

Tesis defendida por  
Oscar Eduardo Montaña Godínez  
y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Yury Orlov  
Director de Tesis

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos  
Miembro del Comité

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
Miembro del Comité

---

Dr. Serguei Miridonov  
Miembro del Comité

---

Dr. César Cruz Hernández  
Coordinador del programa de posgrado en  
Electrónica y Telecomunicaciones

---

Dr. David H. Covarrubias Rosales  
Director de estudios de posgrado

17 de Agosto de 2012



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**Programa de Posgrado en Ciencias  
en Electrónica y Telecomunicaciones**

---

**Diseño de algoritmos de controladores conmutados  $H_\infty$  aplicados a  
manipuladores con fricción**

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

presenta

Oscar Eduardo Montaña Godínez

Ensenada, Baja California, México, 2012



Resumen de la tesis de Oscar Eduardo Montaña Godínez, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control. Ensenada, Baja California, Agosto de 2012.

Diseño de algoritmos de controladores conmutados  $H_\infty$  aplicados a manipuladores con fricción

Resumen aprobado por:

---

Dr. Yury Orlov  
Director de Tesis

En este trabajo de tesis se presenta una propuesta de extensión del algoritmo de control  $H_\infty$  para una clase de sistemas no lineales discontinuos, considerando solamente retroalimentación de salida. Utilizando la teoría existente para sistemas no suaves, en específico para la solución del problema de seguimiento de trayectoria en robots manipuladores modelados con fricción dinámica de Dahl, se propone un controlador estático de naturaleza conmutada dirigido al modelo de fricción estático de Coulomb, aprovechando que el modelo de Coulomb es un caso límite del modelo de Dahl cuando el parámetro de rigidez tiende a infinito. En primer lugar, se presenta un estudio de la aplicación experimental del controlador  $H_\infty$  en su versión suave a un sistema subactuado, un helicóptero subactuado de 3GDL (tres grados de libertad) marca Quanser, en el cual no se considera el efecto de la fricción. Posteriormente, se desarrolla la propuesta del algoritmo de controlador discontinuo a partir de la teoría existente, y se aplica a un robot manipulador totalmente actuado de 3GDL, modelado con fricción de Coulomb. Se presenta a su vez una comparación de desempeño entre las tres versiones del controlador  $H_\infty$  presentadas: la versión suave, la no suave y la discontinua. La propuesta se respalda con simulaciones numéricas y resultados experimentales.

Palabras clave: **manipulador, fricción,  $H_\infty$  discontinuo, seguimiento de trayectoria.**

Abstract of the thesis presented by Oscar Eduardo Montaña Godinez, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Sciences in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control. Ensenada, Baja California, August 2012.

Switched  $H_\infty$ -Control Algorithms' Design with Application to Manipulators with Friction

Abstract approved by:

---

Dr. Yury Orlov  
Thesis Director

This work presents an extension of the  $H_\infty$  controller algorithm for a class of nonlinear discontinuous systems, considering output feedback only. Using the existing theory for non-smooth systems, in specific the solution of the trajectory tracking problem for robot manipulators affected by the frictional model of Dahl, a new switched-static controller is proposed, designed for manipulators affected by the frictional model of Coulomb, taking advantage of the convergence of the Dahl model to the Coulomb model when the stiffness parameter goes to infinity. At first, an experimental study of the application of the smooth  $H_\infty$ -controller is presented, for an underactuated, 3DOF (three degrees-of-freedom) Helicopter from the company Quanser, without considering the effects of friction. After that, the discontinuous  $H_\infty$ -controller proposal is developed from the existing theory, and it is applied to a fully actuated robot manipulator, affected by the frictional model of Coulomb. A performance comparison is presented among the three versions of the  $H_\infty$ -controller: the smooth, the nonsmooth and the discontinuous versions. The proposal is supported with numerical simulations and experimental results.

**Keywords: manipulators, friction, discontinuous  $H_\infty$ -control, tracking control synthesis.**

***A mis padres***

***A mis hermanos***

## **Agradecimientos**

Al CONACyT por su apoyo económico a lo largo de estos dos años, al CICESE por recibirme como alumno, y al CITEDI por abrirme las puertas para la realización de mis experimentos.

Al Dr. Yury Orlov por su confianza y atinada dirección en este trabajo de tesis.

Al Dr. Joaquin Alvarez, Dr. Alejandro Márquez y Dr. Serguei Miridonov, por su apoyo y sus valiosos comentarios.

Al Dr. Luis Aguilar y la Dra. Marlen Meza, por los útiles consejos, pláticas, y guía durante el desarrollo de este trabajo.

A Alberto y Antonio, por su amistad y por los buenos momentos que compartimos durante esta maestría. A mi amiga Lilia, una gran persona, por su confianza, apoyo, ánimo y ayuda, en lo académico y lo personal, siempre presentes durante mi estancia en Ensenada.

A mis padres, Francisco y Rosario, y a mis hermanos, César y Alex, porque sin ellos nada de esto sería posible; por ser mi ejemplo; por su confianza en mi decisión de estudiar esta maestría; y sobre todo, por su apoyo y amor incondicional.

A mi gran amiga Miriam, por brindarme siempre su amistad, compartirme sus consejos, apoyarme en mis decisiones, consolarme en los momentos difíciles, ayudarme a ser un mejor individuo, y porque su mente brillante y personalidad luchadora, fueron una inspiración para la realización de esta tesis. Gracias.



## Contenido

Lista de Figuras .....	10
Lista de Tablas .....	13
Notación.....	14
Introducción .....	15
1.1. Definición del problema .....	17
1.2. Objetivo de la tesis .....	17
1.3. Organización del trabajo de tesis .....	18
Teoría de control $H^\infty$ .....	19
2.1. Antecedentes.....	19
2.2. Notación y Suposiciones .....	24
2.3. Solución global en el espacio de estados.....	26
2.4. Estabilidad .....	28
2.5. Solución local en el espacio de estados del problema de control $H^\infty$ .....	32
2.5.1. Caso no autónomo .....	34
2.5.2. Caso autónomo .....	37
2.6. Modelos de fricción.....	39
2.6.1. Modelo de Coulomb .....	40
2.6.2. Modelo de Coulomb + modelo de fricción viscosa .....	40
2.6.3. Modelos de fricción de Stribeck.....	41
2.6.4. Modelo de fricción de Dahl.....	43
2.6.5 Modelo de fricción de LuGre .....	44
Control robusto del helicóptero de 3GDL.....	47
3.1. Introducción .....	47
3.1.1. Descripción de la plataforma experimental.....	48
3.1.2. Modelo .....	49
3.2. Regulación de subsistemas completamente actuados.....	52
3.2.1. Elevación.....	55
3.2.2. Dirección .....	56
3.2.3. Simulaciones .....	56
3.2.4. Resultados experimentales .....	59

3.3. Seguimiento de los subsistemas completamente actuados .....	61
3.3.1. Elevación .....	63
3.3.2. Dirección .....	64
3.3.3. Simulaciones.....	65
3.3.4. Resultados experimentales.....	67
3.4. Regulación robusta del grado subactuado .....	69
3.4.1. Simulación .....	72
3.4.2. Resultados experimentales.....	74
3.5. El problema del aterrizaje.....	75
3.5.1. Simulaciones.....	77
3.5.2. Resultados experimentales.....	78
3.6. Comentarios .....	79
Control $H_\infty$ no suave de robots manipuladores con fricción .....	81
4.1. Modelado de manipuladores con fricción .....	81
4.2. Problema de seguimiento en manipuladores con fricción .....	82
4.2.1. Síntesis del controlador.....	84
4.3. Problema de regulación en manipuladores con fricción .....	87
4.3.1. Síntesis del controlador.....	88
4.4. Comentarios .....	90
Control $H_\infty$ discontinuo de robots manipuladores con fricción.....	91
5.1. Modelado de manipuladores con fricción seca .....	91
5.1.1. Aproximación del modelo de Dahl al modelo de Coulomb.....	92
5.2. Problema de seguimiento en manipuladores con fricción de Coulomb.....	94
5.2.1. Síntesis del controlador.....	96
Control $H_\infty$ discontinuo de un robot manipulador de 3 grados de libertad .....	99
6.1. Introducción.....	99
6.2. Implementación del controlador .....	99
6.3. Modelo dinámico del manipulador.....	102
6.4. Simulaciones numéricas .....	104
6.5. Comparación de desempeño .....	108
6.6. Resultados experimentales .....	112
6.7. Comentarios .....	119

Conclusiones ..... 121  
    Trabajo a futuro ..... 122  
Referencias bibliográficas..... 124

## Lista de Figuras

Figura 1. Sistema en lazo cerrado controlado con $H^\infty$ .....	20
Figura 2. Diagrama de bode y norma $H^\infty$ $\Phi^\infty$ para el caso escalar.....	21
Figura 3. Representación gráfica de la solución local del problema de control $H^\infty$ .....	33
Figura 4. Modelo de fricción de Coulomb + fricción viscosa.....	41
Figura 5. Fricción de Stribeck (bajas velocidades) .....	42
Figura 6. Helicóptero de tres grados de libertad marca Quanser. ....	47
Figura 7. Plataforma experimental para el Helicóptero de 3GDL marca Quanser.....	49
Figura 8. Respuesta transitoria de un sistema de segundo orden.....	51
Figura 9. Comparación de la aproximación del subsistema de la elevación contra mediciones.....	52
Figura 10. Grados de libertad completamente actuados del helicóptero.....	53
Figura 11. Simulación de la regulación de elevación, $\theta_{1d} = 0.1rad$ . ....	58
Figura 12. Simulación de la regulación de dirección, $\phi_{1d} = 0.4rad$ .....	59
Figura 13. Datos experimentales de la regulación del subsistema de elevación con $\theta_{1d} = 0.1rad$ . ....	60
Figura 14. Datos experimentales de la regulación del subsistema de dirección con $\phi_{1d} = 0.4rad$ . ....	61
Figura 15. Simulación de seguimiento de trayectoria de la elevación. $\theta_{1d} =$ $0.2\sin 0.5t$ .....	66
Figura 16. Simulaciones de seguimiento de trayectoria para dirección. $\phi_{1d} = 0.4\sin 0.5t$ , $\theta_{1d} = 0.15rad$ . ....	67
Figura 17. Datos experimentales del seguimiento del subsistema de elevación...	68
Figura 18. Datos experimentales del seguimiento del subsistema de dirección....	69

Figura 19. Regulación robusta del helicóptero al punto $\lim t \rightarrow \infty \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 = 0.2, 0, 0, 0, -0.4, 0$ .	73
Figura 20. Regulación del helicóptero en la posición $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 = 0.15, 0, 0, 0, 0, 0$ , ante la existencia de una perturbación transitoria.	73
Figura 21. Datos experimentales de la regulación robusta del helicóptero al punto $\lim t \rightarrow \infty \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 = 0.2, 0, 0, 0, -0.4, 0$ .	74
Figura 22. Datos experimentales de la regulación robusta del helicóptero en el punto $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 = 0.15, 0, 0, 0, 0, 0$ , aplicando una perturbación en $t=20$ seg.	75
Figura 23. Gráfica de la trayectoria planeada contra $\psi_1$ .	77
Figura 24. Simulación del aterrizaje del helicóptero usando planeación de trayectoria.	78
Figura 25. Resultados experimentales del aterrizaje del helicóptero usando planeación de trayectoria.	79
Figura 26. Aproximación del modelo de fricción de Dahl al modelo de Coulomb cuando $\sigma_1$ tiende a infinito.	93
Figura 27. Robot manipulador <i>Pegasus</i> de la compañía Amatrol.	100
Figura 28. Transmisión mediante cadenas y engranajes del manipulador <i>Pegasus</i> .	100
Figura 29. Implementación del controlador al manipulador <i>Pegasus</i> .	101
Figura 30. Resultados de simulación del controlador $H_\infty$ discontinuo para seguimiento del manipulador no perturbado.	105
Figura 31. Resultados de la simulación para el controlador $H_\infty$ conmutado para seguimiento de trayectoria con perturbaciones externas y variaciones en los parámetros de fricción.	106
Figura 32. Resultados de las simulaciones para el controlador de seguimiento $H_\infty$ discontinuo para el sistema con variaciones en los parámetros de la planta.	107
Figura 33. Errores de posición bajo la aplicación los tres diferentes métodos de control $H_\infty$ a un manipulador de 3GDL no perturbado.	110

Figura 34. Errores de posición bajo la aplicación los tres diferentes métodos de control $H_\infty$ a un manipulador de 3GDL perturbado de manera constante. ....	111
Figura 35. Resultados experimentales para el controlador $H_\infty$ discontinuo para el seguimiento de trayectorias sinusoidales. ....	113
Figura 36. Resultados experimentales para el controlador $H_\infty$ discontinuo para el seguimiento de trayectorias sinusoidales, con una masa de 0.5Kg en el efector final. ....	114
Figura 37. Resultados experimentales para el controlador $H_\infty$ discontinuo para el seguimiento de trayectorias exponenciales. ....	115
Figura 38. Resultados experimentales para el controlador $H_\infty$ discontinuo para el seguimiento de trayectorias exponenciales, con una masa de 0.5Kg en el efector final. ....	117
Figura 39. Diagrama a bloques del controlador discontinuo $H_\infty$ mediante un mando de juegos y una estimación sucia de la velocidad. ....	118
Figura 40. Resultados experimentales del control $H_\infty$ discontinuo para seguimiento de trayectoria en tiempo real .....	119

## Lista de Tablas

Tabla 1. Valores utilizados para la simulación del regulador $H^\infty$ .....	57
Tabla 2. Constantes usadas para el controlador de dirección. ....	72
Tabla 3. Parámetros del manipulador mecánico.....	103
Tabla 4. Parámetros del controlador discontinuo.....	104
Tabla 5. Comparación de desempeño entre los controladores $H^\infty$ en sus versiones suave, no suave y discontinua. ....	111

## Notación

$x^T$	Transpuesta del vector $x$
$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n)$	Vector fila con componentes $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ .
$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$	Vector columna con componentes $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ .
$i = \{1, 2, \dots, n\}$	Secuencia de $n$ elementos
$\ x\ $	Norma del vector $x$
$A^T$	Transpuesta de la matriz $A$
$A^{-1}$	Inversa de una matriz cuadrada $A$
$M > 0, M \geq 0$	La matriz simétrica o hermítica $M$ es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente
$\dot{x}, \dot{x}(t), \frac{d}{dt}x$	Derivada temporal del vector variante en tiempo $x$
$s$	Variable de la transformada de Laplace
$F(s)$	Transformada de Laplace de la función $f(t)$
$t$	Tiempo
$e$	Base del logaritmo natural



# Capítulo 1

## Introducción

El uso de robots manipuladores en la industria para automatizar y simplificar tareas se ha ido extendiendo con el paso del tiempo. El diseño de controladores retroalimentados es fundamental para el buen funcionamiento de estos sistemas, y el modelo matemático que describe al sistema es crítico para este diseño. Existen muchas propuestas de controladores, el control por retroalimentación de estados, *backstepping*, modos deslizantes, control adaptable, etc., como se pueden encontrar descritas en los libros de Khalil (1996) y Slotine (1991).

Sin embargo, fenómenos físicos como la fricción, los cuales aún no son completamente entendidos, son difíciles de modelar, y por tanto los sistemas mecánicos son usualmente descritos por modelos con un importante grado de incertidumbre (Aguilar y Orlov, 2004). Este tipo de no linealidades se conocen como no suaves o duras, debido a que se representan de forma matemática como funciones no diferenciables. Para lidiar con estas incertidumbres y no linealidades, se recurre a las técnicas de control robusto.

El control robusto de sistemas mecánicos ha atraído un considerable interés de investigación. El problema de control robusto, según Dorato (1992) puede verse como “dada una planta nominal y perturbaciones acotadas, encontrar un controlador fijo el cual permita que el sistema en lazo cerrado tenga un desempeño satisfactorio para todas las plantas admisibles y señales de perturbación”.

Una propuesta de diseño de controlador robusto, es la optimización  $H_\infty$ , la cual ha sido un área de investigación muy importante desde la década de 1980. Iniciada

por el trabajo pionero de Zames (1981), puede verse como un problema de diseño del “peor de los casos”, y fue originalmente formulada en el dominio de la frecuencia, aplicable a las tres clases básicas de problemas de diseño, seguimiento, rechazo de perturbaciones, y acoplamiento de modelo (model matching). El objetivo es obtener un controlador que minimice la norma máxima (es decir, la norma  $H_\infty$ ) de un operador entrada-salida, donde el máximo se toma sobre incógnitas, tales como perturbaciones. Posteriormente se mostró que en la caracterización en el dominio del tiempo de estos controladores, la ecuación de Riccati (del tipo que aparece en los juegos diferenciales lineales cuadráticos de suma cero) juega un papel muy importante (Doyle et al., 1989). De entre los diferentes acercamientos en el dominio del tiempo a este problema de diseño de este controlador, el que utiliza las herramientas de teoría de juegos dinámicos parece ser el más simple y el más intuitivo, debido a que el problema original de control óptimo  $H_\infty$  es un problema de optimización “minimax” (término adoptado de la teoría de decisión estadística), y por tanto, un juego de suma cero (Basar y Bernhard, 1991).

Por su parte, Van der Schaft (1992) e Isidori y Astolfi (1992) presentan la solución al problema de control  $H_\infty$  para el caso global y local de sistemas suaves no lineales invariantes en el tiempo, con retroalimentación de estados (Van der Schaft, 1992) y salida (Isidori y Astolfi, 1992). La solución del problema consiste en resolver dos ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs (caso global) o ecuaciones de Riccati (caso local).

En trabajos más recientes, como el de Aguilar, Orlov y Acho (2003) o el de Aguilar y Orlov (2004), el enfoque no lineal de retroalimentación de salida  $H_\infty$  fue extendido a una clase de sistemas no suaves para poder trabajar con modelos de fricción dinámica no suaves como el modelo de Dahl y el modelo de LuGre, modelos que han descrito de manera más exacta los efectos observables de fricción (como la fricción estática, el efecto Stribeck, etc.).

### 1.1. Definición del problema

En los sistemas mecánicos, las perturbaciones y las dinámicas no modeladas pueden deteriorar el funcionamiento del sistema de control aplicado. Los fenómenos físicos como la fricción, el *backlash*, o la zona muerta limitan el desempeño esperado de los sistemas; en ocasiones, estos efectos se desprecian, provocando un pobre rendimiento, y la incertidumbre en los parámetros exactos del modelo genera errores o promueve el uso de altas ganancias que pueden saturar los actuadores. Por otro lado, en muchos sistemas mecánicos no se tiene acceso completo al vector de estados. Para robots manipuladores, por ejemplo, es común el acceso a las posiciones de los eslabones, y no a las velocidades. La medición de velocidad puede requerir sensores adicionales, lo cual incrementa el costo, o en su defecto, el diseño de observadores de estado.

Debido a lo anterior, en este trabajo se propone el diseño de algoritmos de control robusto, en específico controladores  $H_\infty$  conmutados que garanticen estabilidad asintótica de sistemas mecánicos con fricción seca, utilizando solamente mediciones de posición. Para esto, se piensa extender la clase de controladores admisibles para incluir una parte conmutada en el controlador  $H_\infty$  y así poder compensar la parte conmutada propia del modelo de fricción seca.

### 1.2. Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es reducir el costo computacional de la aplicación de controladores  $H_\infty$  a sistemas no lineales, específicamente a robots manipuladores, mediante el desarrollo de algoritmos de control  $H_\infty$  no lineal de naturaleza conmutada, contando solamente con mediciones de posición. Se desarrollarán simulaciones numéricas, y se realizarán experimentos en un robot manipulador de tres grados de libertad y en un helicóptero de tres grados de libertad.

### 1.3. Organización del trabajo de tesis

En este capítulo se han expuesto las motivaciones y objetivos del presente trabajo de tesis; asimismo, se han mencionado algunos antecedentes históricos que respaldan el desarrollo presentado.

En el capítulo 2, los antecedentes presentados se desarrollan aun más, y se presentan las bases teóricas existentes en la literatura para la síntesis de controladores  $H_\infty$  de naturaleza suave y no suave, con su prueba de estabilidad.

En el capítulo 3, las bases teóricas se aplican a un sistema subactuado, un helicóptero de tres grados de libertad marca Quanser®, para resolver los problemas de regulación, seguimiento de trayectoria y aterrizaje, mismos que se definirán oportunamente. Se presentarán simulaciones numéricas y experimentos.

En el capítulo 4 se presentan las bases teóricas para el control  $H_\infty$  no suave aplicado a robots manipuladores, desarrollado anteriormente en la literatura, planteando las soluciones para regulación y seguimiento de trayectoria.

En el capítulo 5, los resultados de control  $H_\infty$  no suave se extienden a sistemas discontinuos, al tomar un caso límite del controlador no suave. Tomando esta consideración, se plantea el controlador  $H_\infty$  discontinuo aplicado a robots manipuladores de  $n$  grados de libertad ( $n$ -GDL).

En el capítulo 6, la propuesta anterior es aplicada a un robot manipulador de 3GDL totalmente actuado, con el objetivo de demostrar la utilidad y robustez del controlador  $H_\infty$  discontinuo. Se presentan tanto simulaciones numéricas como datos experimentales.

Finalmente, las conclusiones de este trabajo se presentan en el capítulo 7.

## Capítulo 2

### Teoría de control $H_\infty$

El objetivo de este capítulo es presentar brevemente la teoría de control  $H_\infty$  existente para los casos suave y no suave. Para esto, se presentan algunas referencias literarias y antecedentes históricos. Se describe el objetivo del controlador robusto  $H_\infty$ , se presentan las condiciones para la existencia de una solución global en el espacio de estados, las condiciones para la existencia de una solución local para los casos de sistemas autónomos y no autónomos, y la prueba de estabilidad.

Finalmente, se presentan los modelos de fricción estáticos y dinámicos que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

#### 2.1. Antecedentes

Después de la introducción del problema de control  $H_\infty$  por Zames, los desarrollos iniciales en la teoría de control  $H_\infty$  estaban basados en el dominio de la frecuencia. Mientras que la mayor parte de estos resultados eran para sistemas LIT (lineales e invariantes en tiempo), también se obtuvieron resultados de  $H_\infty$  o control óptimo uniforme utilizando estos métodos.

Para explicar de mejor manera la formulación original del control  $H_\infty$  en el dominio de la frecuencia, se definirá primero la norma  $H_\infty$ . La norma  $H_\infty$  de un sistema es el factor de amplificación más alto posible de la respuesta en estado estable ante una excitación sinusoidal (Ogata, 2010). Tómese como ejemplo el sistema mostrado en la figura 1, donde  $w$  representa las perturbaciones e incertidumbres del sistema,  $u$  representa la entrada de control,  $z$  representa la salida del sistema

mientras que  $y$  representa las mediciones del sistema. Para el caso escalar, si se denomina a  $\Phi(s)$  como la función de transferencia de  $w$  a  $z$ , como se muestra en la figura 2, la norma  $H_\infty$  ( $\|\Phi\|_\infty$ ) representa el valor máximo de  $|\Phi(j\omega)|$  (su representación en diagrama de Bode, donde  $s = j\omega$ ). Este concepto puede extenderse fácilmente al caso multivariable.

En base a lo anterior, si  $\|\Phi\|_\infty$  es más pequeña, se logra que el efecto de la entrada  $w$  (perturbaciones) en la salida  $z$  del sistema sea más pequeño. Esto puede representarse matemáticamente por la desigualdad  $\|\Phi\|_\infty < \gamma$ , limitando la magnitud de  $\Phi(s)$  por  $\gamma$ , por lo que eligiendo un valor menor de éste parámetro, se reduce el efecto de las perturbaciones a la salida del sistema.

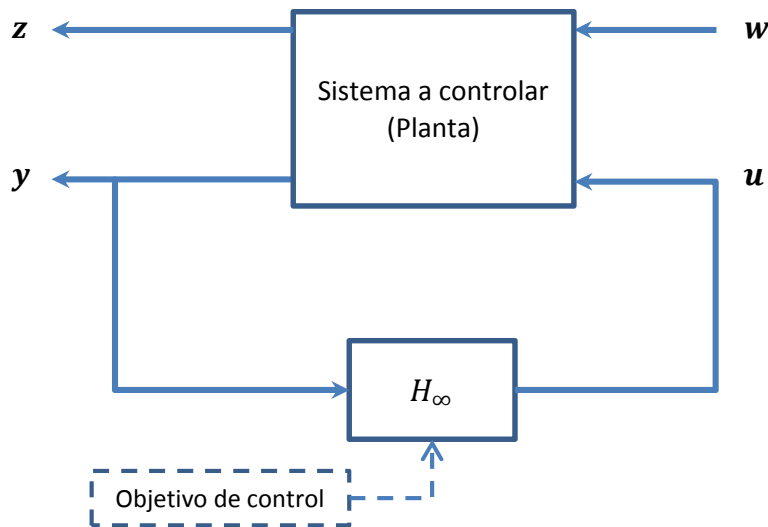


Figura 1. Sistema en lazo cerrado controlado con  $H_\infty$ .

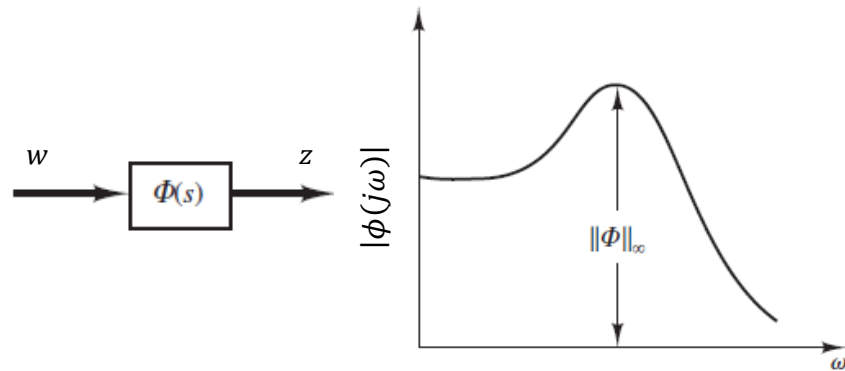


Figura 2. Diagrama de Bode y norma  $H_\infty$  de un sistema, para el caso escalar (Ogata, 2010).

La introducción de los métodos de espacio de estados<sup>1</sup> representó un gran avance en la teoría de control  $H_\infty$ . El acercamiento utilizando espacio de estados ha probado ser muy útil al proveer soluciones simples e intuitivas al problema de control  $H_\infty$ .

En la formulación de espacio de estados, el problema de reducir la norma  $H_\infty$  (o equivalentemente, la norma  $L_2$  inducida, la cual se definirá un poco más adelante) del sistema en lazo cerrado se ve como un juego diferencial (o dinámico) de suma cero de dos personas, donde el controlador ( $u$ ) es el jugador “minimizante” (jugador 1), y las perturbaciones el jugador maximizante (jugador 2) (Basar y Bernhard, 1991).

El objetivo de diseño es atenuar de manera óptima el efecto de la perturbación sobre la salida, que en términos matemáticos, es el problema de optimización presentado en la ecuación (1):

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}} \ll T_\mu \gg =: \gamma^*, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Método de espacio de estados se refiere al uso sistemático de ideas de espacio de estados; por ejemplo, retroalimentación de estados, estimación de estados, principio de separación, etc.

donde  $T_\mu$  es un operador acotado, lineal y causal que mapea desde el espacio Hilbert de las perturbaciones ( $\mathcal{H}_w$ ) hacia el espacio de la salida del sistema ( $\mathcal{H}_z$ ), es decir  $T_\mu: \mathcal{H}_w \rightarrow \mathcal{H}_z$ ,  $\mu \in \mathcal{M}$  es el controlador ( $\mathcal{M}$  es el espacio del controlador, el cual se supone compatible con la información que el controlador tiene disponible), “inf” representa el ínfimo, o la más grande cota inferior del conjunto, y  $\|\cdot\|$  representa la norma, definida por:

$$\|T_\mu\| := \sup_{\|w\|_w \leq 1} \|T_\mu(w)\|_z \equiv \sup_{w \in \mathcal{H}_w} \|T_\mu(w)\|_z / \|w\|_w, \quad (2)$$

en donde  $\|\cdot\|_{(\cdot)}$  denota a la norma apropiada en el espacio Hilbert, con el subíndice indicando el espacio correspondiente y “sup” es la abreviación para el supremo, o la cota superior más pequeña de un conjunto.

Para sistemas lineales, la existencia del controlador óptimo se relaciona con la solución de un par de ecuaciones de Riccati (como se verá posteriormente). Para sistemas no lineales, la ecuación de Riccati se reemplaza por una ecuación particular del tipo de Hamilton-Jacobi, conocida como la ecuación de Isaacs. Este enfoque del problema de atenuación de perturbaciones conlleva los problemas básicos de la existencia de soluciones suaves a la ecuación de Isaacs (Isidori y Astolfi 1992).

Van der Shaft (1992) presenta un análisis con base en la norma inducida  $L_2$  (pues la norma  $H_\infty$  en el dominio del tiempo se relaciona con la norma inducida  $L_2$ ). Para definir la norma inducida  $L_2$ , supóngase que se tiene un sistema estable de una entrada y una salida, con  $z(t)$  como entrada y  $w(t)$  como salida, y se define la relación:

$$\gamma_0 = \sup_{\substack{w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty) \\ w(t) \neq 0}} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}, \quad (3)$$



donde  $\|f(t)\|_2 = \left[ \int_0^\infty f^*(t)f(t)dt \right]^{\frac{1}{2}}$  es la definición de la norma  $L_2$ , y el supremo en (3) se toma sobre el conjunto de números reales positivos generados por la razón de ambas normas  $L_2$ , mientras  $w(t)$  se varía sobre  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  (el espacio de señales donde su norma  $L_2$  es finita, definidas en  $t > 0$ ). Entonces, a  $\gamma_0$  se le llamará la ganancia  $L_2$  del sistema. Dado que se usa una norma de señales para definir una norma de sistemas, se dice que la norma de señal induce la norma de sistema. De ahí que la ganancia  $L_2$  del sistema es inducida por la norma  $L_2$  de señal (Fairman, 1998). Por el teorema de Parseval, la ganancia  $L_2$  del sistema puede escribirse en el dominio de la frecuencia como:

$$\gamma_0 = \sup_{\substack{Z(s) \in \mathcal{H}_2 \\ W(s) \neq 0}} \frac{\|Z(s)\|_2}{\|W(s)\|_2}, \quad (4)$$

donde  $\|F(j\omega)\|_2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F^*(j\omega)F(j\omega)d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$ , con  $s = j\omega$ , es la definición de la norma  $H_2$ , y el supremo en (4) se toma sobre el conjunto de números reales positivos generados por la razón ambas normas  $H_2$ , mientras  $U(s)$  se varía sobre  $\mathcal{H}_2$ , es decir, el espacio Hardy de señales de variable compleja las cuales son analíticas en cada punto en el semiplano derecho y tienen una norma  $L_2$  finita.

Comparando (3) con (4), se puede ver que la ganancia  $L_2$  del sistema en el dominio del tiempo es equivalente a la norma inducida en el dominio de la frecuencia por la norma  $H_2$  (Fairman, 1998). Además, puede verse que (4) es la definición de la norma  $H_\infty$ ; por ello, la norma  $H_\infty$  en el dominio de la frecuencia, es la ganancia  $L_2$  del sistema en el dominio del tiempo.

Esta norma es aplicable a sistemas no lineales, y de hecho es comúnmente llamada la ganancia  $L_2$  del sistema no lineal. Además, Van der Shaft (1992) muestra que si el problema de control  $H_\infty$  para el sistema linealizado tiene

solución, entonces, se obtiene una solución local del problema de control  $H_\infty$  para el sistema no lineal.

## 2.2. Notación y suposiciones

En la formulación original de Isidori y Astolfi (1992), se consideran solamente funciones suaves ( $C^\infty$ ). Sin embargo, en Aguilar et al. (2003), se propone la adición de un término que contenga las funciones continuas no diferenciables (no suaves) en el estado y cóncavas. Considérese un sistema no lineal no autónomo de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(x(t), t) + f_2(x(t), t) + g_1(x(t), t)w(t) + g_2(x(t), t)u(t) \\ z(t) &= h_1(x(t), t) + k_{12}(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= h_2(x(t), t) + k_{21}(x(t), t)w(t),\end{aligned}\tag{5}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $t \in \mathbb{R}$  es la variable de tiempo,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^r$  es la perturbación desconocida,  $z \in \mathbb{R}^l$  es la salida desconocida a ser controlada,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la única medición disponible del sistema. Para el sistema, se deben satisfacer las siguientes suposiciones:

A1) Las funciones  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$ ,  $k_{12}(x, t)$ ,  $k_{21}(x, t)$  son continuas a tramos en  $t$  para toda  $x$  y localmente Lipzchitz<sup>2</sup> en  $x$  para casi toda  $t$ .

A2)  $f_1(0, t) = 0$ ,  $f_2(0, t) = 0$ ,  $h_1(0, t) = 0$  y  $h_2(0, t) = 0$  para casi toda  $t$ .

---

<sup>2</sup> Una función  $f$  es localmente Lipzchitz en  $x \in \mathbb{R}^n$  si cada punto  $x$  tiene una vecindad  $\epsilon > 0$  tal que exista una constante  $K$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  que cumpla con la desigualdad  $|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$ ,  $\forall y, x$  en una bola  $B(x; \epsilon)$

$$\text{A3) } \quad h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) = 0, \quad k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) = I, \quad k_{21}(x, t)g_1^T(x, t) = 0, \\ k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) = I.$$

Estas suposiciones fueron hechas por razones técnicas: (A1) garantiza que el sistema esté bien definido, mientras sean aplicadas entradas externas en  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  o persistentes (como constantes o funciones periódicas, cuya norma  $L_2$  sobre intervalos infinitos no puede ser definida, es decir, señales en  $\mathcal{L}_2[0, T)$ , que originen salidas en  $\mathcal{L}_2[0, T)$ , para  $T > 0$  arbitrario) (Isidori y Astolfi, 1992). Además, (A1) admite no linealidades no suaves, las cuales son absorbidas por el término  $f_2(x, t)$ , mientras que los otros términos son suficientemente suaves. (A2) asegura que el origen sea un punto de equilibrio para el sistema dinámico no controlado ( $u = 0$ ) y no perturbado ( $w = 0$ ); finalmente (A3) simplifica el desarrollo del problema de control, y proviene del problema de control  $H_\infty$  estándar.

La acción de control para el sistema será provista por un controlador, el cual procesará la variable medida  $y$ , generará la entrada de control adecuada  $u$ , y está modelado por ecuaciones de la forma (Isidori y Astolfi, 1992):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, y, t) \\ u &= \theta(\xi, t), \end{aligned} \tag{6}$$

donde  $\xi$  está definida en una vecindad  $\Xi$  del origen en  $\mathbb{R}^v$ ,  $\eta: \Xi \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^v$ ,  $\theta: \Xi \rightarrow \mathbb{R}^m$ , y  $\eta(0, 0, t) = 0$ ,  $\theta(0, t) = 0$ .

El propósito del controlador es doble: alcanzar estabilidad en lazo cerrado y atenuar la influencia de entradas externas  $w$  en la salida o variable de penalidad  $z$ . Un controlador que estabilice asintóticamente el equilibrio  $(x, \xi) = (0, 0)$  del sistema en lazo cerrado, se dice que es un controlador admisible.

En cuanto a atenuación de las señales externas, dado un número real  $\gamma > 0$ , se dice que las señales exógenas son localmente atenuadas por  $\gamma$  si existe una vecindad  $U$  del punto  $(x, \xi) = (0,0)$  tal que, para cada  $t_1 > 0$  y para cada función continua en piezas  $w: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^r$  para el cual la trayectoria del sistema en lazo cerrado, empezando desde el estado inicial  $(x(0), \xi(0)) = (0,0)$  permanezca en  $U$  para toda  $t \in [t_0, t_1]$ , la ganancia  $L_2$  del sistema sea menor que  $\gamma$ , es decir:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt. \quad (7)$$

El problema de control  $H_\infty$  es encontrar un controlador admisible, tal que la ganancia  $L_2$  del sistema en lazo cerrado sea menor que  $\gamma$  (es decir, provea de atenuación a entradas externas).

### 2.3. Solución global en el espacio de estados

A continuación se listan las hipótesis bajo las cuales existe una solución global del problema de control  $H_\infty$ :

(H1) Existe una función definida positiva  $F(x)$ , y una función suave, acotada en  $t$ , y definida positiva  $V(x, t)$  tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f_1(x, t) + f_2(x, t)] + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) - \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) \\ + h_1^T(x, t) h_1(x, t) + F(x) \leq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

se mantenga para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  (es decir, se cumple para todos los valores de  $t$ , excepto para un conjunto de medida cero) con

$$\alpha_1(x, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \quad (9)$$

$$\alpha_2(x, t) = \frac{1}{2} g_2^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T. \quad (10)$$

(H2) Existe una función continua en piezas  $G(t)$  y una función semidefinida positiva  $Q(x, \xi)$  sujeta a que  $Q(0, \xi)$  es definida positiva, y una función suave, acotada en  $t$ , semidefinida positiva  $W(x, \xi, t)$  sujeta a que  $W(0, \xi, t)$  está acotada en  $t$  y definida positiva, tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_e(x, \xi, t) + h_e^T(x, \xi, t) h_e(x, \xi, t) \\ + \gamma^2 \phi^T(x, \xi, t) \phi(x, \xi, t) + Q(x, \xi) \leq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

se mantiene para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  con:

$$f_e^T(x, \xi, t) = ((f_e^1)^T, (f_e^2)^T) \quad (12)$$

$$f_e^1 = f_1(x, t) + f_2(x, t) + g_1(x, t)\alpha_1(x, t) + g_2(x, t)\alpha_2(\xi, t) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_e^2 = f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + g_1(\xi, t)\alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t)\alpha_2(\xi, t) \\ + G(t)(h_2(x, t) - h_2(\xi, t)) \end{aligned} \quad (14)$$

$$h_e(x, \xi, t) = \alpha_2(\xi, t) - \alpha_2(x, t) \quad (15)$$

$$\phi(x, \xi, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_e^T(x, t) \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^T \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^T \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$g_e(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ G(t)k_{21}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Bajo las hipótesis (H1) y (H2), una solución del problema de control  $H_\infty$  se plantea en el siguiente teorema (Aguilar et al, 2003):

**Teorema 2.1.** *Suponga que se cumplen las hipótesis (H1) y (H2). Entonces la retroalimentación de salida:*

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + g_1(\xi, t)\alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t)\alpha_2(\xi, t) \\ &\quad + G(t)[y(t) - h_2(\xi, t)] \\ u &= \alpha_2(\xi, t),\end{aligned}\tag{18}$$

*estabiliza globalmente el sistema libre de perturbaciones y hace que la ganancia  $L_2$  del sistema en lazo cerrado sea menor que  $\gamma$ .*

El teorema 2.1 asegura la existencia de un controlador de retroalimentación de mediciones estabilizante, sin la necesidad de comprobar las condiciones de estabilizabilidad-detectabilidad (Isidori y Astolfi, 1992), y por tanto eliminando el trabajo adicional generado de verificar estas condiciones.

## 2.4. Estabilidad

Para comprobar la estabilidad del controlador (18), se procede a comprobar el teorema 2.1. La prueba de estabilidad presentada es prácticamente igual a la presentada en el trabajo de Orlov, Acho y Solis (1999):

Para empezar, se presenta la función:

$$\begin{aligned}H(x, w, u, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] \\ &\quad + h_1^T(x, t)h_1(x, t) + u^T u - \gamma^2 w^T w,\end{aligned}\tag{19}$$

donde  $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$  es continua a tramos en  $t$  para toda  $x$  y localmente Lipzchitz en  $x$  para casi toda  $t$ , la cual es cuadrática en  $(w, u)$ . De sustituir las relaciones (9) y (10) en (19), resulta:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial w}\right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x, t) - 2\gamma^2 \alpha_1^T = 0 \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\partial V}{\partial x} g_2(x, t) + 2\alpha_2^T = 0. \quad (21)$$

Expandiendo la función cuadrática  $H(x, w, u, t)$  en series de Taylor se obtiene:

$$H(x, w, u, t) = H(x, \alpha_1(x, t), \alpha_2(x, t), t) - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 + \|u - \alpha_2(x, t)\|^2, \quad (22)$$

donde, de acuerdo a la hipótesis (H1),  $H(x, \alpha_1(x, t), \alpha_2(x, t), t) \leq -F(x)$ . Por lo tanto,

$$H(x, w, u, t) \leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 - F(x) \quad (23)$$

y utilizando (19) y (23), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] \\ \leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 - \|h_1(x, t)\|^2 \\ - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Ahora se presenta la función

$$\begin{aligned}
H_e(x, \xi, r, t) &= \frac{\partial W}{\partial t} + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_e(x, \xi, t) + g_e(x, t)r] \\
&\quad + h_e^T(x, \xi, t)h_e(x, \xi, t) - \gamma^2 r^T r
\end{aligned} \tag{25}$$

la cual es cuadrática en  $r$ . Entonces se obtiene:

$$\left( \frac{\partial H_e}{\partial r} \right)_{r=\phi(x, \xi, t)} = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) g_e(x, t) - 2\gamma^2 \phi^T(x, \xi, t) = 0,$$

donde la hipótesis (H2) asegura que  $H_e(x, \xi, \phi(x, \xi, t), t) \leq -Q(x, \xi)$ . Ahora, expandiendo la función cuadrática  $H_e(x, \xi, r, t)$  en series de Taylor se tiene:

$$\begin{aligned}
H_e(x, \xi, r, t) &= H_e(x, \xi, \phi(x, \xi, t), t) - \gamma^2 \|r - \phi(x, \xi, t)\|^2 \\
&\leq -\gamma^2 \|r - \phi(x, \xi, t)\|^2 - Q(x, \xi).
\end{aligned} \tag{26}$$

Combinando (26) con (25), se establece que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_e(x, \xi, t) + g_e(x, t)(w - \alpha_1(x, t))] \\
\leq -\gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t) - \phi(x, \xi, t)\|^2 \\
- \|\alpha_2(\xi, t) - \alpha_2(x, t)\|^2 + \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t)\|^2 \\
- Q(x, \xi).
\end{aligned} \tag{27}$$

Ahora, se propone la función candidata de Lyapunov:

$$U(x, \xi, t) = V(x, t) + W(x, \xi, t), \tag{28}$$

la cual, debido a las hipótesis (H1) y (H2), es definida positiva por construcción. Ahora se demuestra que la derivada temporal de esta función sobre las



trayectorias del sistema en lazo cerrado (5), (18), con  $w = 0$ . Entonces, sumando con (27), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u] + \frac{\partial W}{\partial t} \\
&\quad + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_e(x, \xi, t) + g_e(x, t)(w - \alpha_1(x, t))] \\
&\leq \|u - \alpha_2(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t)\|^2 - \|h_1(x, t)\|^2 \\
&\quad - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t) + \phi(x, \xi, t)\|^2 - \|\alpha_2(\xi, t) - \alpha_2(x, t)\|^2 \\
&\quad + \gamma^2 \|\alpha_1(x, t)\|^2 - \|u\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) \\
&\leq -\|h_1(x, t)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x, t) + \phi(x, \xi, t)\|^2 \\
&\quad - \|\alpha_2(\xi, t)\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) \leq -F(x) - Q(x, \xi).
\end{aligned} \tag{29}$$

Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado libre de perturbaciones (5), (18) es internamente asintóticamente estable.

Finalmente, para cumplir con la condición (7), se deriva (28) sobre las trayectorias del sistema perturbado (5), (18), con  $w \neq 0$ , y sumando con (27), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &\leq -\|z(t)\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) \\
&\quad - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x, t) - \phi(x, \xi, t)\|^2.
\end{aligned} \tag{30}$$

Integrando (30) de  $t_0$  a  $t_1$ , se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} (\gamma^2 \|w\|^2 - \|z(t)\|^2) dt \\
& \geq \int_{t_0}^{t_1} \left( F(x(t)) + Q(x(t), \xi(t)) \right) dt + U(x(t_1), \xi(t_1), t_1) \\
& \quad - U(x(t_0), \xi(t_0), t_0) \\
& \quad + \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t) - \alpha_1(x(t), t) - \phi(x(t), \xi(t), t)\|^2 dt > 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Lo cual demuestra que la ganancia  $L_2$  del sistema (5) es menor que  $\gamma$ , para cualquier trayectoria de (5), (18), que empiece en  $(x(t_0), \xi(t_0)) = (0,0)$ . Por lo tanto, el controlador (16) es una solución del problema de control  $H_\infty$ .

## 2.5. Solución local en el espacio de estados del problema de control $H_\infty$

Dada la complejidad de obtener una solución global en el espacio de estados, en esta sección se analizará una solución local del problema de control  $H_\infty$ . Se dice que el controlador (6), el cual estabiliza asintóticamente el equilibrio  $(x, \xi) = (0,0)$  del sistema en lazo cerrado (5), (18), es una solución local del problema de control  $H_\infty$  si existe una vecindad  $U$  del equilibrio tal que la desigualdad (7) se satisfaga para todo  $t_1 > t_0$  y todas las funciones  $w(t)$  para las cuales la trayectoria del sistema en lazo cerrado, iniciando en el punto  $(x(t_0), \xi(t_0)) = (0,0)$  permanece en  $U$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$  (Orlov et al., 1999). Esta idea se representa en la figura 3.

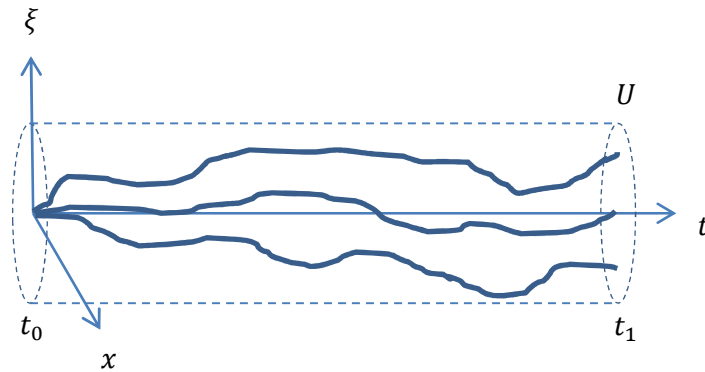


Figura 3. Representación gráfica de la solución local del problema de control  $H_\infty$

Además de las suposiciones originales A1 a A3, el análisis local adicionalmente supone lo siguiente (Aguilar et al., 2003):

A4) Para casi toda  $t \in \mathbb{R}$ , las funciones  $f_1(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$ ,  $k_{12}(x, t)$ ,  $k_{21}(x, t)$  son dos veces continuamente diferenciables en  $x$  localmente alrededor del origen  $x = 0$ , donde sus primeras y segundas derivadas son continuas en piezas y uniformemente acotadas en  $t$  para toda  $x$  en la misma vecindad del origen.

A5) El vector  $\zeta = 0$  es un supergradiente cercano uniforme en tiempo de los componentes  $f_{2i}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de la función  $f_2(x, t)$  en  $x = 0$ . El vector  $\zeta(\hat{x}, t) \in \mathbb{R}^n$  es un supergradiente próximo de la función escalar  $f(x, t)$  en  $(\hat{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  si existe algún  $\sigma(\hat{x}, t) > 0$  tal que:

$$f(x, t) \leq f(\hat{x}, t) + \zeta^T(\hat{x}, t)(x - \hat{x}) + \sigma(\hat{x}, t)\|x - \hat{x}\|^2 \quad (32)$$

para todo  $x$  en una vecindad  $U(\hat{x}, t)$  de  $\hat{x}$ . El supergradiente próximo  $\zeta(\hat{x}, t)$ , se dice que es uniforme en tiempo si (32) se mantiene para alguna  $\sigma(\hat{x}) > 0$  invariante en tiempo y toda  $x$  en alguna vecindad invariante en tiempo  $U(\hat{x})$  de  $\hat{x}$ .

El conjunto  $\partial^P f(\hat{x}, t)$  de supergradientes próximos de  $f$  en  $(\hat{x}, t)$  es llamado superdiferencial próximo de  $f$  en  $(\hat{x}, t)$ . Así, los componentes  $f_{2i}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de la función  $f_2(x, t)$  son tales que:

$$0 \in \partial^P f_{2i}(0, t) \text{ uniformemente en } t \in \mathbb{R}$$

O equivalentemente,

$$f_{2i}(x, t) \leq \sigma \|x\|^2$$

para algún  $\sigma > 0$ , casi toda  $t \in \mathbb{R}$  y toda  $x \in U(0)$ . Claramente, lo anterior implica que la función  $f_2(x)$  es cóncava en el origen.

Las suposiciones (A1)-(A5), juntas, permiten linealizar las desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs correspondientes, las cuales a su vez permiten obtener una solución local del problema de control  $H_\infty$ .

### 2.5.1. Caso no autónomo

El análisis que se presenta a continuación parte de la linealización del sistema (5) alrededor de  $x = 0$ , la cual toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \\ z &= C_1(t)x + D_{12}(t)u \\ y &= C_2(t)x + D_{21}(t)w, \end{aligned} \tag{33}$$

donde  $A(t) = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x=0}$ ,  $B_1(t) = g_1(0, t)$ ,  $B_2(t) = g_2(0, t)$ ,  $C_1(t) = \left. \frac{\partial h_1}{\partial x} \right|_{x=0}$ ,  $D_{12}(t) = k_{12}(0, t)$ ,  $C_2(t) = \left. \frac{\partial h_2}{\partial x} \right|_{x=0}$  y  $D_{21}(t) = k_{21}(0, t)$ .

Este problema está resuelto si el sistema (33) es estabilizable y detectable de  $u$  a  $y$ , respectivamente. Un sistema se dice que es estabilizable (respectivamente, detectable) si existe una función acotada  $K(t)$  (respectivamente,  $L(t)$ ) tal que el sistema  $\dot{x}(t) = (A - B_2K)(t)x(t)$  (respectivamente,  $\dot{x}(t) = (A - LC_2)(t)x(t)$ ) es exponencialmente estable. Bajo estas suposiciones, las condiciones presentadas a continuación son necesarias y suficientes para que exista una solución del problema (Ravi, Nagpal y Khargonekar, 1991):

C1) Existe una solución simétrica, definida positiva y acotada de la ecuación:

$$\begin{aligned} -\dot{P} = & P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) \\ & + P(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] (t) P(t) \end{aligned} \quad (34)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A_1 - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P](t) x(t) \quad (35)$$

sea exponencialmente estable.

C2) Existe una solución simétrica semidefinida positiva y acotada de la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{Z} = & A(t)Z(t) + Z(t)A^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ & + Z(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2^T C_2 \right] (t) Z(t) \end{aligned} \quad (36)$$

donde  $A(t) = A_1(t) + \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) B_1(t)B_1^T(t)P(t)$ , tal que el sistema:

$$\dot{x} = [A - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)](t) x(t) \quad (37)$$

sea exponencialmente estable.

De acuerdo al Lema 2.1, el cual se presenta a continuación, las condiciones (C1) y (C2) aseguran la existencia de una constante positiva  $\varepsilon_0$  tal que el sistema de ecuaciones de Riccati perturbadas:

$$\begin{aligned} -\dot{P}_\varepsilon &= P_\varepsilon(t)A_1(t) + A_1^T(t)P_\varepsilon(t) + C_1^T(t)C_1(t) \\ &+ P_\varepsilon(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P_\varepsilon(t) + \varepsilon I \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\varepsilon &= A_\varepsilon(t)Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)A_\varepsilon^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ &+ Z_\varepsilon(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2 \right] (t)Z_\varepsilon(t) + \varepsilon I \end{aligned} \quad (39)$$

tiene una única solución simétrica semidefinida positiva y acotada  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  por cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  donde  $A_\varepsilon(t) = A_1(t) + \frac{1}{\gamma^2} B_1(t)B_1^T(t)P_\varepsilon(t)$ .

**Lema 2.1.** Supóngase que las condiciones (C1) y (C2) se satisfacen. Entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que el sistema de ecuaciones (38), (39) tiene una solución única, acotada y definida positiva  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  (Orlov et al. 1999).

Usando el lema anterior, el siguiente teorema propone una solución local al problema de control  $H_\infty$ :

**Teorema 2.2.** Supóngase que las condiciones (C1) y (C2) son satisfechas y que  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  es la solución definida positiva y acotada de (38) y (39), para algún  $\varepsilon > 0$ . Entonces las hipótesis (H1) y (H2) (presentadas en la sección 2.3) se cumplen localmente alrededor del equilibrio  $(x, \xi) = (0, 0)$  con:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= x^T P_\varepsilon(t)x \\ W(x, \xi, t) &= \gamma^2 (x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-1}(t)(x - \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2 \\
G(t) &= Z_\varepsilon(t) C_2^T(t) \\
Q(x, \xi) &= \frac{\varepsilon}{2} \gamma^2 \min_{t \in \mathbb{R}} \|Z_\varepsilon^{-1}(t)\|^2 \|x - \xi\|^2,
\end{aligned}$$

y la retroalimentación de salida:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t) g_1^T(\xi, t) \right] P_\varepsilon(t) \xi \\
&\quad - [g_2(\xi, t) g_2^T(\xi, t)] P_\varepsilon(t) \xi + Z_\varepsilon(t) C_2^T [y(t) - h_2(\xi, t)]
\end{aligned} \tag{40}$$

$$u = -g_2^T(\xi, t) P_\varepsilon(t) \xi, \tag{41}$$

es una solución local del problema de control  $H_\infty$ . La prueba puede encontrarse en (Orlov et al, 1999).

### 2.5.2. Caso autónomo

En el caso autónomo, todas las funciones en (5) (y por lo tanto en (33)) son independientes del tiempo, por lo que el interés de esta sección se centra en el diseño de un controlador invariante en tiempo (por ejemplo, para el diseño de un regulador). Para este caso, se tiene un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\
z &= C_1 x + D_{12} u \\
y &= C_2 x + D_{21} w,
\end{aligned} \tag{42}$$

donde  $A = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x=0}$ ,  $B_1 = g_1(0)$ ,  $B_2 = g_2(0)$ ,  $C_1 = \left. \frac{\partial h_1}{\partial x} \right|_{x=0}$ ,  $D_{12} = k_{12}(0)$ ,  $C_2 = \left. \frac{\partial h_2}{\partial x} \right|_{x=0}$  y  $D_{21} = k_{21}(0)$ , el cual es una linealización un sistema (5) invariante en tiempo, alrededor de  $x = 0$ .

En este caso, las ecuaciones diferenciales de Riccati se degeneran en ecuaciones algebraicas de Riccati (haciendo  $\dot{P} = 0$  y  $\dot{Z} = 0$ ), por lo que las condiciones (C1) y (C2) se simplifican a lo siguiente:

C1') Existe una solución simétrica, definida positiva de la ecuación:

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + P \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P = 0 \quad (43)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A_1 - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P] x \quad (44)$$

es exponencialmente estable.

C2') Existe una solución simétrica semidefinida positiva de la ecuación:

$$AZ + Z A^T + B_1 B_1^T + Z \left[ \frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2^T C_2 \right] Z = 0 \quad (45)$$

donde  $A(t) = A_1 + \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) B_1 B_1^T P$ , tal que el sistema:

$$\dot{x} = [A - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)] x \quad (46)$$

es exponencialmente estable.

Las condiciones C1' y C2' son las mismas que se exponen en (Doyle et al., 1989), las cuales son necesarias y suficientes para que exista una solución al problema de control  $H_\infty$  en el caso lineal e invariante en tiempo. Debido al lema real de



acotamiento estricto (Anderson y Vreugdenhil, 1973), las condiciones (C1') y (C2') aseguran que existe una constante positiva  $\varepsilon_0$  tal que el sistema de ecuaciones de Riccati perturbadas:

$$P_\varepsilon A_1 + A_1^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P_\varepsilon + \varepsilon I = 0 \quad (47)$$

$$A_\varepsilon Z_\varepsilon + Z_\varepsilon A_\varepsilon^T + B_1 B_1^T + Z_\varepsilon \left[ \frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2 \right] Z_\varepsilon + \varepsilon I = 0 \quad (48)$$

tiene una solución única definida positiva  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  donde  $A_\varepsilon = A_1 + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T P_\varepsilon$ . Basado en lo anterior, una solución invariante al tiempo del problema de control  $H_\infty$  se formula según el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.** Supóngase que las condiciones (C1') y (C2') son satisfechas para un sistema (5) que se supone invariante en tiempo, y que  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  es una solución definida positiva y acotada de (47) y (48), para algún  $\varepsilon > 0$ . Entonces la retroalimentación invariante en tiempo de salida:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & f_1(\xi) + f_2(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi \\ & + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)] \end{aligned} \quad (49)$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi, \quad (50)$$

es una solución local del problema de control  $H_\infty$  para el caso autónomo.

## 2.6. Modelos de fricción

La fricción es el resultado de interacciones complejas entre la superficie y las regiones cercanas a la superficie de dos cuerpos móviles que entran en contacto.

Debido a la interacción de las superficies móviles, surge una fuerza de fricción no lineal y altamente discontinua. Esta definición, y los siguientes modelos, fueron tomados como son descritos en el libro de Lantos (2011). Además, se supone que la fricción actúa en sentido contrario a la fuerza generada por el actuador.

Se han desarrollado muchos modelos para explicar el fenómeno de fricción. Estos modelos están basados en resultados experimentales más que en deducciones analíticas. Los modelos estáticos de fricción generalmente describen la fricción en función de la velocidad.

### **2.6.1. Modelo de Coulomb**

Este modelo clásico de fricción fue desarrollado por Coulomb, quien descubrió que la fuerza de fricción depende del signo de la velocidad. De ahí que la fuerza de fricción pueda ser escrita en la siguiente forma:

$$F_f(v) = F_c \text{sign}(v) \quad (51)$$

donde  $F_c$  denota el coeficiente de fricción de Coulomb que depende de la carga (es proporcional a la fuerza normal generada por la carga) y  $v$  representa la velocidad tangencial relativa entre las dos superficies de contacto. Este modelo puede ser usado en el caso de contactos secos.

### **2.6.2. Modelo de Coulomb + modelo de fricción viscosa**

El término viscoso es el componente de la fricción que es proporcional a la velocidad. Este término tiene una influencia dominante cuando el contacto de los cuerpos en movimiento es lubricado con aceite o grasa (lubricación hidrodinámica):

$$F_f(v) = F_C \operatorname{sgn}(v) + F_v v \quad (52)$$

donde  $F_v$  representa el coeficiente de fricción viscosa.

Como se muestra en la figura 4, la fricción viscosa se representa como una función lineal de la velocidad, que se suma al nivel de fricción de Coulomb ( $F_C$ ) que multiplica al signo de la velocidad, tal y como lo indica (52):

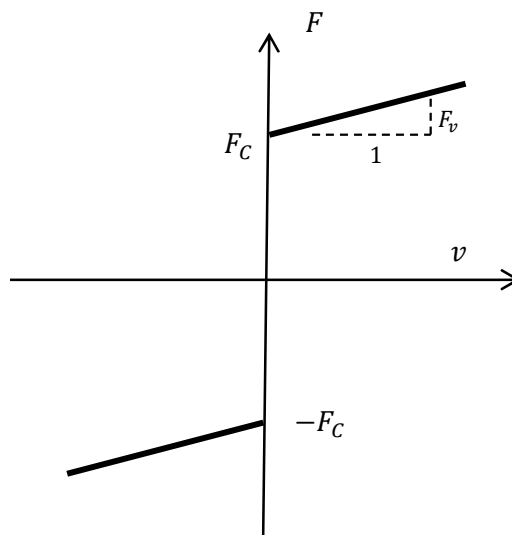


Figura 4. Modelo de fricción de Coulomb + fricción viscosa

### 2.6.3. Modelos de fricción de Stribeck

Experimentos tribológicos han mostrado que en el caso de contactos lubricados el modelo simple de Coulomb + fricción viscosa no puede explicar fenómenos en el régimen de baja velocidad, como el fenómeno de Stribeck. Este fenómeno de fricción surge del uso de fluidos lubricantes y hace que la fricción disminuya cuando la velocidad se incrementa.

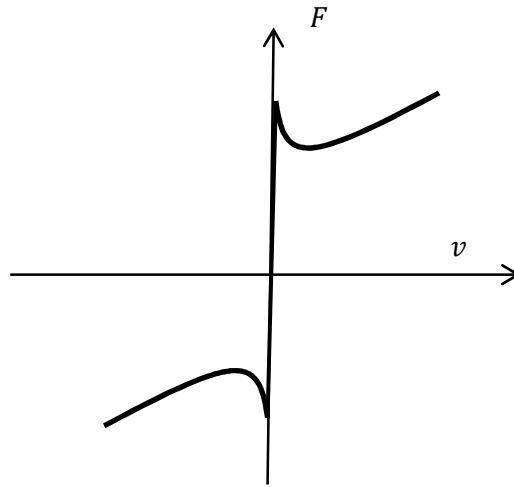


Figura 5. Fricción de Stribeck (bajas velocidades)

Como se puede apreciar en la figura 5, cerca de velocidades cero, la fuerza de fricción decrece en función de la velocidad y a mayor velocidad el término viscoso será dominante y la fuerza de fricción crece con la velocidad. Aun más, también depende del signo de la velocidad y tiene un cambio abrupto cuando la velocidad pasa por cero.

Se han elaborado varios modelos para estudiar este fenómeno. A continuación se listan algunos:

$$\text{Modelo de Tustin: } F_f(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\frac{|v|}{v_s}} \right) \text{sgn}(v) + F_v v \quad (53)$$

$$\text{Modelo Gaussiano: } F_f(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \right) \text{sgn}(v) + F_v v \quad (54)$$

$$\text{Modelo Lorentzian: } F_f(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \right) \text{sgn}(v) + F_v v, \quad (55)$$

donde  $F_s$  es el coeficiente de fricción estática, y representa la fuerza necesaria para iniciar el movimiento desde el reposo, y  $v_s$  es la velocidad de Stribeck.

#### 2.6.4. Modelo de fricción de Dahl

Para experimentos hechos con pequeños desplazamientos (del orden de los micrómetros), se mostró que aun en este dominio hay un desliz de la máquina, llamado desplazamiento pre-deslizante y en que la fricción se comporta como un resorte.

Para explicar el comportamiento pre-deslizante, Dahl (1976) propuso el siguiente modelo dinámico que captura la variación de la fuerza de fricción en función del desplazamiento:

$$\frac{dF_f}{dx} = \sigma_0 \left( 1 - \frac{F_f}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha, \quad (56)$$

donde  $F_c$  es el término de fricción de Coulomb,  $\sigma_0$  es la rigidez de contacto y  $\alpha$  es el parámetro del modelo que debe escogerse empíricamente para que los datos experimentales ajusten. Derivando (56) con respecto al tiempo, y tomando  $\alpha = 1$ , se obtiene:

$$\frac{dF_f}{dt} = \frac{dF_f}{dx} \frac{dx}{dt} = \sigma_0 \left( 1 - \frac{F_f}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right) v. \quad (57)$$

Introduciendo la variable de estado  $z$  tal que  $F_f = \sigma_0 z$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v - \frac{\sigma_0 |v|}{F_c} z \\ F_f &= \sigma_0 z. \end{aligned} \quad (58)$$

En estado estacionario ( $\frac{dz}{dt} = 0$ ), el modelo de Dahl es idéntico al modelo de fricción de Coulomb.

Este modelo se desarrolla para contactos secos y no captura el fenómeno de Stribeck, el cual ocurre en contactos lubricados. De cualquier forma, explica el desplazamiento pre-deslizante y el fenómeno de histéresis en velocidades cercanas a cero.

### 2.6.5 Modelo de fricción de LuGre

El modelo de LuGre es la generalización del modelo de Dahl que puede explicar el comportamiento pre-deslizante y el comportamiento de Stribeck simultáneamente.

El contacto de dos cuerpos rígidos se modela como un conjunto de cerdas elásticas. Cuando una fuerza tangencial es aplicada, las cerdas se deforman como resortes, los cuales hacen que surja la fuerza de fricción. Si la fuerza es lo suficientemente alta, algunas de las cerdas se deforman tanto que se deslizan. Este fenómeno es altamente aleatorio debido a las formas irregulares de las superficies. Si se considera la deformación de las cerdas como  $z$ , y se considera que está modelada por:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma_0 |v|}{g(v)} z \quad (59)$$

$$g(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) e^{-\frac{|v|}{v_s}} \right), \quad (60)$$

donde  $\sigma_0$  es un parámetro constante positivo que representa la rigidez, y  $g(v)$  es una función continua y positiva la cual sirve para describir el efecto Stribeck. Ésta fue elegida basada en el modelo de Tustin (53).

La fuerza de fricción generada por la deformación de las cerdas y de la lubricación viscosa está descrita por:

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + F_v v,$$

donde  $\sigma_1$  es un coeficiente de amortiguamiento.





## Capítulo 3

### Control robusto del helicóptero de 3GDL

#### 3.1. Introducción

En este capítulo se presenta la teoría y los resultados prácticos del control robusto del helicóptero subactuado de tres grados de libertad (3GDL), marca Quanser, el cual se presenta en la figura 6.

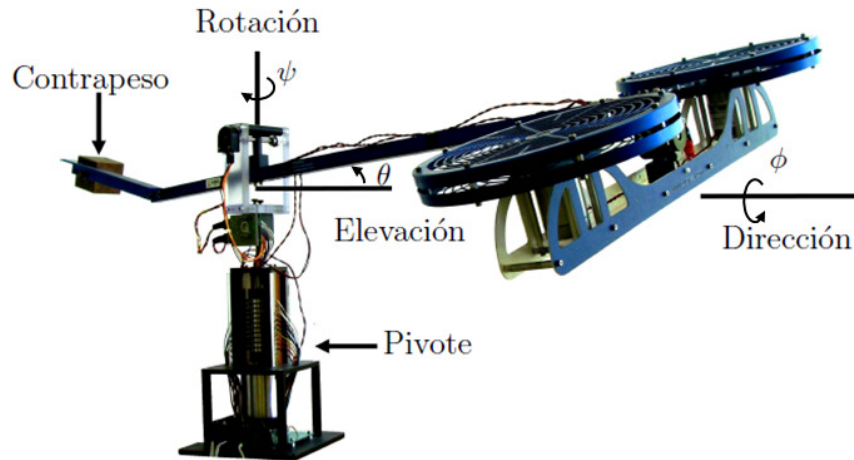


Figura 6. Helicóptero de tres grados de libertad marca Quanser.

Los tres grados de libertad son la elevación ( $\theta$ ), la dirección ( $\phi$ ) y la rotación ( $\psi$ ), movimientos en dirección de los ejes mostrados en la figura. Este modelo es de grado de subactuación 1, pues solo uno de sus grados de libertad no está actuado; los dos primeros grados de libertad se encuentran totalmente actuados debido al torque generado por la suma y la diferencia de las fuerzas generadas por los abanicos, mientras que el movimiento de rotación es subactuado, pues depende solo del ángulo de dirección y no de la aplicación directa de un actuador.

### 3.1.1. Descripción de la plataforma experimental

Se utilizó el prototipo localizado en el laboratorio de control del CICESE. Este prototipo ha sido modificado debido a reparaciones anteriores, por lo que la dinámica varía con respecto a la modelada originalmente por el fabricante.

El prototipo presenta las siguientes limitantes físicas: la elevación varía entre  $\pm 0.5rad$ , la dirección varía entre  $\pm \frac{\pi}{2}rad$ , y la rotación no tiene restricciones.

La posición es medida a través de tres decodificadores ópticos (Avago-Technologies, 2010); los ejes de elevación y rotación poseen una resolución de 4096 ciclos por revolución, mientras que el de rotación posee 8192 ciclos por revolución.

El sistema de control fue implementado de acuerdo al diagrama mostrado en la figura 7. A continuación se desglosan sus componentes:

- Motores de DC marca Pittman modelo 9234S004 (Allied-Electronics, 2001)
- Tarjeta PCI de adquisición de datos Sensoray 626 (Sensoray, 2004)
- Computadora Pentium IV, 2.40GHz, 1GB de memoria RAM, Windows XP Professional®, Matlab R2007a®
- Simulador numérico Simulink®
- Servoamplificadores AMC© modelo 16A20AC (AMC, 2011).

Las mediciones de posición y tomadas de los encoders del helicóptero son capturadas por una tarjeta de adquisición de datos, las cuales son procesadas en una computadora mediante un programa elaborado en Simulink®, diseñado para aplicar el controlador  $H_{\infty}$ . A través de la misma tarjeta de adquisición se envían las señales de control  $u$  a un servoamplificador, el cual proporciona el voltaje necesario a los motores del helicóptero.

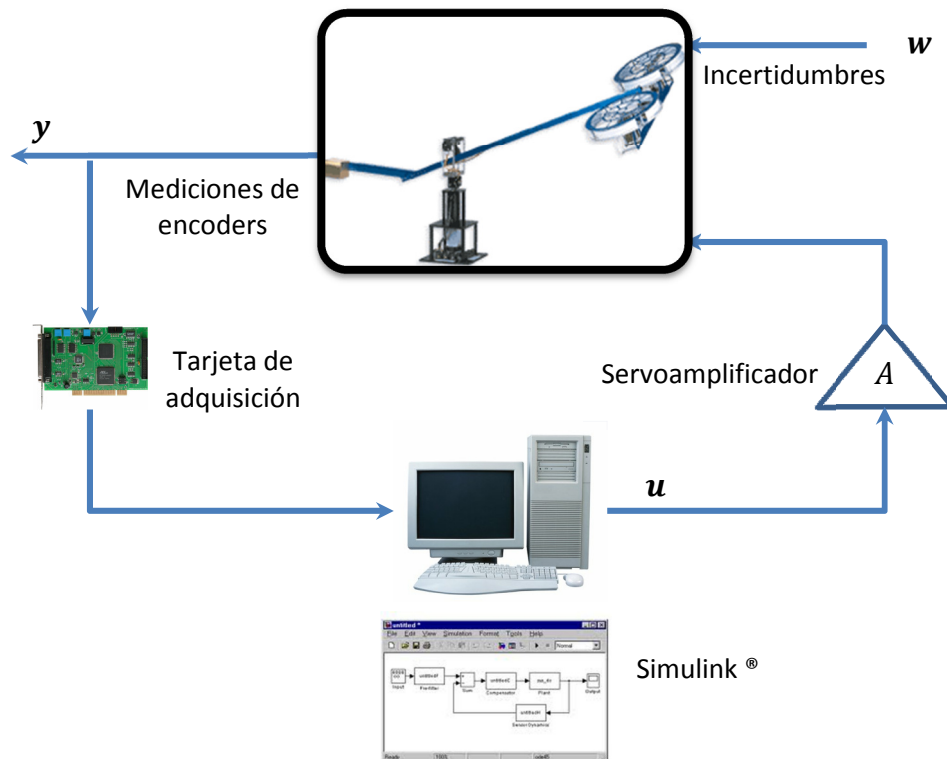


Figura 7. Plataforma experimental para el Helicóptero de 3GDL marca Quanser.

### 3.1.2. Modelo

El modelo que se presenta a continuación, está basado en una aproximación a un sistema de segundo orden para la elevación; dicha aproximación se realizó debido a las diferencias drásticas encontradas entre el comportamiento del sistema contra el modelo provisto por el fabricante, provocadas por modificaciones físicas realizadas al equipo. Por otro lado, se utilizó el modelo de Ishutkina (Ishutkina, 2004) para modelar la dirección, debido a su independencia de los otros grados de libertad y su rica dinámica; y el modelo simplificado del manual del fabricante para la rotación, debido a su simplicidad. Lo anterior considerando que la elevación, la rotación y la dirección consisten en subsistemas independientes, suposición que hace el fabricante originalmente. El modelo con el cual se trabaja en esta sección es el siguiente:

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2, \quad \dot{\theta}_2 = a\tau_1 - b_1\theta_1 - b_2\theta_2 + w_1 \quad (61)$$

$$\dot{\phi}_1 = \phi_2, \quad \dot{\phi}_2 = c\tau_2 - d \sin(\phi_1) + w_2 \quad (62)$$

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -e \sin(\phi_1) + w_3. \quad (63)$$

Para elaborar la aproximación dada por el subsistema (61), se tomaron distintas mediciones aplicando entradas tipo escalón para analizar el comportamiento. De acuerdo a (Roberge, 1975), una amplia gama de sistemas puede ser aproximado a un sistema de segundo orden, si su dinámica se ve dominada por solo un par de polos cercanos al origen.

Al analizar las mediciones obtenidas, efectivamente se observó que el comportamiento del sistema era similar al de un sistema de segundo orden. La función característica y el comportamiento transitorio de este tipo de sistemas pueden apreciarse a continuación:

$$G(s) = \frac{a_0}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}. \quad (64)$$

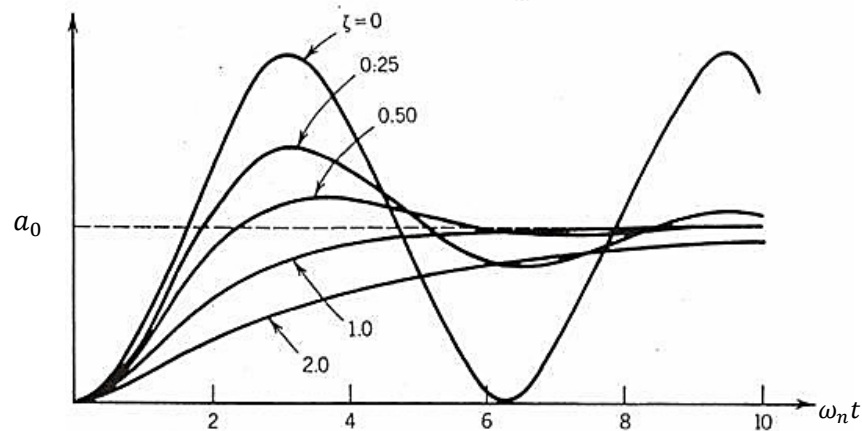


Figura 8. Respuesta transitoria de un sistema de segundo orden (Roberge, 1975).

Relacionando los parámetros  $a_0$ ,  $\omega_n$  y  $\zeta$  mostrados en la figura 8, con las mediciones realizadas al equipo, se obtuvo la siguiente aproximación:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{0.01088}{0.7929s^2 + 0.01728s + 1} \quad (65)$$

A continuación se comparan las mediciones contra una simulación del sistema de segundo orden dado por esta función de transferencia. Esto puede verse en la figura 9, de donde se puede concluir que el comportamiento del modelo aproximado es aceptable con respecto al comportamiento del sistema físico.

Las diferencias entre ambos modelos pueden explicarse al considerar que se trata de aproximar una dinámica no lineal a través de una dinámica lineal de segundo orden, alrededor de un punto fijo; sin embargo, como se mostrará más adelante, esta aproximación fue suficiente para obtener resultados satisfactorios.

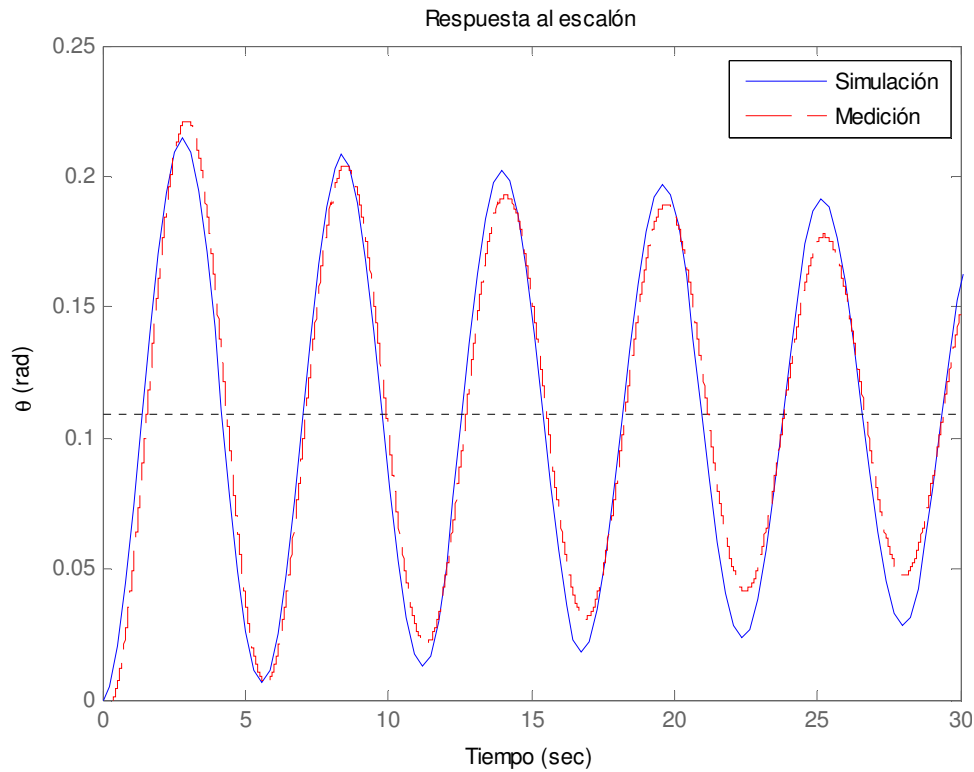


Figura 9. Comparación de la aproximación del subsistema de la elevación contra mediciones.

### 3.2. Regulación de subsistemas completamente actuados

Las ecuaciones (61) y (62) muestran que los subsistemas de la elevación y la dirección son subsistemas completamente actuados; la dinámica de la elevación está controlada por la acción de control  $\tau_1$ , mientras que la dinámica de la dirección está controlada por la acción de control  $\tau_2$ .

La primera acción de control  $\tau_1$ , representa la suma de los voltajes de los motores de los abanicos ( $V_f, V_t$ ). La suma las fuerzas de los abanicos es lo que provoca que el sistema se eleve. Por otro lado,  $\tau_2$  representa la diferencia entre los voltajes de los motores, y esta diferencia es la que provoca que la dirección se incline. Lo anterior se representa en la figura 10. Mientras que en el desarrollo de este trabajo se diseñarán las ecuaciones para las acciones de control  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , físicamente el helicóptero se controla mediante los voltajes de sus motores. Para

obtener estos voltajes, simplemente se aplica la transformación lineal de la ecuación (66). Los voltajes máximos que pueden ser aplicados a los voltajes están en el rango de  $[-12,12]$  voltios.

$$V_f = \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right), \quad V_t = \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}\right). \quad (66)$$

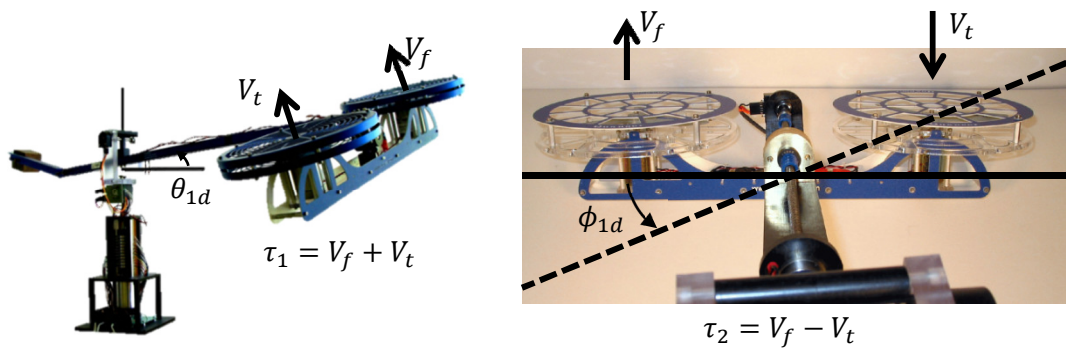


Figura 10. Grados de libertad completamente actuados del helicóptero.

El problema de regulación de los subsistemas totalmente actuados con  $H_\infty$  consiste en llevar al sistema a una elevación deseada y constante  $\theta_{1d}$  y a una dirección deseada y constante  $\phi_{1d}$ , como se muestra en la figura 10, mediante el diseño adecuado de las entradas  $\tau_1$  y  $\tau_2$ .

Para el diseño de los reguladores con  $H_\infty$  para los subsistemas dados por las ecuaciones para  $\theta$  y  $\phi$ , se proponen las siguientes variables de error:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1 - \theta_{1d} \\ x_2 &= \dot{\theta}_1 \\ x_3 &= \phi_1 - \phi_{1d} \\ x_4 &= \dot{\phi}_1, \end{aligned} \quad (67)$$

lo cual lleva a la siguiente dinámica del error:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -b_1(x_1 + \theta_{1d}) - b_2x_2 + a\tau_1 + w_1 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= c\tau_2 - d \sin(x_3 + \phi_{1d}) + w_2.
\end{aligned} \tag{68}$$

La ecuación (68) representa a un sistema no lineal, y en su versión no perturbada ( $w_1 = 0, w_2 = 0$ ), invariante en tiempo. Para simplificar esta dinámica y aplicar el controlador robusto, se utilizará un control con la forma de linealización exacta (Khalil, 1996). La estructura para el regulador será la siguiente:

$$\tau_i = \tau_{r_i} + u_i, \quad i = \{1,2\} \tag{69}$$

donde  $\tau_r$  compensará las no linealidades, mientras que  $u_i$  llevará al sistema a la referencia deseada y al mismo tiempo atenuará las perturbaciones alrededor de esta referencia. Se proponen entonces los siguientes reguladores para los subsistemas de elevación y dirección:

$$\tau_1 = \frac{b_1}{a} \theta_{1d} + u_1 \tag{70}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{c} \sin(\phi_1) + u_2. \tag{71}$$

El sistema en lazo cerrado está dado entonces por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -b_1x_1 - b_2x_2 + au_1 + w_1 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= cu_2 + w_2,
\end{aligned} \tag{72}$$

el cual es un sistema lineal, y en su versión no perturbada ( $w_1 = 0, w_2 = 0$ ), es invariante en tiempo. Recordando el teorema 2.3, y planteando las ecuaciones de



la manera correcta, se puede utilizar una retroalimentación de salida tal que se encuentre una solución al problema de regulación. Este planteamiento se desarrolla en las siguientes secciones.

### 3.2.1. Elevación

Dado que solo se cuenta con la medición de la posición, se definen las siguientes ecuaciones de salida:

$$z_\theta = \begin{bmatrix} u_1 \\ \rho_1 x_1 \\ \rho_2 x_2 \end{bmatrix}, \quad y_\theta = x_1 + w_{01}.$$

Por lo tanto, se define el problema de control  $H_\infty$  en función a las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_1 & -b_2 \end{bmatrix}}_{A_{\theta 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{\theta 1}} w + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}}_{B_{\theta 2}} u_1 \\ y_\theta &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\theta 2}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{\theta 21}} w \\ z_\theta &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}}_{C_{\theta 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_{\theta 12}} u_1. \end{aligned} \tag{73}$$

Entonces, por el teorema 2.3, la retroalimentación invariante en tiempo de salida:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_\theta &= A_{\theta 1} \xi_\theta + \left[ \frac{1}{\gamma_\theta^2} B_{\theta 1}(\xi_\theta) B_{\theta 1}^T(\xi_\theta) - B_{\theta 2}(\xi_\theta) B_{\theta 2}^T(\xi_\theta) \right] P_{\theta \varepsilon} \xi_\theta \\ &\quad + Z_{\theta \varepsilon} C_{\theta 2}^T [y_\theta - C_{\theta 2} \xi_\theta] \\ u_1 &= -B_{\theta 2}^T(\xi_\theta) P_{\theta \varepsilon} \xi_\theta \end{aligned} \tag{74}$$

es una solución al problema de regulación de la elevación con  $H_\infty$ .

### 3.2.2. Dirección

Dado que solo contamos con la medición de la posición, se definen las siguientes ecuaciones de salida:

$$z_\phi = \begin{bmatrix} u_2 \\ \rho_3 x_3 \\ \rho_4 x_4 \end{bmatrix}, \quad y_\phi = x_3 + w_{02}.$$

Por lo tanto, se define el problema de control  $H_\infty$  en función a las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\phi 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{\phi 1}} w + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}}_{B_{\phi 2}} u_2 \\ z_\phi &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_3 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{bmatrix}}_{C_{\phi 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_{\phi 12}} u_2 \\ y_\phi &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\phi 2}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{\phi 21}} w. \end{aligned} \quad (75)$$

Entonces, por el teorema 2.3, la retroalimentación invariante en tiempo de salida:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_\phi &= A_{\phi 1} \xi_\phi + \left[ \frac{1}{\gamma_\phi^2} B_{\phi 1}(\xi_\phi) B_{\phi 1}^T(\xi_\phi) - B_{\phi 2}(\xi_\phi) B_{\phi 2}^T(\xi_\phi) \right] P_{\phi \varepsilon} \xi_\phi \\ &\quad + Z_{\phi \varepsilon} C_{\phi 2}^T [y_\phi - C_{\phi 2} \xi_\phi] \\ u_2 &= -B_{\phi 2}^T(\xi_\phi) P_{\phi \varepsilon} \xi_\phi \end{aligned} \quad (76)$$

es una solución al problema de regulación de la dirección con  $H_\infty$ .

### 3.2.3. Simulaciones

Las siguientes simulaciones fueron obtenidas utilizando los siguientes valores:

Tabla 1. Valores utilizados para la simulación del regulador  $H_\infty$ .

Parámetros del sistema	Controlador elevación	Controlador dirección
$a = 0.0137$	$\gamma_\theta = 200$	$\gamma_\phi = 104.4$
$b_1 = 1.2612$	$\epsilon_\theta = 0.01$	$\epsilon_\phi = 0.001$
$b_2 = 0.0218$	$\rho_1 = 100$	$\rho_3 = 100$
$c = 2.4313$	$\rho_2 = 1$	$\rho_4 = 5$
$d = 0.0485$		
$e = 0.4975$		

Las posiciones deseadas para la simulación fueron  $\theta_{1d} = 0.1rad$  y  $\phi_{1d} = 0.4rad$ . No se introdujeron perturbaciones al sistema  $(w_{01}, w_{02}, w_1, w_2) = (0,0,0,0)$ .

Los valores de la tabla anterior fueron obtenidos de la siguiente manera: se calculó el valor de  $\gamma_{(\theta,\phi)}^*$  (valor óptimo) iterando sobre las ecuaciones de Riccati asociadas a (73) y (75), y se eligió un valor  $\gamma_{(\theta,\phi)}$  un poco mayor (subóptimo), para evitar valores muy grandes de la variable de control  $u$ ; posteriormente, se eligió (también por iteración) un valor positivo muy pequeño  $\epsilon_{(\theta,\phi)}$  tal que se cumpliera el lema real de acotamiento estricto (Anderson y Vreugdenhil, 1973); por último, las variables  $\rho_1$ - $\rho_4$ , que son variables de penalidad, se “sintonizaron” a partir de las simulaciones numéricas, considerando que a valores mayores de estas variables se obtiene una mayor atenuación de perturbaciones, con la desventaja de un control más grande.

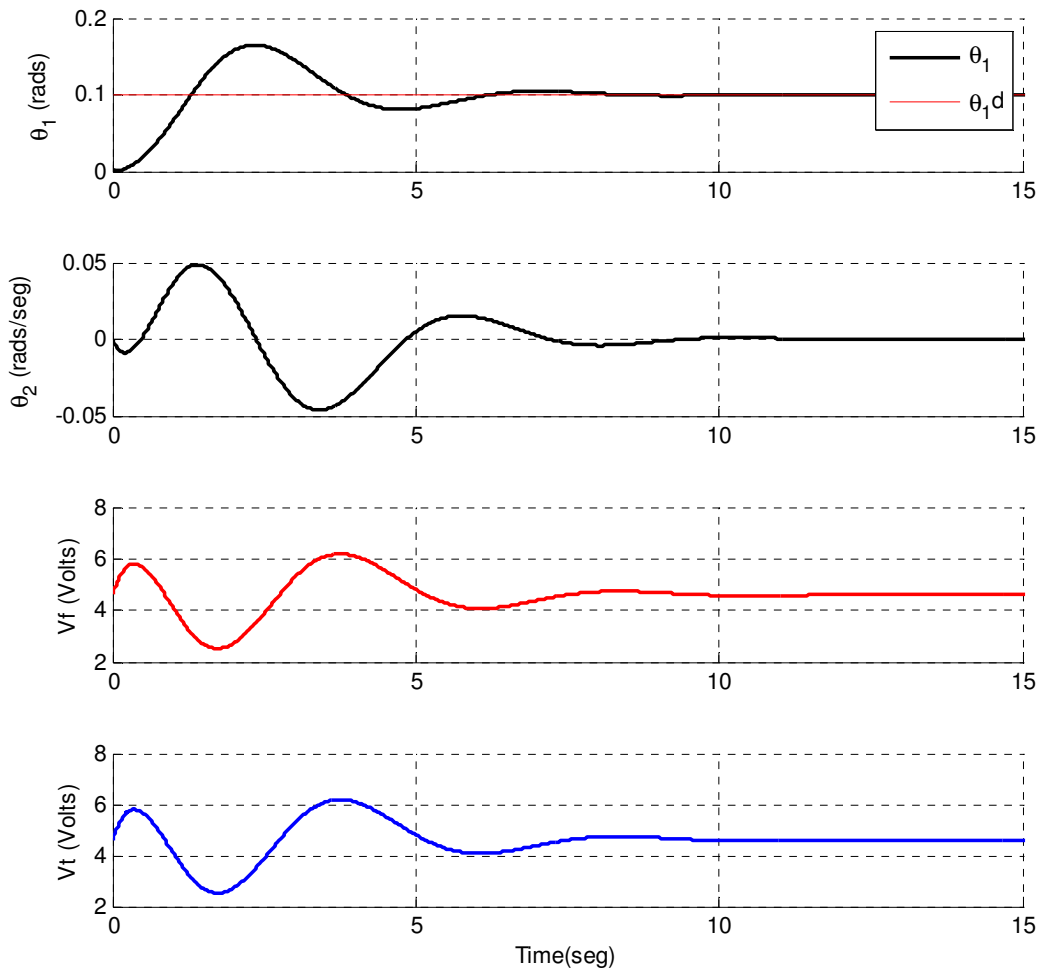


Figura 11. Simulación de la regulación de elevación,  $\theta_{1d} = 0.1rad$ .

De la figura 11 y figura 12 se puede observar que ambos subsistemas llegan a la referencia de manera asintótica. Asimismo puede observarse que los voltajes de los motores se encuentran dentro de los límites permitidos. En el caso de la elevación, se tiene un transitorio de aproximadamente de 8 segundos, mientras que en el segundo caso, el transitorio es de aproximadamente 5 segundos.

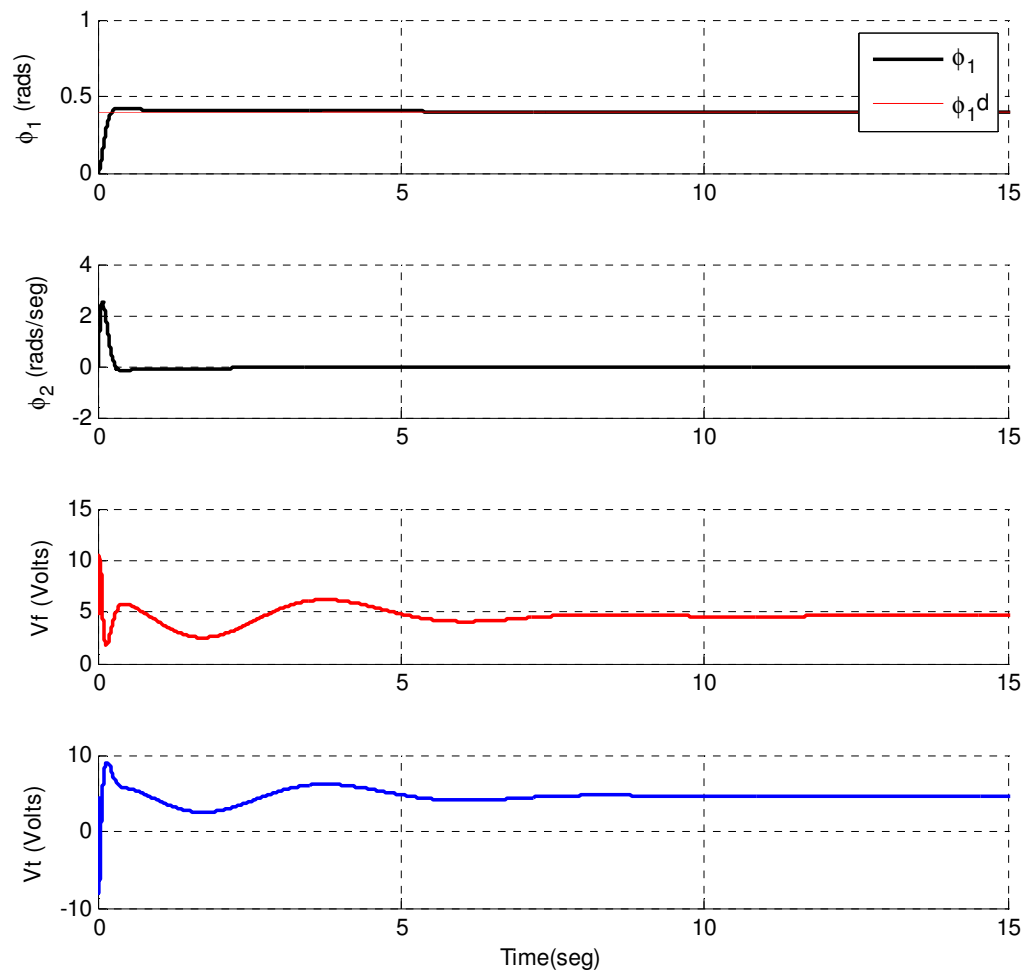


Figura 12. Simulación de la regulación de dirección,  $\phi_{1d} = 0.4rad$ .

### 3.2.4. Resultados experimentales

Los siguientes resultados fueron obtenidos utilizando los mismos valores de la tabla 1. Para este caso, se utilizó una referencia de  $\theta_{1d} = 0.1rad$ ,  $\phi_{1d} = 0.4rad$ . La figura 13 muestra que el sistema se estabiliza en la elevación deseada. El error máximo<sup>3</sup> obtenido en estado estacionario es del 7.4%. En una comparación cualitativa con la figura 11, se puede ver que el comportamiento entre la

<sup>3</sup> El porcentaje de error fue calculado mediante la formula  $\left(\left|\frac{q_d - q}{q}\right| \times 100\right)\%$ , donde  $q_d$  es la referencia y  $q$  es la posición del sistema.

simulación y el resultado experimental es muy similar, lo cual confirma la validez de la aproximación utilizada en (61) y (65).

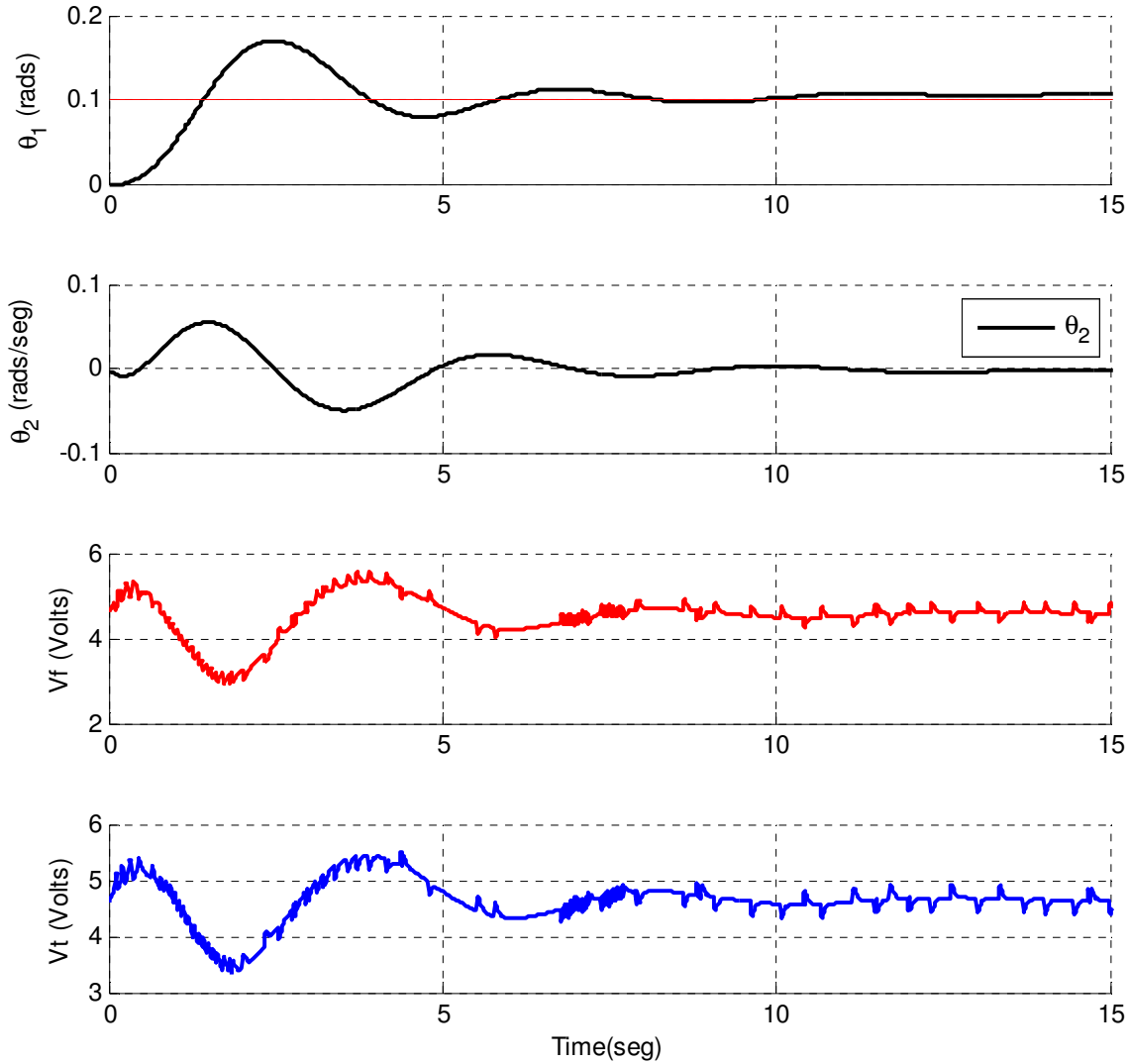


Figura 13. Datos experimentales de la regulación del subsistema de elevación con  $\theta_{1d} = 0.1rad$ .

La figura 14 muestra de nuevo que el sistema alcanza la dirección deseada, con un error en estado estacionario menor al 3.15%. Comparando contra la figura 12, se puede ver que el comportamiento real y el simulado son muy diferentes, pero la robustez del controlador permite que el sistema aun así alcance la referencia.

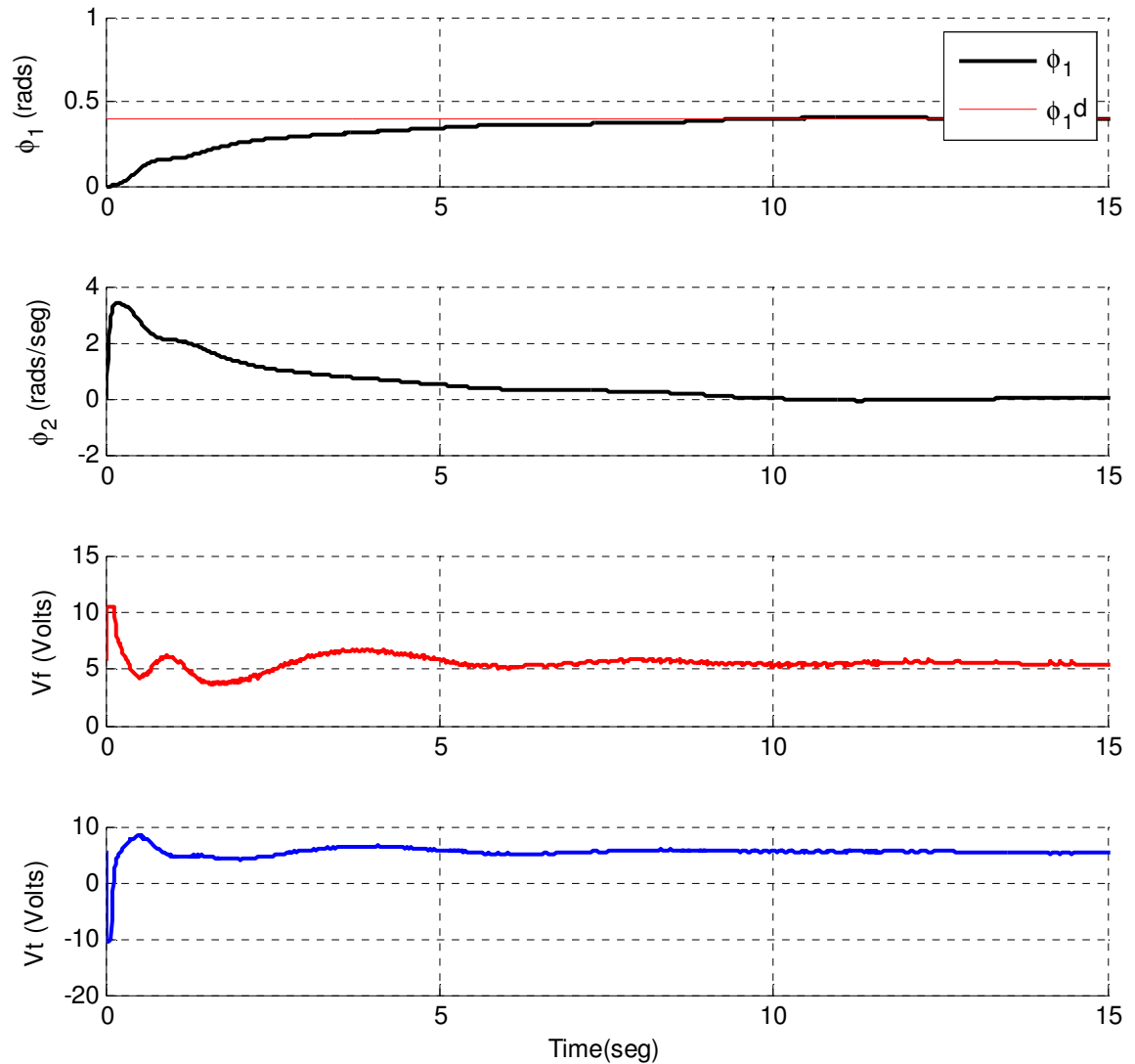


Figura 14. Datos experimentales de la regulación del subsistema de dirección con  $\phi_{1d} = 0.4rad$ .

### 3.3. Seguimiento de los subsistemas completamente actuados

Haciendo referencia de nuevo a la figura 10, el problema de seguimiento de los grados de libertad completamente actuados consiste en llevar al sistema a una posición  $\theta_{1d}$  y  $\phi_{1d}$ , ambas variantes en tiempo.

Para el diseño del control de seguimiento con  $H_\infty$  para los subsistemas dados por las ecuaciones para  $\theta$  y  $\phi$ , se proponen las siguientes variables de error:

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta_1 - \theta_{1d} \\x_2 &= \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{1d} \\x_3 &= \phi_1 - \phi_{1d} \\x_4 &= \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_{1d},\end{aligned}\tag{77}$$

lo cual lleva a la siguiente dinámica del error:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -b_1(x_1 + \theta_{1d}) - b_2(x_2 + \dot{\theta}_{1d}) - \ddot{\theta}_{1d} + a\tau_1 + w_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= c\tau_2 - d \sin(x_3 + \phi_{1d}) - \ddot{\phi}_{1d} + w_2.\end{aligned}\tag{78}$$

La ecuación (78) representa a un sistema no lineal, variante en tiempo. Se utilizará nuevamente un control con la forma de linealización exacta (Khalil, 1996), con la siguiente estructura:

$$\tau_i = \tau_{t_i} + u_i, \quad i = \{1,2\}\tag{79}$$

donde  $\tau_{t_i}$  compensará las no linealidades, mientras que  $u_i$  llevará al sistema a la referencia deseada, y atenuará las perturbaciones alrededor de esta referencia. Se proponen entonces los siguientes controladores para los subsistemas:

$$\tau_1 = \frac{b_1}{a}\theta_{1d} + \frac{b_2}{a}\dot{\theta}_{1d} + \frac{1}{a}\ddot{\theta}_{1d} + u_1\tag{80}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{c}\sin(\phi_1) + \frac{d}{c}\ddot{\phi}_{1d} + u_2.\tag{81}$$



El sistema en lazo cerrado está dado entonces por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -b_1x_1 - b_2x_2 + au_1 + w_1 \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= cu_2 + w_2.
 \end{aligned} \tag{82}$$

### 3.3.1. Elevación

Dado que solo se cuenta con la medición de la posición, se definen las siguientes ecuaciones de salida:

$$z_\theta = \begin{bmatrix} u_1 \\ \rho_1 x_1 \\ \rho_2 x_2 \end{bmatrix}, \quad y_\theta = x_1 + w_{01}.$$

Por lo tanto, se define el problema de control  $H_\infty$  en función a las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_1 & -b_2 \end{bmatrix}}_{A_{\theta 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{\theta 1}} w + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}}_{B_{\theta 2}} u_1 \\
 y_\theta &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\theta 2}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{\theta 21}} w \\
 z_\theta &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}}_{C_{\theta 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_{\theta 12}} u_1.
 \end{aligned} \tag{83}$$

Entonces, por el teorema 2.3, la retroalimentación invariante en tiempo de salida:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_\theta &= A_{\theta 1} \xi_\theta + \left[ \frac{1}{\gamma_\theta^2} B_{\theta 1}(\xi_\theta) B_{\theta 1}^T(\xi_\theta) - B_{\theta 2}(\xi_\theta) B_{\theta 2}^T(\xi_\theta) \right] P_{\theta \varepsilon} \xi_\theta \\
&\quad + Z_{\theta \varepsilon} C_{\theta 2}^T [y_\theta - C_{\theta 2} \xi_\theta] \\
u_1 &= -B_{\theta 2}^T(\xi_\theta) P_{\theta \varepsilon} \xi_\theta
\end{aligned} \tag{84}$$

es una solución al problema de seguimiento de la elevación con  $H_\infty$ .

### 3.3.2. Dirección

Dado que solo se cuenta con la medición de la posición, se definen las siguientes ecuaciones de salida:

$$z_\phi = \begin{bmatrix} u_2 \\ \rho_3 x_3 \\ \rho_4 x_4 \end{bmatrix}, \quad y_\phi = x_3 + w_{02}.$$

Por lo tanto, se define el problema de control  $H_\infty$  en función a las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\phi 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{\phi 1}} w + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}}_{B_{\phi 2}} u_2 \\
z_\phi &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_3 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{bmatrix}}_{C_{\phi 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_{\phi 12}} u_2 \\
y_\phi &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\phi 2}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{\phi 21}} w.
\end{aligned} \tag{85}$$

Entonces, por el teorema 2.3, la retroalimentación invariante en tiempo de salida:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_\phi &= A_{\phi 1} \xi_\phi + \left[ \frac{1}{\gamma_\phi^2} B_{\phi 1}(\xi_\phi) B_{\phi 1}^T(\xi_\phi) - B_{\phi 2}(\xi_\phi) B_{\phi 2}^T(\xi_\phi) \right] P_{\phi \varepsilon} \xi_\phi \\
&\quad + Z_{\phi \varepsilon} C_{\phi 2}^T [y_\phi - C_{\phi 2} \xi_\phi] \\
u_2 &= -B_{\phi 2}^T(\xi_\phi) P_{\phi \varepsilon} \xi_\phi
\end{aligned} \tag{86}$$

es una solución al problema de seguimiento de la dirección con  $H_\infty$ .

### 3.3.3. Simulaciones

Las siguientes simulaciones fueron obtenidas utilizando los mismos valores de la tabla 1. Nuevamente, no se introdujeron perturbaciones al sistema  $(w_{01}, w_{02}, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 0)$ .

En la figura 15 se muestra la simulación para el seguimiento de trayectoria de la elevación. Se observa claramente que el sistema llega a la referencia de manera asintótica, conservando los voltajes de los motores dentro de los límites permitidos.

La figura 16 muestra el seguimiento del grado de libertad correspondiente a la dirección con  $\phi_{1d} = 0.4 \sin(0.5t)$ , con una regulación simultánea de la elevación en  $\theta_{1d} = 0.15 \text{ rad}$ .

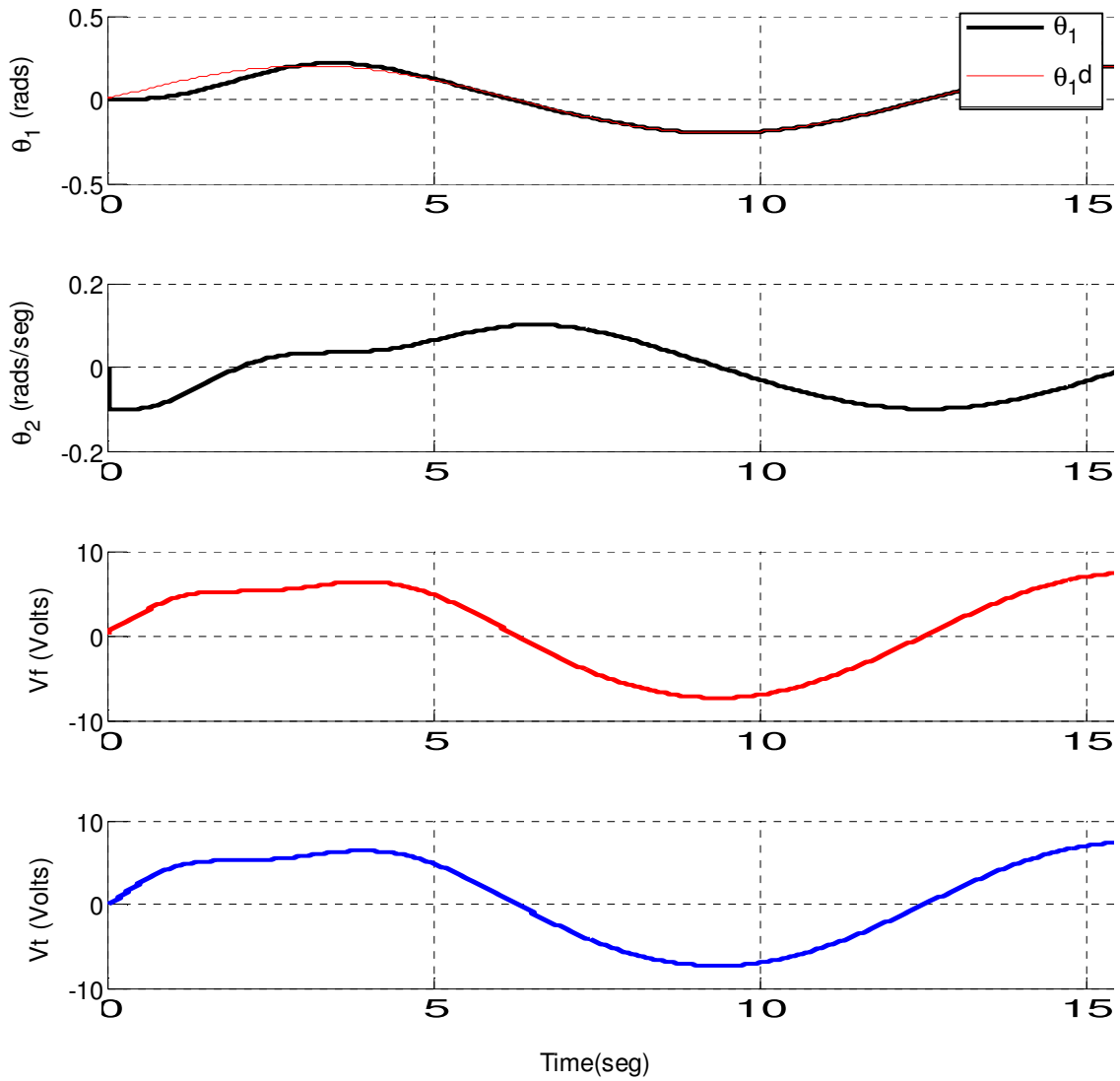


Figura 15. Simulación de seguimiento de trayectoria de la elevación.  $\theta_{1d} = 0.2\sin(0.5t)$

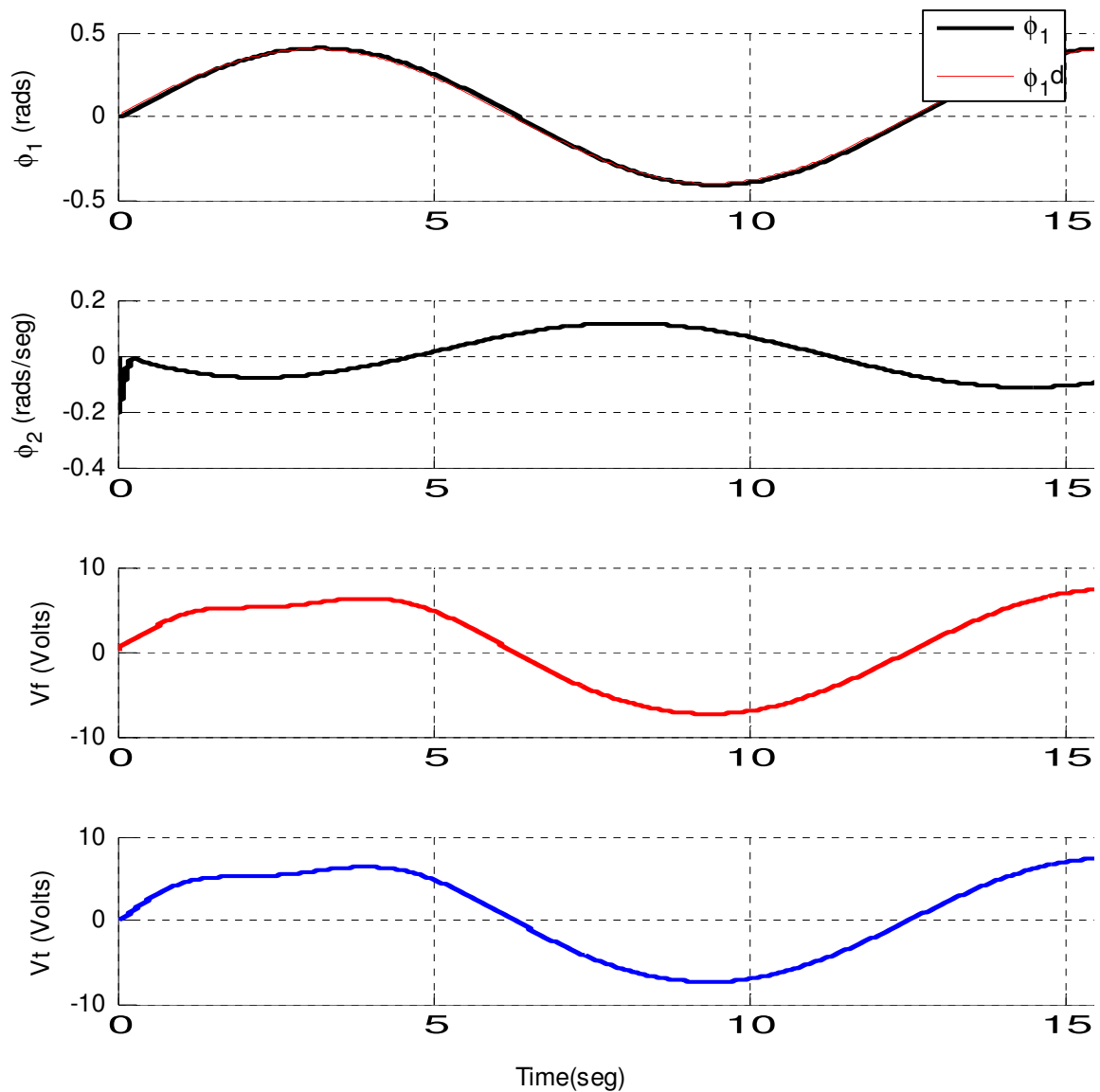


Figura 16. Simulaciones de seguimiento de trayectoria para dirección.  $\phi_{1d} = 0.4\sin(0.5t)$ ,  $\theta_{1d} = 0.15rad$ .

### 3.3.4. Resultados experimentales

Los siguientes resultados fueron obtenidos utilizando los mismos valores de la tabla 1. En la figura 17, se muestran los resultados para una referencia de  $\theta_{1d} = 0.2 \sin(0.5t) rad$ ,  $\phi_{1d} = 0$ . En la figura 18, se muestran los resultados para una referencia de  $\theta_{1d} = 0.15rad$ ,  $\phi_{1d} = 0.4\sin(0.5t)$ .

La figura 17 muestra que el sistema se estabiliza en la elevación deseada. El error máximo obtenido en estado estacionario es del 9.7%. La figura 18 muestra de nuevo que el sistema alcanza la dirección deseada, con un error en estado estacionario menor al 13%.

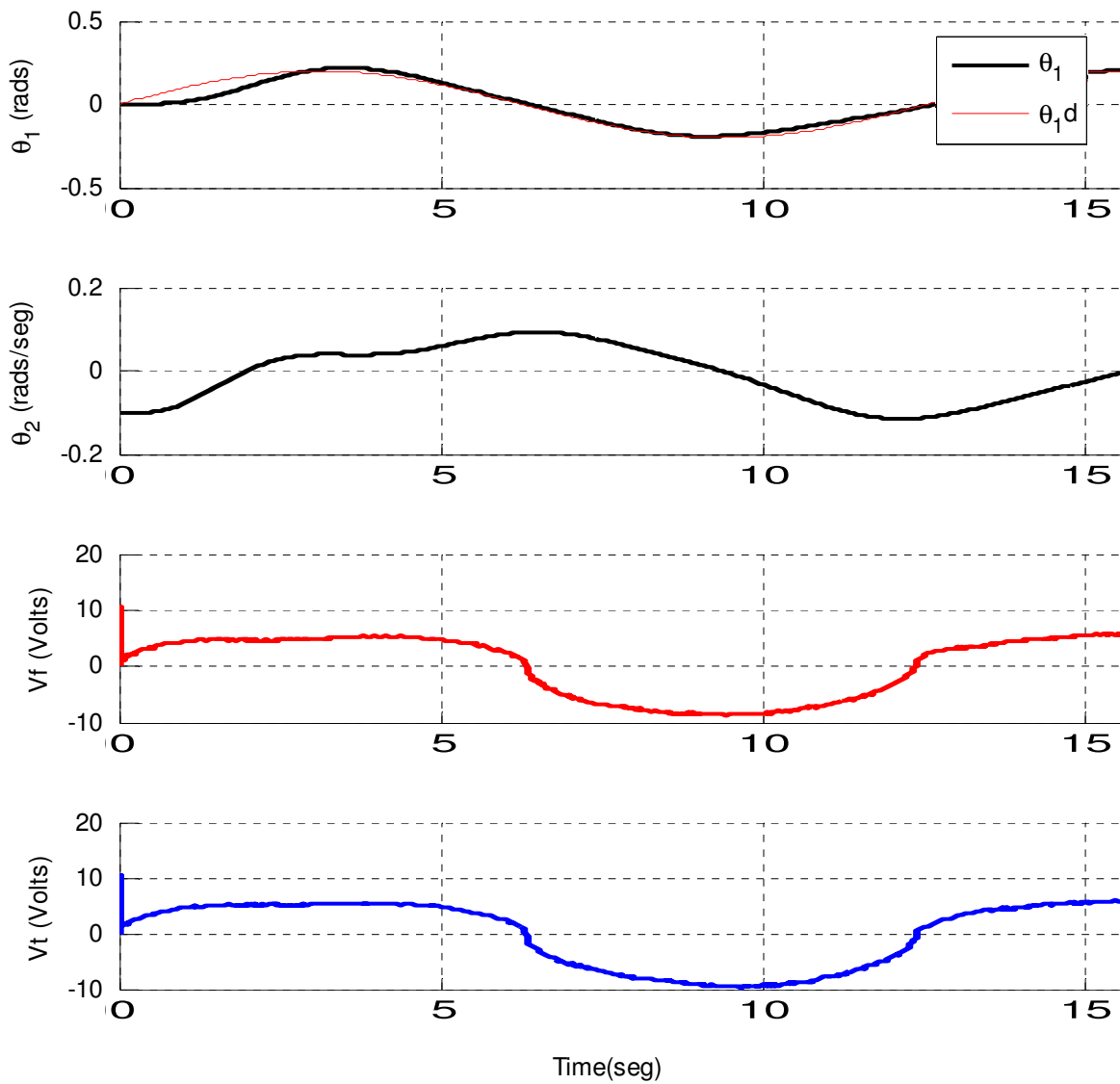


Figura 17. Datos experimentales del seguimiento del subsistema de elevación.

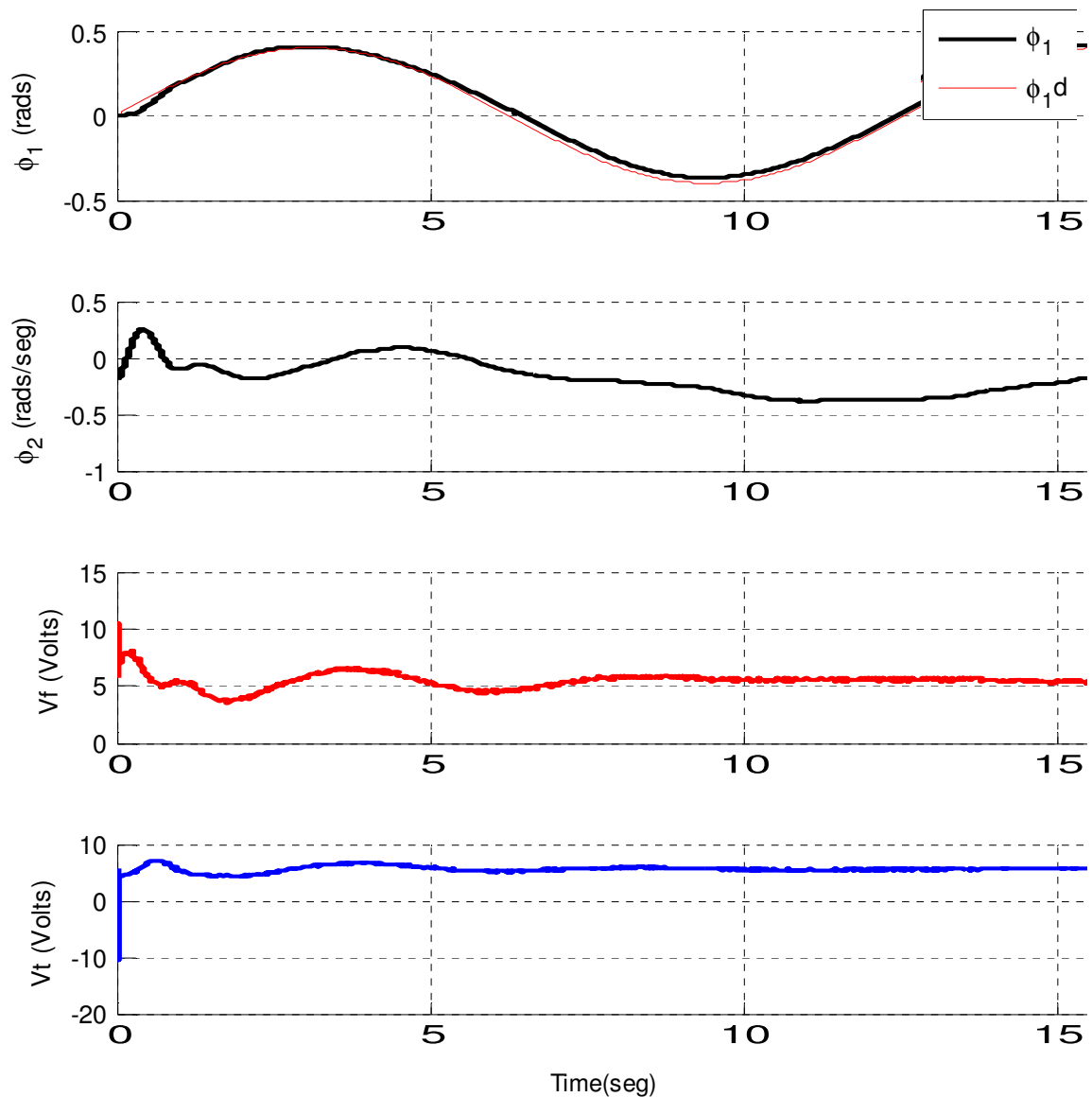


Figura 18. Datos experimentales del seguimiento del subsistema de dirección.

### 3.4. Regulación robusta del grado subactuado

El objetivo de esta sección es proporcionar una ley de control que permita estabilizar el sistema (63) en el punto  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (\theta_{1d}, 0, 0, 0, \psi_{1d}, 0)$ , en el caso cuando  $\dot{\psi}_{1d} = 0$ , es decir, para  $\psi_{1d}$  constante. Dado que para regular la rotación se controlará la dirección, ambas no pueden ser reguladas a una posición arbitraria independiente, pues una depende de la otra. Por lo tanto, el subsistema

de dirección solamente se estabilizará en el origen. Para esto utilizaremos los resultados de las secciones anteriores.

Para regular el subsistema de elevación, se utilizará el regulador (74). Para regular el grado subactuado (rotación) se utilizará el resultado del seguimiento de trayectoria para el subsistema de dirección. Para esto se definen las variables de error:

$$\begin{aligned}x_5 &= \psi_1 - \psi_{1d} \\x_6 &= \dot{\psi}_1.\end{aligned}\tag{87}$$

Efectuando el cambio de variable  $u_3 = \sin(\phi_{1d})$ , se pretende que mediante el seguimiento de la variable  $\phi_1$  a la trayectoria de control  $\phi_{1d}$ ,  $\phi_1$  proporcione el control necesario para estabilizar la rotación. Sustituyendo  $u_3$  en el subsistema de la rotación (63), y sustituyendo las variables de error (87), se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_5 &= x_6 \\x_6 &= -eu_3 + w_3.\end{aligned}\tag{88}$$

Ahora, para tener una regulación robusta de este grado de libertad, se propondrá un controlador que lleve al sistema a la referencia deseada, y que además atenúe las perturbaciones alrededor de esta referencia.

Dado que solo se cuenta con la medición de la posición, se definen las siguientes ecuaciones de salida:

$$z_\psi = \begin{bmatrix} u_3 \\ \rho_5 x_5 \\ \rho_6 x_6 \end{bmatrix}, \quad y_\psi = x_5 + w_{03}.$$



Por lo tanto, se define el problema de control  $H_\infty$  en función a las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\psi 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_{\psi 1}} w + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -e \end{bmatrix}}_{B_{\psi 2}} u_3 \\ z_\psi &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho_5 & 0 \\ 0 & \rho_6 \end{bmatrix}}_{C_{\psi 1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_{\psi 12}} u_3 \\ y_\psi &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\psi 2}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{\psi 21}} w.\end{aligned}$$

Entonces, por el teorema 2.3, la retroalimentación invariante en tiempo de salida:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_\psi &= A_{\psi 1} \xi_\psi + \left[ \frac{1}{\gamma_\psi^2} B_{\psi 1}(\xi_\psi) B_{\psi 1}^T(\xi_\psi) - B_{\psi 2}(\xi_\psi) B_{\psi 2}^T(\xi_\psi) \right] P_{\psi \varepsilon} \xi_\psi \\ &\quad + Z_{\psi \varepsilon} C_{\psi 2}^T [y_\psi - C_{\psi 2} \xi_\psi] \\ u_3 &= -B_{\psi 2}^T(\xi_\psi) P_{\psi \varepsilon} \xi_\psi\end{aligned}\tag{89}$$

es una solución al problema de regulación de rotación con  $H_\infty$ .

De nuevo, para efectuar el control anterior, es necesario utilizar el controlador de seguimiento propuesto en (86) con  $\phi_{1d} = \sin^{-1}(u_3)$ .

Dado que el punto de equilibrio  $(x_5, x_6) = (0, 0)$  se alcanza cuando  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_3 = 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{1d} = 0$ . Además, ya que el regulador para la elevación y el control de seguimiento de la dirección garantizan estabilidad asintótica, el punto de equilibrio  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (\theta_{1d}, 0, 0, 0, \psi_{1d}, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

### 3.4.1. Simulación

La siguiente simulación fue realizada utilizando los valores de la tabla 1, además de los siguientes valores para el controlador de la rotación:

Tabla 2. Constantes usadas para el controlador de dirección.

Controlador de dirección
$\gamma_\psi = 14.85$
$\epsilon_\psi = 0.1$
$\rho_5 = 10$
$\rho_6 = 1$

Los valores de la tabla 2 fueron obtenidos de la siguiente manera: se calculó el valor de  $\gamma_\psi^*$  (valor óptimo) iterando sobre las ecuaciones de Riccati asociadas a (88), y se eligió un valor  $\gamma_\psi$  un poco mayor (subóptimo), para evitar valores muy grandes de la variable de control; posteriormente, se eligió (también por iteración) un valor positivo muy pequeño  $\epsilon_\psi$  tal que se cumpliera el lema real de acotamiento estricto (Anderson y Vreugdenhil, 1973); por último, las variables  $\rho_5$  y  $\rho_6$ , que son variables de penalidad, se “sintonizaron” a partir de las simulaciones numéricas, considerando que a valores mayores de estas variables se obtiene una mayor atenuación de perturbaciones, con la desventaja de un control más grande.

En la figura 19 se muestra la regulación del helicóptero no perturbado en la posición deseada  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (0.2, 0, 0, 0, -0.4, 0)$ . Se puede observar que el sistema llega a la referencia de manera asintótica.

Por otro lado, en la figura 20, el sistema se encuentra inicialmente en el origen, y es perturbado con  $w_1 = w_2 = w_3 = 0.1$  desde  $t = 20$  hasta  $t = 23$ . La figura 20 muestra que los tres grados de libertad regresan al origen.

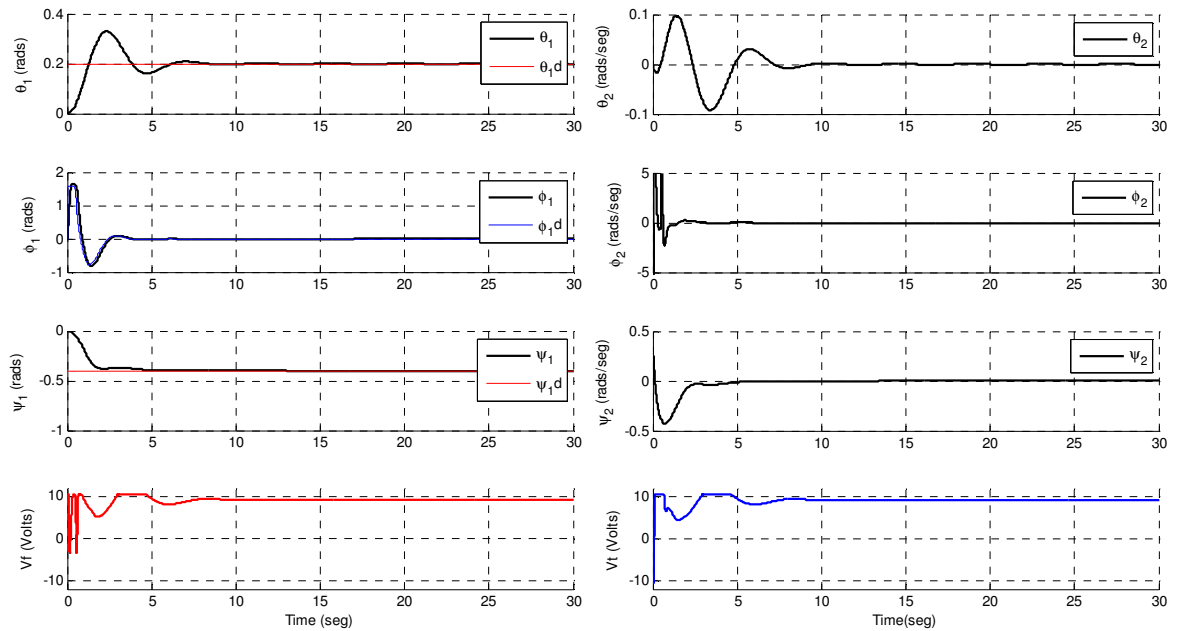


Figura 19. Regulación robusta del helicóptero al punto  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (0.2, 0, 0, 0, -0.4, 0)$ .

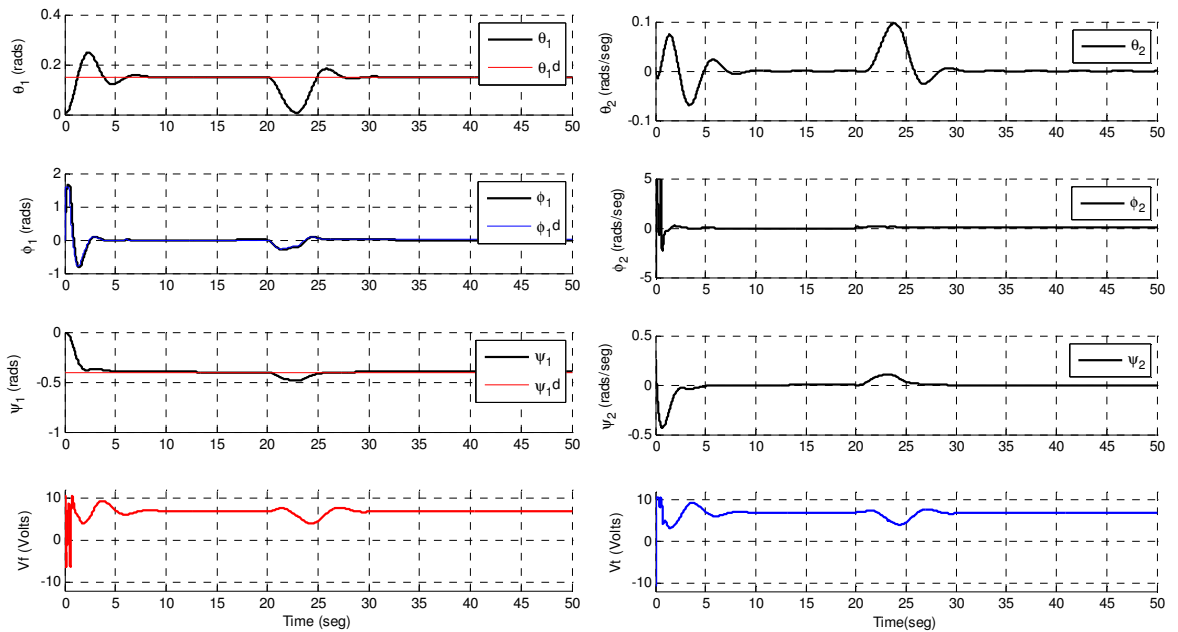


Figura 20. Regulación del helicóptero en la posición  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (0.15, 0, 0, 0, 0, 0)$ , ante la existencia de una perturbación transitoria.

### 3.4.2. Resultados experimentales

Los siguientes resultados fueron obtenidos utilizando los valores de la tabla 1. En la figura 21 se muestra la regulación del helicóptero no perturbado en la posición deseada  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (0.2, 0, 0, 0, -0.4, 0)$ . Se puede observar que el sistema llega a la referencia de manera asintótica. Los errores en estado estacionario fueron: en elevación, 3.5%; en dirección, 1.8%; en rotación, 10.8%.

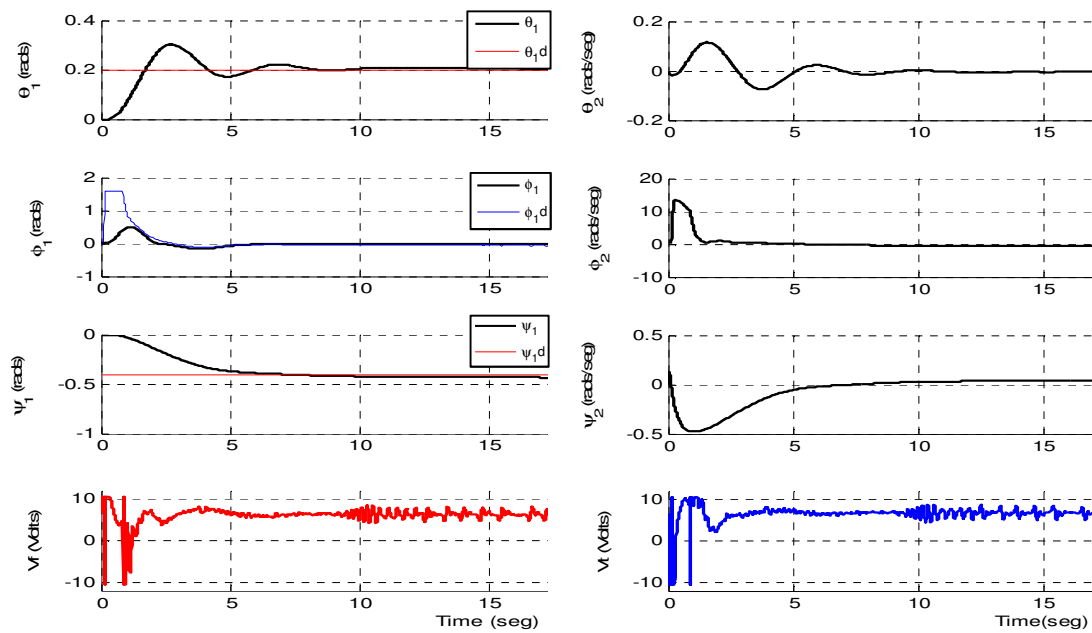


Figura 21. Datos experimentales de la regulación robusta del helicóptero al punto  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (0.2, 0, 0, 0, -0.4, 0)$ .

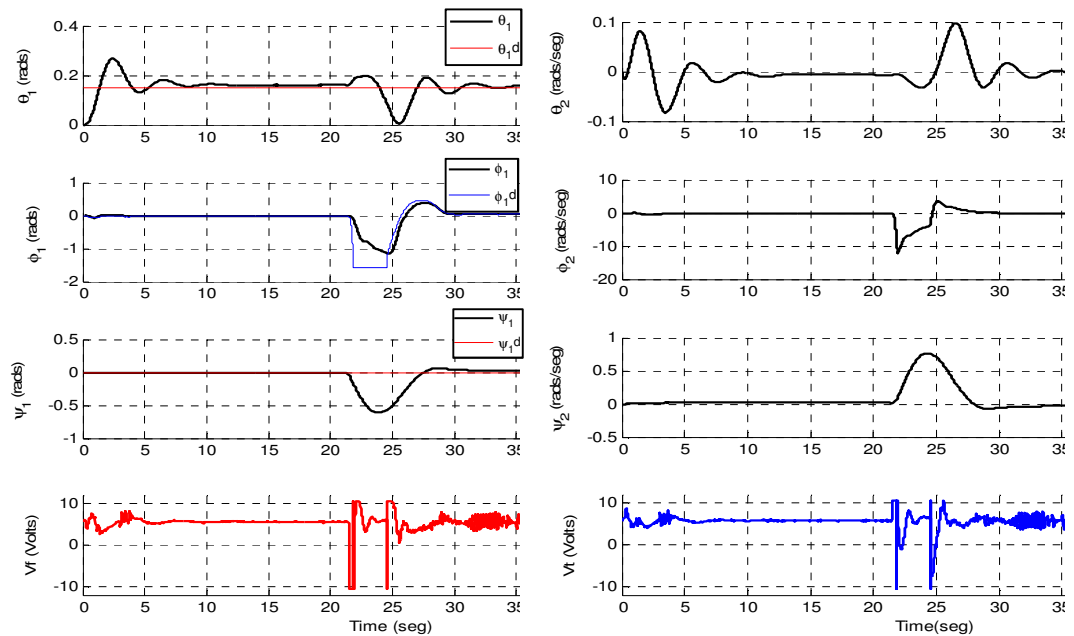


Figura 22. Datos experimentales de la regulación robusta del helicóptero en el punto  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (0.15, 0, 0, 0, 0, 0)$ , aplicando una perturbación en  $t=20$ seg.

En la figura 22, se presenta la regulación en el punto  $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) = (0.15, 0, 0, 0, 0, 0)$ , sujeto a una perturbación desconocida en  $t = 20$ seg (el helicóptero fue golpeado de tal manera que se desviarán todas las posiciones del sistema). Puede observarse que el sistema regresa a la posición deseada a pesar de esta perturbación. Los errores en estado estacionario después de la estabilización fueron: en elevación, 3.5%; en dirección, 3.6%; en rotación, 1.99%.

### 3.5. El problema del aterrizaje

Se le llamará “el problema del aterrizaje” al problema de estabilizar al sistema en el origen. Durante la fase experimental, se encontró el problema de estabilizar al sistema en el origen  $(\theta_1, \phi_1, \psi_1) = (0, 0, 0)$ . Esto es evidente en el grado de rotación, debido a que cuando el helicóptero no está elevado y los abanicos no están en movimiento ( $\theta_1 = 0, \tau_1 = 0$ ), la rotación no cambiará, sin importar el grado de dirección, en oposición a lo que expresa la ecuación (63). Esta

discrepancia puede ser explicada usando un modelo más completo de la rotación, como el mostrado en (Ishutkina, 2004).

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= \tau_1 e_1 \cdot \cos(\theta_1) \sin(\phi_1) + \tau_2 e_2 \cdot \sin(\theta_1) \sin(\phi_1) - drag \\ drag &= \frac{1}{2} \rho (\dot{\psi} L)^2 (S_0 + S'_0 \sin(\phi))\end{aligned}\tag{90}$$

$S_0, S'_0$  Coeficientes efectivos de arrastre.

Dado que el término de arrastre (*drag*) es una función de la velocidad angular de la rotación, este término es cero cuando el helicóptero esta estático.

De la ecuación (90) se puede ver que si la elevación y las señales de entrada son cero, la rotación no cambiará aun cuando la dirección cambie. Así que (63) es en realidad una aproximación a (90) cerca del origen, pero no en él.

Dado que en las secciones anteriores se demostró que el desempeño del controlador de rotación fue aceptable, en lugar de diseñar un nuevo controlador usando el modelo dado por la ecuación (90), se usará planeación de una trayectoria para la elevación para resolver el problema del aterrizaje. La idea es simple, si el error de la rotación es lo suficientemente pequeño, la elevación será cero, pero si es grande, la elevación será una constante, tal que el sistema (90) se aproxime al sistema (63).

La trayectoria diseñada fue:

$$\theta_{1d} = C(1 - e^{-k\psi_1^2}),\tag{91}$$

donde  $C$  es la máxima elevación deseada, y  $k$  define el área de aterrizaje, esto es, la zona donde el error de rotación sea lo suficientemente pequeño para que el

helicóptero descienda. La figura 23 muestra la gráfica de esta trayectoria contra el error de rotación  $\psi$ . Como puede verse en esta figura, es una función continua y suave, que permanece casi constante fuera del área de aterrizaje, y una vez dentro, varía exponencialmente.

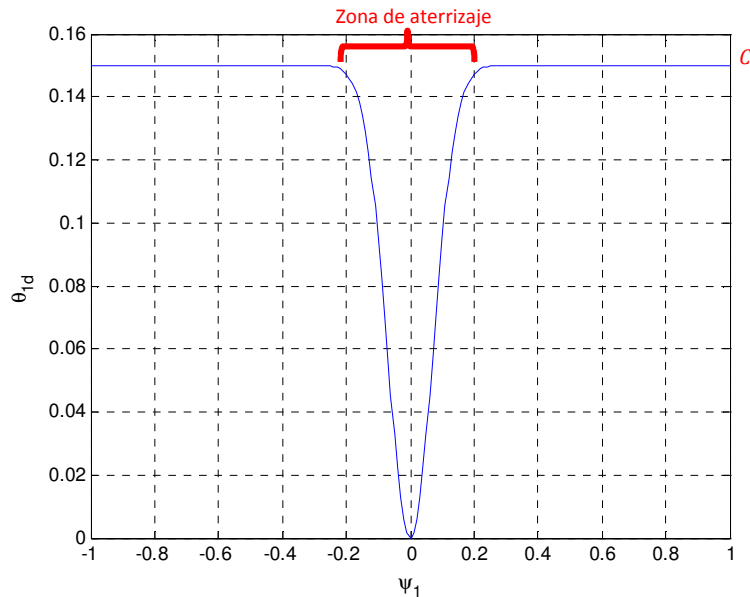


Figura 23. Gráfica de la trayectoria planeada contra  $\psi_1$ .

De (88)-(90) se puede ver que si el  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1 = 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1 = 0$ . Entonces debido a (91), esto también implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1 = 0$ .

### 3.5.1. Simulaciones

Las siguientes simulaciones fueron realizadas usando los valores de las tablas 1 y 2. La trayectoria deseada fue:

$$\theta_{1d} = 0.15(1 - e^{-100\psi_1^2})$$

El sistema fue perturbado desde  $t = 4\text{seg}$  hasta  $t = 7\text{seg}$  con  $w_1 = w_2 = w_3 = -0.1$ .

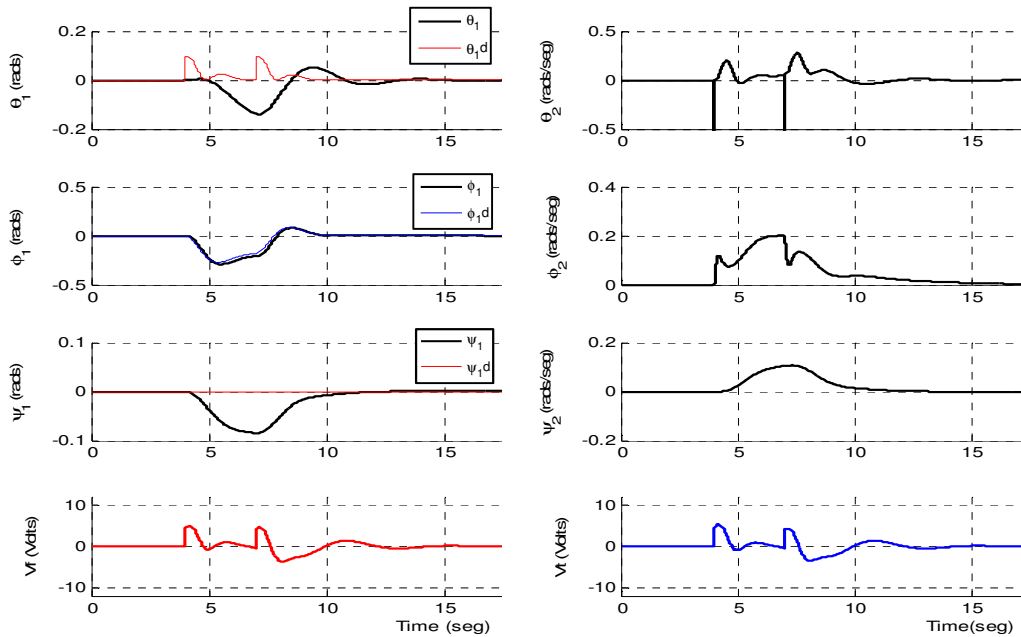


Figura 24. Simulación del aterrizaje del helicóptero usando planeación de trayectoria.

Puede verse que efectivamente el sistema regresa al origen después de un lapso de aproximadamente 8 segundos, de manera asintótica. Los voltajes que llegan a los motores se encuentran dentro de los límites máximos, y la dirección sigue su trayectoria robusta de manera aceptable.

### 3.5.2. Resultados experimentales

Los siguientes resultados experimentales fueron obtenidos usando los valores de las tablas 1 y 2. La trayectoria deseada fue:

$$\theta_{1d} = 0.15(1 - e^{-100\psi_1^2}). \quad (92)$$



El sistema fue desviado de su posición de equilibrio en  $t = 4$  por una perturbación desconocida (el helicóptero fue golpeado, sacando a todos los estados de su posición de equilibrio).

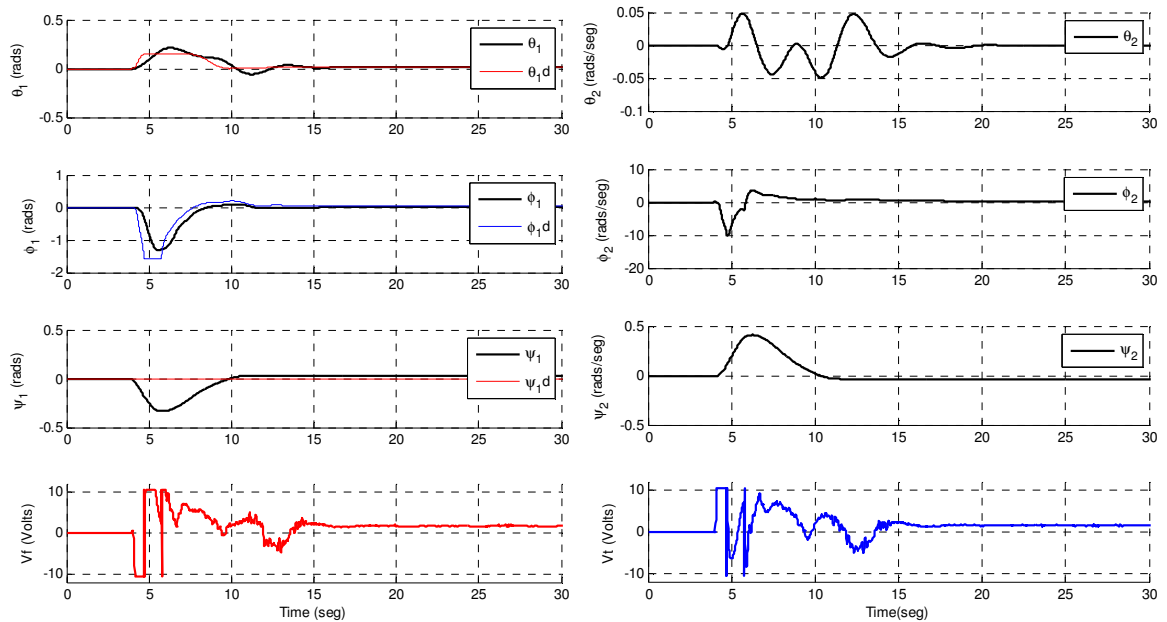


Figura 25. Resultados experimentales del aterrizaje del helicóptero usando planeación de trayectoria.

Puede verse de la figura 25 que el sistema se estabiliza al origen después de 10 segundos aproximadamente. En estado estacionario, se obtuvieron los siguientes porcentajes de error: en elevación, 1.38%; en dirección, 3.22%; en rotación, 2.92%.

### 3.6. Comentarios

Las conclusiones obtenidas de las simulaciones numéricas y de los resultados experimentales se resumen a continuación:

- Los efectos de la fricción no dominan la dinámica del sistema, las ecuaciones (61)-(63) resultan válidas para el sistema físico utilizado, y el controlador  $H_\infty$  suave es suficiente para un adecuado control del sistema.
- Utilizando la linealización exacta, fue posible obtener los sistemas de error lineales e invariantes en tiempo (72) y (82), por lo que el problema de control  $H_\infty$  recurre a la solución de ecuaciones algebraicas de Riccati, y no de ecuaciones diferenciales, por lo que se reduce el costo computacional de la implementación.
- Los subsistemas totalmente actuados (72) y (82) se encuentran desacoplados, lo que permitió el desarrollo de los controladores independientes (74), (76), (84) y (86); como consecuencia, se pudieron modificar de manera individual los parámetros  $\gamma$  y  $\rho$  de cada controlador, obteniendo así un mayor control sobre la atenuación de perturbaciones en cada caso.
- Las figuras 13, 14, 17 y 18 muestran que el controlador  $H_\infty$  suave presenta una buena atenuación de las perturbaciones, pues a pesar de la simplicidad de los modelos utilizados y la incertidumbre de sus parámetros, las trayectorias del sistema convergen asintóticamente a las trayectorias deseadas en cada caso.
- La aplicación de un control virtual permitió el control del movimiento de rotación, el cual no tiene un actuador propio, a partir del movimiento de dirección. A pesar de que el controlador virtual se encuentra acotado (pues depende de una función arco-seno), a partir de la figura 22 se puede observar cualitativamente un amplio intervalo de acción del controlador, considerando una desviación de 0.6rad (34°) en  $\psi_1$ .
- Utilizando el resultado de la sección 3.4, y de planeación de trayectoria, fue posible estabilizar el sistema subactuado al origen, sin necesidad de diseñar un controlador nuevo y (probablemente) más complicado para el sistema descrito en la ecuación (90) (Ishutkina, 2004).

## Capítulo 4

### Control $H_\infty$ no suave de robots manipuladores con fricción

En este capítulo se presentan los resultados existentes para el control  $H_\infty$  no suave de robots manipuladores con fricción, con el fin de sentar las bases para la propuesta de un controlador discontinuo. Utilizando la formulación de Lagrange, se presenta la formulación matemática del problema de control  $H_\infty$  no suave; el modelo de fricción elegido para el desarrollo fue el modelo dinámico de Dahl. Finalmente, se presentan las soluciones a los problemas de regulación y seguimiento de trayectoria.

#### 4.1. Modelado de manipuladores con fricción

Los robots manipuladores considerados en esta sección consisten de manipuladores con fricción, cuyos eslabones están unidos por articulaciones rotacionales. Un modelo matemático para un manipulador de  $n$ -GDL ( $n$  grados de libertad) está dado por (Kelly y Santibáñez, 2005):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + w_1 \quad (93)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  es la posición,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es la entrada de control,  $w_1 \in \mathbb{R}^n$  es la perturbación externa,  $F(\dot{q})$ ,  $G(q)$ ,  $M(q)$  y  $C(q, \dot{q})$  son funciones matriciales de dimensiones apropiadas. Desde un punto de vista físico,  $q$  es un vector de coordenadas generalizadas,  $\tau$  es el vector de torques externos,  $M(q)$  es una matriz de inercia, simétrica y definida positiva para toda  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $G(q)$  es el vector de torques gravitacionales, los componentes  $F_i(\dot{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de  $F(\dot{q})$  son las fuerzas de fricción que actúan independientemente en cada articulación.

Las funciones  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$ , son dos veces continuamente diferenciables, mientras que las fuerzas de fricción son representadas por la combinación:

$$F_i = \sigma_0 \dot{q}_i + F_{di}, \quad i = 1, \dots, n \quad (94)$$

donde  $\sigma_0 \dot{q}_i$  es la fricción viscosa y  $F_{di}$  es la fricción de Dahl, gobernada por el siguiente modelo dinámico:

$$\dot{F}_{di} = \sigma_{1i} \dot{q}_i - \sigma_{1i} |\dot{q}_i| \frac{F_{di}}{F_{ci}} + w_{di}, \quad (95)$$

donde  $\sigma_{0i} > 0$ ,  $\sigma_{1i} > 0$ , y  $F_{ci} > 0$ , son los coeficientes de fricción viscosa, la rigidez, y el nivel de fricción de Coulomb, respectivamente, correspondiente al  $i$ -ésimo eslabón del manipulador;  $w_{di}$  es una perturbación externa la cual se agrega debido a la inexactitud del modelo de fricción.

Debido al uso del modelo de fricción de Dahl, la dinámica del modelo es no suave. Las relaciones anteriores pueden ser expresadas de manera vectorial de la siguiente manera:

$$F = \sigma_0 \dot{q} + F_d \quad (96)$$

$$\dot{F}_d = \sigma_1 \dot{q} - \sigma_1 \text{diag}\{|\dot{q}_i|\} F_c^{-1} F_d + \sigma_1 w_2 \quad (97)$$

donde  $F = \text{col}\{F_i\}$ ,  $F_d = \text{col}\{F_{di}\}$ ,  $q = \text{col}\{q_i\}$ ,  $\sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0i}\}$ ,  $\sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_{1i}\}$ ,  $F_c = \text{diag}\{F_{ci}\}$ ,  $w_2 = \text{col}\{w_{2i}\}$ ,  $w_{2i} = \sigma_{1i} w_{di}$  donde la notación “*col*” se refiere a un vector columna y “*diag*” una matriz diagonal.

## 4.2. Problema de seguimiento en manipuladores con fricción

El objetivo de esta sección es diseñar un controlador de la forma:

$$\tau = \tau_d + u, \quad (98)$$

que imponga en el manipulador libre de perturbaciones la trayectoria deseada ( $q_d(t)$ ), con las propiedades de estabilidad deseadas alrededor de  $q_d(t)$ , mientras también atenúen localmente el efecto de las perturbaciones.

Si se supone que la trayectoria deseada  $q_d(t) = \text{col}\{q_{di}(t)\}$  para el robot manipulador a seguir es dos veces continuamente diferenciable, las funciones  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{q}_d(t)$ , son uniformemente acotadas en  $t$ . Entonces si no hay perturbaciones externas, el movimiento deseado puede aplicarse usando el torque externo:

$$\tau_d = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) + F_n(t), \quad (99)$$

donde  $F_n(t) = \text{col}\{F_{ni}\}$  es la fuerza de fricción nominal:

$$\dot{F}_{nd} = \sigma_1 \dot{q}_d - \sigma_1 \text{diag}\{|\dot{q}_{di}|\} F_c^{-1} F_{nd} \quad (100)$$

sujeta a la condición inicial  $F_{nd}(t_0) = 0$  en algún instante  $t_0 \in \mathbb{R}$  (la ausencia de perturbaciones externas significa que  $q(t_0) = q_d(t_0)$ ,  $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_d(t_0)$ ,  $F_d(t_0) = 0$ , y  $w_1 = w_2 = 0$ ).

El siguiente análisis se confina al problema de seguimiento de posición donde la salida a controlar está dada por:

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_d - q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (101)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$  y mediciones del error de posición:

$$y = q_d - q + w_0 \quad (102)$$

corrompidas por  $w_0(t) \in \mathbb{R}^n$ .

El problema de seguimiento de control  $H_\infty$ , para robots manipuladores con fricción puede ser formalmente establecido como:

dados un sistema mecánico (93)-(102), una trayectoria deseada  $q_d(t)$  a seguir, y un número real  $\gamma > 0$ , encontrar, si existe, un controlador de retroalimentación dinámico y causal (6) con un estado interno  $\xi \in \mathbb{R}^s$ , tal que el sistema en lazo cerrado sin perturbaciones sea asintóticamente estable alrededor de  $q_d(t)$  y su ganancia  $L_2$  es localmente menor que  $\gamma$ , es decir, la desigualdad es satisfecha para toda  $t_1 > t_0$  y toda función continua en piezas  $w(t) = (w_0(t), w_1(t), w_2(t))^T$ , para lo cual la trayectoria del sistema en lazo cerrado iniciando en el punto  $(q(t_0), \dot{q}(t_0), F_d(t_0), \xi(t_0)) = (q_d(t_0), \dot{q}_d(t_0), 0, 0)$  permanezca en alguna vecindad de la trayectoria deseada  $q_d(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

#### 4.2.1. Síntesis del controlador

Dado que se trata de un problema de seguimiento de trayectorias, la primera condición es que las derivadas temporales de las trayectorias ( $\dot{q}_d$ ) cumplan con

$$\dot{q}_{di} \neq 0 \text{ para casi todo } t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (103)$$

Se introducen los vectores de error:

$$\begin{aligned}
 x &= [x_1, x_2, x_3]^T \\
 x_1 &= q_d(t) - q(t) \\
 x_2 &= \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \\
 x_3 &= F_{nd}(t) - F_d(t).
 \end{aligned} \tag{104}$$

A partir de (104), se pueden describir las ecuaciones de estado en términos de las desviaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \ddot{q}_d + M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(\dot{q}_d - x_2) + G(q_d - x_1) \\
 &\quad - M(q_d)\ddot{q}_d - C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - G(q_d) - \sigma_0 x_2 - x_3 - u \\
 &\quad - w_1]
 \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= \sigma_1 x_2 - \sigma_1 \text{diag}\{|q_{di} - x_{2i}|\} F_c^{-1} x_3 \\
 &\quad + \sigma_1 [\text{diag}\{|q_{di} - x_{2i}|\} - \text{diag}\{|q_{di}|\}] F_c^{-1} F_{nd}(t) - w_2
 \end{aligned}$$

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{106}$$

$$y = x_1 + w_0. \tag{107}$$

Dado que para casi toda  $t$ , el lado derecho de las ecuaciones de error (105) son dos veces continuamente diferenciables en  $x$  localmente alrededor del origen  $x = 0$ , el problema de seguimiento  $H_\infty$  viene dado por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
& f_1(x, t) \\
& = \left[ \begin{array}{c} \ddot{q}_d + M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(\dot{q}_2 - x_2) + G(q_d - x_1) - M(q_d)\ddot{q}_d - C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - G(q_d) - \sigma_0 x_2 - x_3] \\ \sigma_1 x_2 - \sigma_1 \text{diag}\{\dot{q}_{di} - x_{2i}\}F_c^{-1}x_3 + \sigma_1[\text{diag}\{\dot{q}_{di} - x_{2i}\} - \text{diag}\{\dot{q}_{di}\}]F_c^{-1}F_{nd}(t) \end{array} \right] \\
& f_2(x, t) = 0, \quad g_1(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1}(q_d - x_1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{108}$$

$$g_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}(q_d - x_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1, \quad k_{12}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_{21} = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Aplicando el teorema 2.2 al sistema anteriormente especificado, se deriva en (Aguilar et al., 2003) una solución local del problema de seguimiento  $H_\infty$ .

**Teorema 4.1.** *Si las siguientes condiciones se satisfacen:*

- 1) (103) se mantiene para cualquier trayectoria deseada a seguir
- 2) (C1) y (C2) se mantienen para las matrices  $A, B_1, B_2, C_1, C_2$ , gobernadas por (33), (108) y permita que  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  sea la solución positiva definida y acotada de (38), (39), bajo cierto  $\varepsilon > 0$ , entonces la retroalimentación de salida:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t) g_1^T(\xi, t) \right] P_\varepsilon(t) \xi \\
&\quad - [g_2(\xi, t) g_2^T(\xi, t)] P_\varepsilon(t) \xi \\
&\quad + Z_\varepsilon(t) C_2^T [y(t) - h_2(\xi, t)] \\
\end{aligned} \tag{109}$$

$$u = -g_2^T(\xi, t) P_\varepsilon(t) \xi \tag{110}$$

sujeta a (108), es una solución local del problema de seguimiento de posición con  $H_\infty$  para el manipulador mecánico con fricción (93)-(102).



### 4.3. Problema de regulación en manipuladores con fricción

El objetivo de esta sección es diseñar un controlador de la forma:

$$\tau = \tau_d + u, \quad (111)$$

que imponga en el manipulador libre de perturbaciones la posición deseada ( $q_d$ ), con las propiedades de estabilidad deseadas alrededor de  $q_d$ , mientras también atenúen localmente el efecto de las perturbaciones.

Si no hay perturbaciones externas ni diferencia en las condiciones iniciales entre las trayectorias del sistema y las deseadas, el movimiento deseado puede aplicarse usando el torque externo:

$$\tau_d = G(q_d), \quad (112)$$

donde la ausencia de perturbaciones externas y la igualdad de condiciones iniciales en las trayectorias significa que  $q(t_0) = q_d(t_0)$ ,  $\dot{q}(t_0) = 0$ ,  $F_d(t_0) = 0$ , y  $w_1 = w_2 = 0$ .

El siguiente análisis se confina al problema de regulación de posición donde la salida a controlar esta dada por:

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_d - q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (113)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$  y mediciones de posición

$$y = q_d - q + w_0 \quad (114)$$

corrompidas por  $w_0(t) \in \mathbb{R}^n$ .

### 4.3.1. Síntesis del controlador

Dado que se trata de un problema de seguimiento de trayectorias, la primera condición es que

$$\dot{q}_{di} = 0 \text{ para todo } t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (115)$$

Se definen los vectores de error:

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, x_3]^T \\ x_1 &= q_d(t) - q(t) \\ x_2 &= -\dot{q}(t) \\ x_3 &= -F_d(t). \end{aligned} \quad (116)$$

A partir de (116), se pueden describir las ecuaciones de estado (93) en términos de las desviaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(x_2) - G(q_d - x_1) + G(q_d) \\ &\quad + \sigma_0 x_2 + x_3 + u + w_1] \\ \dot{x}_3 &= \sigma_1 x_2 - \sigma_1 \text{diag}\{|x_{2i}|\} F_c^{-1} x_3 - w_2 \end{aligned} \quad (117)$$

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (118)$$

$$y = x_1 + w_0, \quad (119)$$

donde puede verse que ahora, al contrario del problema de seguimiento presentado en la sección 4.2.1, las ecuaciones de error (105) presentan una función no trivial no suave  $f_2(x, t) \neq 0$ , es decir:

$$f_1(x, t) = \begin{bmatrix} -M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(x_2) - G(q_d - x_1) + G(q_d) + \sigma_0 x_2 + x_3] \\ \sigma_1 x_2 - \sigma_1 \text{diag}\{|q_{di} - x_{2i}|\} F_c^{-1} x_3 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_1 \text{diag}\{|x_{2i}|\} F_c^{-1} x_3 \end{bmatrix}$$

$$g_1(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1}(q_d - x_1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$g_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}(q_d - x_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1, \quad k_{12}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (120)$$

$$k_{21} = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Por lo tanto, ahora se aplica el teorema (Aguilar et al., 2003):

**Teorema 4.2.** *Si las condiciones (C1') y (C2') se mantienen para las matrices  $A, B_1, B_2, C_1, C_2$ , gobernadas por (33), (108) y suponga que  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  es la solución positiva definida de (47), (48), bajo algún  $\varepsilon > 0$  entonces la retroalimentación de salida:*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & f_1(\xi) + f_2(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi \\ & + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)] \end{aligned} \quad (121)$$

$$u = -g_2^T(\xi)P_\varepsilon\xi \quad (122)$$

*sujeta a (120), es una solución local del problema de regulación de posición con  $H_\infty$  para el manipulador mecánico con fricción (93)-(102).*

#### **4.4. Comentarios**

En este capítulo se presentó una solución previa al problema de control  $H_\infty$  no suave, con aplicación a robots manipuladores modelados con fricción de Dahl; sin embargo, dada la naturaleza de este desarrollo, puede ser aplicado también a manipuladores modelados con fricción de LuGre. Recordando que ambos modelos dinámicos describen de manera más exacta los efectos de la fricción para deslizamientos pequeños y en el régimen de baja velocidad, este desarrollo permite controlar con mayor precisión manipuladores donde los efectos de la fricción no son despreciables.

Sin embargo, el controlador presentado es un controlador dinámico, el cual requiere la solución de un par de ecuaciones diferenciales de Riccati, lo cual incrementa de manera considerable el costo computacional de su implementación, pues deben resolverse  $2n^2$  ecuaciones diferenciales (donde  $n$  es igual al número de grados de libertad del manipulador). Por lo tanto, en el siguiente capítulo se aprovechará la teoría aquí presentada para el desarrollo de un controlador con un menor costo computacional de implementación, y que al mismo tiempo permita controlar de manera adecuada manipuladores con fricción.

## Capítulo 5

### Control $H_\infty$ discontinuo de robots manipuladores con fricción

A partir del desarrollo planteado en el capítulo anterior, en este capítulo se propone una extensión del controlador  $H_\infty$  no suave con la finalidad de controlar sistemas con modelos de fricción discontinuos, como el modelo de fricción de Coulomb. Al utilizar un modelo estático, el orden del sistema en lazo cerrado se mantiene igual al de la planta, en comparación al uso de un modelo de fricción dinámico, el cual aumenta el orden del sistema en lazo cerrado en uno por cada grado de libertad a controlar, aumentando así el costo computacional de la implementación del controlador.

#### 5.1. Modelado de manipuladores con fricción seca

En esta sección se retoma el modelo matemático para un manipulador de  $n$  grados de libertad, dado por:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + w_1 \quad (123)$$

donde las matrices y vectores fueron definidos en la sección anterior, con la diferencia de que el modelo de fricción a considerarse será el modelo de fricción estático de Coulomb aumentado con fricción viscosa como en (52), el cual se describe a continuación

$$F_i = \sigma_{0i}\dot{q}_i + F_{Ci}\text{sign}(\dot{q}_i) + w_{2i}, \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $\sigma_{0i} > 0$  y  $F_{Ci} > 0$  son el coeficiente de fricción viscosa y el nivel de fricción de Coulomb, respectivamente, correspondiente al  $i$ -ésimo eslabón;  $w_{2i}$  es una

perturbación externa que considera las incertidumbres en el modelado de la fricción.

Las relaciones anteriores pueden ser expresadas de manera vectorial de la siguiente manera:

$$F = \sigma_0 \dot{q} + F_c \text{sign}(\dot{q}) + w_2 \quad (124)$$

donde  $F = \text{col}\{F_i\}$ ,  $q = \text{col}\{q_i\}$ ,  $\sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0i}\}$ ,  $F_c = \text{diag}\{F_{ci}\}$ ,  $w_2 = \text{col}\{w_{2i}\}$ , donde la notación “col” se refiere a un vector columna y “diag” una matriz diagonal.

Dado que la fricción de Coulomb es solamente función del signo de la velocidad, su dinámica es discontinua. Esto lleva a que (123) sea una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo, la cual puede ser analizada en el sentido de Filippov (1988).

### 5.1.1. Aproximación del modelo de Dahl al modelo de Coulomb

A continuación se planteará una aproximación al modelo estático de Coulomb a partir del modelo dinámico de Dahl, la cual permitirá el desarrollo del controlador de las próximas secciones.

Recordando el modelo de fricción de Dahl

$$\dot{F}_{di} = \sigma_{1i} \dot{q}_i - \sigma_{1i} |\dot{q}_i| \frac{F_{di}}{F_{ci}} + \sigma_{1i} w_{di}, \quad (125)$$

reordenando sus términos, y considerando el límite cuando  $\sigma_{1i}$  tiende a cero, se llega a

$$\lim_{\sigma_{1i} \rightarrow \infty} \frac{F_{di}}{\sigma_{1i}} = 0 = \dot{q}_i - |\dot{q}_i| \frac{F_{di}}{F_{ci}} + w_{di} \quad (126)$$

$$F_{di} = F_{ci} \text{sign}(\dot{q}_i) + w_{2i}. \quad (127)$$

Esta última ecuación es idéntica al modelo de Coulomb presentado anteriormente, e indica que el modelo de Coulomb es el caso límite del modelo de Dahl cuando el parámetro  $\sigma_{1i}$  tiende a infinito, lo cual implica este último pierde su dinámica interna y se convierte en un modelo estático. Esto puede apreciarse gráficamente en la figura 26, donde se muestra que conforme aumenta el parámetro  $\sigma_1$ , la forma de la grafica de la fricción se aproxima cada vez más a las grafica de la función signo, característica de la fricción de Coulomb.

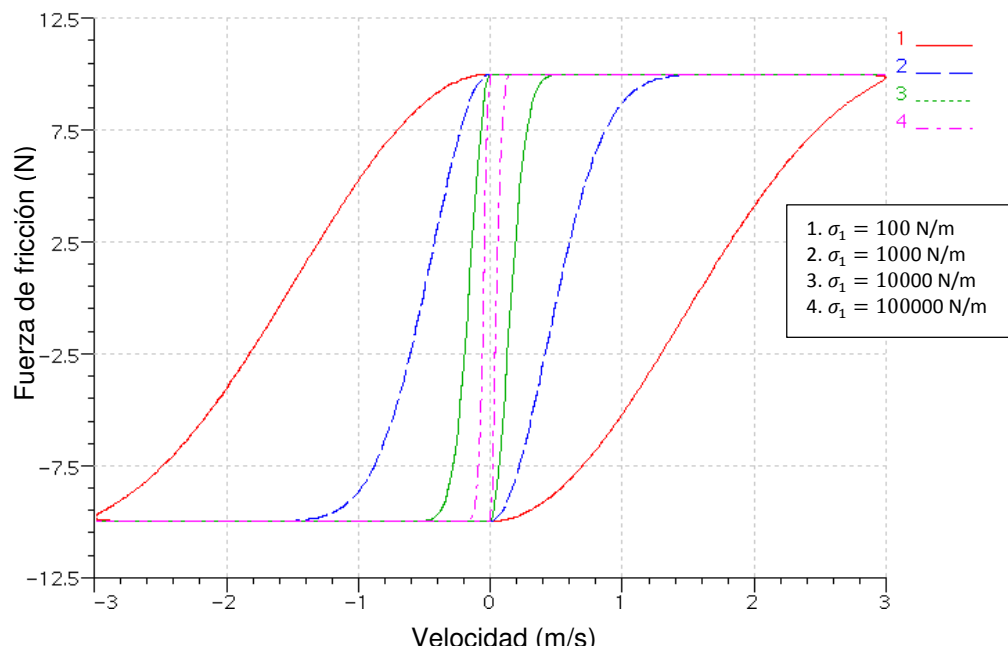


Figura 26. Aproximación del modelo de fricción de Dahl al modelo de Coulomb cuando  $\sigma_1$  tiende a infinito.

Siguiendo esta idea, el siguiente compensador es un caso límite de (99) cuando el parámetro  $\sigma_1$  tiende a infinito

$$\tau_d = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) + \sigma_0\dot{q}_d + F_c \text{sign}(\dot{q}_d). \quad (128)$$

## 5.2. Problema de seguimiento en manipuladores con fricción de Coulomb

Utilizando el enfoque de la sección anterior, se pretende diseñar un controlador de seguimiento para el sistema (123)-(124) de la forma:

$$\tau = \tau_d + u, \quad (129)$$

que imponga en el manipulador libre de perturbaciones la trayectoria deseada  $(q_d(t))$ , con las propiedades de estabilidad deseadas alrededor de  $q_d(t)$ , mientras también localmente atenúe el efecto de las perturbaciones.

Si se supone que la trayectoria deseada  $q_d(t) = \text{col}\{q_{di}(t)\}$  para el robot manipulador a seguir es dos veces continuamente diferenciable, las funciones  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{q}_d(t)$ , son uniformemente acotadas en  $t$ . Entonces si no hay perturbaciones externas ni iniciales, el movimiento deseado puede aplicarse usando el torque externo

$$\tau_d = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) + \sigma_0\dot{q}_d + F_c \text{sign}(\dot{q}_d), \quad (130)$$

donde la única diferencia entre (128) y (130) es el término de compensación  $\sigma_0\dot{q}_d$ . Dado que solamente se van a usar mediciones de posición, el término  $\dot{q}_d$  usado en este compensador será obtenido de la expresión



$$\dot{q} = \dot{q}_d - \xi_2 \quad (131)$$

donde  $\xi_2$  es el error estimado de velocidad obtenido por el filtro (121) del controlador.

El siguiente análisis se confina al problema de regulación de posición donde la salida a controlar está dada por:

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_d - q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (132)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$  y mediciones de posición

$$y = q_d - q + w_0 \quad (133)$$

corrompidas por  $w_0(t) \in \mathbb{R}^n$ .

El problema de control de posición con  $H_\infty$  para robots manipuladores con fricción de Coulomb puede ser formulado formalmente de la siguiente manera. Dado un sistema mecánico (123)-(124), (129)-(133), una trayectoria deseada  $q_d(t)$  a seguir, y un número real  $\gamma > 0$  se requiere encontrar (si existe) un controlador retroalimentado dinámico y causal (6) con estado interno  $\xi \in \mathbb{R}^s$ , tal que el sistema no perturbado en lazo cerrado sea uniformemente asintóticamente estable alrededor de  $q_d(t)$ ; además que su ganancia  $L_2$  sea localmente menor que  $\gamma$ , es decir, que la desigualdad (7) se satisfaga para todo  $t_1 > t_0$  y todas las funciones continuas en piezas  $w(t) = (w_0(t), w_1(t), w_2(t))^T$  para los cuales las trayectorias del sistema en lazo cerrado que partan del punto inicial  $(q(t_0), \dot{q}(t_0), \xi(t_0)) = (q(t_0), \dot{q}(t_0), 0)$  permanezcan en alguna vecindad de la trayectoria deseada  $q_d(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

### 5.2.1. Síntesis del controlador

Dado que se trata de un problema de seguimiento de trayectorias, la primera condición es que las derivadas temporales de las trayectorias ( $\dot{q}_d$ ) cumplen con

$$\dot{q}_{di} \neq 0 \text{ para todo } t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (134)$$

Se introducen los vectores de error:

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, x_3]^T \\ x_1 &= q_d(t) - q(t) \\ x_2 &= \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (135)$$

A partir de (135), se pueden describir las ecuaciones de estado en términos de las desviaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q}_d + M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(\dot{q}_d - x_2) + G(q_d - x_1) \\ &\quad + F_C \text{sign}(\dot{q}_d - x_2) - M(q_d)\ddot{q}_d - C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - G(q_d) \\ &\quad - F_C \text{sign}(\dot{q}_d) - u - w_1] \end{aligned} \quad (136)$$

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (137)$$

$$y = x_1 + w_0, \quad (138)$$

donde puede verse que ahora, las ecuaciones de error (136) presentan una función no trivial discontinua, de tal forma que el problema de control de seguimiento con  $H_\infty$  puede ser planteado como:

$$\begin{aligned}
f_1(x, t) &= \left[ \begin{array}{c} \dot{q}_d + M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(\dot{q}_2 - x_2)] \\ + \left[ M^{-1}(q_d - x_1) \begin{array}{c} 0 \\ G(q_d - x_1) - M(q_d)\ddot{q}_d \end{array} \right] \\ + \left[ M^{-1}(q_d - x_1) \begin{array}{c} 0 \\ -C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - G(q_d) \end{array} \right] \end{array} \right] \\
f_2(x, t) &= \left[ M^{-1}(q_d - x_1) \begin{array}{c} 0 \\ F_C \text{sign}(\dot{q}_d - x_2) - F_C \text{sign}(\dot{q}_d) \end{array} \right], \\
g_1(x, t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1}(q_d - x_1) \end{bmatrix}, \\
g_2(x, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}(q_d - x_1) \end{bmatrix}, \\
h_1(x) &= \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1, \quad k_{12}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
k_{21} &= [1 \quad 0 \quad 0]
\end{aligned} \tag{139}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema 4.2 al sistema de error (136)-(138), la retroalimentación de salida:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= f_1(\xi) + f_2(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi \\
&\quad + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)]
\end{aligned} \tag{140}$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi \tag{141}$$

sujeta a (139), es una solución local del problema de seguimiento de posición con  $H_\infty$  para el manipulador mecánico con fricción (123)-(124), (132)-(133). Dado que se está aproximando el modelo de Dahl al modelo de Coulomb,  $f_2(x, t)$  contiene los términos discontinuos en lugar de los términos no suaves.



## Capítulo 6

### Control $H_\infty$ discontinuo de un robot manipulador de 3 grados de libertad

#### 6.1. Introducción

En este capítulo, los resultados obtenidos del capítulo anterior serán aplicados a un robot manipulador de tres grados de libertad. Se mostrarán las ventajas y desventajas de la aplicación del método de control  $H_\infty$  discontinuo contra sus versiones original y no suave, para un objetivo de control de seguimiento de trayectoria. El manipulador elegido cuenta con un sistema de transmisión mediante engranajes y cadenas, y el impacto de la fricción es considerable, lo cual lo hace ideal para la aplicación de este método. El análisis se apoyará en simulaciones numéricas y resultados experimentales.

#### 6.2. Implementación del controlador

El robot manipulador utilizado para la aplicación del controlador  $H_\infty$ -discontinuo es el robot Pegasus fabricado por la compañía Amatrol, el cual se muestra en la figura 27. Este es un brazo robótico servo-articulado de 5 grados de libertad para aplicaciones didácticas (Amatrol, 2012), localizado en el laboratorio de investigación del CITED-IPN. Consta de tres articulaciones rotacionales que forman el brazo, una que gira sobre el eje  $z$  ( $q_1$ ) y dos más que giran sobre el eje  $y$  ( $q_2$  y  $q_3$ ). Los otros dos grados de libertad constituyen la muñeca y las tenazas; sin embargo, nuestro interés se centrará en el movimiento de las tres primeras articulaciones mencionadas.

La transmisión de movimiento para  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  en este manipulador se da a través de cadenas y un juego de engranajes, como se muestra en la figura 28, lo cual constituye la principal fuerza de fricción además de otros efectos no lineales, como el backlash. Cada articulación tiene su propio motor de corriente directa, con una razón de reducción de 19.1:1 para  $q_1$  y  $q_2$ , y 127.8:1 para  $q_3$ .

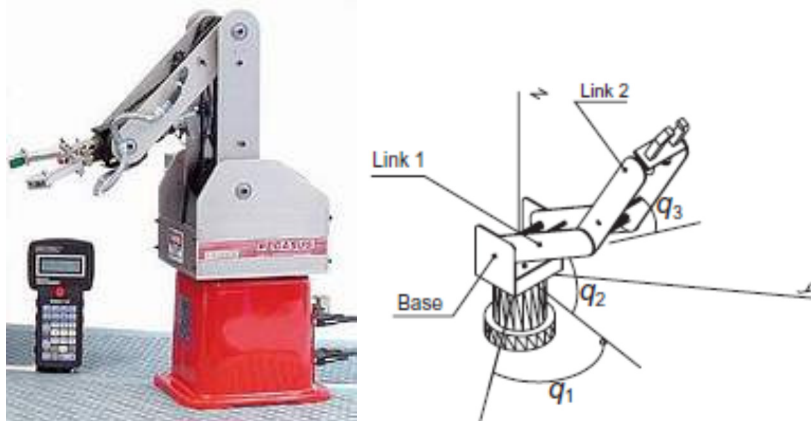


Figura 27. Robot manipulador *Pegasus* de la compañía Amatrol (Aguilar et al., 2003).

Una consideración importante a la hora del diseño del sistema de control es que el manipulador solo cuenta con mediciones de posición, las cuales provienen de los encoders instalados en cada articulación del mecanismo.



Figura 28. Transmisión mediante cadenas y engranajes del manipulador *Pegasus*.

El sistema de control fue implementado de acuerdo al diagrama mostrado en la figura 29. A continuación se desglosan sus componentes:

- Motores de DC con *encoders* de cuadratura marca Pittman serie GM9.
- Tarjeta PCI de adquisición de datos Sensoray 626.
- Computadora Pentium IV.
- Simulador numérico Simulink®.
- Amplificadores lineales con un rango dinámico de  $\pm 10$ volts.

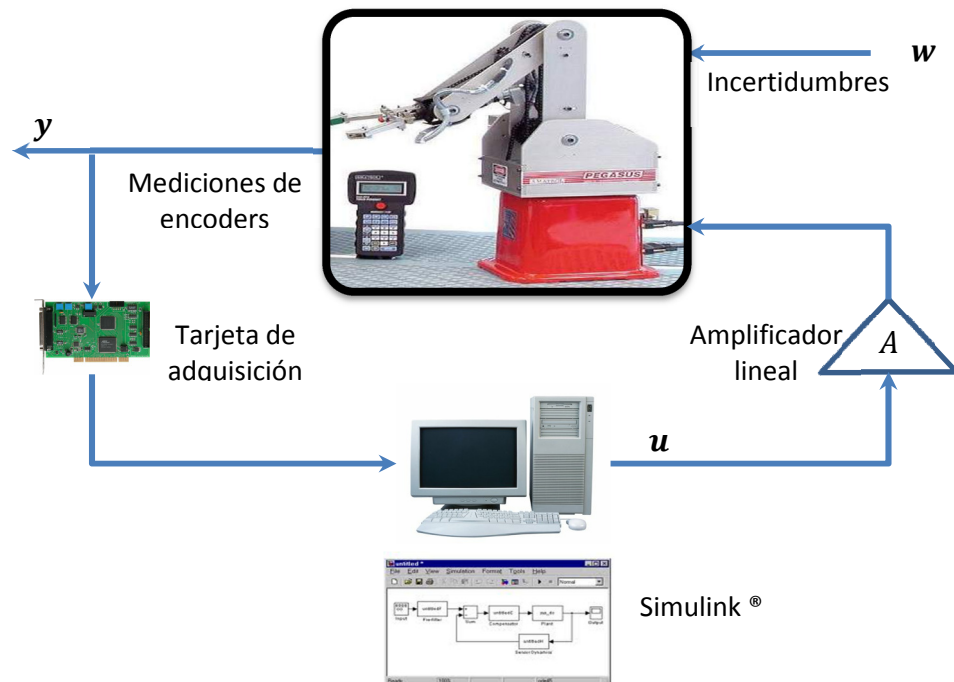


Figura 29. Implementación del controlador al manipulador *Pegasus*.

Las mediciones de posición  $y$  tomadas de los *encoders* del manipulador son capturadas por la tarjeta de adquisición de datos, los cuales son procesados en una computadora mediante un programa elaborado en Simulink®, diseñado para aplicar el controlador  $H_\infty$  conmutado, y a través de la misma tarjeta de adquisición se envían las señales de control  $u$  a un amplificador lineal, el cual envía a los

motores del manipulador el voltaje necesario para que este último realice su tarea, a pesar de las incertidumbres paramétricas  $w$  propias de la identificación.

### 6.3. Modelo dinámico del manipulador

El modelo matemático que se presenta a continuación, el cual posee la estructura de (123), fue tomado de (Orlov, 2004), y se obtiene a través de la formulación de Euler-Lagrange.

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad (142)$$

donde

$$M_{11} = m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) + m_2 l_2^2 \cos^2(q_2 + q_3) + m_2 l_1^2 \cos^2(q_2) + I_1,$$

$$M_{22} = m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_2 + I_3,$$

$$M_{23} = m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_3,$$

$$M_{33} = m_2 l_2^2 + I_3,$$

$$C(q) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (143)$$

donde

$$C_{11} = -m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_2 - m_1 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3),$$

$$C_{12} = -m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_1 - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1 - m_1 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1$$

$$C_{13} = -m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1,$$

$$C_{21} = m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1 + m_1 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1$$

$$C_{22} = -m_2 l_1 l_2 S_3 \dot{q}_3,$$

$$C_{23} = -m_2 l_1 l_2 S_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3),$$



$$C_{31} = m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1,$$

$$C_{32} = m_2 l_1 l_2 S_3 \dot{q}_2,$$

y  $S_i = \sin(q_i)$ ,  $C_i = \cos(q_i)$ ,  $S_{ij} = \sin(q_i + q_j)$ ,  $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$ , y finalmente

$$G(q) = g \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 \cos(q_2) + m_2 l_1 \cos(q_2) + m_2 l_2 \cos(q_2 + q_3) \\ m_2 l_2 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}. \quad (144)$$

Los parámetros físicos  $m_i$ ,  $l_i$ ,  $i = 1,2$  e  $I_j$ ,  $j = 1,2,3$  están dados en la tabla 3 y fueron obtenidos mediante mediciones directas al sistema físico.

Tabla 3. Parámetros del manipulador mecánico.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud articulación 1	$l_1$	0.297	m
Longitud articulación 2	$l_2$	0.297	m
Masa articulación 1	$m_1$	0.38	Kg
Masa articulación 2	$m_2$	0.34	Kg
Inercia 1	$I_1$	$0.243 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
Inercia 2	$I_2$	$0.068 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
Inercia 3	$I_3$	$0.015 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
Gravedad	$g$	9.8	m/s <sup>2</sup>

El coeficiente de fricción viscosa  $\sigma_0$  y el nivel de fricción de Coulomb  $F_C$  utilizados fueron tomados igualmente de (Orlov, 2004), y pueden ser calculados siguiendo la metodología propuesta en (Kelly et al., 2000).

$$\sigma_0 = \text{diag}[9.84, 13.02, 9.87] \text{ Nms/rad}, \quad (145)$$

$$F_C = \text{diag}[2.1, 1.02, 0.78] \text{ Nm}. \quad (146)$$

## 6.4. Simulaciones numéricas

Para las siguientes simulaciones se utilizó el modelo (123) sujeto a (142)-(146). La velocidad inicial  $\dot{q}(0)$  y el estado interno  $\xi(0)$  fueron fijadas a cero para la simulación. Los parámetros utilizados para el controlador se desglosan en la tabla 4.

Tabla 4. Parámetros del controlador discontinuo.

Controlador discontinuo
$\gamma = 125$
$\varepsilon = 0.001$
$\rho = 100$

Los valores de la tabla 4 fueron obtenidos de la siguiente manera: se calculó el valor de  $\gamma^*$  (valor óptimo) iterando sobre las ecuaciones de Riccati asociadas a (136)-(138) bajo (142)-(144), y se eligió un valor  $\gamma$  un poco mayor (subóptimo), para evitar valores muy grandes de la variable de control. Posteriormente, se eligió (también por iteración) un valor positivo muy pequeño  $\varepsilon$  tal que se cumpliera el lema 2.1; por último, las variable de penalidad  $\rho$ , se sintonizó a partir de las simulaciones numéricas, considerando que cuando es grande se obtiene una mayor atenuación de perturbaciones, con la desventaja de un control más grande.

Las trayectorias seleccionadas para las simulaciones fueron  $q_{1d} = \sin(0.5t)\text{rad}$ ,  $q_{2d} = 0.6\sin(0.5t)\text{rad}$ ,  $q_{3d} = 0.4\sin(0.5t)\text{rad}$ . La primera simulación, mostrada en la figura 30, muestra el desempeño del controlador ante el sistema no perturbado. Esta figura muestra que el controlador  $H_\infty$  discontinuo estabiliza asintóticamente el movimiento del sistema hacia la trayectoria deseada. En esta figura también pueden apreciarse las conmutaciones del controlador, en los puntos en los que las velocidades son cero.

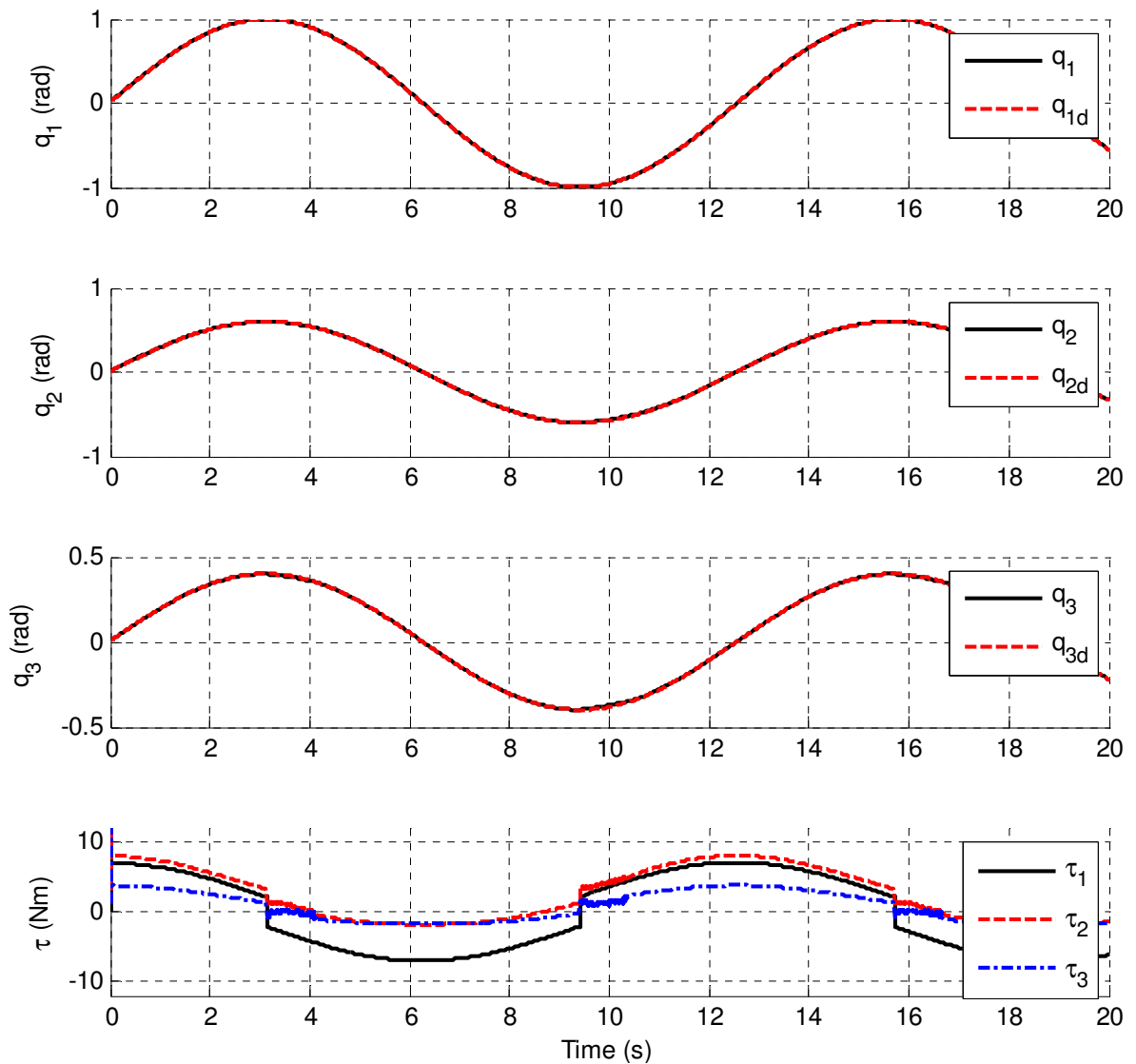


Figura 30. Resultados de simulación del controlador  $H_\infty$  discontinuo para seguimiento del manipulador no perturbado.

La figura 31 muestra la segunda simulación, en la cual el sistema fue perturbado de manera constante con  $w_1 = [1,1,1]^T$  Nm. También, los niveles de fricción de Coulomb de la planta fueron desviados en un 30% de su valor nominal (146) a los valores perturbados  $\hat{F}_c = \text{diag}[2.73, 1.326, 1.014]$  Nm, para simular el efecto del error de modelado. Por tanto, en esta simulación se pretende mostrar el efecto del sistema constantemente perturbado y con un modelo no exacto. Esta figura demuestra que el controlador  $H_\infty$  discontinuo exhibe propiedades favorables de robustez en el sistema en lazo cerrado ante perturbaciones externas y variaciones

paramétricas. El error máximo obtenido con esta simulación fue del 10% a los 9.5seg en la segunda articulación. Todos los otros errores fueron menores a este.

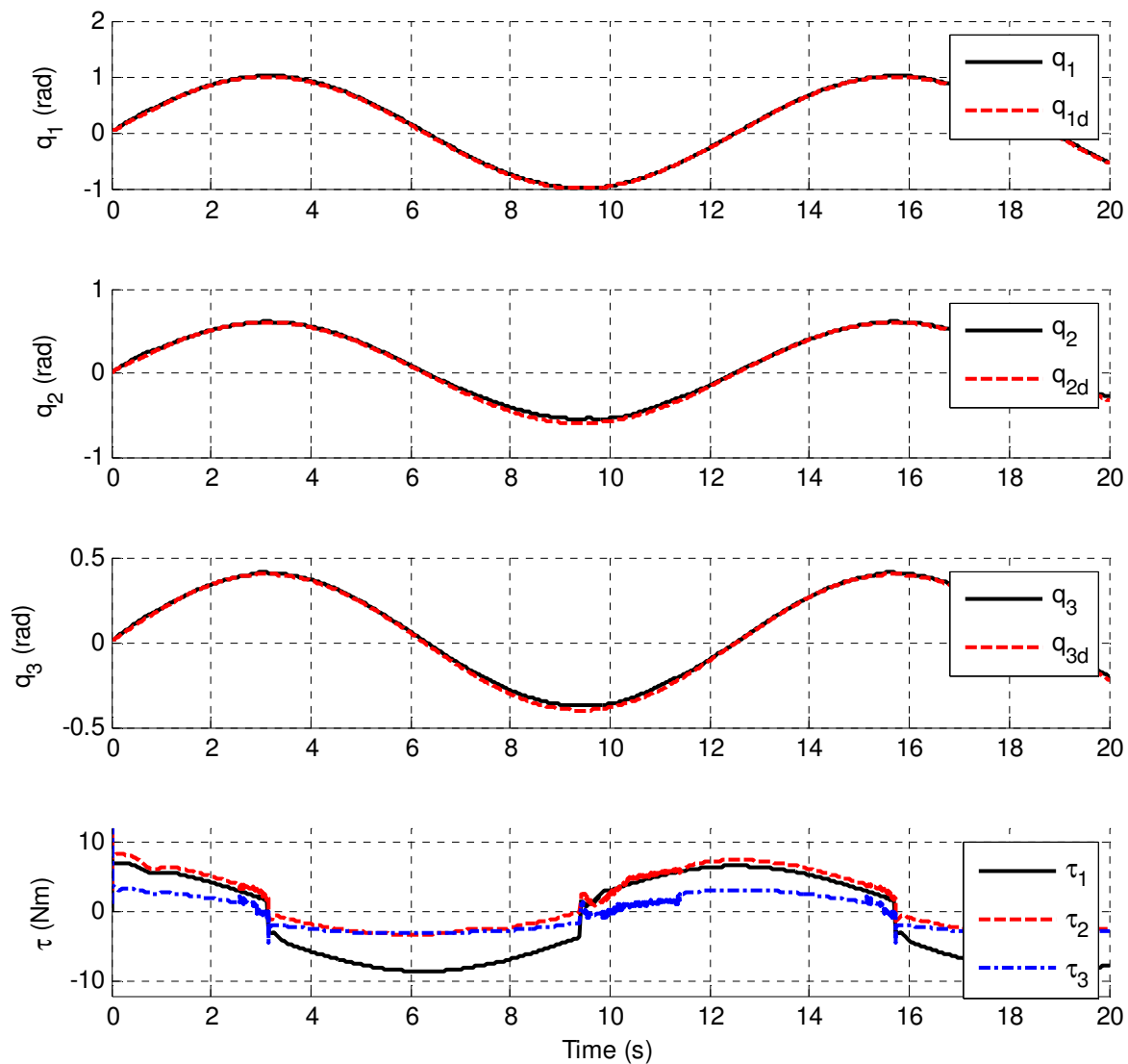


Figura 31. Resultados de la simulación para el controlador  $H_\infty$  conmutado para seguimiento de trayectoria con perturbaciones externas y variaciones en los parámetros de fricción

Finalmente, el controlador fue aplicado a una planta con un 30% de desviación de sus valores nominales mostrados en la tabla 3. Los resultados de la simulación se muestran en la figura 32. Se puede apreciar un muy buen desempeño del

controlador, con menos del 5% de desviación del movimiento del manipulador respecto a la trayectoria deseada.

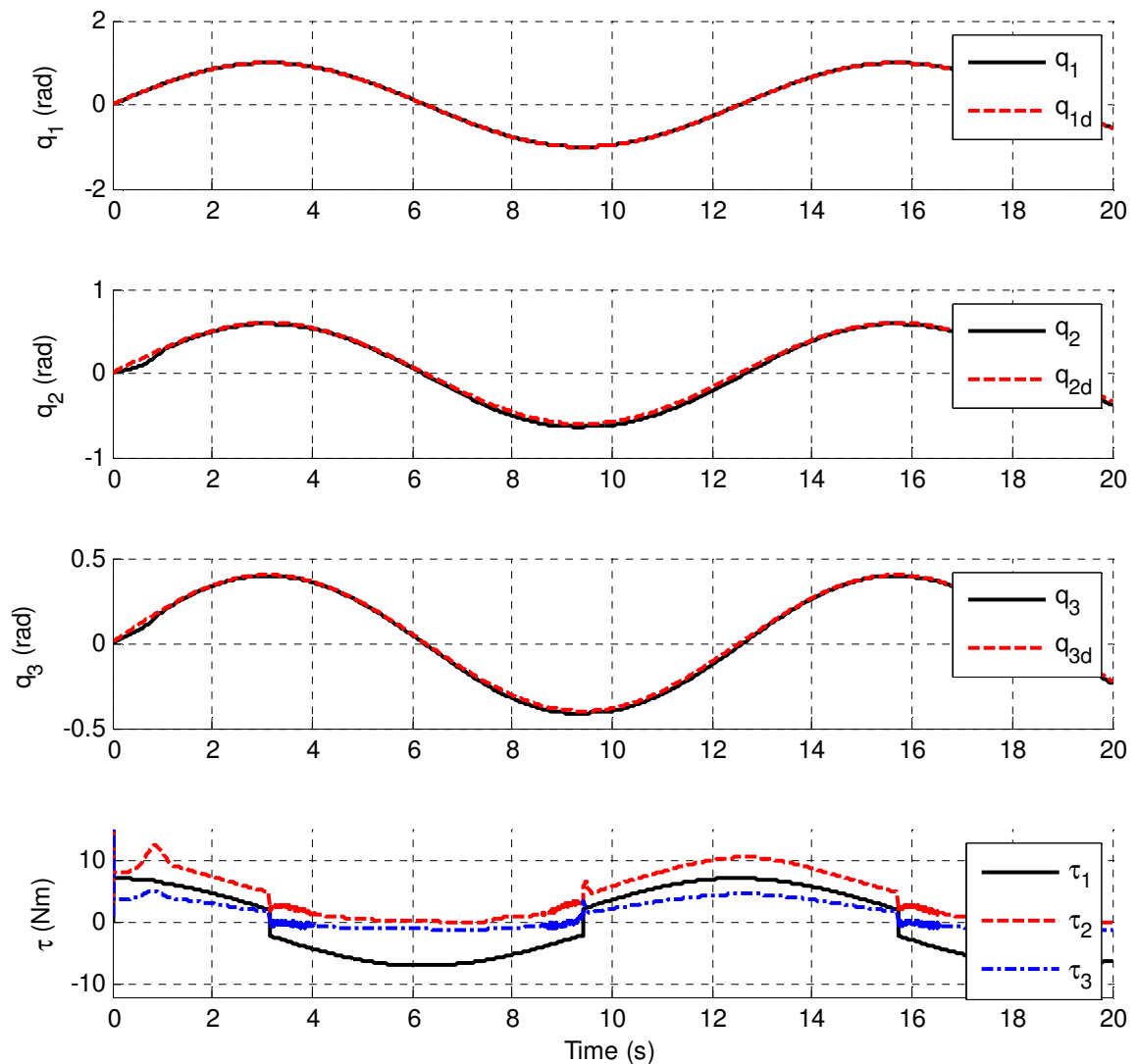


Figura 32. Resultados de las simulaciones para el controlador de seguimiento  $H_\infty$  discontinuo para el sistema con variaciones en los parámetros de la planta

En las figuras 30-32 se muestran las señales de control  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ; éstas presentan discontinuidades cada vez que la velocidad del sistema es cero (puntos máximos y mínimos de la trayectoria). Justo después de la discontinuidad, existe un transitorio en la señal de control (aproximadamente a los 9.5seg), el cual incrementa el error en esta región.

## 6.5. Comparación de desempeño

En esta sección, se compara el desempeño entre los controladores  $H_\infty$  suave,  $H_\infty$  no suave, y la propuesta de controlador  $H_\infty$  discontinuo presentada en este capítulo. En su versión suave, el controlador se diseña para compensar la fricción viscosa, utilizando el mismo parámetro de fricción viscosa  $\sigma_0$  que en (145); en la versión no suave, se considera fricción de Dahl (como en (96)-(97)), utilizando (145) y (146), además del parámetro de rigidez  $\sigma_1 = \text{diag}\{0.054, 0.053, 0.039\}$ , obtenida de (Orlov, 2004); por último, en la versión discontinua se considera la fricción de Coulomb (como en (124)), bajo los parámetros de la sección anterior. En todos los casos se usaron los parámetros de controlador de la tabla 4.

Para hacer una comparación de desempeño justa, los tres controladores se aplicaron en simulación numérica a la misma planta modelada con fricción de LuGre, como se muestra a continuación:

$$F(\dot{q}) = \sigma_0 \dot{q} + \sigma_1 \eta + \sigma_2 \frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \dot{q}_i - \frac{|\dot{q}_i|}{g_i(\dot{q}_i)} \eta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (147)$$

$$\sigma_{1i} g_i(\dot{q}_i) = F_{Ci} + (F_{Si} - F_{Ci}) e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{v_{Si}}\right)^2},$$

donde los parámetros  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  y  $F_C$  son iguales a los anteriormente utilizados. Dado que no se realizaron mediciones para obtener el modelo de LuGre a partir del modelo físico, los parámetros  $\sigma_2$  y  $F_S$  fueron aproximados utilizando las suposiciones generales del modelo de LuGre presentadas en (Johanastrom y Canudas-de-Wit, 2008). Los valores utilizados fueron  $\sigma_2 = \text{diag}\{0.4, 0.28, 0.23\}$  y  $F_S = \text{diag}\{0.4, 0.28, 0.23\}$ .

Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando Simulink®, con 30 segundos de simulación en modo normal. Se utilizó un tiempo de muestreo fijo de 0.5mS, y el método de integración Runge-Kutta. Las pruebas se realizaron con una computadora laptop, con procesador Intel® Core™ i5-2410M de 2.30GHz, con 6GB de RAM. En todos los casos, se planteó el seguimiento de las siguientes trayectorias:

$$\begin{aligned} q_{1d} &= 0.5 \sin(0.5t) \\ q_{2d} &= 0.5 \sin(0.5t) \\ q_{3d} &= 0.5 \sin(0.5t). \end{aligned} \tag{148}$$

En la figura 33, se muestran los errores de posición del sistema no perturbado en lazo cerrado obtenidos bajo la aplicación de cada uno de los tres algoritmos de control.

Los errores más grandes del controlador se dan cerca de las zonas de conmutación, es decir, donde las velocidades del sistema son cero. En general, el desempeño del controlador suave es el peor, obteniendo los errores más grandes; el controlador no suave presenta los errores más pequeños, mientras que el controlador discontinuo se encuentra en un punto intermedio entre los dos.

En base a los resultados de la figura 33, podría concluirse que el desempeño del controlador discontinuo es regular en comparación con su versión no suave. Sin embargo, en la figura 34, se presenta la misma comparación entre los controladores para un sistema perturbado de manera constante con  $w_2 = [-0.5, -0.5, -0.5]^T Nm$ . En esta figura se puede apreciar que las propiedades de robustez del controlador discontinuo planteado son superiores a las de los controladores suave y no suave, exhibiendo una mayor atenuación de perturbaciones.

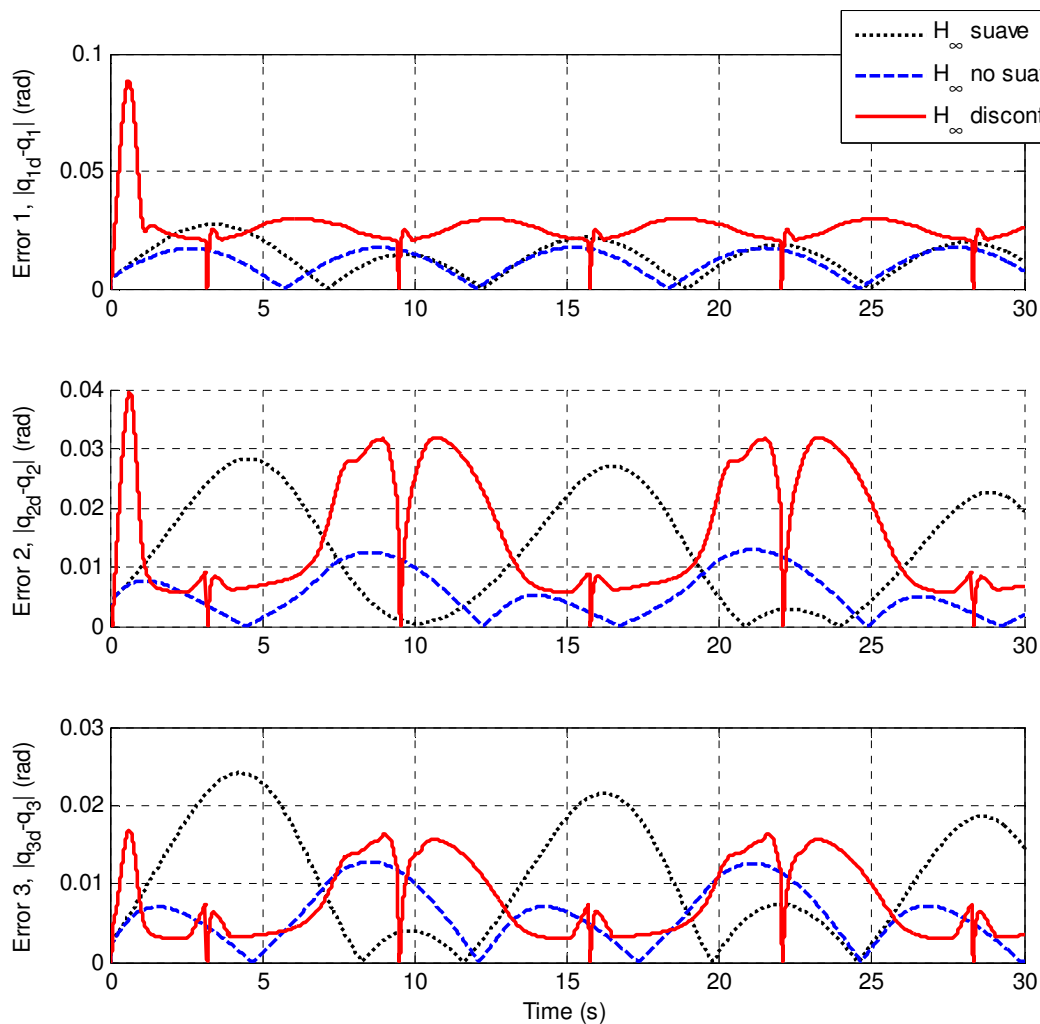


Figura 33. Errores de posición bajo la aplicación los tres diferentes métodos de control  $H_\infty$  a un manipulador de 3GDL no perturbado.

La tabla 5, por otro lado, compara el tiempo que toma planear las trayectorias, calcular las matrices variantes en tiempo  $P_\varepsilon(t)$  y  $Z_\varepsilon(t)$  y aplicar el controlador a la planta, todo de manera simultánea; esto a su vez, representa una medida del costo computacional de la aplicación de cada controlador. Por otro lado, la misma tabla presenta la potencia gastada por el controlador. A partir de esta información, puede verse que el tiempo de cálculo del controlador  $H_\infty$  discontinuo es menor que el de su contraparte no suave; además, para un consumo muy similar de potencia, el controlador discontinuo propuesto es capaz de reducir el error mucho más que los otros dos controladores, como se aprecia en la figura 34.



Tabla 5. Comparación de desempeño entre los controladores  $H_\infty$  en sus versiones suave, no suave y discontinua.

	Control $H_\infty$ Suave	Control $H_\infty$ No suave	Control $H_\infty$ Discontinuo
Tiempo de cálculo (s)	53.1416	74.2237	66.0696
Potencia aplicada al sistema no perturbado (Watts)	20.0541	20.287	21.3973
Potencia aplicada al sistema perturbado (Watts)	21.6469	25.5204	25.9289

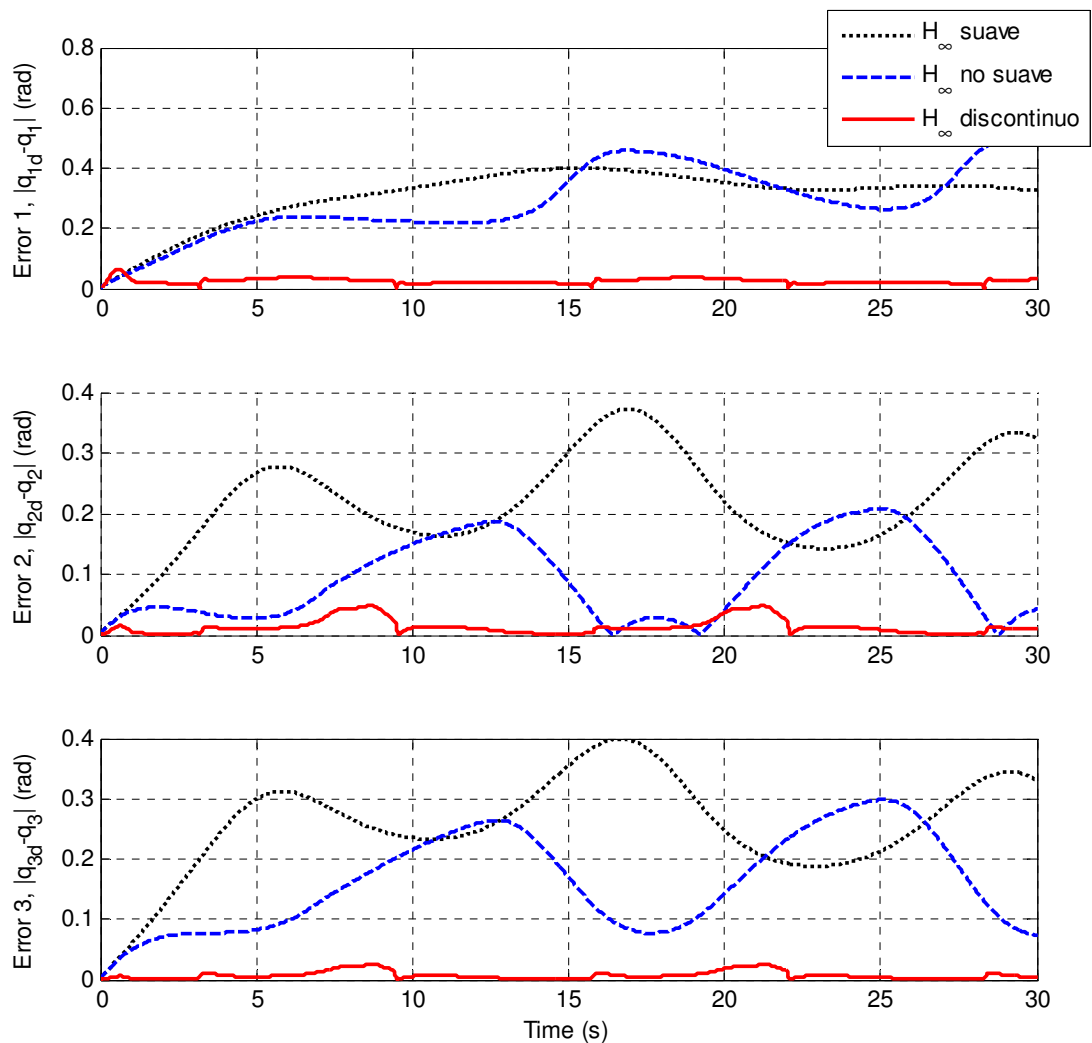


Figura 34. Errores de posición bajo la aplicación los tres diferentes métodos de control  $H_\infty$  a un manipulador de 3GDL perturbado de manera constante.

## 6.6. Resultados experimentales

Los experimentos fueron realizados utilizando el mismo modelo (142)-(146), los parámetros de la tabla 3 y las constantes del controlador de la tabla 4. No fue necesario ningún ajuste adicional, lo cual muestra la robustez del diseño.

Las trayectorias seleccionadas fueron

$$\begin{aligned} q_{1d} &= 0.5 \sin(0.5t) \\ q_{2d} &= 0.4 \sin(t) + 0.4 \\ q_{3d} &= 0.5 \sin(0.5t). \end{aligned} \tag{149}$$

Tanto las trayectorias (149), sus primeras y segundas derivadas, y las matrices variantes en tiempo  $P_\varepsilon(t)$  y  $Z_\varepsilon(t)$ , fueron calculadas fuera de línea, es decir, previa aplicación del controlador; las últimas dos matrices pueden ser calculadas usando las ecuaciones diferenciales (38) y (39), pues solo dependen de la linealización (33), y no del estado presente del sistema. Esto permite reducir el costo computacional de la aplicación del controlador y al mismo tiempo mantener sus propiedades de robustez.

La figura 35 muestra los resultados de la primera implementación al sistema físico: el controlador de seguimiento  $H_\infty$  discontinuo estabiliza asintóticamente al sistema alrededor de la trayectoria deseada, obteniendo un error máximo del 10% en el segundo eslabón (todos los demás errores fueron menores), causado por la inexactitud del modelo.

Posteriormente, se colocó una masa de 0.5kg en el efector final del manipulador, la cual representa una perturbación máxima  $[w_{21}, w_{22}, w_{23}]^T_{max} = [0, 2.91, 1.46]^T Nm$ , y se aplicó nuevamente el controlador para seguir las trayectorias (149). Los resultados de esta implementación se muestran en la figura

36. En esta figura se puede apreciar nuevamente que el sistema sigue las trayectorias de manera cualitativamente aceptable, de nuevo obteniendo un error máximo del 10% en el segundo eslabón, causado por una combinación de la inexactitud del modelo y el torque externo aplicado.

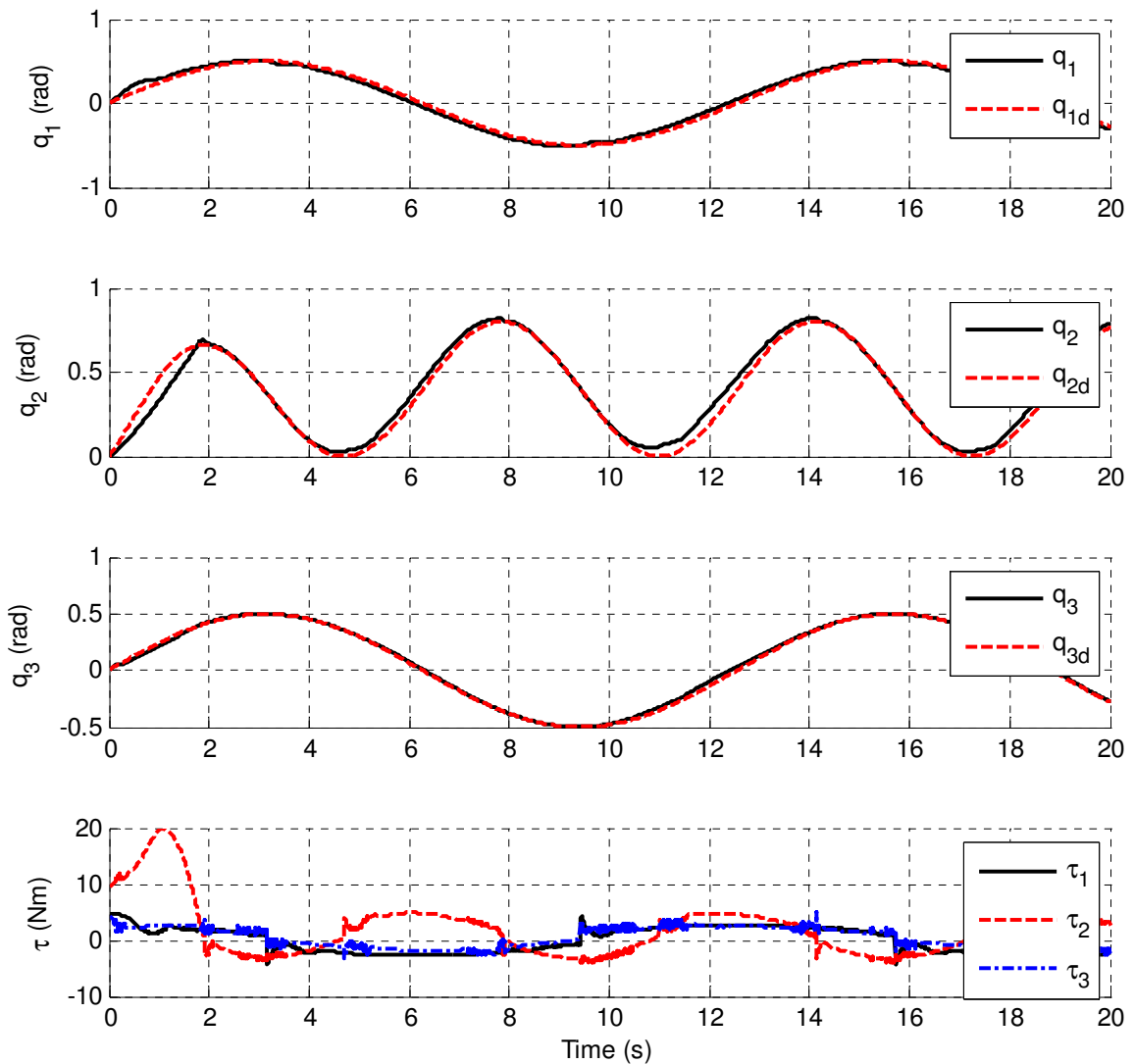


Figura 35. Resultados experimentales para el controlador  $H_\infty$  discontinuo para el seguimiento de trayectorias sinusoidales.

A continuación, se presentan resultados de seguimiento a trayectorias que tienden a una constante. Las trayectorias seleccionadas fueron:

$$\begin{aligned}
 q_{1d} &= 0.6e^{-t} \\
 q_{2d} &= 0.4e^{-t} \\
 q_{3d} &= 0.2e^{-t}
 \end{aligned}
 \tag{150}$$

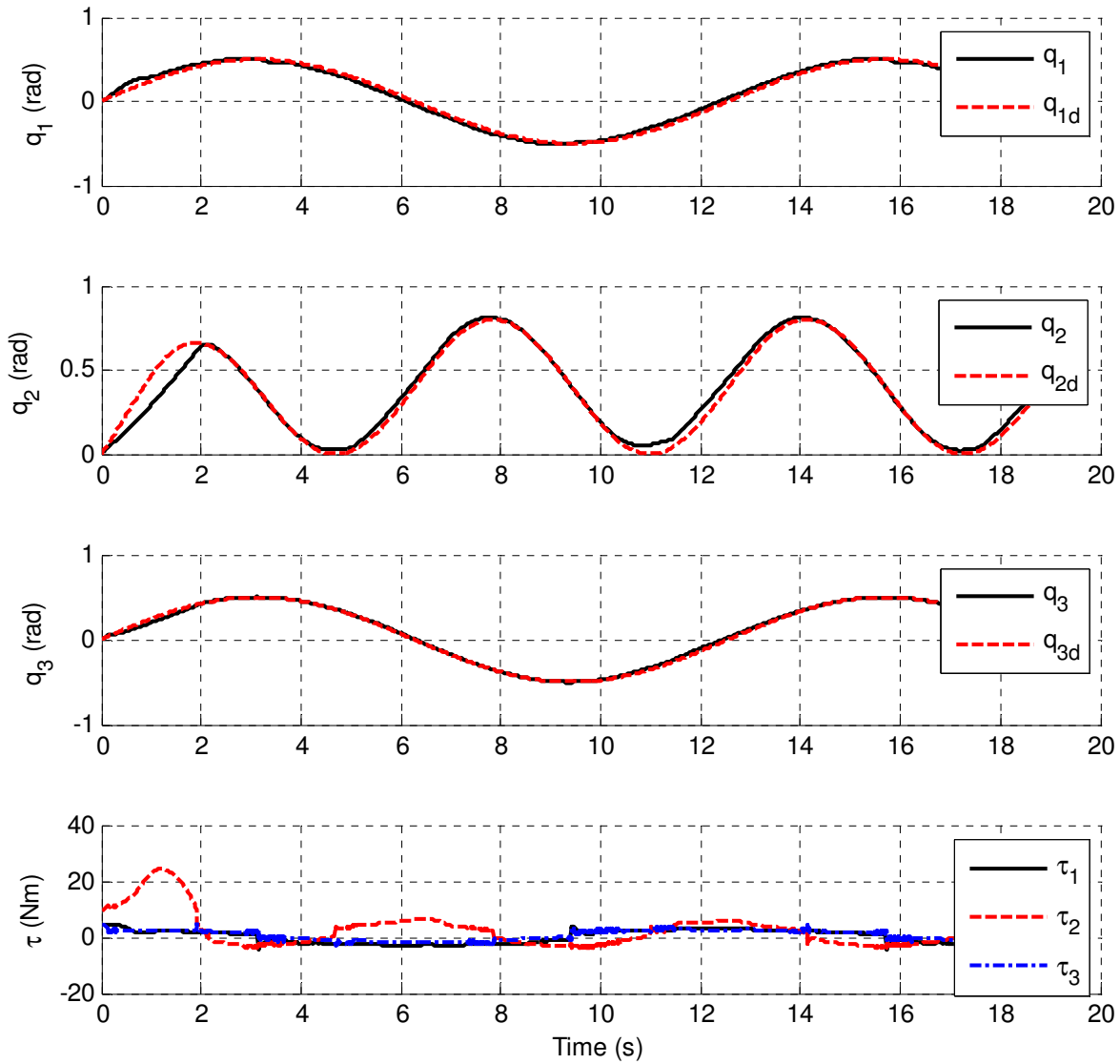


Figura 36. Resultados experimentales para el controlador  $H_\infty$  discontinuo para el seguimiento de trayectorias sinusoidales, con una masa de 0.5Kg en el efector final.

De nuevo, las trayectorias (150), sus primeras y segundas derivadas, y las matrices variantes en tiempo  $P_\varepsilon(t)$  y  $Z_\varepsilon(t)$ , fueron calculadas fuera de línea. Los resultados de esta implementación se muestran en la figura 37. Los errores obtenidos en estado estacionario fueron 1.7% para el primer eslabón, 5.1% para el segundo eslabón, y 1% para el tercer eslabón.

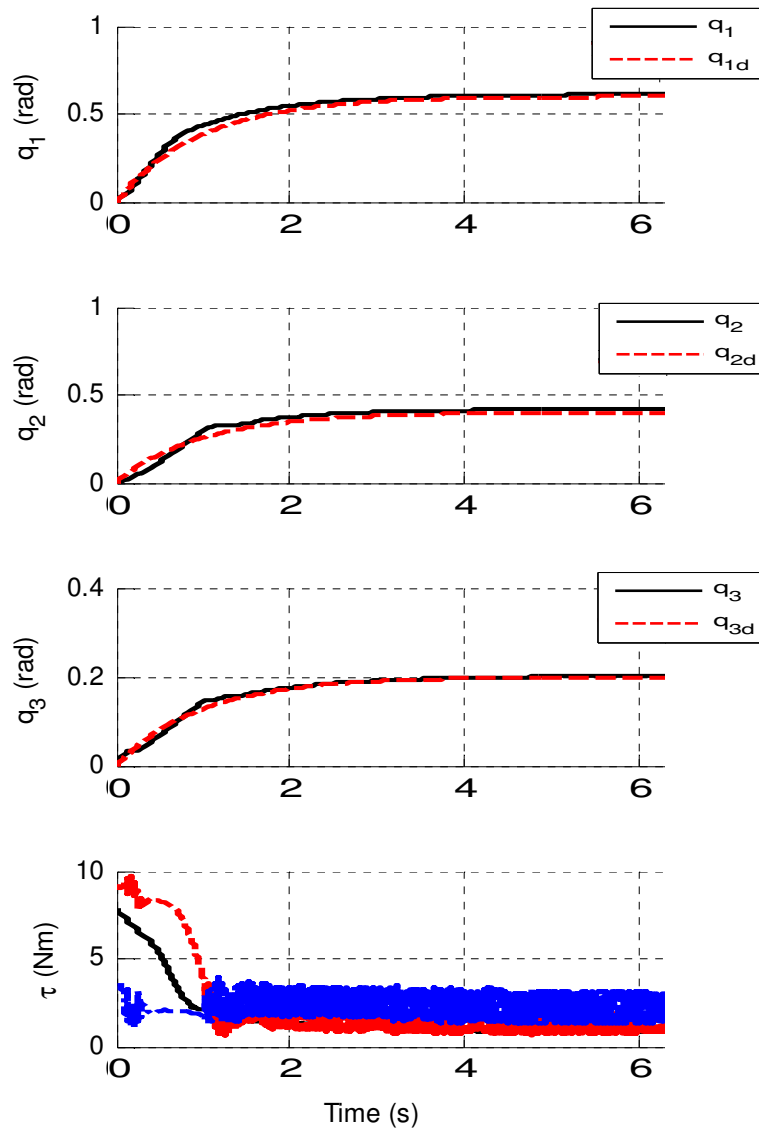


Figura 37. Resultados experimentales para el controlador  $H_\infty$  discontinuo para el seguimiento de trayectorias exponenciales.

Asimismo, en la figura 37, se puede observar un controlador con una conmutación de alta frecuencia, pero de baja amplitud. Esto se debe a que el término  $f_2(x, t)$  de (139), contiene un término  $sign(\dot{q}_d - \dot{q})$ , el cual conmuta velozmente cada vez que la diferencia entre la velocidad del sistema físico y la velocidad deseada se redujera a cero (el término  $sign(\dot{q}_d)$  no es responsable de la conmutación dado que se están utilizando trayectorias exponenciales, y por tanto sus derivadas temporales nunca son cero).

A continuación, se utilizaron las mismas trayectorias (150) para controlar el sistema perturbado con una masa de 0.5Kg en el efector final del manipulador. Los resultados de esta implementación se muestran en la figura 38. Los errores obtenidos fueron 1.7% para el primer eslabón, 5% para el segundo eslabón y 0.3% para el tercer eslabón. La disminución de los errores puede explicarse al considerar que la masa acerca un poco más el modelo físico al modelo teórico (142)-(146).

Finalmente, el controlador se aplicó al manipulador de tres grados de libertad con el objetivo de seguir una trayectoria no planeada en tiempo real. Para esto, se utilizó un mando de juegos Philips modelo SGC2909BB/27, el cual proporciona las trayectorias en tiempo real a partir de un par de palancas manipuladas directamente por el usuario, simulando una aplicación de control manual del manipulador.

Cabe señalar que para realizar esta prueba, fue necesario eliminar el filtro (140) del controlador, debido a que el costo computacional del controlador excedió las capacidades de la computadora utilizada. A su vez, las velocidades fueron estimadas de manera “sucias” por el bloque de derivación de Simulink, de tal manera que la variable de error  $x_2$  pudiera ser estimada, y a su vez, se sustituyó en (141) la variable estimada  $\xi$  por el vector de errores  $x = [x_1, x_2]^T$ , como muestra la figura 39.

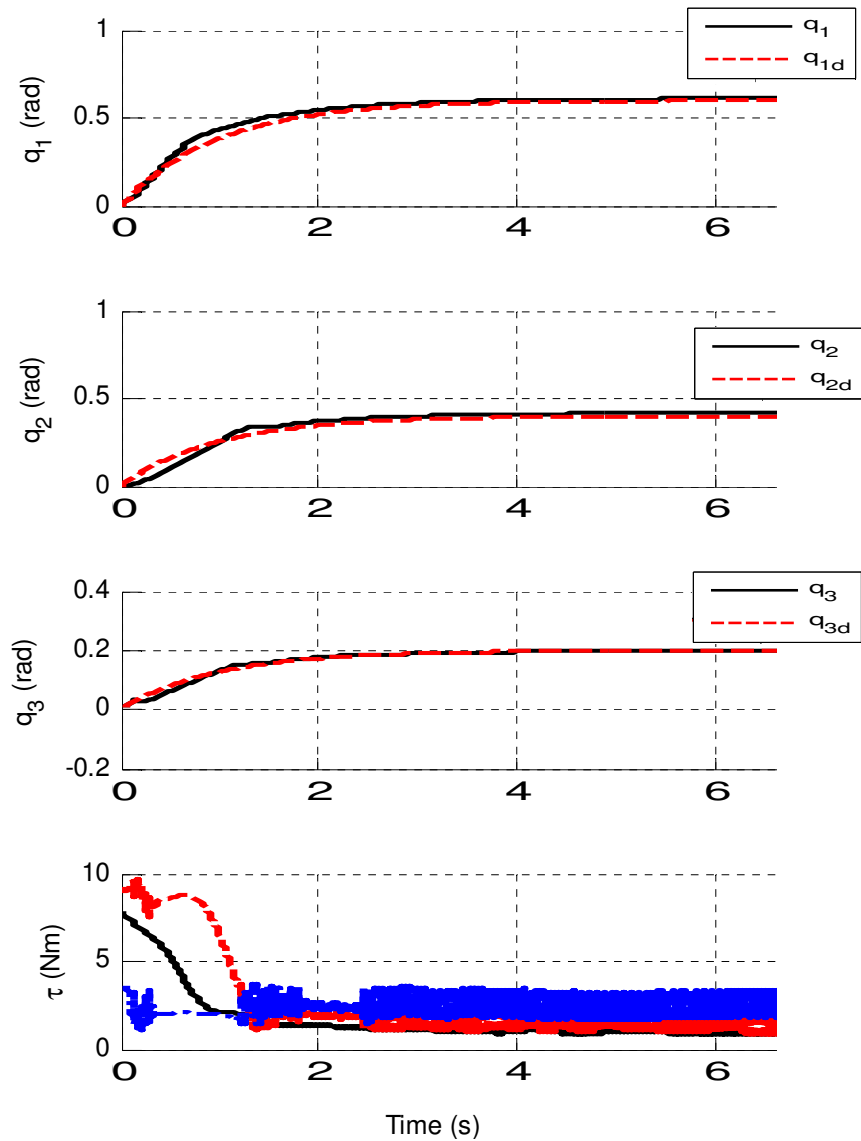


Figura 38. Resultados experimentales para el controlador  $H_\infty$  discontinuo para el seguimiento de trayectorias exponenciales, con una masa de 0.5Kg en el efector final.

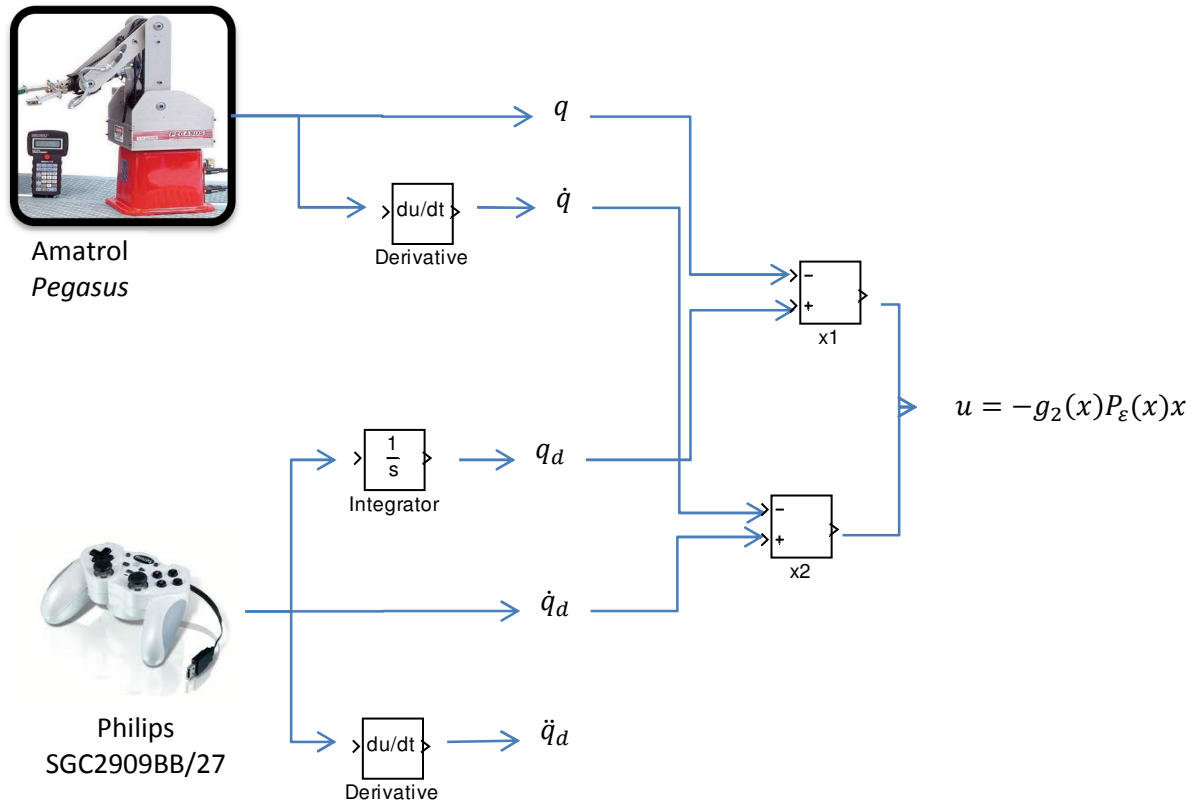


Figura 39. Diagrama a bloques del controlador discontinuo  $H_\infty$  mediante un mando de juegos y una estimación sucia de la velocidad.

Los resultados de esta implementación se muestran en la figura 40. Las trayectorias fueron introducidas al azar mediante el mando durante la prueba en tiempo real. En la figura puede apreciarse un comportamiento muy bueno del controlador, a pesar de la ausencia del filtro de velocidad, por lo que se puede concluir que el controlador atenúa las perturbaciones introducidas por el ruido del derivador.



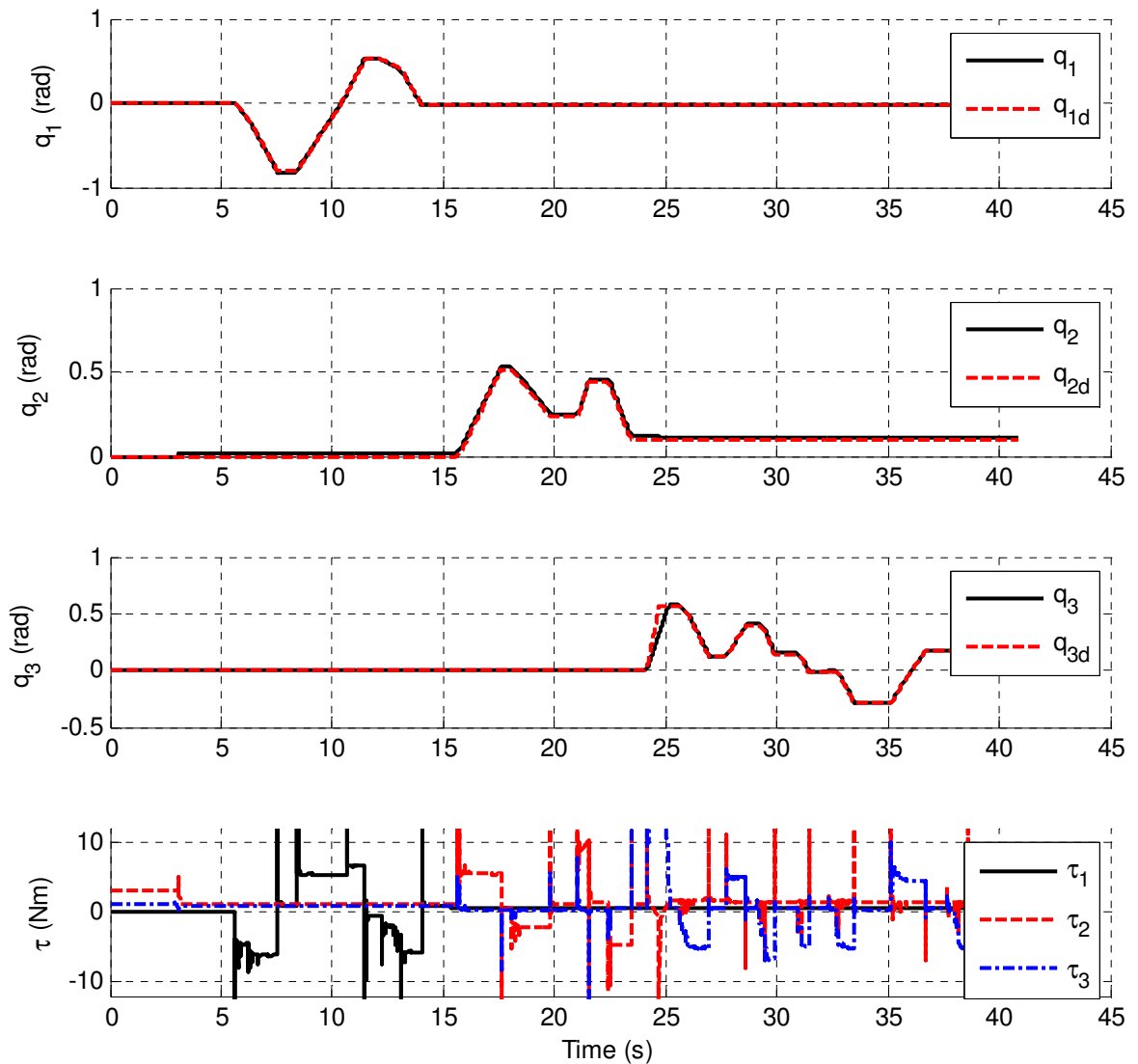


Figura 40. Resultados experimentales del control  $H_\infty$  discontinuo para seguimiento de trayectoria en tiempo real

## 6.7. Comentarios

A partir de este capítulo, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- De la figura 33, se puede apreciar que el controlador  $H_\infty$  discontinuo presenta un buen desempeño en contra de una planta que incluye un modelo de fricción dinámico, como el modelo de LuGre.

- Los errores más grandes se dan alrededor de la zona de conmutación del controlador, y pueden apreciarse también en la implementación experimental en los picos de las sinusoides de las figuras 35 y 36.
- Los datos de la tabla 5 dan soporte al planteamiento de la reducción del costo computacional del controlador  $H_\infty$  discontinuo propuesto, en contra de la versión no suave.
- De la figura 34, se puede observar que el desempeño del controlador  $H_\infty$  discontinuo propuesto es superior al de sus contrapartes suave y no suave ante la existencia de perturbaciones, con un gasto de potencia poco superior, como lo muestra la tabla 5. A esta mejora en el desempeño contribuye la compensación de fricción viscosa incluida en (130), la cual aprovecha el filtro (140) para la estimación de la velocidad mediante (131).
- Las figuras 35 a 38 muestran que el controlador  $H_\infty$  discontinuo planteado estabiliza asintóticamente el sistema, aún en presencia de un peso de 0.5Kg colocado en el extremo del manipulador, sin la necesidad de sintonizar el controlador para adaptarse al sistema físico, lo cual comprueba la robustez del diseño.
- Por último, la figura 40 muestra que el controlador  $H_\infty$  discontinuo es capaz de estabilizar asintóticamente el sistema a trayectorias no planeadas, introducidas al sistema en tiempo real. En este caso, el costo computacional fue un problema, y se tuvo que prescindir del uso del filtro (140), para utilizar el esquema de la figura 39, estimando la velocidad a través de la derivada numérica de la posición. El controlador exhibió un desempeño adecuado, reduciendo las perturbaciones introducidas por el error propio de la estimación numérica de la velocidad.

## Capítulo 7

### Conclusiones

En el presente trabajo se ofrece una propuesta de extensión del controlador  $H_\infty$  aplicado a manipuladores modelados con modelos de fricción discontinua, en particular, con el modelo de fricción de Coulomb.

En primer lugar, se expuso el planteamiento original del problema de control  $H_\infty$  por retroalimentación de salida, como se presenta en (Isidori y Astolfi, 1992), junto con su versión no suave, como fue presentada en (Aguilar et al. 2003). Entonces, se aplicó la teoría en un sistema subactuado de tres grados de libertad, el helicóptero marca Quanser. A partir de esta implementación, se obtuvo un muy buen desempeño del controlador  $H_\infty$ , el cual mostró su capacidad de atenuación de perturbaciones al no considerar en el modelo el efecto de la fricción y utilizar modelos simplificados. Al mismo tiempo, aprovechando el buen desempeño del controlador  $H_\infty$  ante estos modelos, se definió un control virtual sencillo, tal que se pudiera lograr la estabilización en el origen de los tres grados de libertad del mecanismo subactuado, obteniendo resultados experimentales satisfactorios.

Posteriormente, la teoría presentada en el capítulo 4 es utilizada para proponer un nuevo controlador  $H_\infty$  discontinuo. Esto parte de la idea de que el modelo de fricción estático de Coulomb es un caso límite del modelo de fricción dinámico de Dahl, cuando el parámetro de rigidez tiende a infinito. Mediante esta aproximación se puede reducir el orden del controlador dinámico (utilizado con la aproximación  $H_\infty$  no suave), llegando a un controlador estático. De esta manera, el orden del sistema en lazo cerrado no se altera, y el costo computacional del nuevo controlador será menor.

En apoyo a la aseveración anterior, el capítulo 6 presenta una comparación del desempeño de las tres versiones del control  $H_\infty$  mencionadas en este texto: la suave, la no suave y la discontinua. En efecto, el controlador  $H_\infty$ -discontinuo propuesto requirió menor costo computacional en su implementación que su equivalente no suave, pero más que el suave.

Por otro lado, las simulaciones numéricas muestran que los errores más grandes del controlador  $H_\infty$  discontinuo se obtuvieron cerca de la zona de conmutación, por lo que para aplicaciones de baja velocidad y alta precisión, el controlador  $H_\infty$  no suave presenta mejores resultados, pues considera la dinámica de baja velocidad del fenómeno de fricción, como el comportamiento pre-deslizante. Sin embargo, el controlador planteado presentó muy buena atenuación de perturbaciones, lo cual puede apreciarse en los resultados experimentales tanto del sistema no perturbado, como cuando se le agregó una carga al efector final; en ambos casos, se obtuvieron muy buenos resultados.

### **Trabajo a futuro**

A continuación, se presentan una serie de puntos que no fueron considerados en este trabajo por no ser parte del objetivo de esta tesis, pero que tienen interés tanto teórico como práctico:

- Medición de los efectos de la fricción en el helicóptero de tres grados de libertad marca Quanser.
- Implementación del algoritmo de control  $H_\infty$  discontinuo al helicóptero de 3GDL, y analizar las ventajas y desventajas de la implementación.
- Proponer la demostración matemática formal de la estabilidad del controlador  $H_\infty$  discontinuo planteado, utilizando las desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs.

- Buscar alternativas para la implementación del algoritmo de control  $H_\infty$  discontinuo en tiempo real para el manipulador de tres grados de libertad, que incluya el filtro de velocidad.

## Referencias bibliográficas

- Aguilar, L.T., Orlov, Y. & Acho, L. (2003). Nonlinear  $H_\infty$  control of nonsmooth time-varying systems with application to friction mechanical manipulators, *Automatica*, 39, 1531-1542.
- Aguilar, L.T., Orlov, Y. (2004). Non-smooth  $H_\infty$ -position control of mechanical manipulators with frictional joints, *International Journal of Control*, 77(11), 1062-1069.
- Allied-Electronics, (2001). Datasheet 9234S004 Lo-Cog DC Motor. Consultado en: <http://www.alliedelec.com/Images/Products/Datasheets/BM/AMETEKPITTMAN/388-0012.PDF>.
- Amatrol. (2012). Product specifications – Pegasus servo robot system, Consultado en <http://www.amatrol.com/product/880-ra2-1-a.html>.
- AMC, (2012). Datasheet Analog Servo Drive 16A20AC. Consultado en: <http://www.a-m-c.com/download/datasheet/16a20ac.pdf>.
- Anderson, B. D., Vreugdenhil, R. (1973). Network analysis and synthesis. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.
- Avago-Technologies, (2010). Datasheet HEDS-9000/9100 Two Channel Optical Incremental Encoder Modules. Consultado en: <http://www.avagotech.com/docs/AV02-1867EN.PDF>.
- Basar, T., Bernhard, P. (1991).  *$H_\infty$ -Optimal control and related minimax design problems: A dynamic Game Approach*. Boston, Birkhauser.
- Dahl, P. R. (1976). Solid friction damping of mechanical vibrations. The Aerospace Corporation, El Segundo, Ca, USA, 1675–1682.
- Dorato, P., Fortuna, L. & Muscato, G. (1992). *Robust Control for Unstructured Perturbations – An introduction*. Heidelberg, Germany, Springer-Verlag.
- Doyle, J., Glover K., Khargonekar P., & Francis B. (1989). State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), 831-847.
- Fairman, F. W. (1998). *Linear Control Theory – The State Space Approach*. Chichester, England, Wiley.

- Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Drotrecht. Kluwer.
- Ishutkina, M. (2004). Design and implementation of a supervisory safety controller for a 3DOF helicopter. (Tesis de doctorado). Massachusetts Institute of Technology, Massachussets, E.U.A.
- Isidori, A., Astolfi, A. (1992) Disturbance attenuation and  $H_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, 1283-1293.
- Johanastrom, K., Canudas-de-Wit, C. (2008). Revisiting the LuGre friction model, *Control Systems, IEEE* , 28(6), 101-114.
- Kelly, R., Llamas, J., & Campa, R. (2000). A measurement procedure for Viscous and Coulomb friction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 49, 857–861.
- Kelly, R., Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Madrid, Pearson.
- Khalil, K. (1996). *Nonlinear systems*. New Jersey, Springer.
- Lantos, B., Márton, L. (2011). *Nonlinear Control of Vehicles and Robots*. London, Springer.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. 5<sup>th</sup> Edition. New Jersey, Prentice Hall.
- Orlov Y., Acho L. & Solis V. (1999). Nonlinear  $H_\infty$ -control of time-varying systems. *Proceedings of the 38th IEEE conference on Decision and Control*, 4, 3764-3769.
- Orlov Y., Aguilar L. (2004). Non-smooth  $H_\infty$ -position control of mechanical manipulators with frictional joints. *International Journal Control*, 77(11), 1062-1069.
- Ravi, R., Nagpal, K., & Khargonekar, P. (1991).  $H_\infty$  control of linear time-varying systems: A state-space approach. *SIAM Journal Control and Optimization*, 29, 1394–1413.
- Roberge, J.K. (1975). *Operational amplifiers: Theory and practice*. New York, Wiley.

Sensoray, (2004). Sensoray Model 626 - Analog and Digital I/O. Consultado en: <http://www.sensoray.com/products/626.htm>.

Slotine, J., Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. New Jersey, Prentice Hall.

Van der Schaft, A. J. (1992).  $L_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 770-784.

Zames. G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformation, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2), 301-320.