

TESIS DEFENDIDA POR

**Abimael Eliaquim Salcedo García**

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

*Director del Comité*

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

*Miembro del Comité*

---

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

*Miembro del Comité*

---

Dr. David Rosas Almeida

*Miembro del Comité*

---

Dr. Roberto Conte Galván

*Coordinador del programa de  
posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*

---

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

*Director de Estudios de Posgrado*

10 de Agosto de 2011

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

---

**EL DIAGRAMA DE FEIGENBAUM COMO CRITERIO DE  
APLICACIÓN DEL CONTROL RETROALIMENTADO CON  
RETARDO PARA UNA CLASE DE SISTEMAS CAÓTICOS**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

**ABIMAEL ELIAQUIM SALCEDO GARCÍA**

Ensenada, Baja California, México, Agosto de 2011

**RESUMEN** de la tesis de **ABIMAEEL ELIAQUIM SALCEDO GARCÍA**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, Agosto de 2011.

**EL DIAGRAMA DE FEIGENBAUM COMO CRITERIO DE APLICACIÓN DEL CONTROL RETROALIMENTADO CON RETARDO PARA UNA CLASE DE SISTEMAS CAÓTICOS**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de Tesis

El control retroalimentado con retardo, llamado control de Pyragas, es un método muy utilizado para estabilizar órbitas periódicas inestables (OPI's) empotradas en atractores caóticos. El control tiene una estructura muy simple y no modifica los conjuntos invariantes del sistema, por lo que la señal de control, en estado estacionario, es de pequeña magnitud.

Esta técnica presenta una restricción fundamental que impide su aplicación, llamada restricción del número impar de multiplicadores de Floquet, que establece que este controlador no puede estabilizar OPI's si el sistema tiene un número impar de multiplicadores de Floquet mayores a uno. Sin embargo, el cálculo exacto de los multiplicadores de Floquet no es trivial, dada la necesidad de resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema y calcular explícitamente las OPI's.

En este trabajo se propone el uso del diagrama de Feigenbaum de un sistema caótico para establecer una posible relación entre algunas características del mismo con la restricción anterior. Dado que estos diagramas pueden obtenerse numéricamente con una resolución arbitraria, ofrecen un medio práctico que permite predecir con éxito la posibilidad o imposibilidad de aplicación de esta técnica de control para suprimir el comportamiento caótico.

La técnica propuesta es aplicada y comprobada con diversos modelos de sistemas caóticos, ilustrándose la aplicación de este controlador cuando la inspección del diagrama de Feigenbaum permite predecir una aplicación exitosa. Cuando el diagrama establece la no posibilidad de aplicación, se propone un controlador discontinuo, diseñado mediante el método de la función descriptiva para suprimir al caos y generar un comportamiento periódico, estructuralmente robusto.

**Palabras Clave:** Multiplicadores de Floquet, control retroalimentado con retardo, diagrama de Feigenbaum, control discontinuo, función descriptiva.

**ABSTRACT** of the thesis presented by **ABIMAEEL ELIAQUIM SALCEDO GARCÍA**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of MASTER OF SCIENCE in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS with orientation in INSTRUMENTATION AND CONTROL. Ensenada, Baja California, August 2011.

**THE FEIGENBAUM DIAGRAM AS A TOOL FOR PREDICTING THE APPLICABILITY OF THE DELAYED FEEDBACK CONTROL TO A CLASS OF CHAOTIC SYSTEMS**

The delayed feedback control, called Pyragas-type control, is widely used to stabilize unstable periodic orbits (UPO's) embedded in chaotic attractors. This controller has a simple structure and it does not modify the system invariant sets; in consequence, the control signal has a small magnitude in steady state.

This technique presents a fundamental restriction, called the odd-number of Floquet multipliers greater than one, that avoids its application to systems that satisfy these restriction. However, the exact calculation of Floquet multipliers is not simple, given the need to analytically solve the differential equations modeling the system and explicitly calculate the UPO's.

In this work we propose the use of Feigenbaum diagrams of chaotic systems to establish a possible relationship between some of its characteristics with the mentioned restriction. Given that these diagrams can be obtained numerically and with an arbitrary resolution, they offer a practical tool that permits a successful prediction of the applicability, or the inapplicability, of this control technique to suppress the chaotic behavior.

The proposed technique is applied to several models of chaotic systems, showing the application of this type of controllers when the analysis of the Feigenbaum diagram predicts a successful application. When this analysis predicts the inapplicability of the Pyragas technique, then a discontinuous controller is proposed. This controller is designed using the descriptive function method to suppress the chaotic behavior and generate a periodic and robust oscillation.

**Keywords:** Floquet multipliers, delayed control, Feigenbaum diagram, discontinuous control, descriptive function.

*A Dios y mi familia . . .*

# Agradecimientos

A mis padres, Ventura y Amelia, y a mi hermana Azahalia por el cariño y apoyo incondicional que se siempre me han brindado.

A mi novia Victoria por su cariño, comprensión, por apoyarme en todo momento y por ser una persona maravillosa.

Al Dr. Joaquín Álvarez por el gran apoyo y por sus tan valiosos comentarios que me ayudaron a terminar este trabajo. También quiero agradecer a los miembros del comité Dr. Alejandro Márquez, Dr. David Rosas, Dr. Carlos Rrizuela por su guía y su invaluable participación en este trabajo.

A mis compañeros de cubículo: Rodrigo, Irak y David por su valiosa y sincera amistad que me brindaron.

A los integrantes de Los Tulicanos: David, Irak, Rdrigo, Iveth, Pedro, Guadalupe (el lupe), Paúl, Hirata, Eduardo (Lalo), Aaron, Alejandro (Tampico), Rigo Jauregui, Karen, Perla, Chiristian, Edwin, Lyly, Raúl, Elizabeth, Brenda, Rebeca, rigo Villavicencio, Alejandro Galaviz, Josué (Cheche), Anita, Araceli, Gaby, Karla y Luis (Taylor).

A Melissa y Mariela por brindarme una sincera amistad.

A CICESE por permitirme estudiar en esta institución

Al CONACyT y proyecto de investigación por su apoyo económico.

# Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
<b>I. Introducción</b>	<b>1</b>
I.1 Antecedentes . . . . .	1
I.1.1 Sistemas caóticos . . . . .	2
I.1.2 Supresión de caos . . . . .	8
I.2 Planteamiento del problema . . . . .	11
I.3 Objetivo . . . . .	12
<b>II. Preliminares Matemáticos</b>	<b>14</b>
II.1 Estabilización de órbitas periódicas . . . . .	14
II.1.1 Control retroalimentado con retardo o control de Pyragas . . . . .	14
II.1.2 Limitación del número impar . . . . .	15
II.2 Teoría de Floquet . . . . .	16
II.3 Bifurcaciones . . . . .	20
II.3.1 Teoría de bifurcación . . . . .	20
II.3.2 Bifurcaciones en órbitas periódicas . . . . .	21
II.4 Transición al caos . . . . .	26
II.4.1 Escenario de duplicación de período . . . . .	27
II.4.2 Escenario de cuasi-periodicidad . . . . .	27
II.4.3 Intermitencia . . . . .	30
II.5 Diagrama de Feigenbaum . . . . .	34
II.6 Función descriptiva . . . . .	34
II.6.1 Aplicación del método de la función descriptiva . . . . .	35
II.6.2 Criterio de estabilidad de Nyquist y su extensión . . . . .	38
<b>III. Caracterización de sistemas caóticos</b>	<b>42</b>
III.1 Sistemas a considerar . . . . .	42

## Contenido (continuación)

	Página
III.2 Establecimiento de hipótesis . . . . .	43
III.3 Argumentación de la hipótesis . . . . .	45
III.3.1 Análisis de los sistemas en lazo abierto . . . . .	45
III.4 Conclusiones . . . . .	66
<b>IV. Propuesta de control</b>	<b>68</b>
IV.1 Diseño y análisis de la señal de control discontinuo . . . . .	68
IV.1.1 Procedimiento de diseño . . . . .	68
IV.2 Aplicación de la señal de control . . . . .	70
IV.2.1 Control de un sistema de Sprott . . . . .	71
IV.2.2 Control de un sistema de control integral combinado con un polinomio cúbico . . . . .	83
IV.3 Conclusiones . . . . .	97
<b>V. Resultados experimentales</b>	<b>99</b>
V.1 Control retroalimentado con retardo . . . . .	99
V.2 Control discontinuo . . . . .	105
V.3 Conclusiones . . . . .	107
<b>VI. Conclusiones</b>	<b>110</b>
VI.1 Trabajo a futuro . . . . .	111
<b>REFERENCIAS</b>	<b>112</b>

# Lista de Figuras

Figura		Página
1	Sensibilidad a las condiciones iniciales. Trayectoria del sistema caótico (Rossler) para dos condiciones iniciales diferentes. . . . .	3
2	Espectro de frecuencia del sistema caótico de Duffing. . . . .	4
3	Atractor del sistema de Rossler. . . . .	5
4	Atractor del sistema de Chua. . . . .	6
5	Atractor de un sistema de control integral. Izquierda, con una función saturación. Derecha, con un polinomio cúbico. . . . .	7
6	Atractor de un sistema de Sprott. Izquierda, con la función $\min(x, 0)$ . Derecha, con la función signo $Sign(x)$ . . . . .	7
7	Diagrama a cuadros del control de Pyragas en un sistema caótico . . .	16
8	Posibles casos para las bifurcaciones. . . . .	22
9	Posibles escenarios de la bifurcación transcítica, a) supercrítica, b) subcrítica.	23
10	Bifurcación de rompimiento de simetría, a) supercrítica, b) subcrítica. .	24
11	Bifurcación del tipo Cyclic-Fold. . . . .	25
12	Mapa logístico. . . . .	31
13	Mapa logístico. . . . .	32
14	Mapa logístico. . . . .	33
15	Diagrama de Feigenbaum del mapa logístico. . . . .	34
16	Sistema no lineal. . . . .	35
17	Sistema en lazo cerrado. . . . .	39
18	Sistema en lazo cerrado. . . . .	41
19	Atractor del sistema de Rossler. . . . .	46
20	Diagrama de Feigenbaum del sistema de Rossler. . . . .	47
21	Atractor del sistema de Rossler en una órbita 1-periódica. . . . .	48
22	Evolución de la señal de control. . . . .	49

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
23	Evolución en el tiempo del estado de salida. . . . .	50
24	Atractor del sistema de control con una función saturación. . . . .	51
25	Diagrama de Feigenbaum del sistema de control con una función saturación. . . . .	52
26	Atractor del sistema de control con una función saturación, órbita 1- periódica. . . . .	53
27	Señal de control para el sistema de control integral con una función saturación. . . . .	54
28	Evolución del estado en el tiempo de la salida del sistema. . . . .	54
29	Atractor del sistema de control con un polinomio cúbico. . . . .	55
30	Diagrama de Feigenbaum del sistema de control con un polinomio cúbico. . . . .	56
31	Evolución de la salida del sistema. . . . .	58
32	Señal de control retroalimentado con retardo. . . . .	59
33	Atractor del sistema de Sprott con la función mínimo. . . . .	60
34	Diagrama de Feigenbaum del sistema de Sprott con la función mínimo. . . . .	61
35	Atractor del sistema de Sprott con la función mínimo, órbita 1- periódica. . . . .	62
36	Señal de control en el sistema de Sprott. . . . .	63
37	Evolución en el tiempo de la salida del sistema. . . . .	64
38	Atractor del sistema de Sprott con función signo. . . . .	65
39	Diagrama de Feigenbaum del sistema de Sprott con función signo. . . . .	66
40	Señal de control retroalimentado con retardo. . . . .	67
41	Evolución en el tiempo de la salida del sistema. . . . .	67
42	Diagrama a cuadros del sistema controlado. . . . .	69
43	Forma de Lur'e. . . . .	70
44	Atractor del sistema de Sprott. . . . .	72
45	Gráfica de Nyquist. . . . .	76

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
46	Gráfica de Nyquist. . . . .	81
47	Salida del sistema $x_1(t)$ . . . . .	83
48	Control discontinuo, $u_0(t)$ . . . . .	84
49	Atractor caótico del sistema del control integral combinado con un polinomio cúbico. . . . .	85
50	Diagrama de Nyquist del sistema de control integral con un polinomio cúbico. . . . .	88
51	Grafica de Nyquist del sistema controlado. . . . .	94
52	Amplificación de la gráfica de Nyquist del sistema controlado. . . . .	96
53	Salida del sistema $z_1(t)$ . . . . .	97
54	Control discontinuo, $u_0(t)$ . . . . .	98
55	Esquemático del circuito de Sprott. . . . .	99
56	Atractor caótico del circuito de Sprott. . . . .	101
57	Evolución en el tiempo de $x(t)$ . . . . .	102
58	Estado de salida del circuito de Sprott con control. . . . .	103
59	Control retroalimentado con retardo. . . . .	103
60	Atractor periódico del circuito de Sprott. . . . .	104
61	Esquemático del circuito de Sprott. . . . .	105
62	Atractor caótico del circuito de Sprott. . . . .	106
63	Evolución en el tiempo de $x_1(t)$ . . . . .	107
64	Señal del control discontinuo $u_0(t)$ . . . . .	108
65	Evolución en el tiempo de $x_1(t)$ . . . . .	108
66	Atractor periódico. . . . .	109

# Capítulo I

## Introducción

### I.1 Antecedentes

La investigación matemática del caos se remonta al menos a 1890, cuando el matemático francés, Henri Poincaré, estudió la estabilidad del sistema solar (Peitgen *et al.*, 2004). Él se preguntaba si los planetas continuarían indefinidamente en sus órbitas actuales, o si podría uno de ellos salir de la órbita y vagar eternamente en la oscuridad o chocar con el sol. No pudo obtener una respuesta a su pregunta, pero creó un nuevo método analítico, la geometría de la dinámica. Poincaré, al momento de estudiar el problema de las órbitas de tres cuerpos celestes que experimentaban atracción gravitacional mutua, y considerando que las órbitas emergían de un conjunto de puntos iniciales, pudo encontrar que las órbitas tenían un comportamiento muy complicado, conocido ahora como caos.

Después al trabajo realizado por Henri Poincaré surgieron otros trabajos importantes que se deben mencionar ya que tuvieron una gran aportación en el conocimiento y entendimiento de la dinámica caótica. Tal como el de G. Birkhoff, en los años veinte, propuso al proceso iterativo como una manera más simple de entender el comportamiento dinámico. También en la década de los 60's, el matemático Stephen Smale formuló un plan para clasificar todos los comportamientos dinámicos típicos. Aquí el comportamiento caótico se consideró como un fenómeno normal dentro del comportamiento dinámico. Al mismo tiempo, el matemático y meteorólogo estadounidense E. N. Lorenz, tratando de simular el efecto de convección térmica en la atmósfera, observó que este simple modelo meteorológico exhibía lo que hoy es llamada sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto significa que el comportamiento del modelo meteorológico era impredecible a largo plazo.

Lo anterior llevó a que la comunidad científica se interesara más por el compor-

tamiento dinámico, realizando grandes contribuciones que nos han ayudado a comprender más la dinámica caótica. En la siguiente sección se da un breve repaso de lo que se entiende por movimiento caótico, y las propiedades fundamentales con las que cuenta un sistema caótico.

### I.1.1 Sistemas caóticos

El término *caos* es utilizado habitualmente para referirse a lo impredecible o para acontecimientos aparentemente aleatorios. Este mismo término se utiliza en sistemas dinámicos para referirse a sistemas cuyo comportamiento parece impredecible e irregular.

Aunque no existe una definición precisa de sistemas caóticos, se pueden definir como aquellos sistemas en los cuales su trayectoria en estado estacionario no se estabiliza en un punto de equilibrio, órbita periódica u órbita cuasi-periódica, y además permanece contenida, en todo momento, en un volumen finito en el espacio de estado. Además, las trayectorias de estos sistemas forman figuras geométricas muy complejas en el espacio de estado que son conocidas como atractores extraños o atractores caóticos.

Para tener más claro lo que es un sistema caótico, damos tres propiedades fundamentales que describen su comportamiento (Devaney y Straffin, 1992).

- ***Sensibilidad a condiciones iniciales***

Considere un sistema dinámico de tiempo continuo con dos condiciones iniciales ligeramente diferentes,  $x_*(0) = x_0$  y  $x'_*(0) = x_0 + \varepsilon_0$ , donde  $\varepsilon_0$  es una cantidad muy pequeña. A partir de estas dos condiciones iniciales el sistema produce una trayectoria para cada condición inicial,  $x_*(t)$  y  $x'_*(t)$ , respectivamente. También, considere una función de medición  $\varepsilon(t) = x'_*(t) - x_*(t)$ , con  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ . Entonces, si se tiene que para cuando  $|\varepsilon(0)| \rightarrow 0$ , y conforme  $t$  aumenta  $|\varepsilon(t)|$  crece en promedio y las trayectorias permanecen acotadas, se dice que el sistema dinámico presenta sensibilidad a las condiciones iniciales. En la Figura 1 se muestra la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema caótico. Se puede apreciar cómo dos condiciones iniciales ligeramente diferentes ( $x_0 = 0$  y  $x_0 + \varepsilon_0 = 0.05$ ) divergen entre sí conforme aumenta el tiempo.

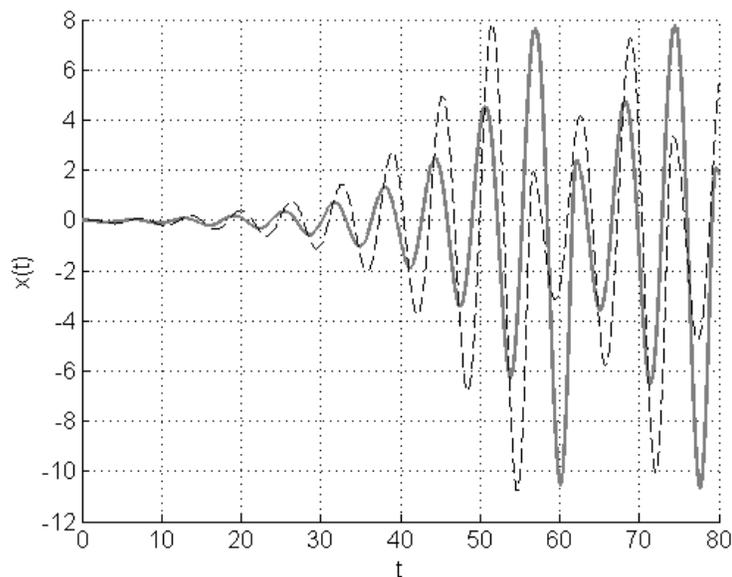


Figura 1: *Sensibilidad a las condiciones iniciales. Trayectoria del sistema caótico (Rossler) para dos condiciones iniciales diferentes.*

- ***Mezclado***

La propiedad de mezclado se refiere a que en la dinámica caótica del sistema existe un conjunto de órbitas densas. Para explicar con más claridad qué es un conjunto de órbitas densas, primero daremos la siguiente definición.

**Definición 1.1.-** *Suponga que  $A$  es un conjunto y que  $B$  es un subconjunto de  $A$ . Decimos que  $B$  es denso en  $A$  si, para cualquier punto  $a$  que pertenece a  $A$  hay un punto  $b$  en el subconjunto  $B$  arbitrariamente cercano a  $a$ .*

Entonces, con órbita densa, nos referimos a que existe una órbita tal que visitará casi todos los puntos del atractor, arbitrariamente cerca.

- ***Infinitud de órbitas periódicas inestables***

Otra característica importante que presentan los sistemas caóticos es que éstos cuentan con un número infinito de órbitas periódicas.

Para visualizar esta propiedad es necesario acudir a unas herramientas matemáticas, por ejemplo, el espectro de frecuencia. Los espectros de frecuencia de las

señales provenientes de sistemas caóticos son bastantes diferentes a las de los sistemas periódicos y de los cuasi-periódicos. Las señales producidas por los sistemas caóticos tienen un amplio espectro de frecuencia y son continuos. Además, frecuentemente contiene picos que indican las frecuencias predominantes de la señal caótica. Un ejemplo de espectro de frecuencia de un sistema caótico se muestra en la Figura 2. Se puede apreciar cómo en un intervalo de frecuencias, el sistema tiene una cantidad infinita de órbitas periódicas.

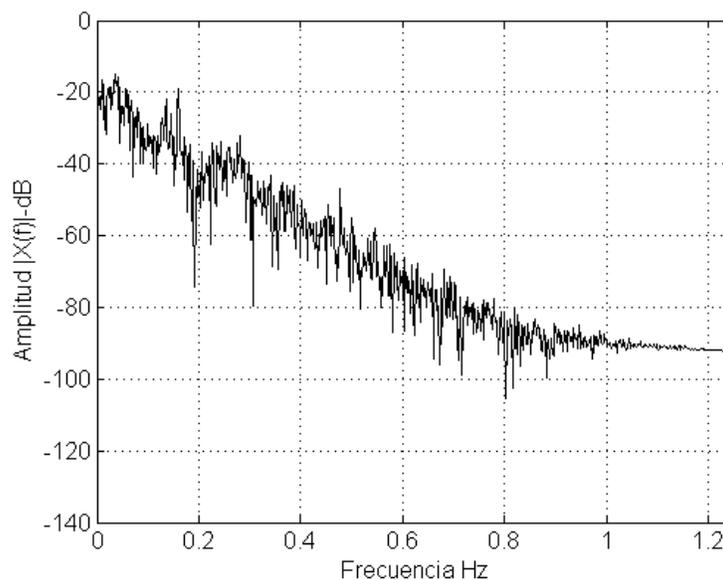


Figura 2: *Espectro de frecuencia del sistema caótico de Duffing.*

Otra herramienta matemática que nos permite visualizar esta propiedad es el diagrama de Feigenbaum. Éste presenta de forma visual el proceso de cómo un sistema pasa de un comportamiento periódico a uno caótico. En la Sección II.5 se explica lo que es un diagrama de Feigenbaum.

Con la breve descripción de lo que es un sistema caótico y con el conocimiento de las propiedades fundamentales, tenemos una idea más clara de lo que es un sistema caótico. Para complementar esto se mostrarán algunos ejemplos.

## Ejemplos de sistemas caóticos

A continuación se muestran las trayectorias de algunos sistemas caóticos. Se podrá apreciar que las trayectorias permanecen acotadas y no son periódicas.

Iniciamos con el sistema de Rossler, que dentro de los sistemas caóticos continuos tiene una de las estructuras más simples. En la Figura 3 se ilustra su comportamiento caótico.

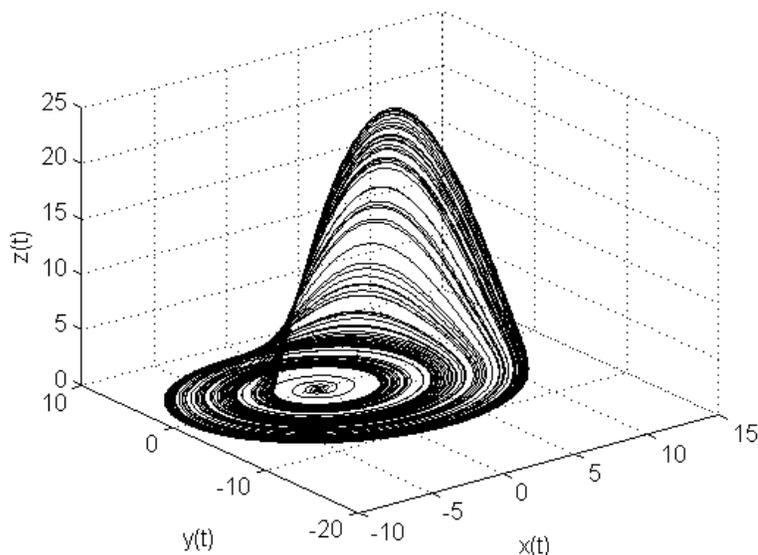


Figura 3: *Atractor del sistema de Rossler.*

El circuito de Chua, (Chua *et al.*, 1993), es otro sistema caótico; en la Figura 4 se muestra una trayectoria típica. La facilidad de construcción y la existencia de un modelo teórico simple y exacto lo han hecho un sistema útil para estudiar el comportamiento caótico de una forma experimental.

En (Alvarez *et al.*, 1997), consideran sistemas de control muy simples, los cuales bajo ciertas condiciones pueden presentar un comportamiento caótico. Los controladores que analizan son el control proporcional y el control integral, combinados con una función saturación, y el controlador integral con un polinomio cúbico, los cuales son aplicados a un sistema lineal de segundo orden. En la Figura 5 se muestran el atractor del control

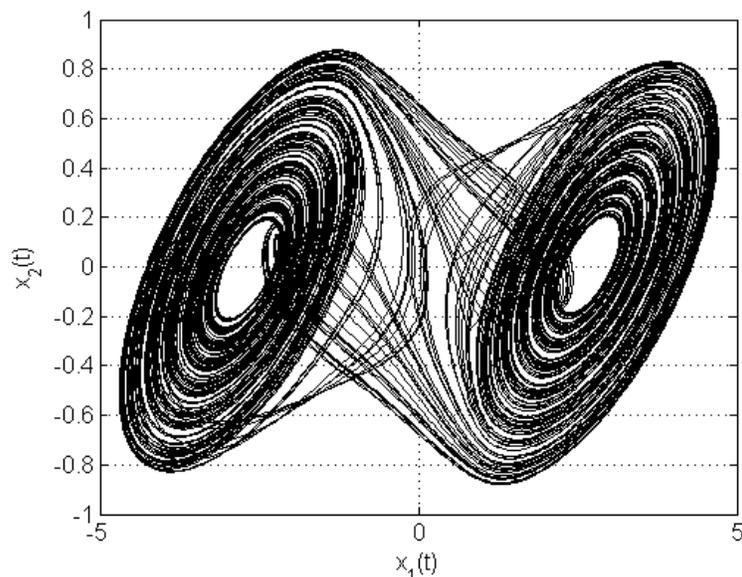


Figura 4: *Atractor del sistema de Chua.*

integral con la función saturación (izquierda) y con el polinomio cúbico (derecha).

Otro sistema caótico es el circuito de Sprott, (Sprott *et al.*, 2000). A diferencia de la mayoría de los circuitos caóticos, el circuito de Sprott no utiliza multiplicadores análogos, sino que únicamente utiliza resistencias, capacitores, diodos y amplificadores operacionales, haciendo a éste muy sencillo de construir. La ecuación que describe al circuito de Sprott es de una estructura simple, debido a que sólo cuenta con un componente no lineal y éste solamente depende de una variable de estado.

En la Figura 6 se muestran dos atractores del circuito de Sprott con dos funciones no lineales diferentes. Del lado izquierdo se muestra el caso cuando su elemento no lineal es la función mínimo y del lado derecho cuando el elemento no lineal es la función signo.

Los ejemplos de sistemas caóticos que se han mencionado en esta sección son descritos con más detalle en el Capítulo III.

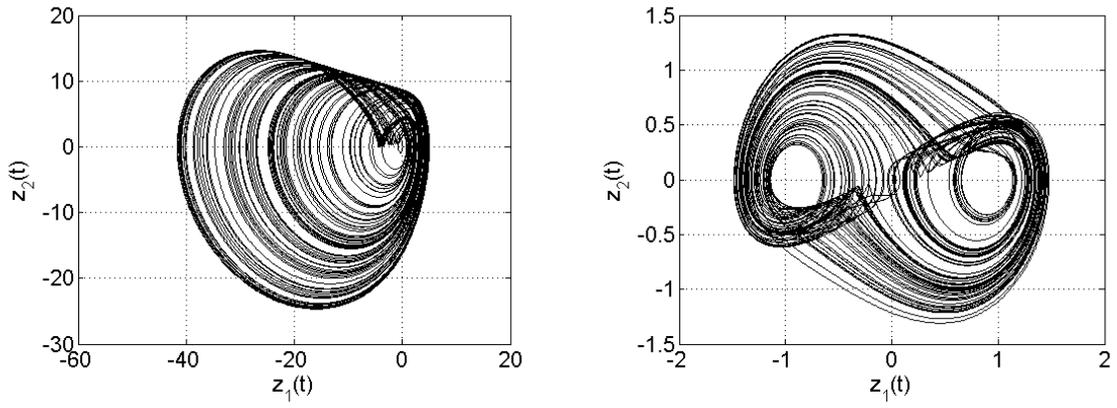


Figura 5: Atractor de un sistema de control integral. Izquierda, con una función saturación. Derecha, con un polinomio cúbico.

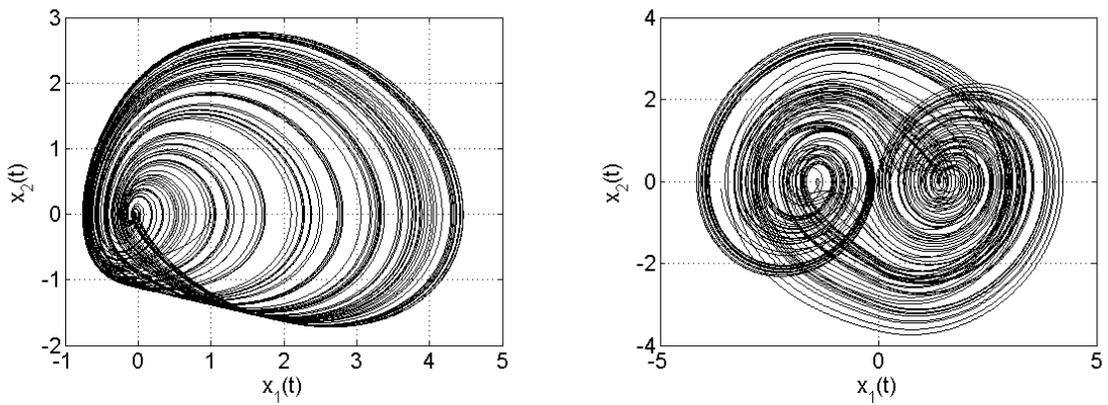


Figura 6: Atractor de un sistema de Sprott. Izquierda, con la función  $\min(x, 0)$ . Derecha, con la función signo  $\text{Sign}(x)$ .

### I.1.2 Supresión de caos

Conforme se han estudiado las dinámicas caóticas, se ha llegado a la conclusión de que en algunos casos, dependiendo del objetivo, es conveniente tener un comportamiento caótico, y en otros casos conviene tener un comportamiento regular, no caótico. Esto ha llevado a definir dos grandes temas de investigación: el control (supresión) del caos y el anticontrol (generación) del caos.

#### Objetivo de control y anticontrol

En esta sección se define, de una forma muy general, cuales son los objetivos del control y del anticontrol de caos.

- ***Anticontrol del caos***

El objetivo del anticontrol de caos es inducir el caos, de una forma controlada, a sistemas no caóticos. Esta tarea puede ser realizada, ya sea aplicando un control de manera directa con una señal externa, o por medio de un control retroalimentado.

Este objetivo ha traído posibles aplicaciones en algunos sistemas mecánicos, electrónicos de telecomunicaciones, en química, biología, etc. Un ejemplo de este objetivo puede ser la codificación de una señal en un sistema de comunicación segura.

- ***Control del caos***

El objetivo del control de caos es suprimir el comportamiento caótico del sistema, el cual es irregular y aleatorio, y llevar su comportamiento a uno regular. El objetivo de control más común en la supresión del caos es estabilizar al sistema en una órbita periódica.

El comportamiento caótico por lo general es un efecto no deseado, ya que éste puede reducir considerablemente el tiempo de vida de dispositivos mecánicos y electrónicos o podría causar grandes daños en los sistemas.

Como lo que nos interesa en esta tesis es la supresión del caos, nos enfocaremos, en la siguiente sección, en dar algunos métodos importantes del control de caos.

## Método de control automático

A continuación daremos una breve explicación de los tres principales métodos sobre control (supresión) de caos.

- ***Control clásico***

En la teoría de control clásico, el problema del control del caos, puede ser formulado como un problema de seguimiento de trayectorias.

Entonces, la idea del control clásico, es llevar al sistema hacia un punto (o posición), o hacer que el sistema siga una trayectoria periódica. Para realizar este control es necesario mantener una relación entre la salida del sistema y la entrada de referencia, y usar a esta señal como un medio de control.

Los siguientes dos métodos se basan en la idea de la estabilización de órbitas periódicas inestables (OPI's) incrustadas en un atractor caótico. Ésto se alcanza haciendo una pequeña perturbación dependiente del tiempo, en la forma de retroalimentación a un parámetro accesible del sistema. Estos dos métodos toman la presencia del caos como una ventaja, debido al número infinito de diferentes OPI's incrustadas dentro del atractor caótico.

- ***OGY***

El método de control OGY (Ott *et al.*, 1990), llamado así por sus autores: Ott, Grebogi y York, introduce dos ideas:

- 1.- Usar el modelo discreto del sistema basado en la linealización del mapa de Poincaré para diseñar el controlador.
- 2.- Usar la propiedad de mezclado del movimiento caótico y aplicar la acción de control solamente en los instantes cuando el movimiento regrese a la vecindad del estado o de la órbita deseada.

La idea del método de OGY es de la siguiente manera. Considere el sistema caótico descrito por la ecuación de estado:

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^1$ . Para  $u = 0$  se establece una superficie  $S$  (sección de Poincaré), que se define sobre una función escalar suave  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$$

que es intersectada transversalmente por una órbita periódica inestable,  $x_*(t)$  en un punto  $x_0 = x_*(0)$ . Considere el mapa  $x \rightarrow P(x, u)$ , donde  $P(x, u)$  es el primer punto del regreso a  $S$  de la solución de (1) con entrada constante iniciada en  $x$ . Al mapa  $x \rightarrow P(x, u)$ , se le llama mapa de Poincaré controlado. Este mapa está bien definido, por lo menos en una vecindad del punto  $x_0$ , correspondiente a la órbita periódica  $x_*(t)$ .

Haciendo varias iteraciones del mapa, podemos definir un sistema de tiempo discreto

$$x_{k+1} = P(x_k, u_k) \quad (2)$$

donde  $x_k = x(t_k)$ ,  $t_k$  es el tiempo del  $k$ -ésimo cruce,  $u_k = u(t)$  para  $t_k < t < t_{k+1}$ . El siguiente paso del diseño del control es aproximar al sistema original (1), por uno linealizado

$$\tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + Bu_k \quad (3)$$

donde  $\tilde{x}_{k+1} = x_k - x_0$  y se encuentra un control estabilizante. Un punto clave del método es aplicar el control solamente en una vecindad de la trayectoria deseada mediante la introducción de una zona muerta exterior (Ott *et al.*, 1990).

- ***Control retroalimentado con retardo (Pyragas)***

Este método de control, expuesto por primera vez por Pyragas (1992), propone una perturbación de la forma:

$$u(t) = K [x(t) - x(t - \tau)] \quad (4)$$

donde  $\tau$  es un tiempo de retardo. Si este tiempo coincide con el período de una OPI,  $\tau = T$ , entonces el control  $u$  llega a ser cero para la solución del sistema (1) correspondiente a esta OPI. Esto significa que el control de la forma (4) no cambia la solución del sistema (1), correspondiente a la OPI. Si se elige un valor apropiado para  $K$ , la ganancia del control, se puede lograr la estabilización.

## I.2 Planteamiento del problema

La supresión del caos, como se mencionó anteriormente, se puede plantear como un problema de seguimiento de trayectorias, siendo las OPI's la señal de referencia.

En la práctica, obtener una expresión de manera analítica y exacta de las OPI's es muy complicado, si no es que imposible. Ésto se debe a que las ecuaciones diferenciales, las cuales describen el comportamiento del sistema, cuentan con elementos no lineales y son al menos de tercer orden.

La problemática de obtener una expresión analítica y exacta de las OPI's se evita utilizando cualquiera de estas dos metodologías, el control de OGY y el control retroalimentado con retardo. Como se mencionó en la sección anterior, ambos métodos son apropiados para estabilizar sistemas caóticos en órbitas periódicas que se encuentren contenidas en el atractor caótico debido a que aprovechan la presencia de un número infinito de diferentes OPI's. Por lo tanto, existe un amplio margen de órbitas periódicas en las que pueden estabilizar.

Aunque ambos métodos estabilizan a órbitas periódicas propias del sistema, se decidió utilizar el control retroalimentado con retardo debido a las bondades que ofrece con respecto al control de OGY. Una de estas bondades es que con el control retroalimentado con retardo se tiene que la señal de control es aplicada de forma continua utilizando a los estados del sistema en el tiempo presente, así como los estados retardados en el tiempo de dicho sistema. Solamente una línea de retraso es requerida para este control. Mientras que con OGY se tiene la problemática de tener que proponer un mapa de Poincaré por el que pase la órbita periódica deseada y linealizar alrededor de ésta, llevándonos a trabajar con un modelo discreto lineal. Con esto se tiene menos control del sistema original, debido a que se trabaja con una aproximación local del sistema a estabilizar.

Por las razones mencionadas anteriormente se eligió utilizar el control retroalimentado con retardo. Sin embargo, esta metodología presenta problemas importantes. El primero de ellos es que el retardo debe coincidir con el período de la órbita a esta-

bilizar, o un múltiplo del mismo. Dado que no se conoce dicha órbita, el cálculo del retardo puede ser complicado. Algunas técnicas utilizan herramientas de optimización para dicho cálculo (Yu *et al.*, 2000); sin embargo, debe contarse con un buen modelo del sistema caótico para tener una buena aproximación de este parámetro. El segundo problema es que no existe un procedimiento sistemático para el cálculo de la matriz de ganancia del controlador,  $K$ . La sintonización debe hacerse, entonces, por métodos heurísticos. El tercer problema es que se requiere una medición del estado completo y la dimensión del control debe ser igual a la del estado. Por último, el problema más crítico de esta técnica es que no puede ser aplicada si se satisface la llamada *restricción de número impar de multiplicadores característicos mayores a uno* (Nakajima, 1997). Si se satisface esta condición, no existe entonces una matriz  $K$  y un parámetro  $\tau$  tal que el control (4) estabilice alguna órbita periódica. Estas son restricciones importantes que pueden volver inaplicable esta metodología.

### I.3 Objetivo

Las ventajas que presenta el control retroalimentado con retardo, lo han convertido en una metodología muy atractiva para la supresión del comportamiento caótico. Desafortunadamente, las desventajas mencionadas, hace que este control no sea aplicable a todos los sistemas caóticos. En particular, aún cuando puedan resolverse los tres primeros problemas mencionados, la restricción técnica del número impar de multiplicadores de Floquet vuelve inaplicable este método. En realidad, ésta debería ser la primera condición a ser analizada antes de pretender aplicar este método de control.

Sin embargo, el cálculo de los multiplicadores de Floquet no es una tarea sencilla por lo que es importante contar con alguna herramienta que ofrezca alguna información que proporcione cierta garantía de que este método pueda ser aplicado.

Entonces el objetivo es establecer un criterio que sea fácil de calcular y de visualizar, como el diagrama de Feigenbaum, de cuando es posible aplicar un control retroalimentado con retardo a un sistema caótico dado. En el caso de que este criterio no se satisfaga, se propone un procedimiento de diseño de control simple y sencillo, el cual considera técnicas de control discontinuo para intentar mejorar la robustez del con-

trol. Como objetivo de estudio, consideramos a los sistemas de Sprott, debido a su importancia y simplicidad en el estudio actual de sistemas caóticos sencillos.

## Capítulo II

### Preliminares Matemáticos

En este capítulo se presentan algunas definiciones y conceptos básicos que se manejan en este trabajo de tesis. Primero, en la Sección II.1, se introduce el control retroalimentado con retardo, también conocido como control de Pyragas, donde se explica su objetivo de control y la limitación de uso. En la Sección II.2 se presenta la teoría de Floquet, con la que se estudia la estabilidad de soluciones periódicas. Después de examinar las diferentes bifurcaciones que pueden sufrir las órbitas periódicas, Sección II.3, se estudia las diferentes rutas al caos y el tipo de comportamiento caótico que puede presentar un sistema, Sección II.4. También se presenta los diagramas de Feigenbaum, Sección II.5, la cual es una herramienta matemática con la que se pueden visualizar los estados estacionarios de un sistema y ver sus posibles comportamientos. Por último, en la Sección II.6, se describe el método de la función descriptiva.

#### II.1 Estabilización de órbitas periódicas

Considere un sistema dinámico no lineal de tiempo continuo,

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \tag{5}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ . Suponga que (5) se comporta caóticamente, y se desea estabilizar a una de sus órbitas periódicas inestable,  $x_*(t)$ , incrustadas en su atractor que cuente con un período mínimo de  $T$ . Es decir,  $x_*(t) = x_*(t+T)$ . Por lo tanto, el objetivo es estabilizar a la órbita periódica inestable y hacer que la trayectoria caótica  $x(t)$ , converja a  $x_*(t)$ .

##### II.1.1 Control retroalimentado con retardo o control de Pyragas

El control retroalimentado con retardo es un método simple y conveniente para estabilizar órbitas periódicas inestables incrustadas en un atractor caótico. Como se mencionó en el Capítulo I, este control convierte la presencia del caos en una ventaja, debido a

que en un sistema caótico, existe un número infinito de OPI's incrustadas en el atractor. Esto nos lleva a que el sistema pueda ser estabilizado en un gran número de diferentes órbitas periódicas.

El control retroalimentado con retardo, propuesto por Pyragas (1992), consiste en una retroalimentación de la diferencia entre el estado actual y el estado retardado en el tiempo, la cual es multiplicada por una matriz de ganancia  $K$ . Esta señal de control se expresa como

$$u(t) = K [x(t) - x(t - \tau)], \quad (6)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de retardo. Si este tiempo coincide con el período de una de las OPI's, entonces  $\tau = T_*$ . En este caso, la señal de control llega a ser cero después de que la OPI del sistema (5) es estabilizada. Es decir,  $x(t) = x_*(t)$ , conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esto significa que la señal de control (6) no cambia la solución del sistema (5) correspondiente a la órbita periódica  $x_*(t)$ .

Si aplicamos el control retroalimentado con retardo al sistema (5), obtenemos

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K [x(t) - x(t - \tau)], \quad (7)$$

donde si se elige un valor apropiado para la matriz de ganancia  $K$ , se puede alcanzar la estabilización de la órbita periódica  $x_*(t)$ . En la Figura 7, se muestra un diagrama a bloques de un sistema caótico con el control retroalimentado con retardo.

Sin embargo, el control retroalimentado con retardo tiene una limitación substancial conocida como limitación del número impar, (Nakajima, 1997). Esta limitación da una condición bajo la cual la órbita periódica inestable no puede ser estabilizada por el control retroalimentado con retardo.

### II.1.2 Limitación del número impar

El teorema que se expresa en esta sección, da la condición bajo la cual cualquier órbita periódica inestable del sistema (5), no puede ser estabilizada con el control retroalimentado con retardo.

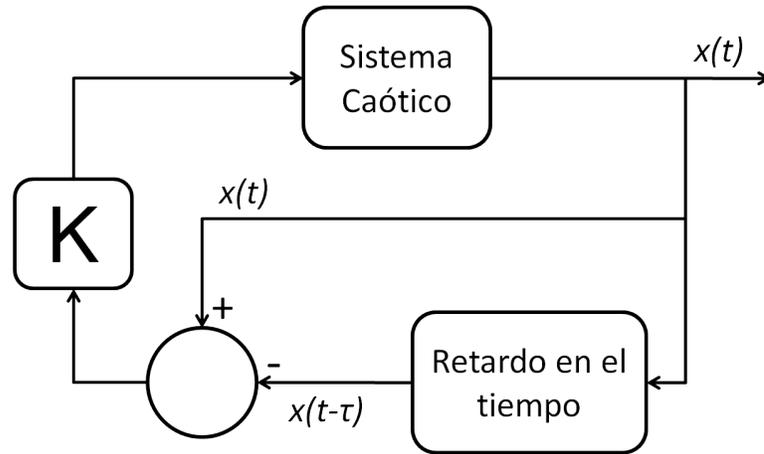


Figura 7: Diagrama a cuadros del control de Pyragas en un sistema caótico

**Teorema.** - Si la ecuación lineal variante en el tiempo, del sistema (5), linealizado alrededor de una órbita periódica inestable hiperbólica  $x_*(t)$ ,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = D_x F(x_*(t)) \tilde{x}(t) = A(t) \tilde{x}(t)$$

tiene un número impar de multiplicadores de Floquet reales mayores que la unidad, la OPI no podrá ser estabilizada por el control retroalimentado con retardo (6), con ningún valor de la matriz de ganancia  $K$ .

En la siguiente sección, se explica cómo obtener los multiplicadores de Floquet de un sistema lineal variante en el tiempo.

## II.2 Teoría de Floquet

Con la teoría de Floquet se puede conocer la estabilidad de órbitas periódicas en los sistemas no lineales, tales como el sistema (5).

Para conocer la estabilidad de una de las órbitas periódicas del sistema no lineal (5) es necesario linealizar a este sistema alrededor de la órbita periódica deseada,  $x_*(t)$ . Esto resulta, en un sistema lineal variante en el tiempo, tal como

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t) \tilde{x}(t), \quad (8)$$

donde,  $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados y  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz periódica de período  $T > 0$ , el cual es igual al período de la órbita periódica  $x_*(t)$ . Sin embargo, no siempre coincide el período de la matriz  $A(t)$  con el período de la órbita periódica  $x_*(t)$ . Cuando el sistema (5) solamente tiene no linealidades impares, el período mínimo de la matriz  $A(t)$  es la mitad del período de  $x_*(t)$ .

El sistema lineal *n-dimensional* (8) cuenta con  $n$  soluciones linealmente independientes,  $\phi_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Estas soluciones son típicamente conocidas como *conjunto fundamental de soluciones*. Este conjunto puede ser expresado en la forma de una matriz  $n \times n$ , llamada *matriz fundamental*, de manera que cualquier solución de (8) se puede expresar como

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t)\tilde{x}_0, \quad (9)$$

de donde

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{\Phi}(t)\tilde{x}_0 = A(t)\tilde{x}(t) = A(t)\Phi(t)\tilde{x}_0.$$

Claramente, la matriz fundamental,  $\Phi(t)$ , satisface la ecuación matricial

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad (10)$$

con  $\Phi(0) = I$ .

Ahora, si se cambia la variable independiente en (10) de  $t$  a  $\tau = t + T$ , se obtiene que

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = A(\tau - T)\Phi = A(\tau)\Phi,$$

debido a que  $A(\tau - T) = A(\tau)$ . Por lo tanto, si  $\Phi(t)$  es una solución matricial fundamental, entonces  $\Phi(t + T)$  también lo es. Ya que (8) tiene a lo más  $n$  soluciones linealmente independientes, entonces cualquier otra solución depende de  $\Phi(t)\tilde{x}_0$ , en particular  $\Phi(t + T)\tilde{x}_0$ , es decir:

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C. \quad (11)$$

Como  $\Phi(0) = I$ , entonces

$$\Phi(T) = C. \quad (12)$$

Los valores propios  $\lambda_i$  de la matriz de monodromía  $C$ , se llaman *multiplicadores de Floquet o multiplicadores característicos*. Hay un conjunto único de los multiplicadores característicos asociados con la matriz  $A(t)$  del sistema (8). Cada  $\lambda_i$  da una medida de divergencia o convergencia orbital local a lo largo de la órbita periódica. Es importante notar que uno de los multiplicadores de Floquet asociados con una órbita periódica de un sistema como (5) es siempre la unidad (Nayfeh y Balachandran, 1995).

Una órbita periódica de (5), es conocida como una órbita periódica hiperbólica si solamente un multiplicador de Floquet está ubicado en +1 sobre el círculo unitario. Las órbitas periódicas hiperbólicas solamente pueden ser estables o inestables. Se dice que una órbita periódica hiperbólica es asintóticamente estable, si no hay multiplicadores de Floquet fuera del círculo unitario. Por otro lado, una órbita periódica hiperbólica es inestable, si uno o más de los multiplicadores de Floquet caen fuera del círculo unitario. Cuando alguno de los multiplicadores de Floquet asociados con una órbita hiperbólica inestable cae dentro del círculo unitario, la órbita periódica se le llama, *ciclo límite inestable del tipo silla*.

A continuación se da un ejemplo sencillo de cómo se obtienen los multiplicadores de Floquet en un sistema lineal con coeficientes periódicos.

**Ejemplo 1** *Considere el siguiente sistema lineal con coeficientes periódicos*

$$\dot{x}_1(t) = \text{sen}(t)x_2(t) \quad (a), \tag{13}$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) \quad (b).$$

*Para encontrar los multiplicadores de Floquet del sistema (13) es necesario determinar la matriz fundamental y la matriz de monodromía.*

*La matriz fundamental está compuesta por el conjunto fundamental de soluciones. Entonces, es necesario encontrar las soluciones fundamentales de (13). Resolviendo la ecuación (13,b) del sistema se encuentra que*

$$x_2(t) = x_{02}e^{-t}.$$

Sustituyendo a  $x_2(t)$  en (13,a) y resolviéndola se obtiene

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_{02}e^{-t} [\cos(t) + \text{sen}(t)] + \frac{1}{2}x_{02} + x_{01}.$$

A partir de  $x_1(t)$  y de  $x_2(t)$  se obtiene la matriz fundamental, la cual tiene la siguiente forma

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_{02}} \\ \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_{02}} \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^{-t} [\cos(t) + \text{sen}(t)] + \frac{1}{2} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz de monodromía son los multiplicadores de Floquet, entonces, es necesario obtener esta matriz. A partir de la ecuación (11) se puede calcular la matriz de monodromía

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C.$$

De aquí se tiene que

$$\Phi(t+T) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^{-(t+T)} [\cos(t+T) + \text{sen}(t+T)] + \frac{1}{2} \\ 0 & e^{-(t+T)} \end{bmatrix}.$$

Si se toma a  $t = 0$ ,  $\Phi(t)$  y  $\Phi(t+T)$  se reducen a

$$\Phi(0) = I,$$

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^{-T} [\cos(T) + \text{sen}(T)] + \frac{1}{2} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Como el período del sistema es de  $T = 2\pi$ ,  $\Phi(T)$  queda como

$$\Phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^{-2\pi} + \frac{1}{2} \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, de (11) y considerando que  $\Phi(0) = I$ , la matriz de monodromía queda como

$$C = \Phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^{-2\pi} + \frac{1}{2} \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix}.$$

Entonces, calculando los valores propios de  $C$  se tiene que los multiplicadores Floquet del sistema (13) son iguales a:  $\bar{\lambda}_1 = 1$  y  $\bar{\lambda}_2 = e^{-2\pi}$ .

## II.3 Bifurcaciones

En esta sección se presenta el concepto de *bifurcaciones* en sistemas dinámicos, así como las bifurcaciones típicas que sufren las órbitas periódicas.

### II.3.1 Teoría de bifurcación

La *teoría de bifurcación* intenta dar una clasificación sistemática del cambio repentino en el comportamiento cualitativo o topológico de los sistemas dinámicos. Es útil dividir la teoría de bifurcaciones en dos clases diferentes, *bifurcación local* y *bifurcación global*.

Las bifurcaciones locales son aquellas que pueden ser analizadas completamente mediante cambios en la propiedades de estabilidad local de los puntos de equilibrio u órbitas periódicas de interés. Por otra parte, las bifurcaciones globales normalmente ocurren a mayor escala en el espacio de estado e involucran estructuras tales como cuencas de atracción y órbitas homoclínicas y heteroclínicas para puntos de equilibrio tipo silla. Para ambas clases, la teoría de bifurcación intenta clasificar el tipo de bifurcaciones que puedan ocurrir para sistemas dinámicos.

En problemas de bifurcaciones es útil considerar un espacio formado por las variables de estado y los parámetros de control conocido como *espacio de parámetros de control*. En este espacio, la ubicación en la cual ocurre la bifurcación se le llama puntos de bifurcación. Varias ramas de soluciones similares y/o diferentes desaparecen o emergen de los puntos de bifurcación local. En particular, una bifurcación que requiere cambiar al menos  $m$  parámetros de control para que ésta ocurra, se le llama bifurcación

de *codimensión- $m$* .

Las bifurcaciones locales pueden ser clasificadas en bifurcaciones continuas y discontinuas o catastróficas, dependiendo de si los estados del sistema cambian su comportamiento suavemente o repentinamente conforme se varía gradualmente el parámetro de control a través de su valor crítico. Las bifurcaciones discontinuas o catastróficas pueden ser subdivididas en bifurcaciones peligrosas o explosivas.

En las bifurcaciones continuas, los estados del sistema evolucionan continuamente conforme se varía uno de los parámetros de control. En una bifurcación peligrosa, el estado brinca a un atractor remoto conforme se varía uno de los parámetros de control. El resultado de esta bifurcación puede ser determinado o indeterminado, dependiendo de si el sistema tiene un atractor único o varios atractores, respectivamente. En la bifurcación explosiva, el atractor que existe antes de la bifurcación explota a un atractor mayor, con el atractor anterior incrustado en el nuevo atractor como un subconjunto de éste.

### **II.3.2 Bifurcaciones en órbitas periódicas**

Como se mencionó anteriormente, las bifurcaciones locales, en este caso de órbitas periódicas, suceden cuando se varía uno o más parámetros del sistema y éstas aparecen, desaparecen o cambian su estabilidad. Este cambio de estabilidad, o aparición y desaparición de órbitas periódicas, está asociado con los multiplicadores de Floquet de un sistema lineal periódico, tal como (8), que es el resultado de una linealización de un sistema no lineal, como el de (5), alrededor de una órbita periódica.

Si se inicia con la selección de parámetros de tal manera que tengamos una órbita periódica estable, y después, al variar uno de los parámetros se pierde la estabilidad de la órbita periódica, comúnmente se tendrá que ha ocurrido una bifurcación, y la órbita resultante dependerá de la manera en la cual el multiplicador de Floquet haya abandonado el círculo unitario. Es importante recordar que un multiplicador de Floquet asociado con la órbita periódica siempre es igual a uno. En la Figura 8, se muestra los posibles casos que se pueden presentar.

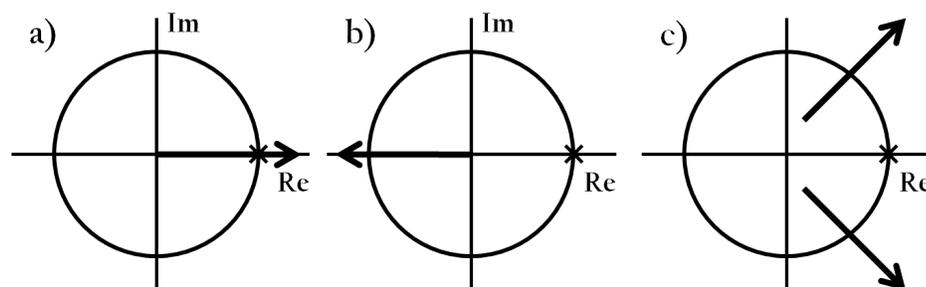


Figura 8: Posibles casos para las bifurcaciones.

En la Figura 8.a, un multiplicador de Floquet abandona el círculo unitario a través de  $+1$  al variar un parámetro, resultando en una de las siguientes tres bifurcaciones: *bifurcación transcritical* (*transcritical*), *bifurcación de rompimiento de simetría* (*symmetry-breaking*) y *bifurcación cyclic-fold*. En la Figura 8.b, al variar un parámetro un multiplicador de Floquet abandona el círculo unitario a través de  $-1$ , resultando en una *bifurcación de duplicación de período* (*period-doubling*). Y en la Figura 8.c, dos multiplicadores de Floquet complejos conjugados abandonan el círculo unitario alejándose del eje real, cuando se varía un parámetro, resultando en una *bifurcación de Hopf secundaria* o *bifurcación de Neimark*.

**Nota.-** Hay que recordar que los multiplicadores de Floquet son los valores propios de la matriz de monodromía, la cual se obtiene resolviendo una ecuación linealizada alrededor de una órbita periódica.

A continuación, se explica lo que ocurre con las órbitas periódicas cuando sufren una de las bifurcaciones antes mencionadas. Empezaremos con las bifurcaciones que ocurren cuando un multiplicador de Floquet abandona el círculo unitario a través de  $+1$  (transcritical, rompimiento de simetría y “cyclic-fold”). Después se verá la bifurcación de duplicación de período. Por último, se verá la bifurcación de Neimark.

### Bifurcación transcritical

Ya se ha mencionado que una bifurcación transcritical ocurre cuando un multiplicador de Floquet abandona el círculo unitario a través de  $+1$ . Las órbitas periódicas estables

e inestables que existían antes de la bifurcación continúan como órbitas inestables y estables, respectivamente. Esta bifurcación hace que las órbitas periódicas sufran un cambio de estabilidad. En la Figura 9, se muestra la bifurcación transcítica. En esta figura el eje horizontal representa el parámetro de control que se varía y  $X$ , que se encuentra sobre el eje vertical, es la amplitud de la órbita periódica. Las líneas sólidas

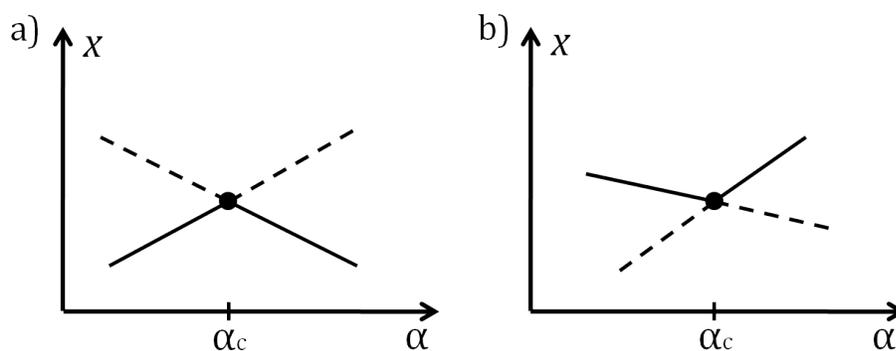


Figura 9: Posibles escenarios de la bifurcación transcítica, a) supercrítica, b) subcrítica.

representan las órbitas periódicas estables y las líneas punteadas representan las órbitas periódicas inestables.

### Bifurcación de rompimiento de simetría

Suponga que un multiplicador de Floquet abandona el círculo unitario a través de  $+1$ , y que la órbita periódica, antes de la bifurcación, es simétrica, entonces, si la bifurcación rompe la simetría de la órbita periódica, se le conoce como bifurcación de rompimiento de simetría. En la Figura 10 se ilustra esta bifurcación. En a) se muestra el caso de *rompimiento de simetría supercrítica*, y en b) el caso de *rompimiento de simetría subcrítica*.

Se debe notar de la Figura 10, que en los puntos de bifurcación se juntan las órbitas periódicas simétricas y asimétricas. En el caso de bifurcación de rompimiento de simetría supercrítico, las órbitas periódicas simétricas estables que existen antes de la bifurcación, seguirán existiendo después de la bifurcación como inestables, pero ahora, coexistirán con las órbitas periódicas asimétricas, donde éstas últimas son estables. Por otra parte, en el caso de bifurcación subcrítica, las órbitas periódicas asimétricas inestables, coexisten con las órbitas periódicas simétricas estables antes de la bifurcación,

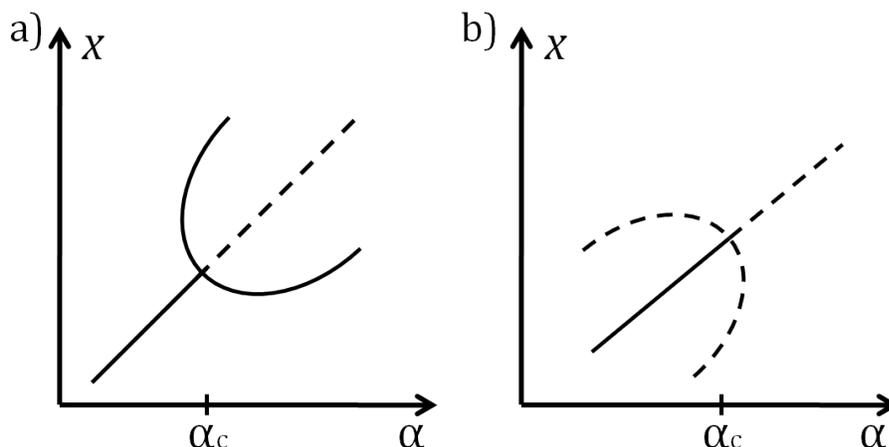


Figura 10: *Bifurcación de rompimiento de simetría, a) supercrítica, b) subcrítica.*

después de la bifurcación, las órbitas periódicas asimétricas inestables desaparecen, y la órbita periódica simétrica continua existiendo, pero ahora es inestable. La bifurcación de rompimiento de simetría supercrítico es un ejemplo de una bifurcación continua, y la bifurcación de rompimiento de simetría subcrítico es un ejemplo de una bifurcación discontinua.

### Bifurcación “Cyclic-Fold”

En la bifurcación Cyclic-Fold, una órbita periódica estable y una inestable, que existen antes del valor crítico  $\alpha_c$ , se unen y se eliminan entre sí en  $\alpha_c$ . Después de la bifurcación no hay órbitas periódicas. En la Figura 11 se muestra esta bifurcación. Las bifurcaciones Cyclic-Fold son discontinuas o catastróficas.

Antes de que se produzca una bifurcación Cyclic-Fold, los estados del sistema estarán en un ciclo límite,  $\alpha < \alpha_c$ . Después de que ocurre la bifurcación, un análisis global es necesario para saber cómo se comporta el sistema. Hay dos posibles comportamientos que puede tener el sistema después de la bifurcación. En el primer caso, el sistema puede ser atraído a una solución distante, la cual puede ser acotada o desacotada. Si la solución es acotada, entonces el sistema puede ser atraído hacia un punto de equilibrio o a una órbita periódica o aperiódica. En este caso, la bifurcación es peligrosa. El segundo caso es cuando el atractor del sistema explota en un nuevo atractor, en el cual está contenido el atractor anterior. En este caso la bifurcación es explosiva.

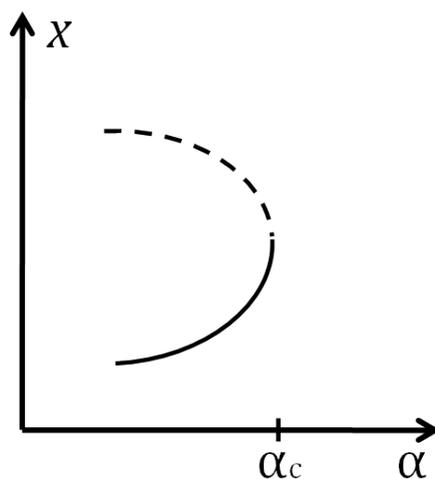


Figura 11: *Bifurcación del tipo Cyclic-Fold.*

### Bifurcación de duplicación de período

La bifurcación de duplicación de período ocurre cuando un multiplicador de Floquet abandona el círculo unitario a través de  $-1$ . En este escenario, antes de la bifurcación ( $\alpha < \alpha_c$ ) existe una órbita periódica estable, y después de la bifurcación ( $\alpha > \alpha_c$ ) esta órbita continúa como inestable y al mismo tiempo nace una órbita periódica estable de doble período. Entonces se dice que tenemos una bifurcación de duplicación de período supercrítica. Por lo tanto, esta es una bifurcación continua. Por otro lado, si tenemos una órbita periódica estable coexistiendo con una órbita periódica inestable de doble período antes de la bifurcación ( $\alpha < \alpha_c$ ), y después de que ocurre la bifurcación ( $\alpha > \alpha_c$ ), la órbita periódica continúa como inestable y la órbita de doble período es destruida. Entonces, tenemos una bifurcación subcrítica. Esta bifurcación es catastrófica.

Cuando el sistema sufre una bifurcación de duplicación de período del tipo subcrítico pueden presentarse dos escenarios. El primero de ellos es cuando el sistema evoluciona hacia una solución remota, la cual puede ser acotada o desacotada. Cuando la solución es acotada el sistema puede evolucionar hacia un punto fijo o hacia una órbita periódica. Como se ha dicho anteriormente, este tipo de bifurcación se considera peligrosa. La segunda es cuando el atractor del sistema explota hacia un nuevo atractor más grande. El nuevo atractor contiene al viejo atractor como un subconjunto propio.

### Bifurcación secundaria de Hopf o de Neimark

Esta bifurcación ocurre cuando un par de multiplicadores de Floquet complejos conjugados abandonan el círculo unitario alejándose del eje real. Básicamente, una bifurcación de Neimark introduce una nueva frecuencia a la órbita ya existente.

Lo que ocurre en esta bifurcación es que la órbita bifurcante puede ser periódica o cuasi-periódica con dos componentes de frecuencias. Esto va a depender de la relación entre la nueva frecuencia introducida y la frecuencia de la órbita periódica que existía antes de la bifurcación. En este caso, existen bifurcaciones de Neimark del tipo supercrítico y subcrítico. En ambas bifurcaciones las órbitas periódicas estables que existen antes de la bifurcación continúan como órbitas periódicas inestables después de la bifurcación. En una bifurcación de Neimark supercrítica, lo que ocurre es que una órbita cuasi-periódica estable aparece después de la bifurcación. Esta bifurcación es un ejemplo de bifurcación continua. Por otra parte, cuando una órbita cuasi-periódica inestable es destruida después de la bifurcación, se dice que ocurrió una bifurcación de Neimark subcrítica. Esta bifurcación es una bifurcación catastrófica.

Cuando ocurre una bifurcación de Neimark subcrítica, conforme el parámetro de control  $\alpha$  excede el valor crítico  $\alpha_c$ , el sistema puede evolucionar de dos maneras diferentes. El primero, el sistema puede ser atraído a una solución distante, que puede ser acotada o desacotada. De nuevo, tal bifurcación es peligrosa. La segunda, el estado del sistema puede explotar hacia un atractor más grande, con el viejo atractor siendo un subconjunto propio. Esta bifurcación es explosiva.

## II.4 Transición al caos

Nos interesa saber cómo un sistema pasa de un comportamiento regular a un comportamiento caótico, conforme se varía un parámetro de control. Así que se estudiarán las diferentes rutas que puede seguir un sistema para llegar a tener un comportamiento caótico.

Existen diferentes rutas que puede seguir un sistema para tener un comportamiento caótico. Estas rutas pueden ser divididas en dos categorías principales. La primera es

por medio de **bifurcaciones locales**, en donde se pueden presentar diferentes escenarios, los cuales son: *duplicación de período, cuasi-periodicidad e intermitencia del tipo I, del tipo II y del tipo III*. La segunda de ellas es por medio de **bifurcaciones globales**. Los escenarios que se pueden presentar son: *transitorios caóticos y crisis*. Aquí solamente explicaremos las bifurcaciones locales.

### II.4.1 Escenario de duplicación de período

El escenario de duplicación de período se inicia con un comportamiento periódico del sistema (la trayectoria del sistema es una órbita periódica). Conforme un parámetro de control se varía gradualmente, esta órbita periódica se hace inestable. Si la órbita periódica se hace inestable por tener uno de sus multiplicadores de Floquet más negativo que  $-1$ , entonces nace una órbita periódica de período doble con respecto a la órbita original. Es decir, la nueva órbita es 2-periódica.

Conforme el parámetro de control se continua variando, la órbita 2-periódica puede llegar a ser inestable y dar nacimiento a una órbita 4-periódica. El proceso de duplicación de período puede repetirse hasta que el período de la órbita sea infinito, consiguiendo que la trayectoria del sistema nunca se repita. Entonces se dice que la trayectoria del sistema es caótica.

En otras palabras, podemos llegar de un comportamiento periódico a uno caótico, por medio de una secuencia de bifurcaciones de duplicación de período.

### II.4.2 Escenario de cuasi-periodicidad

En este escenario un punto de equilibrio pierde su estabilidad a causa de una bifurcación supercrítica, resultando una órbita periódica estable, con frecuencia  $w_1$ . Conforme el parámetro de control se sigue variando, la órbita periódica sufre una bifurcación Hopf secundaria supercrítica, apareciendo una segunda órbita periódica, con frecuencia  $w_2$ . Si la relación del período entre las dos órbitas ( $\frac{2\pi}{w_1}/\frac{2\pi}{w_2}$ ) no es una relación racional, entonces se dice que tenemos un movimiento cuasi-periódico 2-período. Bajo algunas circunstancias, si el parámetro de control se continua variando, se puede llegar a tener

un comportamiento caótico. A continuación presentaremos algunas transiciones cuasi-periódicas al caos.

### **Escenario de Ruelle-Takens**

En 1944 el físico Ruso L. Landau propuso una secuencia infinita de frecuencias como un mecanismo para producir un movimiento aperiódico (turbulento). Cuando se tiene una secuencia de bifurcaciones de Hopf se agrega una frecuencia fundamental en cada bifurcación. Por lo tanto, en el escenario de Landau, se requiere de una secuencia infinita de bifurcaciones de Hopf para tener un movimiento turbulento. Al movimiento turbulento que se genera en la culminación del escenario de Landau, se lo puede considerar como caótico si existe sensibilidad a las condiciones iniciales.

En 1971, Ruelle y Takens demostraron que un movimiento cuasi-periódico en un  $N$ -toroide ( $N$ -torus), donde  $N \geq 4$ , puede ser perturbado en condiciones bastantes generales para producir un atractor robusto caótico. Una perturbación arbitraria de un movimiento cuasi-periódico en un  $N$ -toroide, donde  $N \geq 3$ , puede llevarnos a: (a) la presencia de la cuasi-periodicidad con  $N$  frecuencias inconmensurables, (b) un seguimiento de frecuencias, durante el cual la órbita asociada es periódica o cuasi-periódica con menos de  $N$  frecuencias inconmensurables, o (c) al caos.

En un escenario de Ruelle-Takens, un número finito de bifurcaciones de Hopf pueden llevar de un punto de equilibrio a un atractor caótico.

### **Rompimiento de toroide**

En este escenario, un atractor caótico aparece después de que lo hace un atractor cuasi-periódico 2-período. Este atractor se forma de una bifurcación Hopf secundaria de una órbita periódica. La evolución asociada con el sistema continuo puede ser descrita por dos modos de oscilación con frecuencias inconmensurables. Conforme el parámetro de control considerado se sigue variando, una rica variedad de bifurcaciones del toroide puede llevarse a cabo. La post-bifurcación del estado puede ser uno de los siguientes: (1) un atractor periódico complejo (oscilación de seguimiento de fase u oscilación de modo mixto); (2) un atractor no extraño, cuya órbita exhibe la característica de ex-

cursión intermitente; y (3) un atractor caótico.

Si los dos modos de oscilación están fuertemente acoplados, el atractor cuasi-periódico pierde su estabilidad, y se forma en un atractor de seguimiento de fase. En este caso, se tiene una sincronización. Conforme el parámetro de control se continua variando, la transición de un atractor periódico a un atractor caótico, puede llevarse a cabo a través de un escenario de duplicación de período o de intermitencia.

Suponga que el movimiento cuasi-periódico es caracterizado por las dos frecuencias  $w_1$  y  $w_2$ . La aplicación de una pequeña perturbación adecuada a este movimiento puede resultar en el reemplazo de este movimiento por un movimiento asintótico hacia la órbita periódica atractiva, con una relación de frecuencia racional  $p/q$ . A este fenómeno se le conoce como seguimiento de frecuencia o sincronización, debido a que la relación de frecuencia  $w_2/w_1$  es un número racional. Cuando  $w_2/w_1$  se aproxima a  $p/q$ , un atractor no extraño puede surgir después de la bifurcación. Una órbita en este atractor permanece largos períodos de tiempo siguiendo a la órbita cuasi-periódica destruida, de la cual ocasionalmente se separa.

Una tercera forma en la que el sistema puede evolucionar conforme el parámetro de control se varía es la destrucción del toroide y la aparición de un atractor caótico. Esta transición al caos, a través de un atractor cuasi-periódico 2-período, frecuentemente se describe como caos vía rompimiento de toroide.

### **Duplicación de toroide**

Otro escenario por el cual un movimiento cuasi-periódico 2-período bifurca al caos es la duplicación de toroide. Como se mencionó al principio de esta sección, un atractor cuasi-periódico 2-período está formado por dos órbitas con frecuencias inconmensurables, las cuales son  $w_1$  y  $w_2$ ; entonces, éste es un 2-toroide.

Conforme el parámetro de control se varía, el atractor 2-toroide sufre una cascada de bifurcaciones de duplicación de período, en la cual el período  $2\pi/w_2$  es duplicado en cada bifurcación. Después de cada bifurcación de duplicación de período, la post-bifurcación del estado es un nuevo toroide que forma dos lazos alrededor del toroide

original.

Hay dos posibilidades: la cascada es completa o incompleta. En el último caso, el sistema sufre una transición al caos sobre un toroide deformado. Cuando la cascada es completa, el caos aparece al final de la secuencia, y la respuesta al sistema es un movimiento modulado caóticamente.

### II.4.3 Intermitencia

A continuación se describirá la característica principal de esta ruta hacia el caos. Suponga que para unos valores del parámetro de control  $\alpha$  menor que el valor crítico  $\alpha_c$ , el sistema se comporta periódicamente; es decir, el sistema se encuentra en una órbita periódica. Si el parámetro de control,  $\alpha$ , excede ligeramente el valor crítico,  $\alpha_c$ , la respuesta del sistema consistirá de largos períodos de tiempo de oscilación, muy parecido al comportamiento de  $\alpha < \alpha_c$ ; pero ahora este comportamiento será interrumpido intermitentemente por brotes caóticos en intervalos irregulares. Conforme se sigue incrementando el valor del parámetro  $\alpha$ , el comportamiento periódico se hace más y más corto y es más difícil de reconocer, hasta que el comportamiento periódico desaparece y el sistema se comporta de manera completamente caótica.

Por lo tanto, en el mecanismo de intermitencia, conforme el parámetro de control  $\alpha$  excede el umbral de intermitencia  $\alpha_c$ , la respuesta del sistema explota a un atractor mayor, con el viejo atractor periódico siendo un subconjunto del nuevo atractor caótico. Entonces, una órbita periódica es reemplazada por caos, en vez de una órbita periódica estable cercana a la anterior. Tres tipos de bifurcaciones pueden llevar a la intermitencia; estas son, cyclic-fold, Hopf subcrítica y duplicación de período subcrítica.

#### Causa de Intermitencia

Se describirá cuál es la causa de la intermitencia en sistemas dinámicos. Para ésto, lo haremos por medio del mapa logístico, el cual es descrito por la ecuación en diferencia

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1]$$

donde  $x_n$  es el estado del sistema y  $\mu$  es el parámetro de control.

En el mapa logístico, el comportamiento del sistema se determina por los puntos fijos de la  $n$ -ésima iteración, si tenemos un comportamiento de período  $n$ . Para un sistema de tiempo continuo, descrito por ecuaciones diferenciales, podemos usar la técnica del mapeo de Poincaré, y poner nuestra atención en los  $n$  puntos del mapa. La característica general que da lugar al comportamiento intermitente es la desaparición de estos puntos fijos conforme el parámetro de control se cambia.

Se sabe que en el caso de intermitencia el sistema aparentemente cambia de un comportamiento a otro. Entonces ¿cómo se genera el comportamiento aparentemente periódico? Primero, en la Figura 12 se muestra la 5ta iteración del mapa logístico para  $\mu = 3.74$ . Después del transitorio, el mapa logístico se desplaza a través de 5 puntos fijos estables; es decir, tiene un comportamiento periódico de período 5. Los puntos fijos se forman de la intersección entre el mapa logístico y el mapa identidad  $x_{n+1} = x_n$ .

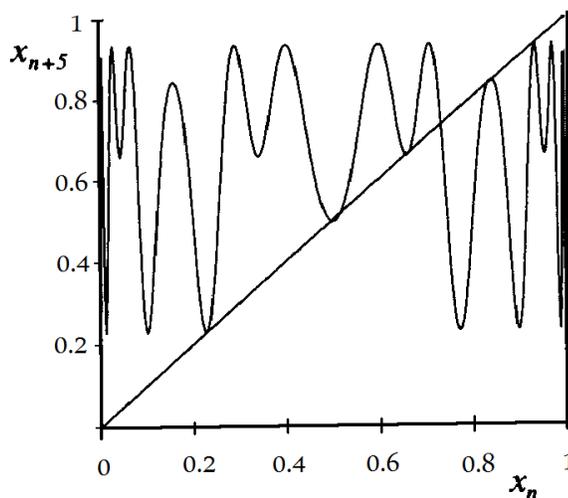


Figura 12: Mapa logístico.

En cambio, en la Figura 13, con  $\mu = 3.72$ , el mapa logístico y el mapa identidad,  $x_{n+1} = x_n$ , no se intersectan; entonces no existen puntos fijos estables y el comportamiento es caótico.

Se puede ver más de cerca la aparente periodicidad examinando la trayectoria que pasa a través del canal entre el mapa logístico y el mapa identidad,  $x_{n+1} = x_n$ , en la

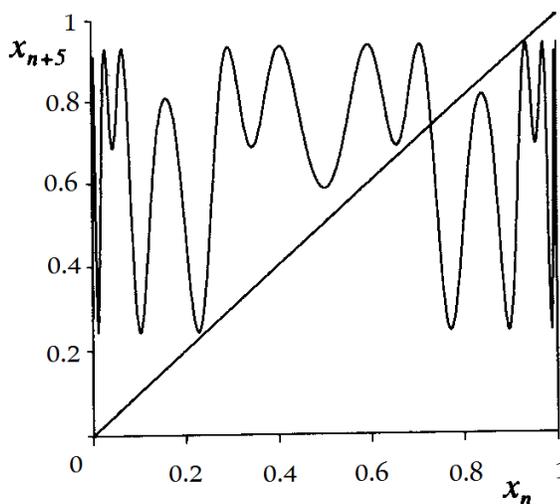


Figura 13: *Mapa logístico.*

Figura 14, se muestra uno de estos canales ( $\mu = 3.7375$ ). Siempre que cualquier trayectoria pase por el canal, ésta fluirá lentamente a través del canal, con una acumulación sucesiva de iteraciones en la parte más estrecha del canal. El tiempo que le toma atravesar el canal depende de la anchura del mismo, el cual a su vez depende del valor de  $\mu$ . Cuanto más estrecho es el canal, mayor será el tiempo en el que se comporte aparentemente periódico. Es decir, es el tiempo durante el cual la trayectoria está atrapada en el canal mientras que, afuera del canal, la trayectoria oscilará caóticamente, hasta que ésta sea reinyectada al canal.

### Tipos de intermitencia

Los tres tipos de intermitencia se pueden distinguir por el comportamiento de multiplicadores de Floquet. Recuerde que las órbitas periódicas se hacen inestables cuando el valor absoluto del multiplicador de Floquet es mayor que 1. Los tres tipos de bifurcaciones de las cuales se forman estos tres tipos de intermitencia son Bifurcación cyclic-fold, Hopf subcrítica y duplicación de período subcrítica.

En la **intermitencia de tipo I**, en el punto de bifurcación, uno de los multiplicadores de Floquet asociados con la solución periódica abandona el círculo unitario a través de  $+1$ . Esto lleva a interrupciones irregulares de comportamiento periódico a comportamiento caótico.

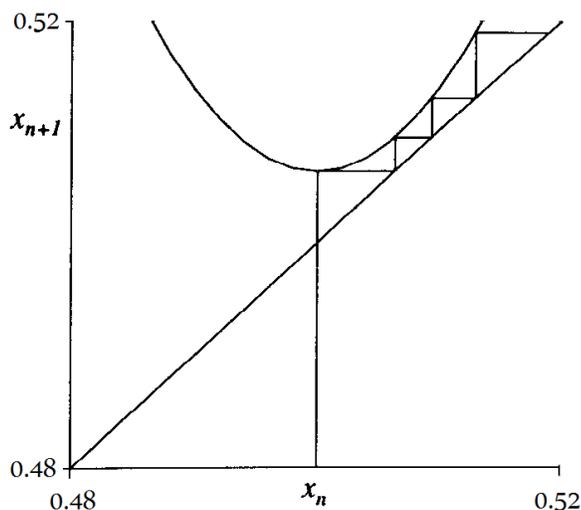


Figura 14: Mapa logístico.

La **intermitencia del tipo II** se forma cuando dos multiplicadores de Floquet complejos conjugados salen del círculo unitario, alejándose del eje real. Una bifurcación de Hopf secundaria subcrítica ocurre en una solución periódica. La parte imaginaria de los multiplicadores de Floquet indican la presencia de una segunda frecuencia. La primera frecuencia corresponde a la órbita periódica original, que desaparece en el punto de bifurcación. Cuando ocurre la bifurcación, la órbita periódica asociada con la segunda frecuencia se hace inestable y se observa interrupciones del comportamiento 2-periódico mezclado con intervalos de comportamiento caótico.

La **intermitencia de tipo III** está asociada con una bifurcación de duplicación de período subcrítica. Esta bifurcación ocurre cuando un multiplicador de Floquet es negativo y se hace más negativo que  $-1$ . La amplitud del comportamiento sub-armónico, creado en el punto de bifurcación, crece mientras la amplitud del movimiento asociado con el período original decrece. Después de la bifurcación, el comportamiento de doble período no es estable.

Una variante de la intermitencia de tipo III es la **intermitencia On-Off**. El comportamiento del sistema parece alternar entre un comportamiento bastante quieto (es decir, se encuentra en un punto de equilibrio) y un comportamiento caótico.

## II.5 Diagrama de Feigenbaum

En sistemas dinámicos, un diagrama de Feigenbaum muestra los posibles valores estables en estado estacionario de un sistema como una función de un parámetro de bifurcación en el sistema. La posible solución a la que converja el sistema en estado estacionario dependerá de las condiciones iniciales que se elijan. En la Figura 15, se

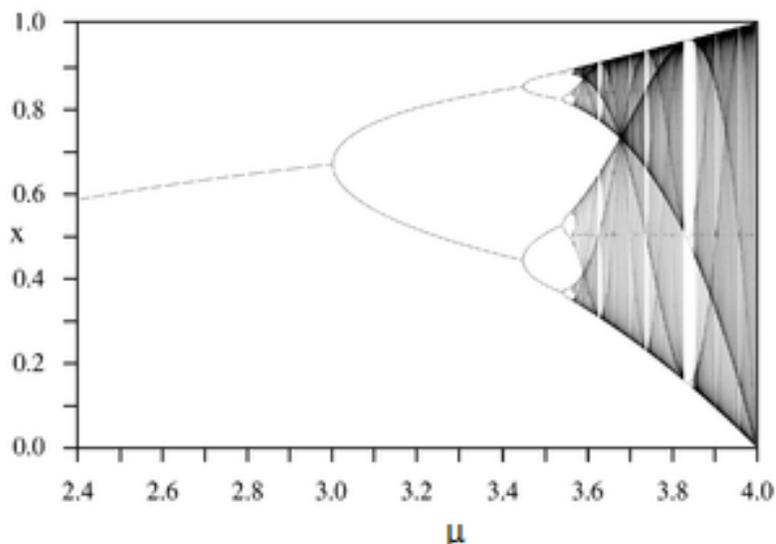


Figura 15: *Diagrama de Feigenbaum del mapa logístico.*

muestra un ejemplo de un diagrama de Feigenbaum. Este diagrama, pertenece a la función del mapa logístico.

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1]$$

El parámetro de bifurcación  $\mu$  se muestra sobre el eje horizontal de la gráfica, y el eje vertical, muestra los posibles valores de la amplitud en estado estacionario que puede tomar el estado  $x$ .

## II.6 Función descriptiva

El método de la respuesta en frecuencia es una herramienta muy útil para el análisis y diseño de sistemas de control lineal, ya que con este método se puede representar la

respuesta del sistema en estado estacionario ante una excitación sinusoidal. Lamentablemente, un análisis en el dominio de la frecuencia no puede ser aplicado directamente a sistemas no lineales, debido a que no se puede definir una función de respuesta en frecuencia.

Para algunos sistemas no lineales, una versión extendida del método de la respuesta en frecuencia, llamado el método de la función descriptiva (FD), puede ser usado para analizar aproximadamente y predecir el comportamiento no lineal. Entonces la FD del elemento no lineal es la relación compleja de la componente fundamental del elemento no lineal ante una entrada periódica. El método consiste en reemplazar al elemento no lineal del sistema por un elemento que sea lineal, al menos por tramos, en el tiempo *equivalente*, el cual es en algún sentido la mejor aproximación del elemento no lineal. El método frecuentemente se utiliza para predecir la existencia de soluciones periódicas en sistemas retroalimentados.

### II.6.1 Aplicación del método de la función descriptiva

Considere un sistema no lineal, el cual puede ser representado por la conexión retroalimentada que se muestra en la Figura 16,  $G(s)$  es la función de transferencia de la parte lineal del sistema y  $\psi(\cdot)$  es el elemento no lineal.

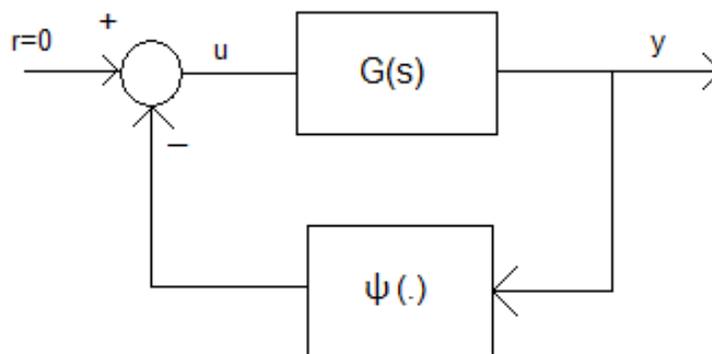


Figura 16: *Sistema no lineal.*

De la Figura 16 se obtiene la siguiente expresión:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

y la ecuación diferencial correspondiente es

$$d(p)y(t) - n(p)u(t) = 0,$$

en donde  $p$  es el operador derivada  $p(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$ . Si se considera que  $u(t) = -\psi(y(t))$  se obtiene la ecuación diferencial

$$d(p)y(t) + n(p)\psi(y(t)) = 0. \quad (14)$$

Como se busca la existencia de órbitas periódicas (ciclos límite) en el sistema, suponemos que la salida del sistema  $y(t)$  es periódica, y por lo tanto puede ser representada en su serie de Fourier,

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{y}_k \exp(jkwt)$$

$$\hat{y}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(y(t)) \exp(-jkwt) dt$$

donde  $\hat{y}_k$  son los coeficientes complejos. Ya que  $\psi(\cdot)$  es una función no lineal invariante en el tiempo, entonces  $\psi(y(t))$  es periódica con la misma frecuencia  $w$ . El término  $\hat{\psi}_k$  representa los coeficientes complejos.

$$\psi(y(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_k \exp(jkwt)$$

$$\hat{\psi}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(y(t)) \exp(-jkwt) dt$$

Para que  $y(t)$  sea una solución del sistema de la Figura 16, la solución debe satisfacer la ecuación (14). Debido a que:

$$p \exp(jkwt) = \frac{d}{dt} \exp(jkwt) = jkw \exp(jkwt)$$

tenemos que

$$d(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{y}_k \exp(jkwt) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(jkw) \hat{y}_k \exp(jkwt) \quad (15)$$

y

$$n(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_k \exp(jkwt) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(jkw) \hat{\psi}_k \exp(jkwt) \quad (16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (15) y (16) en la ecuación (14) se produce la siguiente ecuación diferencial

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [d(jkw)\hat{y}_k + n(jkw)\hat{\psi}_k] \exp(jkwt) = 0$$

Se sabe que las funciones  $\exp(jkwt)$  y  $\exp(jlwt)$  son ortogonales, para  $k \neq l$  enteros, así que para que se cumpla la ecuación anterior debe encontrar los coeficientes de Fourier que satisfagan la ecuación diferencial

$$\hat{y}_k + G(jkw)\hat{\psi}_k = 0 \quad (17)$$

para todos los valores de  $k \in \mathbb{Z}$ . Como  $G(jkw) = \bar{G}(-jkw)$ ,  $\hat{y}_k = \bar{\hat{y}}_{-k}$  y  $\hat{\psi} = \bar{\hat{\psi}}_{-k}$ , sólo se considera la última ecuación para cuando  $k \geq 0$ . Como la ecuación (17) es de dimensión infinita, es necesario encontrar una aproximación de dimensión finita. Si la función de transferencia  $G(s)$  es estrictamente propia, es decir, si  $G(jw) \rightarrow 0$  para cuando  $w \rightarrow \infty$ , entonces se puede suponer que existe un valor entero  $q > 0$  tal que, para  $k > q$ ,  $|G(jkw)|$  es una cantidad muy pequeña, por lo tanto, se puede reemplazar  $G(jkw)$  (y en consecuencia  $\hat{y}_k$ ) por 0. Esta aproximación reduce la ecuación (17) a un problema de dimensión finita,

$$\hat{y}_k + G(jkw)\hat{\psi}_k = 0 \quad (18)$$

para  $k = 1, 2, \dots, q$ .

Si la función de transferencia  $G(s)$  tiene las características de un filtro pasa bajas, se puede aproximar  $G(jkw)$  a 0 cuando  $k > 1$ . Entonces la ecuación (18) se convierte en las ecuaciones (19) y (20).

$$\hat{y}_0 + G(0)\hat{\psi}_0 = 0 \quad (19)$$

$$\hat{y}_1 + G(jw)\hat{\psi}_1 = 0 \quad (20)$$

Ahora consideramos que la solución periódica  $y(t)$  del sistema es una señal sinusoidal, de amplitud  $A$  y frecuencia  $w$ , es decir:

$$y(t) = A \operatorname{sen}(wt) = A \left[ \frac{\exp(jwt) - \exp(-jwt)}{2j} \right]$$

En donde  $\hat{y}_0 = 0$  y si la función no lineal es una función impar, entonces  $\hat{\psi}_0 = 0$ . Que la función no lineal sea impar simplemente se propone por simplicidad para hacer cero el valor medio (o la corriente directa) de la función  $\psi(\cdot)$ . Si la función no lineal  $\psi(\cdot)$  no es una función impar se tendrá que resolver la ecuación (19).

De cualquier manera la ecuación (20) es la que da las condiciones de oscilación. Si se define a la función descriptiva como  $N(A, w) = \frac{\hat{\psi}_1}{\hat{y}_1}$ , y sustituyendo a ésta en la ecuación (20) se obtiene

$$1 + G(jw)N(A, w) = 0 \quad (21)$$

la cual puede ser reescrita como

$$G(jw) = -\frac{1}{N(A, w)} \quad (22)$$

Por lo tanto, si se encuentran valores de la amplitud  $A$  y la frecuencia  $w$  que satisfagan la ecuación (22), entonces allí existirá un ciclo límite (órbita periódica) con una amplitud  $A$  y frecuencia  $w$ . Si la ecuación (22) no tiene solución, entonces el sistema no lineal no tiene ciclos límite.

Otra manera para saber si existen ciclos límite en el sistema, es gráficamente; se grafica la función de transferencia  $G(jw)$  y la inversa de la función descriptiva  $-1/N(A, w)$  en el plano complejo. Si las curvas se intersectan, entonces existe un ciclo límite y el valor de  $A$  y  $w$  correspondientes al punto de intersección son la solución de la ecuación.

Para saber si el ciclo límite (órbita periódica) que se predijo es estable o inestable, se hace uso del criterio de estabilidad de Nyquist.

## II.6.2 Criterio de estabilidad de Nyquist y su extensión

Considere un sistema como el que se muestra en la Figura 17.

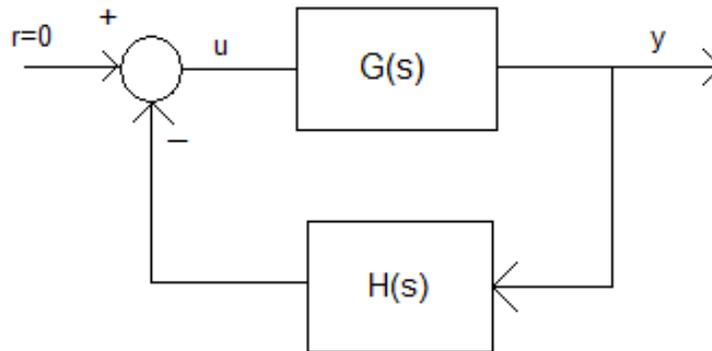


Figura 17: Sistema en lazo cerrado.

La ecuación característica de este sistema es

$$\delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

Note que  $\delta(s)$ , también llamada función de transferencia en lazo cerrado, es una función racional de  $s$ , de la cual sus ceros son los polos del sistema en lazo cerrado, y sus polos son los polos de la función de transferencia  $G(s)H(s)$ . Reescribiendo la ecuación característica como:

$$G(s)H(s) = -1$$

el criterio de estabilidad de Nyquist puede ser expresado como (suponiendo que  $G(s)H(s)$  no tiene polos o ceros sobre el eje  $iw$ ):

*Si la función de transferencia  $G(s)H(s)$  tiene  $k$  polos en el semiplano derecho del plano  $s$  y  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = \text{constante}$ , para la estabilidad, el lugar geométrico  $G(jw)H(jw)$ , conforme  $w$  varía de  $-\infty$  a  $\infty$ , debe encerrar  $k$  veces el punto  $-1 + j0$  en sentido contrario a las manecillas del reloj.*

Lo que se expresó anteriormente se puede entender como:

$$\mathbf{Z=N+P}$$

en donde:

- $Z$  = Número de ceros de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ .
- $N$  = Número de encierros en el sentido de las manecillas del reloj del punto  $-1 + j0$ .
- $P$  = Número de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ .

Si  $P$  no es cero, para un sistema estable, se debe tener  $Z = 0$  o  $N = -P$ , lo que significa que debe de haber  $P$  encierros del punto  $-1 + j0$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Si  $G(s)H(s)$  no tiene polos en el semiplano derecho del plano  $s$ , entonces  $Z=N$ . Por lo tanto, no se debe encerrar el punto  $-1 + j0$  mediante el lugar geométrico  $G(jw)H(jw)$ .

Una simple extensión formal del criterio de Nyquist se puede hacer simplemente incluyendo una ganancia constante  $K$  en la trayectoria directa, como se muestra en la Figura 18. Esta modificación será útil en la interpretación del análisis de estabilidad de los ciclos límites usando el método de la función descriptiva. La función de transferencia se transforma en:

$$\delta(s) = 1 + KG(s)H(s) = 0$$

con la correspondiente ecuación característica

$$G(s)H(s) = -1/K$$

Se utiliza el mismo principio que el usado en el criterio de estabilidad de Nyquist, con la pequeña diferencia que ahora  $N$  representa el número de encierros en el sentido de las manecillas del reloj del punto  $-1/K$  en el plano complejo  $G(jw)H(jw)$ .

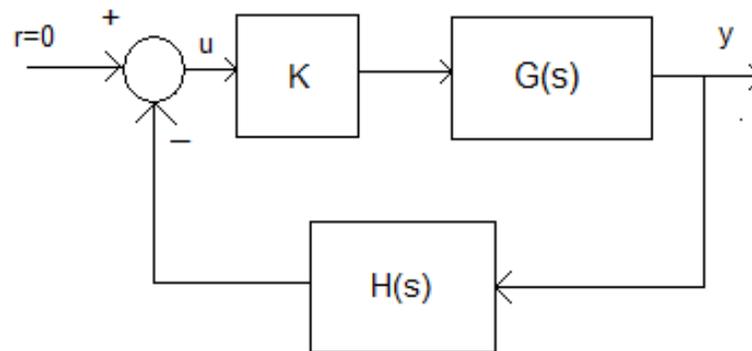


Figura 18: *Sistema en lazo cerrado.*

## Capítulo III

### Caracterización de sistemas caóticos

En este capítulo se plantea una hipótesis en la que se establece condiciones para identificar en que escenario el control retroalimentado con retardo estabiliza al sistema en una órbita periódica que se encuentre en su atractor. Esto se realiza mediante un análisis del diagrama de Feigenbaum de cada sistema. En la Sección III.1 se da una descripción de los sistemas con los cuales se trabajará. Después, en la Sección III.2 se establece la hipótesis y en la Sección III.3 se da una serie de ejemplos con los que se argumenta esta hipótesis. Finalmente, en la Sección III.4 se dan las conclusiones.

#### III.1 Sistemas a considerar

Como se estableció anteriormente, el control retroalimentado con retardo es un método de control que se utiliza para estabilizar órbitas periódicas inestables incrustadas en un atractor caótico. Sin embargo, no siempre es posible aplicar este control. Por esta razón, uno de los objetivos de esta tesis es establecer un criterio que sea fácil de calcular y visualizar, con el cual sea posible determinar cuándo es posible aplicar el control retroalimentado con retardo a un sistema caótico.

Entonces, en este capítulo se establece una hipótesis con la que se da una condición de cuando es aplicable el control retroalimentado con retardo. Pero antes de esto, primero se da un listado de las características con las que cuentan los sistemas que consideramos en este estudio.

1. Son sistemas continuos en el tiempo. Es decir, son sistemas representados por variables que están definidas para todo el tiempo.
2. Cuentan con al menos un elemento no lineal, estático, el cual produce el comportamiento caótico del sistema.
3. Son sistemas de tercer orden o mayor. Ésto se establece para que el sistema

presente un comportamiento caótico autónomo, sin la necesidad de aplicar una señal externa.

4. Son sistemas invariantes; es decir son sistemas con parámetros que no dependen explícitamente del tiempo.
5. Son de grado relativo completo, lo que significa que pueden ser llevados mediante un cambio de coordenadas a la forma normal.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n \\
 \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u
 \end{aligned}$$

## III.2 Establecimiento de hipótesis

En la mayoría de las ocasiones, cuando se presenta un comportamiento caótico, se requiere suprimirlo por medio de un sistema de control, donde el objetivo de control más común para la supresión de este comportamiento es estabilizar al sistema en una órbita periódica. Una manera efectiva de lograr este objetivo es aplicando el control retroalimentado con retardo, debido a que éste estabiliza órbitas periódicas inestables incrustadas en un atractor caótico sin alterar los conjuntos límite del sistema. Considerando que los sistemas caóticos cuentan con una infinitud de órbitas periódicas inestables incrustadas en su atractor, lo convierten en un control adecuado para esta tarea.

Sin embargo, el control retroalimentado con retardo, como se mencionó en el Capítulo II, cuenta con una limitación substancial conocida como limitación del número impar. Esta limitación establece que si el Jacobiano del sistema caótico, alrededor de la órbita periódica inestable, tiene un número impar de multiplicadores de Floquet reales mayores que 1, la órbita periódica inestable no podrá ser estabilizada con un control por retroalimentación de estados con retardo (ver Sección II.1.2).

Para conocer si el control retroalimentado con retardo es capaz de estabilizar al sistema caótico en una órbita periódica deseada es necesario conocer los multiplicadores de Floquet asociados con esta órbita periódica, lo cual no es una tarea sencilla. Es deseable entonces tener una forma más sencilla de visualizar la limitación del número impar.

Se sabe que los multiplicadores de Floquet están fuertemente relacionados con el tipo de bifurcaciones que pueden sufrir las órbitas periódicas. Es decir, el tipo de bifurcación que sufra la órbita periódica, dependerá de cómo abandone el círculo unitario un multiplicador de Floquet. Puede suceder, que un multiplicador de Floquet real abandone el círculo unitario atravesando  $+1$  o  $-1$  a medida que se varía el valor de un parámetro, o que un par de multiplicadores de Floquet complejos conjugados salgan del círculo unitario, alejándose del eje real.

Hay que recordar que con el diagrama de Feigenbaum se pueden conocer los diferentes comportamientos estables en estado estacionario que presenta el sistema conforme se varía uno o más de sus parámetros. Entonces, si el sistema pasa de un comportamiento regular a uno caótico conforme se varía uno de sus parámetros, en el diagrama de Feigenbaum se podrá apreciar la ruta hacia el caos que éste presenta. La ruta que tome dependerá del tipo de bifurcaciones que sufran las órbitas periódicas y esto a su vez dependerá de la manera en la que el multiplicador de Floquet, asociado con la órbita periódica, abandone el círculo unitario. Por lo tanto, con el diagrama de Feigenbaum es razonable suponer que es posible encontrar cierto escenario en el cual el control retroalimentado con retardo sea capaz de estabilizar al sistema en una órbita periódica que se encuentre en el atractor.

En la siguiente hipótesis se establece en qué escenario el control retroalimentado con retardo estabiliza al sistema en una órbita periódica que se encuentre en su atractor.

**Hipótesis 1** *Si el diagrama de Feigenbaum de un sistema dinámico continuo en el tiempo presenta una ruta hacia el caos a través de una cascada de bifurcaciones de duplicación de período, entonces será posible estabilizar al sistema en la órbita periódica propia incrustada en el atractor, por medio del control retroalimentado con retardo. Esta propiedad se mantiene siempre que el atractor no interactúe con otro atractor presente*

*en el intervalo paramétrico de interés.*

Lo que se deduce de la hipótesis 1 es que si el sistema presenta una cascada de bifurcaciones de duplicación de período, entonces significa que cada órbita periódica perdió su estabilidad cuando un multiplicador de Floquet abandonó el círculo unitario a través de  $-1$ , con ésto se puede deducir que no hubo multiplicadores de Floquet que abandonaran el círculo unitario a través de  $+1$  y con ésto no se cumple la limitación del número impar. Por lo tanto, el sistema tendrá una infinidad de órbitas periódicas en las cuales podrá ser estabilizado. Por lo tanto, la selección de los parámetros de control,  $K$  (ganancia de retroalimentación) y  $\tau$  (tiempo de retardo), se podrá hacer sin ningún problema. En el caso de que el sistema no cumpla con la hipótesis 1, no podríamos asegurar que el sistema no puede ser estabilizado en una órbita periódica de su atractor por medio de este control.

### **III.3 Argumentación de la hipótesis**

En esta sección se muestra la factibilidad, mediante ejemplos, de lo que se establece en la hipótesis 1. Esto se muestra por medio del análisis de los diagrama de Feigenbaum de cada uno de los sistemas en lazo abierto. Posteriormente, para comprobar que efectivamente se cumple lo que se estableció en la hipótesis 1, se aplica el control retroalimentado con retardo observando la evolución de cada sistema.

Los resultados que se obtienen son realizados por medio de simulaciones con Matlab®.

#### **III.3.1 Análisis de los sistemas en lazo abierto**

En el Capítulo I se mencionaron algunos sistemas que cuentan con las características presentadas en la Sección III.1, algunos de estos sistemas son: sistema de Rossler, circuito de Chua, sistema de control integral combinado con un elemento no lineal y los sistemas de Sprott. En este apartado describiremos el comportamiento de algunos de ellos.

### Sistema 1 *Sistema de Rossler*

La dinámica del sistema de Rossler está caracterizada por el siguiente conjunto de ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay + u, \\ \dot{z} &= xz - bz + c,\end{aligned}\tag{23}$$

en donde  $(x, y, z)$  representan a los estados del sistema,  $u$  es una entrada de control y  $(a, b, c)$  son los parámetros. Si a estos parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  se les asigna los valores de 0.2, 5.7 y 0.2, respectivamente, y si la entrada de control es igual a cero ( $u = 0$ ), entonces se tendrá un comportamiento caótico. En la Figura 19 se muestra un típico comportamiento caótico del sistema de Rossler.

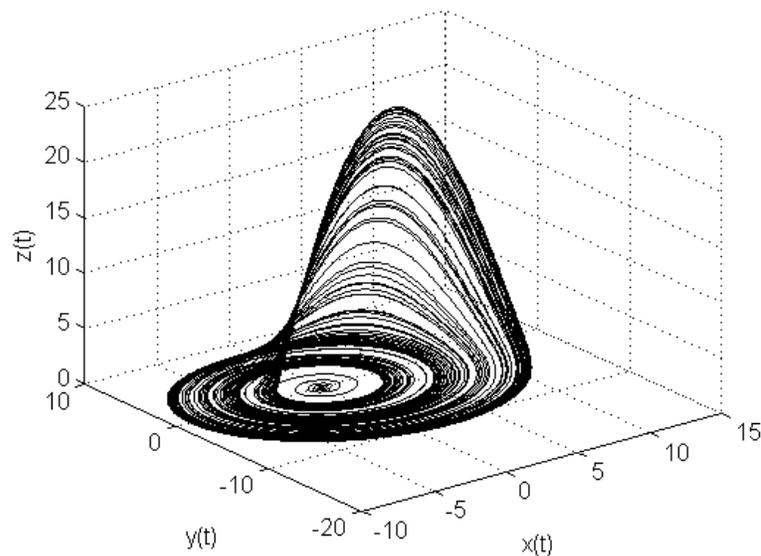


Figura 19: *Atractor del sistema de Rossler.*

Al momento de variar uno de los parámetros del sistema, éste puede presentar diferentes comportamientos. Para visualizar los diferentes comportamientos estables en estado estacionario de uno de los estados del sistema cuando se varía uno (o varios) de

los parámetros se hace uso del diagrama de Feigenbaum.

El diagrama de Feigenbaum del sistema de Rossler se muestra en la Figura 20, sobre el eje horizontal se grafica el parámetro de control que se varía (en este caso se varía el parámetro  $b$ , y los parámetros  $a$  y  $c$  se fijaron en 0.2) de 1 a 8.5 y sobre el eje vertical se grafica la amplitud del estado  $y$ . En el diagrama de Feigenbaum del sistema de Rossler se observa como el sistema pasa de un comportamiento periódico a uno caótico, conforme se varía  $b$ , mediante una cascada de bifurcaciones de duplicación de período; esto nos indica, que cada órbita periódica estable perdió su estabilidad cuando uno de sus multiplicadores de Floquet abandonó el círculo unitario a través de  $-1$ .

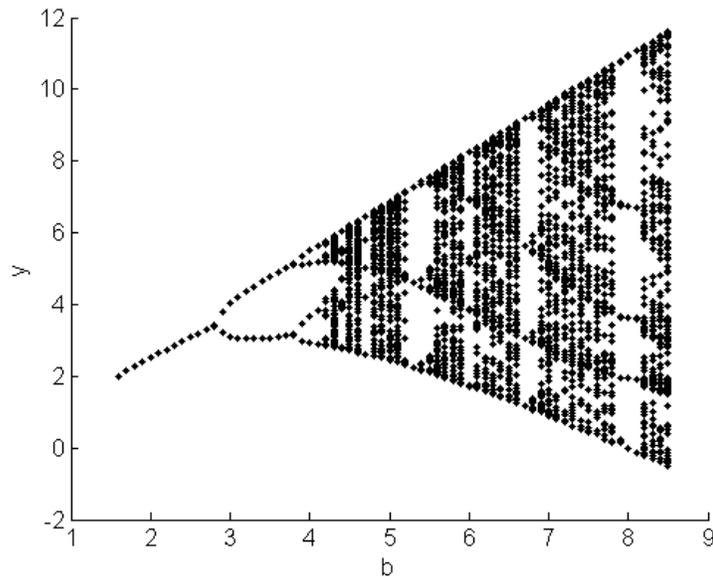


Figura 20: *Diagrama de Feigenbaum del sistema de Rossler.*

Entonces, de acuerdo con lo que se estableció en la hipótesis 1, el sistema de Rossler podrá ser estabilizado en una variedad infinita de órbitas periódicas que se encuentren incrustadas en su atractor con el control retroalimentado con retardo. Para comprobar esto, se aplica el control retroalimentado con retardo al sistema. Si se aplica el control

$$\begin{aligned}
u &= -K [y(t) - y(t - \tau)], \\
\dot{x}(t) &= -y(t) - z(t), \\
\dot{y}(t) &= x(t) + 0.2y(t) - K [y(t) - y(t - \tau)], \\
\dot{z}(t) &= x(t)z(t) - 5.7z(t) + 0.2.
\end{aligned} \tag{24}$$

Con la selección de la ganancia  $K = 0.4$  y el tiempo de retardo  $\tau = 5.8609$ , el control retroalimentado con retardo consigue estabilizar al sistema en una órbita 1-periódica que corresponde a una solución propia. En la Figura 21 se muestra el atractor del sistema de Rossler estabilizado en la órbita 1-periódica seleccionada.

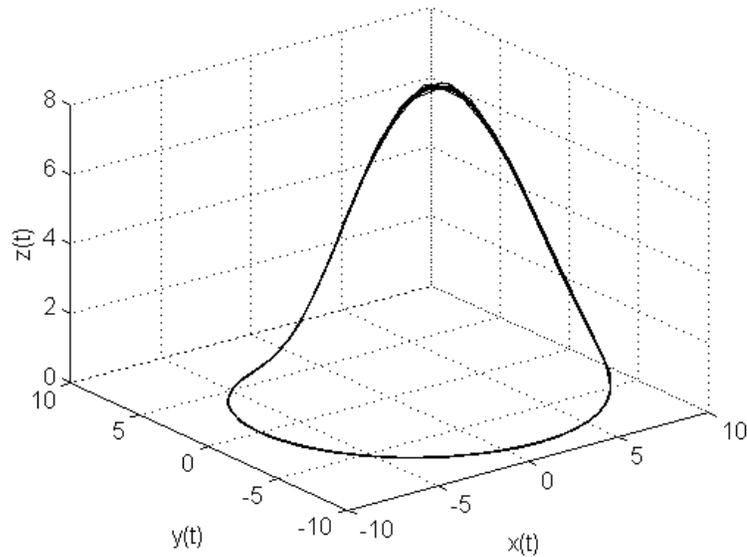


Figura 21: Atractor del sistema de Rossler en una órbita 1-periódica.

La señal de control que se aplica al sistema se muestra en la Figura 22, los parámetros del control son fijados en  $K = 0.4$  y  $\tau = 5.8609$  seg. En este caso, la señal de control se aplica después de los 100 seg de haber iniciado la simulación del sistema, con el fin de que el control intervenga cuando el sistema ya se encuentre en régimen caótico. Una vez que se aplica el control, éste tarda en estabilizar al sistema aproximadamente 100 seg y es en este intervalo cuando se requiere mayor esfuerzo de control. Cuando el sistema se encuentra estabilizado en la órbita 1-periódica la amplitud del control prácticamente tiene una amplitud cercana a cero, ésto nos indica que esta órbita 1-periódica es una

solución propia del sistema.

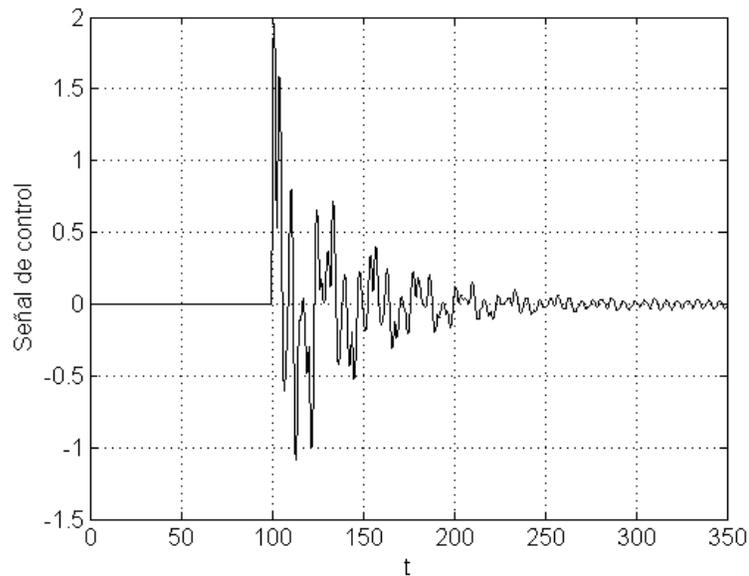


Figura 22: *Evolución de la señal de control.*

La evolución del estado  $y(t)$  en el tiempo se muestra en la Figura 23. Se puede apreciar como pasa de un comportamiento caótico a uno 1-periódico una vez que se aplica el control, y el período de esta órbita corresponde al tiempo de retardo  $\tau$  definido en el control, este período es 5.8609.

En el análisis del sistema de Rossler, realizado mediante el diagrama de Feigenbaum, se llegó a la conclusión de que era factible utilizar el control retroalimentado con retardo, debido a que el sistema cumple con los requerimientos establecidos en la hipótesis 1. Ésto se pudo ver reflejado cuando se aplicó el control retroalimentado con retardo y éste estabilizó al sistema, de manera sencilla, en una órbita 1-periódica.

### **Sistema 2** *Sistema de control integral combinado con una función saturación*

Este sistema está constituido por un sistema lineal de segundo orden y por un control integral combinado con un elemento no lineal. El elemento no lineal es una función saturación (Alvarez *et al.*, 1997).

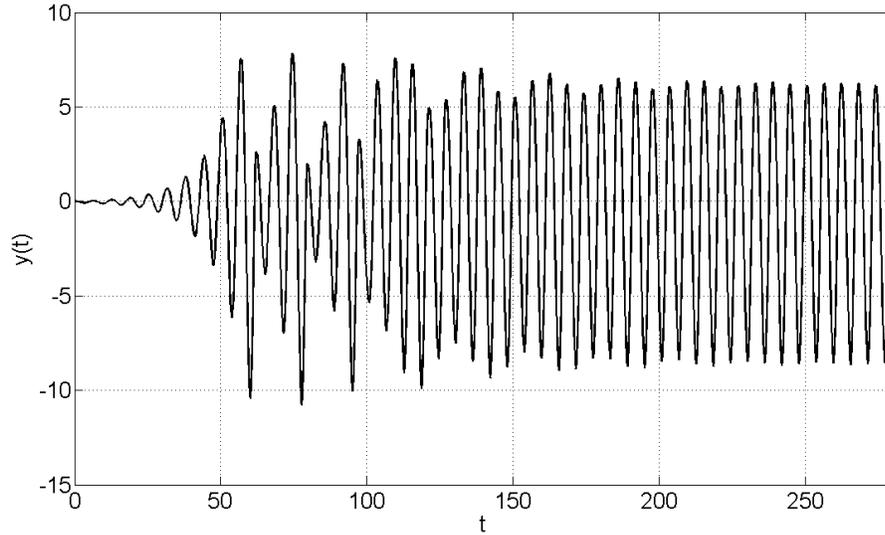


Figura 23: Evolución en el tiempo del estado de salida.

La dinámica de este sistema es descrita por el siguiente conjunto de ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2, \\
 \dot{z}_2 &= z_3, \\
 \dot{z}_3 &= -z_2 - 2\zeta z_3 - k_s \text{sat}(z_1) + u,
 \end{aligned} \tag{25}$$

en donde  $\zeta$  y  $k_s$  son parámetros del sistema,  $u$  es la entrada de control y los  $z_i$  representan a los estados. El elemento  $\text{sat}(z_1)$ , es una función saturación asimétrica, en donde el valor máximo es de 5 y el valor mínimo es de  $-0.5$ , este elemento se define como:

$$\text{sat}(z_1) = \begin{cases} 5 & \text{para } z_1 \geq 5, \\ z_1 & \text{para } -0.5 < z_1 < 5, \\ -0.5 & \text{para } z_1 \leq -0.5. \end{cases}$$

Si se les asigna a los parámetros del sistema,  $\zeta$  y  $k_s$ , los valores de 0.3 y 8, respectivamente, y si la entrada de control es nula  $u = 0$ , se tendrá que el sistema se comporta caóticamente. En la Figura 24 se muestra su comportamiento caótico.

Nuevamente, el objetivo es poder determinar la factibilidad de utilizar el control retroalimentado con retardo, para ésto se realiza un análisis del sistema mediante el

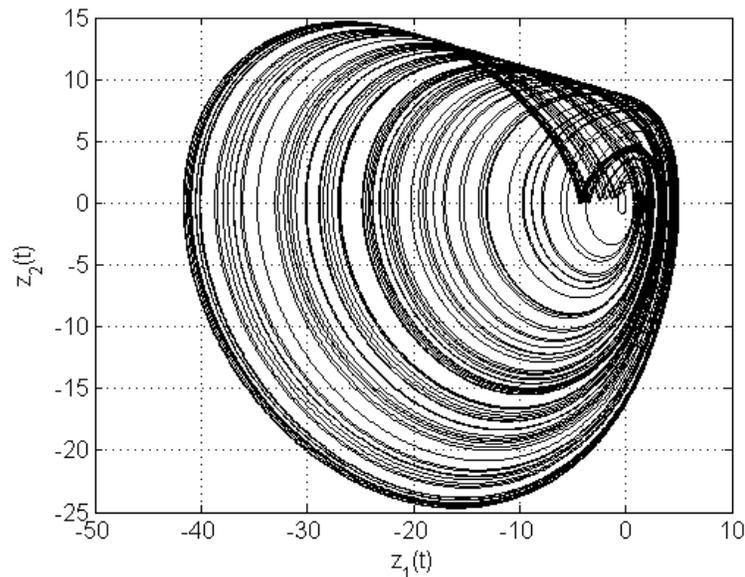


Figura 24: Atractor del sistema de control con una función saturación.

diagrama de Feigenbaum (hipótesis 1).

Al variar el parámetro  $k_s$  de 1 a 10 se forma el diagrama de Feigenbaum que se muestra en la Figura 25, sobre el eje horizontal se grafica el parámetro que se varía ( $k_s$ ) y sobre el eje vertical se grafica la amplitud máxima del estado  $z_1$ . Al parámetro  $\zeta$  se fijó en el valor de 0.3.

Si se analiza el diagrama de Feigenbaum, Figura 25, se observa como el sistema pasa de un comportamiento periódico a uno caótico a través de una cascada de bifurcaciones de duplicación de período. Recuerde que ésto indica que cada órbita periódica perdió su estabilidad cuando uno de los multiplicadores de Floquet abandonó el círculo unitario a través de  $-1$ . Sin embargo, también se observa que cuando el parámetro  $k_s$  supera el valor de 8 aparece un nuevo atractor que convive con el atractor original. Entonces de acuerdo con la hipótesis 1, se puede decir que el sistema podrá ser estabilizado en una de las órbitas periódicas que se encuentren incrustadas en su atractor, siempre y cuando  $k_s$  no supere el valor de 8. Cuando  $k_s$  supera el valor de 8 no se podrá asegurar que el control retroalimentado con retardo estabiliza o no al sistema en una de las órbitas periódicas pertenecientes al conjunto de soluciones del mismo.

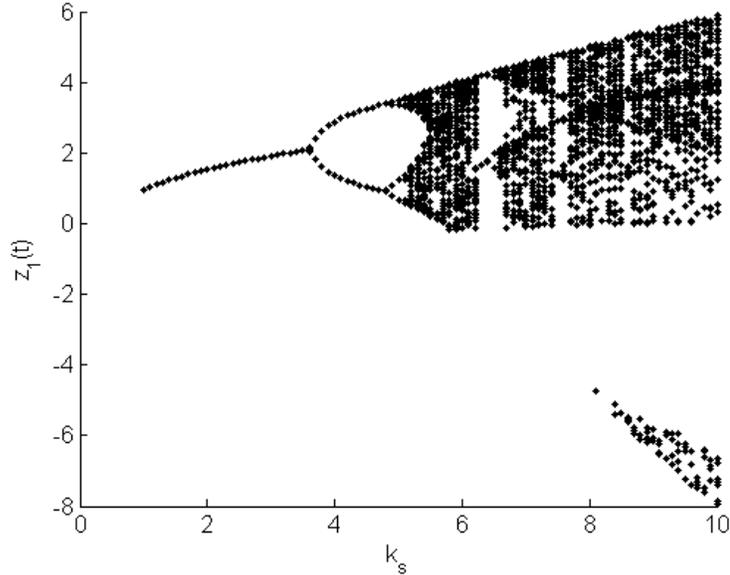


Figura 25: Diagrama de Feigenbaum del sistema de control con una función saturación.

Al aplicar la señal de control, de la forma  $u = -K [z_1(t) - z_1(t - \tau)]$ , al sistema se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1(t) &= z_2(t), \\
 \dot{z}_2(t) &= z_3(t), \\
 \dot{z}_3(t) &= -z_2(t) - 0.6z_3(t) - 8\text{sat}(z_1(t)) - K [z_1(t) - z_1(t - \tau)].
 \end{aligned} \tag{26}$$

Si se elige el valor de la ganancia en  $K = 0.04$  y el del retardo en  $\tau = 6.7$ , el control retroalimentado con retardo estabiliza al sistema en una órbita 1-periódica de período igual a  $\tau$ . La proyección del atractor, en el plano  $z_1 - z_2$ , del sistema estabilizado en la órbita 1-periódica se muestra en la Figura 26.

La señal de control se aplica a los 50 *seg* de haber iniciado la simulación del sistema, esto para que el control intervenga ya que haya pasado el transitorio y el sistema esté en régimen caótico. La señal de control se muestra en la Figura 27, se aprecia que el control estabiliza al sistema en un tiempo de aproximadamente 30 *seg*. Una vez que se estabilizó al sistema, la amplitud del control es muy cercana a cero.

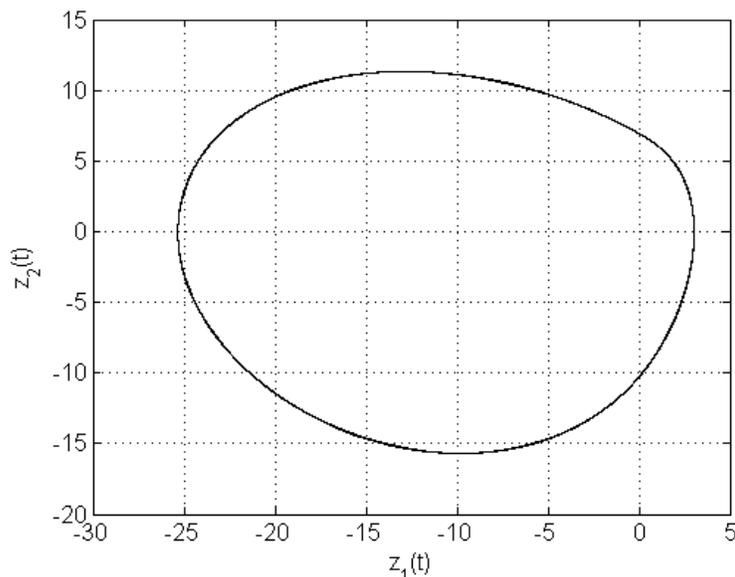


Figura 26: *Atractor del sistema de control con una función saturación, órbita 1-periódica.*

La evolución del estado  $z_1(t)$  (la cual es la salida del sistema) con respecto al tiempo se muestra en la Figura 28, claramente se puede ver como pasa de un comportamiento caótico a uno 1-periódico cuando interviene el control. El período de esta órbita 1-periódica corresponde al tiempo de retardo del control  $\tau$ , el cual es de 6.7.

Al igual que en el ejemplo anterior, se comprobó que cuando el sistema presenta una ruta hacia el caos a través de una cascada de bifurcaciones de duplicación de período y no interactúen dos o más atractores en el intervalo de interés, hipótesis 1, es viable utilizar el control retroalimentado con retardo para estabilizar al sistema en una órbita periódica propia, es decir, que esta órbita pertenezca al conjunto de soluciones del sistema.

Hay que recordar que para valores de  $k_s > 8$ , dos atractores están presentes. La presencia de estos dos atractores en el intervalo de  $k_s > 8$ , generó que el intervalo de la ganancia del control  $K$  fuera disminuyendo conforme aumentaba el valor de  $k_s$ , hasta llegar al punto en el que el control no fue capaz de estabilizar al sistema en la órbita periódica deseada.

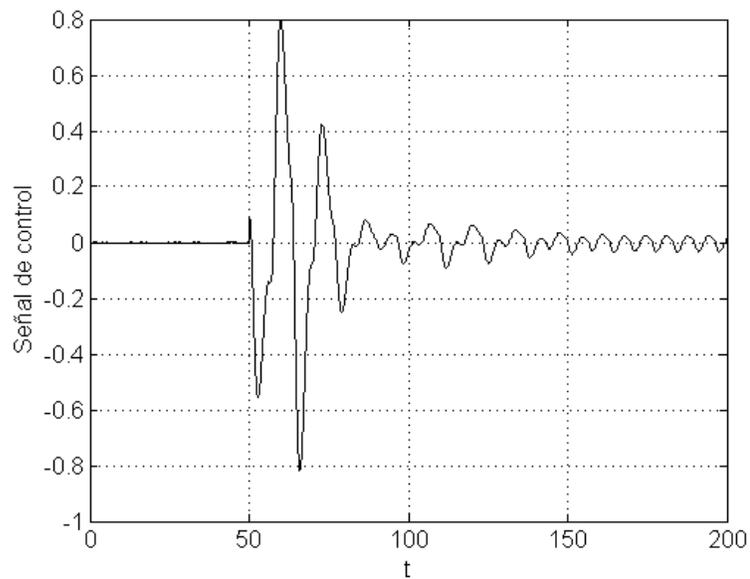


Figura 27: Señal de control para el sistema de control integral con una función saturación.

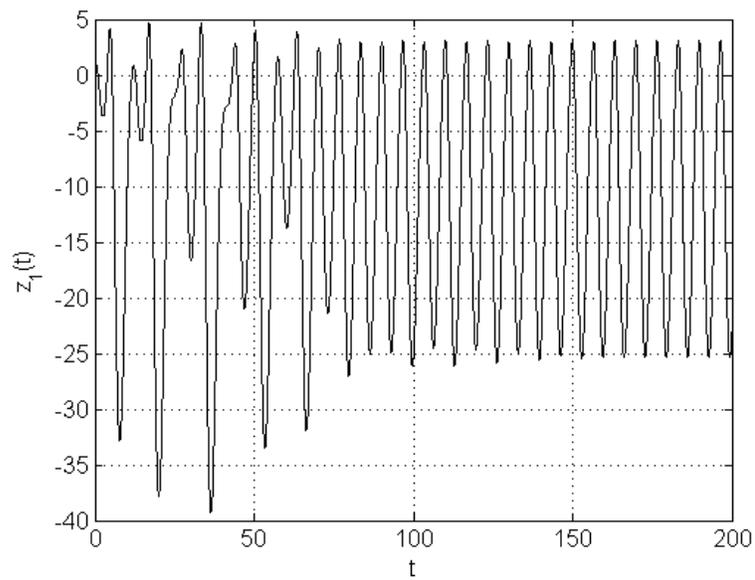


Figura 28: Evolución del estado en el tiempo de la salida del sistema.

**Sistema 3** *Sistema de control integral combinado con un polinomio cúbico.*

Ahora se analizará al sistema lineal de segundo orden con un control integral combinado con un polinomio cúbico (Alvarez *et al.*, 1997). Este sistema es muy parecido al sistema anterior, solamente cambia el elemento no lineal.

Se puede representar a la dinámica de este sistema mediante el siguiente conjunto de ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -z_2 - 2\zeta z_3 - k_s z_1(z_1^2 - 1) + u,\end{aligned}\tag{27}$$

donde  $z_i$  representan a los estados del sistema,  $u$  es una entrada de control y  $(\zeta, k_s)$  son los parámetros del mismo. Si se les asignan los valores de 1.4 y 0.5 a  $k_s$  y  $\zeta$ , respectivamente, y la entrada de control es cero, se tiene que el sistema presenta un comportamiento caótico. En la Figura 29 se muestra el comportamiento caótico típico del sistema.

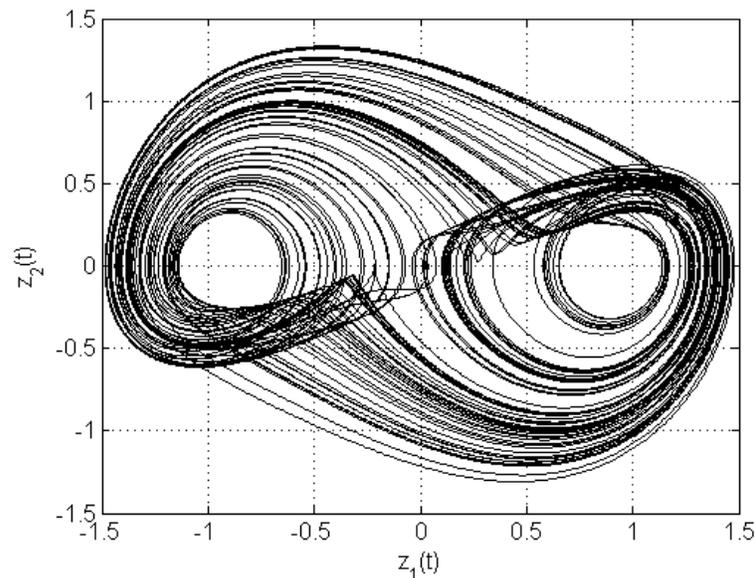


Figura 29: *Atractor del sistema de control con un polinomio cúbico.*

Como se ha venido haciendo a través de esta sección, se requiere obtener el diagrama de Feigenbaum para poder determinar si el sistema cumple con los requerimientos establecidos en la hipótesis 1. En el caso de que se cumpla con la hipótesis 1 se puede llegar a la conclusión de que en el sistema se puede utilizar el control retroalimentado con retardo para estabilizar una órbita periódica que se encuentre incrustada en el atractor. Por otro lado, si no se cumple con la hipótesis 1 no se podrá determinar si es o no posible estabilizar al sistema en una órbita periódica mediante el control retroalimentado con retardo.

En la Figura 30 se muestra el diagrama de Feigenbaum del sistema, sobre el eje horizontal se grafica el parámetro a variar ( $k_s$ ) y sobre el eje vertical se grafica la amplitud del estado  $z_1$ . El parámetro  $k_s$  se varía de 0.5 a 1.4, y el valor de  $\zeta$  se mantiene fijo en 0.5.

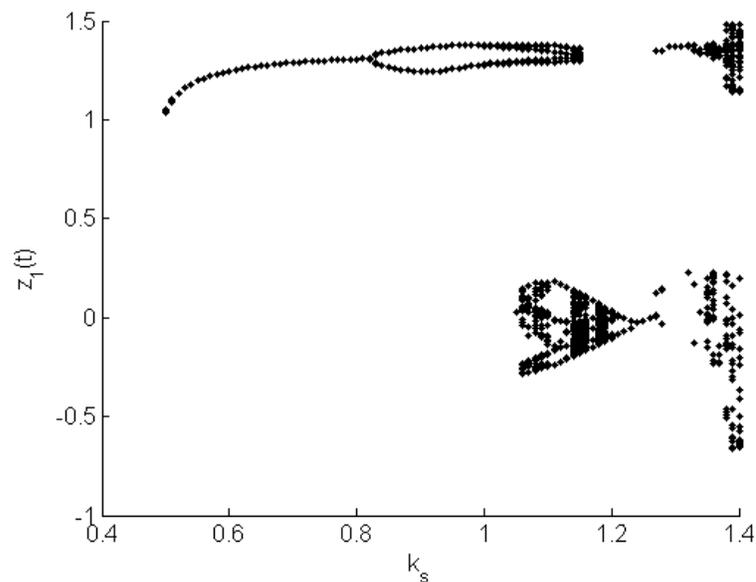


Figura 30: Diagrama de Feigenbaum del sistema de control con un polinomio cúbico.

Analizando el diagrama de Feigenbaum del sistema, Figura 30, se observa que el sistema no presenta una ruta hacia el caos mediante una cascada de bifurcaciones de duplicación de período, al menos no de una forma visible. Claramente se observa que cuando el sistema es caótico, existen dos atractores conviviendo entre sí, esto genera que

la trayectoria vaya de un atractor a otro. En este caso, al no cumplir con la hipótesis 1 no se podrá determinar si el control retroalimentado con retardo puede o no estabilizar en una órbita periódica propia del sistema.

Ahora es necesario aplicar el control retroalimentado con retardo y ver qué es lo que sucede con el sistema. El control tiene la siguiente forma  $u = -K [z_1(t) - z_1(t - \tau)]$ , y las ecuaciones de estado quedan expresadas como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -z_2 - z_3 - k_s z_1 (z_1^2 - 1) - K [z_1(t) - z_1(t - \tau)].\end{aligned}\tag{28}$$

Al momento de fijar el valor del parámetro de retardo en  $\tau = 6.7$ , no fue posible determinar un valor de ganancia,  $K$ , del control retroalimentado con retardo de tal manera que el sistema se estabilizará en la órbita periódica deseada.

Sin embargo, con algunos valores de  $K$  se pudo estabilizar al sistema en una órbita periódica. Sin embargo, el período de esta órbita periódica no corresponde al valor de  $\tau$ . Por ejemplo, en la Figura 31 se muestra que para  $K = 0.03$  se logra estabilizar al sistema en una órbita 1-periódica. Sin embargo, el período de esta órbita periódica es de  $T = 14.7$  y no corresponde al período de la órbita periódica deseada ( $\tau = 6.7$ ).

En la Figura 32, se puede ver cómo se comporta la señal de control, los parámetros del control  $K$  y  $\tau$  fueron fijados en 0.03 y 6.7, respectivamente. En este sistema, la señal de control se comporta diferente que en los sistemas pasados. En los casos anteriores, el control tenía amplitudes relativamente grandes mientras estabilizaba al sistema en la órbita periódica, y ya que lograba estabilizarlo, la amplitud prácticamente se hacia cero. En este sistema no sucede lo mismo, aquí la amplitud se comporta de la misma manera todo el tiempo. Sin embargo, su amplitud es relativamente pequeña.

Una de las características del control retroalimentado con retardo dice que cuando el sistema es estabilizado en una de sus órbitas periódicas, la amplitud de la señal de control se hace cero. En este caso se puede observar que la amplitud máxima de la señal de control es de 0.08. Entonces, se puede pensar que el sistema fue estabilizado

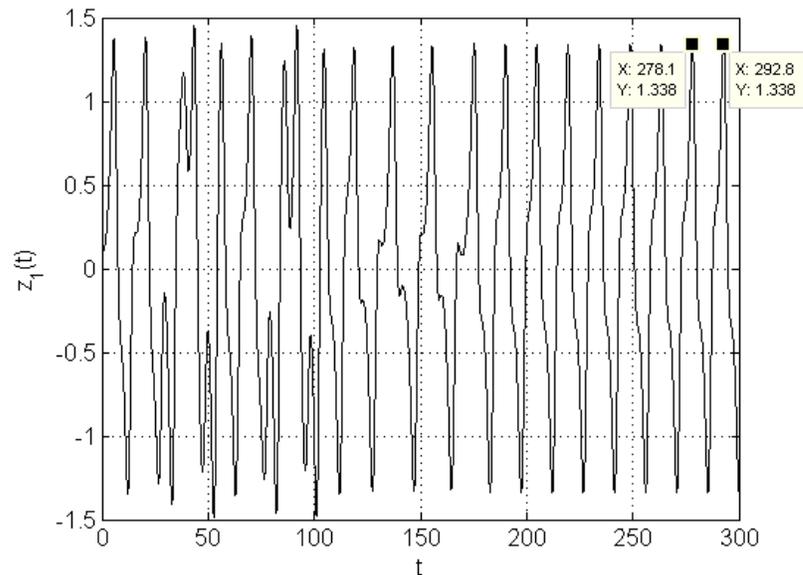


Figura 31: *Evolución de la salida del sistema.*

en una de sus órbitas periódicas. Sin embargo, no fue estabilizado en la órbita periódica deseada. Por lo tanto, se puede concluir que el desempeño del control en este sistema es pobre.

En este sistema se presentó el caso donde no se satisface con lo que se estableció en la hipótesis 1, por lo tanto, no se tenía una certeza de lo que ocurriría al momento de aplicar el control retroalimentado con retardo. Sin embargo, como se observó en este caso, se logró estabilizar al sistema en una órbita periódica, aunque ésta no fue la órbita periódica seleccionada.

#### **Sistema 4** *Sistema de Sprott*

Este sistema también es conocido como el circuito de Sprott. Este circuito es muy sencillo de construir debido a que solamente utiliza resistencias, capacitores, diodos y amplificadores operacionales. Existen cuatro variantes de este circuito, pero en este trabajo solamente se estudiarán dos de éstas cuatro variantes.

La primera variante que se estudia del sistema de Sprott es cuando la función no lineal es la función mínimo. El conjunto de ecuaciones de estado que describe el com-

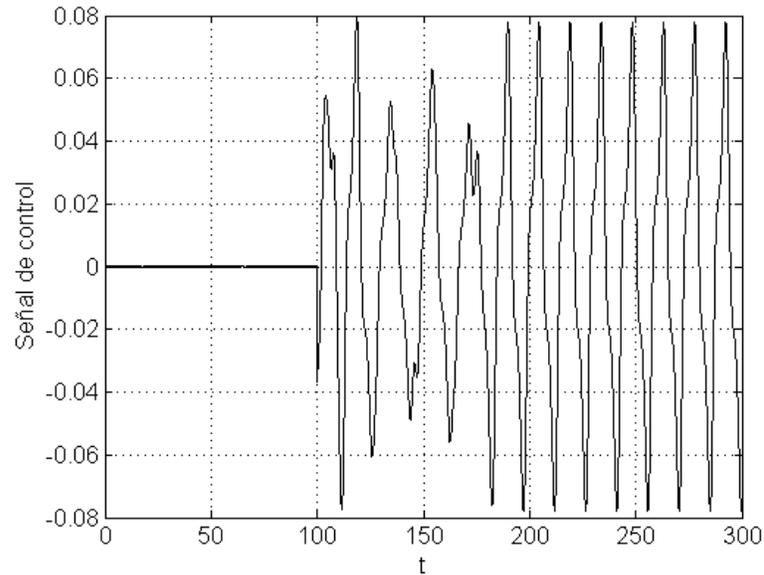


Figura 32: Señal de control retroalimentado con retardo.

portamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= -x_2 - ax_3 - 6 \min(x_1, 0) - 0.5 + u.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Los estados del sistema son representados por los  $x_i$ ,  $a$  es el parámetro y  $u$  es una entrada de control. La salida del sistema de Sprott es el estado  $x_1(t)$ . Si el sistema se encuentra en lazo abierto, es decir  $u = 0$ , y el parámetro  $a$  tiene un valor de 0.6 se tiene que el sistema presenta un comportamiento caótico. La proyección sobre  $x_1 - x_2$  del atractor caótico del sistema de Sprott se muestra en la Figura 28.

Para tener un mejor conocimiento de la factibilidad de poder utilizar el control retroalimentado con retardo en el sistema de Sprott es necesario realizar un análisis de su diagrama de Feigenbaum. Este diagrama se obtiene variando uno de sus parámetros, en este caso solamente se cuenta con un parámetro a variar ( $a$ ). En la Figura 34 se muestra este diagrama de Feigenbaum, sobre el eje horizontal se grafica el parámetro  $a$  y sobre el eje vertical se grafica la amplitud del estado  $x_1$ .

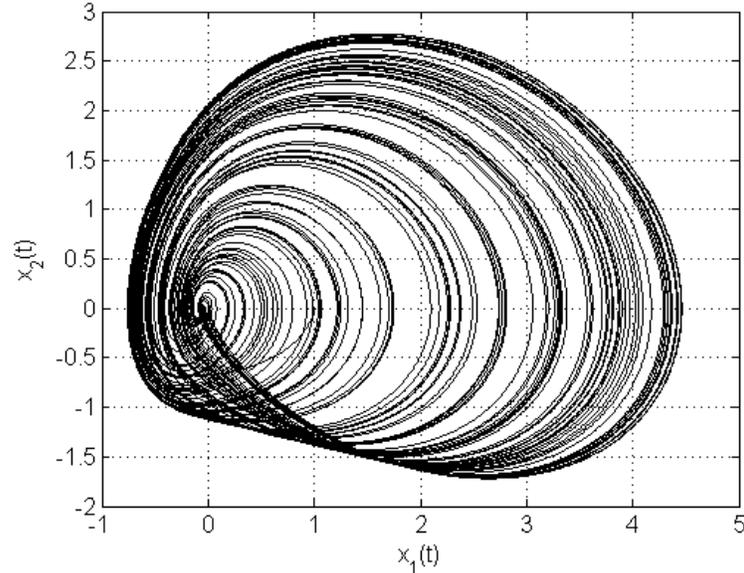


Figura 33: *Atractor del sistema de Sprott con la función mínimo.*

De la Figura 34 se puede analizar el diagrama de Feigenbaum del sistema de Sprott. Claramente se observa que el sistema llega a presentar un comportamiento caótico mediante una cascada de bifurcaciones de duplicación de período, cumpliéndose con la hipótesis 1. Entonces, considerando lo que se estableció en la hipótesis 1, el sistema podrá ser estabilizado en una órbita periódica propia mediante el control retroalimentado con retardo, seleccionando apropiadamente el valor de la ganancia de retroalimentación  $K$ .

Si se aplica el control  $u = -K [x_1(t) - x_1(t - \tau)]$  el sistema de Sprott queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= -x_2 - 0.6x_3 - 6 \min(x_1, 0) - 0.5 - K [x_1(t) - x_1(t - \tau)].
 \end{aligned} \tag{30}$$

Si se fija el valor de la ganancia  $K$  en 0.09 y el valor del parámetro de retraso  $\tau$  en 6.6. El control retroalimentado con retardo será capaz de estabilizar al sistema sobre una órbita 1-periódica de período 6.6, el cual es igual a el valor del retardo que se introduce en el control. En la Figura 35 se muestra la proyección del atractor en el

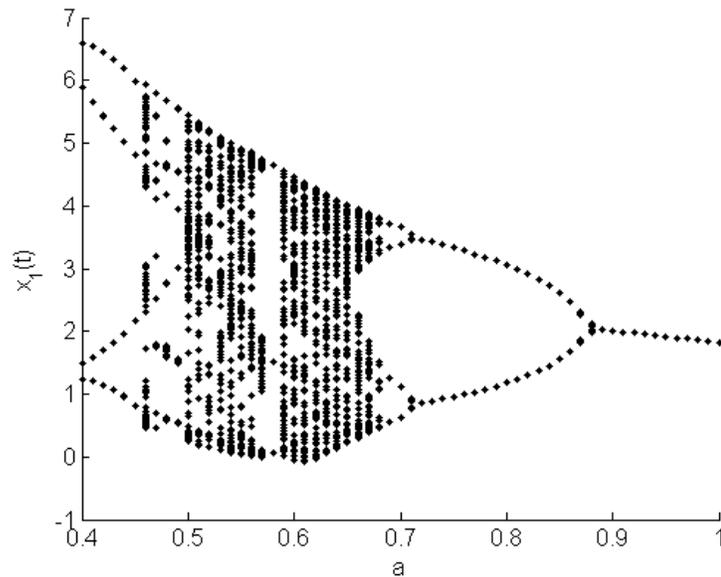


Figura 34: Diagrama de Feigenbaum del sistema de Sprott con la función mínimo.

plano  $x_1 - x_2$ . Este atractor pertenece a una órbita 1-periódica.

El control retroalimentado con retardo se aplica al sistema de Sprott a partir de los 100 *seg*. Como se muestra en la Figura 36. Antes de los 100 *seg*, la amplitud de la señal de control es nula. A los 100 *seg* aparece la señal del control retroalimentado con retardo, llevando al sistema a un comportamiento periódico en un tiempo aproximado de 150 *seg*. Después de esto, la amplitud de la señal de control, vuelve a ser muy cercana a cero.

La evolución del estado  $x_1(t)$  en el tiempo (salida del sistema) se muestra en la Figura 37. Se puede apreciar cómo antes de que aparezca la señal de control (antes de los 100 *seg*), el sistema se comporta caóticamente. Una vez que la señal de control afecta al sistema, éste transita de un comportamiento caótico a uno periódico, tomándole un tiempo de aproximadamente 300 *seg* en llegar a ser completamente 1-periódico con período igual a 6.6 *seg*.

Debido a que el sistema de Sprott cumple con los requerimientos establecidos en la hipótesis 1 se llegó a la conclusión de que es factible utilizar el control retroalimentado

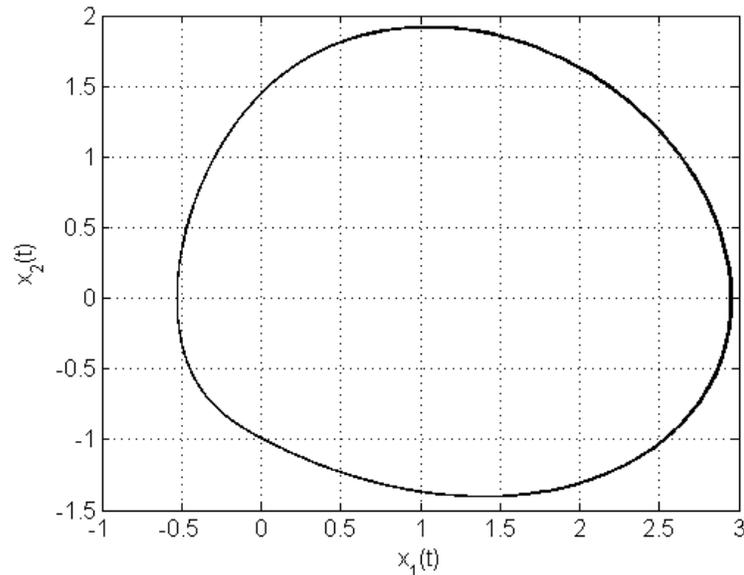


Figura 35: *Atractor del sistema de Sprott con la función mínimo, órbita 1-periódica.*

con retardo para estabilizar a este sistema en una órbita periódica propia seleccionada previamente. Al aplicar el control al sistema se comprobó que efectivamente este control estabiliza al sistema en la órbita periódica deseada sin mayores complicaciones.

**Sistema 5** *Sistema de Sprott con la función signo*

Ahora, consideraremos el sistema de Sprott cuando éste tiene como su elemento no lineal a la función signo. El comportamiento de este sistema es descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= -1.2x_1 - x_2 - ax_3 + 2\text{Sign}(x_1) + u,
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

donde  $a$  es un parámetro del sistema,  $x_i$ , son los estados y  $u$  es una entrada de control. Si se fija al parámetro  $a$  en 0.6 y la entrada de control ( $u$ ) es cero se tiene que el sistema presenta un comportamiento caótico. En la Figura 38 se muestra este comportamiento caótico.

Al variar el parámetro  $a$  de 0.55 a 1.3 se forma el diagrama de Feigenbaum que se muestra en la Figura 39. El eje horizontal corresponde al parámetro  $a$  y el eje vertical

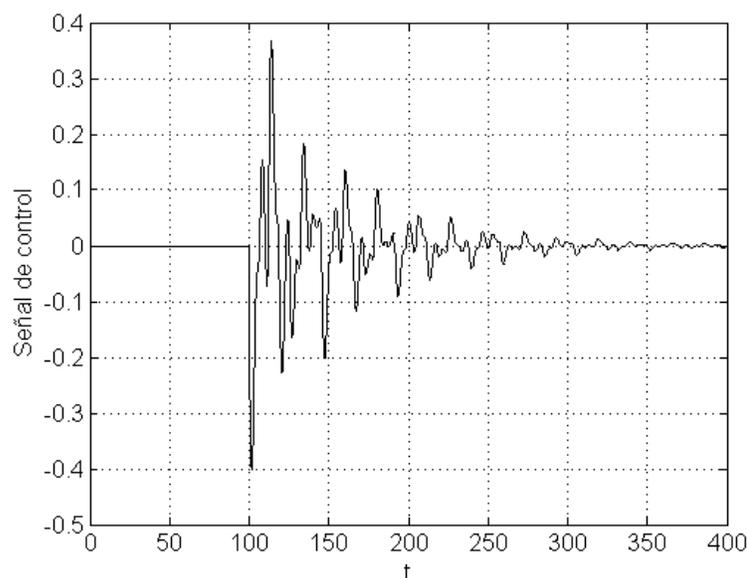


Figura 36: Señal de control en el sistema de Sprott.

corresponde a la amplitud del estado  $x_1$ .

El diagrama de Feigenbaum muestra la transición que tiene el sistema de un comportamiento quieto a uno caótico conforme se varía el parámetro  $a$ . De la Figura 39 se observa que para valores de  $a > 1.2$ , tiende hacia uno de sus dos puntos de equilibrios estables  $((-5/3, 0, 0)$  y  $(5/3, 0, 0))$  dirigiéndose a uno u otro en función de las condiciones iniciales. Para  $a = 1.2$ , el sistema presenta un comportamiento periódico, con un período de  $T = 6.6$ . Finalmente, para los valores correspondientes a  $a < 1.2$  se observa que el sistema presenta una explosión hacia el caos y además dos atractores conviven entre sí.

Debido a que el sistema no cumple con lo establecido en la hipótesis 1, no se podrá determinar si el control retroalimentado con retardo es capaz o no en estabilizar al sistema en una órbita periódica propia seleccionada previamente.

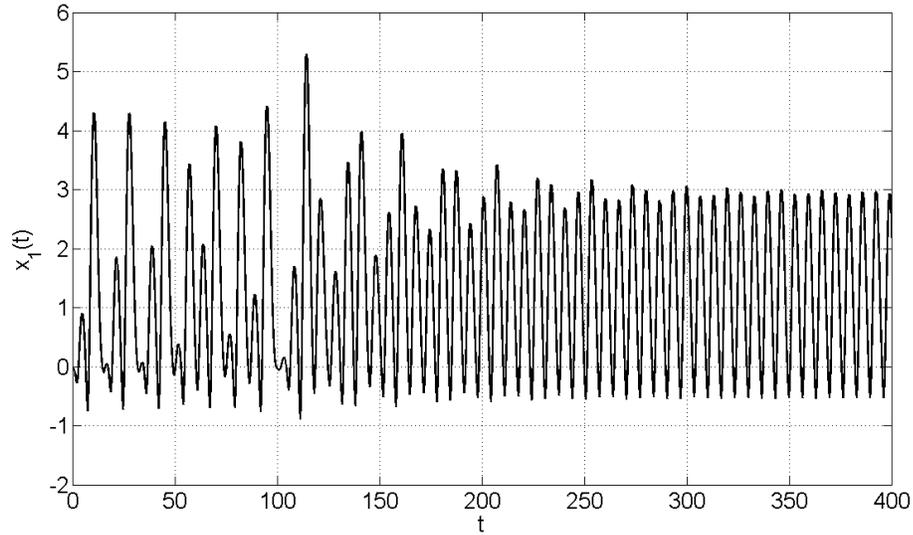


Figura 37: Evolución en el tiempo de la salida del sistema.

Al aplicar el control  $u = -K [x_1(t) - x_1(t - \tau)]$  al sistema, el conjunto de ecuaciones de estados quedan determinados como

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= -1.2x_1 - x_2 - 0.6x_3 + 2\text{Sign}(x_1) - K [x_1(t) - x_1(t - \tau)].
 \end{aligned} \tag{32}$$

La órbita que se desea estabilizar tiene un período de 6.6 *seg*, así que solamente queda asignar el valor de  $K$  para estabilizar al sistema. Esta ganancia se buscó a prueba y error, y no se pudo encontrar el valor de  $K$  que estabilizara a esa órbita.

Al igual que en los sistemas pasados, el control se aplicó después de un tiempo de haber iniciado la simulación. En este caso fue a los 100 *seg*. En la Figura 40 se observa cómo esta señal de control se mantiene oscilando entre los valores de 0.8 y  $-0.8$ , y el período en la que oscila es de 8.2 *seg*. Para generar esta figura se fijaron los parámetros  $K$  y  $\tau$  del control retroalimentado con retardo en 0.29 y 6.6, respectivamente.

El valor de  $K$  con el cual se estabilizó al sistema en la órbita periódica es igual a 0.29. Sin embargo, la órbita en la cual se estabilizó el sistema es de período igual a 8.2 *seg*, Figura 41. El período de la órbita es diferente al período en el que quería estabi-

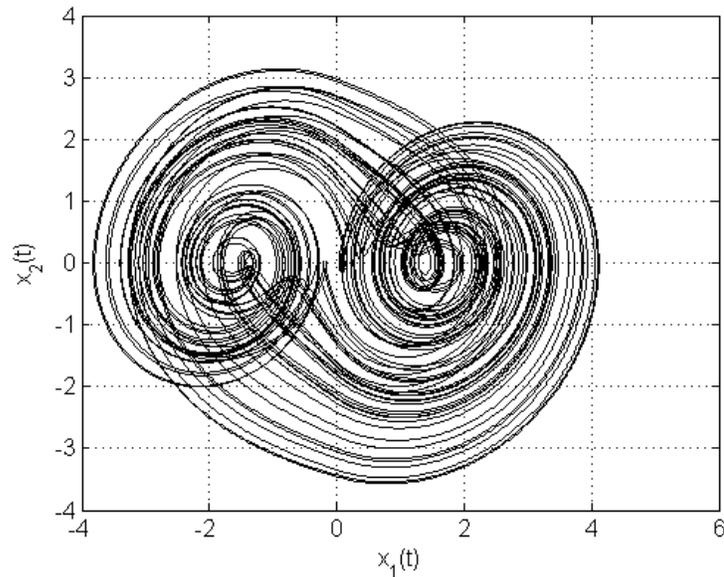


Figura 38: *Atractor del sistema de Sprott con función signo.*

lizar al sistema, la órbita en la que se deseaba estabilizar al sistema le correspondía un período de 6.6 *seg* y después de aplicar el control el sistema se encuentra estabilizado en una órbita de 8.2 *seg* de período. Un problema común, adicional a los mencionados previamente en el caso en que el sistema no satisface las condiciones de la hipótesis 1 es que, aún cuando sea posible estabilizar al sistema en una órbita periódica, el sistema controlado presenta una alta sensibilidad a la ganancia de retroalimentación  $K$ . Esto significa que, en la práctica, el sistema presentará un intervalo muy reducido para sintonizar dicha ganancia.

Como se pudo observar en el análisis del diagrama de Feigenbaum, el sistema no satisface las condiciones establecidas en la hipótesis 1; por lo tanto, con este análisis no fue posible determinar lo que ocurriría al aplicar el control retroalimentado con retardo. Al momento de aplicar el control se presentaron dos problemáticas principales. Una de éstas es que el control no estabilizaba al sistema en la órbita periódica deseada. La otra problemática es el rango reducido de la ganancia de retroalimentación en la cual estabilizaba el control al sistema.

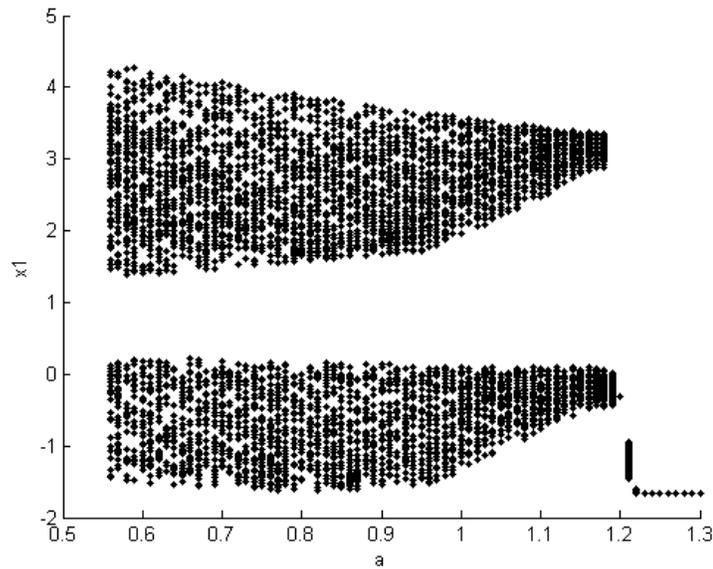


Figura 39: *Diagrama de Feigenbaum del sistema de Sprott con función signo.*

### III.4 Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto una hipótesis donde se establecen condiciones bajo las cuales, si se cumple con ellas, se asegura que el sistema podrá ser estabilizado en una de las órbitas periódicas que se encuentran incrustadas en su atractor mediante el control retroalimentado con retardo. También, mediante esta hipótesis se puede determinar un rango en el cual el control presenta un buen desempeño, como en el caso del sistema de control integral combinado con una función saturación.

Mediante los ejemplos que se presentaron, se pudo comprobar que en cada ocasión en que se cumplía con las condiciones de la hipótesis, el control retroalimentado con retardo estabilizaba al sistema. Por lo tanto, se puede concluir que con la hipótesis que se estableció se puede determinar, de una manera sencilla y confiable, en que casos aplicar el control retroalimentado con retardo.

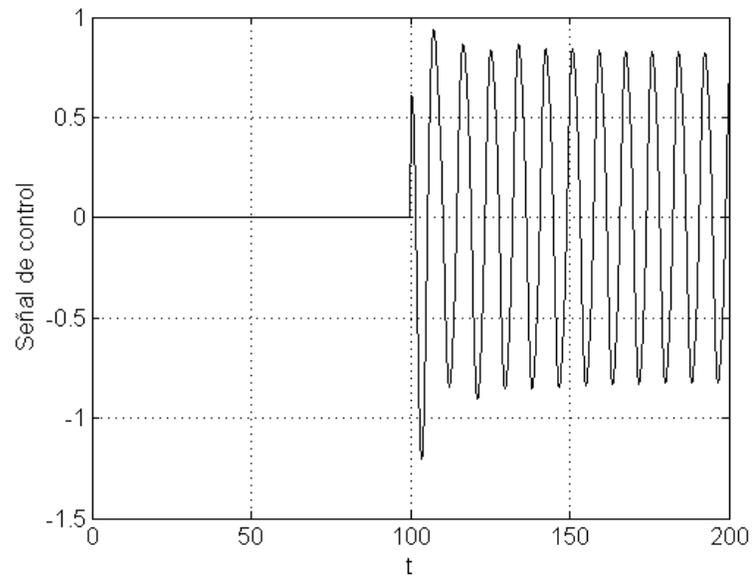


Figura 40: *Señal de control retroalimentado con retardo.*

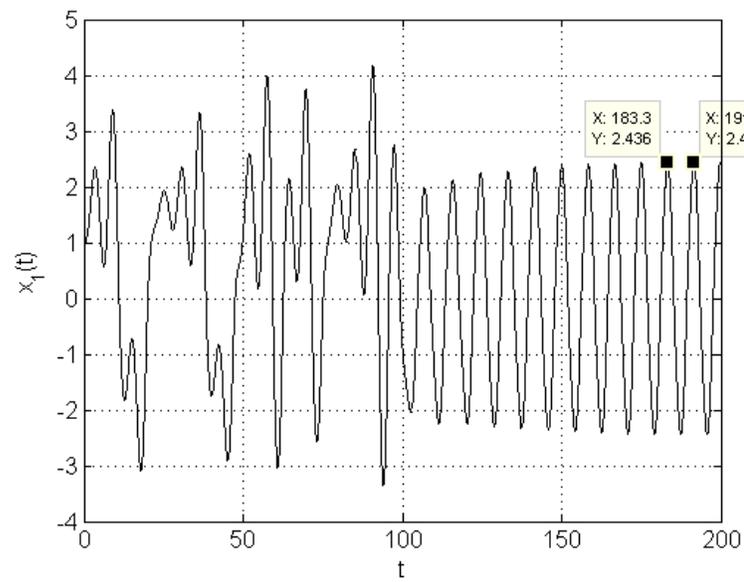


Figura 41: *Evolución en el tiempo de la salida del sistema.*

# Capítulo IV

## Propuesta de control

En este capítulo se propone un control discontinuo para estabilizar sistemas en los cuales el control retroalimentado con retardo no sea capaz de estabilizarlos, debido a la limitación del número impar de multiplicadores característicos mayores que uno. En la Sección IV.1 se describe el diseño de este control. Después, en la Sección IV.2 se implementa este control discontinuo en algunos sistemas en los que no se puede suprimir el comportamiento caótico por medio del control retroalimentado con retardo.

### IV.1 Diseño y análisis de la señal de control discontinuo

La idea en esta sección es diseñar un control discontinuo que estabilice a una cierta clase de sistemas en los cuales el control retroalimentado con retardo no sea capaz de estabilizarlos, debido a la limitación del número impar mencionada anteriormente.

A continuación se presenta la forma que tiene este control y se explica, de una forma muy general, el procedimiento para diseñarlo. El diseño del control se basa en el método de la función descriptiva.

#### IV.1.1 Procedimiento de diseño

Antes de iniciar con el procedimiento para el diseño del control, se presenta la forma que tiene control que se propone para la supresión del comportamiento caótico en algún tipo de sistemas dinámicos caóticos. El control que se propone tiene la siguiente forma:

$$u_0(y(t)) = b_0 y(t) + c_0 \sigma(y(t)), \quad (33)$$

donde  $y(t)$  es la salida del sistema,  $\sigma(\cdot)$  es una función discontinua y  $(b_0, c_0)$  representan los parámetros del control. El diseño del control solamente se basa en la señal

de salida del sistema. Se debe notar que el control cuenta con una parte lineal y con otra no lineal. La intención al introducir este control, ecuación (33), es modificar el estado estacionario del sistema, con la introducción de una solución periódica estable.

La idea de proponer un control que contenga una función discontinua es debido a la ventajas que ofrece un control discontinuo con respecto a un control suave. Una de las principales ventajas que se tiene con esta metodología es la robustez que presentan ante perturbaciones de señales externas y ante variaciones paramétricas que pueden afectar el comportamiento dinámico de los sistemas.

Si se introduce el control discontinuo, ecuación (33), en un sistema dinámico caótico, se tiene que las ecuaciones del sistema en lazo cerrado toman la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + K_0 u_0(y(t)), \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (34)$$

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + K_0 (b_0 y(t) + c_0 \sigma(y(t))),$$

donde  $K_0$  es un vector columna de escalares ( $K_0 \in \mathbb{R}^n$ ). Suponga que la salida es  $y = Cx$ , con  $C$  un vector fila de dimensión  $n$ . En la Figura 42 se muestra un diagrama esquemático del sistema controlado.

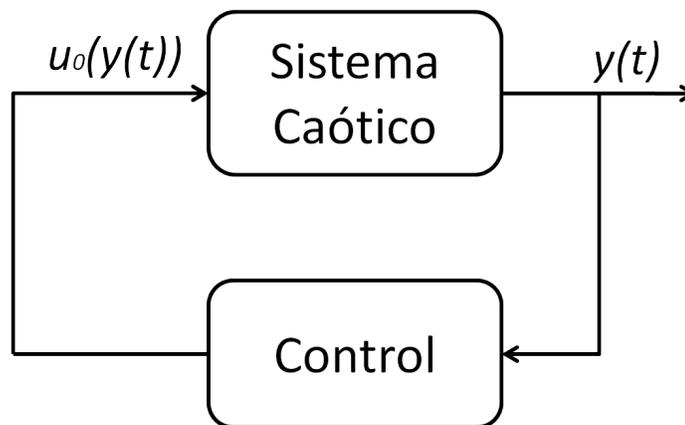


Figura 42: Diagrama a cuadros del sistema controlado.

Ahora es necesario seleccionar los valores de los parámetros de control,  $b_0$  y  $c_0$ , para introducir una órbita periódica estable al sistema. Para la selección de  $b_0$  y  $c_0$  se propone que se realice con la ayuda del método de la función descriptiva. Con este

método se puede predecir el comportamiento del elemento no lineal ante una excitación sinusoidal (a la órbita periódica se le aproxima a una señal sinusoidal) estableciéndose las condiciones para la existencia de una órbita periódica. Posteriormente, con la ayuda del criterio de estabilidad de Nyquist se puede hacer un análisis de estabilidad de la órbita periódica.

La aplicación del método de la función descriptiva requiere que el sistema sea descompuesto por una parte lineal y en una no lineal, en la llamada forma de Lur'e (Figura 43). Entonces, si el sistema puede ser representado en la forma de Lur'e, al momento de aplicar el control el sistema también podrá ser representado en esta forma, ya que podemos agrupar la parte lineal del sistema con la parte lineal del control y a su vez agrupar las partes no lineales tanto del sistema como la del control. Una vez que se obtiene la función descriptiva de los elementos no lineales, se hace el análisis de estabilidad de la órbita con el criterio de estabilidad de Nyquist, y al mismo tiempo se ajustan los parámetros  $b_0$  y  $c_0$  del control hasta que se tenga estabilidad en la órbita periódica.

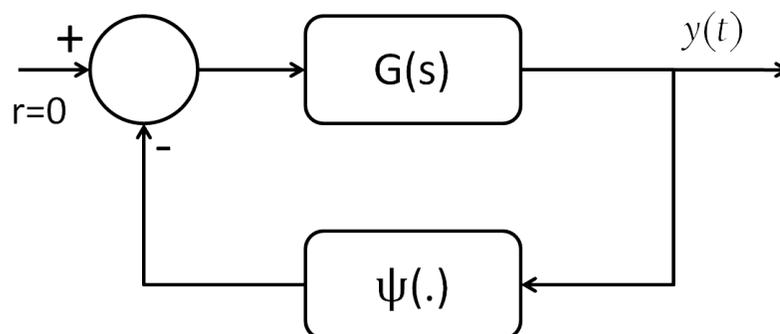


Figura 43: Forma de Lur'e.

## IV.2 Aplicación de la señal de control

En esta sección se aplica la metodología de control discontinuo para suprimir el comportamiento caótico en un tipo de sistema en el cual el control retroalimentado con retardo no funcionó satisfactoriamente. Esto significa que no fue posible diseñar un control que mantuviera al sistema en la órbita periódica que se deseaba estabilizar, además de que

el control mostró una gran sensibilidad ante variaciones paramétricas.

A continuación se dan dos ejemplos de la aplicación de este control discontinuo.

### IV.2.1 Control de un sistema de Sprott

El control discontinuo retroalimentado se aplica al sistema de Sprott (35) y al sistema (42). El primer sistema incluye la función signo como elemento no lineal, el segundo una función no lineal cúbica. Ambos sistemas no se pudieron controlar con el control retroalimentado con retardo.

Por ejemplo, suponga que el campo vectorial  $F(\cdot)$  del sistema (34) tiene la forma

$$F(x) = Ax + bK_0\varphi(y),$$

donde  $\varphi$  es una función escalar. Entonces el sistema (34) puede expresarse como

$$\dot{x} = \tilde{A}x + K_0\gamma(y), \quad y = Cx,$$

donde  $\tilde{A} = A + K_0b_0C$ ,  $\gamma(y) = (b\varphi(y) + C_0\sigma(y))$ .

Entonces

$$G(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1}K_0,$$

$$\varphi(y) = -\gamma(y) = -b\varphi(y) - C_0\sigma(y).$$

La ecuación de estado que describe la dinámica de este sistema es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -1.2x_1 - x_2 - 0.6x_3 + 2\text{Sign}(x_1), \end{aligned} \tag{35}$$

donde se define a la salida del sistema como  $y(t) = x_1(t)$ . El atractor del sistema en régimen caótico se muestra en la Figura 44.

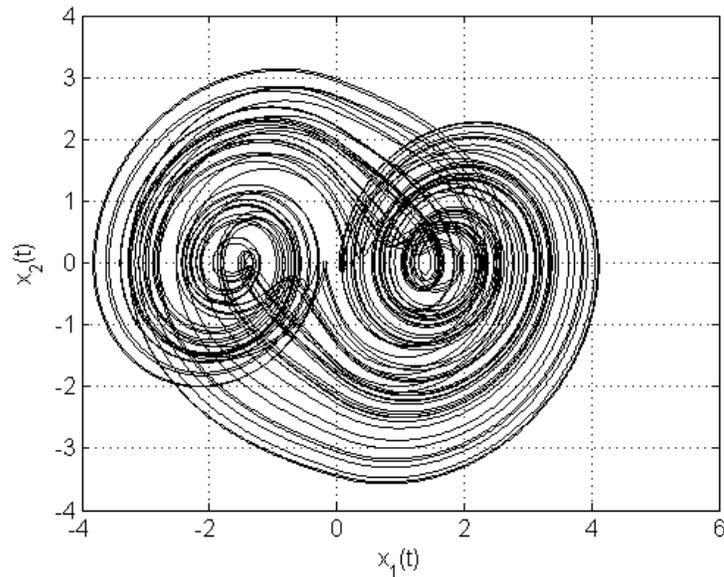


Figura 44: *Atractor del sistema de Sprott.*

Antes de aplicar el control discontinuo al sistema, se realiza un análisis de éste en lazo abierto por medio de la función descriptiva y el criterio de estabilidad de Nyquist.

Como el sistema solamente cuenta con un elemento no lineal, se puede representar en la forma de Lur'e, Figura 43. Siguiendo la forma de Lur'e, el elemento no lineal del sistema debe estar en  $\Psi(\cdot)$ , el cual está en la trayectoria de retroalimentación. Por lo tanto, se puede definir a  $\Psi(\cdot)$  como

$$\Psi(x_1) = -2\text{Sign}(x_1),$$

Con el cambio de variable anterior, el conjunto de ecuaciones de estado que representa la dinámica del sistema tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -1.2x_1 - x_2 - 0.6x_3 - \Psi(x_1).\end{aligned}$$

La parte lineal del sistema se puede representar por medio de una función de transferencia, ésta se define como

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.2 & -1 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

Con la definición de  $G(s)$  y de las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , la función de transferencia queda expresada como

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 0.6s^2 + s + 1.2}$$

En el Capítulo II se analizó la ecuación característica. Con ésta se puede predecir si existe una órbita periódica del sistema, cuando está en la forma de Lur'e. En este caso debe de existir una pareja  $(A, w)$  que satisfaga la ecuación

$$1 + G(jw)N(A, w) = 0, \quad (36)$$

donde  $N(A, w)$  es la función descriptiva del elemento no lineal y se define como

$$N(A, w) = \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1}.$$

Los parámetros  $(\hat{\Psi}_1, \hat{y}_1)$  representan al primer coeficiente de Fourier de  $\Psi(y(t))$  y de  $y(t)$ , respectivamente. Como se desea predecir la existencia de una órbita periódica, se puede aproximar a  $y(t)$  como una señal sinusoidal

$$y(t) = x_1(t) = A \operatorname{sen}(wt).$$

Para calcular  $N(A, w)$  es necesario calcular primero los coeficientes de Fourier  $\hat{\Psi}_1$  y  $\hat{y}_1$ .

- Para  $\hat{\Psi}_1$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_1 &= \int_0^T \Psi(y(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \Psi(A \operatorname{sen}(wt)) e^{-j\omega t} dt, \\ \hat{\Psi}_1 &= \int_0^T [-2 \operatorname{Sign}(A \operatorname{sen}(wt))] e^{-j\omega t} dt = j \frac{4T}{\pi}. \end{aligned}$$

- Para  $\hat{y}_1$

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= \int_0^T y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^T A \operatorname{sen}(\omega t)e^{-j\omega t} dt, \\ \hat{y}_1 &= A \int_0^T \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{j\omega t} dt = -j \frac{AT}{2}.\end{aligned}$$

Una vez que se obtienen los coeficientes de Fourier,  $\hat{\Psi}_1$  y  $\hat{y}_1$ , se puede obtener la función descriptiva  $N(A, w)$

$$N(A, w) = \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1} = \frac{j4T/\pi}{-jAT/2} = -\frac{8}{A\pi}.$$

Ahora que se tiene la función de transferencia y la función descriptiva de la ecuación (36), es posible hacer un análisis y determinar si existe una órbita periódica en el sistema. Si existen valores de  $w$  y  $A$  que satisfagan a la ecuación (36), se dice que existe una órbita periódica en el sistema.

Si se sustituye a  $s$  por  $jw$  en la función de transferencia  $G(s)$ .

$$\begin{aligned}G(jw) &= \frac{1}{(jw)^3 + 0.6(jw)^2 + (jw) + 1.2} = \frac{1}{-jw^3 - 0.6w^2 + jw + 1.2}, \\ G(jw) &= \frac{(1.2 - 0.6w^2) - j(w - w^3)}{(1.2 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2},\end{aligned}$$

$G(jw)$  está formado por una parte real y una parte imaginaria. Estas son

$$\begin{aligned}\Re\{G(jw)\} &= \frac{1.2 - 0.6w^2}{(1.2 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2}, \\ \Im\{G(jw)\} &= \frac{-(w - w^3)}{(1.2 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2},\end{aligned}$$

Sustituyendo a esta última ecuación en (36) se tiene que

$$1 + N(A) [\Re\{G(jw)\} + \Im\{G(jw)\}] = 0. \quad (37)$$

De la ecuación (37) se forman otras dos ecuaciones. Una de éstas se compone de la parte real de la ecuación (37) y la otra de la parte imaginaria

$$1 + N(A)\Re\{G(jw)\} = 0, \quad (38)$$

$$\Im\{G(jw)\} = 0. \quad (39)$$

Ahora, de la ecuación (39) se puede obtener la frecuencia de la órbita,  $w$ :

$$\frac{-(w - w^3)}{(1.2 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2} = 0,$$

de donde

$$\bar{w}_1 = 0, \bar{w}_2 = 1 \text{ rad/seg}, \bar{w}_3 = -1 \text{ rad/seg}.$$

La frecuencia de interés es la de  $\bar{w}_2 = 1 \text{ rad/seg}$ . Entonces a la frecuencia de  $\bar{w}_2$  se sustituye en la ecuación (38)

$$1 + N(A) \frac{1.2 - 0.6(1)}{(1.2 - 0.6(1))^2 + (1 - 1^3)^2} = 0,$$

entonces

$$N(A) = -\frac{3}{5},$$

por lo que

$$A = \frac{40}{3\pi} = 4.2441. \quad (40)$$

Como se han encontrado valores de frecuencia  $w$  y de amplitud  $A$  que satisfacen la ecuación (36), entonces se puede afirmar que existe una órbita periódica en el sistema. Esto se puede comprobar graficando el diagrama de Nyquist del sistema; el cual consiste en graficar en un plano complejo la función de transferencia y la función descriptiva. Si estas dos gráficas se intersectan, existirá una órbita periódica en cada intersección. En la Figura 45 se muestra la gráfica de Nyquist del sistema. La línea azul corresponde a la función de transferencia ( $G(jw)$ ) y la línea roja corresponde al inverso negativo de la función descriptiva  $-1/N(A)$ . Se puede observar que hay dos puntos de intersección,  $k_1$  y  $k_2$ . De acuerdo a lo que se dijo anteriormente, se debe tener dos órbitas periódicas, pero esto no es cierto debido a que en el punto  $k_1$  la frecuencia correspondiente es igual a 0, lo que corresponde a un punto de equilibrio. Esto nos deja solamente el punto  $k_2$ , que corresponde a una frecuencia de  $1 \text{ rad/seg}$ . La frecuencia en el punto  $k_2$  corresponde a la frecuencia que se calculó analíticamente.

La evolución del inverso negativo de la función descriptiva se puede determinar de la siguiente forma. Se tiene que la función descriptiva es

$$N(A) = -\frac{8}{A\pi},$$

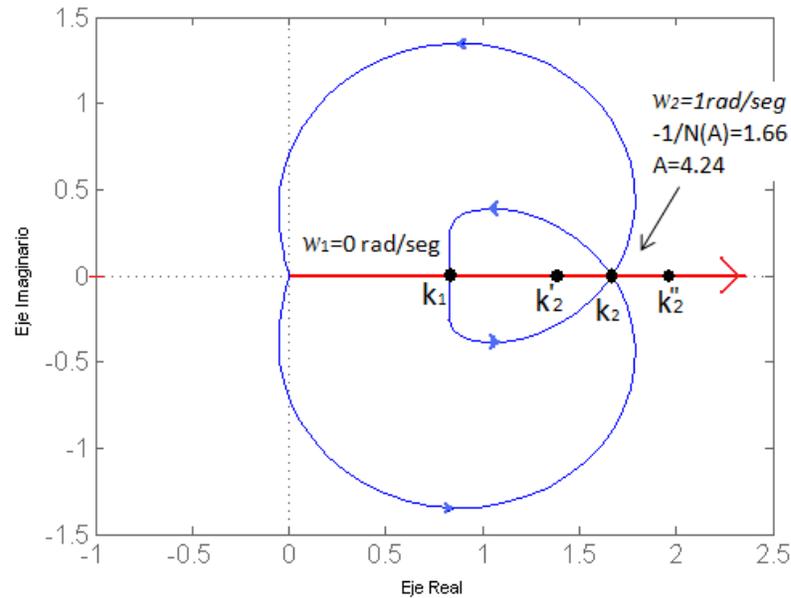


Figura 45: Gráfica de Nyquist.

y el inverso negativo es

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{A\pi}{8}. \quad (41)$$

De acuerdo a esta última ecuación, el valor del inverso negativo de la función descriptiva ( $-\frac{1}{N(A)}$ ) incrementa conforme  $A$  también incrementa, y conforme  $A$  disminuye  $-\frac{1}{N(A)}$  también lo hará.

Antes de discutir la estabilidad de la órbita periódica en el punto  $k_2$ , primero se determinarán los polos de la función de transferencia  $G(s)$ . La función de transferencia  $G(s)$  cuenta con tres polos, uno de estos polos se encuentra en el semiplano izquierdo del plano complejo y los otros dos forman un par complejo conjugado del lado derecho del mismo plano. Los polos de  $G(s)$  son  $\bar{s}_1 = -0.9237$ ,  $\bar{s}_2 = 0.162 + j1.13$  y  $\bar{s}_3 = 0.162 - j1.13$ .

El análisis de estabilidad de la órbita periódica en el punto  $k_2$  es como se describe a continuación. Suponga que el sistema inicialmente se encuentra operando en el punto  $k_2$  y su frecuencia es  $w_2$ . Si se aplica una pequeña perturbación, de tal manera que la amplitud de la señal a la entrada del elemento no lineal decrezca, y el punto de

operación  $k_2$  se mueva hacia la izquierda, es decir  $k_2$  pasa a un punto  $k'_2$ . Debido a que el punto de operación  $k'_2$  se encuentra encerrado dos veces por la curva de  $G(jw)$ , de acuerdo al criterio de estabilidad de Nyquist (Capítulo II), el sistema en este punto ( $k'_2$ ) es estable y la amplitud de la señal del sistema ( $A$ ) decrece y el punto de operación continuará moviéndose hacia la izquierda alejándose del punto de operación  $k_2$ . Ahora, si la perturbación amplifica la señal de entrada del elemento no lineal, y el punto de operación  $k_2$  se mueve hacia la derecha, pasa de  $k_2$  a  $k''_2$ , este punto de operación no se encontrará encerrado por la curva de  $G(jw)$ . El sistema, en este punto de operación, es inestable y la amplitud de la señal del sistema  $A$  aumenta y el punto de operación continúa moviéndose hacia la derecha alejándose del punto de operación  $k_2$ . Por lo tanto, se puede decir que la órbita periódica en el punto de operación  $k_2$  es inestable.

Debido a que la órbita del sistema en lazo abierto es inestable, se aplicará el control discontinuo ( $u_0$ ) y se fijarán los parámetros  $b_0$  y  $c_0$  de tal manera que a la salida del sistema controlado se tenga una órbita periódica estable. La dinámica del sistema controlado puede ser descrita por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -1.2x_1 - x_2 - 0.6x_3 + 2\text{Sign}(x_1) + b_0x_1 + c_0\text{Sign}(x_1).\end{aligned}$$

Hay que recordar que el diseño de este control se basa en el método de la función descriptiva, por lo tanto es necesario que el sistema controlado pueda ser representado en la forma de Lur'e. De las ecuaciones de estado anteriores se aprecia que el sistema controlado puede representarse en la forma de Lur'e, donde

$$\Psi(x_1) = -(2 + c_0)\text{Sign}(x_1).$$

La función de transferencia de la parte lineal se obtiene de la siguiente manera

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.2 + b_0 & -1 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 0.6s^2 + s + 1.2 - b_0}.$$

De la ecuación característica (ec. (36)) se puede determinar la existencia de órbitas periódicas. Para ésto es necesario primero obtener la función descriptiva,  $N(A, w)$

$$N(A, w) = \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1}.$$

- Para  $\hat{\Psi}_1$

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_1 &= \int_0^T \Psi(y(t)) e^{-jwt} dt = \int_0^T \Psi(\text{Asen}(wt)) e^{-jwt} dt, \\ \hat{\Psi}_1 &= \int_0^T [-(2 + c_0)\text{Sign}(\text{Asen}(wt))] e^{-jwt} dt = j2 \frac{2 + c_0}{\pi} T.\end{aligned}$$

- Para  $\hat{y}_1$

$$\hat{y}_1 = \int_0^T y(t) e^{-jwt} dt = \int_0^T \text{Asen}(wt) e^{-jwt} dt = -j \frac{AT}{2}.$$

Y se tiene que la función descriptiva del elemento no lineal del sistema controlado es

$$\begin{aligned}N(A, w) &= \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1} = \frac{j2T(2 + c_0)/\pi}{-jAT/2}, \\ N(A, w) &= -4 \frac{2 + c_0}{A\pi}.\end{aligned}$$

Una vez que se obtiene la función descriptiva del elemento no lineal es necesario determinar los valores de  $b_0$  y  $c_0$  del control para tener una órbita periódica estable. La forma más sencilla de tener esta órbita es haciendo que la función transferencia,  $G(s)$ , tenga todos sus polos del lado izquierdo del plano complejo. Para la selección de  $b_0$  nos apoyaremos en el criterio de estabilidad de Routh, para el cual se construye la tabla siguiente

$s^3$	1	1
$s^2$	0.6	$1.2 - b_0$
$s^1$	$-1 + \frac{b_0}{0.6}$	0
$s^0$	$1.2 - b_0$	0

Para que  $G(s)$  tenga todos sus polos del lado izquierdo del plano complejo es necesario que en la primera columna no haya cambio de signo, lo que conduce a las desigualdades

$$-1 + \frac{b_0}{0.6} > 0,$$

$$b_0 > 0.6,$$

y

$$1.2 - b_0 > 0,$$

$$b_0 < 1.2.$$

Por lo tanto, el rango en el que  $b_0$  debe de permanecer para que  $G(s)$  sea estable es:  $0.6 < b_0 < 1.2$ .

Ya que se ha determinado el rango de valores del parámetro  $b_0$ , queda por determinar  $c_0$ ,  $A$  y  $w$ . El siguiente valor de los parámetros que se obtendrá es el de la frecuencia  $w$ , el resto de los valores se obtendrán después. Para calcular el valor de la frecuencia de oscilación de la órbita periódica es necesario sustituir a  $s$  por  $iw$  en la función de transferencia

$$G(iw) = \frac{1}{(iw)^3 + 0.6(iw)^2 + (iw) + 1.2 - b_0},$$

$$G(iw) = \frac{(1.2 - b_0 - 0.6w^2) - j(w - w^3)}{(1.2 - b_0 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2}.$$

De aquí se obtiene una parte real y una imaginaria de  $G(iw)$

$$G(iw) = \Re\{G(iw)\} + \Im\{G(iw)\},$$

$$\Re\{G(iw)\} = \frac{1.2 - b_0 - 0.6w^2}{(1.2 - b_0 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2},$$

$$\Im\{G(iw)\} = -\frac{w - w^3}{(1.2 - b_0 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2}.$$

Sustituyendo a  $G(iw)$  en la ecuación (36) se obtiene

$$1 + N(A) [\Re\{G(iw)\} + \Im\{G(iw)\}] = 0.$$

De esta última ecuación se obtiene dos ecuaciones, una de ellas es la parte real de la ecuación y la otra es la parte imaginaria

$$\begin{aligned} 1 + N(A)\Re\{G(jw)\} &= 0, \\ \Im\{G(jw)\} &= 0. \end{aligned}$$

De la parte imaginaria se obtiene la frecuencia de la órbita periódica

$$-\frac{w - w^3}{(1.2 - b_0 - 0.6w^2)^2 + (w - w^3)^2} = 0,$$

donde

$$\bar{w}_1 = 0, \bar{w}_2 = 1 \text{ rad/seg}, \bar{w}_3 = -1 \text{ rad/seg}.$$

La frecuencia de interés es de  $1 \text{ rad/seg}$ . Sustituyendo esta frecuencia en la parte real

$$1 + N(A)\frac{1.2 - b_0 - 0.6}{(1.2 - b_0 - 0.6)^2 + (1 - 1^3)^2} = 0,$$

$$N(A) = -(1.2 - b_0 - 0.6) = b_0 - 0.6.$$

Debido a que el rango de  $b_0$  es de 0.6 a 1.2, la parte derecha de la última ecuación estará entre 0 y 0.6. Entonces, de esta última ecuación y de las condiciones que se han mencionado se puede elegir un valor para  $c_0$

$$N(A) = -4\frac{2 + c_0}{A\pi} = b_0 - 0.6,$$

$$-4\frac{2 + c_0}{A\pi} = -(0.6 - b_0).$$

De acuerdo al rango de  $b_0$ , la parte derecha de la ecuación será positiva, entonces tenemos que elegir un valor de  $c_0$  que haga que la parte izquierda de esta ecuación también sea positiva. Entonces,  $c_0 < -2$ .

Con esto, ya se ha encontrado un rango de valores de  $c_0$ . Para encontrar el valor de  $A$  es necesario elegir un valor para  $b_0$  y  $c_0$ . Si les asignamos los valores de  $b_0 = 0.9$  y  $c_0 = -2.5$ , se tiene que

$$-4\frac{2 - 2.5}{A\pi} = -(0.6 - 0.9).$$

Entonces,  $A = 2.12$ .

Después del análisis realizado se encontró que se tiene una órbita periódica de amplitud 2.12 y una frecuencia de  $1 \text{ rad/seg}$ . Ahora se estudiará la estabilidad de esta órbita periódica, para ésto se grafica el diagrama de Nyquist del sistema controlado, Figura 46, donde la línea azul corresponde a la función de transferencia,  $G(jw)$ , y la línea roja corresponde al inverso negativo de la función descriptiva,  $-1/N(A)$ . Estas dos gráficas presentan un solo punto de intersección,  $k_3$ , lo que corresponde a tener una órbita periódica en este punto. La frecuencia y amplitud de la órbita periódica que existe en el punto  $k_3$  corresponde a los valores encontrados analíticamente.

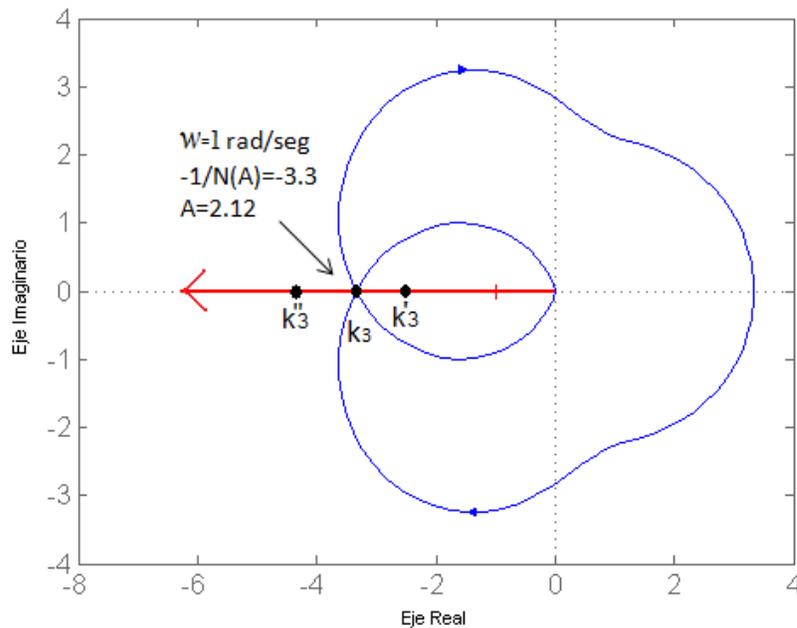


Figura 46: Gráfica de Nyquist.

La evolución del inverso negativo de la función descriptiva se determina de la siguiente forma. Se tiene que:

$$N(A) = -4 \frac{2 + c_0}{A\pi}$$

y el inverso negativo es

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{A\pi}{4(2 + c_0)} .$$

Entonces, de acuerdo a  $-1/N(A)$  y recordando que  $c_0 < -2$ , se tiene que conforme la amplitud de la órbita periódica ( $A$ ) tiende a infinito, el inverso negativo de la función descriptiva ( $-1/N(A)$ ) tenderá a  $-\infty$ , y conforme  $A$  tiende a cero,  $-1/N(A)$  también lo hará.

Para estudiar la estabilidad de la órbita periódica supondremos que el sistema inicialmente está operando en el punto de operación  $k_3$ , recordemos que ahora  $G(s)$  no tiene polos del lado derecho en el plano complejo. Aplíquese una perturbación de tal manera que la amplitud de la señal a la entrada del elemento no lineal decrezca y el punto de operación se mueva hacia la derecha, es decir pasa de  $k_3$  a  $k'_3$ . Debido a que el punto de operación  $k'_3$  es encerrado dos veces por la curva de  $G(jw)$ , el sistema en  $k'_3$  es inestable y la amplitud de la señal se incrementa y el punto de operación  $k'_3$  regresa a  $k_3$ . Por otra parte, si la perturbación hace que la amplitud de la señal de entrada del elemento no lineal se incremente y el punto de operación se mueva hacia la izquierda al punto de operación  $k''_3$ . Debido a que el punto de operación  $k''_3$  no se encuentra encerrado por la curva de  $G(jw)$ , entonces el sistema en  $k''_3$  es estable, generando que el valor de la amplitud de la señal del sistema disminuya y que el punto  $k''_3$  regrese a  $k_3$ . Por lo tanto, se puede concluir que la órbita periódica en  $k_3$  es estable.

Para comprobar que sí se obtiene una órbita periódica estable con esta selección de los parámetros de control, se muestra la salida del sistema,  $y(t) = x_1(t)$ , en la Figura 47. Se puede ver que antes de los 100 *seg* el sistema se comporta caóticamente y después de que fue aplicado el control discontinuo el sistema fue rápidamente estabilizado en la órbita periódica. En esta gráfica también se puede ver que la amplitud de la órbita periódica es de 2.1 y el período de ésta es de 6.3 *seg*. Tanto como la amplitud y el período que se pueden ver en la Figura 47 corresponden a la amplitud y período calculados analíticamente para esta órbita periódica.

En la Figura 48 se grafica la señal del control discontinuo. Antes de los 100 *seg* la amplitud del control es de 0, después de los 100 *seg* la amplitud del control se encuentra entre  $-2.5$  y  $2.5$ . El rango de amplitud en el que se encuentra el control corresponde al valor de su parámetro  $c_0$ .

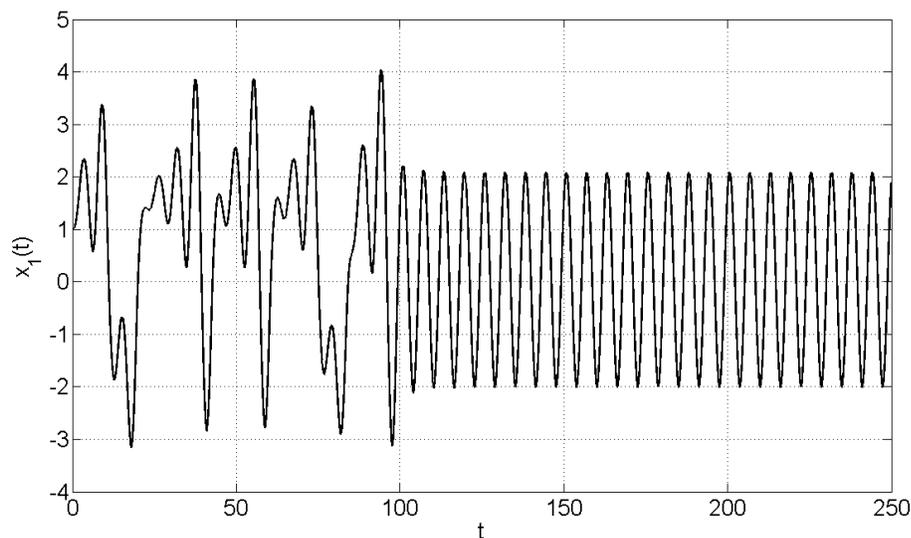


Figura 47: Salida del sistema  $x_1(t)$ .

Con esto se comprueba que el control discontinuo presenta un buen desempeño en este tipo de sistemas, el cual no pudimos estabilizar por medio del control retroalimentado con retardo.

## IV.2.2 Control de un sistema de control integral combinado con un polinomio cúbico

Ahora el control discontinuo se aplica a un sistema de control integral combinado con un polinomio cúbico. La ecuación de estado que describe la dinámica del sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2, \\
 \dot{z}_2 &= z_3, \\
 \dot{z}_3 &= -z_2 - z_3 - 1.4z_1(z_3^2 - 1).
 \end{aligned} \tag{42}$$

La salida del sistema se define como  $y(t) = z_1(t)$ . Este sistema presenta un comportamiento caótico, en la Figura 49 se muestra el atractor de este sistema.

Se realizará un análisis de este sistema por medio del método de la función descriptiva y el criterio de estabilidad de Nyquist, para conocer la dinámica del sistema y

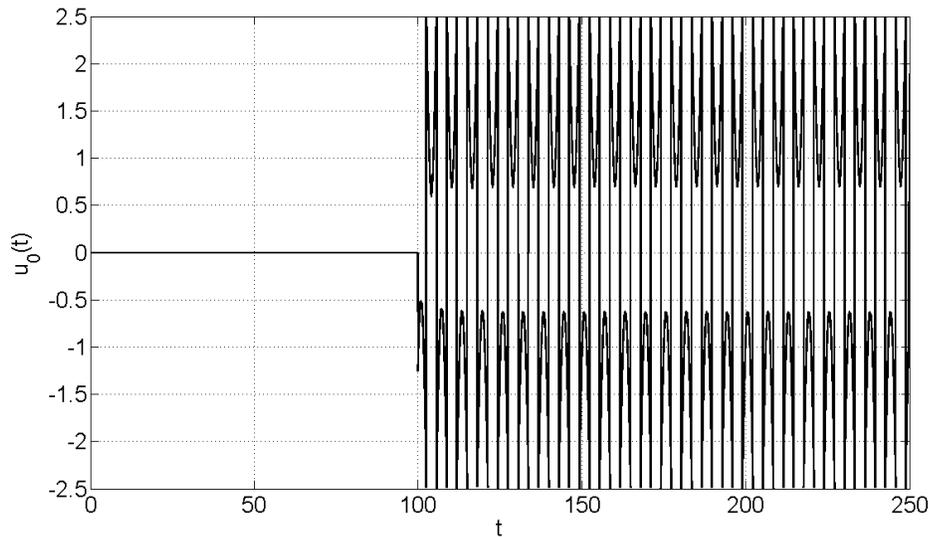


Figura 48: Control discontinuo,  $u_0(t)$ .

poder predecir la existencia de órbitas periódicas.

Para aplicar el método de la función descriptiva es necesario poder agrupar al sistema en una parte lineal y una no lineal, y representar a éste en la forma de Lur'e (Figura 43). De acuerdo con las ecuaciones de estado que describen la dinámica del sistema, éste solamente cuenta con un elemento no lineal, el cual es  $1.4z_1^3$ . Llevando al sistema a la forma de Lur'e, el elemento no lineal es reagrupado en la trayectoria de retroalimentación, entonces

$$\Psi(z_1) = 1.4z_1^3,$$

y las ecuaciones de estado son

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= 1.4z_1 - z_2 - z_3 - \Psi(z_1).\end{aligned}$$

Una vez que se agrupan los términos lineales y no lineales del sistema es posible obtener la función de transferencia y la función descriptiva. La función de transferencia, la cual se obtiene de la parte lineal, se define como

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

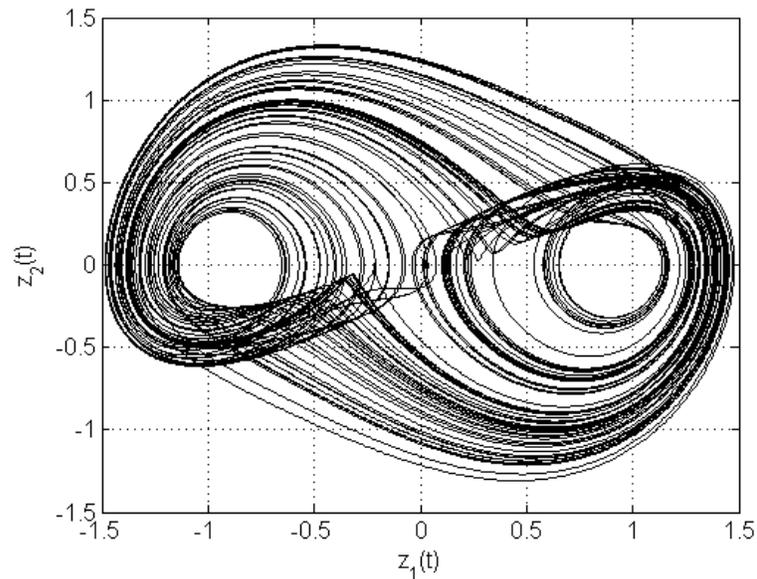


Figura 49: Atractor caótico del sistema del control integral combinado con un polinomio cúbico.

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.4 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + s - 1.4}.$$

La función descriptiva,  $N(A, w)$ , se obtiene del elemento no lineal y se define como

$$N(A, w) = \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1},$$

donde  $\hat{\Psi}_1$  y  $\hat{y}_1$  representan al primer coeficiente de Fourier de  $\Psi(y(t))$  y de  $y(t)$ , respectivamente.

La predicción de órbitas periódicas se puede hacer resolviendo la ecuación característica

$$1 + G(jw)N(A, w) = 0.$$

Entonces, se puede decir que existe una órbita periódica en el sistema si es posible encontrar una pareja  $(A, w)$  que satisfaga a la ecuación característica. Pero para poder resolver esta ecuación, primero, es necesario calcular los coeficientes de Fourier  $\hat{\Psi}_1$  y  $\hat{y}_1$  de la función descriptiva.

Como se desea realizar la predicción de la existencia de órbitas periódicas en el sistema, conviene aproximar a  $y(t)$  como una señal sinusoidal y así calcular los coeficientes de Fourier  $\hat{\Psi}_1$  y  $\hat{y}_1$ .

- Para  $\hat{\Psi}_1$

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_1 &= \int_0^T \Psi(y(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \Psi(A \operatorname{sen}(\omega t)) e^{-j\omega t} dt, \\ \hat{\Psi}_1 &= \int_0^T [A^3 \operatorname{sen}^3(\omega t)] e^{-j\omega t} dt = -j \frac{21}{40} A^3 T.\end{aligned}$$

- Para  $\hat{y}_1$

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= \int_0^T y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T A \operatorname{sen}(\omega t) e^{-j\omega t} dt, \\ \hat{y}_1 &= A \int_0^T \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-j\omega t} dt = -j \frac{AT}{2}.\end{aligned}$$

Entonces la función descriptiva queda expresada como

$$N(A, w) = \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1} = \frac{-j(21/40)A^3T}{-j(1/2)AT} = \frac{21}{20} A^2.$$

En la función de transferencia sustituimos a  $s$  por  $jw$  para obtener

$$\begin{aligned}G(jw) &= \frac{1}{(jw)^3 + (jw)^2 + (jw) - 1.4} = \frac{1}{-jw^3 - w^2 + jw - 1.4}, \\ G(jw) &= \frac{-(w^2 + 1.4) + j(w^3 - w)}{(w^2 + 1.4)^2 + (w^3 - w)^2}.\end{aligned}$$

De esta última ecuación se observa que  $G(jw)$  está formado por una parte real y una imaginaria. Éstas son

$$\begin{aligned}\Re\{G(jw)\} &= -\frac{w^2 + 1.4}{(w^2 + 1.4)^2 + (w^3 - w)^2}, \\ \Im\{G(jw)\} &= \frac{w^3 - w}{(w^2 + 1.4)^2 + (w^3 - w)^2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo a  $G(jw)$  en la ecuación (36) se obtiene

$$1 + N(A) [\Re \{G(jw)\} + \Im \{G(jw)\}] = 0.$$

De esta última ecuación se obtienen dos ecuaciones, una de ellas es la parte real de la ecuación y la otra es la parte imaginaria

$$\begin{aligned} 1 + N(A)\Re \{G(jw)\} &= 0, \\ \Im \{G(jw)\} &= 0. \end{aligned} \tag{43}$$

De la parte imaginaria de la ecuación se determina la frecuencia,  $w$ , de la órbita periódica

$$\frac{w^3 - w}{(w^2 + 1.4)^2 + (w^3 - w)^2},$$

de donde

$$\bar{w}_1 = 0, \bar{w}_2 = 1 \text{ rad/seg}, \bar{w}_3 = -1 \text{ rad/seg}.$$

Sustituyendo a  $\bar{w}_2$  en la parte real de la ecuación (43)

$$1 + N(A) \frac{-((1)^2 + 1.4)}{((1)^2 + 1.4)^2 + (1^3 - 1)^2} = 0.$$

Entonces

$$N(A) = \frac{12}{5}.$$

Por lo que

$$A = \sqrt{16/7} = 1.5118.$$

Mediante este análisis se dedujo que existe una órbita periódica de amplitud  $A = 1.51$  y de frecuencia  $w = 1 \text{ rad/seg}$ . Entonces, es necesario estudiar la estabilidad de esta órbita periódica. Para realizar el estudio de estabilidad se grafica el diagrama de Nyquist del sistema, en la Figura 50 se muestra este diagrama.

La línea azul de la gráfica de Nyquist, Figura 50, corresponde a la función de transferencia,  $G(jw)$ , y la línea roja corresponde al inverso negativo de la función descriptiva,

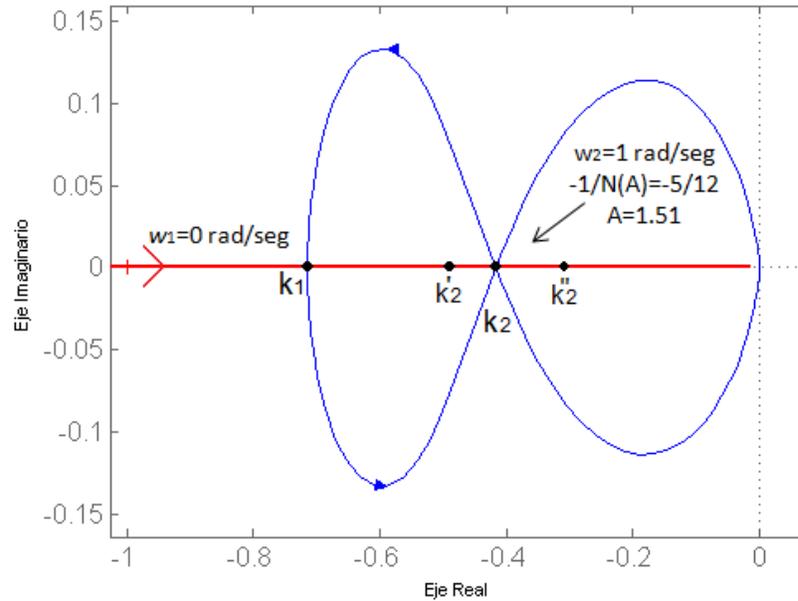


Figura 50: Diagrama de Nyquist del sistema de control integral con un polinomio cúbico.

$-1/N(A)$ . De esta gráfica se observa que existen dos puntos de intersección,  $k_1$  y  $k_2$ . En  $k_1$  se observa que la frecuencia correspondiente es de  $0 \text{ rad/seg}$ , lo que significa que este punto de intersección corresponde a un punto de equilibrio. En el punto  $k_2$  se tiene que existe una órbita periódica con una frecuencia correspondiente de  $1 \text{ rad/seg}$ . La órbita periódica del punto  $k_2$  corresponde a la órbita que se predijo mediante el análisis teórico.

La evolución del inverso negativo de la función descriptiva se determina de la siguiente forma. Se tiene

$$N(A) = \frac{21}{20}A^2,$$

y el inverso negativo

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{20}{21A^2}.$$

De acuerdo a  $-1/N(A)$  se tiene que conforme la amplitud de la órbita periódica ( $A$ ) tiende a cero, el inverso negativo de la función descriptiva ( $-1/N(A)$ ) tiende a  $-\infty$ , y conforme  $A$  tiende a  $\infty$ ,  $-1/N(A)$  tiende a cero.

Una vez definida la evolución del inverso negativo de la función descriptiva se hará el análisis de estabilidad de la órbita periódica en el punto  $k_2$ . Se supondrá que el sistema inicialmente está operando en el punto  $k_2$ . Al aplicar una perturbación de tal manera que la amplitud de la señal a la entrada del elemento no lineal decrezca y el punto de operación se mueva al punto  $k'_2$ . Debido a que  $k'_2$  se encuentra encerrado una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj por la curva de  $G(jw)$  el sistema en  $k'_2$  es estable, recuerde que  $G(s)$  tiene un polo en el semiplano derecho del plano complejo, la amplitud de la señal decrece y el punto de operación  $k'_2$  se mueve hacia  $-\infty$ . Ahora, si la perturbación hace que la amplitud de la señal de entrada del elemento no lineal crezca, genera que el punto de operación se mueva hacia la derecha, hacia  $k''_2$ . Entonces, debido a que  $k''_2$  está encerrado una vez en sentido a las manecillas del reloj por la curva de  $G(jw)$ , el sistema en  $k''_2$  será inestable y la amplitud de la señal crece ocasionando que el punto de operación siga moviéndose hacia la derecha, es decir hacia cero. Por lo tanto, después del análisis de estabilidad  $k_2$  se concluye que la órbita periódica en  $k_2$  es inestable.

Debido a que la órbita periódica del sistema es inestable y se desea tener un comportamiento estable, se aplica el control discontinuo ( $u_0$ ). Los parámetros de control,  $b_0$  y  $c_0$ , se eligen de tal manera que a la salida del sistema controlado se tenga una órbita periódica estable. Entonces el sistema controlado se representa por medio del siguiente conjunto de ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= 1.4z_1 - z_2 - z_3 - 1.4z_1^3 + b_0z_1 + c_0\text{Sign}(z_1).\end{aligned}$$

Hay que recordar que la selección de los parámetros de control se lleva a cabo con la ayuda del método de la función descriptiva, por lo tanto es necesario que el sistema controlado pueda ser representado en la forma de Lur'e. Para representar a un sistema en la forma de Lur'e es necesario agrupar a los elementos lineales y formar la función de transferencia y también agrupar los elementos no lineales con lo que se forma la función descriptiva. Los elementos no lineales del sistema controlado son agrupados de tal forma que se obtiene

$$\Psi(z_1) = 1.4z_1^3 - c_0\text{Sign}(z_1).$$

Entonces la ecuación de estado se puede representar como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= 1.4z_1 + b_0z_1 - z_2 - z_3 - \Psi(z_1).\end{aligned}$$

El procedimiento para obtener la función de transferencia es el siguiente

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.4 + b_0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + s - (1.4 + b_0)}.$$

La aproximación lineal de los elementos no lineales se hace por medio de la función descriptiva,  $N(A, w)$ , la cual se define como

$$N(A, w) = \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1},$$

donde  $\hat{\Psi}_1$  y  $\hat{y}_1$  representan el primer coeficiente de Fourier de  $\Psi(y(t))$  y de  $y(t)$ , respectivamente. Estos coeficientes de Fourier se obtienen como se ilustra a continuación

- Para  $\hat{\Psi}_1$

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_1 &= \int_0^T \Psi(y(t))e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \Psi(\text{Asen}(\omega t))e^{-j\omega t} dt, \\ \hat{\Psi}_1 &= \int_0^T [1.4z_1^3 - c_0 \text{Sign}(z_1)] e^{-j\omega t} = jT \left( \frac{2c_0}{\pi} - \frac{21}{40}A^3 \right).\end{aligned}$$

- Para  $\hat{y}_1$

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= \int_0^T y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \text{Asen}(\omega t)e^{-j\omega t} dt, \\ \hat{y}_1 &= -j\frac{AT}{2}.\end{aligned}$$

Una vez que se obtienen los valor de  $\hat{\Psi}_1$  y de  $\hat{y}_1$  es fácil obtener  $N(A, w)$

$$N(A, w) = \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{y}_1} = \frac{j(2c_0T/\pi) - j(21A^3T/40)}{-j(AT/2)},$$

$$N(A, w) = \frac{21}{20}A^2 - \frac{4c_0}{A\pi}.$$

Como el control discontinuo que se propone ( $u_0$ ) cuenta con una parte lineal y con otra no lineal es de esperarse que uno de los parámetros se encuentre en la función de transferencia y el otro esté en la función descriptiva.

Se iniciará buscando un valor adecuado para el parámetro  $c_0$ , que se encuentra en la función descriptiva ( $N(A)$ ). Si se pone atención a  $N(A)$  se llega a la conclusión de que es conveniente proponer valores de  $c_0$  menores a cero ( $c_0 < 0$ ), esto debido a la operación aritmética de la resta. Suponga que  $c_0 > 0$  y que el valor de  $A$  es un valor muy cercano a cero, entonces  $N(0)$  tiende a  $\infty$  y el inverso negativo de la función descriptiva ( $-1/N(A)$ ) tiende a  $0^+$  (con  $0^+$  nos referimos a que se acerca a 0 por la derecha). Ahora suponga que el valor de  $A$  tiende a  $\infty$ , entonces el valor de  $N(A)$  tiende a  $\infty$  y  $-1/N(A)$  tiende a  $0^-$  ( $0^-$  significa que se acerca a cero por la izquierda). Esto quiere decir que  $-1/N(A)$  inicia y regresa a 0, pero esta dinámica es algo compleja debido a que  $-1/N(A)$  cambia de signo por  $\infty$ . En cambio si  $c_0 > 0$  y el valor de  $A$  es muy pequeño cercano a cero,  $-1/N(A)$  se aproxima a  $0^-$  y conforme  $A$  tienda a  $\infty$  el valor de  $-1/N(A)$  tiende a  $0^-$ , el cual es un comportamiento más simple. En el último caso,  $-1/N(A)$  iniciará en 0 y conforme se incrementa  $A$ ,  $-1/N(A)$  se moverá a lo largo del eje real del diagrama de Nyquist hasta llegar a un valor máximo para después regresar a cero.

Ahora la tarea consiste en encontrar el valor de  $b_0$  de tal manera que se llegue a tener una órbita periódica estable. Debido a la dinámica del inverso negativo de la función descriptiva es conveniente que la función de transferencia continúe teniendo un polo en el semiplano derecho del plano complejo. Para encontrar los valores de  $b_0$  con los que se cumpla lo anterior se utiliza el criterio de estabilidad de Routh, para el cual

se construye la tabla siguiente

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 1 \\
 s^2 & 1 & -1.4 - b_0 \\
 s^1 & 2.4 + b_0 & 0 \\
 s^0 & -1.4 - b_0 & 0
 \end{array}$$

De acuerdo al criterio de estabilidad de Routh, para que solamente haya un polo en el semiplano derecho del plano complejo debe haber un solo cambio de signo en la primera columna de la tabla, lo que conduce a las desigualdades

$$2.4 + b_0 > 0,$$

$$b_0 > -2.4,$$

y

$$-1.4 - b_0 < 0,$$

$$b_0 > -1.4.$$

Por lo tanto,  $b_0 > -1.4$  para que  $G(s)$  tenga un polo inestable.

Ahora se determinará la frecuencia correspondiente a la órbita periódica, se sustituye a  $s$  por  $iw$  en la función de transferencia

$$\begin{aligned}
 G(iw) &= \frac{1}{(iw)^3 + (iw)^2 + (iw) - (1.4 + b_0)}, \\
 G(iw) &= \frac{-(w^2 + 1.4 + b_0) + j(w^3 - w)}{(w^2 + 1.4 + b_0)^2 + (w - w^3)^2}.
 \end{aligned}$$

De aquí se obtiene una parte real y una imaginaria de  $G(iw)$

$$\begin{aligned}
 G(iw) &= \Re\{G(iw)\} + \Im\{G(iw)\}, \\
 \Re\{G(iw)\} &= \frac{-(w^2 + 1.4 + b_0)}{(w^2 + 1.4 + b_0)^2 + (w - w^3)^2}, \\
 \Im\{G(iw)\} &= \frac{(w^3 - w)}{(w^2 + 1.4 + b_0)^2 + (w - w^3)^2}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo a  $G(jw)$  en la ecuación (36) se obtiene

$$1 + N(A) [\Re\{G(jw)\} + \Im\{G(jw)\}] = 0.$$

De esta última ecuación se obtiene dos ecuaciones, una de ellas es la parte real de la ecuación y la otra es la parte imaginaria

$$\begin{aligned} 1 + N(A)\Re\{G(jw)\} &= 0, \\ \Im\{G(jw)\} &= 0. \end{aligned}$$

De la parte imaginaria se obtiene la frecuencia de la órbita periódica

$$\frac{(w^3 - w)}{(w^2 + 1.4 + b_0)^2 + (w - w^3)^2} = 0,$$

donde

$$\bar{w}_1 = 0, \bar{w}_2 = 1 \text{ rad/seg}, \bar{w}_3 = -1 \text{ rad/seg}.$$

La frecuencia de interés es de  $1 \text{ rad/seg}$ , sustituyendo a esta frecuencia en la parte real

$$1 + N(A) \frac{-(1^2 + 1.4 + b_0)}{(1^2 + 1.4 + b_0)^2 + (1 - 1^3)^2} = 0,$$

$$N(A) = 2.4 + b_0.$$

Del rango que se determinó para  $b_0$  y  $c_0$  se eligen  $b_0 = -1.3$  y  $c_0 = -0.3$ . Entonces

$$N(A) = \frac{21}{20}A^2 + \frac{1.2}{A\pi} = 2.4 - 1.3,$$

y

$$A = 0.4366.$$

Se encontró que en el sistema controlado existen 2 órbitas periódicas, una de ellas tiene una amplitud de 0.4366 y una frecuencia de  $1 \text{ rad/seg}$ , la otra de ellas tiene una amplitud de 0.7875 y una frecuencia de  $1 \text{ rad/seg}$ . El estudio de la estabilidad de cada órbita periódica se realizará con el criterio de estabilidad de Nyquist. Por lo tanto, es necesario graficar el diagrama de Nyquist del sistema controlado, Figura 51. La línea azul corresponde a la función de transferencia,  $G(s)$ , y la línea roja corresponde al inverso negativo de la función descriptiva.

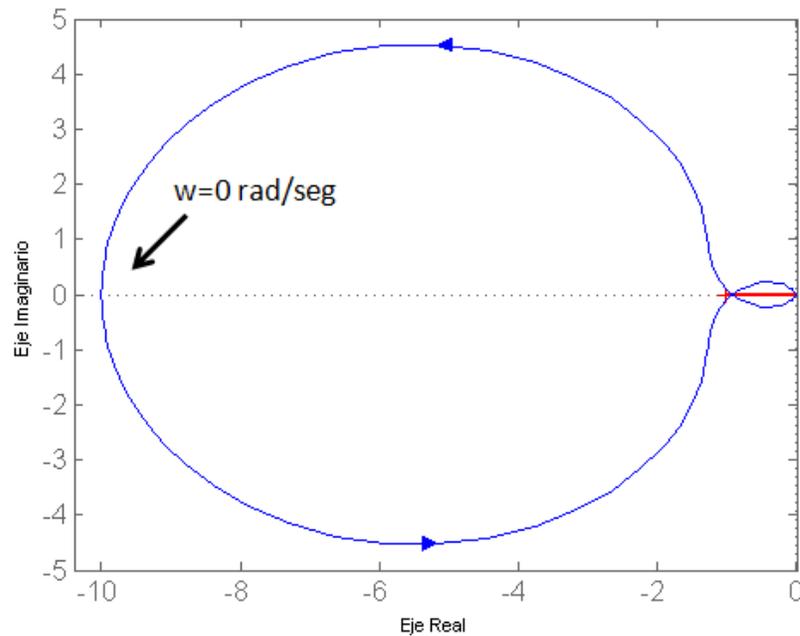


Figura 51: *Grafica de Nyquist del sistema controlado.*

En la Figura 51 se observa una sola intersección, pero en ese punto la gráfica de la función de transferencia y la gráfica del inverso negativo de la función descriptiva se intersectan dos veces: una de estas intersecciones es cuando  $A = 0.4366$  y la otra cuando  $A = 0.7875$ . Hay que recordar que el inverso negativo de la función descriptiva inicia en cero y conforme se incrementa el valor de  $A$ ,  $-1/N(A)$  se mueve a lo largo de los valores negativos del eje real del plano complejo, hasta que se llega a un valor máximo para después regresar a cero. Por lo tanto, se considera que existen dos puntos de intersección  $k_3$  y  $k_4$ .

En la Figura 52 se muestra una ampliación de la gráfica de Nyquist del sistema alrededor de los puntos  $k_3$  y  $k_4$ . Primero se analizará para  $k_3$ . Suponga que se perturba al sistema de tal manera que la amplitud de la señal a la entrada del elemento no lineal decrezca y el punto de operación se mueva hacia la derecha,  $k'_3$ . Debido a que  $k'_3$  se encuentra encerrado una vez en sentido a las manecillas del reloj por  $G(jw)$ , el sistema es inestable y la amplitud de la señal se incrementará y el punto de operación  $k'_3$  regresa a  $k_3$ . Por otra parte, si la perturbación hace que la amplitud de la señal a la

entrada del elemento no lineal se incremente y el punto de operación se mueva hacia la izquierda,  $k_3''$ . Debido a que el punto de operación  $k_3''$  se encuentra encerrado una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj por la curva de  $G(jw)$ , entonces el sistema será estable y la amplitud de la señal decrezca y el punto de operación  $k_3''$  regresa a  $k_3$ .

Ahora suponga que el sistema se encuentra en el punto de operación  $k_4$  y se le aplica una perturbación de tal manera que la amplitud de la señal a la entrada del elemento no lineal decrezca y el punto de operación se mueva hacia la izquierda,  $k_4'$ . Entonces, el punto de operación  $k_4'$  se encuentra encerrado una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj por la curva de  $G(jw)$ , ésto lleva a que el sistema sea estable y la amplitud de la señal decrezca y el punto de operación  $k_4'$  continúe alejándose de  $k_4$  y se dirija a  $k_3$ . Ahora si la perturbación hace que la amplitud de la señal a la entrada del elemento no lineal aumente y el punto de operación se mueve hacia la derecha,  $k_4''$ . Debido a que el punto de operación se encuentra encerrado una vez en sentido a las manecillas del reloj por la curva de  $G(jw)$ , el sistema en  $k_4''$  será inestable y la amplitud de la señal se incrementará y el punto de operación  $k_4''$  continuará moviéndose hacia la derecha. Por lo tanto, se tiene que en  $k_3$  existe una órbita periódica estable y en  $k_4$  existe una órbita periódica inestable. Lo que se concluye con esto es que el sistema controlado será estabilizado en una órbita periódica de amplitud 0.4366 y a una frecuencia de 1 *rad/seg*.

Para comprobar que sí se obtiene una órbita periódica estable con esta selección de los parámetros de control, se muestra la salida del sistema,  $y(t) = z_1(t)$ , en la Figura 53. Se puede ver que antes de los 100 *seg* el sistema se comporta caóticamente y después de que fue aplicado el control discontinuo el sistema fue rápidamente estabilizado en la órbita periódica. En esta gráfica también se puede ver que la amplitud de la órbita periódica es de 0.43 y el período de ésta es de 6.3 *seg*. Tanto la amplitud como el período, que se pueden ver en la Figura 53, corresponden a la amplitud y período calculados analíticamente para esta órbita periódica.

En la Figura 54 se grafica la señal del control discontinuo. Antes de los 100 *seg* la amplitud del control es de 0, después de los 100 *seg* la amplitud del control se encuentra entre  $-0.85$  y  $0.85$ .

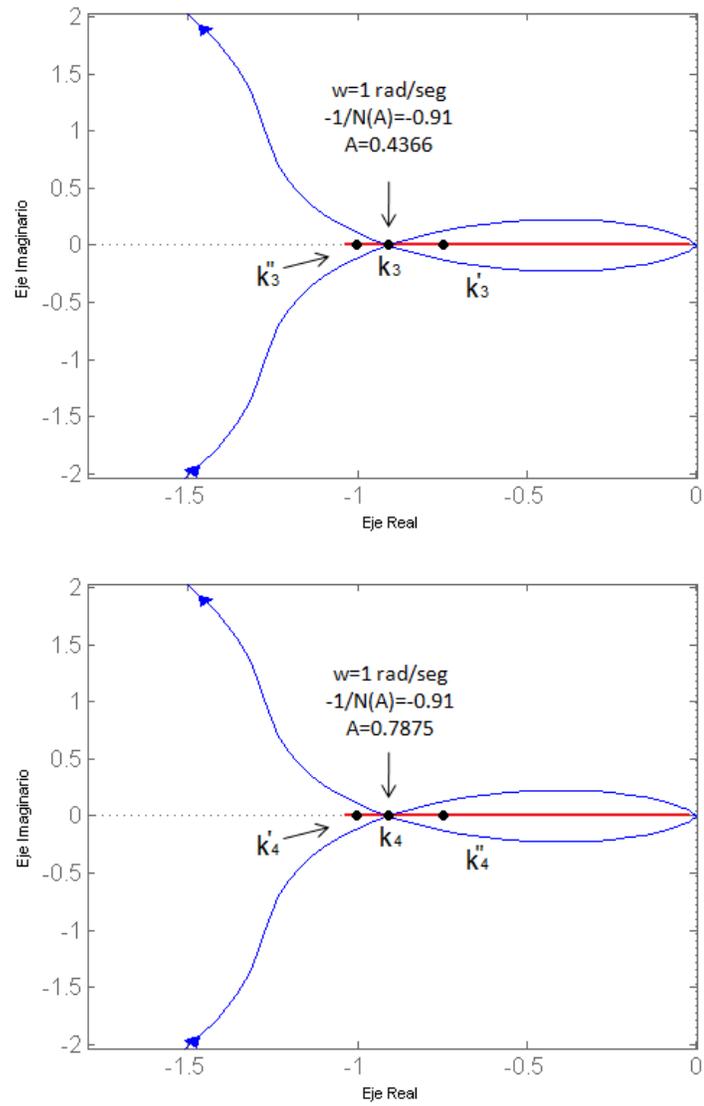


Figura 52: Amplificación de la gráfica de Nyquist del sistema controlado.

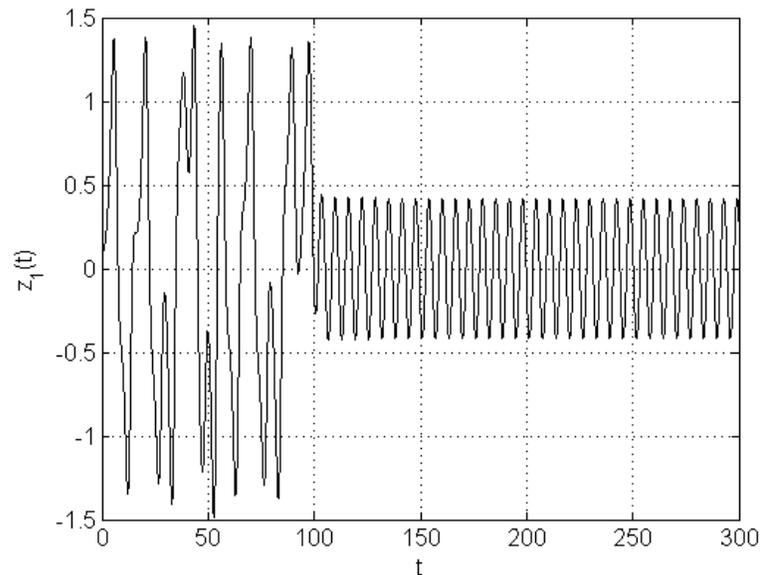


Figura 53: Salida del sistema  $z_1(t)$ .

Este sistema es otro ejemplo con el cual se comprueba que el control discontinuo que se propone en este capítulo es una buena opción para estabilizar a sistemas caóticos en una órbita periódica. Hay que recordar que los sistemas que se estabilizaron no pudieron ser estabilizados con el control retroalimentado con retardo. También fue posible apreciar que el diseño del control se desarrolló de una forma sencilla con la ayuda del método de la función descriptiva.

### IV.3 Conclusiones

En este capítulo se propuso un control discontinuo retroalimentado que fuera capaz de estabilizar a un tipo de sistema en el cual el control retroalimentado con retardo no fue capaz de estabilizarlo.

Se mostró que un control muy simple, con un procedimiento de diseño también muy simple y muy conocido, se pudo estabilizar al sistema satisfactoriamente.

La ventaja que ofrece este control discontinuo con respecto al control retroalimen-

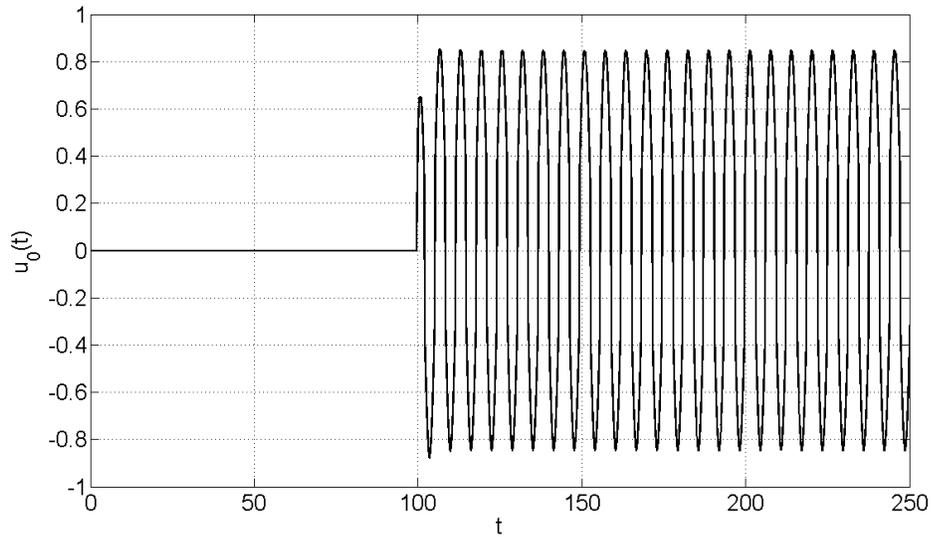


Figura 54: *Control discontinuo,  $u_0(t)$ .*

tado con retardo es que a éste no le afecta la limitación del número impar y que, debido a que cuenta con una función discontinua, esto lo hace robusto ante perturbaciones externas y variaciones paramétricas. Una desventaja que se tiene de este control es que se necesita esfuerzos altos de control, comparado con el del control retroalimentado con retardo, y se necesita que se esté aplicando todo el tiempo. La razón de que se necesitan esfuerzos de control mayores es debido a que con el control discontinuo se modifica el estado estacionario del sistema.

## Capítulo V

### Resultados experimentales

En este capítulo se muestran los resultados experimentales obtenidos al implementar el control retroalimentado con retardo y el control discontinuo en el circuito de Sprott con una función mínimo y el circuito de Sprott con una función signo, respectivamente.

#### V.1 Control retroalimentado con retardo

En esta sección se aplica el control retroalimentado con retardo al circuito de Sprott cuando su elemento no lineal es la función mínimo (Merat *et al.*, 2007). En la Figura 55 se muestra el esquemático de este circuito.

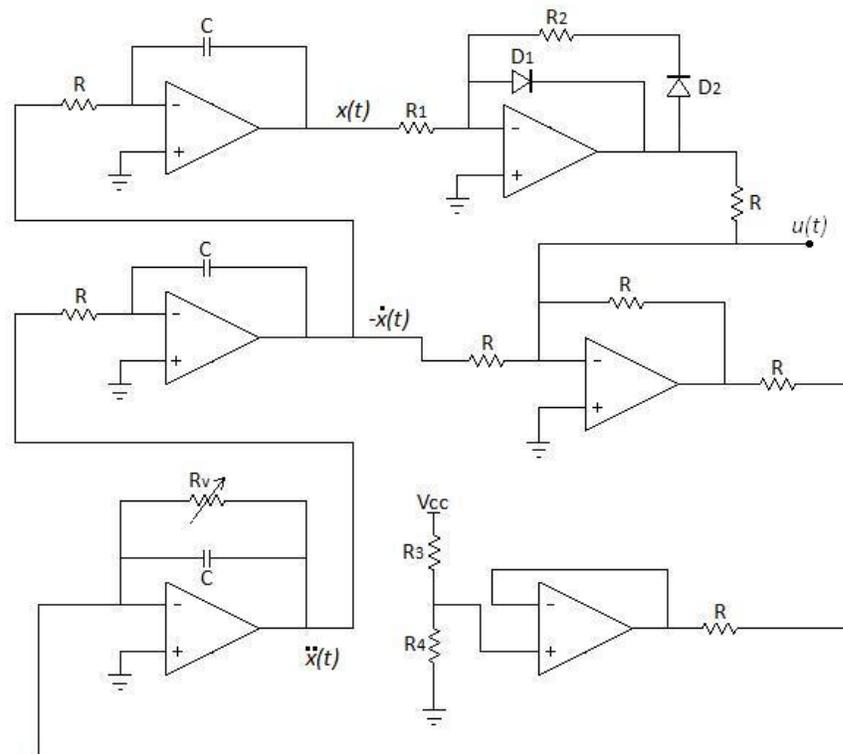


Figura 55: Esquemático del circuito de Sprott.

A partir del esquemático del circuito se puede obtener la ecuación diferencial que describe su comportamiento

$$\ddot{x}(t) + \frac{R}{R_v} \dot{x}(t) + \dot{x}(t) + \frac{R_2}{R_1} \min(0, x(t)) = -0.25 + u(t)$$

donde los puntos de arriba de la variable  $x(t)$  representan la derivada con respecto al tiempo. Una representación en variables de estado, como el de la ecuación (29), se puede obtener definiendo:  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = -\dot{x}(t)$  y  $x_3 = \ddot{x}(t)$ .

Para obtener los datos generados por el circuito se utilizó la tarjeta dSpace DS1104 como interfaz entre el circuito de Sprott y la PC. Con esta tarjeta se hizo la lectura de los estados  $x(t)$  y  $\dot{x}(t)$ , y a su vez con ésta se inyectó en  $u(t)$  la señal de control al circuito.

El circuito solamente emplea resistencias, capacitores, diodos y amplificadores operacionales. Los amplificadores que se utilizaron fueron los TL072, los cuales son de tecnología JFET y son de bajo ruido. Los diodos que se emplearon para formar al elemento no lineal son los 1N4001. El valor de cada resistencia y capacitor son los siguientes:  $R = 47 K\Omega$ ,  $R_1 = 15 K\Omega$ ,  $R_2 = 88 K\Omega$ ,  $R_3 = 100 K\Omega$ ,  $R_4 = 2 K\Omega$ ,  $R_v = 80 K\Omega$  y  $C = 1 \mu\Omega$ .

Con los valores seleccionados de resistencias y capacitores, y sin la aplicación del control retroalimentado con retardo ( $u(t) = 0$ ) se tiene un comportamiento caótico en el circuito. Si se varía el valor del potenciómetro,  $R_v$ , se puede obtener diferentes comportamientos del circuito. Por lo pronto, en la Figura 56 se muestra el atractor caótico y en la Figura 57 se puede ver la evolución en el tiempo de la salida, que en este caso es  $x(t)$ .

El atractor caótico que se genera al excitar al circuito de Sprott es semejante, cualitativamente, al que se obtuvo al simular las ecuaciones de estado que describen su comportamiento, mostradas en el Capítulo III.

Ahora consideramos que la señal de control retroalimentado con retardo es diferente de cero. La señal de control se genera por medio de un algoritmo programado en Matlab®. Para estabilizar al circuito de Sprott es necesario conocer tanto el parámetro

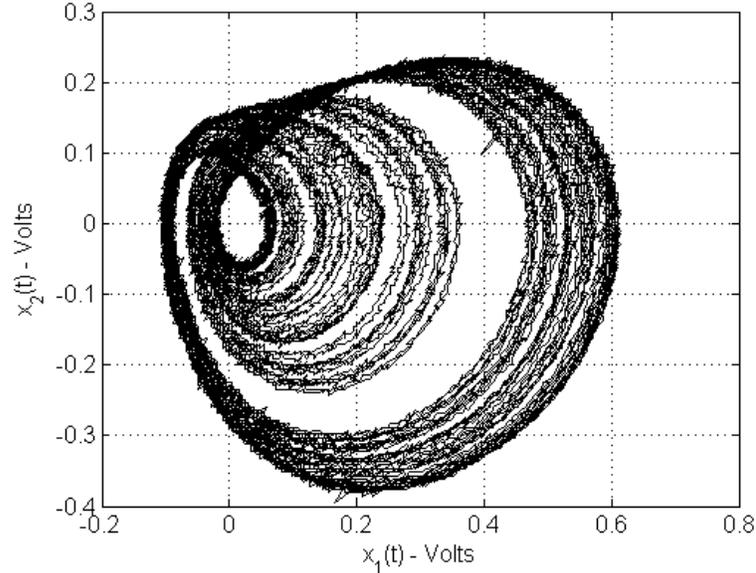


Figura 56: *Atractor caótico del circuito de Sprott.*

de retardo,  $\tau$ , así como la ganancia,  $K$

$$u(t) = K [y(t) - y(t - \tau)].$$

En el Capítulo III se observó que el tiempo de retardo  $\tau$  es igual a 6.6 *seg*, pero la señal del circuito está reescalada en el tiempo, en comparación con la señal de la simulación, por un factor de  $RC$ . El reescalamiento en el tiempo es realizado por los integradores del circuito.

Entonces, el tiempo real que maneja el circuito es igual a  $t = RC\tilde{t}$ , donde  $\tilde{t}$  es el tiempo que se maneja en la simulación. Por lo tanto, el tiempo de retardo es:

$$\begin{aligned}\tau &= RC\tilde{\tau} = (47K\Omega)(1\mu F)(6.6) = 310.2 \text{ seg}, \\ \tau &= 310.2 \text{ seg}.\end{aligned}$$

El valor de la ganancia  $K$  se obtiene a prueba y error, el cual queda igual a 0.11.

El resultado de la estabilización del circuito de Sprott con el control retroalimentado con retardo se muestra en las figuras 58-59. En la Figura 58 se muestra la evolución de  $x(t)$ . Primero se dejó que el sistema estuviera en régimen caótico y después de un

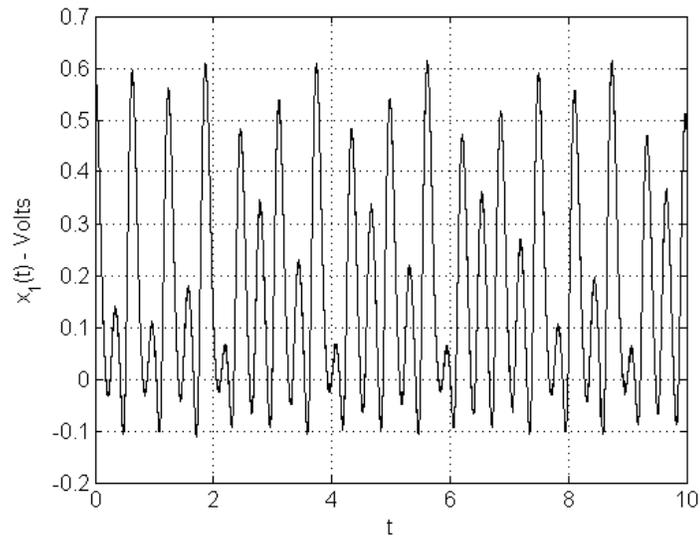


Figura 57: *Evolución en el tiempo de  $x(t)$ .*

tiempo se aplicó el control. Se aprecia que antes de los 15 *seg* el sistema es caótico y después de este tiempo  $x(t)$  se comporta periódicamente.

En la Figura 59 se muestra la señal de control, donde ésta se aplica después de los 13 *seg*. Ya que se estabiliza el circuito, la señal de control prácticamente es igual a cero. Por último, en la Figura 60 se muestra el atractor periódico.

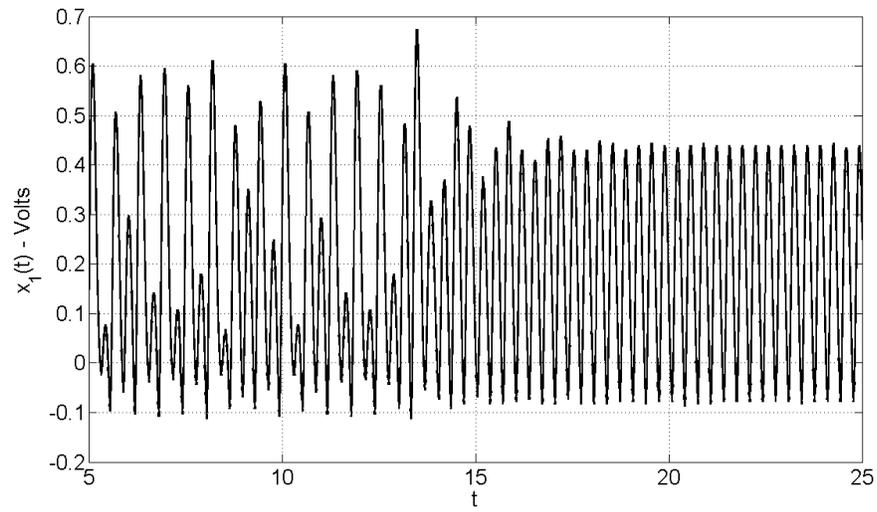


Figura 58: *Estado de salida del circuito de Sprott con control.*

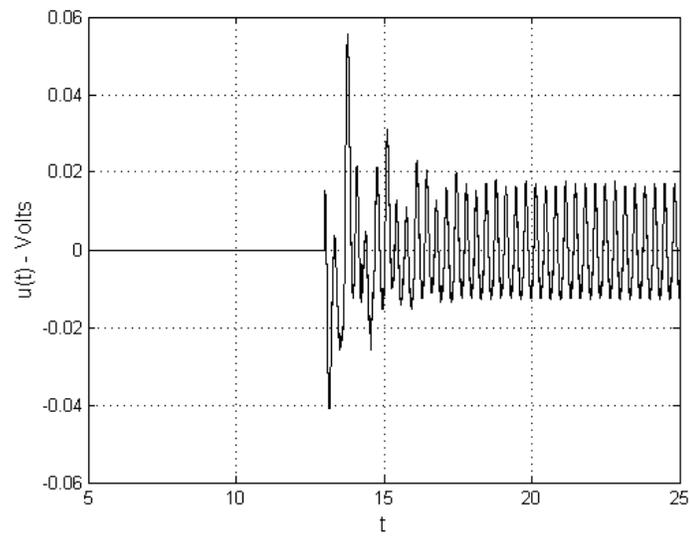


Figura 59: *Control retroalimentado con retardo.*

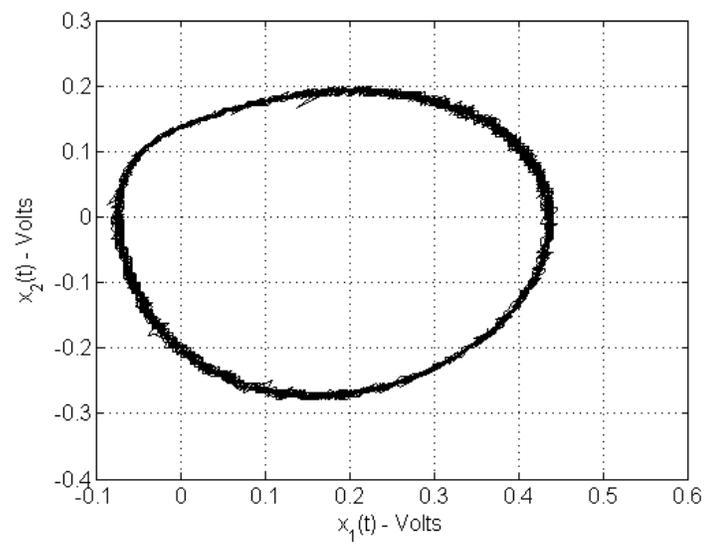


Figura 60: *Atractor periódico del circuito de Sprott.*

## V.2 Control discontinuo

En esta sección se muestran los resultados de la aplicación del control discontinuo, de manera experimental, al circuito de Sprott cuando su elemento no lineal es la función signo. El esquemático del circuito se muestra en la Figura 61. El valor de cada resistencia y capacitor del esquemático son los siguientes:  $R = 10\text{ K}\Omega$ ,  $R_1 = 1\text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 10\text{ M}\Omega$ ,  $R_3 = 12\text{ K}\Omega$ ,  $R_4 = 1\text{ K}\Omega$ ,  $R_5 = 43\text{ K}\Omega$ ,  $R_6 = 6\text{ K}\Omega$  y  $C = 1\text{ }\mu\text{F}$ .

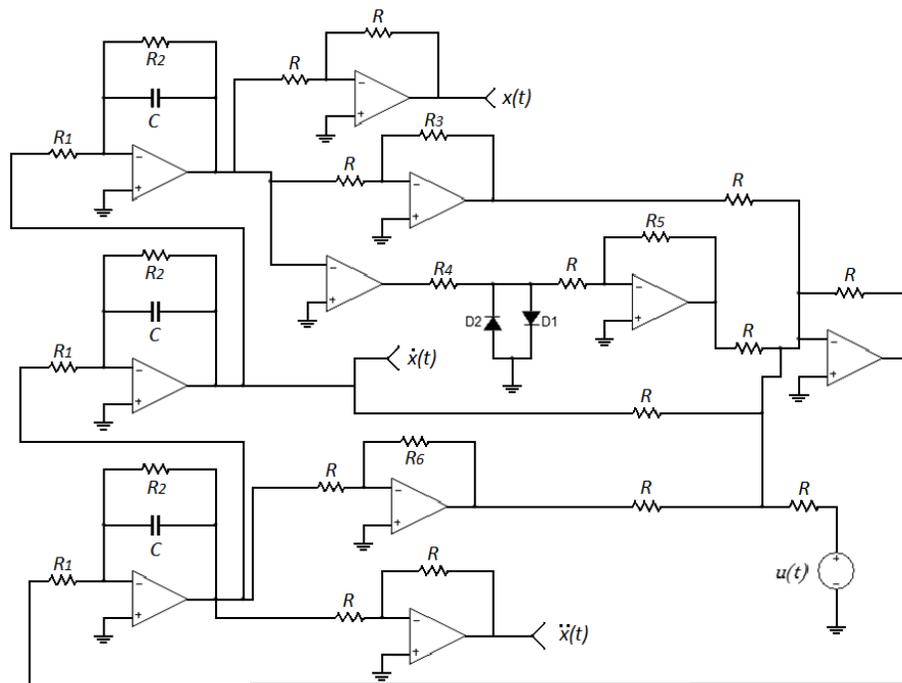


Figura 61: Esquemático del circuito de Sprott.

Del esquemático se obtiene la ecuación diferencial que describe el comportamiento de este circuito

$$\ddot{x}(t) + 0.6\dot{x}(t) + x(t) = 2\text{Sign}(x(t)) + u$$

donde los puntos de arriba de la variable  $x(t)$  representan la derivada con respecto al tiempo. Una representación en variables de estado, como el de la ecuación (31), se puede obtener definiendo:  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}(t)$  y  $x_3(t) = \ddot{x}(t)$ .

Al igual que el circuito anterior, para crear este circuito solamente se utilizaron resistencias, capacitores, diodos (1N4001) y amplificadores operacionales (TL072). Con los valores seleccionados para las resistencias y capacitores, y sin la aplicación del control discontinuo se tiene que el circuito se comporta caóticamente. En la Figura 62 se muestra el atractor caótico y en la Figura 63 se muestra la evolución en el tiempo de  $y(t) = x(t) = x_1(t)$ .

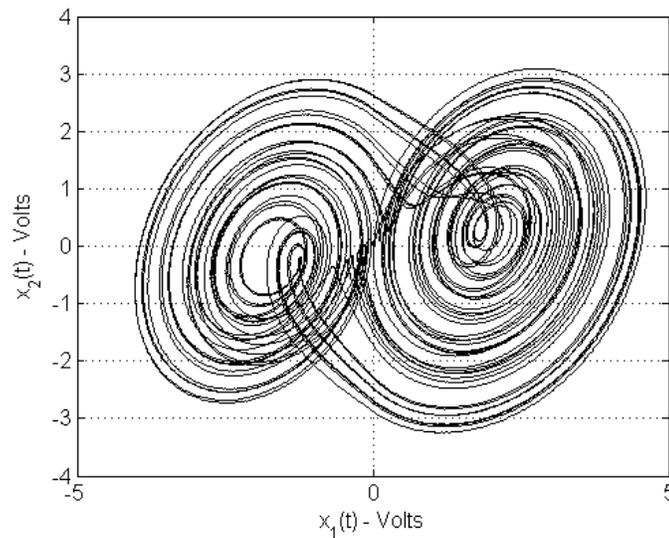


Figura 62: Atractor caótico del circuito de Sprott.

Para estabilizar a este circuito de Sprott, con la función signo como elemento no lineal, se aplica el control discontinuo. Para conseguir el objetivo de estabilización es necesario seleccionar adecuadamente los parámetros  $b_0$  y  $c_0$  del control discontinuo

$$u_0(t) = b_0 x_1(t) + c_0 \text{Sign}(x_1(t))$$

Anteriormente, en el Capítulo IV, se demostró que cuando  $b_0 = 0.9$  y  $c_0 = -2.5$  es posible estabilizar al circuito en una órbita periódica.

En las figuras 64-66 se muestra el resultado de utilizar el control discontinuo en el circuito de Sprott. En la Figura 64 se muestra la señal del control. Éste fue aplicado a los 100 *seg*.

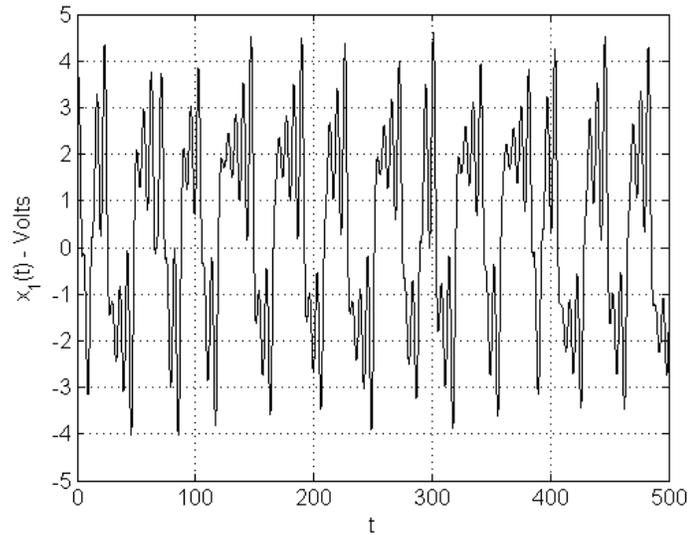


Figura 63: Evolución en el tiempo de  $x_1(t)$ .

En la Figura 65 se puede ver cómo antes de que el control intervenga el estado  $x_1(t)$  se comporta caóticamente, después de este tiempo,  $x_1(t)$  se estabiliza en la órbita periódica, y en la Figura 66 se muestra el atractor periódico del circuito..

### V.3 Conclusiones

En esta capítulo se pudo comprobar de manera práctica lo que se estableció en los capítulos III y IV.

Se pudo ver que el control retroalimentado con retardo presenta un buen desempeño de manera experimental, al igual que en las simulaciones, en sistemas que presentan una cascada de bifurcaciones de duplicación de período hacia el caos.

También se pudo ver que el control discontinuo estabiliza, de manera satisfactoria, a circuitos que no presentan una cascada de bifurcaciones de duplicación de período hacia el caos y cuando el control retroalimentado con retardo no es capaz de estabilizarlos, convirtiéndolo en un control alternativo para cuando el control retroalimentado con retardo no pueda estabilizar a los sistemas.

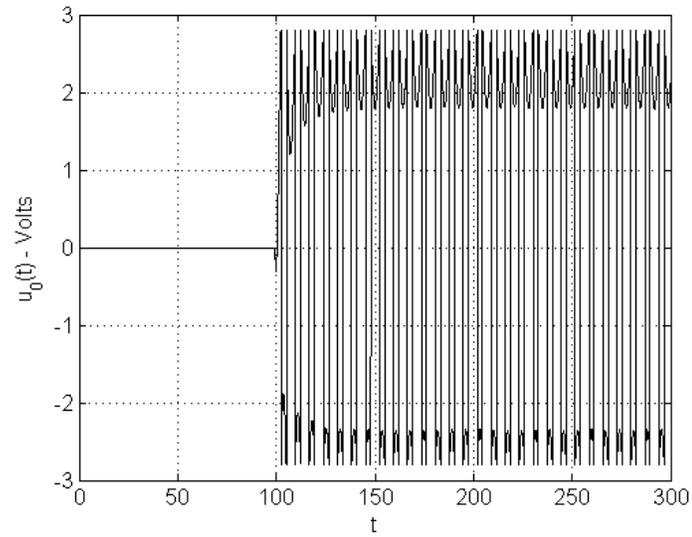


Figura 64: Señal del control discontinuo  $u_0(t)$ .

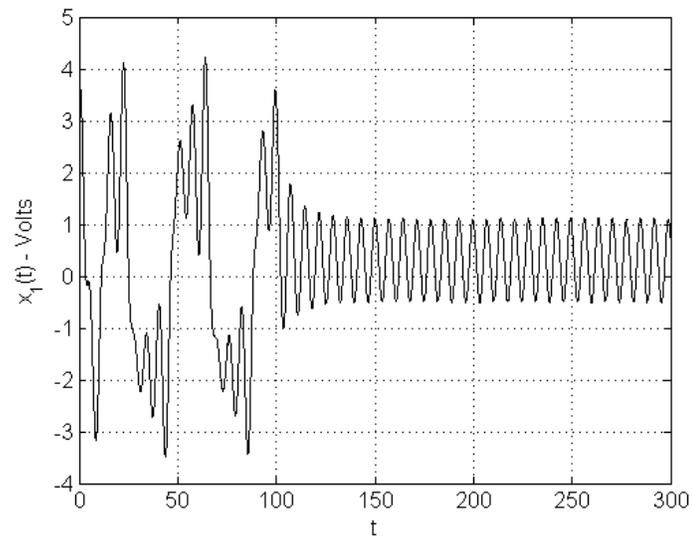


Figura 65: Evolución en el tiempo de  $x_1(t)$ .

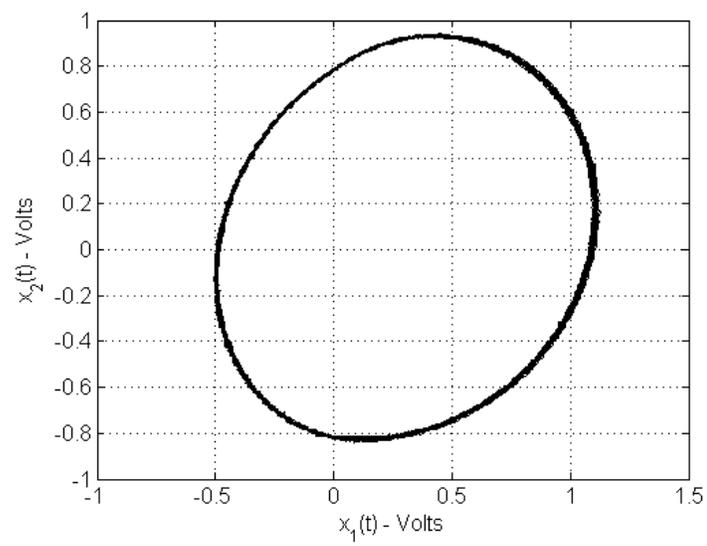


Figura 66: *Atractor periódico.*

# Capítulo VI

## Conclusiones

Este trabajo de tesis se fijó de dos objetivos fundamentales. El primero de ellos radicó en el estudio del problema que se presenta al querer estabilizar a sistemas caóticos en órbitas periódicas propias por medio del control retroalimentado con retardo, que consiste en determinar en cuáles sistemas es posible implementar esta metodología de control. El segundo problema consistió en proponer un control alternativo para el caso en el que el control retroalimentado con retardo no fuera capaz de estabilizar al sistema caótico en una órbita periódica propia.

### Propuesta de hipótesis

Para solucionar el problema de especificar cuándo es posible utilizar el control retroalimentado con retardo se propuso una hipótesis de trabajo. En esta se estableció condiciones con las que se asegura que el sistema puede ser estabilizado en una órbita periódica propia mediante este control. Para argumentar esta hipótesis se presentaron resultados numéricos de varios ejemplos de sistemas caóticos. La ventaja que ofrece la hipótesis 1 con respecto al llamado criterio del número impar de multiplicadores de Floquet mayores a  $+1$  es que, es más fácil de calcular y de visualizar el diagrama de Feigenbaum que obtener los multiplicadores de Floquet de una órbita periódica.

### Propuesta de control

Se propuso un control para estabilizar a los sistemas caóticos en una órbita periódica para cuando el control retroalimentado con retardo no fue capaz de estabilizarlos. Este control cuenta con un elemento discontinuo con el fin de hacer más robusto al control ante perturbaciones externas o variaciones paramétricas que pueda sufrir el sistema; el diseño de este control se basa en el método de la función descriptiva, el cual es un método sencillo y bien conocido.

El efecto que tiene el control discontinuo sobre la dinámica del sistema es introducir

una órbita periódica estable modificando el estado estacionario. Para observar el efecto que tiene este control se presentaron dos resultados numéricos donde se logró estabilizar a sistemas caóticos mediante este control.

Por último mediante una implementación experimental se comprobó que cuando el sistema cumple con la hipótesis 1, el control retroalimentado con retardo estabiliza al sistema sin mayor problema. También de forma experimental se comprobó que el control discontinuo es capaz de estabilizar a sistemas caóticos en una órbita periódica.

## VI.1 Trabajo a futuro

A partir de los resultados que se obtuvieron en este trabajo de tesis, en el que se establecen condiciones bajo las cuales el sistema caótico puede ser estabilizado en una órbita periódica propia del sistema por medio del control retroalimentado con retardo, se propone como trabajo a futuro formalizar la hipótesis 1 y si es posible extender lo que se estableció en esta hipótesis dando condiciones bajo las cuales no se pueda estabilizar al sistema caótico por medio del control retroalimentado con retardo; por supuesto, siguiendo con la idea de utilizar el diagrama de Feigenbaum. Ésto se podría realizar estableciendo relaciones entre las bifurcaciones de las órbitas periódicas (sin olvidar que éstas dependen de los multiplicadores de Floquet) y de lo que se muestra en el diagrama de Feigenbaum. Por ejemplo, se podría realizar un análisis exhaustivo de la dinámica del sistema de cuando en el diagrama de Feigenbaum no se presenta una cascada de bifurcaciones de duplicación de período, o cuando dos o más atractores conviven entre sí.

También se propone como trabajo a futuro comprobar, ya sea mediante resultados numéricos o experimentales, que el control discontinuo que se propuso es válido para cualquier sistema caótico.

## Referencias

- Alvarez, J., Curiel, E., y Verduzco, F. (1997). Complex dynamics in classical control systems. *Systems & control letters*, **31**(5): 277–285.
- Chua, L., Wu, C., Huang, A., y Zhong, G. (1993). A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **40**(10): 732–744.
- Devaney, R. y Straffin, P. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiment*. Addison-Wesley. ISBN 0201554062.
- Merat, K., Sadeghian, H., Salarieh, H., y Alasty, A. (2007). Chaos control of a sprott circuit using delayed feedback control: Experimental study. En *Advanced intelligent mechatronics, 2007 IEEE/ASME international conference on date 4-7 Sept*, páginas 1–4. IEEE.
- Nakajima, H. (1997). On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Physics Letters A*, **232**(3-4): 207–210.
- Nayfeh, A. y Balachandran, B. (1995). *Applied nonlinear dynamics*, Vol. 2. Wiley and Sons, Inc, New York. 663 pp.
- Ott, E., Grebogi, C., y Yorke, J. (1990). Controlling chaos. *Physical Review Letters*, **64**(11): 1196–1199.
- Peitgen, H., Jürgens, H., y Saupe, D. (2004). *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer Verlag, segunda edición. ISBN 0387202293. 853 pp.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, **170**(6): 421–428.
- Sprott, C. *et al.* (2000). A new class of chaotic circuit. *Physics Letters A*, **266**(1): 19–23.
- Yu, X., Tian, Y., y Chen, G. (2000). Time delayed feedback control of chaos. En *Controlling chaos and bifurcations in engineering systems*, páginas 249–268. CRC Press Inc., Boca Raton FL.