

**Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada**



**Estimación del DOA Empleando Metodos de Rastreo
de Subespacio Aplicados a Music y Esprit**

**TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS**

JESUS FABIAN MENDOZA MONTOYA

ENSENADA BAJA CFA, MEXICO JULIO DE 2006

TESIS DEFENDIDA POR
Jesús Fabián Mendoza Montoya
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



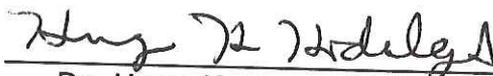
Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director del Comité



Dr. Arturo Velázquez Ventura
Miembro del Comité



Dr. Luis Armando Villaseñor González
Miembro del Comité



Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva
Miembro del Comité



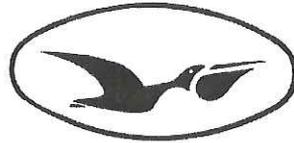
Dr. Arturo Velázquez Ventura
*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y
Telecomunicaciones*



Dr. Raúl Ramón Castro Escamilla
Director de Estudios de Posgrado

12 de Julio de 2006

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



CICESE
MR

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**ESTIMACIÓN DEL DOA EMPLEANDO
MÉTODOS DE RASTREO DE SUBESPACIO
APLICADOS A MUSIC Y ESPRIT**

TESIS

**que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS**

Presenta

Jesús Fabián Mendoza Montoya.

Ensenada, Baja California, México, Julio del 2006.

RESUMEN de la tesis de **Jesús Fabián Mendoza Montoya**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California. Julio del 2006.

ESTIMACIÓN DEL DOA EMPLEANDO MÉTODOS DE RASTREO DE SUBESPACIO APLICADOS A MUSIC Y ESPRIT

Resumen aprobado por:



Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Tesis

Los métodos de estimación de fuentes, deben ser algoritmos de alta resolución y de respuesta en tiempo real, para su aplicación en sistemas de antenas inteligentes en comunicaciones móviles celulares, esto con el objetivo de obtener la posición angular de las terminales móviles con un error bajo y en cualquier instante de tiempo. Los métodos de estimación de fuentes basados en subespacio MUSIC (Multiple Signal Classification) y ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) son algoritmos de alta resolución, sin embargo no son algoritmos que cumplan con la actualización de fuentes en tiempo real. Esto es debido a que deben realizar la descomposición de valores singulares (SVD) de la matriz de covarianza, formada con los datos de las muestras obtenidas a la salida del agrupamiento de antenas, cada vez que se requiere una actualización de los ángulos de arribo (DoA's) de las señales provenientes de las terminales móviles. Además, la implementación de los algoritmos MUSIC y ESPRIT resulta inconveniente cuando se requieren actualizaciones sucesivas.

La descomposición de valores singulares (SVD) se requiere para la obtención del subespacio de señal en el cual se basa el funcionamiento de MUSIC y ESPRIT. Para disminuir el tiempo de cómputo de la obtención del subespacio de señal se han desarrollado algoritmos iterativos que logran hacer un estimado del subespacio de señal, estos algoritmos son los denominados algoritmos de rastreo de subespacio PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) y Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Decomposition), los cuales son los algoritmos más estudiados.

En este trabajo de tesis, se realiza el modelado y simulación de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, utilizando un estimado del subespacio de señal obtenido con los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD. Se realiza un estudio de la mejora del tiempo de cómputo, y se realiza un análisis del desempeño en cuanto a resolución en la estimación de las fuentes, haciendo una comparación del error cuadrático medio (RMSE) utilizando la descomposición de valores singulares (SVD), y los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD, trabajando bajo un entorno estático y bajo un entorno dinámico. Con este análisis realizado, se encuentra que se disminuye el tiempo de cómputo para cada actualización del DoA, y también se disminuye el error cuadrático medio trabajando bajo ambientes dinámicos, con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio.

Palabras clave: DoA, rastreo de subespacio, MUSIC, ESPRIT, PAST, Bi-SVD

ABSTRACT of the thesis presented by **Jesús Fabián Mendoza Montoya** as a partial requirement to obtain the **MASTER OF SCIENCE** degree in **ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS**. Ensenada, Baja California. July 2006.

DOA ESTIMATION USING SUBSPACE TRACKING METHODS APPLIED TO MUSIC AND ESPRIT

The radio environments in mobile communications are complicated and time-varying in general; therefore, we need high resolution DoA (direction of arrival) estimation methods that can follow quickly the change of radio environments.

High resolution DoA estimation methods have been proposed which are based on the eigen decomposition of the correlation(covariance) matrix of an array input. MUSIC (Multiple Signal Classification) and ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) are typical of such methods. However, these methods must normally repeat high-load computation involving the eigen decomposition of a correlation matrix every time a snapshot is taken. Therefore, it takes a very long time to obtain the estimated DoA when the number of array elements is large. In addition, it is quite inefficient in the case that the DoA estimation is carried out continuously.

To solve the above problems, Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Decomposition) and PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) have been proposed and investigated, which are typical methods of successively updating (tracking) eigenvectors in the signal subspace of correlation matrix.

In this thesis, we explain a scheme to incorporate those two subspace tracking methods into MUSIC and ESPRIT, and shows a comparison of DoA successive estimation performance.

Keywords: DoA, Subspace Tracking, MUSIC, ESPRIT, PAST, Bi-SVD.

DEDICATORIA

A mis padres,

José María Mendoza Aviléz
y
Alma Belia Montoya Castro

y a mi hermano,

José María Mendoza Montoya

ustedes son la motivación en mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a DIOS por permitirme terminar una etapa más en mi vida, todo se lo debo a él.

Al Dr. David Covarrubias por sus enseñanzas, observaciones, consejos y paciencia, fueron parte fundamental en mi superación personal, muchas gracias.

A los miembros del comité de tesis, Dr. Luis Villaseñor, Dr. Arturo Velázquez y el Dr. Hugo Hidalgo por sus valiosos comentarios y observaciones durante mi trabajo de tesis.

A mis amigos Leonardo y Edgar, gracias por acompañarme en las buenas y en las malas y haber compartido conmigo muchos momentos de alegría, fueron parte importante es esta etapa de mi vida.

Al Grupo de Comunicaciones Inalámbricas (GCI) y a mis compañeros de generación, muchas gracias por su amistad, fue muy agradable haber convivido con ustedes, nunca los olvidaré.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por hacer posible mi superación académica.

Se agradece al CONACYT por el apoyo otorgado al proyecto Modelado y Simulación de Algoritmos de la Dirección de Llegada (DOA) y Conformación Digital de Haz (DBF) Aplicados a Comunicaciones Móviles Celulares con Antenas Inteligentes, con clave U39514-Y, sobre el cual se enmarcó este trabajo de tesis.

ÍNDICE GENERAL

Índice General	I
Lista de Figuras	v
Lista de Tablas	vii
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Marco de Referencia	2
1.3. Planteamiento del Problema	3
1.4. Objetivo de la Tesis	4
1.5. Organización del Trabajo	5
2. Sistemas de Antenas Inteligentes	7
2.1. Introducción	7
2.2. Sistemas de Antenas Inteligentes	7
2.3. Tipos de Antenas Inteligentes	8
2.3.1. Haz Conmutado	9
2.3.2. Haz de Seguimiento	9
2.3.3. Haz Adaptativo	10
2.4. Agrupamientos de Antenas	10
2.5. Métodos de Estimación del DoA	11
2.5.1. Métodos Convencionales para la Estimación del DoA	11

Índice general(Continuación)

2.5.2. Métodos de Maxima Verosimilitud	12
2.5.3. Métodos de Subespacio para la Estimación del DoA	12
2.6. Conclusiones	13
3. Algoritmos MUSIC y ESPRIT	15
3.1. Introducción	15
3.2. Distribución Geométrica de Elementos del Agrupamiento	15
3.3. Modelo de Señal	16
3.4. Representación del Vector de Dirección	19
3.5. Representación de la Matriz de Covarianza	19
3.6. Descomposición en Valores Singulares	20
3.7. Algoritmo MUSIC	22
3.8. Algoritmo ESPRIT	26
3.9. Conclusiones	30
4. Algoritmos de Rastreo de Subespacio	31
4.1. Introducción	31
4.2. Teoremas de Rastreo de Subespacio	32
4.3. Algoritmo PAST(Projection Approximation Subspace Tracking)	33
4.4. Algoritmo Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Descomposition)	35
4.5. Conclusiones	44
5. Simulación y Resultados	45
5.1. Introducción	45
5.2. Escenarios de Simulación	46
5.3. Error Cuadrático Medio (RMSE)	47
5.4. Tiempo de Cómputo	49
5.5. Evaluación de PAST y Bi-SVD bajo un Entorno Dinámico	51
5.6. Factor de Ponderación de Pesos	56
5.7. Conclusiones	59
6. Conclusión y Aportaciones	61
6.1. Introducción	61
6.2. Desempeño de los Algoritmos de Rastreo de Subespacio	61
6.3. Tiempo de Cómputo	62
6.4. Entorno Estático	63
6.5. Entorno Dinámico	64

Índice General(Continuación)

6.6. Factor de Ponderación de Pesos	64
6.7. Trabajo a Futuro	65
Bibliografía	67

LISTA DE FIGURAS

1.	Agrupamiento lineal uniforme.	16
2.	Geometría del agrupamiento utilizando ESPRIT.	26
3.	Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con un $SNR = 20dB$	48
4.	Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con un $SNR = 10dB$	49
5.	Tiempo de cómputo para la actualización del subespacio de señal, utilizando el algoritmo convencional (SVD) y los algoritmos de rastreo de subespacio (PAST y Bi-SVD), variando el número de elementos de antena utilizados en el agrupamiento.	50
6.	Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con un $SNR = 20dB$ bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,01^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$	52
7.	Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT, con un $SNR = 20dB$ bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,02^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$	53
8.	Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,01^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$	54
9.	Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,02^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$	56
10.	Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con PAST con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$	57
11.	Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con Bi-SVD con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$	58
12.	Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con PAST con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$	59
13.	Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con Bi-SVD con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$	60

LISTA DE TABLAS

I.	Tabla comparativa del tiempo de cómputo.	55
II.	Tabla comparativa del RMSE para ESPRIT con $\delta = 0,02$	55
III.	Tabla comparativa del RMSE para MUSIC con $\delta = 0,02$	55

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Introducción

En los últimos años se ha visto un gran desarrollo en las comunicaciones inalámbricas gracias al auge que ha tenido la telefonía celular, debido a esto, es necesario el desarrollo de sistemas de alto desempeño y alta adaptabilidad en comunicaciones móviles celulares de tercera generación y posteriores.

Los denominados sistemas de comunicaciones móviles celulares de tercera generación (3G) enfrentan retos muy serios en cuanto a capacidad de manejo de tráfico heterogéneo, es decir, aunque la aplicación principal sigue siendo la transmisión de voz, los nuevos sistemas de comunicaciones móviles celulares se enfocan en la transferencia de datos, es decir, servicios que van más allá del clásico tráfico de voz de los sistemas de segunda generación (2G), también es importante aumentar la capacidad para dar servicio a un mayor número de usuarios, y sobre todo, asegurar una calidad de servicio (QoS) al menos con las mismas características de los sistemas cableados de alta capacidad.

Los principales problemas que enfrentan los sistemas de comunicaciones móviles celulares son:

- Desvanecimientos debido al canal radio.
- Presencia de multitrayectorias de la señal.
- Ruido térmico.
- Interferencia co-canal.

El procesado de las señales utilizando sistemas de antenas inteligentes se presenta como una tecnología atractiva para mitigar estos problemas y proveer servicios de alta tasa de transmisión. Esta tecnología ha surgido como una alternativa para mejorar las prestaciones actuales, ya que provee mayor directividad a las antenas, permitiendo reducir en gran medida la interferencia en el sistema. Los principales beneficios que se derivan de la reducción de la interferencia es la ampliación de la cobertura de la estación base y mejor penetración en interiores [Rappaport,1999], estas características mejoran la calidad de las prestaciones e incrementa la capacidad de servicio, medido por el número de usuarios activos.

1.2. Marco de Referencia

Un sistema de antenas inteligentes requiere de un algoritmo de conformación de haz para ajustar el diagrama de radiación y dirigir nulos en la dirección de los interferentes y haces más estrechos hacia las fuentes de interés, esto es, el sistema de antenas inteligentes necesita conocer las direcciones de arribo, DoA's, por sus siglas en ingles (direction of arrival), tanto de los usuarios de interés como de los interferentes, con el objetivo de discriminarlos en lo posible en el diagrama de radiación¹. Además, actualizando los DoA's se puede lograr un

¹A partir de este momento, a la dirección de arribo la mencionaremos como el parámetro DoA.

algoritmo de conformación de haz adaptativo, lo cual le permitirá al sistema de antenas inteligentes realizar un rastreo del móvil y permitir los trasposos inteligentes.

Por otra parte, en un sistema de antenas de transmisión y recepción, los agrupamientos² de antenas adaptativas se han vuelto indispensables debido a que éstos pueden tener un control adaptativo de sus diagramas de radiación con el objetivo de reducir los efectos de interferencia. En particular, trabajar con el canal radio en ambientes de comunicaciones móviles es complicado y generalmente variante en el tiempo [Kikuma,2005], por lo tanto se necesita un algoritmo de DoA que pueda seguir rápidamente estos cambios que se presentan en el canal radio.

Debido a la importancia de la obtención del DoA en tiempo real para lograr el seguimiento del móvil y además con un error pequeño, es necesario contar con algoritmos que cumplan con dos características esenciales: alta resolución y respuesta en tiempo real, es por ello, que un estudio sobre el funcionamiento y exactitud de los algoritmos de localización de fuentes o algoritmos del DoA resulta de gran importancia para el diseño de sistemas de antenas inteligentes.

1.3. Planteamiento del Problema

Existen varios métodos de alta resolución de estimación del DoA, los cuales se basan en la descomposición de valores propios de la matriz de covarianza de la señal a la salida de un agrupamiento de antenas [Rappaport,1999]. Los algoritmos MUSIC (MUltiple SIGnal Classification) [Schmidt,1986] y ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [Roy,1989] son los métodos típicos. Sin embargo, estos métodos requieren de una gran carga computacional debido a que realizan la descomposición de valores propios de la matriz de correlación cada vez que se toma una muestra en el agrupamien-

²El término en ingles es conocido como *array*.

to de antenas [Kikuma,2005]. Además, requiere mucho tiempo obtener una estimación del DoA cuando el número de elementos del agrupamiento de antenas es elevado, por lo tanto, estos métodos resultan ineficientes cuando se requiere estimar el DoA continuamente [Kikuma,2005].

Con el objetivo de disminuir el tiempo de cómputo de estos algoritmos, es necesario implementar técnicas de rastreo de subespacio que permitan simplificar la obtención del subespacio de señal.

Debido a la importancia que tiene el subespacio de señal para ciertas aplicaciones, en años recientes se ha tomado un gran interés en el estudio de los algoritmos de rastreo de subespacio. Dos de los algoritmos más estudiados son PAST (Projection Approximation Subspace Tracking)[Yang,1995] y Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Descomposition) [Strobach,1997], los cuales estudiaremos a fondo para su aplicación en este trabajo de tesis.

Además, en trabajos anteriores del Grupo de Comunicaciones Inalámbricas, se han analizado las prestaciones de los algoritmos basados en la descomposición de valores propios de la matriz de covarianza MUSIC y ESPRIT, habiéndose obtenido resultados favorables de éstos en cuanto a resolución.

1.4. Objetivo de la Tesis

Manteniendo la simplicidad de la estructura de los algoritmos MUSIC y ESPRIT, y buscando mejorar la eficiencia en la obtención del DoA, en esta tesis se plantea como objetivo, la determinación del DoA mediante el modelado y simulación de MUSIC y ESPRIT, empleando métodos de rastreo de subespacio del tipo de descomposición en valores singulares Bi-SVD y de proyección aproximada PAST en un sistema de agrupamiento de antenas.

Los objetivos particulares a desarrollar son:

- Investigación de los métodos iterativos de descomposición en valores singulares del tipo Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Decomposition) y PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) .
- Modelado y simulación del DoA mediante MUSIC y ESPRIT empleando los métodos iterativos de descomposición en valores singulares (Bi-SVD) y de proyección aproximada (PAST), en un sistema de comunicaciones móviles, en un sistema de agrupamiento de antenas.
- Evaluación de prestaciones de localización de fuentes mediante algoritmos iterativos y análisis comparativo con los métodos de descomposición en valores propios (EVD) de la matriz de covarianza, aplicado a los algoritmos MUSIC y ESPRIT.

1.5. Organización del Trabajo

Este trabajo de tesis está dividido en 6 capítulos, los cuales están divididos de la siguiente manera:

En el capítulo 2, **Sistemas de Antenas Inteligentes**, se realiza una breve descripción de los sistemas de antenas inteligentes, se presentan los requerimientos que deben cumplir los sistemas de antenas inteligentes, los tipos de antenas inteligentes, sus ventajas y desventajas, las geometrías de los agrupamientos de antenas y los métodos de estimación del DoA.

En el capítulo 3, **Algoritmos MUSIC y ESPRIT**, se realiza el modelado del DoA empleando los principales métodos de algoritmos ampliamente utilizados MUSIC y ESPRIT,

los cuales se basan en las estructuras propias, considerando un escenario de un agrupamiento lineal uniforme de antenas. Se presenta el modelo de señal, la representación del vector de dirección y la matriz de covarianza.

En el capítulo 4, **Algoritmos de Rastreo de Subespacio**, se realiza un análisis profundo de las principales características de los algoritmos de rastreo de subespacio del tipo de descomposición en valores singulares Bi-SVD y de proyección aproximada PAST. Además, se explica la relación existente entre algoritmos de rastreo de subespacio y los métodos basados en subespacio para la estimación del DOA.

En el capítulo 5, **Simulación y Resultados**, se presentan las simulaciones de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, aplicando la descomposición de valores singulares (SVD) y los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD. Se presentan varios escenarios de simulación para realizar la evaluación de dichos algoritmos, tanto de movilidad como de ruido. Además, se realiza la evaluación del tiempo de cómputo para una actualización del subespacio de señal, para los algoritmos SVD, PAST y Bi-SVD, también se realiza la evaluación del desempeño de los algoritmos de rastreo de subespacio, en función del factor de ponderación de pesos β .

En el capítulo 6, **Conclusión y Aportaciones**, se presentan las conclusiones y las aportaciones de este trabajo de tesis.

CAPÍTULO 2

Sistemas de Antenas Inteligentes

2.1. Introducción

A continuación, se presentarán los conceptos básicos de los sistemas de antenas inteligentes, la problemática asociada con la implementación de dichos sistemas, haciendo referencia al problema de la obtención del DoA (direction of arrival) para su aplicación en sistemas adaptativos. El conocimiento de estos conceptos es parte fundamental para la conceptualización de los problemas que se quieren resolver con este trabajo de tesis.

2.2. Sistemas de Antenas Inteligentes

La demanda del incremento de la capacidad de los sistemas de comunicaciones móviles celulares, ha motivado la reciente búsqueda hacia el desarrollo de algoritmos y estándares que exploten el área de cobertura de manera selectiva. Como consecuencia de esta demanda, se presenta como una alternativa la implementación de sistemas de antenas inteligentes a los sistemas de comunicaciones móviles celulares. Con la aplicación de esta tecnología, además de conseguir aumentar la capacidad de conexión a múltiples usuarios simultáneamente, se

consigue obtener las siguientes ventajas adicionales:

- Reducción de potencia de transmisión.
- Reducción de interferencia por propagación mutitrayecto.
- Reducción de nivel de interferencia co-canal.
- Incremento del nivel de seguridad.
- Introducción de nuevos servicios.

Estas características hacen muy atractivo el estudio de los sistemas de antenas inteligentes, es por esto, que en los últimos años se ha incrementado la investigación de dichos sistemas.

Una antena inteligente es aquella que, en vez de disponer un diagrama de radiación fijo, es capaz de generar o seleccionar haces muy directivos enfocados hacia el usuario deseado [Moreno, 2001], es decir, el concepto de antena inteligente se aplica a todas las situaciones en las cuales un sistema está utilizando un agrupamiento de antenas y el diagrama de radiación es ajustado dinámicamente de acuerdo a los requerimientos del sistema.

Una antena inteligente combina un agrupamiento de antenas con una unidad de procesamiento digital de señales (DSP) que optimiza dinámicamente los diagramas de radiación y recepción en su respuesta a una señal de interés en su entorno [Yepes, 2006].

2.3. Tipos de Antenas Inteligentes

La característica básica que se busca en el diseño de un sistema de antenas inteligentes es la capacidad de seleccionar espacialmente a los distintos usuarios. Existen varias formas de implementar un sistema con esta capacidad, las cuales se describen a continuación:

2.3.1. Haz Conmutado

Es la técnica más simple. El sistema radiante genera varios haces fijos, cada uno de ellos apuntando en una dirección distinta, de modo que entre todos se cubre toda la zona deseada (un sector o una celda). El receptor selecciona el haz que mejora la señal recibida y reduce la interferencia [Rappaport, 1999].

Esta técnica no garantiza que el móvil se encuentre en la dirección de máxima radiación del haz que le da servicio, ni que las señales interferentes se vean notablemente reducidas. De hecho, sería posible recibir una señal interferente por un punto del diagrama de radiación con mayor ganancia que la señal deseada, empeorando apreciablemente las prestaciones del sistema [Moreno, 2001].

2.3.2. Haz de Seguimiento

Esta técnica es más compleja que la anterior. Requiere del uso de un agrupamiento de fase progresiva; es decir, un agrupamiento en el que se pueden controlar electrónicamente las fases con las que se alimentan los distintos elementos, de modo que puede modificarse a voluntad la dirección en la que apunta el lóbulo principal de la antena, a su vez, es necesario utilizar algún algoritmo de detección de la dirección de llegada (DoA), de modo que pueda reorientarse dinámicamente el haz para apuntar al usuario deseado [Moreno, 2001]. Además, este tipo de antenas puede cambiar su diagrama dinámicamente para ajustarse a las condiciones de ruido, interferencia y multitrayectorias [Rappaport, 1999].

Con esta técnica se puede garantizar que el usuario se encuentra iluminado en todo momento por el lóbulo principal y con máxima ganancia (dentro de las limitaciones de los algoritmos que se empleen). Sin embargo, tampoco puede evitarse que las interferencias entren por algún lóbulo secundario del diagrama de radiación.

2.3.3. Haz Adaptativo

Este sería el máximo nivel de inteligencia con que se podría dotar al sistema. En este caso, la salida de cada elemento del agrupamiento se pondera con un factor de peso cuyo valor se asigna dinámicamente, de modo que se conforma el diagrama de radiación para maximizar algún parámetro de la señal. De este modo, el diagrama sintetizado habitualmente presentará un lóbulo principal en la dirección del usuario deseado, y mínimos (e incluso nulos) de radiación en las direcciones de las fuentes de interferencia.

Esta técnica requiere el uso de algoritmos complicados, tanto para la detección de la señal deseada e interferente como para la optimización de los pesos que conforman el haz. Estos algoritmos suelen conllevar una gran carga computacional, mientras que deben procesarse en tiempo real, por lo que suponen una seria limitación [Moreno, 2001].

2.4. Agrupamientos de Antenas

Un agrupamiento de antenas puede asumir diferentes geometrías; dependiendo de esta conformación geométrica, se tendrán características específicas de cobertura angular y se tendrá una resolución unidimensional, bidimensional o tridimensional según sea el caso. Las configuraciones geométricas más comunes de agrupamientos de antenas son las siguientes:

- Agrupamiento Lineal.
- Agrupamiento Circular.
- Agrupamiento Planar o Reticular.
- Agrupamiento Elíptico.

En un agrupamiento conformado por elementos idénticos, existen 5 factores que pueden ser utilizados para controlar la forma del diagrama de radiación del agrupamiento de antenas:

- La separación espacial entre elementos.
- La configuración geométrica del agrupamiento de antenas.
- La amplitud de excitación de los elementos individuales.
- La fase de excitación de los elementos individuales.

Los algoritmos de conformación digital de haz trabajan modificando la amplitud y fase de excitación de los elementos individuales.

2.5. Métodos de Estimación del DoA

Existen varios métodos de estimación de la posición angular de fuentes, los cuales se pueden clasificar de la siguiente manera:

2.5.1. Métodos Convencionales para la Estimación del DoA

Los métodos convencionales de estimación del DoA, basan su funcionamiento en dirigir electrónicamente lóbulos en todas direcciones y observar picos de potencia a la salida para cada una de estas posiciones. Estas técnicas no explotan la naturaleza del modelo estadístico de la señal. El ancho del lóbulo principal y la magnitud de los lóbulos laterales limitan la efectividad cuando se tienen señales en múltiples direcciones, esto es debido a que las señales bajo una región angular amplia, contribuyen al promedio de potencia medida en cada dirección observada. Es por esto, que además de requerir mucho tiempo para realizar la estimación de fuentes, es una técnica de baja resolución [Rappaport, 2001]. Algunos de los métodos más utilizados son el método de mínima varianza de Capon y el método Retardo-y-Suma ¹ [Rappaport,1999].

¹El nombre en inglés es *Delay-and-Sum*

2.5.2. Métodos de Maxima Verosimilitud

Los métodos de máxima verosimilitud son algoritmos estocásticos que realizan una estimación a partir del comportamiento estadístico de las señales. Estos métodos son muy robustos con muy alta resolución, aún bajo ambientes hostiles donde se tenga una relación señal a ruido (SNR) muy baja [Bonilla, 2005].

El inconveniente de la aplicación de estos algoritmos es su alta complejidad computacional [Van Tress, 2002], que los hacen inviables cuando se requiere una estimación continua del DoA.

2.5.3. Métodos de Subespacio para la Estimación del DoA

Los métodos basados en subespacio explotan la estructura del modelo de datos [Rapaport, 1999]. Estos métodos confían en las siguientes propiedades de la matriz de covarianza del agrupamiento de antenas: (1) El espacio generado por sus vectores propios puede ser dividido en dos subespacios, llamados el subespacio de señal y el subespacio de ruido; y (2) Los vectores de dirección correspondientes a las direcciones de las fuentes son ortogonales al subespacio de ruido. Como el subespacio de ruido es ortogonal al subespacio de señal, estos vectores de dirección están contenidos en el subespacio de señal. El subespacio de ruido es generado por los vectores propios asociados a los valores propios más pequeños de la matriz de correlación, y el subespacio de señal es generado por los vectores propios asociados con sus valores propios más grandes.

Los métodos basados en la estructura de los valores propios de la matriz de covarianza del agrupamiento de antenas, hacen una búsqueda de las posiciones angulares, en las cuales las señales recibidas son ortogonales al subespacio de ruido y por ende, están contenidas en el subespacio de señal.

Las primeras propuestas de algoritmos basados en subespacios son el algoritmo MUSIC (Multiple Signal Classification) propuesto por Schmidt [Schmidt,1986] y el algoritmo ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique) propuesto por Roy [Roy,1989].

Estos algoritmos son de alta resolución, sin embargo, requieren el cálculo de los valores y vectores propios de la matriz de covarianza cada vez que se requiere hacer la estimación del DoA, esto requiere de mucho tiempo de cómputo, lo cual resulta inconveniente su aplicación bajo entornos dinámicos, debido a que se requiere la estimación de fuentes sucesivamente y en tiempo real.

2.6. Conclusiones

En este capítulo, se presentaron los conceptos básicos de los sistemas de antenas inteligentes, que nos dieron a conocer las funciones principales que los caracterizan. Se presentaron los tipos de antenas inteligentes, las geometrías que pueden tomar los agrupamientos de antenas, como también los diferentes métodos de estimación del DoA y las características que limitan su aplicación, cuya solución se estudiará en este trabajo.

Se describió el principal inconveniente de los métodos de subespacio de estimación de fuentes, que es el tiempo excesivo de procesamiento para cada actualización del DoA, debiéndose obtener de forma continua, lo cual es un inconveniente para su aplicación en tiempo real. Esto se debe a la gran carga computacional para la obtención del subespacio de señal a través de la descomposición de valores singulares, a partir de los datos de la matriz de covarianza. Además, el tiempo de actualización del DoA depende del número de elementos de antena que estemos utilizando en el agrupamiento.

Es por esto, que en esta tesis se hace el planteamiento de la utilización de algoritmos de

rastreo de subespacio, para reducir el tiempo de procesamiento en la obtención del subespacio de señal, a partir de muestras obtenidas a la salida del agrupamiento de antenas. Además, la aplicación de estos algoritmos iterativos nos permite actualizar el DoA para cada tiempo de muestreo.

El objetivo de la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio en los algoritmos de estimación de fuentes, basados en subespacio, es disminuir el tiempo de cómputo para cada actualización del DoA, sin modificar las prestaciones y características de dichos algoritmos.

En el siguiente capítulo se presenta un estudio detallado de los algoritmos de estimación de fuentes basados en subespacio MUSIC y ESPRIT.

CAPÍTULO 3

Algoritmos MUSIC y ESPRIT

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta la geometría del agrupamiento de antenas y el modelo de la señal utilizada, esto a su vez, nos permite realizar una descripción del vector de dirección para dicho agrupamiento, estos conceptos son básicos para posteriormente realizar un análisis completo de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT.

3.2. Distribución Geométrica de Elementos del Agrupamiento

El agrupamiento de antenas a considerar en este trabajo es un agrupamiento lineal uniforme (ALU), el cual está compuesto de K elementos de antena espaciados de manera uniforme a una distancia d , el agrupamiento se muestra en la figura 1.

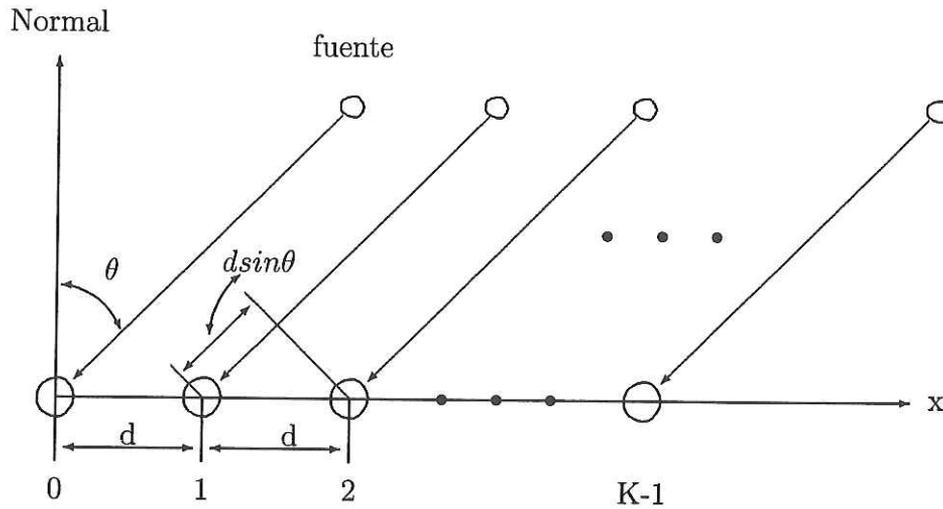


Figura 1: Agrupamiento lineal uniforme.

3.3. Modelo de Señal

Se supone que el agrupamiento de antenas está localizado en campo lejano con respecto a las fuentes de dirección, esto es, tan lejos como pueda ser considerado, de tal manera que la señal de dirección de las fuentes en el agrupamiento puede considerarse como un frente de onda plano. También se supone que las ondas planas se propagan en un medio homogéneo y que el agrupamiento está compuesto por elementos omnidireccionales idénticos libres de distorsión, esto es, el único efecto de propagación de la fuente al agrupamiento de antenas es solo el tiempo de retardo.

El sistema de coordenadas del agrupamiento de antenas se utiliza como referencia para derivar los tiempos de arribo del frente de onda a los elementos del agrupamiento de antenas, como se muestra en la figura 1. Para el agrupamiento lineal uniforme con una distancia d de separación de los elementos y alineados con el eje x , el primer elemento está situado en el origen. El tiempo de arribo $\tau_k(\theta_l)$ se define como el tiempo de propagación de una onda plana que proviene de la l -ésima fuente y que incide en el k -ésimo elemento del agrupamiento

de antenas con un ángulo de incidencia θ_l . La expresión de $\tau_k(\theta_l)$ está dada por

$$\tau_k(\theta_l) = \frac{d}{c} (k-1) \sin(\theta_l) \quad (1)$$

para los valores $-90 \leq \theta_l \leq 90$ y $1 \leq k \leq K+1$, donde d es la distancia entre elementos del agrupamiento y c es la velocidad de la luz. Cuando la l -ésima fuente se encuentra con un ángulo $\theta_l = 0^\circ$, para este caso, de (1), $\tau_k(\theta_l) = 0$ para toda k . Así, el frente de onda arriba a todos los elementos del agrupamiento al mismo tiempo, y la señal inducida debido a esta fuente es idéntica en todos los elementos. Para $\theta_l = 90^\circ$ con respecto a la normal, el frente de onda arriba al k -ésimo elemento antes de arribar en el elemento del origen. El tiempo de retardo dado por (1) es

$$\tau_k(\theta_l) = \frac{d}{c} (k-1) \quad (2)$$

Por otra parte, para $\theta_l = -90^\circ$, el tiempo de retardo está dado por

$$\tau_k(\theta_l) = -\frac{d}{c} (k-1) \quad (3)$$

El signo negativo es debido a la definición de τ_k . Es el tiempo tomado por la onda plana desde el k -ésimo elemento al origen. El signo negativo indica que el frente de onda arriba al origen antes de arribar al k -ésimo elemento.

La señal inducida en el elemento referencia (el elemento en el origen del sistema de coordenadas) debido a la l -ésima fuente se expresa de forma común en notación compleja como

$$m_l(t) e^{j2\pi f_0 t} \quad (4)$$

donde $m_l(t)$ denota la función de modulación compleja y f_0 denota la frecuencia portadora [Godara, 2004].

Considerando que el frente de onda en el k -ésimo elemento arriba $\tau_k(\theta_l)$ segundos después de arribar al elemento referencia, la señal inducida en el k -ésimo elemento debido a la l -ésima fuente puede ser expresada como

$$m_l(t) e^{j2\pi f_0(t+\tau_k(\theta_l))} \quad (5)$$

La expresión se basa en la consideración de banda estrecha para el procesamiento de la señal del agrupamiento, el cual considera que el ancho de banda de la señal es bastante estrecho¹ y que las dimensiones del agrupamiento son muy pequeñas permitiendo a la función de modulación mantenerse constante durante los $\tau_k(\theta_l)$ segundos, esto es, la aproximación $m_l(t) \cong m_l(t + \tau_k(\theta_l))$ se mantiene [Godara, 2004].

Considerando que hay L fuentes presentes, $x_k(t)$ denota el total de la señal inducida debido a todas las L fuentes y el ruido de fondo en el k -ésimo elemento. Esto es,

$$x_k(t) = \sum_{l=1}^L m_l(t) e^{j2\pi f_0(t+\tau_k(\theta_l))} + n_k(t) \quad (6)$$

donde $n_k(t)$ es la componente de ruido aleatorio en el k -ésimo elemento, el cual incluye ruido de fondo y ruido eléctrico generado en el k -ésimo canal. Además se supone que es ruido blanco aditivo Gaussiano con media cero y varianza igual a σ_n^2 y no correlacionado con las fuentes direccionales y el ruido en diferentes elementos se considera no correlacionado.

¹Una señal se considera de banda estrecha cuando

3.4. Representación del Vector de Dirección

El vector de dirección es un vector complejo de dimensión K el cual contiene las respuestas de todos los K elementos del agrupamiento de una fuente de banda estrecha de potencia unitaria. Para un agrupamiento con elementos iguales, el vector de dirección $a(\theta_l)$ asociado a la l -ésima fuente, está dado por

$$a(\theta_l) = [\exp(j2\pi f_0 \tau_1(\theta_l)), \dots, \exp(j2\pi f_0 \tau_K(\theta_l))]^T \quad (7)$$

3.5. Representación de la Matriz de Covarianza

Siguiendo el modelo de datos de banda estrecha mostrado en el apartado anterior, si hay L señales incidentes en el agrupamiento, el vector recibido de los datos de entrada en los K elementos del agrupamiento, puede expresarse como una combinación lineal de las L ondas incidentes y el ruido. Esto es

$$x(t) = \sum_{l=1}^L a(\theta_l) s_l(t) + n(t) \quad (8)$$

$$x(t) = [a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_L)] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_L(t) \end{bmatrix} + n(t) = As(t) + n(t) \quad (9)$$

donde $s^T(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_L(t)]$ es el vector de las señales incidentes, $n(t)$ es el vector de ruido y $a(\theta_l)$ es el vector de dirección correspondiente a la dirección de arribo de la l -ésima señal. De (9), se puede ver que el vector x recibido es una combinación lineal particular del vector de dirección del agrupamiento, con los coeficientes de combinación s_1, s_2, \dots, s_L .

En términos del modelo de datos, la matriz de covarianza de entrada R_{xx} se puede expresar como [Rappaport,1999]

$$R_{xx} = E [xx^H] = AE [ss^H] A^H + E [nn^H] \quad (10)$$

$$R_{xx} = AR_{ss}A^H + \sigma_n^2 I \quad (11)$$

donde R_{ss} es la matriz de covarianza de la señal $E [ss^H]$.

3.6. Descomposición en Valores Singulares

Es útil expresar la matriz de covarianza del agrupamiento mostrada en la ecuación (11) en términos de sus valores propios y sus vectores propios asociados. Los valores propios de la matriz de covarianza del agrupamiento pueden ser divididos en dos conjuntos, cuando los ambientes consisten de fuentes direccionales no correlacionadas y ruido blanco con matriz de covarianza $\sigma_n^2 I$.

Los valores propios contenidos en uno de los conjuntos son de igual valor. Sus valores no dependen de las fuentes direccionales sino de la varianza del ruido. Los valores propios contenidos en el otro conjunto son funciones de los parámetros de la fuente direccional y su número es igual al número de esas fuentes. Cada valor propio de este conjunto está asociado con una fuente direccional y su valor cambia con respecto a la potencia de esta fuente. Los valores propios de este conjunto son mucho mayores con respecto a los asociados con el ruido blanco. Estos valores propios son referidos como los valores propios de señal, y los otros pertenecientes al primer conjunto son referidos con los valores propios de ruido. Así, una matriz de covarianza de un agrupamiento de K elementos, sumergidos en L fuentes

direccionales no correlacionadas y ruido blanco, tiene L valores propios de señal y $K - L$ valores propios de ruido [Godara, 2004].

Denotando los K valores propios de la matriz de covarianza de un agrupamiento en orden descendente por $\lambda_k, k = 1, \dots, K$ y sus correspondientes vectores propios de norma unitaria por $U_k, k = 1, \dots, K$ la matriz de covarianza toma la siguiente forma:

$$R_{xx} = Q\Lambda Q^H \quad (12)$$

donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_K \end{bmatrix} \quad (13)$$

y

$$Q = [U_1 \dots U_K] \quad (14)$$

Esta representación es referida como la descomposición espectral de la matriz de covarianza del agrupamiento [Godara,2004]. Los vectores propios forman un conjunto ortonormal,

$$QQ^H = I, \quad (15)$$

y

$$Q^H Q = I \quad (16)$$

así,

$$Q^H = Q^{-1}. \quad (17)$$

La propiedad de la ortonormalidad de los vectores propios nos dirige a la siguiente expresión de la matriz de covarianza del agrupamiento:

$$R_{xx} = \sum_{k=1}^K \lambda_k U_k U_k^H + \sigma_n^2 I. \quad (18)$$

3.7. Algoritmo MUSIC

El algoritmo MUSIC (Multiple Signal Classification), propuesto por Schmidt en 1979, es una técnica de alta resolución de clasificación de múltiples señales, basada en la estructura de los valores singulares de la matriz de covarianza de la señal de entrada, que provee información acerca del número de señales incidentes. El algoritmo MUSIC provee una alta resolución en la estimación de fuentes, sin embargo el agrupamiento requiere de calibración con mucha precisión y exactitud [Godara,2002].

El algoritmo MUSIC se basa en el punto de vista geométrico del problema de la estimación del parámetro de la señal [Rappaport, 1999]. Siguiendo con el modelo de datos donde tenemos L señales incidentes en el agrupamiento y K elementos y considerando la matriz de covarianza mostrada en la ecuación (11), tenemos que los valores propios de R_{ss} son los valores, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$ tal que

$$|R_{xx} - \lambda_i I| = 0. \quad (19)$$

Utilizando la matriz de covarianza mostrada en (11), podemos escribir esto como

$$|AR_{ss}A^H + \sigma_n^2 I - \lambda_i I| = |AR_{ss}A^H - (\lambda_i - \sigma_n^2) I| = 0, \quad (20)$$

los valores propios, ν_i , de $AR_{ss}A^H$ son

$$\nu_i = \lambda_i - \sigma_n^2. \quad (21)$$

\mathbf{A} está comprendido por los vectores de dirección, los cuales son linealmente independientes, por lo tanto tiene columnas de rango completo, y la matriz de covarianza R_{ss} es no singular.

Las columnas de rango completo de \mathbf{A} y la no singularidad de la matriz R_{ss} garantizan que, cuando el número de señales incidentes L es menor al número de elementos del agrupamiento K , la matriz $AR_{ss}A^H$ de $K \times K$ es semidefinida positiva con rango L .

Ésto implica que $K - L$ de los valores propios, ν_i , de $AR_{ss}A^H$ son cero. De (21), ésto nos dice que $K - L$ de los valores propios de R_{xx} son igual a la varianza de ruido, σ_n^2 . Entonces, si λ_1 es el valor propio mayor, y λ_K es el valor propio menor, Entonces

$$\lambda_{L+1}, \dots, \lambda_K = \sigma_n^2. \quad (22)$$

En la práctica, sin embargo, cuando la matriz de covarianza R_{xx} es estimada con un número finito de muestras, todos los valores propios correspondientes a la potencia de ruido no son idénticos.

Un estimado del número de señales incidentes está dado por

$$\hat{L} = K - M \quad (23)$$

donde M es el número de valores propios menores. El vector propio asociado con un valor propio en particular, λ_i , es el vector q_i tal que

$$(R_{xx} - \lambda_i I) q_i = 0. \quad (24)$$

Para vectores propios asociados con los $K - L$ valores propios menores, tenemos

$$(R_{xx} - \sigma_n^2 I) q_i = AR_{ss}A^H q_i + \sigma_n^2 I q_i - \sigma_n^2 I q_i = 0, \quad (25)$$

por lo tanto

$$AR_{ss}A^H q_i = 0. \quad (26)$$

Como A tiene rango completo y R_{ss} no es singular, ésto implica que

$$A^H q_i = 0 \quad (27)$$

o

$$\begin{bmatrix} a^H(\theta_1) q_i \\ a^H(\theta_2) q_i \\ \vdots \\ a^H(\theta_L) q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Esto significa que los vectores propios asociados con los $K - L$ valores propios menores son ortogonales a los L vectores de dirección;

$$\{a(\theta_1), \dots, a(\theta_L)\} \perp \{q_{L+1}, \dots, q_K\}. \quad (29)$$

Entonces se pueden estimar los vectores de dirección asociados con la señal recibida encontrando el vector de dirección ortogonal con el vector propio asociado con los valores propios de R_{xx} que son aproximadamente igual a σ_n^2 .

Este análisis muestra que los vectores propios de la matriz de covarianza R_{xx} pertenecen a uno de los dos subespacios ortogonales, llamados subespacio de señal y subespacio de ruido. Los vectores de dirección, correspondientes a la dirección de arribo (DoA), se encuentran en el subespacio de señal, de ahí que son ortogonales al subespacio de ruido. El DoA puede ser determinado a través de la búsqueda de todos los posibles vectores de dirección, para encontrar cuales de esos son perpendiculares al espacio expandido por los vectores propios pertenecientes al subespacio de ruido.

Para buscar el subespacio de ruido, formamos una matriz que contiene los vectores propios de ruido:

$$E_n = [q_{L+1} \ q_{L+2} \ \cdots \ q_K] \quad (30)$$

Como los vectores de dirección correspondientes a las componentes de señal son ortogonales a los vectores propios del subespacio de ruido, $a^H(\theta) E_n E_n^H a(\theta) = 0$ para θ correspondiente al DoA de una componente multitrayectoria [Rappaport, 1999]. El algoritmo MUSIC estima el DoA de múltiples señales incidentes mediante la localización de los picos del espectro espacial MUSIC dado por

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) E_n E_n^H a(\theta)} \quad (31)$$

o, alternativamente,

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{a^H(\theta) a(\theta)}{a^H(\theta) E_n E_n^H a(\theta)}. \quad (32)$$

La ortogonalidad entre $a(\theta)$ y E_n minimizarán el denominador y de ahí que crecerán los picos en el espectro MUSIC definidos en (31) y (32). Los \hat{L} picos mayores en el espectro MUSIC corresponden a las direcciones de arribo de las señales que llegan al agrupamiento de antenas.

3.8. Algoritmo ESPRIT

El algoritmo ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques) [Roy,1989] es un método de estimación del DoA robusto y computacionalmente eficiente [Godara,2004]. Utiliza dos agrupamientos idénticos en el sentido de que los elementos del agrupamiento necesitan formar pares enlazados con un mismo vector de desplazamiento, esto es, el segundo elemento de cada par debe estar desplazado a la misma distancia y en la misma dirección relativa al primer elemento como se muestra en la figura 2.

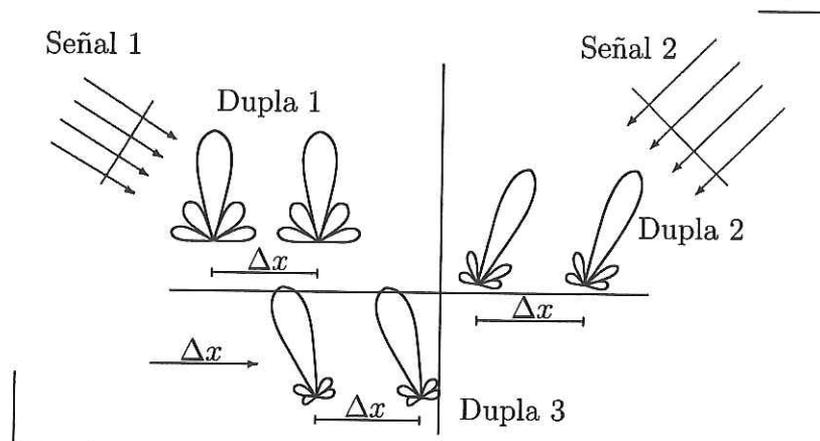


Figura 2: Geometría del agrupamiento utilizando ESPRIT.

La señal inducida en cada elemento del l -ésimo par, debido a la fuente de banda estrecha en dirección θ se denota por $x_l(t)$ y $y_l(t)$. La diferencia de fase entre estas dos señales depende en el tiempo tomado por la onda plana de arribo, desde la fuente de consideración

que viaja de un elemento a otro. Se supone que los dos elementos están separados por un desplazamiento Δ_x . Esto es,

$$y_l(t) = x_l(t)e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_x\sin\theta} \quad (33)$$

donde Δ_x es medida en longitudes de onda.

Note que Δ_x es la magnitud del vector de desplazamiento. En este conjunto de vectores la dirección de referencia y todos los ángulos son medidos con referencia a este vector. Sea el grupo de señales recibidas por los dos agrupamientos de K -elementos denotados por $x(t)$ y $y(t)$. Esto está dado por

$$x(t) = As(t) + n_x(t) \quad (34)$$

y

$$y(t) = A\Phi s(t) + n_y(t) \quad (35)$$

donde \mathbf{A} es una matriz de $K \times L$ con sus columnas denotando los L vectores de dirección correspondientes a las L fuentes direccionales asociadas con el primer subagrupamiento, Φ es una matriz diagonal de $L \times L$ con sus elementos diagonales dados por

$$\Phi_{l,l} = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_x\sin\theta_m} \quad (36)$$

$s(t)$ denota M señales fuente inducidas en el elemento referencia, y $n_x(t)$ y $n_y(t)$, respectivamente, denotan el ruido inducido en los elementos de los dos subagrupamientos. Comparando las ecuaciones para $x(t)$ y $y(t)$, observamos que los vectores de dirección correspondientes a las L fuentes direccionales asociadas con el segundo subagrupamiento está dado por $A\Phi$.

Sea U_x y U_y dos matrices de $K \times L$ con sus columnas denotando los L vectores propios correspondientes a los valores propios más grandes de las dos matrices de covarianza R_{xx} y R_{yy} , respectivamente. Como estos dos conjuntos de vectores propios expanden el mismo L -dimensional espacio de señal, estas dos matrices U_x y U_y están relacionadas por una única matriz de transformación no singular Ψ , tal que

$$U_x \Psi = U_y. \quad (37)$$

De manera similar, estas matrices están relacionadas a las matrices de los vectores de dirección A y $A\Phi$ por otra única matriz de transformación no singular T , como el mismo subespacio de señal es expandido por estos vectores de dirección. Esto es

$$U_x = AT, \quad (38)$$

y

$$U_y = A\Phi T. \quad (39)$$

Sustituyendo para U_x y U_y y considerando que \mathbf{A} es de rango completo,

$$T\Psi T^{-1} = \Phi \quad (40)$$

De acuerdo a la ecuación anterior, los valores propios de Ψ son iguales a los elementos de la diagonal de Φ , y las columnas de \mathbf{T} son vectores propios de Ψ .

Esta es la relación principal en el desarrollo de ESPRIT [Roy,1989]. Se requiere un estimado de Ψ a partir de las mediciones de $x(t)$ y $y(t)$. Una descomposición propia de Ψ provee

sus valores propios, igualándolos con Φ obtenemos los estimados del DoA,

$$\theta_m = -\sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{2\pi\Delta_x} \arg(\lambda_m) \right) \quad (41)$$

El procedimiento del algoritmo ESPRIT es presentado a continuación:

1. Tomar muestras de los dos subagrupamientos idénticos los cuales están desplazados por Δ_x . Estimar las dos matrices de covarianza a partir de las mediciones y encontrar sus valores y vectores propios.
2. Encontrar el número de fuentes direccionales L .
3. Formar dos matrices con sus columnas empezando con los L vectores propios asociados con los valores propios más grandes de cada matriz de covarianza. Sean éstas denotadas por U_x y U_y .
4. Formar una matriz de $2L \times 2L$

$$\begin{bmatrix} U_x^H \\ U_y^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x & U_y \end{bmatrix} \quad (42)$$

y encontrar sus valores propios $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{2L}$. Sea Λ la matriz diagonal:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2L} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Sean los vectores propios asociados con $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{2L}$ las columnas de la matriz V

tal que

$$\begin{bmatrix} U_x^H \\ U_y^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x & U_y \end{bmatrix} = V \Lambda V^H \quad (44)$$

5. Particionar V en cuatro matrices de dimensión $L \times L$ como

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \quad (45)$$

6. Calcular los valores propios $\lambda_l, l = 1, \dots, L$ de la matriz $-V_{11}V_{22}^{-1}$.

7. Estimar el ángulo de arribo θ_l utilizando

$$\theta_l = -\sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{2\pi\Delta_x} \arg(\lambda_l) \right), \quad l = 1, \dots, L \quad (46)$$

3.9. Conclusiones

Se realizó un estudio a profundidad de los algoritmos de estimación de fuentes basados en subespacio MUSIC y ESPRIT. Con el estudio realizado conocemos las características y estructura a modificar y la implementación de los algoritmos de rastreo de subespacio con el objetivo de reducir el tiempo de computo para una actualización del DoA.

En el siguiente capítulo se presentará un estudio de los algoritmos de rastreo de subespacio PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) y Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Decomposition) y la forma en que estos pueden adaptarse a los algoritmos de estimación de fuentes basados en subespacio, como metodos alternativos de estimación del subespacio de señal, a partir de muestras obtenidas en el agrupamiento de antenas.

CAPÍTULO 4

Algoritmos de Rastreo de Subespacio

4.1. Introducción

En algunas aplicaciones es necesario hacer la estimación del subespacio de señal recursivamente a partir de muestras $x(t)$ ($t = 1, 2, \dots$). Los algoritmos utilizados para obtener un estimado del subespacio de señal basados en rastreo de subespacio, hacen un estimado del subespacio en un instante t a partir del subespacio estimado en un instante $t - 1$ y el nuevo vector de muestras $x(t)$. El objetivo principal del rastreo de subespacio es la separación adaptativa de un conjunto de las componentes de la señal deseada de las no deseadas [Luo,2003]. Ésto nos lleva a la obtención de algoritmos iterativos que permiten obtener un estimado del subespacio de señal en cada actualización o iteración, además si se implementan estos algoritmos en los métodos de estimación de fuentes basados en subespacio obtenemos un estimado del DoA de forma iterativa. Partiendo del concepto de subespacio de señal, se han derivado diferentes métodos para realizar dicho estimado. En este capítulo se presenta un estudio detallado de los algoritmos de rastreo de subespacio (PAST y Bi-SVD) y la forma en que interactúan con los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, culminando con esto, el análisis teórico de dichos algoritmos dando paso a su implementación.

4.2. Teoremas de Rastreo de Subespacio

Sea $x \in \mathbb{C}^n$ un vector aleatorio evaluado complejo con matriz de covarianza $C = E [xx^H]$. Consideramos la siguiente función costo sin restricciones [Yang, 1995]

$$J(W) = E \|x - WW^H x\|^2 \quad (47)$$

donde $W \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ($r < n$). Sin perder generalidad, consideramos que W tiene rango completo r . Los siguientes teoremas se mantienen

Teorema 1 *W es un punto estacionario de $J(W)$ sí y solo sí $W = U_r Q$, donde $U_r \in \mathbb{C}^{n \times r}$ contiene cualquier r vectores propios distintos de C y $Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ es una matriz unitaria arbitraria. En cada punto estacionario, $J(W)$ es igual a la suma de los valores propios relacionados con los vectores propios que no están implicados en U_r .*

Teorema 2 *Todos los puntos estacionarios de $J(W)$ son puntos silla excepto cuando U_r contiene los r vectores propios dominantes de C . En este caso, $J(W)$ alcanza el mínimo global.*

Como $J(W)$ tiene un mínimo global en el cual el espacio columna de W iguala al subespacio de señal y no a otro mínimo local, está garantizada una convergencia global si se busca el subespacio de señal de C minimizando $J(W)$ mediante métodos iterativos.

Por otro lado, no se posee ninguna limitante en la ortonormalidad de las columnas de W . Los dos teoremas muestran que minimizando $J(W)$ en (47) resultará en forma automática en la solución de W con columnas ortonormales.

La utilización de un algoritmo iterativo para minimizar $J(W)$ siempre convergerá en una base ortonormal del subespacio de señal sin ninguna operación de ortonormalización durante las iteraciones [Yang,1995].

En un mínimo global de $J(W)$, W no contiene los vectores propios de señal. En lugar de eso, obtenemos una base ortonormal arbitraria del subespacio de señal como es indicado por la matriz unitaria Q en el teorema 1. Esto también lo podemos ver en que $J(W)$ es invariante con respecto a la rotación a los parámetros del espacio, i.e., $J(W) = J(WQ)$ donde $QQ^H = I$. En otras palabras, W no es determinada en forma única cuando minimizamos $J(W)$. El producto WW^H , sin embargo, es único, igual a la matriz de proyección del subespacio de señal.

Para el caso donde se tiene un vector ($r = 1$), la solución de la minimización de $J(W)$ está dada por los vectores propios normalizados de C más dominantes.

4.3. Algoritmo PAST(Projection Approximation Subspace Tracking)

Con base en los teoremas presentados en el apartado anterior, damos paso al desarrollo del primer algoritmo de rastreo de subespacio.

Reemplazando la esperanza en (47) por el factor de ponderación de pesos y agregando una nueva variable de tiempo, tenemos

$$\begin{aligned}
 J(W(t)) &= \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} \|x(i) - W(t)W^H(t)x(i)\|^2 \\
 &= \text{tr}[C(t)] - 2\text{tr}[W^H(t)C(t)W(t)] + \text{tr}[W^H(t)C(t)W(t)W^H(t)W(t)]
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Todos los vectores muestra, disponibles en el intervalo $1 \leq i \leq t$, están implicados en la estimación del subespacio de señal en un instante de tiempo t . El uso del factor de ponderación de pesos $0 < \beta \leq 1$ permite asegurar que los datos en tiempos pasados distantes

tengan ponderación más baja, con el objetivo de proporcionar capacidad de rastreo cuando el sistema opera en un ambiente no estacionario.

$J(W(t))$ en (48) es idéntica a $J(W)$ en (47) excepto por el uso de muestras exponencialmente ponderadas para la matriz de covarianza

$$C(t) = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} x(i)x^H(i) = \beta C(t-1) + x(t)x^H(t) \quad (49)$$

en lugar de $C = E[xx^H]$. La clave del enfoque de PAST es la aproximación $W^H x(i)$ en (48), de la proyección desconocida de $x(i)$ en las columnas de $W(t)$ por la expresión $y(i) = W^H(i-1)x(i)$, el cual puede ser calculado por $1 \leq i \leq t$ en un instante de tiempo t . Ésto resulta en la función costo modificada

$$J'(W(t)) = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} \|x(i) - W(t)y(i)\|^2 \quad (50)$$

la cual es cuadrática en los elementos de W .

Esta aproximación de la proyección, de ahí el nombre PAST, cambia el desempeño del error de $J(W(t))$. Para sistemas estacionarios o con señales con variación lenta, la diferencia entre $W^H x(i)$ y $W^H(i-1)x(i)$ es pequeña, en particular cuando i es cercano a t . Esta diferencia puede ser grande para pasados distantes con $i \ll t$. Pero la contribución de los datos pasados a la función costo decrece conforme crece t . Se espera por lo tanto que $J'(W(t))$ sea una buena aproximación de $J(W(t))$ y la matriz $W(t)$ minimizando $J'(W(t))$ sea un buen estimado del subespacio de señal de $C(t)$.

$J'(W(t))$ es minimizado si

$$W(t) = C_{xy}(t)C_{yy}^{-1}(t), \quad (51)$$

donde

$$C_{xy}(t) = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} x(i)y^H(i) = \beta C_{xy}(t-1) + x(t)y^H(t), \quad (52)$$

$$C_{yy}(t) = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} y(i)y^H(i) = \beta C_{yy}(t-1) + y(t)y^H(t). \quad (53)$$

4.4. Algoritmo Bi-SVD (Bi-Iteration Singular Value Decomposition)

Se desea encontrar para cada instante de tiempo, algunos valores propios dominantes y sus vectores propios asociados de la matriz de datos $X(t)$, la cual es actualizada en cada instante de tiempo t de acuerdo con el siguiente esquema:

$$X(t) = \begin{bmatrix} (1 - \beta)^{1/2} x^T(t) \\ \beta^{1/2} X(t-1) \end{bmatrix} \quad (54)$$

donde $X(t-1)$ es la matriz de datos obtenida en un tiempo pasado, $x(t)$ es el vector de datos actuales, el cual es de dimensión K , y $0 \leq \beta < 1$ es el factor de ponderación.

Considere la siguiente bi-iteración aplicada en una matriz real X de $N \times K$:

$$Q_A(0) = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\mu = 1, 2, \dots$ hasta la iteración de convergencia:

$$\left[\begin{array}{l} B(\mu) = XQ_A(\mu - 1) \\ B(\mu) = Q_B(\mu)R_B(\mu) : N \times r \text{ factorización } QR \\ A(\mu) = X^T Q_B(\mu) \\ A(\mu) = Q_A(\mu)R_A(\mu) : K \times r \text{ factorización } QR \end{array} \right. \quad (55)$$

donde $Q_A(0)$ es el valor inicial de Q_A . Al terminar esta iteración, $Q_B(\mu)$ es una matriz de $N \times r$ con columnas ortonormales, y $Q_A(\mu)$ es una matriz de $K \times r$ con columnas ortonormales. Se puede demostrar que las columnas de $Q_B(\mu)$ convergerán directamente en los r vectores propios dominantes por la izquierda, y las columnas de $Q_A(\mu)$ convergerán directamente en los r vectores propios dominantes por la derecha en la descomposición propia de X . Además, ambas matrices triangulares $R_A(\mu)$ y $R_B(\mu)$ enfocarán las matrices diagonales de $r \times r$ de los valores propios de X .

Reemplazando el índice de iteración μ en (55) por índice de tiempo discreto t obtenemos la siguiente bi-iteración:

$$Q_A(t - 1) = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

para $t = 1, 2, \dots$ realizar la iteración:

$$\left[\begin{array}{l} B(t) = X(t)Q_A(t - 1) \\ B(t) = Q_B(t)R_B(t) : N \times r \text{ factorización } QR \\ A(t) = X^T(t)Q_B(t) \\ A(t) = Q_A(t)R_A(t) : K \times r \text{ factorización } QR \end{array} \right. \quad (56)$$

Estas iteraciones no constituyen un algoritmo práctico debido a que la dimensión vertical

N de la matriz de datos $X(t)$ crecerá de forma infinita durante el tiempo del proceso de actualización de acuerdo a (54).

Para solucionar este problema se define una matriz de aproximación $\hat{X}(t)$ para la matriz de $X(t)$. La matriz de aproximación es

$$\hat{X}(t) = Q_B(t)R_B(t)Q_A^T(t-1) \quad (57)$$

esta aproximación altera $B(t)$ en (56):

$$B(t) = X(t)Q_A(t-1) \cong \hat{X}(t)Q_A(t-1) \quad (58)$$

La $\hat{X}(t)$ especial como se define en (57), es además llamada aproximación consistente en el concepto de bi-iteración. Usando esta aproximación consistente de la matriz de datos, podemos establecer una representación de $B(t)$ en la bi-iteración de (56) como sigue

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}x^T(t) \\ \beta^{1/2}X(t-1) \end{bmatrix} Q_A(t-1) \\ &\approx \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}x^T(t) \\ \beta^{1/2}Q_B(t-1)R_B(t-1)Q_A^T(t-2) \end{bmatrix} Q_A(t-1) \end{aligned} \quad (59)$$

Introducimos un vector de datos $h(t)$ de dimensión comprimida r y una matriz coseno $\Theta_A(t)$ de $r \times r$:

$$h(t) = Q_A^T(t-1)x(t) \quad (60)$$

$$\Theta_A(t) = Q_A^T(t-1)Q_A(t) \quad (61)$$

Todos los vectores de datos de entrada son comprimidos a un subespacio dominante de dimensión r . La matriz coseno $\Theta_A(t)$ describe la distancia entre subespacios consecutivos [Strobach,1997].

Sustituyendo (60) y (61) en (59) obtenemos la siguiente representación aproximada de la matriz B :

$$\hat{B}(t) = \begin{bmatrix} (1 - \beta)^{1/2} h^T(t) \\ \beta^{1/2} B(t-1) \Theta_A(t-1) \end{bmatrix} \quad (62)$$

Omitiendo la aproximación \hat{B} y deduciendo de esta ecuación la siguiente actualización

rápida aproximada por los factores QR de $B(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
& Q_B(t)R_B(t) \\
&= \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}h^T(t) \\ \beta^{1/2}Q_B(t-1)R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 \\ \vdots & Q_B(t-1) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}h^T(t) \\ \beta^{1/2}R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \end{bmatrix} \tag{63} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 \\ \vdots & Q_B(t-1) \\ 0 \end{bmatrix} G_B^T(t) \cdot G_B(t) \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}h^T(t) \\ \beta^{1/2}R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matriz ortonormal $G_B(t)$ de $(r+1) \times (r+1)$ formalmente representa una secuencia de rotación plana Givens¹ que transforma la matriz triangular actualizada y aumentada en una matriz triangular superior de $r \times r$. De ahí, deducimos de (63) la siguiente actualización para la matriz triangular $R_B(t)$ y la matriz $Q_B(t)$:

$$\begin{bmatrix} R_B(t) \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} = G_B(t) \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}h^T(t) \\ \beta^{1/2}R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \end{bmatrix} \tag{64}$$

¹La factorización QR de una matriz puede ser obtenida usando matrices Givens

$$\begin{bmatrix} Q_B(t) & q_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 \\ \vdots & Q_B(t-1) \\ 0 \end{bmatrix} G_B^T(t) \quad (65)$$

La actualización (65) no es calculada explícitamente debido a que $Q_B(t)$ tiene una dimensión vertical creciente.

En el contexto de rastreo de subespacio, deseamos eliminar por completo el cálculo de $Q_B(t)$. Ésto aparentemente es difícil, debido a que $Q_B(t)$ es necesario como compresor de datos en la actualización de la matriz auxiliar A .

De acuerdo a (56), tenemos:

$$A(t) = X^T(t)Q_B(t) \quad (66)$$

$A(t)$ tiene una dimensión de $K \times r$ y está definida como el producto interno de dos matrices cuyas dimensiones verticales crecen al infinito. Estas matrices crecientes son eliminadas de la siguiente manera:

Multiplicando ambos lados de (66) por $R_B(t)$:

$$A(t)R_B(t) = X^T(t)Q_B(t)R_B(t) \quad (67)$$

Reemplazando $X(t)$ por su representación en (54) y reemplazando $Q_B(t)R_B(t)$ por su

representación en (63):

$$\begin{aligned}
 & A(t)R_B(t) \\
 &= \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}x(t) & \beta^{1/2}X^T(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\beta)^{1/2}h^T(t) \\ \beta^{1/2}Q_B(t-1)R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \end{bmatrix} \quad (68)
 \end{aligned}$$

$$= (1-\beta)x(t)h^T + \beta X^T(t-1)Q_B(t-1) \cdot R_B(t-1)\Theta_A(t-1)$$

Usamos el factor $A(t-1) = X^{t-1}Q_B(t-1)$ para encontrar

$$A(t)R_B(t) = (1-\beta)x(t)h^T(t) + \beta A(t-1) \cdot R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \quad (69)$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned}
 & Q_A(t)R_A(t)R_B(t) \\
 &= (1-\beta)x(t)h^T(t) + \beta Q_A(t-1)R_A(t-1)R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \quad (70)
 \end{aligned}$$

donde $A(t)$ y $A(t-1)$ fueron reemplazados por sus factores QR .

El objetivo es encontrar una actualización directa de los factores $Q_A(t)$ y $R_A(t)$. Para lograr ésto, es necesario realizar la descomposición del vector de datos actuales $x(t)$. Proyectando $x(t)$ en su espacio ortocomplemento expandido por $Q_A(t-1)$, el siguiente vector es obtenido

$$\begin{aligned}
 x_{\perp}(t) &= [I_N - Q_A(t-1)Q_A^T(t-1)] x(t) \\
 &= x(t) - Q_A(t-1)h(t) \quad (71)
 \end{aligned}$$

normalizando $x_{\perp}(t)$:

$$\bar{x}_{\perp}(t) = e_x^{-1/2}(t)x_{\perp}(t) = e_x^{-1/2}(t)x(t) - e_x^{-1/2}(t)Q_A(t-1)h(t) \quad (72)$$

donde $e_x(t) = x_{\perp}^T(t)x_{\perp}(t)$. La descomposición es

$$x(t) = e_x^{1/2}(t)\bar{x}_{\perp}(t) + Q_A(t-1)h(t) \quad (73)$$

sustituyendo esta representación de $x(t)$ en (70) obtenemos:

$$\begin{aligned} & Q_A(t)R_A(t)R_B(t) \\ &= (1-\beta) \left[e_x^{1/2}(t)\bar{x}_{\perp}(t) + Q_A(t-1)h(t) \right] h^T(t) + \beta Q_A(t-1)R_A(t-1)R_B(t-1)\Theta_A(t-1) \\ &= [Q_A(t-1) \quad \bar{x}_{\perp}(t)] \cdot \left[\begin{array}{c} \beta R_A(t-1)R_B(t-1)\Theta_A(t-1) + (1-\beta)h(t)h^T(t) \\ (1-\beta)e_x^{1/2}(t)h^T(t) \end{array} \right] \\ &= [Q_A(t-1) \quad \bar{x}_{\perp}(t)] G_A^T(t)G_A(t) \cdot \left[\begin{array}{c} \beta R_A(t-1)R_B(t-1)\Theta_A(t-1) + (1-\beta)h(t)h^T(t) \\ (1-\beta)e_x^{1/2}(t)h^T(t) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (74)$$

$G_A(t)$ es una secuencia de rotación plana Givens. Separamos (74) en

$$[Q_A(t) \quad q_A(t)] = [Q_A(t-1) \quad \bar{x}_{\perp}(t)] G_A^T(t) \quad (75)$$

y en

$$\begin{bmatrix} R_A(t)R_B(t) \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} = G_A(t) \begin{bmatrix} \beta R_A(t-1)R_B(t-1)\Theta_A(t-1) + (1-\beta)h(t)h^T(t) \\ (1-\beta)e_x^{1/2}(t)h^T(t) \end{bmatrix} \quad (76)$$

de (76) podemos deducir la matriz G_A como

$$\begin{aligned} G_A^T(t) &= \begin{bmatrix} Q_A^T(t-1) \\ \bar{x}_\perp^T(t) \end{bmatrix} [Q_A(t) \quad q_A(t)] \\ &= \begin{bmatrix} Q_A^T(t-1)Q_A(t) & Q_A^T(t-1)q_A(t) \\ \bar{x}_\perp^T(t)Q_A(t) & \bar{x}_\perp^T(t)q_A(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Theta_A(t) & Q_A^T(t-1)q_A(t) \\ f^T(t) & \bar{x}_\perp^T(t)q_A(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (77)$$

$G_A^T(t)$ contiene a $\Theta_A(t)$ como submatriz y al vector $f(t)$

$$f(t) = Q_A^T \bar{x}_\perp(t) \quad (78)$$

Sustituyendo la representación de $G_A^T(t)$ presentada en (77) en la ecuación (76) encontramos que podemos establecer una actualización directa para $Q_A(t)$ como se muestra a continuación

$$Q_A(t) = Q_A(t-1)\Theta_A(t) + \bar{x}_\perp(t)f^T(t) \quad (79)$$

4.5. Conclusiones

Se presentó un estudio detallado de la base del funcionamiento de los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD. Con este desarrollo detallado de los algoritmos, queda concluido el análisis del modelo matemático, dando pie a las simulaciones de la estimación iterativa de fuentes, las cuales se presentan en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5

Simulación y Resultados

5.1. Introducción

En este capítulo se presentarán las simulaciones de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, aplicando la descomposición de valores singulares (SVD) y los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD. Se realizará una comparación del tiempo de cómputo requerido para realizar una actualización del DoA, aplicando cada uno de estos algoritmos. También se realizarán simulaciones bajo diferentes escenarios propuestos, con el objetivo de realizar las comparaciones de sus prestaciones. Uno de los escenarios propuestos es un entorno dinámico, donde se evalúan los algoritmos de estimación del DoA cuando existe movimiento del usuario deseado, explotando las bondades de los algoritmos iterativos de rastreo de subespacio y comparándolos con el método convencional (SVD). Además, se realizarán simulaciones aplicando los algoritmos de rastreo de subespacio, obteniéndose el error cuadrático medio con la variación del factor de ponderación de pesos (β), así, obtendremos los valores óptimos que deben aplicarse para cada uno de los algoritmos de rastreo de subespacio. Con las simulaciones a realizar comprobaremos la disminución del tiempo de cómputo de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT con la imple-

mentación de los algoritmos de rastreo de subespacio, además, se presentarán las ventajas de su desempeño trabajando en ambientes dinámicos.

5.2. Escenarios de Simulación

Para realizar la evaluación de los algoritmos de estimación de fuentes, con la aplicación del método convencional y los métodos de rastreo de subespacio, y realizar la comparación en cuanto a su desempeño, es necesario hacer simulaciones bajo diferentes entornos de prueba. Estas simulaciones arrojarán las estadísticas necesarias que nos ayudarán a realizar un análisis completo de las bondades de dichos algoritmos.

Los escenarios de simulación se escogieron de tal manera que, se aproximen a las condiciones reales de trabajo con la finalidad de reproducir, lo mejor posible, las estadísticas bajo un entorno real.

Escenario de Simulación 1

El escenario de simulación que se presenta a continuación es aplicado a la estimación de fuentes por medio del algoritmo ESPRIT.

- Geometría del agrupamiento de antenas: 2 ALU's.
- Número de elementos de antena: 10 (5 duplas).
- Separación entre elementos de antena: $\frac{\lambda}{2}$.
- Separación entre duplas: $1,5\lambda$.
- Distribución espacial de las fuentes: $[-30^\circ, 50^\circ]$.
- Separación entre EB y TM: $[930m, 425m]$.

Escenario de Simulación 2

El escenario de simulación que se presenta a continuación es aplicado a la estimación de fuentes por medio del algoritmo MUSIC.

- Geometría del agrupamiento de antenas: ALU.
- Número de elementos de antena: 10.
- Separación entre elementos de antena: $\frac{\lambda}{2}$.
- Distribución espacial de las fuentes: $[-30^\circ, 50^\circ]$.
- Separación entre EB y TM: $[930m, 425m]$.

5.3. Error Cuadrático Medio (RMSE)

Una de las métricas utilizadas para evaluar los algoritmos utilizados fue a través del error cuadrático medio (RMSE), la cual la definimos de la siguiente manera [Kikuma, 2005]:

$$RMSE(t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (\hat{\omega}_{lp} - \omega_l)^2 \right\}} \quad (80)$$

donde L es el número de fuentes y $P = 200$ es el número de pruebas utilizadas para cada evaluación.

Con este escenario de simulación y conociendo la forma de evaluación del RMSE, primero se realizará una comparación de la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio (PAST y Bi-SVD) contra la aplicación del método convencional (SVD), para la obtención del subespacio de señal y de ruido. La primer estadística que planteamos es la evaluación de la varianza del error, la cual es una métrica importante para medir el desempeño de los algoritmos iterativos, aplicados a los métodos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT.

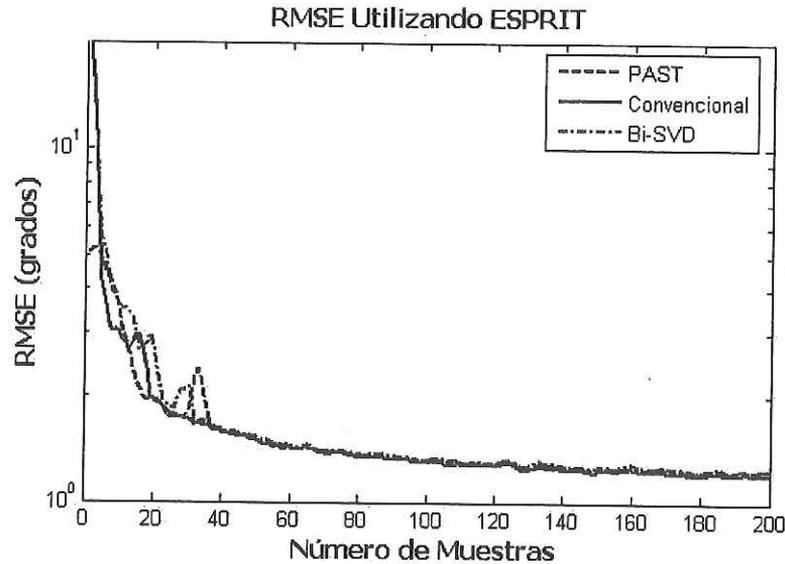


Figura 3: Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con un $SNR = 20dB$.

En la figura 3 observamos que para un número de muestras menor a 40, la variación del error difiere dependiendo de cada método utilizado, sin embargo, mantiene la misma tendencia, esto se debe a que no tenemos información suficiente para que la varianza del error se estabilice. Sin embargo, a partir de esta cantidad de muestras obtenidas la varianza del error es igual utilizando cualquiera de los métodos, esto nos indica que el desempeño en cuanto a resolución de los algoritmos de estimación de fuentes es el mismo utilizando el método convencional y los algoritmos de rastreo de subespacio.

La comparación anterior se realizó bajo un ambiente ideal de bajo ruido con un $SNR = 20dB$. Aumentando el ruido con un $SNR = 10dB$ y haciendo la misma evaluación observamos el desempeño y podemos comparar los diferentes métodos trabajando bajo un ambiente adverso.

En la figura 4 observamos como el error cuadrático medio (RMSE) aumenta aproximadamente 3,5 grados cuando trabajamos en un ambiente adverso, con un SNR de $10dB$, además, observamos que a partir de la muestra 60, el error aplicando el algoritmo Bi-SVD se mantiene

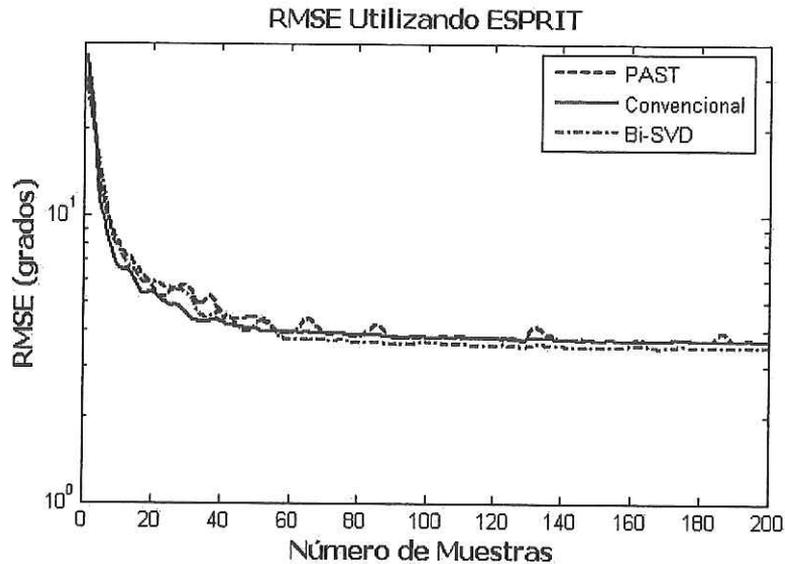


Figura 4: Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con un $SNR = 10dB$.

por debajo del error obtenido aplicando los otros métodos. Aunque el error aumenta en todos los casos, la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio (PAST y Bi-SVD) no afecta de ninguna manera la resolución de ESPRIT, aplicando el método convencional (SVD), además, en ambientes adversos la resolución de ESPRIT mejora con la implementación del algoritmo *Bi - SVD*.

Lo anterior nos muestra que en cuanto a resolución no hay diferencia en la aplicación de los métodos iterativos, sin embargo, un parámetro que se quiere mejorar con la aplicación de estos métodos es el tiempo de cómputo, requerido para realizar una actualización del DoA.

5.4. Tiempo de Cómputo

Como se mencionó anteriormente, el tiempo de cómputo de los algoritmos de estimación de fuentes es un parámetro importante, que limita la implementación de los algoritmos en aplicaciones de tiempo real y actualizaciones sucesivas. Es por esto, que uno de los obje-

tivos de este trabajo de tesis, es la disminución del tiempo de cómputo. A continuación se realiza una comparación de los tiempos de cómputo del algoritmo convencional (SVD) y los algoritmos de rastreo de subespacio (PAST y Bi-SVD).

Para realizar esta comparación se utilizó un tiempo promedio de 1000 repeticiones de los diferentes algoritmos, variando el número de elementos de antena utilizados en el agrupamiento.

Para realizar dicha evaluación se utilizó un equipo de cómputo con las siguientes características:

- CPU: AMD Athlon 1.46 GHz.
- Sistema operativo: Windows XP.
- Lenguaje: Matlab versión 7.0.

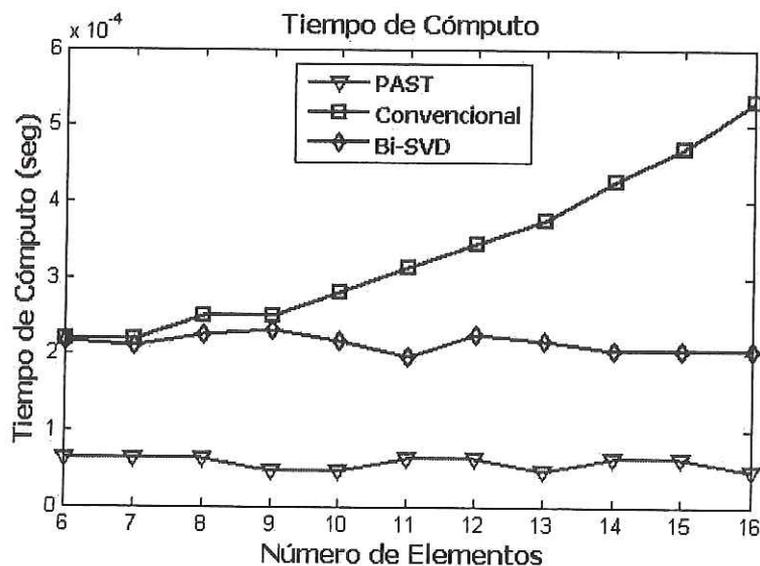


Figura 5: Tiempo de cómputo para la actualización del subespacio de señal, utilizando el algoritmo convencional (SVD) y los algoritmos de rastreo de subespacio (PAST y Bi-SVD), variando el número de elementos de antena utilizados en el agrupamiento.

En la figura 5 se muestra que el tiempo de cómputo, utilizando el método convencional crece de forma lineal conforme al número de elementos de antena utilizados. Además, la figura muestra que el tiempo de cómputo, utilizando los algoritmos de rastreo de subespacio es independiente del número de elementos de antena utilizados.

Además, los algoritmos de rastreo de subespacio son menos complejos que el método convencional.

La tabla I muestra la comparación de los tres algoritmos utilizados, en cuanto a tiempo de cómputo. En esta tabla observamos que para un número de elementos de antena típico de 12, el algoritmo *Bi - SVD* logra una reducción del tiempo de computo con respecto al algoritmo convencional (*SVD*) de hasta un 34,79 % y el algoritmo *PAST* logra una reducción de tiempo de cómputo de hasta un 81,97 %.

5.5. Evaluación de *PAST* y *Bi-SVD* bajo un Entorno Dinámico

Una de las bondades de los algoritmos de rastreo de subespacio *PAST* y *Bi - SVD*, es que son algoritmos iterativos, y al aplicarlos a los métodos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, también éstos realizan sus actualizaciones de manera iterativa. Esta característica importante, añadida por los algoritmos de rastreo de subespacio, permite que conforme se obtiene información a la salida del agrupamiento, por cada muestra obtenida, estos algoritmos de estimación de fuentes realizan una iteración, necesaria para actualizar el DoA. Conforme el número de iteraciones aumenta, el factor de ponderación de pesos minimiza la información vieja y le otorga mayor peso a la información reciente. Esta característica hace muy atractiva la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio en los métodos de estimación de fuentes, ya que si trabajamos a un entorno donde la fuente a estimar

esta en movimiento, las muestras viejas que pudieran ya no ser confiables obtienen menor peso, mientras que la información reciente es la que se toma con mayor ponderación para la estimación. En el método convencional, las muestras viejas obtenidas tienen el mismo valor que las muestras recientes, para tomar información y realizar una actualización, esto puede acumular un error que se intensifica conforme el número de muestras aumenta.

Las siguientes simulaciones se realizan bajo un entorno dinámico, donde se introduce una variación (δ) en grados de la posición de las fuentes entre la captura de dos muestras de la señal en el agrupamiento.

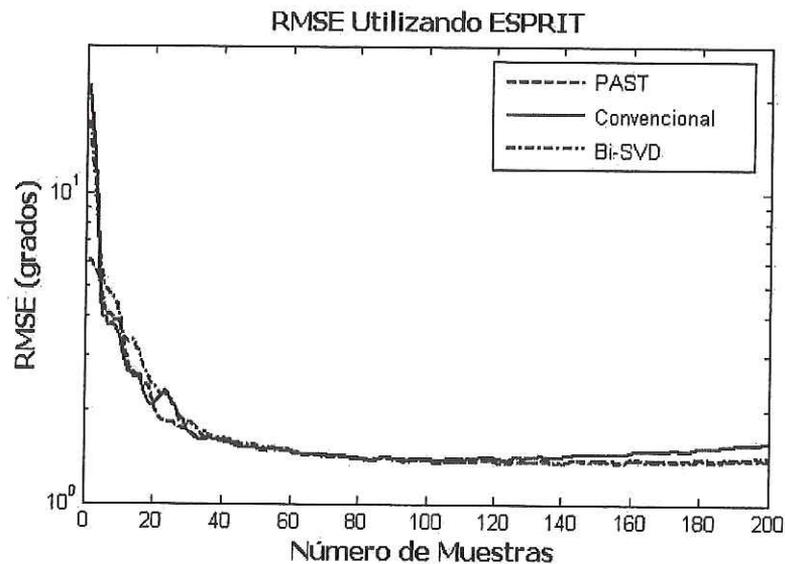


Figura 6: Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con un $SNR = 20dB$ bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,01^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$.

La figura 6 muestra que ESPRIT, con una variación $\delta = 0,01^\circ$ y aplicando el método convencional, acumula un error de hasta $1,57^\circ$ en la muestra número 200, mientras que con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio el error se estabiliza en $1,38^\circ$.

Si aumentamos la variación de las posiciones de las fuentes podemos ver claramente el desempeño favorable que logran estos algoritmos al eliminar dicha variación en la evaluación

del error en la estimación angular de las fuentes.

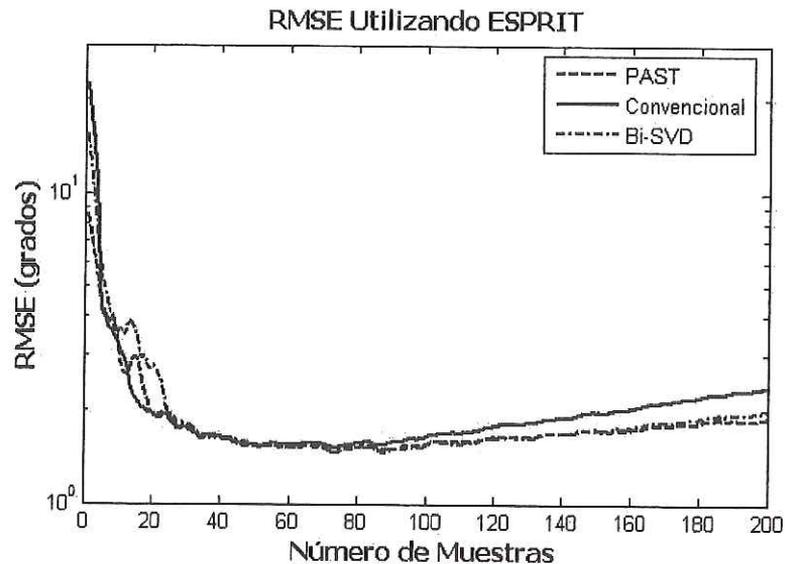


Figura 7: Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT, con un $SNR = 20dB$ bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,02^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$.

La figura 7 muestra que ESPRIT, con una variación $\delta = 0,02^\circ$, y aplicando el método convencional, acumula un error de hasta $2,37^\circ$, mientras que con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio el error solamente llega a $1,88^\circ$.

Al realizar la misma evaluación aplicando el algoritmo de estimación de fuentes MUSIC podemos observar la mejora del desempeño utilizando los algoritmos de rastreo de subespacio.

La figura 8 muestra que MUSIC, con una variación $\delta = 0,01^\circ$, y aplicando el método convencional, acumula un error de hasta $0,9^\circ$, mientras que con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio el error solamente llega a $0,26^\circ$. Además, la diferencia del error obtenido con el método convencional con respecto al métodos de rastreo de subespacio se hace notoria a partir de la muestra número 40.

Si agregamos un $\delta = 0,02^\circ$ como se muestra en la figura 9, aplicando el método convencional, acumula un error de hasta $1,99^\circ$, mientras que con la aplicación de los algoritmos de

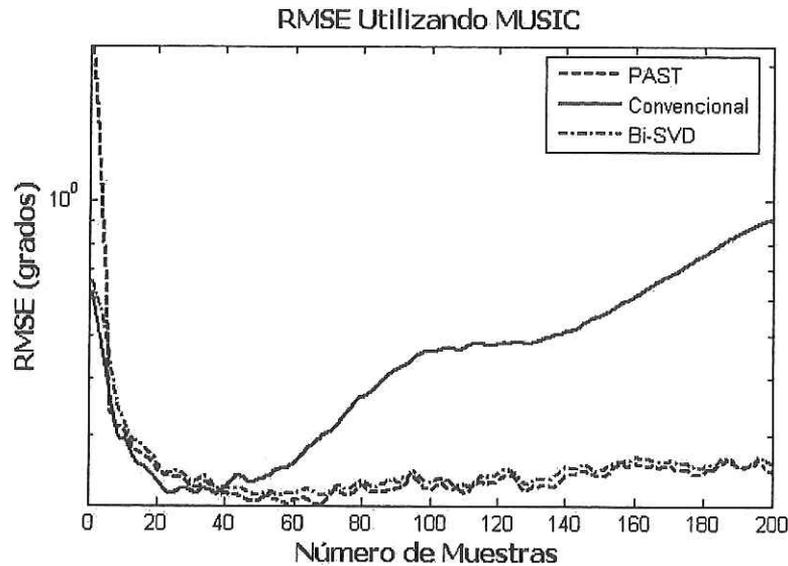


Figura 8: Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,01^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$.

rastreo de subespacio el error solamente llega a $0,32^\circ$. Además, la diferencia del error obtenido con el método convencional con respecto al métodos de rastreo de subespacio se hace notoria a un número de muestras menor, a partir de la muestra número 20.

En la figura 9 vemos como se dispara el error aplicando el método convencional a partir de la muestra número 20, no así aplicando los algoritmos de rastreo de subespacio los cuales mantienen estable el error a partir de la llegada de la suficiente información.

En las tablas II y III se muestran los resultados comparativos del error cuadrático medio (RMSE) de MUSIC y ESPRIT, utilizando el método convencional y los algoritmos de rastreo de subespacio. Se muestra con esta comparación como con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio se logra mejorar hasta un 84 % el error, cuando se trabaja en ambientes dinámicos.

Tabla I: Tabla comparativa del tiempo de cómputo.

<i>Algoritmo utilizado</i>	<i>Elementos de antena</i>	<i>Tiempo de cómputo</i>	<i>Reducción de tiempo</i>
<i>SVD (convencional)</i>	8	250 μseg	0 %
	12	344 μseg	0 %
	16	531.3 μseg	0 %
<i>Bi - SVD</i>	8	224 μseg	10.4 %
	12	224.3 μseg	34.79 %
	16	203.9 μseg	61.62 %
<i>PAST</i>	8	62 μseg	75.2 %
	12	62 μseg	81.97 %
	16	47 μseg	91.15 %

Tabla II: Tabla comparativa del RMSE para ESPRIT con $\delta = 0,02$.

<i>Algoritmo utilizado</i>	<i>Número de muestras</i>	<i>Valor RMSE</i>	<i>Reducción del error</i>
<i>SVD (convencional)</i>	100	1.64°	0 %
	200	2.37°	0 %
<i>PASTyBi - SVD</i>	100	1.53°	6.7 %
	200	1.88°	20.67 %

Tabla III: Tabla comparativa del RMSE para MUSIC con $\delta = 0,02$.

<i>Algoritmo utilizado</i>	<i>Número de muestras</i>	<i>Valor RMSE</i>	<i>Reducción del error</i>
<i>SVD (convencional)</i>	100	0.91°	0 %
	200	1.99°	0 %
<i>PASTyBi - SVD</i>	100	0.30°	67 %
	200	0.32°	84 %

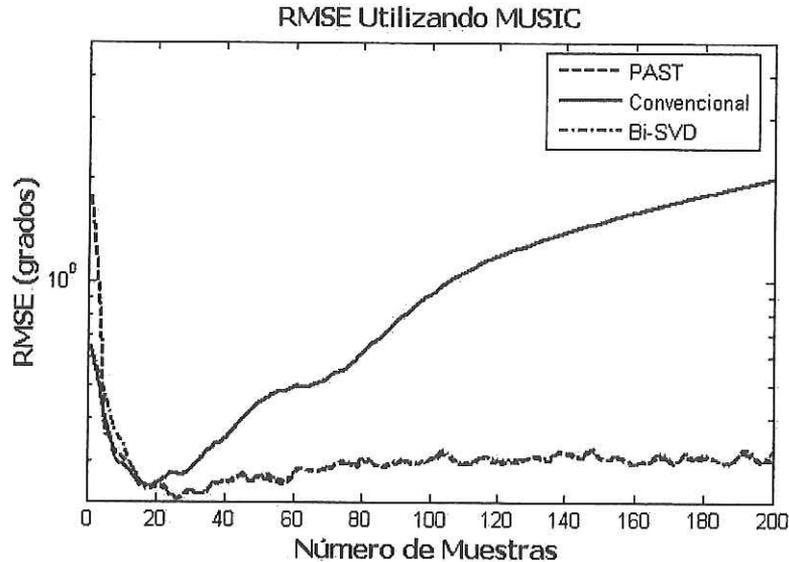


Figura 9: Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,02^\circ$ y un factor $\beta = 0,9$.

5.6. Factor de Ponderación de Pesos

En esta parte de la simulaciones, veremos el papel que juega el factor de ponderación de pesos en el desempeño de los métodos de estimación de fuentes, aplicando los algoritmos de rastreo de subespacio bajo un ambiente dinámico.

En las siguientes figuras se muestra la evaluación del RMSE, variando el número de muestras de 1 a 200 y variando el factor de ponderación de pesos de 0,8 a 1.

La figura 10 muestra como la variación del factor de ponderación de pesos cambia de manera drástica el desempeño del método de estimación de fuentes MUSIC aplicando PAST, de manera similar en los otros métodos, como se verá posteriormente. En todos los casos existe un comportamiento similar, donde para un valor cercano a la unidad, los algoritmos de rastreo de subespacio le otorgan el mismo peso a valores pasados que a valores recientes, permitiendo que se acumule un error conforme aumenta el número de muestras y para el caso contrario, cuando el factor de ponderación de pesos es pequeño, los algoritmos de rastreo

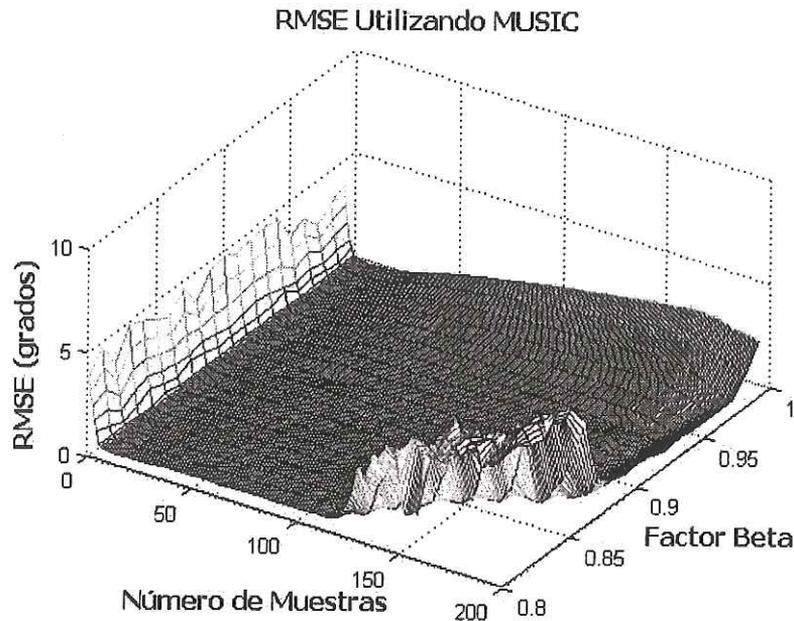


Figura 10: Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con PAST con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$.

de subespacio no tienen suficiente información de valores pasados, afectando la estimación del DoA. A través de las figuras 10, 11, 12 y 13 podemos conocer los valores del factor de ponderación de pesos, adecuado para que el error se mantenga lo más pequeño posible para cada caso.

Para el caso de la aplicación del método MUSIC con PAST, de acuerdo a la figura 10, podemos decir que el rango de valores que podemos utilizar adecuadamente para este factor es entre 0,9 y 0,94.

Un análisis similar, con la aplicación del algoritmo MUSIC con Bi-SVD, arroja que el rango de valores que podemos utilizar adecuadamente para el factor de ponderación de pesos es entre 0,8 y 0,86, lo podemos constatar a través de la figura 11.

Observando la figura 12 y 13, podemos definir que el intervalo apropiado del factor de ponderación de pesos aplicando ESPRIT con PAST es de 0,88 a 0,98, mientras que este

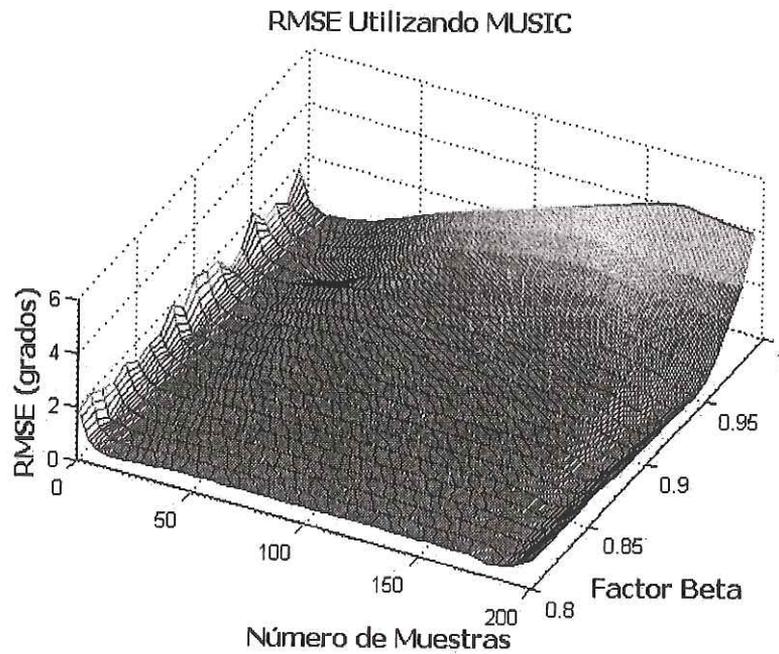


Figura 11: Evaluación del RMSE aplicando MUSIC con Bi-SVD con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$.

mismo factor debe de ser de 0.94 a 0.96 aplicando ESPRIT con Bi-SVD.

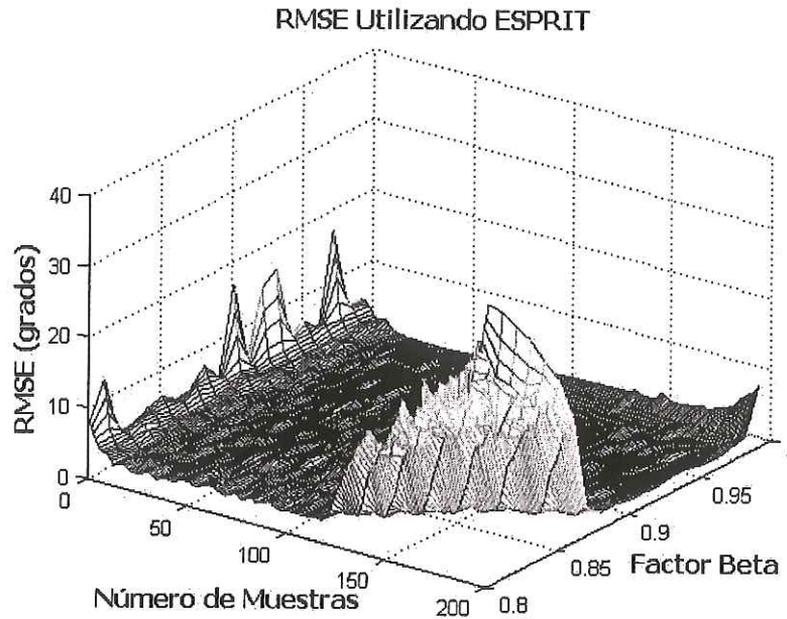


Figura 12: Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con PAST con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$.

5.7. Conclusiones

Se hicieron las simulaciones necesarias para realizar un análisis comparativo entre el algoritmo convencional (SVD) y los algoritmos de rastreo de subespacio (PAST y Bi-SVD). Las simulaciones arrojaron resultados favorables en cuanto a la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio.

Se comprobó que con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio, se logra reducir el tiempo de cómputo hasta en un 91,15% para un agrupamiento de 16 elementos. Además, con MUSIC y bajo entornos dinámicos se logra reducir hasta un 84% el error cuadrático medio aplicando PAST y Bi-SVD con una variación $\delta = 0,02^\circ$.

También se realizó un análisis de las repercusiones en el desempeño de los algoritmos MUSIC y ESPRIT bajo entornos dinámicos variando el factor de ponderación de pesos, lle-

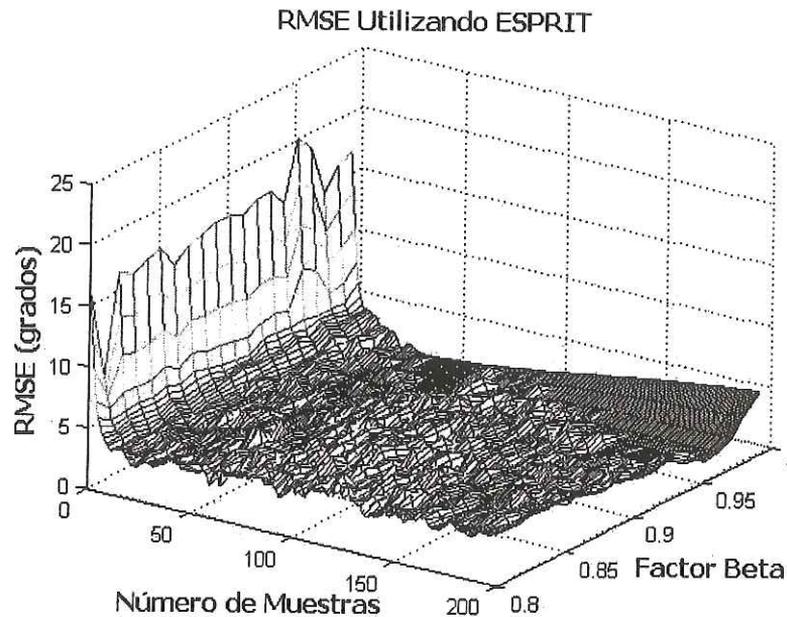


Figura 13: Evaluación del RMSE aplicando ESPRIT con Bi-SVD con un $SNR = 20dB$, bajo un entorno dinámico con $\delta = 0,05^\circ$ y un factor $0,8 < \beta < 1$.

gando con esto a la obtención de los valores óptimos de este factor para disminuir el error. Además, se demostró que el valor del factor de ponderación de pesos puede modificar considerablemente el desempeño de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, siendo estos resultados algunas de las principales contribuciones a este trabajo de tesis.

Los datos obtenidos por el análisis realizado, dan pie a las conclusiones acerca de este trabajo, las cuales se darán a conocer en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 6

Conclusión y Aportaciones

6.1. Introducción

En el capítulo anterior se presentaron las simulaciones y resultados, acompañados de un análisis que nos permiten tomar decisiones y concluir acerca de la implementación de los algoritmos de rastreo de subespacio en los métodos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT. A continuación se presentan las conclusiones finales.

6.2. Desempeño de los Algoritmos de Rastreo de Subespacio

Como parte de la conceptualización del problema a resolver, con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD en los métodos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, se realizó lo siguiente:

- Se realizó un estudio de los métodos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, para conocer las características que los hacen atractivos para trabajar en aplicaciones de

comunicaciones móviles celulares, estudiando sus ventajas y desventajas en aplicaciones de tiempo real y bajo diferentes entornos. Además, se detectaron puntos a mejorar de estos algoritmos donde el tiempo de cómputo fue uno de los parámetros que los limitan.

- Se realizó un estudio de la teoría de los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD, para obtener de forma alternativa el subespacio de señal, a partir de las muestras obtenidas en el agrupamiento de antenas, ésto con la finalidad de disminuir la complejidad algorítmica con respecto al método convencional (SVD) y además, agregarle a los métodos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT las bondades de los algoritmos iterativos.
- La simulaciones para valoración del desempeño de los algoritmos de estimación de fuentes, se realizaron en la plataforma de trabajo MATLAB. Para ello se propusieron escenarios de simulación iguales a los propuestos por Kikuma[2005], con fines de validación de resultados.
- Una métrica utilizada para la evaluación del desempeño de los algoritmos de estimación de fuentes, fue el error cuadrático medio (RMSE), para evaluarlo, se realizaron un promedio de 200 pruebas con dos fuentes a estimar.

6.3. Tiempo de Cómputo

El tiempo de cómputo fue el parámetro primordial a mejorar con este trabajo de tesis, llegando al final con resultados favorables que nos indican lo siguiente:

- Se demostró que aplicando los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD se logra reducir un 92 % el tiempo de cómputo, con respecto al tiempo utilizado con el algoritmo convencional (SVD), ésto, para una actualización del subespacio de señal

utilizando 16 elementos de antena en el agrupamiento.

- El tiempo de cómputo utilizando los algoritmos de rastreo de subespacio, es independiente del número de elementos de antena que se utilicen en el agrupamiento.
- El tiempo de cómputo utilizando el algoritmo convencional (SVD) para actualizar el subespacio de señal, crece de forma lineal conforme se aumenta el número de elementos de antena que utiliza el agrupamiento.

6.4. Entorno Estático

Para realizar una comparación del desempeño de la estimación del subespacio de señal utilizando el método convencional (SVD) y los algoritmos de rastreo de subespacio, se realizó la evaluación en cuanto a resolución de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT, tomando como métrica principal el error cuadrático medio (RMSE), arrojando los siguientes resultados:

- Para una relación señal a ruido (SNR) de $20dB$, la evaluación del error cuadrático medio se muestra igual a partir de la muestra número 30, aplicando cualquier algoritmo para la obtención del subespacio de señal en MUSIC y ESPRIT. Esto nos indica que la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio no modifica las prestaciones en cuanto a resolución, de los métodos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT en un entorno de bajo ruido.
- Para una relación señal a ruido (SNR) de $10dB$, el error cuadrático medio aplicando el algoritmo (Bi-SVD) se muestra por debajo del error cuadrático medio aplicando el algoritmo PAST y el algoritmo convencional (SVD), esto, a partir de la muestra número 30. Esto nos indica que para ambientes ruidosos, el desempeño de MUSIC y

ESPRIT no cambia con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio, sino que además, mejoran su resolución aplicando el algoritmo Bi-SVD.

6.5. Entorno Dinámico

Los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD, con la selección adecuada del factor de ponderación de pesos, nos proporcionan ventajas adicionales al aplicarlos a los algoritmos de estimación de fuentes basados en subespacio, esto es debido, a que logran realizar una estimación de fuentes en cada iteración. Esta es una ventaja importante ya que podemos disminuir el error acumulado cuando trabajamos en ambientes donde existe variación de la posición angular de las fuentes a estimar. Los resultados de la evaluación de estos algoritmos bajo un ambiente dinámico son los siguientes:

- Para un entorno dinámico, los algoritmos iterativos presentan una disminución del error de hasta un 20,67 % para ESPRIT con una delta de 0.02 grados.
- Para un entorno dinámico, los algoritmos iterativos presentan una disminución del error de hasta un 84 % para MUSIC con una delta de 0.02 grados.

6.6. Factor de Ponderación de Pesos

El factor de ponderación de pesos toma un papel muy importante, si variamos el valor de este factor en los algoritmos de rastreo de subespacio, se modifican considerablemente las prestaciones en cuanto a resolución de los algoritmos de estimación de fuentes MUSIC y ESPRIT. En cuanto al factor de ponderación de pesos, se llegó a los siguientes resultados:

- Se realizó la evaluación de error cuadrático medio (RMSE) para MUSIC y ESPRIT, aplicando los algoritmos de rastreo de subespacio PAST y Bi-SVD, variando el factor

de ponderación de pesos desde $\beta = 0,8$ hasta $\beta = 1$ observando la forma de la variación del desempeño en cuanto a resolución.

- Para el caso de la aplicación del método MUSIC con PAST, el rango de valores que podemos utilizar adecuadamente para este factor es $0,9 < \beta < 0,94$.
- Para el caso de la aplicación del método MUSIC con Bi-SVD, el rango de valores que podemos utilizar adecuadamente para este factor es $0,8 < \beta < 0,86$.
- Para el caso de la aplicación del método ESPRIT con PAST, el rango de valores que podemos utilizar adecuadamente para este factor es $0,88 < \beta < 0,98$.
- Para el caso de la aplicación del método ESPRIT con Bi-SVD, el rango de valores que podemos utilizar adecuadamente para este factor es $0,94 < \beta < 0,96$.

Los resultados de este trabajo de tesis, nos llevan a concluir que con la aplicación de los algoritmos de rastreo de subespacio para la obtención del subespacio de señal, disminuye el tiempo de computo y además, se agrega a los algoritmos de estimación de fuentes las bondades de un algoritmo iterativo, que al trabajar en entornos dinámicos logra disminuir el error acumulado.

Además, una de las principales contribuciones de este trabajo, fue la obtención de los valores óptimos del factor de ponderación de pesos, para los cuales el error cuadrático medio es mínimo, trabajando bajo entornos dinámicos, con todo esto, se han cumplido en su totalidad, las metas propuestas al inicio de este trabajo de tesis.

6.7. Trabajo a Futuro

Como seguimiento a este trabajo de tesis, se propone el siguiente tema de investigación:

- Evaluación de los algoritmos de rastreo de subespacio, aplicando un modelo de señal de banda ancha.

BIBLIOGRAFÍA

- Bonilla Hernandez, 2005, *Modelado y Simulación de la Aproximación de Máxima Verosimilitud (ML) Incondicional en la Determinación del DoA en Campo Cercano*. Tesis de Maestría, CICESE, Ensenada, B.C., México.
- Godara L.C., 2004, *Smart Antennas*, CRC Press LLC.
- Godara L.C., 2002, *Handbook of antennas in wireless communications*, CRC Press LLC.
- Godara L.C., 1997, *Applications of antenna arrays to mobile communications, Part II: Beamforming and direction-of-arrival consideration*, Proc. IEEE, 85(8): 1195-1245p.
- Kikuma N., 2005, *Iterative DOA estimation using subspace tracking methods and adaptative beamforming*, IEICE Trans. Commun., E88-B(5): 11p.
- Luo D., 2003, *A Geometric Proof for Subspace Tracking Theorems*, 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA, 6p.

-
- Moreno Jiménez y Franco Martín, 2001, *Introducción a la tecnología de antenas inteligentes. Aplicación a UMTS*, Comunicaciones de Telefónica I+D. 21: 43-53p.
 - Rappaport T., 1999, *Smart antennas for wireless communication IS-95 and third generation CDMA applications.*, Prentice Hall.
 - Roy R. y T. Kailath, 1989, *ESPRIT-estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques*, IEEE. Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. 37(7): 984-995p.
 - Schmidt R.O., 1986, *Multiple emitter location and signal parameter estimation*, IEEE. Trans. Antennas Propag., 34(3): 276-280p.
 - Strobach P., 1997, *Bi-Iteration SVD Subspace Tracking Algorithms*, IEEE Trans. Signal Processing, 45(5): 1222-1240p.
 - Van Tress H.L., 2002, *Optimum array procesing. Part IV of detection, estimation, and Modulation Theory*. John Wiley and Sons, Inc. Primera Edición. New York. 1443 pp.
 - Yang B., 1995, *Projection Approximation Subspace Tracking*, IEEE Trans. Signal Processing, 43(1): 95-107p.
 - Yepes Arbeláez, 2006, *Conformación digital de haz adaptativa vía el método de proyección paralela en agrupamiento de antenas*. Tesis de Maestría, CICESE, Ensenada, B.C., México.