se obtiene lo que sería el comportamiento de las variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varepsilon}_1 &= -\beta_{12}(v_1 - v_2) - \beta_{13}(v_1 - v_3) - \cdots - \beta_{1n}(v_1 - v_n) \\
 \ddot{\varepsilon}_2 &= -\beta_{21}(v_2 - v_1) - \beta_{23}(v_2 - v_3) - \cdots - \beta_{2n}(v_2 - v_n) \\
 \ddot{\varepsilon}_3 &= -\beta_{31}(v_3 - v_1) - \beta_{32}(v_3 - v_2) - \cdots - \beta_{3n}(v_3 - v_n) \\
 &\quad \vdots \\
 \ddot{\varepsilon}_n &= -\beta_{n1}(v_n - v_1) - \beta_{n2}(v_n - v_2) - \cdots - \beta_{n,n-1}(v_n - v_{n-1})
 \end{aligned}$$

Las ganancias k_p y k_v son positivas, lo cual lleva a que estas ecuaciones tienen un comportamiento asintóticamente estable, siendo el origen su punto de equilibrio (Khalil y Grizzle, 2002). Como se puede observar en este caso de n sistemas, las ecuaciones que se deben de solucionar van aumentando en cantidad de términos conforme el valor de n aumenta, incrementando también el número de constantes y ganancias del controlador que se deben de sintonizar para lograr la sincronización. Esta forma generalizada de las señales de control y de acoplamiento serán utilizadas en capítulos posteriores para cumplir con los objetivos de sincronización, tanto simulados numéricamente como experimentales.

En este capítulo se menciona como llevar los sistemas a la sincronización por medio de señales de acoplamiento diseñadas en base a la topología del arreglo y sus ecuaciones de estado, sin embargo el diseño no está completo aún, ya que se requiere del conocimiento del vector completo de estados, el cual se obtendrá en el siguiente capítulo.

Capítulo IV

Observadores discontinuos

En el capítulo anterior se describió el diseño de una señal de acoplamiento para sincronizar los arreglos de sistemas. Dicha señal depende de los errores de posición y de velocidad. Una situación muy común en el control de sistemas mecánicos es que normalmente no se cuenta con sensores de velocidad para los mecanismos a controlar. Esto se debe principalmente a que agregar esta clase de sensores a los mecanismos aumenta de manera considerable sus costos, ya que cada grado de libertad del mecanismo contaría con un sensor de posición y otro de velocidad; de aquí la necesidad de incorporar un observador a los sistemas mecánicos, que solucione este problema.

Un observador es un algoritmo que se basa en crear un sistema virtual que toma el estado medible de un sistema y emula su comportamiento. La ventaja o razón de hacer esto es que, al ser sometidos a los mismos estímulos se espera que el sistema virtual y el sistema real, con el paso del tiempo, se comporten de la misma manera. Del observador, por ser un sistema virtual, se puede obtener la información completa del vector de estados, donde viene incluida su velocidad, el cual se puede utilizar como una aproximación del vector de estados del sistema real. Por lo tanto, el observador y el sistema real deben asemejarse lo más posible y asegurar que la estimación sea lo más confiable posible.

En este capítulo se presentan varias propuestas de observadores discontinuos para

resolver el problema de la sincronización; se hace una comparación de ventajas, desventajas y resultados obtenidos, para finalmente escoger uno con el que se realizarán las pruebas y experimentos de sincronización.

IV.1 Observador discontinuo

Este observador, como se dijo anteriormente, proporciona una estimación del estado del sistema real, con la ventaja de incorporar un término discontinuo con la intención de hacerlo más robusto ante cualquier clase de perturbaciones y discrepancias en el modelo utilizado en el observador con respecto al sistema observado. También es posible realizar una identificación de estas perturbaciones y discrepancias por medio de la técnica de control equivalente, que se produce con ese término discontinuo. La forma de obtener el control equivalente es por medio de un filtro pasa-bajas, el cual se encarga de eliminar todas las componentes de alta frecuencia propias de la función signo que se emplea en el observador.

Para comenzar, se supone que se tiene un sistema mecánico descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi(\cdot) \end{pmatrix} \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{26}$$

donde $x_1 \in \mathfrak{R}$ representa la posición del sistema, $x_2 \in \mathfrak{R}$ la velocidad del mismo. También se maneja a u_1 como la entrada y la variable y es la salida del sistema. De

aquí se supone que tanto el vector de entrada y el término de perturbación son acotadas.

Para este sistema se utiliza el siguiente observador propuesto en (Rosas Almeida, 2005):

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ f_1(\hat{x}) + g_1(\hat{x})u_1 \end{pmatrix} + H \quad (27)$$

Donde \hat{x}_1 y $\hat{x}_2 \in \Re$ se refieren a las estimaciones de los estados correspondientes del sistema y H tiene la forma siguiente, en donde se incluye el término discontinuo:

$$H = \begin{pmatrix} C_1(y - \hat{y}) \\ C_2(y - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y - \hat{y}) \end{pmatrix}$$

Aquí C_1 , C_2 y C_3 son, para el caso de sistemas de 1 grado de libertad, son escalares los cuales definen las ganancias del observador. Para asegurar que la ecuación (27) sea un sistema observador del sistema original de las ecuaciones (26), se analiza la dinámica de errores realizando el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \hat{x}_1 \\ e_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \end{aligned} \quad (28)$$

Por lo tanto, la dinámica de los errores queda representada por el siguiente sistema, el cual está expresado en términos de los errores:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 - C_1(e_1) \\ f(\cdot) + \xi(\cdot) - C_2(e_1) - C_3 \text{sign}(e_1) \end{pmatrix} \quad (29)$$

donde $f(\cdot)$ se supone acotado y tiene la siguiente forma:

$$f(\cdot) = f_1(x) - f_1(\hat{x}) + [g_1(x) - g_1(\hat{x})]u_1$$

Como se propuso desde un principio, $\xi(\cdot)$ se supone acotado y $f(\cdot)$ también lo es, por lo que podemos definir un nuevo término de perturbación $\psi(\cdot)$, el cual, por consecuencia, también es acotado, teniendo la siguiente propiedad:

$$\|\psi(\cdot)\| = \|f(\cdot) + \xi(\cdot)\| < \rho$$

en la misma región donde $f(\cdot)$ y $\xi(\cdot)$ son acotadas.

Al sustituir este nuevo término de perturbación en las ecuaciones (29) se tiene la siguiente dinámica de los errores:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 - C_1(e_1) \\ \psi(\cdot) - C_2(e_1) - C_3 \text{sign}(e_1) \end{pmatrix} \quad (30)$$

en donde, con la correcta elección de las matrices C_1 , C_2 siendo matrices positivas y C_3

cumpliendo la siguiente desigualdad propuesta en el Teorema 15 de (Rosas Almeida, 2005):

$$C_3 > \frac{2ap}{\theta} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^3(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$$

es posible lograr que el punto de equilibrio de este sistema, dado por las ecuaciones (30), sea exponencialmente estable en el origen, logrando así que el sistema de las ecuaciones (27) sea un observador del sistema original, definido en las ecuaciones (26).

En este sistema propuesto como observador se tiene una superficie de discontinuidad en $e_1 = 0$ y el término $C_3 \text{sign}(e_1)$ produce un modo deslizante de segundo orden; es decir, el control aparece hasta la segunda derivada de la superficie de discontinuidad. Aquí el control equivalente se presenta en $e_1 = 0$, $\dot{e}_1 = 0$ y $\ddot{e}_1 = 0$. En consecuencia se puede decir que el control equivalente está dado por:

$$u_{eq} = \psi(\cdot) = f(\cdot) + \xi(\cdot)$$

La identificación de perturbaciones está dada por medio de este control equivalente, el cual puede obtenerse de la siguiente manera:

$$u_{eq} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{C_3 \text{sign}(e_1)}$$

donde $\overline{C_3 \text{sign}(e_1)}$ representa el promedio, de aquí la necesidad de utilizar un filtro externo para la obtención del control equivalente. Para detalles ver (Rosas Almeida, 2005). Posteriormente se presentan resultados de este observador tanto simulados como experimentales y una comparación con otros observadores.

IV.2 Observador discontinuo para sistemas no lineales en su forma normal

Aquí se presenta otra propuesta de observador discontinuo, el cual presenta una buena robustez ante perturbaciones externas y variaciones paramétricas, con la ventaja de que la estimación de perturbaciones no necesita incorporar un filtro externo que puede producir retardos en la estimación. Este observador está diseñado para sistemas que se presentan en su forma normal. Donde definimos que un sistema se encuentra en su forma normal si tiene la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f_1(x) + g_1(x)u_1 + \xi(\cdot) \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$y = x_1$$

La mayoría de los sistemas utilizados en este trabajo ya se encuentran en su forma normal. Sin embargo, una gran variedad de sistemas que no estén en su forma normal pueden llevarse a ésta por medio de una transformación de coordenadas (Isidori, 1995), (Khalil y Grizzle, 2002).

Ahora se presentará la estructura de este observador propuesto en (Rosas *et al.*, 2008a). Supóngase que se tiene el sistema de las ecuaciones (31). Para este sistema el observador propuesto tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= C_{1,1}(y - \hat{y}_1) + w_1 \\
\dot{w}_1 &= C_{2,1}(y - \hat{y}_1) + C_{3,1} \text{sign}(y - \hat{y}_1) \\
\hat{y}_1 &= \hat{x}_1 \\
&\vdots \\
\dot{\hat{x}}_{n-1} &= C_{1,n-1}(w_{n-2} - \hat{y}_{n-1}) + w_{n-1} \\
\dot{w}_{n-1} &= C_{2,n-1}(w_{n-2} - \hat{y}_{n-1}) + C_{3,n-1} \text{sign}(w_{n-2} - \hat{y}_{n-1}) \\
\hat{y}_{n-1} &= \hat{x}_{n-1}
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_n &= f_1(\hat{x}) + g_1(\hat{x})u_1 + C_{1,n}(w_{n-1} - \hat{y}_n) + w_n \\
\dot{w}_n &= C_{2,n}(w_{n-1} - \hat{y}_n) + C_{3,n} \text{sign}(w_{n-1} - \hat{y}_n) \\
\hat{y}_n &= \hat{x}_n
\end{aligned}$$

Las ganancias del observador son las constantes $C_{i,j}$. También se incluyen las variables auxiliares w , que cumplen la función de filtro, y las variables \hat{y} como la salida de cada subsistema del observador. Ahora, para analizar la estabilidad del observador se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}
e_1 &= x_1 - \hat{x}_1 \\
e_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \\
&\vdots \\
e_n &= x_n - \hat{x}_n
\end{aligned} \tag{33}$$

Introduciendo el cambio de variable propuesto en las ecuaciones (33), en la estructura del observador de las ecuaciones (32) obtendremos la dinámica de los errores que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= x_2 - w_1 - C_{1,1}(e_1) \\
\dot{w}_1 &= C_{2,1}(e_1) + C_{3,1} \text{sign}(e_1) \\
&\vdots \\
\dot{e}_{n-1} &= x_n - w_{n-1} - C_{1,n-1}(w_{n-2} - x_{n-1} + e_{n-1}) \\
\dot{w}_{n-1} &= C_{2,n-1}(w_{n-2} - x_{n-1} + e_{n-1}) + C_{3,n-1} \text{sign}(w_{n-2} - x_{n-1} + e_{n-1}) \\
&\vdots \\
\dot{e}_n &= f_1(x) - f_1(\hat{x}) + g_1(x)u_1 - g_1(\hat{x})u_1 + \xi(\cdot) - w_n - C_{1,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) \\
\dot{w}_n &= C_{2,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) + C_{3,n} \text{sign}(w_{n-1} - x_n + e_n)
\end{aligned}$$

El análisis del sistema se realizará por sub-sistemas, ya que la estabilidad de éstos no depende de los demás estados, es decir, las variables e_1 y w_1 son independientes de los demás estados, e_2 y w_2 dependen de e_1 y w_1 pero no de los demás, etc. Por lo tanto tomaremos el primer subsistema:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= x_2 - w_1 - C_{1,1}(e_1) \\ \dot{w}_1 &= C_{2,1}(e_1) + C_{3,1}\text{sign}(e_1)\end{aligned}$$

Para analizar este subsistema haremos uso de un nuevo cambio de variable el cual le da una estructura específica a nuestras ecuaciones para facilitar su análisis, $z_{1,1} = e_1$ y $z_{1,2} = x_2 - w_1 - C_{1,1}(e_1)$, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= \dot{x}_2 - C_{1,1}(z_{2,1}) - C_{2,1}(z_{1,1}) - C_{3,1}\text{sign}(z_{1,1})\end{aligned}$$

De aquí se puede encontrar constantes $C_{1,1}$, $C_{2,1}$ y $C_{3,1}$ tal que el origen del sistema sea exponencialmente estable (Almeida *et al.*, 2007), o lo que es lo mismo, w_1 converge a x_2 y \hat{x}_1 converge a x_1 . También analizaremos el último subsistema de donde se deriva la estimación de perturbaciones:

$$\begin{aligned}\dot{e}_n &= \psi(\cdot) - w_n - C_{1,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) \\ \dot{w}_n &= C_{2,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) + C_{3,n}\text{sign}(w_{n-1} - x_n + e_n)\end{aligned}$$

donde, por simplicidad, se propuso un nuevo término $\psi(\cdot)$ que tiene la siguiente forma:

$$\psi(\cdot) = f_1(x) - f_1(\hat{x}) + g_1(x)u_1 - g_1(\hat{x})u_1 + \xi(\cdot)$$

De igual manera que en el caso anterior, se realiza un cambio de variable para

analizar la estabilidad del sistema, $z_{1,n} = w_{n-1} - x_n + e_n$ y $z_{2,n} = \dot{z}_{1,n}$, de donde obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1,n} &= z_{2,n} \\ \dot{z}_{2,n} &= \ddot{w}_{n-1} - \ddot{x}_n + \dot{\psi}(\cdot) - C_{1,n}(z_{2,n}) - C_{2,n}(z_{1,n}) - C_{3,n}\text{sign}(z_{1,n})\end{aligned}$$

Como se sabe que \ddot{w}_{n-1} tiende a \ddot{x}_n y que $\dot{\psi}(\cdot)$ es acotada, se puede asegurar que con la correcta elección de constantes, $C_{1,n}$, $C_{2,n}$ y $C_{3,n}$ (Almeida *et al.*, 2007) este subsistema tiene un equilibrio exponencialmente estable en el origen, o explicado de otra forma, \hat{x}_n converge a x_n y el término w_n a $\psi(\cdot)$ (Rosas *et al.*, 2008a). Posteriormente se presentan resultados de este observador tanto simulados como experimentales y una comparación con otros observadores.

IV.3 Observación y estimación en tiempo finito de una clase de sistemas no lineales de fase mínima

Ahora se presenta otro observador discontinuo, que igual que el caso anterior, estima el estado de la planta así como las perturbaciones en una clase de sistemas no lineales. En este caso, el observador se basa en una técnica de modos deslizantes de alto orden. Este observador tampoco requiere de un filtro adicional para obtener el control equivalente, por lo que no introduce retardos en la estimación y es robusto ante perturbaciones de magnitud y derivada acotadas.

El observador aquí presentado, está basado en el algoritmo de super-twisting y el diferenciador exacto presentado por (Levant, 2003), este garantiza convergencia al

estado de la planta y a la perturbación en tiempo finito. Además, se puede aplicar a una clase de sistemas dinámicos más amplia. A continuación se considera un sistema no lineal conformado por varios subsistemas con la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,\lambda} \\ \dot{x}_{2,\lambda} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n,\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2,\lambda} \\ x_{3,\lambda} \\ \vdots \\ f_\lambda(x) + g_\lambda(x)u_\lambda + \xi_\lambda(\cdot) \end{pmatrix}$$

$$y_\lambda = x_{1,\lambda}$$

donde λ representa cada subsistema, por lo cual se propone un observador por cada uno de ellos (Rosas *et al.*, 2008b), el cual se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= C_{1,1}|x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + w_1 \\ \dot{w}_1 &= C_{2,1} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{y}_1 &= \hat{x}_1 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= C_{1,n-1}|w_{n-2} - \hat{x}_{n-1}|^{1/2} \text{sign}(w_{n-2} - \hat{x}_{n-1}) + w_{n-1} \\ \dot{w}_{n-1} &= C_{2,n-1} \text{sign}(w_{n-2} - \hat{x}_{n-1}) \\ \hat{y}_{n-1} &= \hat{x}_{n-1} \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_m &= f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + C_{1,m}|w_{m-1} - \hat{x}_m|^{1/2} \text{sign}(w_{m-1} - \hat{x}_m) + w_m \\ \dot{w}_m &= C_{2,m} \text{sign}(w_{m-1} - \hat{x}_m) \\ \hat{y}_m &= \hat{x}_m \end{aligned}$$

Aquí, a diferencia del caso anterior, solo se tienen dos constantes a sintonizar por cada subsistema i , $C_{1,i}$ y $C_{2,i}$. Realizando el siguiente cambio de variables $e_i = x_i - \hat{x}_i$, obtendremos la dinámica del error para realizar posteriormente su análisis de estabilidad:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= x_2 - w_1 - C_{1,1}|e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{w}_1 &= C_{2,1} \text{sign}(e_1) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= x_n - w_{n-1} - C_{1,n-1}|w_{n-2} - \hat{x}_{n-1}|^{1/2} \text{sign}(w_{n-2} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{w}_{n-1} &= C_{2,n-1} \text{sign}(w_{n-2} - \hat{x}_{n-1}) \\ \\ \dot{e}_m &= \psi(\cdot) - w_m - C_{1,m}|w_{m-1} - \hat{x}_m|^{1/2} \text{sign}(w_{m-1} - \hat{x}_m) \\ \dot{w}_m &= C_{2,m-1} \text{sign}(w_{m-1} - \hat{x}_m)\end{aligned}$$

en donde se considera a $\psi(\cdot)$ de la siguiente manera:

$$\psi(\cdot) = f(x) - f(\hat{x}) + g(x)u - g(\hat{x})u + \xi(\cdot)$$

Suponiendo que el comportamiento del sistema es acotado y debido a que las variables e_n y w_n son independientes de los demás estados, haremos el análisis de estabilidad para cada par de ecuaciones por separado. Realizando el siguiente cambio de variable $v_{1,1} = e_1$ y $v_{2,1} = x_2 - w_1$ obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{1,1} &= v_{1,2} - C_{1,1}|v_{1,1}|^{1/2} \text{sign}(v_{1,1}) \\ \dot{v}_{2,1} &= \dot{x}_2 - C_{2,1} \text{sign}(v_{1,1})\end{aligned}$$

Se puede aplicar el Teorema 1 propuesto en (Davila *et al.*, 2005) y eligiendo los valores adecuados de $C_{1,1}$ y $C_{2,1}$ en base a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}C_1 &> \sqrt{\frac{2}{C_2 + \psi(\cdot)}} \frac{(C_2 + \psi(\cdot))(1+p)}{(1-p)} \\ C_2 &> \psi(\cdot)\end{aligned}$$

se puede garantizar la convergencia en tiempo finito al origen de $v_{\lambda,1}$ y $v_{\lambda,2}$, lo que implica que en tiempo finito $\hat{x}_{\lambda,1}$ sea igual a $x_{\lambda,1}$ y que $w_{\lambda,1}$ sea igual a $x_{\lambda,2}$. Ahora se realiza el mismo procedimiento para el caso m , quedando las ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{1,m} &= \psi(\cdot) - w_m - C_{1,m}|z_{m-1} - \hat{x}_m|^{1/2} \text{sign}(w_{m-1} - \hat{x}_m) \\ \dot{v}_{2,m} &= \dot{x}_m - C_{2,m} \text{sign}(w_{m-1} - \hat{x}_m)\end{aligned}$$

Con la correcta elección de las constantes $C_{1,m}$ y de $C_{2,m}$ se tiene una convergencia en tiempo finito al origen, por lo tanto w_m será igual a $\psi(\cdot)$ y que \hat{x}_m será igual a x_m . Para detalles ver (Rosas *et al.*, 2008b). Ya definidos los tres observadores se procederá a la comparación de estos tanto numéricamente como experimentalmente.

Tabla III. Características del sistema a simular.

| | |
|-------|--------------------------------|
| k_1 | 40 |
| k_2 | 0.2 |
| k_3 | 35 |
| u | $0.5 \text{ sen } (\pi t)$ |
| ξ | $-4.5 \text{ sen } (1.5\pi t)$ |

IV.4 Simulaciones numéricas de los observadores

Se implementaron los tres observadores en un solo sistema no lineal, con la intención de analizar sus características. El sistema propuesto describe el comportamiento de un péndulo simple que tiene las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 \text{sen}(x_1) - k_2 x_2 + k_3 u + \xi\end{aligned}$$

Este sistema tiene un comportamiento acotado con una entrada u acotada, ξ es una perturbación externa al sistema que se considera acotada las cuales, junto con sus parámetros están definidos como se muestra en la tabla (III):

Dado que el sistema es de un solo grado de libertad, las estructuras de los observadores utilizados de cada uno y realizar la comparación quedan definidos a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + C_1(x_1 - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -k_1 \sin(x_1) - k_2 \hat{x}_2 + k_3 u + C_2(x_1 - \hat{x}_1) + C_3 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)
\end{aligned} \tag{34}$$

En las ecuaciones (34) se muestra el observador discontinuo para sistemas no lineales propuesto en (Rosas Almeida, 2005).

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= C_{1,1}(x_1 - \hat{x}_1) + w_1 \\
\dot{w}_1 &= C_{2,1}(x_1 - \hat{x}_1) + C_{3,1} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -k_1 \sin(x_1) - k_2 \hat{x}_2 + k_3 u + C_{1,2}(w_1 - \hat{x}_2) + w_2 \\
\dot{w}_2 &= C_{2,2}(w_1 - \hat{x}_2) + C_{3,2} \text{sign}(w_1 - \hat{x}_2)
\end{aligned} \tag{35}$$

En las ecuaciones (35) se muestra el observador discontinuo para sistemas no lineales en su forma normal propuesto en (Rosas *et al.*, 2008a).

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= C_{1,1}|x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + w_1 \\
\dot{w}_1 &= C_{2,1} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -k_1 \sin(x_1) - k_2 \hat{x}_2 + k_3 u + C_{1,2}|w_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(w_1 - \hat{x}_2) + w_2 \\
\dot{w}_2 &= C_{2,2} \text{sign}(w_1 - \hat{x}_2)
\end{aligned} \tag{36}$$

Y para finalizar, mostrado en las ecuaciones (36), el observador en tiempo finito de una clase de sistemas no lineales de fase mínima propuesto en (Rosas *et al.*, 2008a).

En la Tabla (IV) se muestran las condiciones iniciales y ganancias de los observadores utilizados en estas simulaciones.

Tabla IV. Parámetros de los observadores a simular.

| Parámetro | Valor |
|-------------------------------|-------|
| Cond. ini. x_1 | 1.5 |
| Cond. ini. x_2 | -1 |
| Obs (1) C_1 | 100 |
| Obs (1) C_2 | 100 |
| Obs (1) C_3 | 10 |
| Obs (2) $C_{1,1}$ y $C_{1,2}$ | 100 |
| Obs (2) $C_{2,1}$ y $C_{2,2}$ | 100 |
| Obs (2) $C_{3,1}$ y $C_{3,2}$ | 20 |
| Obs (3) $C_{1,1}$ y $C_{1,2}$ | 5 |
| Obs (3) $C_{2,1}$ y $C_{2,2}$ | 100 |

En la tabla (V) se muestran algunas características de los observadores obtenidas de los resultados simulados.

IV.5 Resultados experimentales de los observadores

En esta sección se realizó el análisis del desempeño de los observadores en un esquema experimental. Para esto se utilizó un sistema mecánico, el cual también será utilizado en los esquemas de sincronización. El sistema que se escogió fue el llamado emulador industrial de la compañía ECP modelo 220, un sistema rotacional de un grado de libertad que puede ser considerado lineal. En la figura 8 se muestra una imagen de este

Tabla V. Características de los observadores, simulados.

| | Obs 1 | Obs 2 | Obs 3 |
|---|---------------|---------------|---------------|
| Tiempo de convergencia (seg) | 0.2 | 0.2 | 0.6 |
| Error máximo (rad) | 0.02 | 0.02 | 0.5 |
| Error en estado estacionario (rad) | $2 * 10^{-7}$ | $3 * 10^{-8}$ | $2 * 10^{-9}$ |
| Parámetros a sintonizar (por estado) | 3 | 3 | 2 |
| Error de velocidad en estado estacionario (rad) | $6 * 10^{-4}$ | $4 * 10^{-5}$ | $6 * 10^{-5}$ |
| Error de velocidad ante perturbación (rad) | $1 * 10^{-3}$ | $3 * 10^{-3}$ | $1 * 10^{-4}$ |

sistema, en donde solo utilizamos un motor de los dos disponibles.

Este sistema maneja la opción de tener varias configuraciones. La configuración que se utilizó fue la de tener dos sistemas independientes, cada uno con sus diferentes parámetros. Para las pruebas se utilizó el motor más pequeño, el cual representamos por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = (-C_d(x_2) + u)/J_d + \xi(\cdot)$$

en donde C_d es el coeficiente de fricción, J_d es la inercia del disco y $\xi(\cdot)$ es la perturbación o parámetros no modelados del sistema, el cual es un término desconocido. Para este experimento las constantes que se utilizaron se encuentran en la tabla (VI).

En la figura (14) se muestran las posiciones del sistema físico y la de las estimaciones de los observadores. También se muestra una referencia, la cual utilizamos para que el sistema tuviera un comportamiento acotado y se pudiera analizar el desempeño



Figura 8. Sistema físico Emulador industrial ECP modelo 220.

del observador en un ambiente lo más parecido a los esquemas de sincronización. En la figura (15) se muestran las velocidades de las estimaciones de los observadores, las cuales pueden ser comparadas con la derivada de la posición, aunque esto sólo nos da un aproximado, ya que la derivada de la posición obtenida de esta manera proporcionará una señal ruidosa, la cual queremos evitar en nuestro sistema mecánico.

Durante el transcurso del experimento se introdujeron dos perturbaciones externas, una aproximadamente en $t = 4$ y otra en $t = 7$, con el fin de ver la confiabilidad de las estimaciones en caso de que las ecuaciones de estado que se utilizan no corresponden de manera idéntica al sistema real, por lo que existen incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas o haya sido afectado por cualquier otra perturbación. En la figura 16 se ve la estimación de las perturbaciones a las que fue sujeto el sistema y,

Tabla VI. Parámetros de los resultados experimentales.

| Parámetro | Valor |
|-------------------------------|--------|
| C_d | 0.002 |
| J_d | 0.0021 |
| Obs (1) C_1 y C_2 | 500 |
| Obs (1) C_3 | 200 |
| Obs (2) $C_{1,1}$ y $C_{1,2}$ | 500 |
| Obs (2) $C_{2,1}$ y $C_{2,2}$ | 500 |
| Obs (2) $C_{3,1}$ y $C_{3,2}$ | 200 |
| Obs (3) $C_{1,1}$ | 20 |
| Obs (3) $C_{1,2}$ | 200 |
| Obs (3) $C_{2,1}$ y $C_{2,2}$ | 300 |

a pesar de eso, las estimaciones de los observadores mostraron un buen desempeño y robustez ante estas perturbaciones.

En la Tabla (VII) se muestran algunas características de los observadores obtenidas de los resultados experimentales.

IV.6 Discusión del capítulo

En este capítulo se vieron tres observadores, cada uno con sus propias características. Sin embargo el propósito de este capítulo era el de escoger uno para utilizarlo en los esquemas de sincronización. El observador discontinuo propuesto por (Rosas Almeida,

Tabla VII. Características de los observadores, experimental.

| | Obs 1 | Obs 2 | Obs 3 |
|--------------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| Tiempo de convergencia (seg) | 0.05 | 0.05 | 0.3 |
| Error máximo (rad) | 0.015 | 0.015 | 0.6 |
| Error en estado estacionario (rad) | $1 * 10^{-3}$ | $1 * 10^{-3}$ | $1 * 10^{-3}$ |
| Parámetros a sintonizar (por estado) | 3 | 3 | 2 |
| Error máximo ante perturbación (rad) | 0.014 | 0.015 | 0.007 |

2005) ofrece una buena convergencia al estado, el error en estado estacionario es muy similar a los otros dos observadores, sin embargo, la necesidad de incorporar un filtro externo para obtener el término de perturbación identificado fue la principal característica por la que se decidió no utilizarlo para los resultados de sincronización.

Para el observador discontinuo para sistemas no lineales en su forma normal propuesto en (Rosas *et al.*, 2008a) se tiene un error en estado estacionario que se podría decir que es muy similar a los otros dos observadores, sobre todo en los resultados experimentales y un tiempo de convergencia que superó al observador de convergencia en tiempo finito visto en (Rosas *et al.*, 2008b).

Para los experimentos de sincronización usualmente se proponían las condiciones iniciales de los observadores a cero, por lo que el tiempo de convergencia no era un factor primordial en el desempeño del observador, ya que este coincidía con la posición real del sistema desde el principio de los experimentos. Ya que los errores eran muy similares en estado estacionario para los tres observadores, se añadió una perturbación

externa al sistema físico lo cual nos proporcionó un factor que ayudó a seleccionar uno de estos observadores.

El observador de convergencia en tiempo finito se escogió para los resultados de sincronización, el cual tenía error en estado estacionario similar a los otros dos, la convergencia se daba desde el inicio del experimento, tiene solo dos constantes a sintonizar por estado, no requiere de un filtro externo para la identificación de perturbaciones y su error ante perturbaciones bruscas era menor al de los otros dos observadores.

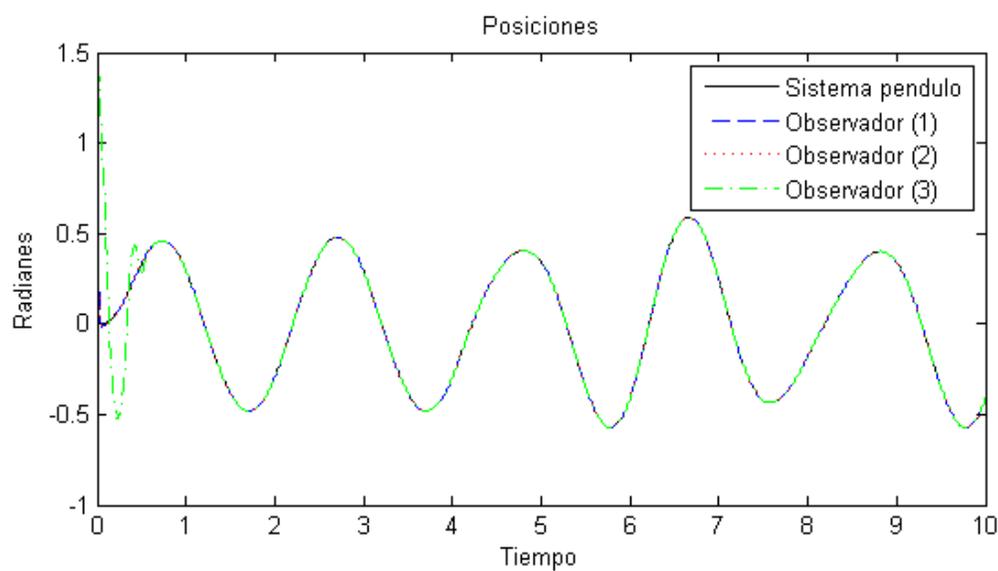


Figura 9. Posición real y observada del sistema simulado.

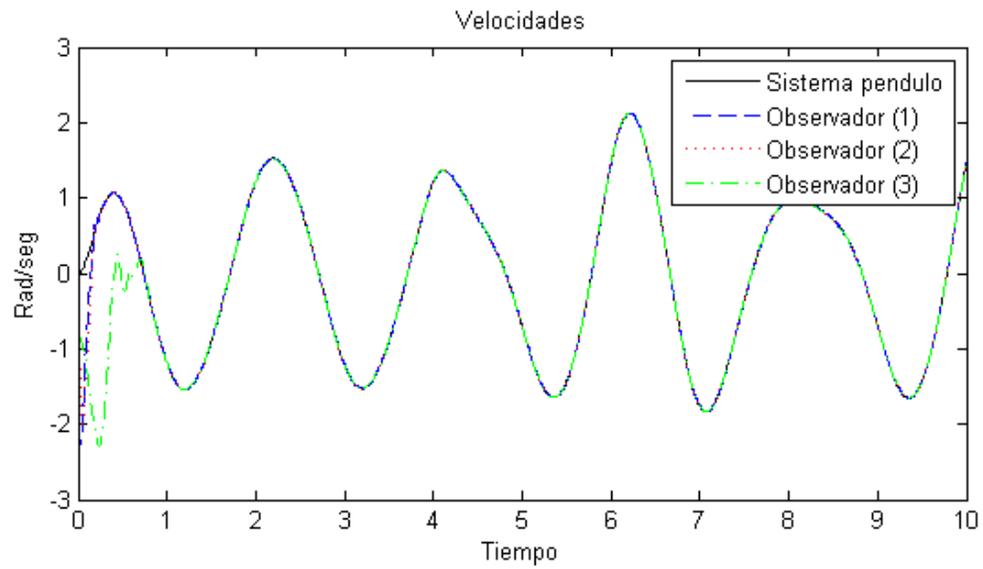


Figura 10. Velocidad real y observada del sistema simulado.

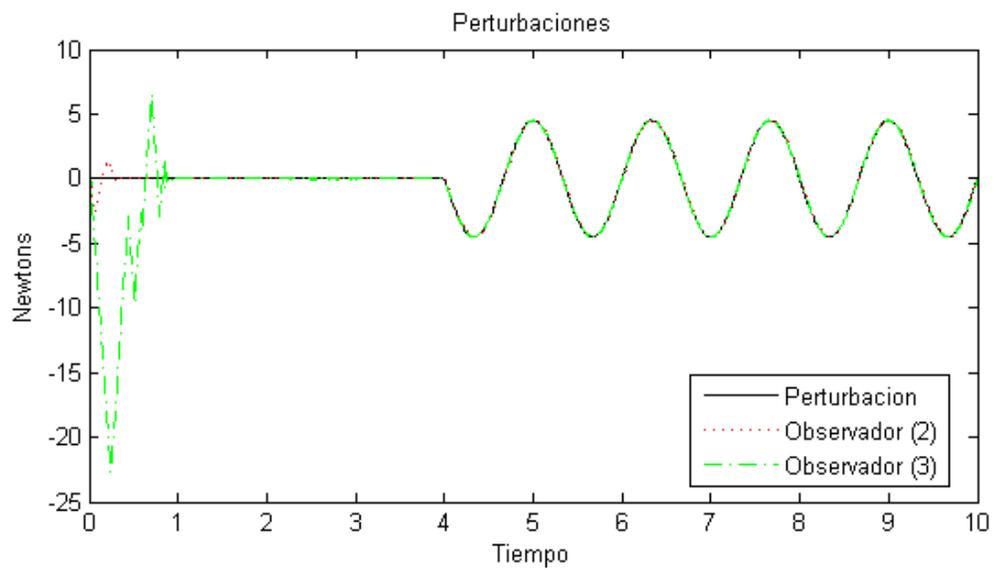


Figura 11. Perturbación real y observada en el sistema simulado.

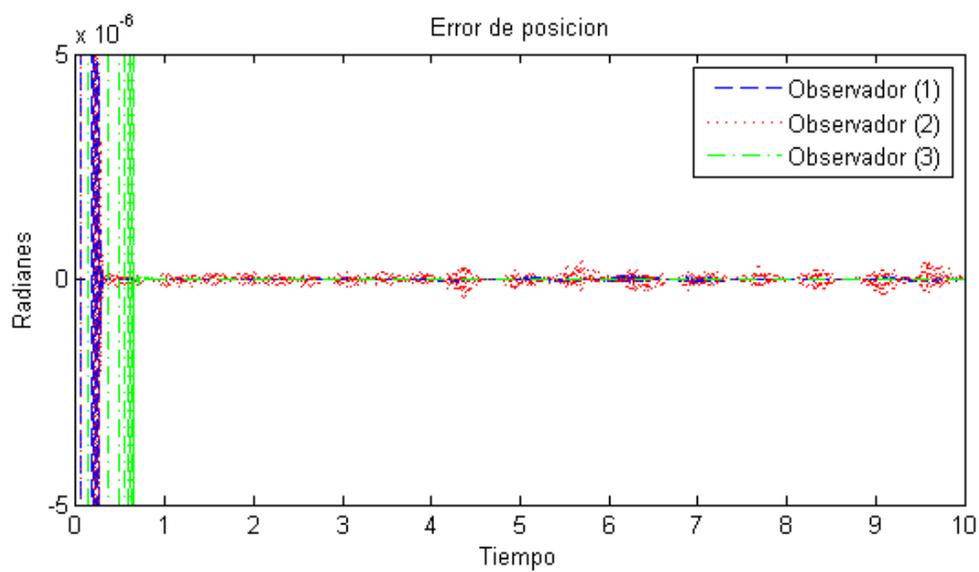


Figura 12. Error de posición respecto al sistema simulado.

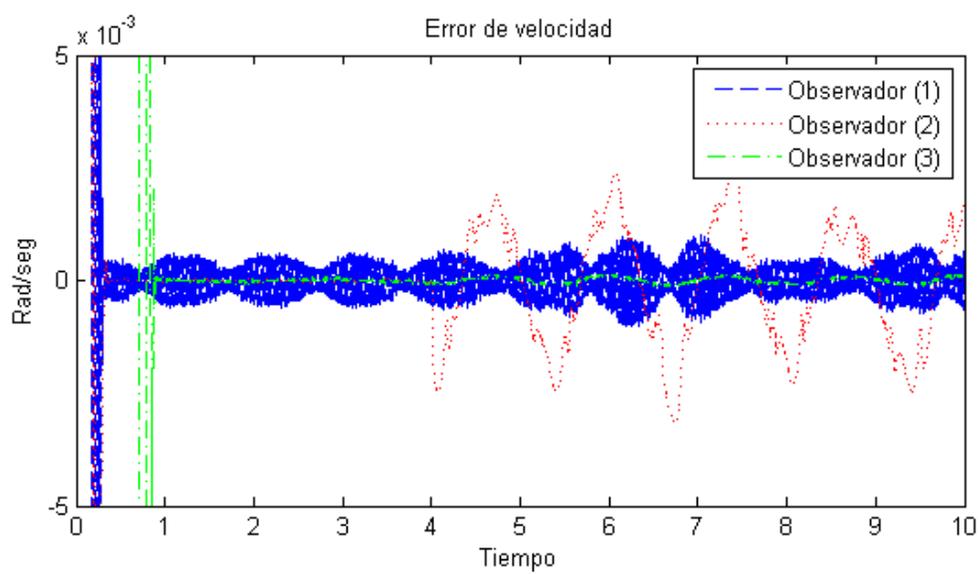


Figura 13. Error de velocidad respecto al sistema simulado.

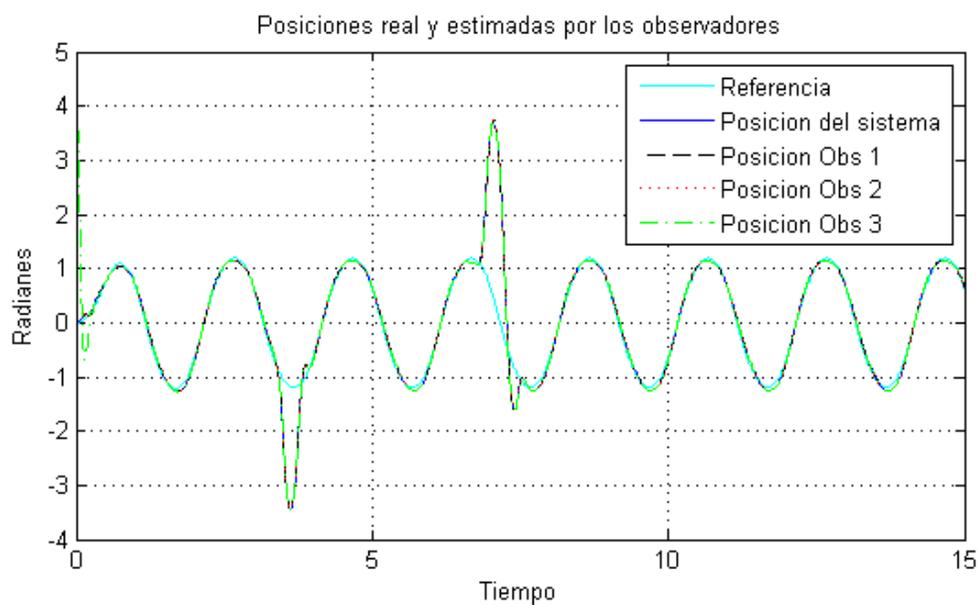


Figura 14. Posición real y observada del sistema experimental.

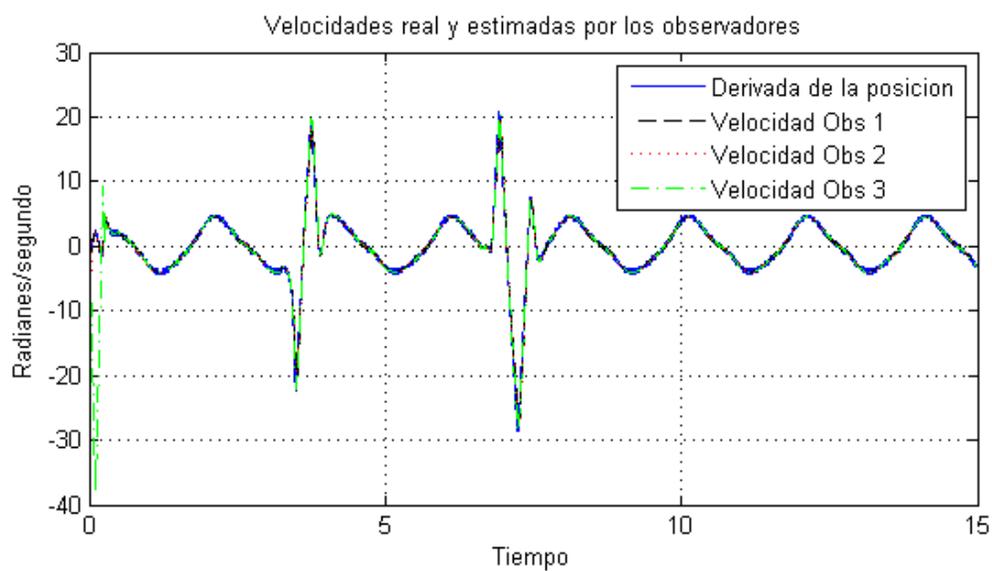


Figura 15. Velocidad real y observada del sistema experimental.

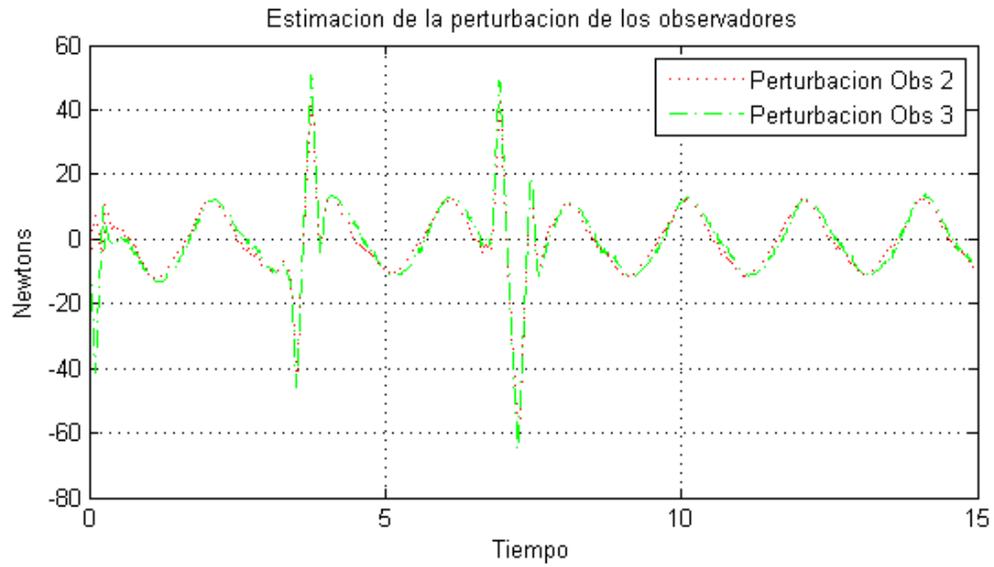


Figura 16. Perturbación real y observada en el sistema experimental.

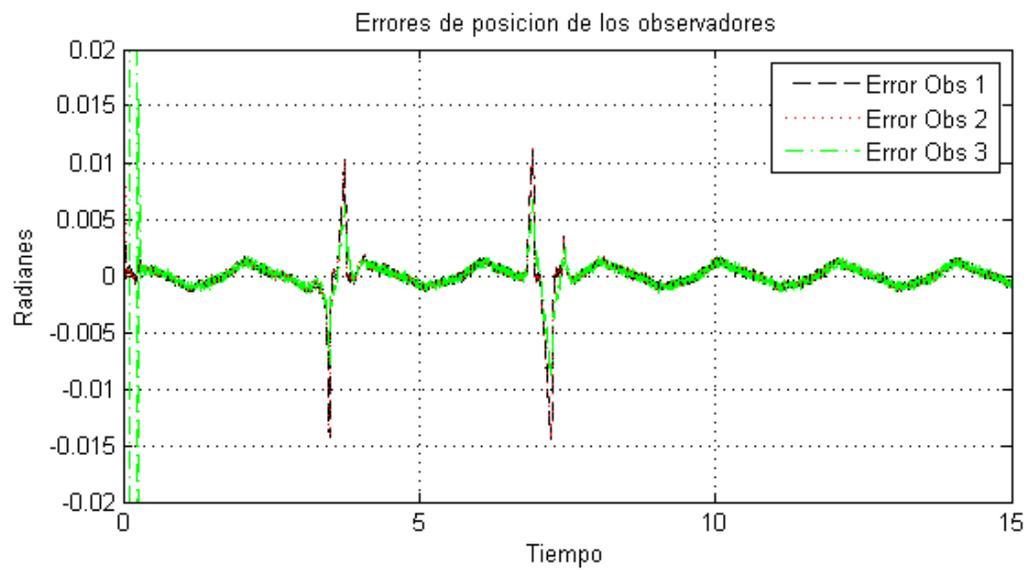


Figura 17. Error de posición respecto al sistema experimental.

Capítulo V

Sincronización de arreglos, resultados experimentales

En este capítulo se presenta el análisis de configuraciones representativas que den una perspectiva amplia de su influencia en la sincronización de arreglos. Se empezará con arreglos de tres sistemas, los cuales darán una perspectiva sobre la satisfacción de condiciones necesarias para la sincronización. Después se presentan arreglos de cinco sistemas y, por último arreglos de siete sistemas.

V.1 Arreglos de tres sistemas

Para esta sección de experimentos se utilizaron dos sistemas mecánicos y un sistema virtual. Los dos sistemas mecánicos fueron los dos motores del sistema mostrado en el capítulo anterior, el emulador industrial de la compañía ECP modelo 220. A continuación se muestra el modelo de cada sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (-C_d(x_2) + u_1)/J_d + \xi_1(\cdot) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= (-C_l(x_4) + u_2)/J_l + \xi_2(\cdot)\end{aligned}$$

donde el término ξ corresponde a las incertidumbres paramétricas y a las perturbaciones

externas de los sistemas. El tercer sistema está dado por un péndulo virtual que se muestra en la figura 18 el cual tiene las siguientes ecuaciones de estado:

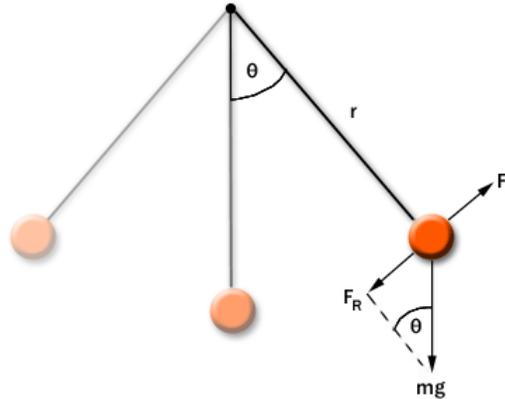


Figura 18. Sistema virtual, péndulo simple.

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = -g(\sin(x_5)/r) - (f(x_6)/mr^2) + (u_3/mr^2)$$

.

donde g es la constante de la fuerza de gravedad, f el coeficiente de fricción viscosa asociada al péndulo, m la masa del péndulo y r la distancia de la masa al punto de giro del péndulo.

Definidos los sistemas a utilizar y sus parámetros, se empezará a analizar cada uno de los casos implementados en el laboratorio.

Tabla VIII. Parámetros de los experimentos para tres sistemas.

| Parámetro | Valor | Unidades |
|-----------|--------|-------------|
| C_d | 0.002 | $N/(rad/s)$ |
| J_d | 0.0021 | Kg |
| C_l | 0.002 | $N/(rad/s)$ |
| J_l | 0.0108 | Kg |
| g | 9.81 | m/s^2 |
| r | 0.25 | m |
| f | 0.13 | $N/(rad/s)$ |
| m | 0.5 | Kg |

V.1.1 Caso 1: tres sistemas sin conexión

En el caso 1 se manejan los tres sistemas sin conexión entre ellos, para ver su comportamiento, el cual es independiente a los demás sistemas ya que aquí no se cuenta con ninguna ley de control que realice el trabajo de la sincronización. A continuación se muestra la matriz de conectividad para este caso:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede apreciar que esta matriz de conectividad no tiene rango $n - 1 = 2$ por lo que de antemano podemos saber que será no sincronizable, En la figura 19 se muestra el comportamiento de las tres sistemas.

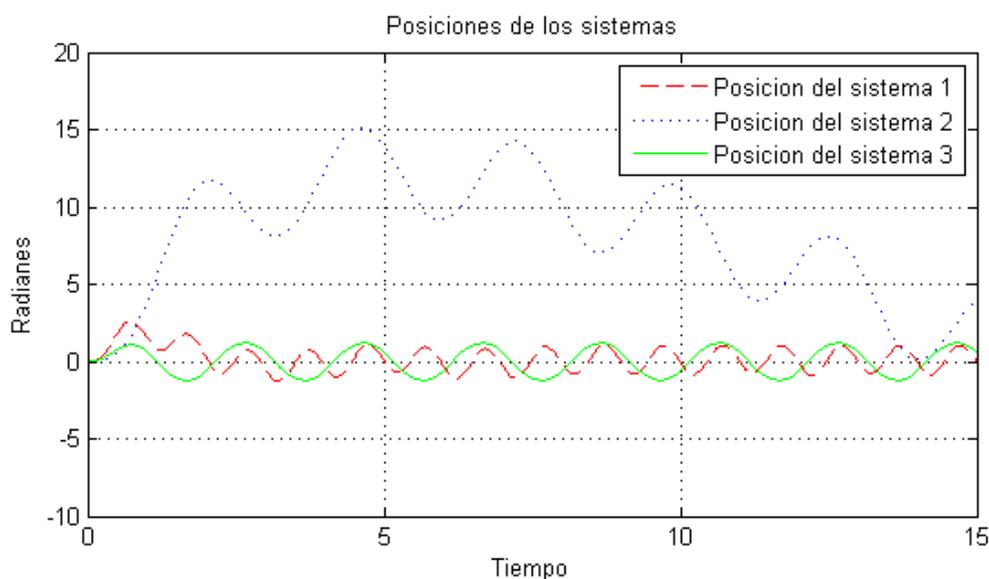


Figura 19. Posiciones de los tres sistemas caso 1.

V.1.2 Caso 2: un maestro, dos esclavos

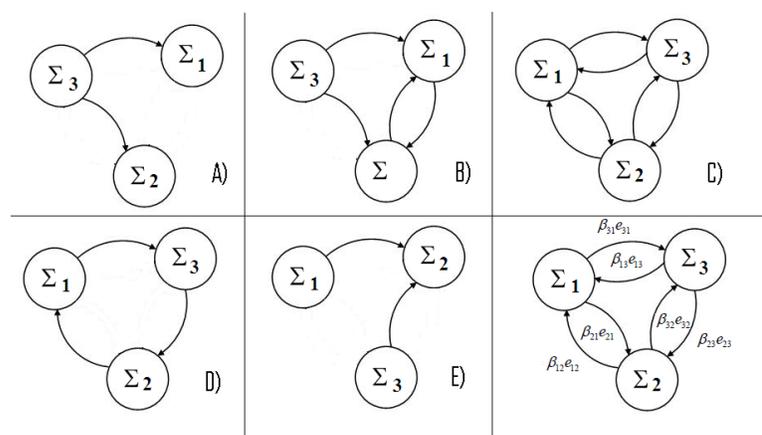


Figura 20. Configuraciones para tres sistemas..

En este caso se tiene una configuración en la que se tiene a un maestro y dos esclavos (véase figura 20 A)). En este caso, el maestro es el sistema del péndulo virtual. Este caso es una de las configuraciones mínimas para la sincronización, ya que solo se tienen dos conexiones; sin embargo con eso es suficiente para cumplir la condición necesaria

para la sincronización. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las señales de control utilizadas para estos casos en particular, para estos tres sistemas, fueron las siguientes, las cuales también se muestran en la figura 21:

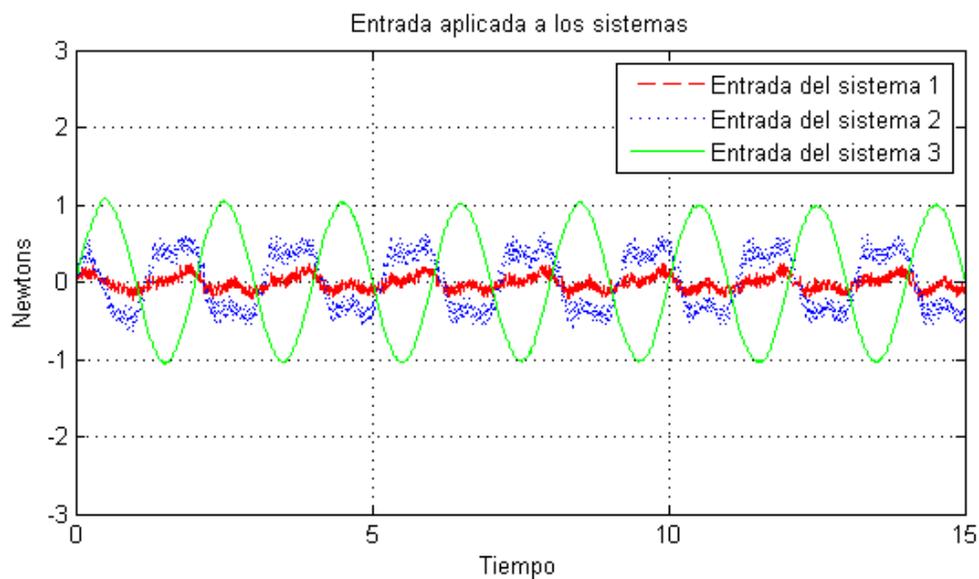


Figura 21. Señales de control de los tres sistemas caso 2.

$$u_1 = -J_d(-(C_d/J_d)\hat{x}_2 + \hat{\xi}_1 + v_1)$$

$$u_2 = -J_l(-(C_l/J_l)\hat{x}_4 + \hat{\xi}_2 + v_2)$$

$$u_3 = -mr^2(-g(\sin(x_5)/r) - (f(x_6)/mr^2) + v_3)$$

Las señales de acoplamiento resultantes para esta configuración, las cuales se obtienen a partir de su matriz de conectividad, son las siguientes.

$$v_1 = \beta_{13}(k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(\hat{x}_2 - \hat{x}_6))$$

$$v_2 = \beta_{23}(k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(\hat{x}_4 - \hat{x}_6))$$

$$v_3 = 0$$

En la figura (22) se muestra el comportamiento de las tres sistemas sincronizados.

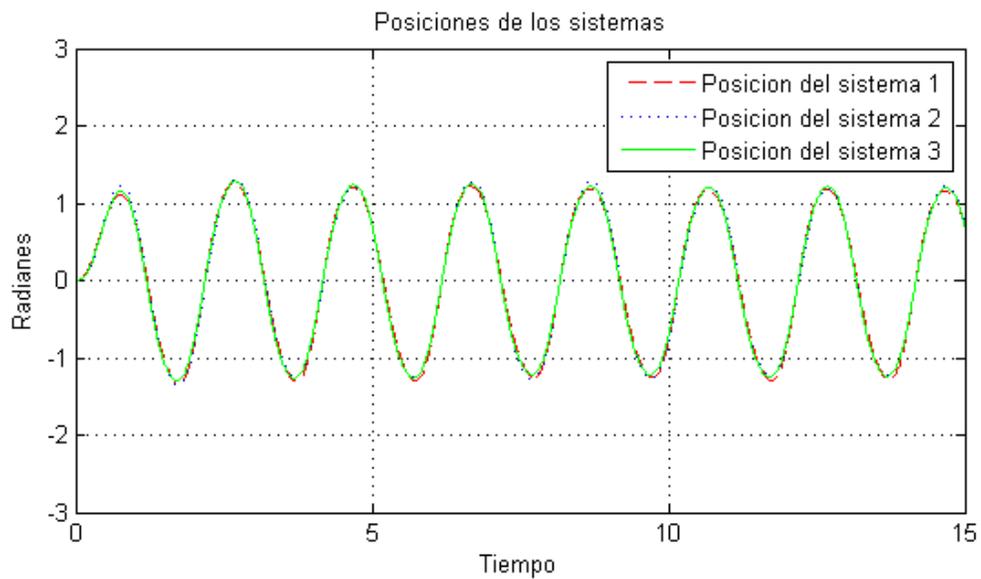


Figura 22. Posiciones de los tres sistemas caso 2.

V.1.3 Caso 3: un maestro, dos esclavos interconectados

Este caso es una configuración en la que se tiene un maestro y dos esclavos (véase figura 20 B)). La diferencia con el caso anterior es que aquí se agregan dos conexiones más al arreglo. El maestro sigue siendo el sistema del péndulo virtual. En este caso los esclavos también están interconectados entre ellos. Esta configuración también cumple con las condiciones necesarias para la sincronización, además que es más robusta en caso de que haya alguna pérdida de conexión entre los nodos. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las señales de control se proponen de la misma manera que el caso anterior y se muestran en la figura 23, lo que cambia ahora son las señales de acoplamiento, las cuales se muestran a continuación:

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 0$$

En la figura (24) se muestran los resultados con los sistemas ya sincronizados.

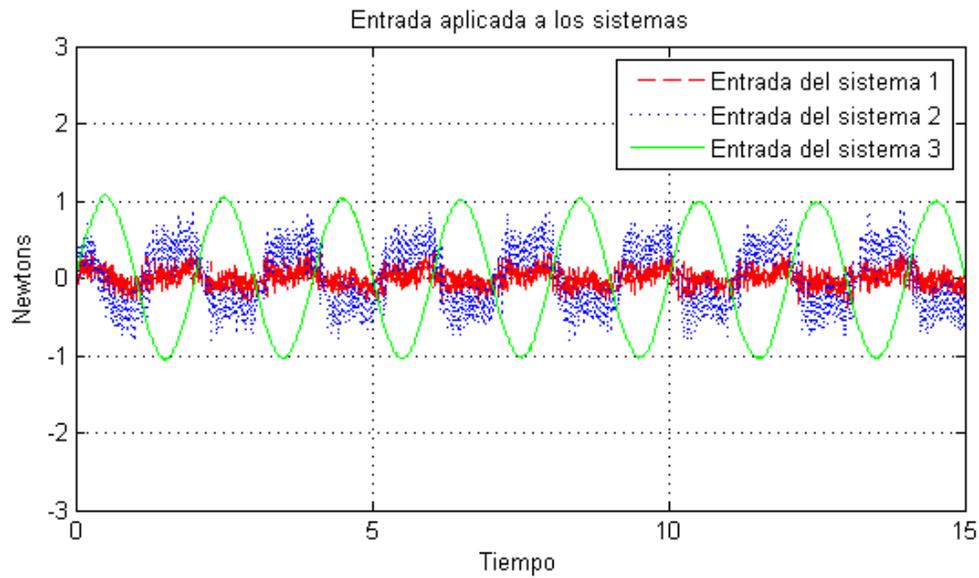


Figura 23. Señales de control de los tres sistemas caso 3.

V.1.4 Caso 4: tres sistemas interconectados

Este caso es una configuración en la que no se tiene a un maestro (véase figura 20 C)). Aquí todos los sistemas están interconectados entre ellos en ambas direcciones. Al no haber un maestro entre los sistemas el comportamiento de todo el arreglo tiende a ser una combinación del comportamiento de los tres sistemas independientes, que depende de las ganancias de los controladores y los valores de los parámetros beta asignados al arreglo. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las señales de control se muestran en la figura 25 con las señales de acoplamiento

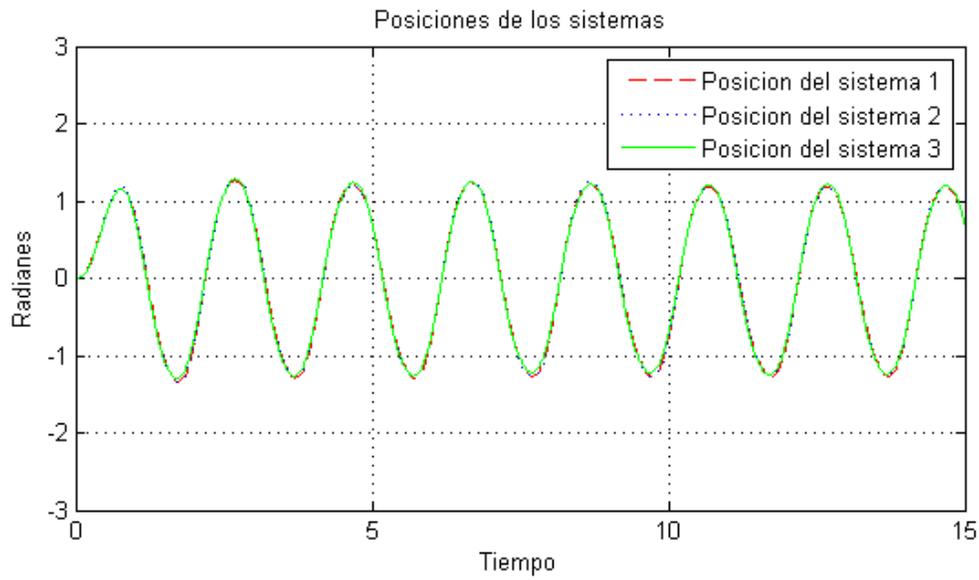


Figura 24. Posiciones de los tres sistemas caso 3.

que quedan de la siguiente manera:

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = (k_{p3}(x_5 - x_1) + k_{d3}(x_6 - x_2)) + (k_{p3}(x_5 - x_3) + k_{d3}(x_6 - x_4))$$

En la figura 26 se muestra el comportamiento de las tres sistemas sincronizados.

V.1.5 Caso 5: Conexión tres sistemas en anillo

En este caso también se tiene una configuración en la que no se tiene a un maestro. Aquí todos los sistemas están interconectados entre ellos pero solo en una dirección (véase

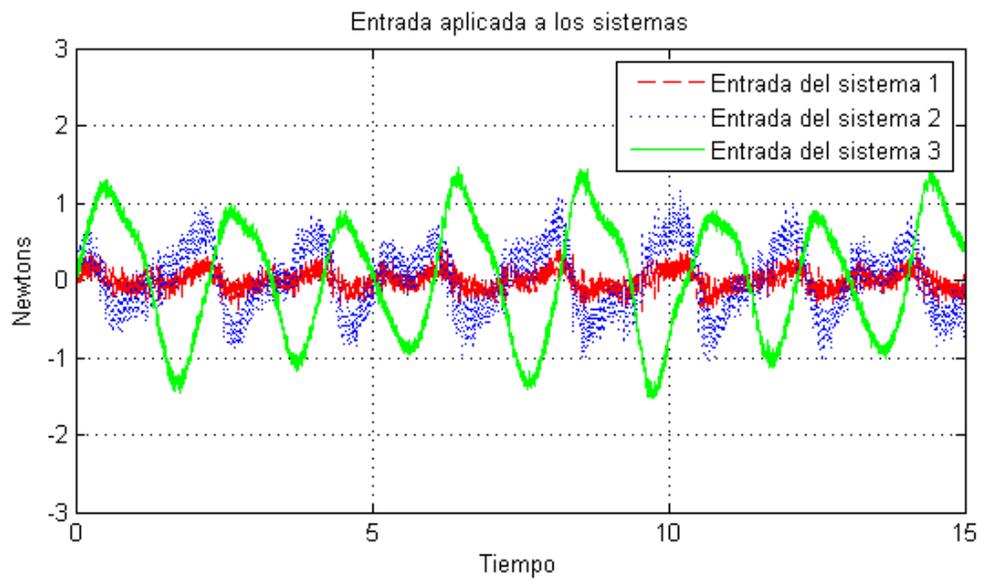


Figura 25. Señales de control de los tres sistemas caso 4.

figura 20 D)). Igual que el caso anterior, al no haber un maestro, el comportamiento de los sistemas está dado por una combinación. Otra diferencia importante es que si aquí se llega a presentar una pérdida de conexión, el arreglo continuaría siendo sincronizable, convirtiéndose inmediatamente en un arreglo donde habría un maestro y dos esclavos en cascada. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En la figura 27 se muestran las señales de control y las señales de acoplamiento correspondientes, son:

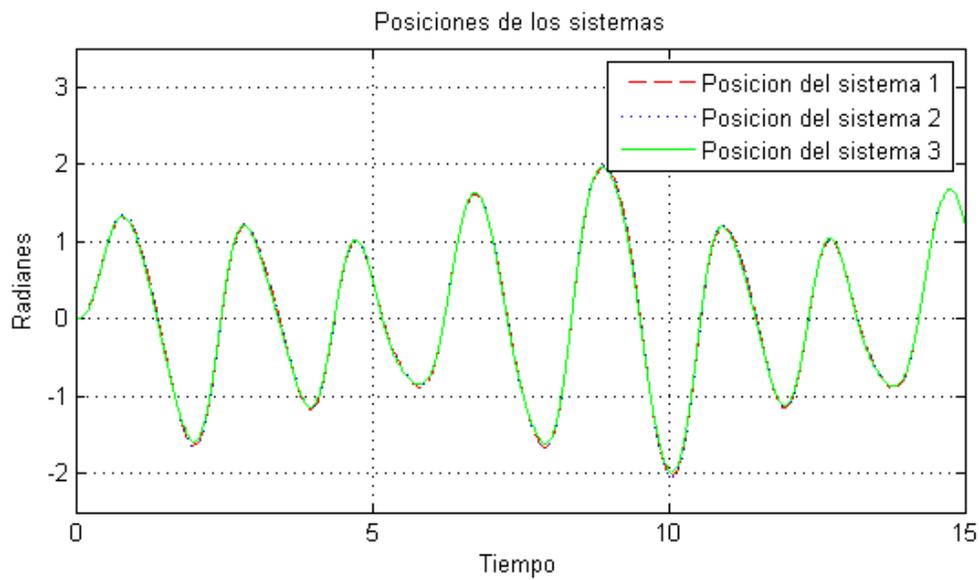


Figura 26. Posiciones de los tres sistemas caso 4.

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2))$$

$$v_3 = (k_{p3}(x_5 - x_3) + k_{d3}(x_6 - x_4))$$

En la figura 28 se muestran los resultados.

V.1.6 Caso 6: dos maestros, un esclavo

En este caso se presenta una configuración en donde se tienen dos maestros y un esclavo, es decir, el sistema esclavo está siendo forzado a seguir a dos maestros, los cuales no tienen ninguna clase de conexión entre ellos (véase figura 20 E)). Esto provoca que el

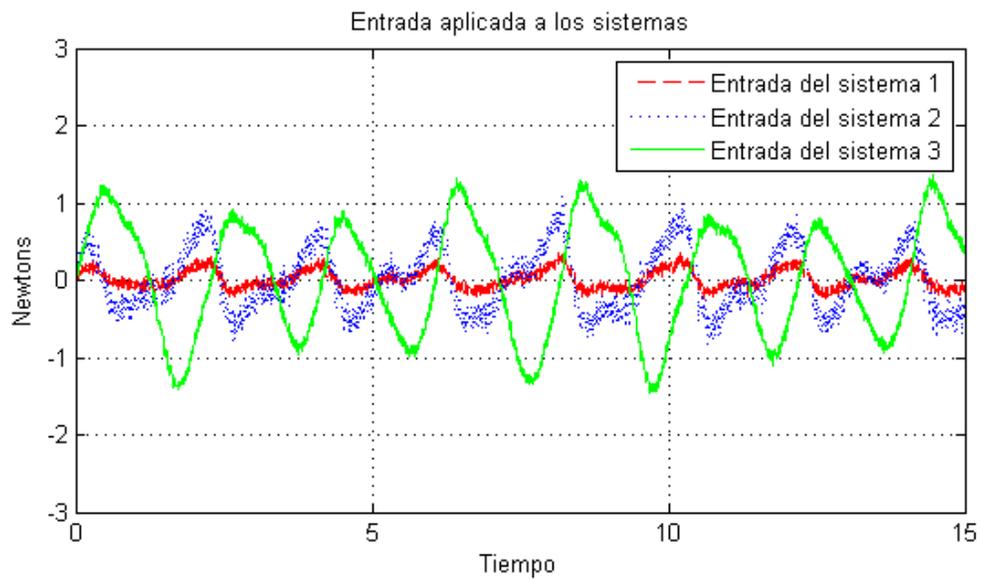


Figura 27. Señales de control de los tres sistemas caso 5.

sistema esclavo no pueda seguir a ningún maestro de forma exitosa, evitándose así la sincronización deseada. Para este arreglo se tiene una matriz de conectividad que no cumple con la condición de tener rango $(n - 1)$ y a continuación se muestra esta matriz:

$$\Theta_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la figura 29 se muestran las señales de control, y para este caso las señales de acoplamiento tendrán la siguiente forma:

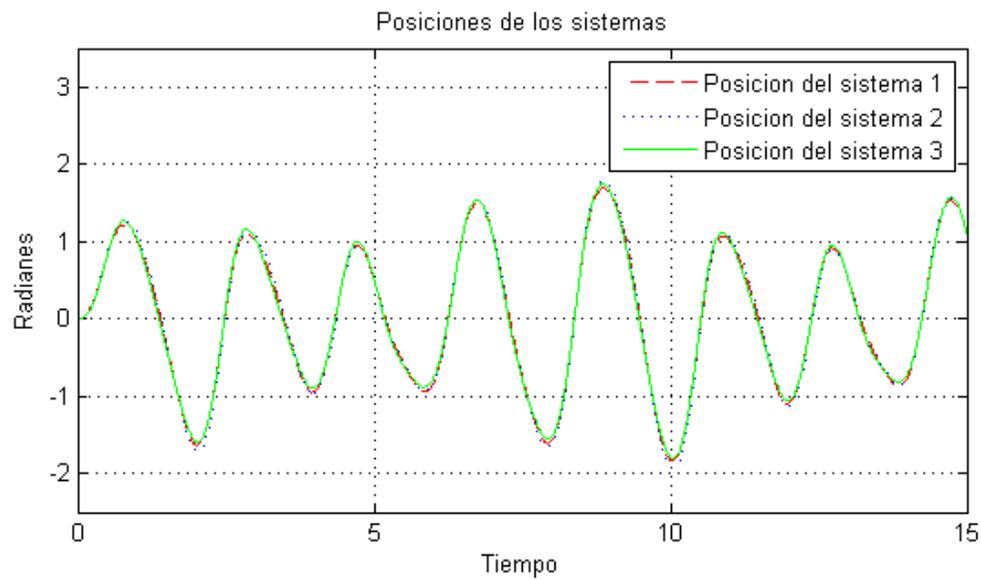


Figura 28. Posiciones de los tres sistemas caso 5.

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 0$$

En la figura 30 se muestra cómo los sistemas no llegan a la sincronización. Sin embargo, el sistema esclavo se mantiene siempre en medio de los dos maestros. Esto se debe a que los beta aquí propuestos son iguales, pero esto cambia ya estos varían en magnitud.

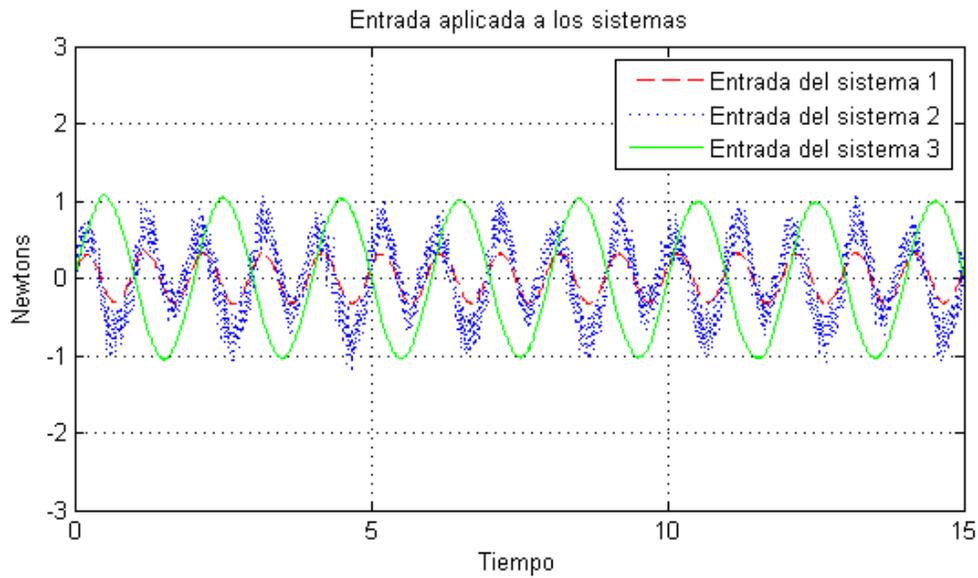


Figura 29. Señales de control de los tres sistemas caso 6.

V.1.7 Caso 7: pesos de interconexiones distintos (Caso 2)

Este caso es una variación del caso 2 mostrado anteriormente (véase figura 20 A)). Ahora cambiaremos el valor de los parámetros β a otros valores durante el mismo experimento para ver su comportamiento y comparar los resultados. Como se mencionó anteriormente, no es necesario que la matriz de conectividad sea simétrica para poder obtener la sincronización, de aquí que ahora los valores de los parámetros β propuestos sean de diferente valor. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_7 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la figura 31 se muestran las señales de control y para este caso se tienen las

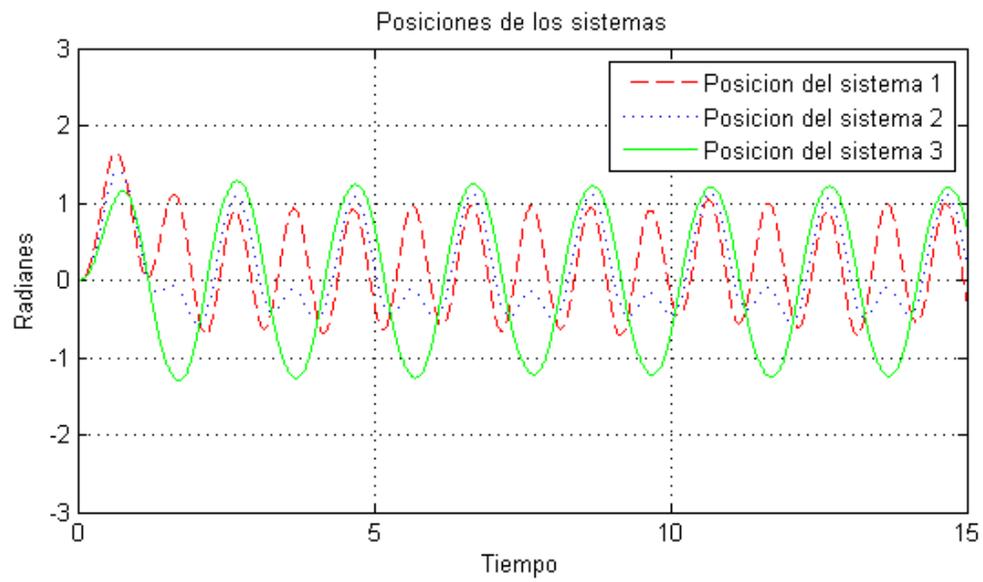


Figura 30. Posiciones de los tres sistemas caso 6.

siguientes señales de acoplamiento:

$$v_1 = 3(k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(\hat{x}_2 - \hat{x}_6))$$

$$v_2 = 4(k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(\hat{x}_4 - \hat{x}_6))$$

$$v_3 = 0$$

En la figura 32 se muestra como los sistemas también llegan a la sincronización reduciendo aparentemente el error que se tenía en el caso 2.

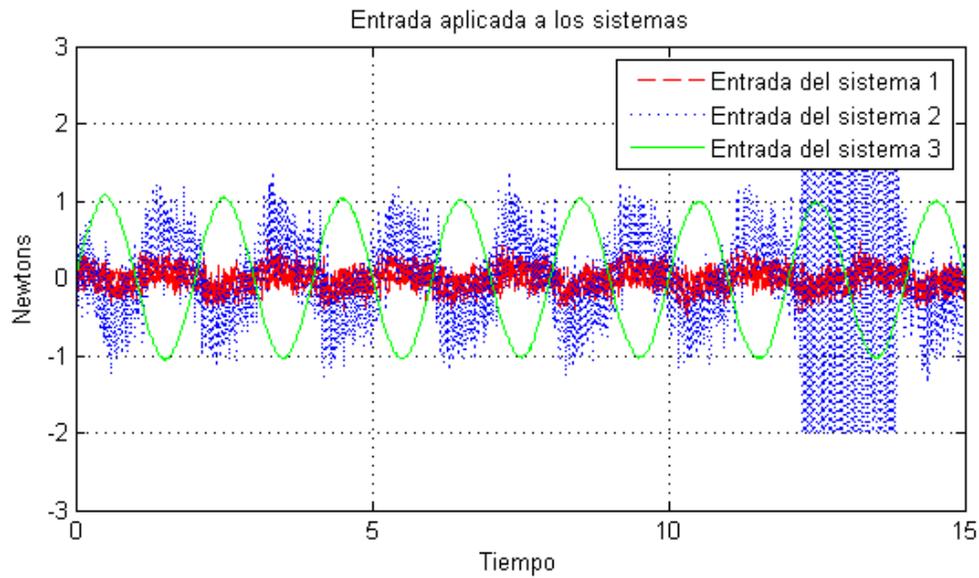


Figura 31. Señales de control de los tres sistemas caso 7.

V.1.8 Caso 8: pesos de interconexiones distintos (Caso 4)

Por último se tiene una configuración similar a la del caso 4 (véase figura 20 C)). Ahora con parámetros β diferentes para ver el comportamiento de los sistemas cuando no se tiene un maestro y con dichos parámetros diferentes a la unidad. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_8 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Las señales de control se muestran en la figura 33 con las señales de acoplamiento que tienen la siguiente forma:

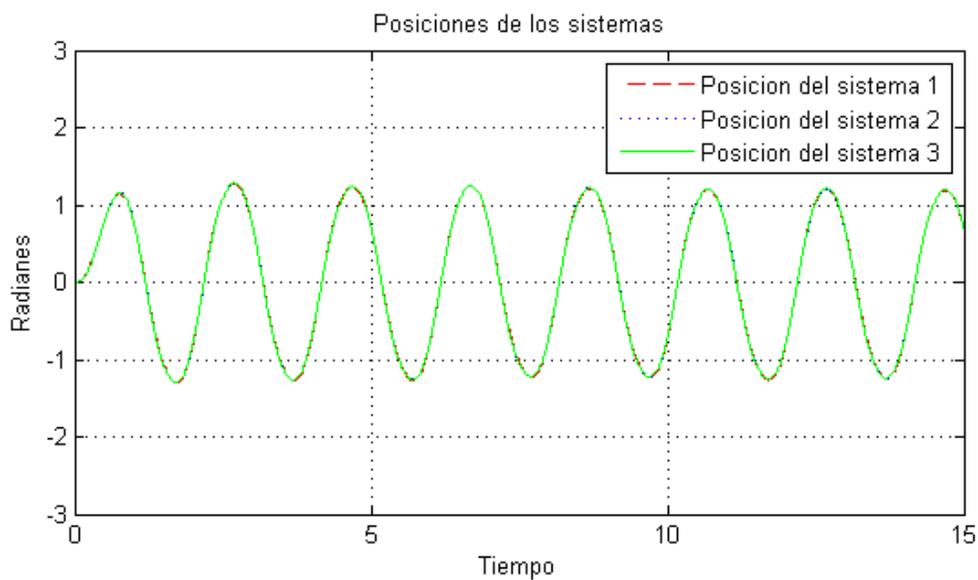


Figura 32. Posiciones de los tres sistemas caso 7.

$$v_1 = 3(k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + 2(k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + 2(k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 3(k_{p3}(x_5 - x_1) + k_{d3}(x_6 - x_2)) + 3(k_{p3}(x_5 - x_3) + k_{d3}(x_6 - x_4))$$

En la figura 34 se muestra cómo los sistemas llegan a la sincronización, reduciendo aparentemente el error que se tenía en el caso 4, además que el comportamiento de los sistemas es también ligeramente diferente. Esto es debido a que se le da más peso a ciertos sistemas con la variación introducida a los parámetros.

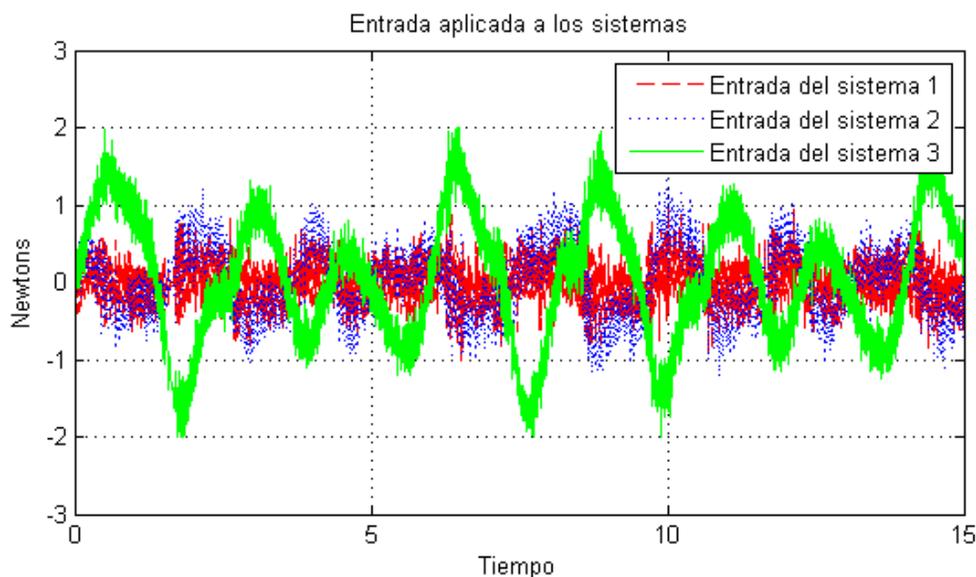


Figura 33. Señales de control de los tres sistemas caso 8.

V.2 Arreglos de cinco sistemas

En esta sección trabajaremos con los tres sistemas anteriores, y agregaremos dos sistemas más que corresponden a dos sistemas rectilíneos obtenidos del sistema mecánico de la compañía ECP modelo 210. Estos dos sistemas son una configuración específica del sistema general mostrado en la figura 35, donde se manejan dos de los tres carritos disponibles en el sistema general, cada uno con su actuador para poder controlarlos independientemente, y cada uno con sus características individuales. Estos sistemas tienen la siguiente estructura:

$$\dot{x}_7 = x_8$$

$$\dot{x}_8 = -(f_{r1}(x_8) - u_4)/m_{r1} + \xi_3(\cdot)$$

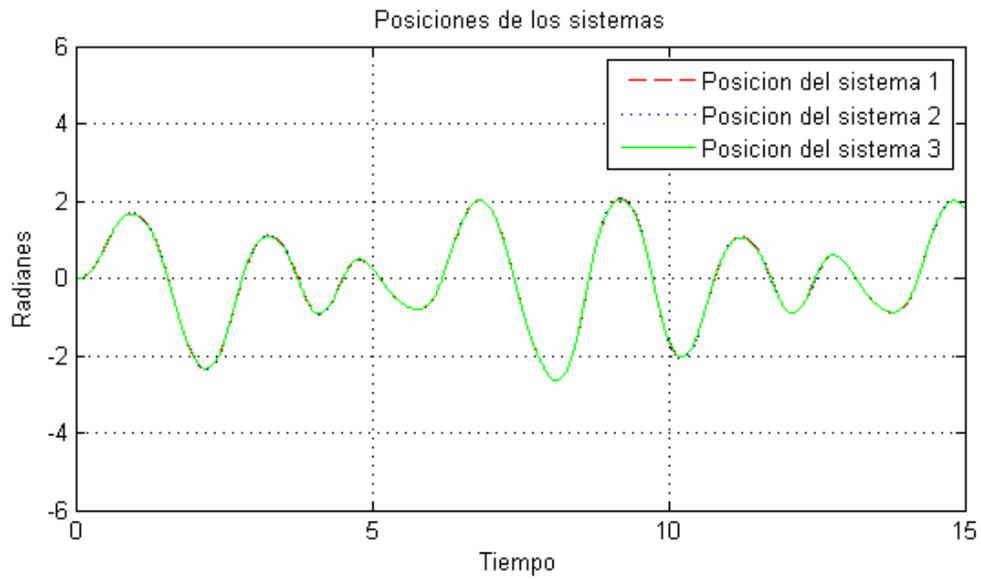


Figura 34. Posiciones de los tres sistemas caso 8.

$$\dot{x}_9 = x_{10}$$

$$\dot{x}_{10} = -(f_{r2}(x_{10}) - u_5)/m_{r2} + \xi_4(\cdot)$$

En donde f_{r1} y f_{r2} es el coeficiente de fricción viscosa de los carritos que contienen las masas, m_{r1} y m_{r2} son las masas contenidas en cada carrito ya incluyendo la masa del propio carrito, u la entrada al sistema y ξ la perturbación del sistema.

Para los sistemas anteriores se utilizan las mismas entradas de control lo que cambian son las señales de acoplamiento, y a continuación las entradas de estos dos nuevos sistemas:

$$u_4 = -m_{r1}(- (f_{r1}/m_{r1})\hat{x}_8 + \hat{\xi}_3 + v_4)$$

$$u_5 = -m_{r2}(- (f_{r2}/m_{r2})\hat{x}_{10} + \hat{\xi}_4 + v_5)$$



Figura 35. Sistema rectilíneo ECP modelo 210.

Tabla IX. Parámetros de los experimentos para arreglos de cinco sistemas.

| Parámetro | Valor | Unidades |
|-----------|--------|------------|
| f_{r1} | 0.0769 | $N/(cm/s)$ |
| f_{r2} | 0.0769 | $N/(cm/s)$ |
| m_{r1} | 1.062 | Kg |
| m_{r2} | 0.562 | Kg |

En la tabla (IX) se incluyen los valores usados para estos experimentos.

V.2.1 Caso 1: cinco sistemas sin conexión.

Para empezar se tiene el caso donde ningún sistema está conectado con ningún otro. Esto ilustra el comportamiento de todos los sistemas, independientes de los demás. La matriz de conectividad es $\Theta_1 = 0$.

Como es de esperarse el arreglo no es sincronizable bajo estas condiciones. Las

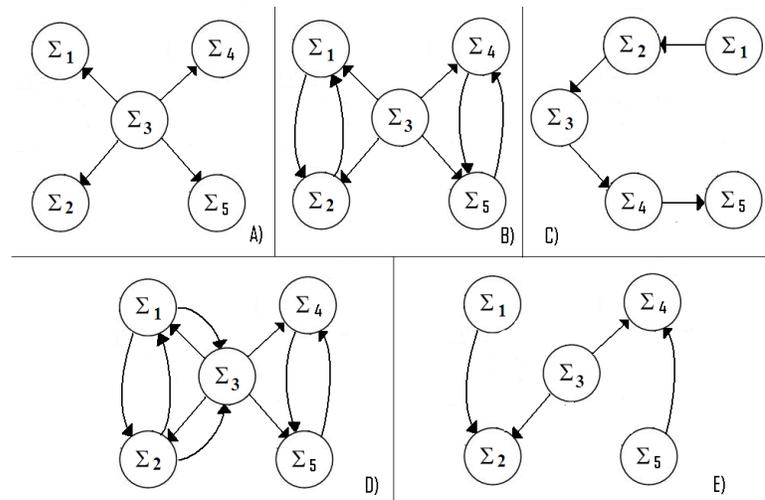


Figura 36. Configuraciones para cinco sistemas..

señales de acoplamiento son, para todos los casos, igual a cero. En la figura 37 se muestra el comportamiento de los sistemas.

V.2.2 Caso 2: un maestro, cuatro esclavos.

En este caso se maneja uno de los arreglos básicos cuando se habla de sincronización, un maestro y los demás esclavos, con el número de conexiones mínimas para lograrlo, en donde el maestro está conectado con los esclavos de manera unidireccional y no hay conexión entre los esclavos (véase figura 36 A)). Aquí se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

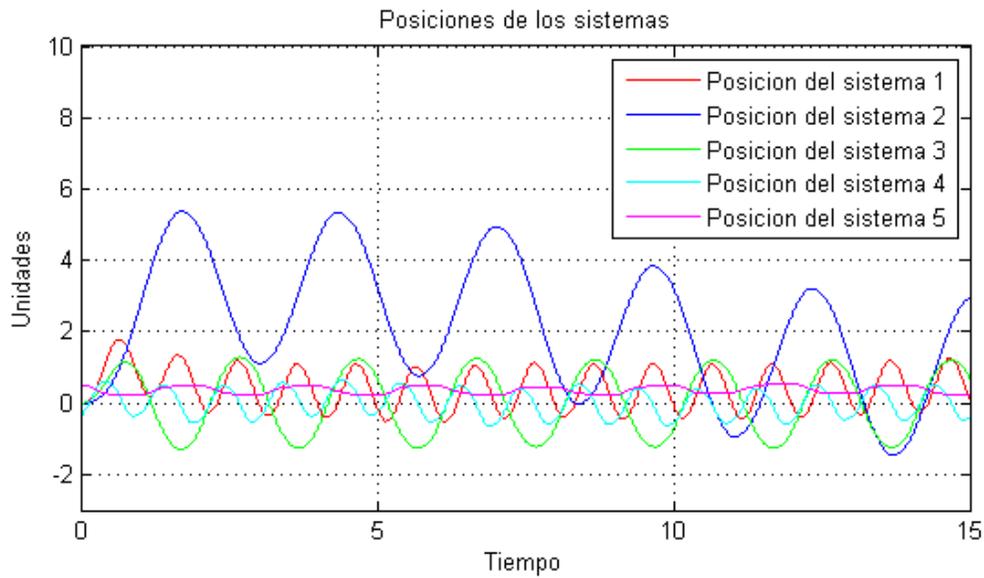


Figura 37. Posiciones de los cinco sistemas caso 1.

A partir de esta matriz de conectividad obtenemos las siguientes señales de acoplamiento:

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = (k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6))$$

$$v_5 = (k_{p5}(x_9 - x_5) + k_{d5}(x_{10} - x_6))$$

Para este caso, las señales de control introducidas a los sistemas se muestran en la figura 38:

En este caso, dado que la matriz de conectividad, a pesar de las pocas conexiones con las que se cuenta mantiene rango $n - 1$, se tiene que el arreglo es sincronizable. En

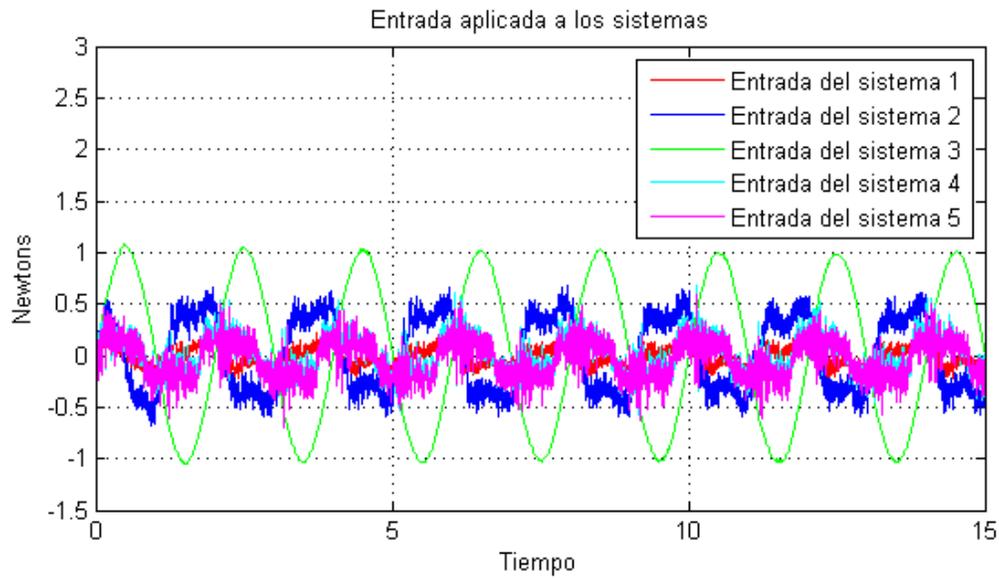


Figura 38. Señales de control de los cinco sistemas caso 2.

la figura 39 se muestran los resultados.

V.2.3 Caso 3: un maestro, cuatro esclavos interconectados.

Para reducir un poco el error obtenido en el caso anterior y aumentar la robustez del mismo se agregan ahora cuatro conexiones mas (véase figura 36 B)). Estas conexiones se agregan entre los esclavos para seguir conservando el principio de tener un solo maestro y no modificar su comportamiento. Estas conexiones son agregadas entre los sistemas 1 y 2 en forma bidireccional, así como en los nodos 4 y 5, también en forma bidireccional. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

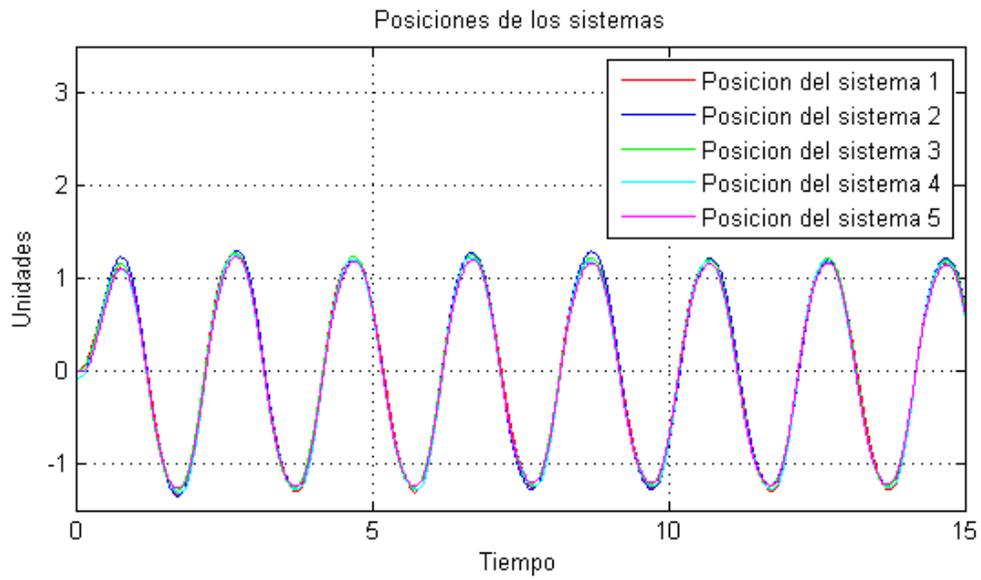


Figura 39. Posiciones de los cinco sistemas caso 2.

$$\Theta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz también cumple con la condición de tener rango $n - 1 = 4$, de aquí que aseguramos que existen señales de acoplamiento encargadas de llevar el arreglo a la sincronización. En la figura 40 se muestran las señales de control con las señales de sincronización utilizadas que se muestran a continuación:

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = (k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6)) + (k_{p4}(x_7 - x_9) + k_{d4}(x_8 - x_{10}))$$

$$v_5 = (k_{p5}(x_9 - x_5) + k_{d5}(x_{10} - x_6)) + (k_{p5}(x_9 - x_7) + k_{d5}(x_{10} - x_8))$$

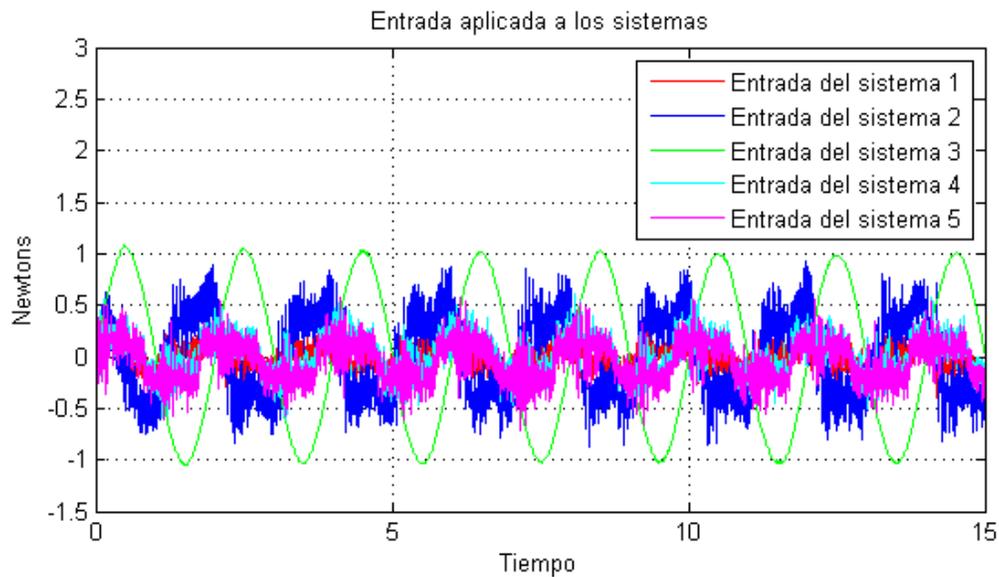


Figura 40. Señales de control de los cinco sistemas caso 3.

Este arreglo, como se mencionó anteriormente, es más robusto que el anterior, ya que aunque se pierda una conexión, cualquiera que ésta sea, el arreglo aún así seguirá estando sincronizado. Además, los resultados comparados con el caso anterior, también son mejores, como se muestra en la figura 41.

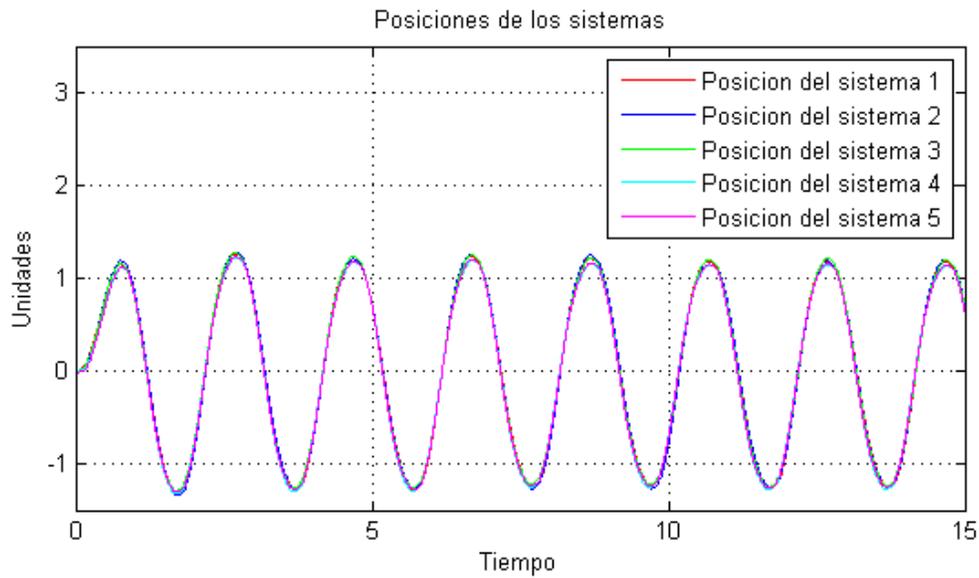


Figura 41. Posiciones de los cinco sistemas caso 3.

V.2.4 Caso 4: configuración cascada

En este caso se tiene el número mínimo de conexiones, al igual que el caso 2. Este arreglo también tiene cuatro conexiones, y también cumple con las condiciones de sincronización mencionados en este trabajo. Por su estructura, este arreglo puede también ser llamado como arreglo en cascada, por ser un caso donde se tiene un maestro y los demás esclavos (véase figura 36 C)). La diferencia del segundo caso es que el primer sistema es el maestro del segundo que a su vez es maestro del tercero, y así sucesivamente. La matriz de conectividad tiene la siguiente forma:

$$\Theta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que esta matriz de conectividad cumple la condición de tener rango $n - 1 = 4$. Las señales de control se muestran en la figura 42 con las siguientes señales de acoplamiento:

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2))$$

$$v_3 = (k_{p3}(x_5 - x_3) + k_{d3}(x_6 - x_4))$$

$$v_4 = (k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6))$$

$$v_5 = (k_{p5}(x_9 - x_7) + k_{d5}(x_{10} - x_8))$$

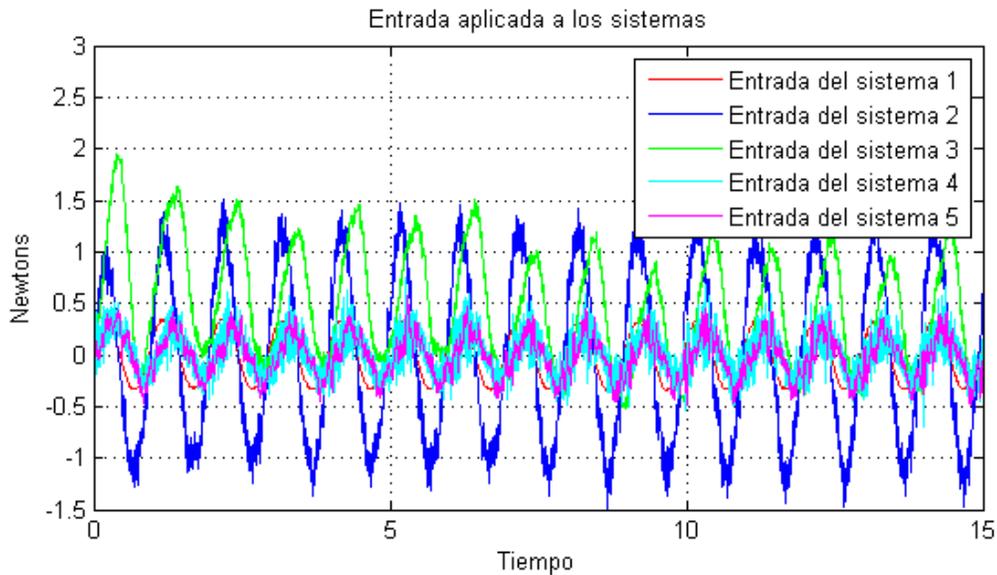


Figura 42. Señales de control de los cinco sistemas caso 4.

En la figura 43 se muestran los resultados del arreglo. Debido a la estructura en cascada de este arreglo se puede apreciar que el error es mas grande comparado con el

caso 2 mostrado anteriormente. Esto indica que a pesar de tener el mismo número de conexiones ciertos arreglos son más robustos que otros, ya que en este caso el error del primer sistema también afecta a los errores de los sistemas que funcionan como esclavos, acumulándose el error en niveles inferiores.

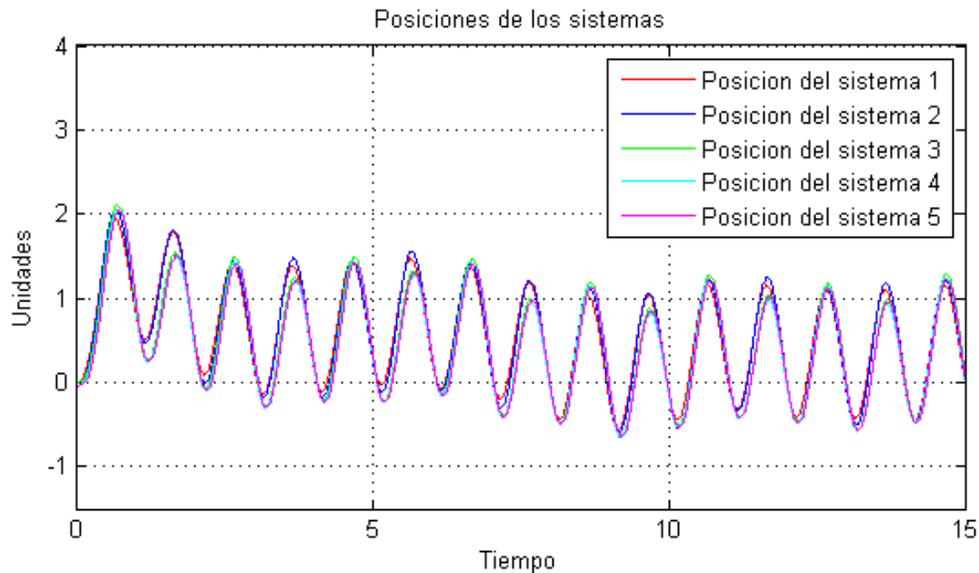


Figura 43. Posiciones de los cinco sistemas caso 4.

V.2.5 Caso 5: tres sistemas como maestro, dos esclavos

Aquí se muestra un caso en el que no se tiene un maestro, sino un arreglo de tres sistemas combinados haciendo la labor de un maestro y los dos sistemas restantes como esclavos de este sub-arreglo (véase figura 36 D)). Este es sólo un ejemplo de las varias combinaciones que se pueden tener con cinco sistemas. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz de conectividad tendremos las siguientes señales de acoplamiento que corresponden a las señales de control mostradas en la figura 44:

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = (k_{p2}(x_5 - x_1) + k_{d2}(x_6 - x_2)) + (k_{p2}(x_5 - x_3) + k_{d2}(x_6 - x_4))$$

$$v_4 = (k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6)) + (k_{p4}(x_7 - x_9) + k_{d4}(x_8 - x_{10}))$$

$$v_5 = (k_{p5}(x_9 - x_5) + k_{d5}(x_{10} - x_6)) + (k_{p5}(x_9 - x_7) + k_{d5}(x_{10} - x_8))$$

En la figura 45 se puede observar cómo el comportamiento del arreglo no es en sí el comportamiento de ningún sistema en particular, sino la combinación de los primeros tres sistemas. Se puede observar también que, debido al alto número de conexiones, el error de sincronización es reducido, obteniendo buenos resultados.

V.2.6 Caso 6: tres maestros, dos esclavos

Para este caso se proponen ahora tres maestros, sólo que a diferencia del caso anterior, los maestros no tienen ninguna conexión entre ellos (véase figura 36 E)). Aquí los

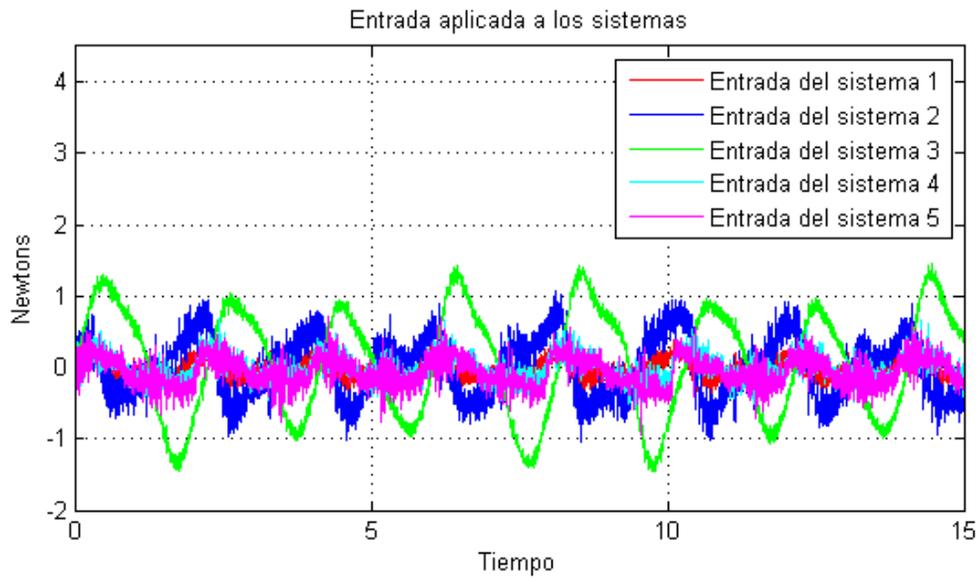


Figura 44. Señales de control de los cinco sistemas caso 5.

sistemas 1,3 y 5 son maestros de los sistemas esclavos 2 y 4, dando como resultado una matriz de conectividad de la siguiente forma:

$$\Theta_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz no cumple con la condición de tener rango de $n - 1$, por lo que el objetivo de sincronización no será alcanzado. Las señales de control se muestran en la figura 46 con las señales de acoplamiento que tienen la siguiente forma:

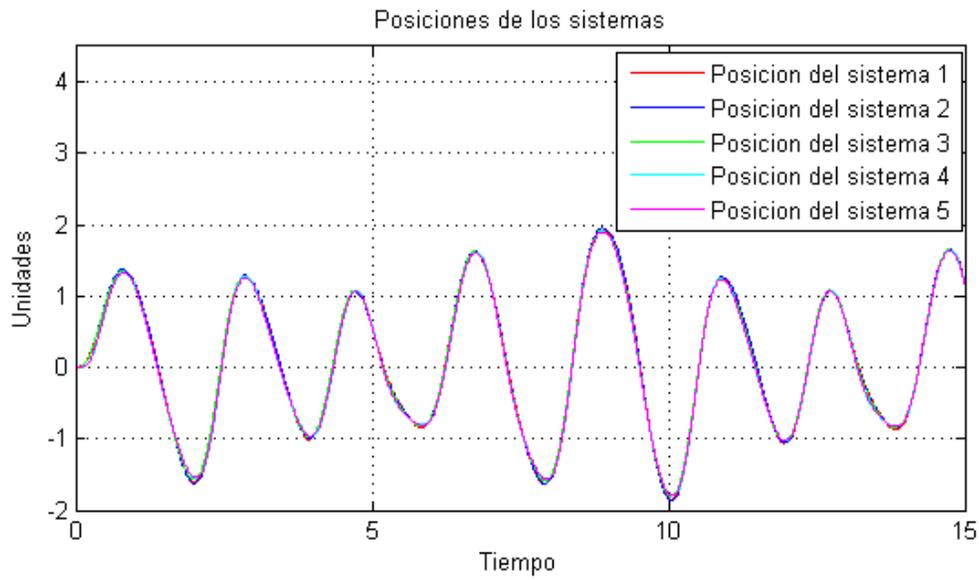


Figura 45. Posiciones de los cinco sistemas caso 5.

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = (k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6)) + (k_{p4}(x_7 - x_9) + k_{d4}(x_8 - x_{10}))$$

$$v_5 = 0$$

Como se puede observar en la figura 47 los sistemas no pueden ser llevados al objetivo de sincronización, a pesar de que se tienen el mismo número de conexiones que los casos 2 y 4. Este arreglo fue implementado a pesar de saber que la matriz no cumplía con la condición de sincronización, para comprobar experimentalmente la validez de la condición.

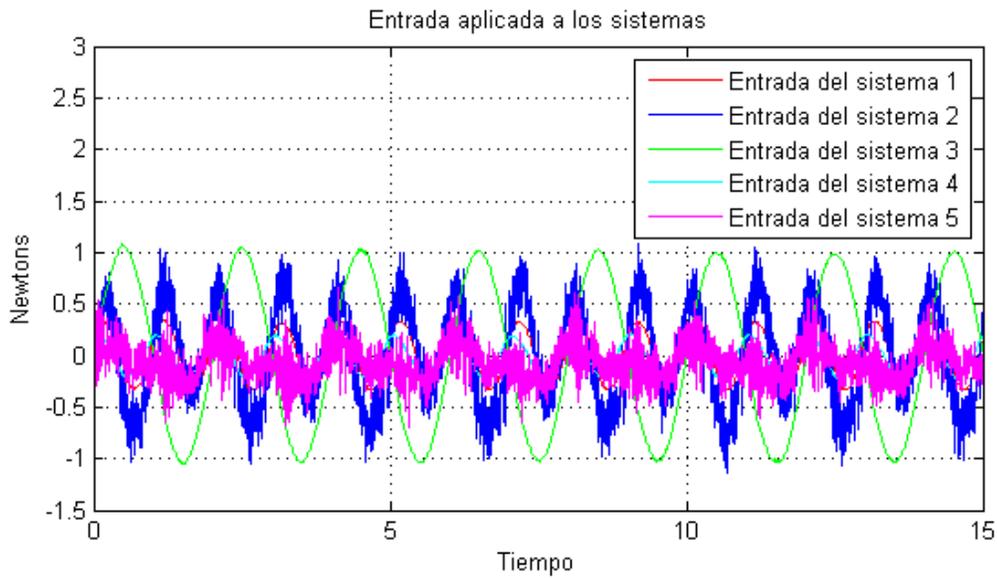


Figura 46. Señales de control de los cinco sistemas caso 6.

V.3 Arreglos de 7 sistemas

En esta sección se agregan otros dos sistemas al arreglo, además de los que ya se tenían en las secciones pasadas. Estos dos nuevos sistemas son un sistema torsional de la compañía ECP modelo 205 como el que se muestra en la figura 48 y un sistema péndulo invertido también de la compañía ECP modelo 505 mostrado en la figura 48, el cual se manejó en una configuración en la cual solo se consideró un grado de libertad, es decir, solo con la parte actuada del sistema, dejando fija la parte sub-actuada. Los modelos utilizados son los siguientes:

$$\dot{x}_{11} = x_{12}$$

$$\dot{x}_{12} = -(f_t(x_{12}) + u_6)/m_t + \xi_5(\cdot)$$

$$\dot{x}_{13} = x_{14}$$

$$\dot{x}_{14} = -(f_p(x_{14}) + u_7)/m_p + \xi_6(\cdot)$$

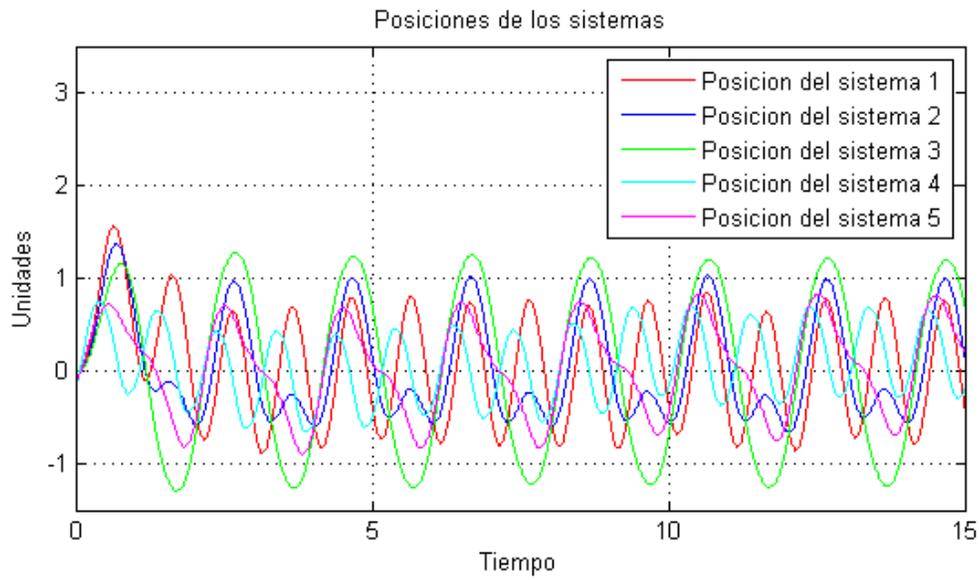


Figura 47. Posiciones de los cinco sistemas caso 6.

Donde f_t y f_p son los coeficientes de fricción viscosa del sistema torsional y el péndulo invertido, respectivamente; m_t es la inercia del disco 1 del sistema torsional, m_p la masa de la barra actuada del péndulo invertido y $\xi_5(\cdot)$ y $\xi_6(\cdot)$ las perturbaciones de los sistemas en donde se incluyen las dinámicas no modeladas, así como incertidumbres paramétricas. A continuación se muestran las entradas de estos dos nuevos sistemas:

$$u_6 = -m_t(-(f_t/m_t)\hat{x}_{12} + \hat{\xi}_5 + v_6)$$

$$u_7 = -m_p(-(f_p/m_p)\hat{x}_{14} + \hat{\xi}_6 + v_7)$$

En la tabla (X) se muestran los valores de los parámetros utilizados.



Figura 48. Sistema torsional ECP modelo 205 y péndulo invertido ECP modelo 505.

V.3.1 Caso 1: un maestro, seis esclavos

Como en las secciones anteriores, empezaremos con el caso de un maestro y los demás esclavos, con el menor número de conexiones (véase figura 49 A)). Para este caso seis conexiones unidireccionales que van del maestro a cada uno de los esclavos. A continuación se muestra la matriz de conectividad:

Tabla X. Parámetros de los experimentos para siete sistemas.

| Parámetro | Valor | Unidades |
|-----------|-------|------------|
| f_t | 0.05 | $N/(cm/s)$ |
| f_p | 0.2 | $N/(cm/s)$ |
| m_t | 0.07 | Kg |
| m_p | 0.062 | Kg |

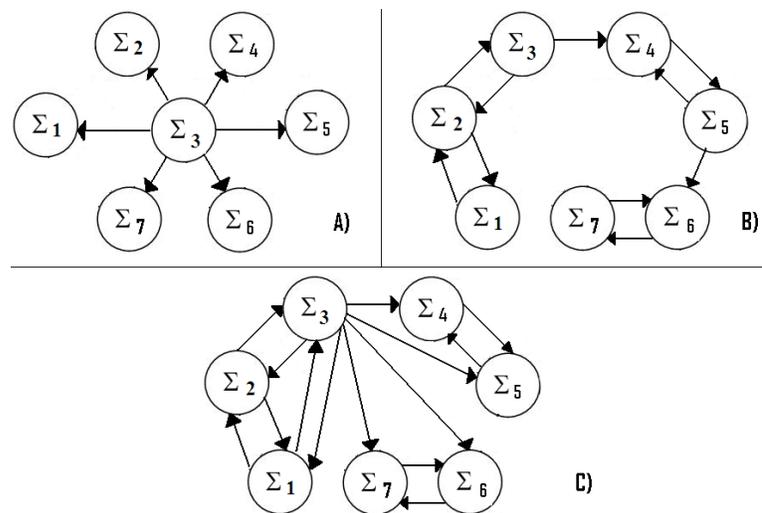


Figura 49. Configuraciones para siete sistemas..

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenida la matriz de conectividad, procedemos a la obtención de las señales de acoplamiento, las cuales tienen la siguiente forma:

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = (k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6))$$

$$v_5 = (k_{p5}(x_9 - x_5) + k_{d5}(x_{10} - x_6))$$

$$v_6 = (k_{p6}(x_{11} - x_5) + k_{d6}(x_{12} - x_6))$$

$$v_7 = (k_{p7}(x_{13} - x_5) + k_{d7}(x_{14} - x_6))$$

En la figura 50 se muestran las señales de control correspondientes con estas señales de acoplamiento.

En la figura 51 se observan los resultados del caso 1.

V.3.2 Caso 2: pesos de interconexiones distintos (Caso 1)

Ahora se presenta la misma configuración del caso pasado, con valores de los parámetros beta distintos, para que de esta manera se reduzcan los errores de sincronización y mejorar el comportamiento del arreglo (véase figura 49 A)). A continuación se muestra la matriz de conectividad:

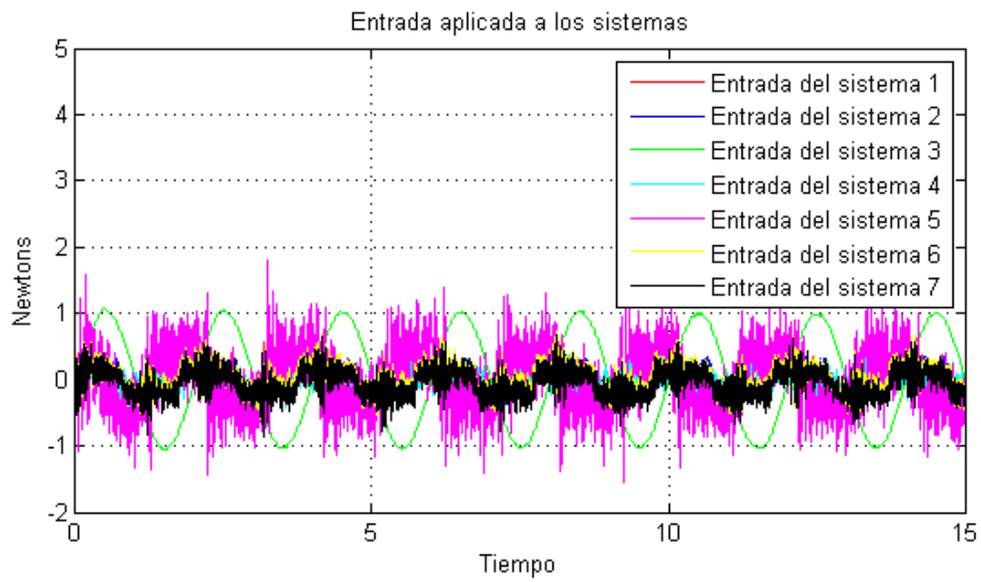


Figura 50. Señales de control de los siete sistemas caso 1.

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para esta matriz se tienen las siguientes señales de acoplamiento:

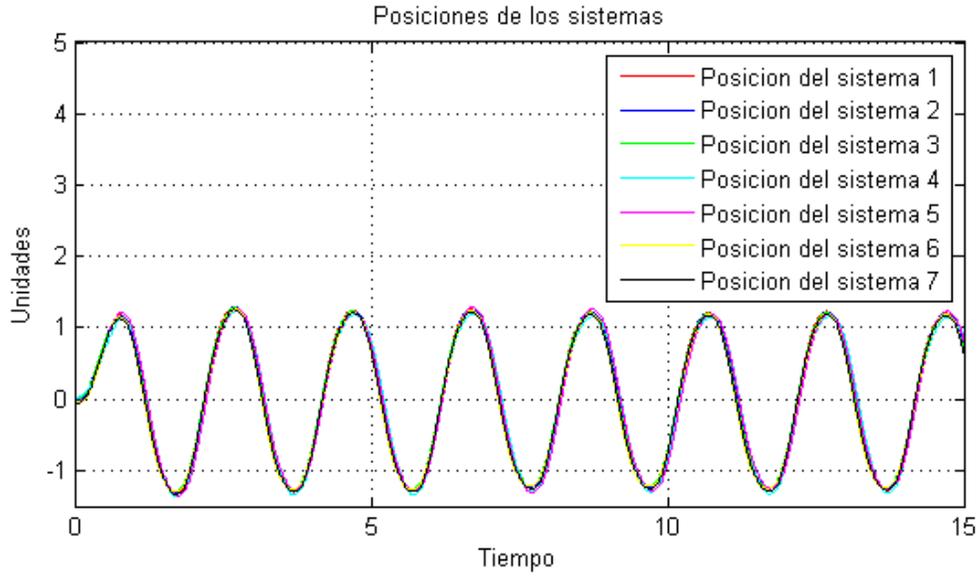


Figura 51. Posiciones de los siete sistemas caso 1.

$$v_1 = (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6))$$

$$v_2 = 2(k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6))$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = 2(k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6))$$

$$v_5 = 3(k_{p5}(x_9 - x_5) + k_{d5}(x_{10} - x_6))$$

$$v_6 = 2(k_{p6}(x_{11} - x_5) + k_{d6}(x_{12} - x_6))$$

$$v_7 = 3(k_{p7}(x_{13} - x_5) + k_{d7}(x_{14} - x_6))$$

Las señales de control resultantes en este caso se muestran en la figura 52.

En la figura 53 se muestra los resultados de este arreglo, el cual tiene un comportamiento muy similar al caso anterior, con la diferencia de reducir ligeramente los errores de sincronización.

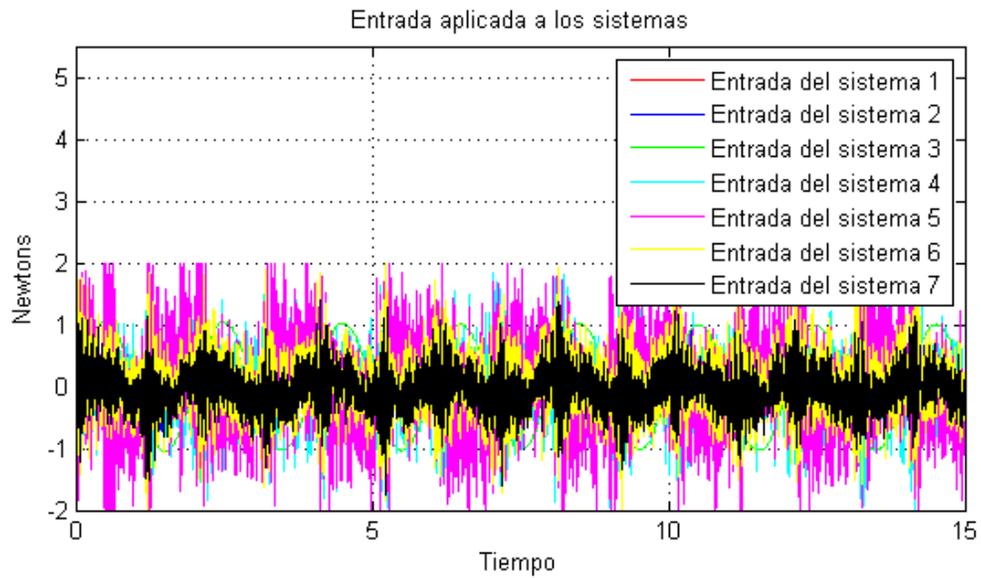


Figura 52. Señales de control de los siete sistemas caso 2.

V.3.3 Caso 3: variación de cadena doble

Ahora se muestra un arreglo que es una variación de la cadena doble (véase figura 49 B)). En este caso los sistemas solo están conectados a aquellos sistemas que se encuentran contiguos a él, con la única diferencia de que el sistema 3 sólo recibe información del sistema 2 y el 5 solo recibe información del sistema 4. Aquí se muestra la matriz de conectividad:

$$\Theta_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

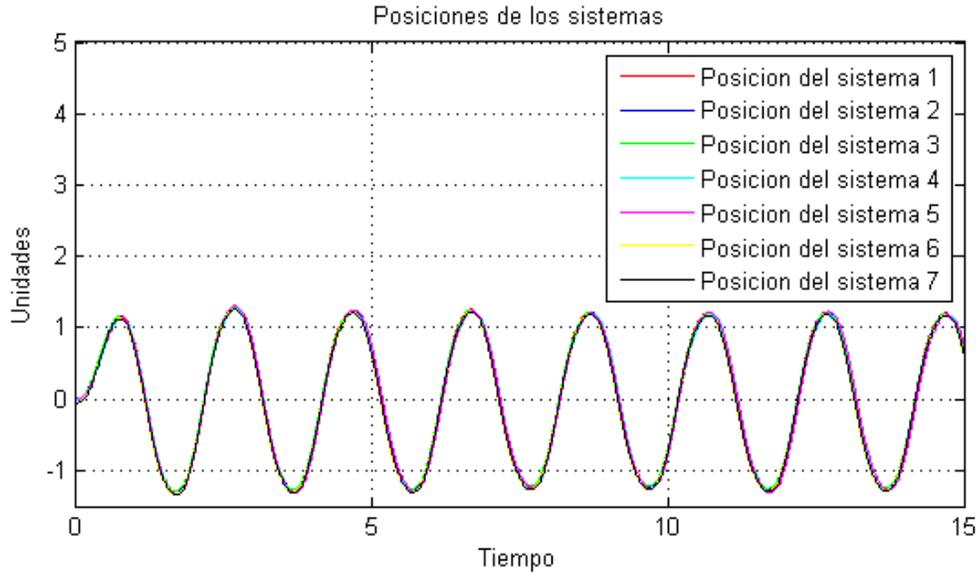


Figura 53. Posiciones de los siete sistemas caso 2.

De esta matriz obtenemos las siguientes señales de acoplamiento:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= (k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) \\
 v_2 &= 2(k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6)) \\
 v_3 &= 2(k_{p2}(x_5 - x_3) + k_{d2}(x_6 - x_4)) \\
 v_4 &= 2(k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6)) + (k_{p4}(x_7 - x_9) + k_{d4}(x_8 - x_{10})) \\
 v_5 &= 2(k_{p5}(x_9 - x_7) + k_{d5}(x_{10} - x_8)) \\
 v_6 &= 2(k_{p6}(x_{11} - x_5) + k_{d6}(x_{12} - x_6)) + (k_{p6}(x_{11} - x_{13}) + k_{d6}(x_{12} - x_{14})) \\
 v_7 &= 2(k_{p7}(x_{13} - x_{11}) + k_{d7}(x_{14} - x_{12}))
 \end{aligned}$$

Las señales de control para este caso se muestran en la figura 54.

En los resultados de la figura 55 se puede observar cómo el error de sincronización es visible fácilmente, a diferencia de los otros arreglos. Esto es debido a que, a pesar de

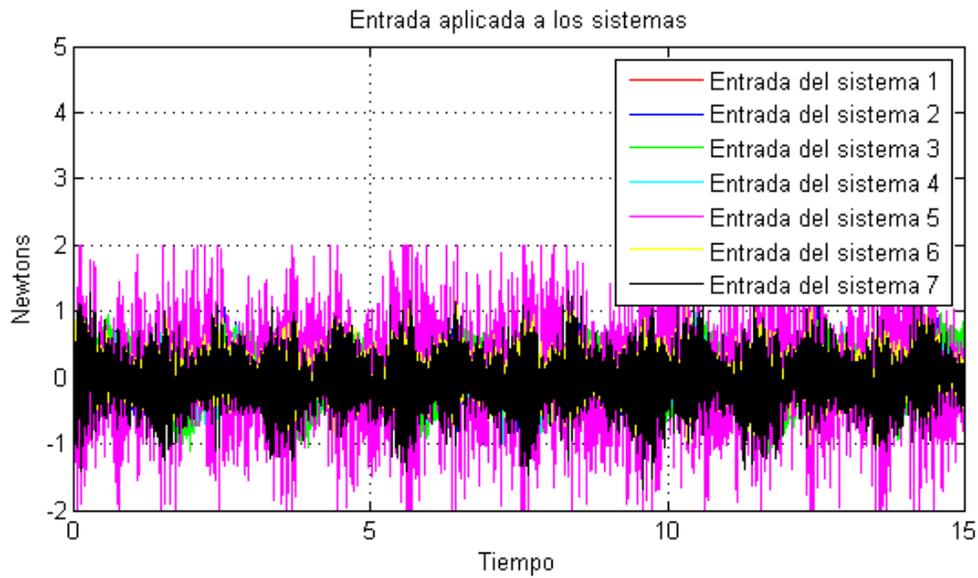


Figura 54. Señales de control de los siete sistemas caso 3.

cumplir con la condición de sincronización para la matriz de conectividad, no se cuenta con un esquema robusto, ya que el efecto de estar conectados los sistemas en forma de cadena provoca que los errores se vayan acumulando.

V.3.4 Caso 4: tres sistemas como maestro, cuatro esclavos

En este caso se presenta un arreglo un poco más complejo, en donde no se cuenta con un solo maestro como en los casos anteriores, sino que ahora se cuenta con un arreglo como maestro (véase figura 49 C)). Este arreglo maestro consta de tres sistemas, quedando los otros cuatro sistemas como esclavos de este sub-arreglo. Además que se agregaron conexiones entre estos esclavos para hacer más robusto al arreglo en general. Aquí se muestra la matriz de conectividad:

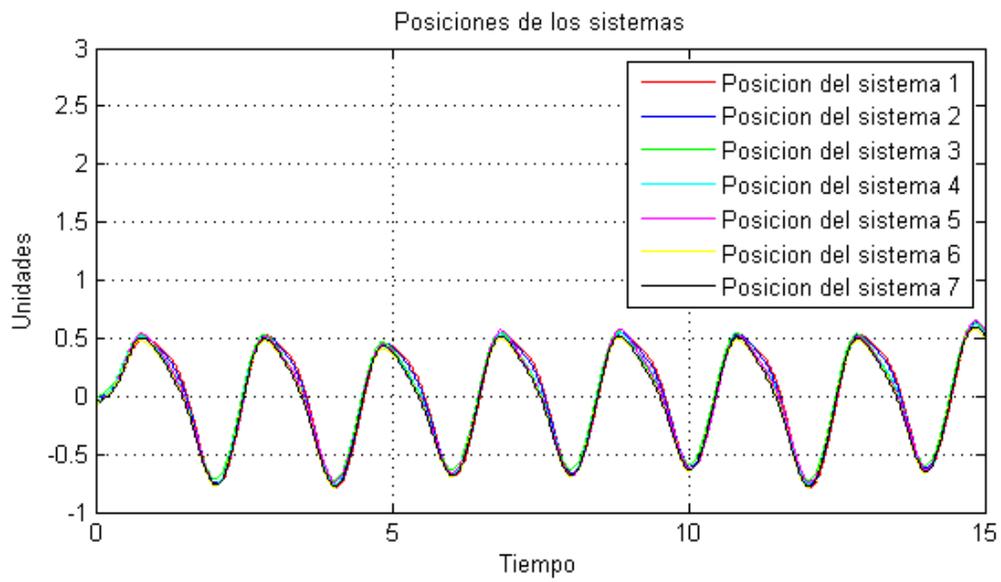


Figura 55. Posiciones de los siete sistemas caso 3.

$$\Theta_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos las señales de acoplamiento:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (k_{p1}(x_1 - x_3) + k_{d1}(x_2 - x_4)) + (k_{p1}(x_1 - x_5) + k_{d1}(x_2 - x_6)) \\
v_2 &= (k_{p2}(x_3 - x_1) + k_{d2}(x_4 - x_2)) + (k_{p2}(x_3 - x_5) + k_{d2}(x_4 - x_6)) \\
v_3 &= (k_{p2}(x_5 - x_1) + k_{d2}(x_6 - x_2)) + (k_{p2}(x_5 - x_3) + k_{d2}(x_6 - x_4)) \\
v_4 &= (k_{p4}(x_7 - x_5) + k_{d4}(x_8 - x_6)) + (k_{p4}(x_7 - x_9) + k_{d4}(x_8 - x_{10})) \\
v_5 &= (k_{p5}(x_9 - x_5) + k_{d5}(x_{10} - x_6)) + (k_{p5}(x_9 - x_7) + k_{d5}(x_{10} - x_8)) \\
v_6 &= (k_{p6}(x_{11} - x_5) + k_{d6}(x_{12} - x_6)) + (k_{p6}(x_{11} - x_{13}) + k_{d6}(x_{12} - x_{14})) \\
v_7 &= (k_{p7}(x_{13} - x_5) + k_{d7}(x_{14} - x_6)) + (k_{p7}(x_{13} - x_{11}) + k_{d7}(x_{14} - x_{12}))
\end{aligned}$$

Las señales de control correspondientes a estas señales de acoplamiento se muestran en la figura 56.

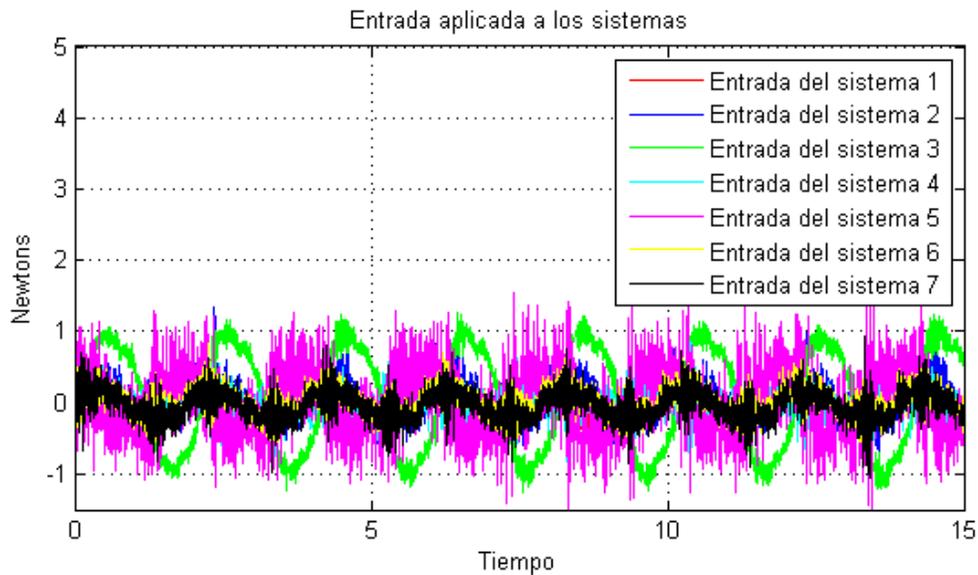


Figura 56. Señales de control de los siete sistemas caso 4.

Los resultados de este arreglo se muestran en la figura 57 los cuales muestran un buen desempeño y una dinámica que combina el comportamiento de los tres sistemas

maestros que se generan con el sub-arreglo de los sistemas 1, 2 y 3.

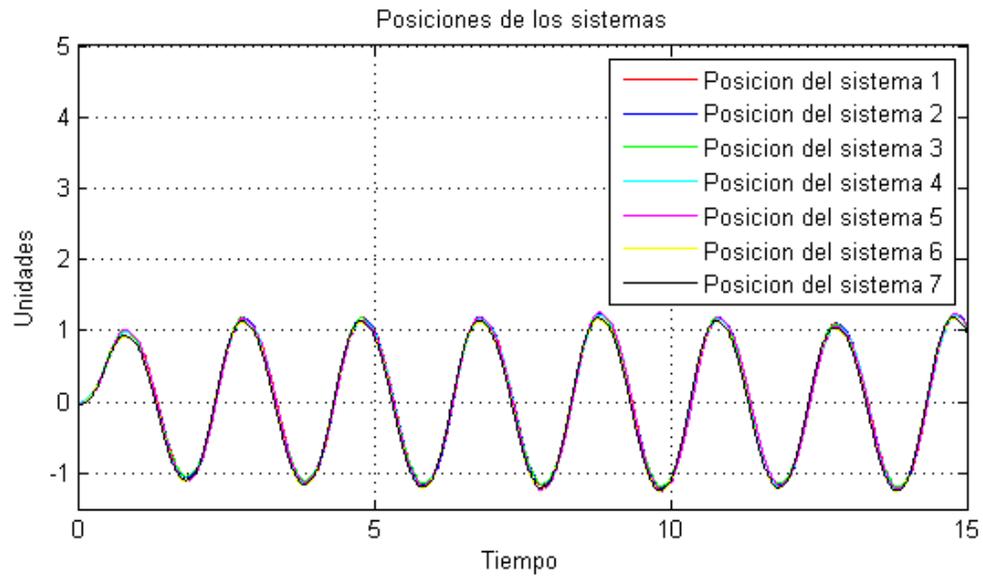


Figura 57. Posiciones de los siete sistemas caso 4.

Capítulo VI

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se presentaron resultados experimentales de diversos esquemas de sincronización basados en algoritmos propuestos recientemente, para solucionar los problemas de sincronización tales como incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas, medición incompleta del vector de estados y diseño de las señales de acoplamiento.

Para solucionar estos problemas se realizó un análisis comparativo entre tres distintos observadores, de los cuales se escogió uno de ellos para implementarlo en lo que sería todo el esquema de sincronización. Una de las cualidades del observador elegido es que proporcionaba una buena estimación del vector de estados y además una estimación de la perturbación o incertidumbres paramétricas que se encontraban en el modelo propuesto del sistema. Esta estimación de la perturbación se introdujo a las señales de control para crear un sistema de lazo cerrado robusto ante todas estas perturbaciones y dinámicas no modeladas.

También se propusieron señales de control sin términos discontinuos para evitar al máximo las conmutaciones de alta frecuencia que se pudieran introducir a los sistemas mecánicos, ya que estos sistemas, al ser de dinámica lenta, se pueden dañar sus elementos o reducir el tiempo de vida de los mismos tales como motores, engranes, bandas o cualquier otro elemento que intervenga.

Otra aportación de este trabajo fue el análisis que se realizó sobre la topología del arreglo a sincronizar. Se analizaron varios tipos de arreglos diferentes, los cuales tienen sus propias características. También se analizó la condición necesaria de la matriz de conectividad, la que ésta debe tener rango de $(n - 1)$. Sin esta condición no sería posible el diseño de las señales de acoplamiento que lleven al objetivo de sincronización.

En este trabajo se trabajó con varios tipos de arreglos para la sincronización, desde dos y tres sistemas en forma teórica, ciertos casos significativos de arreglos con su matriz de conectividad para arreglos de cuatro sistemas mostrado en el Capítulo II, casos experimentales de tres y cinco sistemas, para concluir con lo que sería el objetivo principal de este trabajo que sería tener siete sistemas en un esquema de sincronización, de los cuales seis de ellos son sistemas mecánicos y uno un sistema virtual.

Dentro de todos los arreglos vistos en este trabajo se pueden observar ciertas ventajas o desventajas entre ellos, ya que ciertos arreglos tienden a reducir los errores de sincronización al tener más conexiones o variando el valor de los parámetros de acoplamiento beta, pero también se corre el riesgo de que si un sistema deja de funcionar o no se tiene el cuidado necesario con el cálculo de estos parámetros, esto podría afectar a todo el arreglo en general llegando, en el peor de los casos, a volver inestable el arreglo.

Otro aporte relacionado con la topología del arreglo de este trabajo, fue el análisis de la dinámica de los sistemas cuando no cuentan con un maestro, sino un arreglo de sistemas que combinados generan una nueva dinámica. Esto podría ser muy útil en

esquemas de sincronización mas flexibles, donde no exista necesidad de tener un comportamiento ya predefinido por un maestro.

La implementación de estos esquemas se realizó con la infraestructura disponible en el laboratorio de control del DET, en donde se utilizaron tres equipos computacionales para distribuir la carga de cómputo lo mas equitativamente posible, así como la capacidad de las tarjetas de adquisición de datos utilizadas.

VI.1 Trabajo a futuro

En este estudio resultó claro que el observador juega un papel fundamental para lograr el objetivo de sincronización, no solamente por la convergencia del mismo al estado del sistema observado, sino por la estimación de las perturbaciones e incertidumbres.

Otro aspecto importante a considerar es el diseño de las señales de control. Para este trabajo se utilizaron señales continuas con ganancias únicamente proporcional y derivativa. Algo que podría mejorar el desempeño de la sincronización es el uso de nuevos algoritmos de control, que ayuden a reducir los errores.

Este trabajo se basó en utilizar varias clases de sistemas mecánicos disponibles en el laboratorio. Debido a la infraestructura disponible se utilizaron tres computadoras, cada una con su tarjeta de adquisición de datos, para recibir información de dos sistemas mecánicos. La información transferida entre las computadoras se enviaba de manera analógica de una tarjeta de adquisición a otra, esto puede introducir ruido a las lecturas.

Como trabajo a futuro se propone implementar una red digital de información entre las computadoras, de tal manera que la información sea transmitida de manera confiable de una computadora a otra. De esta forma se podría tener una red de sincronización, cada una con su propia sub-red, y aumentar el número de sistemas que puedan sincronizarse de manera eficiente.

Referencias

- Almeida, D., Alvarez, J., y Fridman, L. (2007). Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **17**(9): 842–861.
- Alvarez, E., Alvarez, J., y Almeida, D. (2008). Sincronización robusta de arreglos de sistemas mecánicos de 1gdl basada en observadores. Sin publicar.
- Blekhman, I., Fradkov, A., Nijmeijer, H., y Pogromsky, A. (1997). On self-synchronization and controlled synchronization 1. *Systems & Control Letters*, **31**(5): 299–305.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D., y Zhou, C. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, **366**(1-2): 1–101.
- Davila, J., Fridman, L., y Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**(11): 1785–1789.
- Hernández Arango, D. (2007). *Sincronización robusta de redes de sistemas dinámicos*. Tesis de maestría, CICESE Ensenada, Baja California, México.
- Huang, J., Gao, W., y Hung, J. (1993). Variable structure control: a survey. *IEEE Trans. Ind. Electron*, **40**(1): 2–22.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear control systems*. Springer Verlag.
- Khalil, H. y Grizzle, J. (2002). *Nonlinear systems*, Vol. 3. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, **76**(9): 924–941.
- Peña Ramirez, J. (2007). *Estructura de control con identificación de perturbaciones: Análisis y evaluación del desempeño*. Tesis de maestría, CICESE Ensenada, Baja California, México.
- Pecora, L. y Carroll, T. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, **64**(8): 821–824.
- Rosas, D., Alvarez, J., Rosas, P., y Silva, A. (2008a). Observación de estado y estimación de perturbaciones en sistemas no lineales en forma normal. Sin publicar.
- Rosas, P., Rosas, D., y Alvarez, J. (2008b). Observación y estimación en tiempo finito de una clase de sistemas no lineales de fase mínima. Sin publicar.

- Rosas Almeida, D. I. (2005). *Sincronización robusta de sistemas lagrangianos utilizando controladores Discontinuos..* Tesis de doctorado, CICESE. Ensenada, Baja California, México.
- Sun, D. y Mills, J. (2002). Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, **18**(4): 498–510.
- Tang, Y., Mees, A., y Chua, L. (2002). Synchronization and chaos. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, **30**(9): 620–626.
- Utkin, V. (1992). *Sliding modes in control and optimization*, Vol. 3. Springer-Verlag Berlin.

Apéndice A

IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL

En esta sección, se muestra el desarrollo y la implementación de los algoritmos propuestos para resolver el problema de sincronización. También se muestra la infraestructura con la que se trabajó, algunos detalles que surgieron en el desarrollo de este trabajo y la programación utilizada para hacerlo.

Un instrumento de gran importancia en la implementación de los algoritmos, fue la tarjeta de adquisición de datos. La tarjeta utilizada fue la 626, de la compañía Sensoray. Se utilizó esta tarjeta, ya que los beneficios que ofrecía, nos daban la posibilidad de manejar varios sistemas mecánicos a la vez. Dentro de las características de la tarjeta, destacan algunas como, 48 canales de entradas/salidas digitales, 16 entradas analógicas, 4 salidas analógicas y módulo de lectura hasta para seis encoders.

Para hacer uso de estas características de la tarjeta, en el laboratorio de control del DET, se tenía un módulo hecho para propósitos de control, este módulo fungía como interfaz entre la tarjeta de adquisición de datos y los sistemas físicos. Para este trabajo, se utilizó como base ese módulo, el cual tenía habilitadas 4 salidas analógicas y seis entradas para lectura de encoders. Sin embargo se decidió habilitar a ese mismo módulo 4 entradas analógicas, las cuales nos permiten la recepción de información que proviene de otros módulos. Ya con la comunicación establecida entre la computadora y el sistema físico, se procedió al procesamiento de datos y a la programación del algoritmo. La

programación del algoritmo se realizó en el software SIMULINK de MATLAB. El cual es un software de programación por bloques, los cuales tienen una función en específico y se conectan a otros bloques para realizar funciones más complejas. En la figura 58 se muestra el esquema general para arreglos de tres sistemas.

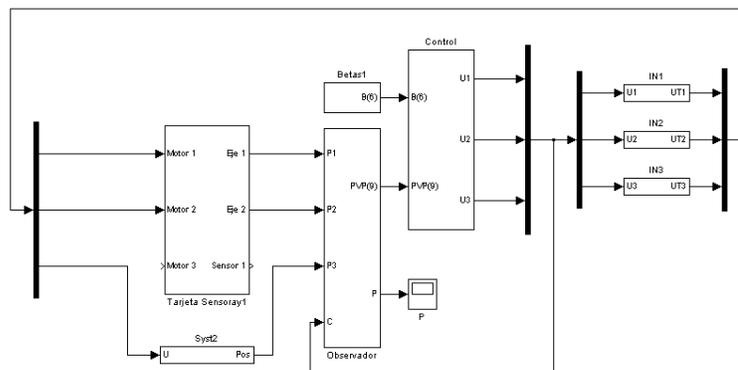


Figura 58. Esquema general de la programación del algoritmo para arreglos de tres sistemas.

Dentro de este esquema se tienen varios sub-bloques, en la figura 59 se muestra el bloque de los parámetros β para arreglos de tres sistemas. En este bloque es donde se asignan los parámetros que definen el tipo de arreglo que se desea.

En la figura 60, se muestra el esquema general del observador implementado, en donde las estimaciones del observador eran comparadas con la lectura del encoder, para comparar posición; la derivada de la posición, para comparar velocidad; y sin embargo no teníamos una lectura que nos permitiera comparar la estimación de la perturbación.

En la figura 61, se muestra el bloque encargado de calcular las señales de control utilizadas en arreglos de tres sistemas, las cuales dependen de los parámetros β , los errores de sincronización y la estimación realizada por el observador de la perturbación.

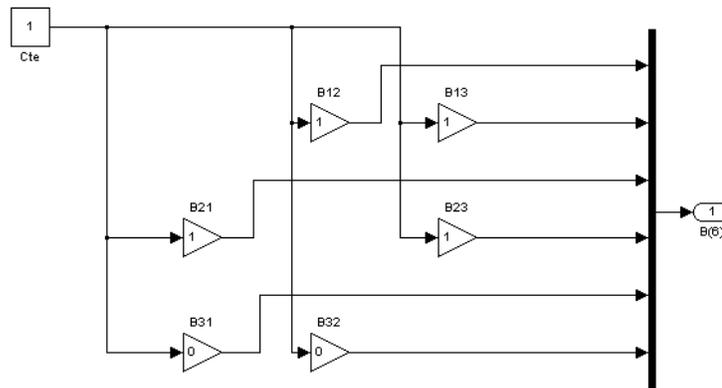


Figura 59. Asignación de los parámetros beta para arreglos de tres sistemas.

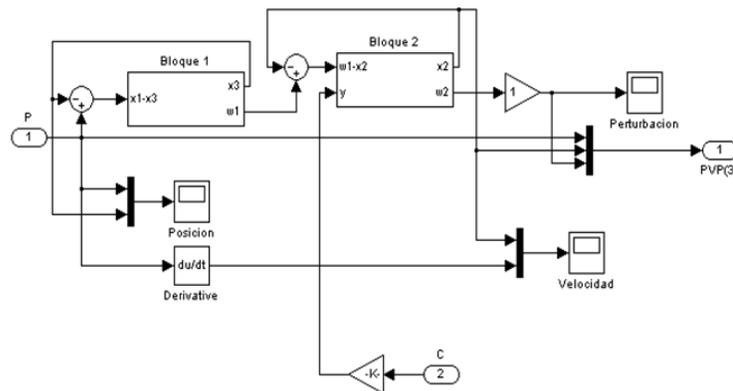


Figura 60. Esquema general del algoritmo del observador.

En la figura 62, se muestra el sub-bloque, en donde se modificaban las ganancias proporcional y derivada de los controladores para arreglos de tres sistemas.

En la figura 63 se muestra el esquema general para arreglos de cinco sistemas.

En la figura 64 se muestra el bloque de los parámetros β para arreglos de Cinco sistemas, el cual muestra un gran número de parámetros posibles de modificar en com-

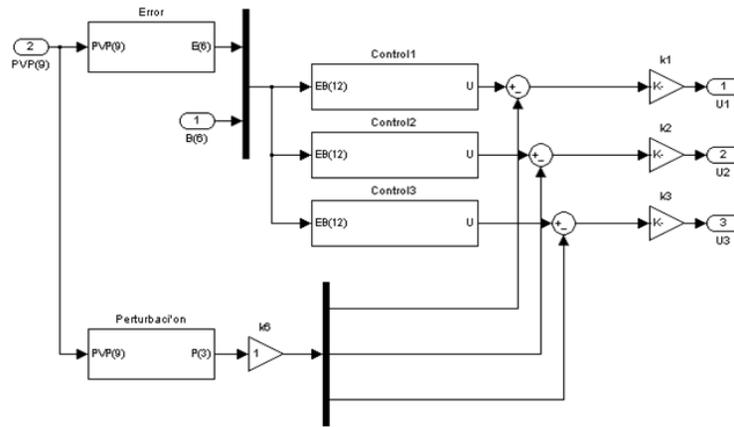


Figura 61. Esquema de control para arreglos de tres sistemas.

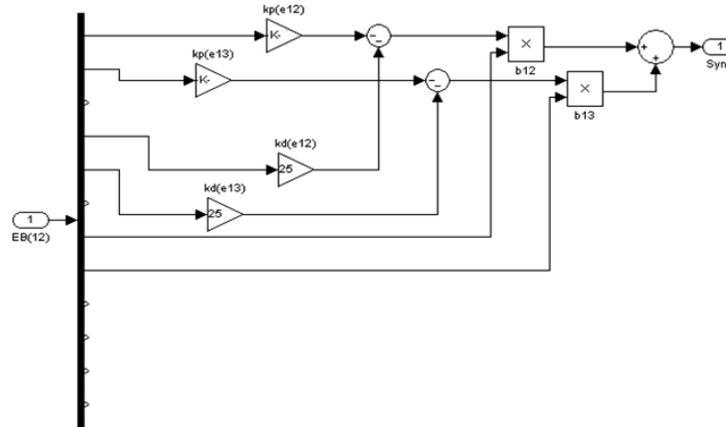


Figura 62. Asignación de las ganancias de control para arreglos de tres sistemas.

paración al de tres sistemas.

En la figura 65, se muestra el bloque encargado de calcular las señales de control utilizadas en arreglos de cinco sistemas.

En la figura 66, se muestra el sub-bloque, en donde se modificaban las ganancias proporcional y derivativa de los controladores para arreglos de cinco sistemas.

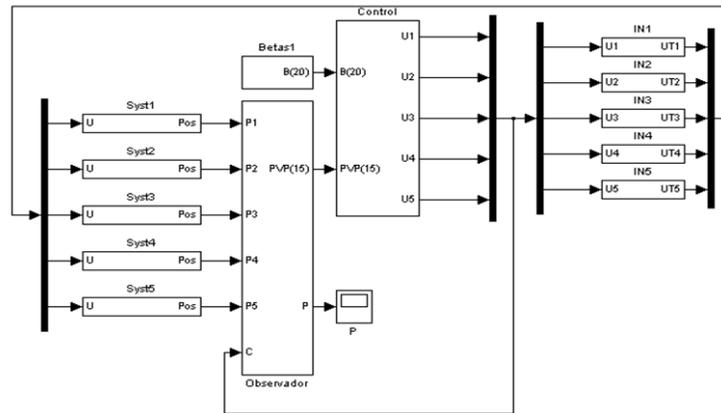


Figura 63. Esquema general de la programación del algoritmo para arreglos de cinco sistemas.

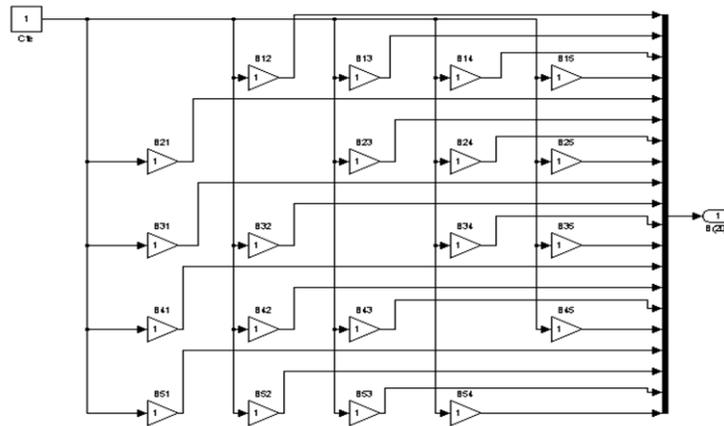


Figura 64. Asignación de los parámetros beta para arreglos de cinco sistemas.

Debido a que al incrementar el número de sistemas dentro del algoritmo, también se necesitaba de más capacidad, tanto de la memoria de la computadora, como de la capacidad de la tarjeta de adquisición de datos, se decidió dividir esta carga de trabajo en distintas computadoras y distintas tarjetas, esto para arreglos de mayor número de sistemas físicos. En la figura 67, se muestra el diagrama de como se realizó la implementación para los experimentos de arreglos de tres sistemas. Aquí se utilizó una sola

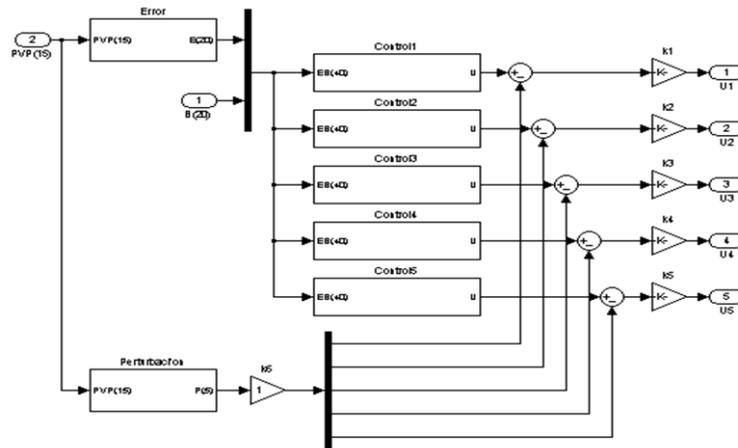


Figura 65. Esquema de control para arreglos de cinco sistemas.

tarjeta de adquisición de datos y un solo computador.

En la figura 68, se muestra el diagrama de como se realizó la implementación para los experimentos de arreglos de cinco sistemas. Aquí se utilizaron dos tarjetas de adquisición de datos y dos computadores. Un computador fungía como maestro del otro computador, pero cada computador con su arreglo de sistemas.

En la figura 69, se muestra el diagrama de como se realizó la implementación para los experimentos de arreglos de siete sistemas. Aquí se utilizaron tres tarjetas de adquisición de datos y tres computadores. Para estos experimentos un computador se encargaba de ser el maestro, y los otros dos computadores eran esclavos. Sin embargo aún así se podían conseguir varios tipos de configuraciones diferentes de arreglos.

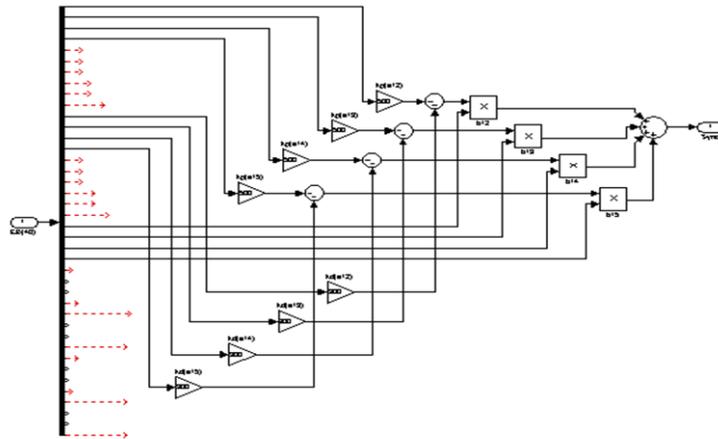


Figura 66. Asignación de las ganancias de control para arreglos de cinco sistemas.

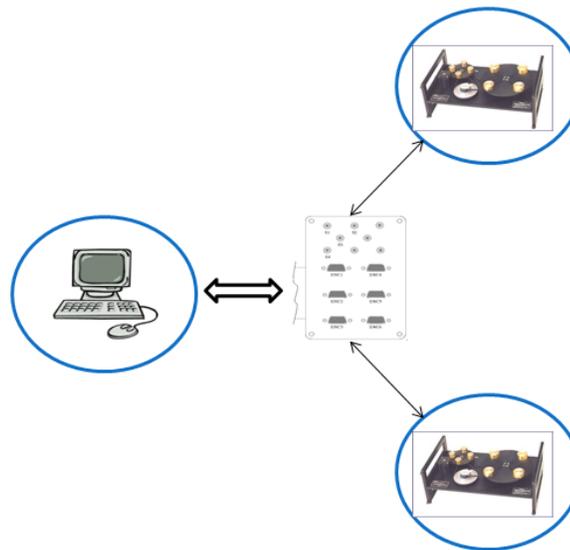


Figura 67. Implementación para arreglos de tres sistemas.

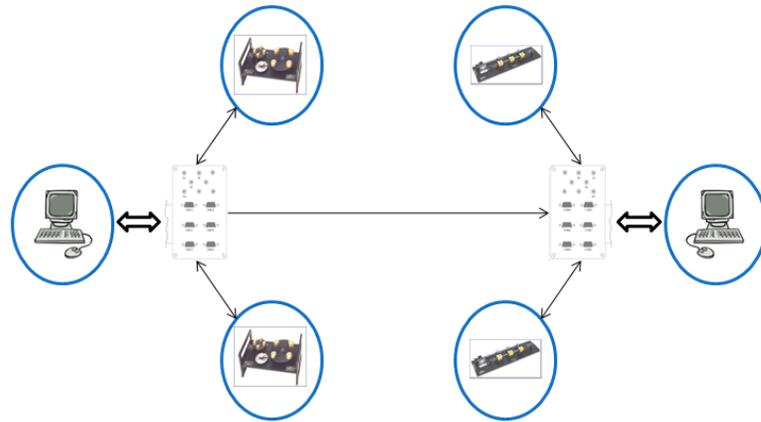


Figura 68. Implementación para arreglos de cinco sistemas.

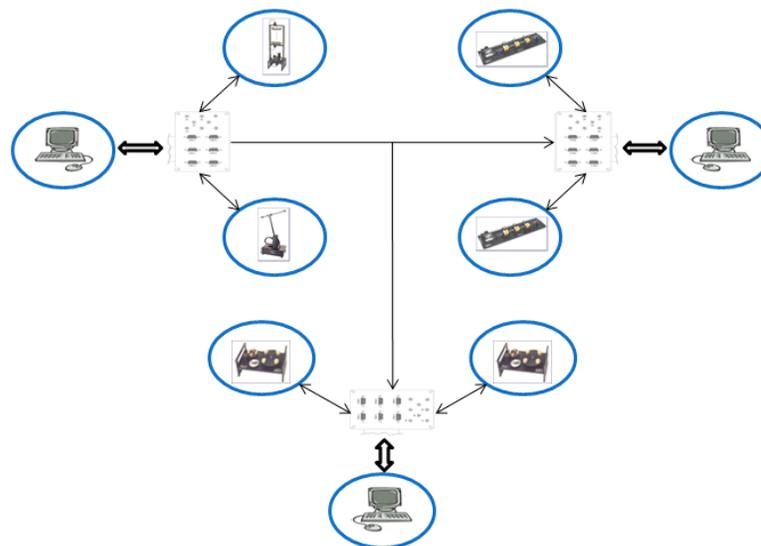


Figura 69. Implementación para arreglos de siete sistemas.