

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada



**ESTABILIDAD, ROBUSTEZ Y REDISEÑO DE UNA
ESTRUCTURA DE CONTROL CON MODELO INTERNO
PARA SISTEMAS NO LINEALES**

TESIS

DOCTORADO EN CIENCIAS

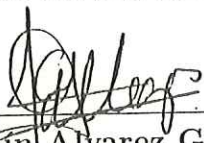
SALVADOR ZAZUETA RUBIO

ENSENADA, B. C., AGOSTO DEL 2000.

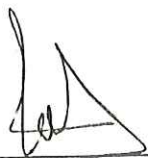
TESIS DEFENDIDA POR

Salvador Zazueta Rubio

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director del Comité



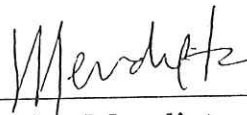
Dr. Enrique Mitrani Abenchuchan
Miembro del Comité



Dr. Iouri Orlov
Miembro del Comité



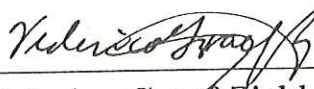
Dr. Jaime Álvarez Gallegos
Miembro del Comité



Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez
Miembro del Comité



Dr. José Luis Medina Monroy
*Jefe del departamento de
Electrónica y Telecomunicaciones*



Dr. Federico Graef Ziehl
Director de Estudios de Posgrado

Agosto del 2000

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Y DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA.**

DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA

**DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES**

**ESTABILIDAD, ROBUSTEZ Y REDISEÑO DE UNA
ESTRUCTURA DE CONTROL CON MODELO INTERNO
PARA SISTEMAS NO LINEALES.**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de Doctor
en Ciencias presenta:

SALVADOR ZAZUETA RUBIO

Ensenada, Baja California, México. Agosto del 2000.

RESUMEN de la tesis de **SALVADOR ZAZUETA RUBIO** presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **DOCTOR EN CIENCIAS en Electrónica y Telecomunicaciones**. Ensenada, Baja California, México. Julio del 2000.

**ESTABILIDAD, ROBUSTEZ Y REDISEÑO DE UNA ESTRUCTURA
DE CONTROL CON MODELO INTERNO PARA SISTEMAS NO
LINEALES**

Resumen aprobado por:



Dr. Joaquín Álvarez Callegos
Director de Tesis

En este trabajo se presenta el análisis de estabilidad, robustez y el diseño de algoritmos de control para sistemas no lineales de grado relativo completo. El diseño del control se basa en la estructura conocida como Control con Modelo Interno (CMI). Se presenta un análisis de la estabilidad y una medida de robustez para el CMI con la llamada acción de control nominal. Se presenta también un nuevo diseño de la acción de control que logra un margen de robustez mucho mayor frente a perturbaciones externas e internas que el nominal. A este controlador le denominamos CMI++. El diseño del CMI++ incluye un estimador de estado de alta ganancia. La técnica utilizada para el diseño del CMI++ es una combinación del CMI y el rediseño de Lyapunov.

Además, se presenta el diseño y la puesta en práctica de los controladores propuestos para una planta experimental. La planta utilizada es un motor de corriente directa. El algoritmo de control se realiza en una computadora digital.

PALABRAS CLAVE: Sistemas No Lineales, Control Robusto.

ABSTRACT of the thesis of **SALVADOR ZAZUETA RUBIO** presented as partial requirement to obtain the degree of **Doctor of Science in Electronics and Telecommunications** . Ensenada, Baja California, México. July 2000.

STABILITY, ROBUSTNESS AND REDESIGN OF AN INTERNAL MODEL CONTROLLER STRUCTURE FOR NON LINEAR SYSTEMS

This work presents the robustness and stability analyses for some control algorithms for nonlinear systems with full relative degree. A design method for this type of controllers is presented also. The design is based on the so called Internal Model Controller structure (CMI). An improved stability analysis and a robustness measure for the nominal control action of the CMI is presented. Also a new design of the CMI control action is presented. This new design achieves a greater margin of robustness and stability when compared with that of the nominal CMI. We called this controller CMI++. The CMI++ includes in its design a high gain state estimator. The design of the CMI++ is based on a combination of nominal CMI and Lyapunov redesign.

Also the implementation of the proposed controllers is presented. We used a direct current motor as the experimental plant. The algorithm was implemented with a digital computer.

KEYWORDS: Nonlinear systems, Robust control.

DEDICATORIA

A mi esposa, mis hijas y a mis padres.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de una manera profunda a todos los que estuvieron involucrados en el desarrollo de esta tesis. En especial, va mis más sincero agradecimiento, a las siguientes personas e instituciones:

A mi asesor.

Al comité de tesis.

A mis padres que tienen mucha culpa de lo que soy hasta ahora.

A mi esposa y a mis hijas.

Al Observatorio Astronómico Nacional y la UNAM.

Al CICESE.

CONTENIDO

I	INTRODUCCION	1
I.1	OBJETIVOS DEL TRABAJO	2
II	ANTECEDENTES	4
II.1	PROBLEMA DE CONTROL	4
II.2	SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES	5
II.2.1	SISTEMAS LINEALES	6
II.2.2	SISTEMAS NO LINEALES	6
II.3	PROBLEMA DE ROBUSTEZ	7
II.4	ALGUNOS DESARROLLOS PREVIOS PARA EL CONTROL DE SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRES	8
II.5	EL CMI LINEAL	13
II.6	EL CMI NO LINEAL: PROBLEMAS IMPORTANTES, PROBLEMAS POR RESOLVER	15
II.7	LA ESTRUCTURA DE CONTROL CON MODELO INTERNO	17
II.8	DEFINICION DE LA ESTRUCTURA CMI	17
II.9	ANALISIS DE ESTABILIDAD DE LA ESTRUCTURA CMI NOMINAL	24
II.10	ESTABILIDAD FRENTE A PERTURBACIONES INTERNAS Y EXTERNAS	26
II.10.1	PERTURBACION CONSTANTE	26
II.10.2	PERTURBACION EN FUNCION DEL ESTADO	29
II.11	RESUMEN DEL CAPITULO	33
III	ANALISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA DEL CMI	34
III.1	EL PROBLEMA DE VARIACION PARAMETRICA	35
III.2	UNA MEDIDA DE ROBUSTEZ PARA EL CMI	36

CONTENIDO (Continuación 1)

III.2.1	ANÁLISIS DEL CASO 1	38
	$f_p = f_m + \Delta f_m, g_m = g_p = \text{cte.}$	
III.2.2	ANÁLISIS DEL CASO 2	45
	$f_p = f_m + \Delta f_m, g_p = g_m + \Delta g_m = \text{cte.}$	
III.2.3	ANÁLISIS DEL CASO GENERAL	48
III.3	CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	58
IV	REDISEÑO DE LA ACCIÓN DE CONTROL DEL CMI	60
IV.1	ESTIMACIÓN DE LA CUENCA DE ATRACCIÓN DEL CMI (Acción de control nominal)	62
IV.2	REDISEÑO DE LYAPUNOV PARA EL CMI	67
IV.2.1	CONTROL CMI++ (DISCONTINUO)	68
IV.2.2	CONTROL CMI++ (CONTINUO)	72
IV.2.3	ESTIMADOR DE ESTADO	76
IV.3	ESTABILIDAD DE LA INTERCONEXIÓN CMI++-ESTIMADOR DE ESTADO	78
IV.4	CONCLUSIONES	85
IV.4.1	PROBLEMAS ABIERTOS	87
V	EJEMPLOS DE DISEÑO	88
V.1	EJEMPLO 1	89
V.1.1	ACCIÓN DE CONTROL NOMINAL DEL CMI	90
V.1.2	ESTIMACIÓN DE LA MEDIDA DE ROBUSTEZ	92
V.1.3	CMI++ (Estado Completo)	97
V.1.4	CMI++ (Estimador de Estado)	100
V.2	EJEMPLO 2	105
V.2.1	DISEÑO CMI++	107
V.3	CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	109
VI	SEGUIMIENTO CON EL CMI	114
VI.1	PLANTA y MODELO IDENTICOS	116
VI.2	PLANTA y MODELO DIFERENTES	120
VI.3	EJEMPLO del CMI para SEGUIMIENTO DE RAMPA	123
VI.4	CONCLUSIONES PARA EL SEGUIMIENTO CON EL CMI	126
VI.5	COMPARACIÓN CUALITATIVA ENTRE EL CMI Y EL REGULADOR ROBUSTO DE ISIDORI	128
VI.5.1	CONDICIONES DE EXISTENCIA PARA EL REGULADOR ROBUSTO DE ISIDORI	129
VI.5.2	EJEMPLO DE SEGUIMIENTO: REGULADOR DE ISIDORI y CMI	137

CONTENIDO (Continuación 2)

VI.5.3	COMPARACION ENTRE el CMI y EL REGULADOR ROBUSTO	144
VII	REALIZACION DEL CMI	146
VII.1	TARJETA DE INTERFAZ	147
VII.2	CARACTERISTICAS DE LA PLANTA	150
VII.3	PRIMERA CONFIGURACION: PLANTA LINEAL	151
VII.4	IDENTIFICACION DEL MODELO LINEAL	153
VII.5	SEGUNDA CONFIGURACION: PLANTA NO LINEAL	155
VII.6	PROGRAMA DE CONTROL	156
VII.7	EXPERIMENTOS CMI: LINEAL y NO LINEAL	158
VII.8	EXPERIMENTOS CMI: PLANTA LINEAL	158
VII.9	EXPERIMENTOS CMI: PLANTA NO LINEAL	160
VII.10	REALIZACION DEL CMI++	161
VII.11	CONCLUSIONES	163
VIII	CONCLUSIONES GENERALES	172
	BIBLIOGRAFIA	174
	APENDICE	180
	INSTRUCCIONES DEL PROGRAMA DE CONTROL	180
	PRUEBA DEL LEMA 3	185
	PRUEBA DEL LEMA 7	187
	PRUEBA DEL LEMA 8	187
	GLOSARIO	188

Lista de Figuras

FIGURA		Página
1	La estructura CMI lineal	14
2	Diagrama a bloques del CMI	18
3	Diagrama a bloques del CMI con una perturbación constante en la salida.	27
4	Diagrama a bloques del CMI++ con el estimador de estado.	79
5	Cambio de referencia a 0.2, diseño nominal CMI. En la parte superior de la gráfica se muestra la salida de la planta contra segundos de tiempo. En la parte inferior de la gráfica se muestra el plano de fase del estado de la planta, es decir, se muestra $x_{p,2}$ contra $x_{p,1}$	97
6	Salida de la planta para un cambio de referencia a 1.0, diseño nominal del CMI.	98
7	Salida de la planta para un cambio de referencia a 0.2, CMI++ con acceso al estado completo	99
8	Salida de la planta para un cambio de referencia a 1.0, CMI++ con acceso al estado completo	100
9	Respuesta del CMI++ con el estimador del estado e , polos del estimador en -100. La parte superior de la gráfica muestra la salida de la planta. La parte inferior muestra una ampliación de la zona entre 79 y 100 segundos.	102
10	Respuesta del CMI++ con el estimador del estado e , polos del estimador en -1000. La parte superior de la gráfica muestra la salida de la planta. La parte inferior muestra una ampliación de la zona entre 79 y 100 segundos.	103
11	Salida de la planta y acción de control del CMI++ con el estimador del estado e , polos del estimador en -1000, para un cambio de referencia a 1.	104
12	Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$, control CMI.	107
13	Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = \pi$, control CMI. Se puede notar claramente la inestabilidad del sistema.	108
14	Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$ combinada con una perturbación aditiva a la salida de la planta de magnitud 0.5 actuando después de 50 segundos. La perturbación constante permanece activa después de los 50 s. , aún así, se mantiene la regulación de la referencia deseada. Tipo de control: CMI.	109

Continuación Lista de Figuras (1)

FIGURA		Página
15	Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$, control CMI++.	110
16	Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = \pi$, control CMI++.	111
17	Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$ combinado con una perturbación constante no evanescente que actúa a la salida de la planta cuando $t > 50$. Control CMI++.	112
18	Salida de la planta y error de seguimiento del CMI para el ejemplo de la sección (VI.3) condición inicial de la planta $x_{p,1} = 0.1$	125
19	Salida de la planta y error de seguimiento del CMI para el ejemplo de la sección (VI.3) C.I. de la planta $x_{p,1} = -0.2, x_{p,2} = -0.2$	126
20	Error de seguimiento con condiciones iniciales cero.	127
21	Error de seguimiento con condiciones iniciales cero y con el parámetro $a_{2,r} = 0$. El eje x representa décimas de segundo.	127
22	Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta perfecto.	140
23	Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta perturbado.	140
24	Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta perturbado.	141
25	Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta muy perturbado.	142
26	Seguimiento con el CMI, modelo de la planta perfecto	142
27	Seguimiento con el CMI, modelo de la planta perturbado.	143
28	Seguimiento con el CMI, modelo de la planta perturbado.	143
29	Seguimiento con el CMI, modelo de la planta muy perturbado.	144
30	Señales en cuadratura	148
31	Diagrama a bloques de la tarjeta de interfaz	150
32	Respuesta real del sistema y simulada con el modelo	154
33	Error de modelado $y_p - y_m$	155
34	Esquema simplificado del motor con el vástago y la masa acoplados.	156

Continuación Lista de Figuras (2)

FIGURA		Página
35	Cambio de referencia del CMI, modelo lineal. La gráfica de arriba muestra la salida del motor, la gráfica de abajo muestra la acción de control en cuentas del DAC.	165
36	Cambio de referencia usando el generador de trayectorias, modelo lineal. La gráfica de arriba muestra la salida y la referencia, la gráfica de abajo muestra la acción de control en cuentas del DAC.	166
37	Cambio de referencia tipo escalón, modelo lineal	167
38	Acción de control en la entrada del convertidor analógico-digital, para la figura (37)	168
39	Cambio de referencia para el CMI, modelo no lineal.	168
40	Cambio de referencia a la posición vertical para el CMI, modelo no lineal. Se puede observar la inestabilidad del sistema.	169
41	Salidas de la planta para un cambio de referencia con diferente posición del centro de masa para el péndulo. La línea punteada más a la izquierda es la referencia.	169
42	Acción de control para un cambio de referencia con diferente posición del centro de masa para el péndulo.	170
43	Cambio de referencia para el CMI++, modelo no lineal.	170
44	Cambio de referencia a la posición vertical del vástago para el CMI++, modelo no lineal.	171

Lista de Tablas

I	Tabla de ubicación de polos, magnitud de la oscilación observada. . . .	104
---	---	-----

CAPITULO I

INTRODUCCION

En este trabajo se presenta un método para el diseño de controladores automáticos para plantas no lineales de una entrada y una salida representadas por ecuaciones diferenciales ordinarias y de grado relativo completo. El trabajo se enmarca en la línea de análisis y diseño de sistemas no lineales presentados recientemente en la literatura.

Se presenta un análisis de las propiedades de estabilidad y robustez de la estructura conocida como Controlador con Modelo Interno (CMI) para plantas no lineales de grado relativo completo. También se muestra el diseño de una nueva ley de control para la estructura CMI, mediante la cual se logra un aumento en la robustez de la estructura. El trabajo se desarrolla en las dos vertientes principales de un problema de control, es decir, tanto en el análisis como en el diseño. El análisis se realiza con las técnicas tradicionales de Lyapunov y otros resultados recientes presentados en la literatura para sistemas no lineales.

Los resultados publicados en la literatura sobre esta estructura en aplicaciones de sistemas no lineales son relativamente limitados. Sin embargo, el CMI presenta varias cualidades muy interesantes desde el punto de vista de un controlador aplicable. Esto fue un motivo determinante para extender la parte de análisis publicada. Además,

los resultados del CMI aplicados a problemas de control en la práctica son mucho más escasos, esta situación nos motivó para desarrollar la aplicación experimental del algoritmo.

La selección de la estructura CMI se basó en varias características deseables desde el punto de vista del ingeniero de control, entre ellas se destacan las siguientes:

- 1) Presenta un cierto grado de robustez de la estabilidad frente a variaciones o incertidumbres paramétricas así como a cierto tipo de perturbaciones en la entrada o la salida de la planta.
- 2) El error en estado estacionario es cero para referencias constantes, para lo cual no se requiere de la presencia explícita de integradores en la ley de control, aún para plantas no modeladas de manera exacta y no se requiere de un observador.
- 3) La puesta en práctica de la estructura es relativamente fácil.

Estas características hacen que el CMI sea un candidato adecuado para el control de servomecanismos, es decir, procesos o sistemas donde se requiere regular una salida a un valor constante dado por una entrada de referencia.

I.1 OBJETIVOS DEL TRABAJO

El objetivo general del trabajo es el desarrollo de un método de diseño basado en el CMI para SNL que presente un buen desempeño frente a perturbaciones exógenas o incertidumbres paramétricas. El tipo de SNL analizado es el de grado relativo completo con una entrada de control y una sola salida. Aunque no se presentan en este trabajo, la extensión de los resultados a sistemas con varias entradas y salidas es directo (si el número de entradas es igual al número de salidas).

También es directa la extensión para el caso de sistemas de grado relativo incompleto pero de fase mínima, es decir, aquellos con dinámica cero estable.

Los objetivos particulares del trabajo son los siguientes :

- Análisis de la dinámica de un sistema no lineal controlado con la estructura CMI. Demostrar la existencia de equilibrios, sus propiedades de estabilidad y una medida de la cuenca de atracción.
- Determinar una medida cuantitativa de la robustez del CMI para SNL.
- Rediseño de la estructura y/o el algoritmo CMI, con el fin de aumentar los márgenes de robustez frente a perturbaciones exógenas y/o incertidumbres o perturbaciones de tipo paramétricas.
- Rediseño de la estructura y/o algoritmo del CMI para incluir otros objetivos de control, en particular el seguimiento de trayectorias del tipo rampa.
- Realización de los resultados en una aplicación para el control de un sistema físico. Esta realización se basa en una computadora del tipo PC con una tarjeta de interfaz diseñada para el control de un proceso.

CAPITULO II

ANTECEDENTES

II.1 PROBLEMA DE CONTROL

El problema principal de control es mantener una o más variables de un proceso en un rango aceptable de operación, aún en el caso de presentarse perturbaciones externas o incertidumbres en el modelo matemático utilizado para el diseño o la síntesis del controlador.

Este trabajo se enfoca a un tipo de control de lazo cerrado para una clase de sistemas no lineales.

Un control de lazo cerrado es un sistema realimentado. La señal de error actuante es la diferencia entre la variable de entrada o referencia y la señal de realimentación. La señal de error entra a un “controlador” que se diseña para reducirlo a un valor aceptable. La reducción del error se logra mediante una acción de control generada por el controlador. En otras palabras, el término “lazo cerrado” implica el uso de realimentación para reducir el error del sistema.

Al introducir realimentación a un sistema se generan varios problemas y entre ellos, el más importante es el problema de estabilidad.

Así pues, el principal requisito de un sistema de control es su estabilidad. Además, todo sistema de control debe mantener una cierta estabilidad relativa razonable, es decir, la velocidad de respuesta del sistema debe ser adecuada y debe presentar un cierto grado de amortiguamiento. Otro requisito importante de un sistema de control debe ser el reducir a cero o a un nivel aceptable los errores de salida.

Cualquier sistema de control útil debe cumplir con estos tres requisitos: estabilidad, estabilidad relativa y error de salida aceptable.

II.2 SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

El diseño de un sistema de control requiere generalmente de un conocimiento de la dinámica del sistema por controlar. Este conocimiento se establece por medio de un modelo matemático, que puede definirse generalmente por medio de una ecuación diferencial de la siguiente forma

$$\dot{x} = f(x, u), y = h(x),$$

donde x es el estado del sistema, u es la acción de control e y la salida por controlar.

En realidad todo modelo es una aproximación del sistema dinámico que pretende describir. El efecto de errores de modelado o incertidumbres de tipo paramétricas obliga a considerar un modelo diferente, donde se tome en cuenta estos elementos, por ejemplo:

$$\dot{x} = f(x, u) + \Delta f(x, u), y = h(x),$$

donde $\Delta f(x)$ es un campo vectorial que depende de la incertidumbre del modelado.

El tipo de ecuación que define el modelo matemático establece si el modelo es lineal o no lineal.

II.2.1 SISTEMAS LINEALES

Un sistema lineal (SL) es aquél cuyo comportamiento dinámico cumple con el principio de superposición y homogeneidad. Las ecuaciones del modelo matemático de este tipo de sistemas son lineales. Una ecuación diferencial es lineal si los coeficientes de la variable dependiente y sus derivadas son constantes o funciones únicamente de la variable independiente. A manera de ejemplo

$$\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es un sistema lineal. La propiedad principal de un SL es el principio de superposición. Este principio establece que la salida de un SL para diferentes funciones de excitación de entrada es la suma de las salidas producidas por cada excitación actuando por separado. Una manera práctica de saber si una planta experimental es lineal es investigando si la causa y el efecto son proporcionales.

II.2.2 SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema no lineal (SNL) es aquél que no satisface las propiedades establecidas para los sistemas lineales y está representado por ecuaciones no lineales. Un ejemplo de una ecuación diferencial no lineal es

$$\dot{x} = \sin(x) + u; y = x,$$

donde u es la entrada, $\sin$ es la función seno e y es la salida. En la práctica, la mayoría de los sistemas físicos son SNL. Algunos ejemplos de no linealidades son:

- Saturación. La salida de algunos procesos se satura después de un determinado valor de entrada.
- Zonas muertas.

- Juego mecánico, histéresis.

La característica principal de los SNL es que no satisfacen el principio de superposición. En general, las herramientas para encontrar solución a un problema no lineal son muy complicadas y en algunos casos no existen. Posteriormente se mencionarán el tipo de herramientas de análisis utilizadas en el desarrollo del trabajo.

II.3 PROBLEMA DE ROBUSTEZ

En el trabajo se define al problema de robustez en el sentido de la **robustez de la estabilidad** de un sistema. En general, hablamos de robustez de la estabilidad frente a variaciones de un modelo matemático nominal o perturbaciones externas que producen dichas variaciones. Las variaciones del modelo nominal pueden ser producidas por varias razones: cambios en el punto de operación del sistema, cambios en la consigna de control del sistema, cambios graduales en la planta por desgaste o por un error de modelado. Este último caso es casi inherente a cada sistema de control que se diseñe en función de un modelo matemático, puesto que el modelo es sólo una aproximación del proceso por controlar.

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x),$$

donde $f(x)$ es el modelo nominal y $\Delta f(x)$ es una perturbación del tipo mencionado anteriormente. Suponga que x_e es un equilibrio del sistema nominal y que el equilibrio presenta cierta clase de estabilidad. Decimos que este sistema es robusto frente a esta perturbación si el equilibrio del sistema perturbado conserva la misma clase de estabilidad que la del equilibrio del sistema nominal. En el trabajo se supone que la posición del equilibrio x_e del sistema puede variar, no así la clase de estabilidad del

mismo.

Se supone que un sistema es más “robusto” que otro si cumple con una o más de las siguientes proposiciones:

- Tolera un cambio mayor en el valor de sus parámetros sin pérdida de su estabilidad.
- Su cuenca de atracción es mayor.

Como se mencionó anteriormente, el tipo de estabilidad del equilibrio en ambos casos debe permanecer inalterada.

Estas definiciones nos permiten cuantificar la robustez de un sistema.

II.4 ALGUNOS DESARROLLOS PREVIOS PARA EL CONTROL DE SISTEMAS NO LINEALES CON INCERTIDUMBRES

En la literatura reciente se ha abordado el problema de análisis y diseño de control para SNL, en particular control robusto, es decir el control de sistemas con incertidumbres. Es posible utilizar dos enfoques diferentes para el análisis y síntesis de controladores para este tipo de sistemas. El primer enfoque es el de análisis de procesos estocásticos y el segundo, el determinístico, mismo que se utiliza en el trabajo. Muchos de los métodos de análisis y diseño han evolucionado a partir de los resultados obtenidos para sistemas lineales. Algunos de los resultados más importantes en la teoría para sistemas lineales son: el criterio de Routh-Hurwitz, el método del lugar de las raíces, el análisis

en la frecuencia, la controlabilidad y la asignación de polos en el espacio de estado y el control óptimo cuadrático. La extensión de algunos de estos resultados al caso de sistemas no lineales son: el análisis con el método de la función descriptiva, los métodos de perturbación singular, el análisis en el plano de fase y la teoría de linealización exacta por retroalimentación de estado (Ogata, 1983; Kailath, 1980).

Los resultados de los métodos mencionados pueden ser extendidos o aplicados directamente al caso de sistemas con incertidumbres. Para sistemas lineales se puede utilizar el teorema de Kharitonov (Kharitonov, 1979) y otros resultados recientes, aplicables cuando las perturbaciones o incertidumbres son de tipo paramétricas, con parámetros constantes desconocidos que pertenezcan a un cierto conjunto compacto. Otros resultados importantes para los sistemas lineales con incertidumbres son el análisis singular en el dominio de la frecuencia, el análisis de sensibilidad óptima en H_2 , los modos deslizantes (Utkin, 1992), el método de la ecuación de Riccati para el análisis de robustez en controladores óptimos cuadráticos, etc.

En el caso de los sistemas no lineales con incertidumbres, los métodos de análisis de Lyapunov y de optimización no lineal son los más utilizados (Khalil, 1992; Qu, 1997). En la mayoría de los casos el problema de estabilidad y control se puede transformar a un problema de minimización de algún índice bajo ciertas restricciones. Las propiedades del sistema pueden analizarse resolviendo el problema de minimización numéricamente. En comparación, el método directo de Lyapunov nos permite establecer la estabilidad o inestabilidad de un sistema por medio de una función de comparación. Esto permite diseñar un control estabilizante basado en las propiedades de la función de comparación. Los resultados obtenidos en la literatura parecen indicar que los métodos de análisis de Lyapunov serán los más utilizados para el diseño y análisis de controladores para sistemas no lineales. En este trabajo se utilizan primordialmente los métodos de análisis

de Lyapunov.

Muchos de los resultados que se muestran en el trabajo se basan en las técnicas de diseño y análisis desarrolladas previamente por muchos autores. Entre los resultados más destacados que se utilizan en este trabajo se pueden mencionar los siguientes:

Análisis y determinación de una medida de robustez para una clase de SNL (Wang y Michel, 1994; Michel y Wang, 1995). En estas referencias, Wang y Michel desarrollan herramientas que nos permiten estimar una medida de robustez en función de los parámetros del sistema para una clase de SNL. Estos resultados son usados en el capítulo III para estimar una medida de robustez de la estructura CMI frente a una clase de perturbaciones. La principal desventaja del resultado es que la medida de robustez es de carácter local, en general conservadora, y no nos provee de una medida de la cuenca de atracción del sistema. Las ventajas obtenidas con este análisis frente a otros presentados anteriormente en la literatura son: la medida es de fácil estimación y es general, es decir, se obtiene a partir de los parámetros de diseño del CMI cuando se supone que se tiene acceso a un modelo perfecto de la planta.

Isidori en (Isidori, 1985-1989) presenta el desarrollo de un método de diseño y análisis para SNL con herramientas de geometría diferencial. Sus estudios son básicos para el desarrollo posterior de la teoría de SNL. En su libro se presentan problemas de diseño tales como: estabilización de SNL con retroalimentación de estado, estabilización con retroalimentación de salida y el diseño del regulador para SNL para el seguimiento de trayectorias. La principal desventaja de los resultados del texto, y en general de la época, es que son de carácter local y no se aborda el problema de robustez propiamente dicho. Cabe mencionar que en trabajos posteriores, Isidori (Byrnes et al., 1997) aborda el problema de robustez con los métodos de análisis propuestos por él mismo

y una combinación de herramientas desarrolladas por otros autores, en particular las presentadas por H.K. Khalil en (Khalil, 1996).

En su libro Kokotovic et. al. (Kokotović et al., 1986) desarrollan herramientas de perturbaciones singulares para el diseño de controladores adaptables para SNL utilizando el concepto de dos escalas de tiempo para su modelado. Se muestra la estabilidad de la interconexión de dos subsistemas. Uno rápido y otro lento por medio de una función de Lyapunov obtenida por separado para cada subsistema. El uso del método directo de Lyapunov permite estimar un dominio de atracción para el sistema. El problema de robustez se aborda someramente por estos autores. El principal resultado establece las condiciones que se deben cumplir en los subsistemas rápido y lento para que se mantenga la estabilidad. Estos resultados se aplican en el trabajo directamente al análisis de estabilidad de la interconexión de un estimador de estado con un nuevo algoritmo de control propuesto para el CMI.

Otros autores como (Krstić et al., 1995) desarrollan controladores robustos en base al rediseño de Lyapunov y al algoritmo de retroceso ("backstepping algorithm"). Este tipo de algoritmos permiten el desarrollo de controladores robustos aplicables a varios tipos de SNL, inclusive sistemas de fase no mínima. Una de las desventajas de este método de diseño es que el tipo de SNL a los cuales es aplicable debe cumplir con la condición de retroalimentación estricta ("strict feedback"), lo cual no es muy restrictivo. Sin embargo, en nuestro caso no fue posible aplicar esta técnica puesto que la estructura CMI, cuando se aplica a sistemas de fase no mínima, no presenta esta propiedad. Otra posible desventaja de este tipo de algoritmos es la necesidad de tener acceso al estado completo del sistema para la síntesis de los controladores.

El libro (Khalil, 1996) es una síntesis de las herramientas mas importantes de análisis

y diseño para SNL. Se abordan problemas de diseño y análisis de una gran variedad de métodos entre los cuales se puede destacar: el rediseño de Lyapunov, modos deslizantes, estabilización por retroalimentación de estado, linealización exacta, etc. Los artículos citados en la bibliografía muestran el desarrollo del concepto de estimadores rápidos para el diseño de servomecanismos para SNL. Los resultados de los análisis de estabilidad de estos últimos utilizan herramientas de perturbaciones singulares establecidas por Kokotovic en (Kokotović et al., 1986). En general la síntesis de los controladores es mas directa y sencilla a partir de estos resultados que los propuestos anteriormente por Isidori en el caso del regulador robusto. Los resultados de estos autores son comparables directamente pues se aborda la misma clase de SNL. En el trabajo se utilizan estos resultados para la prueba de estabilidad de un nuevo algoritmo para el CMI que muestra una mejora substancial en desempeño comparado con los algoritmos propuestos anteriormente para la estructura.

En el artículo (Atassi y Khalil, 2000) estos autores demuestran la estabilidad de la interconexión estimador-sistema por medio del análisis de Lyapunov y herramientas de perturbaciones singulares. Sus resultados permiten asociar el concepto del “principio de separación” usado en el diseño de observadores para SL, al diseño de estimadores-controladores para SNL. En el trabajo se utilizan estos resultados para probar la estabilidad del sistema CMI con un nuevo algoritmo que incluye un estimador de estado.

Existen otras técnicas de control de sistemas con incertidumbres basadas en un enfoque heurístico, entre ellas, se puede mencionar a las siguientes: la lógica difusa (“fuzzy logic”), los algoritmos genéticos y las redes neuronales. Recientemente estas técnicas están logrando grandes avances y se están desarrollando pruebas formales de su eficacia. El interés que suscitan, y lo comento textualmente de (Varios, 1999), es debido a una gran cantidad de “aplicaciones exitosas”. Existen muchas referencias sobre lógica

difusa, sin embargo, el trabajo germinal de este método se debe a Zadeh (Zadeh, 1992).

Cabe mencionar que la herramienta de análisis más utilizada en el trabajo son los métodos de Lyapunov. El uso de estas herramientas en general se debe a que no es necesario obtener una solución de las ecuaciones dinámicas del sistema analizado para establecer un criterio de estabilidad. Esta característica es primordial puesto que en la mayoría de los casos la solución analítica de las ecuaciones diferenciales de los SNL no existe. Una ventaja adicional de este método de análisis es el traslado del problema de análisis de estabilidad a uno de comparación cualitativa de la dinámica de sistemas, lo que permite la síntesis de controladores estabilizantes basados en técnicas como el rediseño de Lyapunov o el algoritmo de retroceso o paso atrás ("backstepping").

II.5 EL CMI LINEAL

La primera aparición del CMI como muchos otros tipos de controladores se hizo en el contexto lineal.

En el libro de Morari (Morari y Zafiriou, 1989) se presenta el diseño del CMI para sistemas lineales representados por funciones de transferencia. El diseño se basa en una parametrización de todos los controladores estabilizantes para determinado problema e.g. una parametrización de Youla. Se muestran las características de robustez de la estructura y se establece un método de diseño y análisis para plantas con un modelo lineal.

En el texto de Morari se aborda el problema de robustez en base a la estructura CMI. En particular el método de diseño de los controladores utilizado es la minimización en H_2 y H_∞ . Como ellos mismos mencionan en su texto, el problema de robustez se hizo a un lado en la mayoría de los desarrollos comprendidos entre 1960 y 1980, con la

consecuencia de que muy pocos resultados de esa época se han reflejado en aplicaciones prácticas.

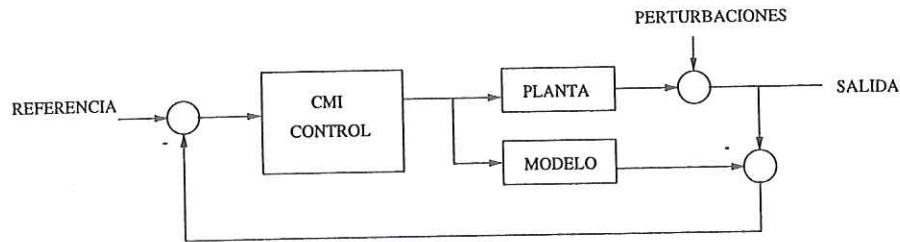


Figura 1: La estructura CMI lineal

Algunas de las ventajas cualitativas de la estructura CMI (ver figura 1) en comparación con la estructura clásica de retroalimentación se discuten a continuación.

El efecto del camino en paralelo de la planta y el modelo es restar el efecto de las variables manipuladas sobre la salida del proceso. Si suponemos por el momento que el modelo es perfecto y las condiciones iniciales de la planta y el modelo son idénticas, entonces la señal de retroalimentación es igual a la de la influencia de las perturbaciones y no es afectada por la acción de las variables manipuladas. Por lo tanto, el sistema está en lazo abierto y los problemas usuales de estabilidad asociados con la retroalimentación desaparecen. El sistema CMI en general es estable si la planta y el controlador son estables. Además, el controlador CMI juega el papel de un control con prealimentación ("feedforward") y se puede diseñar como tal. El control CMI no sufre de las desventajas de los controles prealimentados: puede cancelar los efectos de las perturbaciones no medidas puesto que la señal de realimentación está sometida a la misma influencia y modifica acordemente la variable de referencia. Si el modelo no sigue o genera perfectamente la dinámica de la planta entonces la señal de realimentación

exhibe la influencia de esta dinámica no modelada y de las perturbaciones. Es decir, cuando existe un error de modelado entre planta y modelo se genera una realimentación propiamente dicha, esto conduce posiblemente a problemas de estabilidad. La señal de realimentación obliga al diseñador del CMI a “desintonizar” el controlador ideal prealimentado, e.g. aquel con modelo perfecto, para lograr un aumento en robustez.

Esta “desintonización” del controlador CMI se logra por medio de la incorporación de un “filtro” robustecedor. Otra función del filtro es lograr un controlador realizable e.g. uno causal. Este enfoque de utilizar un filtro se incluye también en el CMI para SNL como se verá posteriormente.

Los resultados obtenidos con la estructura CMI para el caso lineal y las características de robustez y desempeño mostrados en el texto de Morari (Morari y Zafiriou, 1989) y otros autores motivaron la extensión de esta técnica al caso no lineal.

II.6 EL CMI NO LINEAL:

PROBLEMAS IMPORTANTES,

PROBLEMAS POR RESOLVER

El CMI aplicado a SNL se ha analizado con algunas variaciones en (Henson y Seborg, 1991; Alvarez Gallegos y Zazueta Rubio, 1998; Economou et al., 1986) y muchas más publicaciones. Las citadas son las que más se utilizaron para el desarrollo del trabajo.

Henson y sus colaboradores en (Henson y Seborg, 1991) muestran el diseño del CMI para SNL. Por medio de simulaciones establecen que el algoritmo CMI para SNL en algunos casos y bajo ciertas condiciones recupera las características de robustez y error de estado estable cero presentados por el CMI lineal.

Alvarez (Alvarez Gallegos y Zazueta Rubio, 1998) muestra las propiedades de estabilidad y robustez de la estructura cuando se presentan perturbaciones externas o errores de modelado. Determinan un margen de robustez en base a un análisis con las técnicas clásicas de Lyapunov.

Entre los problemas parcialmente resueltos y sin resolver en la literatura para el CMI cuando se aplica a sistemas no lineales se pueden listar:

- Falta una medida directa de la robustez de cálculo fácil y de naturaleza general.
- El CMI presenta un cierto grado de robustez. Sin embargo, para ciertos sistemas los resultados en simulación y análisis muestran que es deseable aumentar este margen de robustez. En general la cuenca de atracción de la estructura para SNL no es muy grande. El problema es generar un rediseño de la acción de control propuesta originalmente para el CMI para lograr un aumento de la cuenca de atracción, con lo que se aumentaría el margen de robustez de la estructura.
- La aplicación y puesta a punto del CMI a un problema práctico. Se plantea el uso de una computadora como el medio para realizar la acción de control del CMI.
- El problema de análisis de la aplicación a SNL con dinámica cero inestable (que sigue abierto).
- EL análisis de la estructura CMI cuando se aplica a sistemas con número de entradas distinto al número de salidas.

Los primeros tres puntos de la lista anterior se abordan en este trabajo. En particular, las aportaciones más importantes se presentan en el segundo punto, es decir, la propuesta de un algoritmo de control para el CMI que presente un mejor desempeño frente a incertidumbres y dinámicas no modeladas. También se presenta el análisis de estabilidad de la estructura CMI para el seguimiento de una trayectoria de tipo rampa.

II.7 LA ESTRUCTURA DE CONTROL CON MODELO INTERNO

En esta sección se describe formalmente la estructura del CMI y se analiza la estabilidad de la misma por medio del método indirecto de Lyapunov. El objetivo de las secciones siguientes es la introducción del CMI para familiarizar al lector con la estructura. También se introduce la notación que se usará a lo largo de los demás capítulos.

En otras secciones del capítulo se analiza la estabilidad del CMI con la acción de control nominal para varios casos. El primer caso de análisis es el del CMI con modelo perfecto, que llamamos CMI nominal. Posteriormente se analiza la estabilidad del CMI frente a perturbaciones de dos tipos: (1) perturbaciones constantes y (2) perturbaciones en función del estado. En general las perturbaciones analizadas pueden ser exógenas o internas, es decir, pueden ser errores de modelado o variaciones paramétricas causadas por algún agente externo.

II.8 DEFINICION DE LA ESTRUCTURA CMI

La estructura de control con modelo interno (CMI) está compuesta de varios bloques (c.f. 2). Los componentes de este diagrama son: P (planta), M (modelo), R (regulador) y C (bloque controlador).

Cada bloque de la estructura juega un papel determinado:

El bloque P (planta) es el proceso a controlar, posee una entrada de control y una salida. Las características que debe cumplir la planta se presentarán posteriormente.

El bloque M (modelo de la planta) actúa como un observador en lazo abierto del estado de la planta (bloque P). Esto implica la necesidad de que el bloque M sea

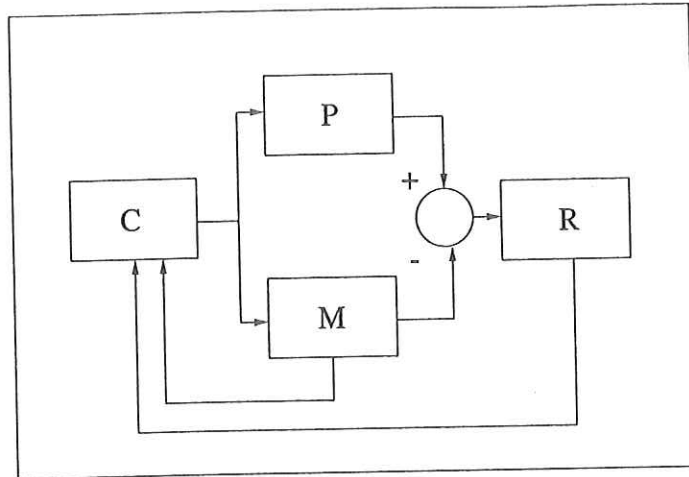


Figura 2: Diagrama a bloques del CMI

asintóticamente estable para garantizar la convergencia del estado del modelo al estado de la planta en el caso de que el estado inicial del modelo sea diferente al de la planta.

El bloque R (filtro o regulador) se incluyó como parte de la estructura desde el diseño del CMI lineal (Morari y Zafriou, 1989). Se usa como regulador un filtro lineal pasa bajas de orden igual al de la planta y el modelo. La inclusión del filtro permite entre otras cosas el desarrollo de un controlador realizable. Otro propósito del filtro es compensar el error de modelado entre planta y modelo. Para esto, se usa la constante de tiempo del filtro como un parámetro de ajuste o sintonía (Morari y Zafriou, 1989). El ajuste de este parámetro presenta un cierto compromiso entre desempeño y robustez. Un filtro con una constante de tiempo más lenta implica mayor robustez de la estructura a costa de un bajo desempeño y viceversa. Sin embargo, como se verá en el próximo capítulo, existe un límite para el aumento de la robustez de la estructura por medio de la constante de tiempo del regulador. Es decir, después de cierto valor de la constante de tiempo, la robustez de la estructura empieza a decrecer nuevamente.

El bloque C (controlador) está definido como una función de control cuyo diseño se basa principalmente en la técnica de linealización por retroalimentación del estado. Esta linealización que es del tipo entrada/salida no se realiza sobre la planta, sino mas bien sobre un sistema aumentado que se definirá posteriormente.

En conjunto la estructura CMI con el control que se propone un poco más adelante en el trabajo se puede interpretar como una combinación de linealización parcial con un observador en lazo abierto. Las ventajas del CMI propuesto con respecto a la linealización exacta es que no se necesita acceso al estado completo de la planta, además el CMI mantiene error cero en estado estacionario. Las condiciones para que se cumplan las proposiciones anteriores serán descritas posteriormente.

A continuación se presenta la definición matemática de los bloques de la estructura del CMI.

Se supone que la planta se puede expresar en la llamada forma normal por medio de un cambio de coordenadas. Los detalles de este mapeo se pueden ver en (Isidori, 1985-1989). En el resto del trabajo se supone que la planta está dada en la forma normal.

La planta (P en la figura 2) es de grado relativo completo, es de orden n y está definida por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,i} &= x_{p,i+1}, i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{p,n} &= f_p(x_p) + g_p(x_p)u \\ y_p &= x_{p,1}\end{aligned}\tag{1}$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y_p(t) \in \mathbb{R}$ es la salida y $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado de la planta. En forma compacta

$$\dot{x}_p = F_p(x_p); y_p = x_{p,1}$$

Se asume a lo largo del trabajo que la planta es al menos C^1 , $f_p(0) = 0$, $g_p(0) \neq 0$ y la matriz

$$A_p = \left. \frac{\partial F_p}{\partial x_p} \right|_{x_p=0} = D_{x_p} F_p(0) \quad (2)$$

asociada con la linealización del sistema en el origen es estrictamente Hurwitz estable. Cuando no se cumple con la propiedad de estabilidad de la planta es posible aplicar la estructura CMI si el modelo M es Hurwitz estable, con lo que se logra la estabilidad de la conexión en lazo cerrado para algunas plantas inestables (Alvarez Gallegos y Zazueta Rubio, 1998). Por otra parte, es común encontrar plantas de grado relativo completo en varios sistemas físicos y químicos, entre los que se pueden destacar los servomecanismos con actuadores con motores eléctricos y algunos tipos de reactores químicos (Henson y Seborg, 1991; Khalil, 1992). Lo anterior significa que la condición de grado relativo completo de la planta es aplicable a muchos problemas de control práctico encontrados en la industria y la investigación y no es muy restrictiva. Por último, el método presentado a continuación considera sistemas de una entrada y una salida. Es posible aplicar el mismo diseño a sistemas de varias entradas y salidas con la condición de que el sistema sea de fase mínima y el número de entradas sea igual al número de salidas. La extensión al caso de número de entradas diferente al número de salidas o de sistemas de fase no mínima son problemas abiertos y no se consideran aquí.

El modelo matemático de la planta (M en la figura (2)) está definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m,i} &= x_{m,i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{m,n} &= f_m(x_m) + g_m(x_m)u \\ y_m &= x_{m,1} \end{aligned} \quad (3)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y_m(t) \in \mathbb{R}$ es la salida y $x_m(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del modelo. Igualmente se supone que $f_m(0) = 0$, $g_m(0) \neq 0$, $f_m \in C^1$. Como se

mencionó anteriormente este modelo actúa como un observador en lazo abierto de la planta y se requiere la estabilidad del origen, es decir $D_{x_m} f_m(0)$ debe ser estrictamente Hurwitz estable.

El bloque regulador (R en la figura (2)) es un sistema lineal, estable, definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{r,i} &= x_{r,i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{r,n} &= -a_{1,r}x_{r,1} - \dots - a_{n,r}x_{r,n} + a_{1,r}(y_p - y_m) = f_r(x_r, y_p, y_m) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $x_r \in \mathbb{R}^n$ es el estado del regulador. La estabilidad de este bloque implica que el polinomio

$$s^n + a_{n,r}s^{n-1} + a_{n-1,r}s^{n-2} + \dots + a_{1,r} = 0 \quad (5)$$

tiene raíces con parte real negativa. Este regulador se obtiene a partir de un filtro pasabajas de orden n cuya función de transferencia está dada por

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{(as + 1)^n}$$

donde el parámetro a se utiliza como una especie de parámetro de “sintonización” para compensar el error de modelado entre planta y modelo (Morari y Zafiriou, 1989). En general los únicos requisitos del bloque regulador son su estabilidad y que su ganancia en estado estacionario sea la unidad. Así aun cuando es posible usar un bloque regulador con dinámica no lineal por simplicidad en el análisis se escogió un sistema lineal.

Como se mencionó anteriormente el diseño de la ley de control que genera el bloque C de la figura (2) se basa en una especie de linealización entrada/salida por retroalimentación del estado de un sistema aumentado. Para describir este nuevo sistema aumentado, es necesario definir un conjunto de variables auxiliares que nos servirán para utilizar esta técnica de diseño y simplificar el análisis de estabilidad.

El objetivo de los siguientes párrafos es formar el sistema aumentado con algunas variables originales y las variables auxiliares y linealizar la relación entrada-salida del sistema global por medio de una retroalimentación parcial de estado.

Se definen las siguientes variables auxiliares

$$\begin{aligned} e_i &= x_{p,i} - x_{m,i} \\ y_i &= x_{m,i} + x_{r,i} - z_i \end{aligned} \quad (6)$$

donde $i = 1 \dots n$, y z es un vector de referencia de dimensión n definido por

$$z = (\tilde{z} \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

con $\tilde{z}$ un valor constante lo suficientemente pequeño. Es posible cambiar este vector de referencias para lograr otros objetivos de control como el seguimiento de una trayectoria como se verá en una sección posterior del trabajo. Sea la variable $y = (y_1 \quad \dots \quad y_n)$. Usando (6) se obtienen los siguientes vectores,

$$\begin{aligned} x_p &= e + y - x_r + z \\ x_m &= y - x_r + z. \end{aligned}$$

Haciendo uso de las definiciones previas se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{y}_n &= f_m(x_m) + g_m(x_m)u + f_r(x_r, e_1). \end{aligned}$$

Si se utiliza el control

$$u = -\frac{f_m(x_m) + f_r(x_r, e_1) - f_y(y)}{g_m(x_m)} \quad (7)$$

donde (f_m, g_m) , f_r están definidas en (3) y (4), y f_y está dada por

$$f_y(y) = -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n,$$

entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para la dinámica de la variable auxiliar y ,

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{y}_n &= -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n = f_y(y). \end{aligned} \quad (8)$$

Las constantes α_i se escogen de tal manera que el polinomio característico de la matriz de linealización de este sistema (8), el cual está definido por

$$s^n + \alpha_n s^{n-1} + \alpha_{n-1} s^{n-2} + \dots + \alpha_1 = 0 \quad (9)$$

tenga todas sus raíces con parte real negativa.

Usando las variables auxiliares definidas anteriormente (e, y) y definiendo como el estado completo del sistema a $\zeta = (x_r, e, y)^T$, el sistema CMI en lazo cerrado queda definido en las coordenadas ζ por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_{r,i} &= x_{r,i+1} \\ \dot{x}_{r,n} &= -a_{1,r}x_{r,1} - \dots - a_{n,r}x_{r,n} + a_{1,r}e_1 \\ \dot{e}_i &= e_{i+1} \\ \dot{e}_n &= f_p(x_p) - f_m(x_m) + (g_p(x_p) - g_m(x_m))u \\ \dot{y}_i &= y_{i+1} \\ \dot{y}_n &= -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n \end{aligned} \quad (10)$$

para $i = 1 \dots n-1$, u definida en (7), $(f_p(x_p), g_p(x_p))$ definidas en (1) se evalúan para $x_p = e + y - x_r + z$ y $(f_m(x_m), g_m(x_m))$ definidas en (3) se evalúan para $x_m = y - x_r + z$.

El conjunto de ecuaciones dado en (10) es lo que llamamos el modelo matemático del CMI, o simplemente CMI y esta forma es la que se analizará a lo largo del trabajo. Este conjunto de ecuaciones cuando planta y modelo son idénticos, son conocidos como CMI nominal. Cabe mencionar que cuando existe una diferencia entre la planta y el modelo, la definición de la acción de control u permanece inalterada.

Una de las características más interesantes de la estructura CMI es el hecho de regular con error cero una referencia constante aún en el caso de que la planta y el modelo no sean idénticos. Para que se cumpla este hecho es necesario que exista un equilibrio asintóticamente estable del sistema presentado en (10). Esto motiva el análisis

para la búsqueda de equilibrios y su robustez.

A continuación analizaremos la estabilidad del sistema CMI en varios casos: el caso nominal, una perturbación constante con modelo perfecto y una perturbación en función del estado.

II.9 ANALISIS DE ESTABILIDAD DE LA ESTRUCTURA CMI NOMINAL

En esta sección se analiza la estabilidad del CMI considerando que el modelo de la planta es perfecto. A este caso lo llamamos el CMI NOMINAL. Para demostrar la estabilidad del CMI nominal usaremos el método indirecto de Lyapunov. Considérese el siguiente lema.

Lema : 1 *Si la planta y el modelo son idénticos y la planta sin forzar ($u = 0$) tiene un equilibrio asintóticamente estable en el origen, entonces la matriz jacobiana A asociada con la linealización en el origen del CMI definido por (10) es estrictamente Hurwitz estable. Además, los valores propios de A corresponden a los valores propios de la matriz A_p definida en (2) y las raíces de los polinomios definidos en (5) y (9).*

Prueba:

De acuerdo a (10), defínase ϕ_e como

$$\phi_e = \dot{e}_n = f_p(x_p) - f_m(x_m) + (g_p(x_p) - g_m(x_m)) u \quad (11)$$

con u definida en (7).

En las coordenadas $\zeta = (x_r, e, y)$ el sistema tiene un equilibrio en el origen cuando la planta y el modelo son idénticos. Entonces la matriz jacobiana asociada con la

linealización de (10) en el origen está dada por

$$A = \begin{pmatrix} A_r & A_{1,r} & 0 \\ 0 & A_e & 0 \\ 0 & 0 & A_y \end{pmatrix} \quad (12)$$

donde

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{1,r} & -a_{2,r} & \dots & -a_{n,r} \end{pmatrix}, A_{1,r} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,r} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ D_{e_1}\phi_e(0) & D_{e_2}\phi_e(0) & \dots & D_{e_n}\phi_e(0) \end{pmatrix}, A_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_n \end{pmatrix}. \quad (14)$$

En el caso nominal la matriz A_e es idéntica a la matriz A_p de la planta (definida en la ecuación(2)) la cual, por hipótesis, es estrictamente Hurwitz estable. Por otra parte, la matriz (12) es triangular superior por bloques, por lo tanto, sus valores propios corresponden a los valores propios de las matrices de su diagonal, en este caso

$$\lambda(A) = \lambda(A_p) \cup \lambda(A_y) \cup \lambda(A_r)$$

donde $\lambda(A)$ denota los valores propios de la matriz A . Los valores propios de las matrices A_r y A_y se escogen por diseño de tal manera que sean matrices estrictamente Hurwitz estables; por lo tanto, la matriz A es estrictamente Hurwitz estable. Con esto queda comprobado el lema (1) y la estabilidad local del CMI nominal. ■

II.10 ESTABILIDAD FRENTE A PERTURBACIONES INTERNAS Y EXTERNAS

Uno de los problemas de control más importantes es la estabilidad de un sistema frente a perturbaciones o incertidumbres en el modelo dinámico utilizado para el diseño o síntesis de un controlador en particular.

En esta sección se analiza la estabilidad del CMI frente a varias clases de perturbaciones. En particular se consideran dos casos: el primero la perturbación es una constante que actúa sobre la salida y el segundo, la perturbación es función del estado, ya sea del tipo de variación paramétrica o de otro tipo que pueda representarse como un sistema definido por

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x)$$

donde $f(x)$ es el sistema nominal y $\Delta f(x)$ es la perturbación. Estas perturbaciones pueden ser producidas por cambios graduales en la planta, cambios en la consigna de control, errores de modelado o una perturbación externa.

II.10.1 PERTURBACION CONSTANTE

La estabilidad del CMI perturbado por una constante es analizada a continuación.

Se supone que la perturbación actúa sobre la salida de la planta y que el modelo es perfecto.

Para demostrar que el CMI rechaza perturbaciones constantes dividiremos el análisis en dos partes:

- 1) Mostraremos que el equilibrio para el caso nominal del CMI con la perturbación

de salida sigue siendo el origen.

- 2) Mostraremos que el CMI perturbado regula la referencia deseada.

En esta sección se supone que la planta está definida por el siguiente modelo matemático

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,i} &= x_{p,i+1} \quad i = 1..n-1 \\ \dot{x}_{p,n} &= f_m(x_p) + g_m(x_p)u,\end{aligned}\tag{15}$$

es decir, se conoce el modelo exacto del sistema.

La perturbación constante suponemos que actúa en la salida de la planta, como se ilustra en la figura (3).

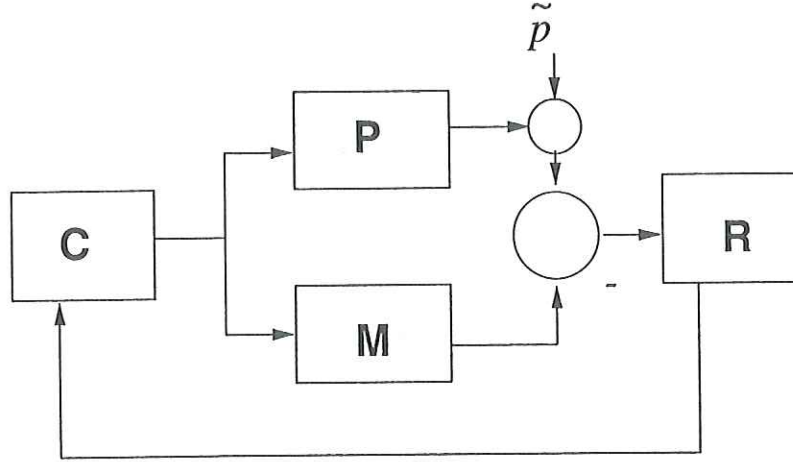


Figura 3: Diagrama a bloques del CMI con una perturbación constante en la salida.

Como se mencionó previamente primero mostraremos que el CMI nominal con una perturbación constante mantiene al origen como un equilibrio.

Es posible escribir de una forma compacta al CMI (10) de la siguiente manera

$$\dot{\zeta} = \phi(\zeta).\tag{16}$$

Los equilibrios del CMI se dan cuando $\phi(\zeta) = 0$, es decir, $\bar{x}_{1,r} = \bar{e}_1, \bar{x}_{2,r} = \dots = \bar{x}_{n,r} = 0, \bar{e}_2 = \dots = \bar{e}_n = 0, \bar{y}_1 = \dots = \bar{y}_n = 0$.

Si suponemos que existe un equilibrio para el CMI definido en (10), esto implica que la siguiente ecuación debe satisfacerse

$$f_m(\tilde{z}) - \frac{g_m(\tilde{z})}{g_m(\tilde{z} - \bar{e}_1)} f_m(\tilde{z} - \bar{e}_1) = 0 \quad (17)$$

donde $z = (\tilde{z}, 0, \dots, 0)$ es la referencia a seguir por el CMI y $\bar{e}_1$ es una constante. Por las definiciones de variables del CMI es obvio que se debe cumplir la condición de $\bar{e}_1 = \bar{x}_{r,1}$ para que se de la existencia de equilibrios.

Nota: la barra sobre una variable implica un valor constante, en general este valor denota el de la variable en el punto de equilibrio.

Ahora bien, del diagrama a bloques (3) se puede ver que el valor de $\bar{e}_1$ en el punto de equilibrio debe ser

$$\bar{e}_1 = \bar{x}_{p,1} + \tilde{p} - \bar{x}_{m,1}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (17) se tiene que

$$f_m(\tilde{z})g_m(\tilde{z} - \bar{x}_{p,1} - \tilde{p} + \bar{x}_{m,1}) - f_m(\tilde{z} - \bar{x}_{p,1} - \tilde{p} + \bar{x}_{m,1})g_m(\tilde{z}) = 0$$

que tiene una solución cuando

$$-\bar{x}_{p,1} - \tilde{p} + \bar{x}_{m,1} = 0,$$

es decir, cuando $\bar{e}_1 = 0$. Esto tiene como resultado que un equilibrio del CMI nominal con una perturbación constante actuando en la salida sigue siendo el origen del espacio de estado de las variables transformadas (x_r, e, y) .

La estabilidad local del origen del CMI nominal se analizó en la sección anterior y está definida por el lema (1). Si este lema se satisface posible concluir la estabilidad del CMI nominal cuando se presenta una perturbación constante que actúa en la salida de la planta.

Ahora bien, el hecho de que el equilibrio sea el origen implica que $\bar{e}_1 = \bar{x}_{r,1} = 0$ y usando la definición de variables del CMI se tiene que

$$\bar{x}_{p,1} = \bar{e}_1 + \bar{y}_1 - \bar{x}_{r,1} + \tilde{z},$$

de donde

$$\bar{x}_{p,1} = \tilde{z}.$$

Es decir, la salida de la planta tiende a la referencia deseada. Por lo tanto queda demostrado que el CMI nominal rechaza la perturbación constante de salida y se mantiene la estabilidad local del origen.

II.10.2 PERTURBACION EN FUNCION DEL ESTADO

En esta sección se analiza la estabilidad de la estructura CMI para el caso de una perturbación o incertidumbre función del estado. Se puede decir que este tipo de perturbación es una de las más genéricas puesto que se presenta en casi cada sistema de control que se diseña en función de un modelo. Dentro de esta clase de perturbaciones están incluidas formas tales como: variaciones paramétricas, cambios graduales en la planta y errores de modelado. También es posible incluir en este tipo de perturbaciones las que actúan en forma aditiva sobre la entrada de control, puesto que es posible agruparlas dentro del término $\Delta g_m(x_p)u$ que se definirá posteriormente.

El modelo de la planta que se usará en este análisis está dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p,i} &= x_{p,i}; \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{p,n} &= f_m(x_p) + g_m(x_p)u + \Delta f_m(x_p) + \Delta g_m(x_p)u \end{aligned} \tag{18}$$

lo que implica

$$f_p(x_p) = f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p)$$

y

$$g_p(x_p) = g_m(x_p) + \Delta g_m(x_p)$$

donde $f_p(0) = 0$ (se consideran perturbaciones Δf_m evanescentes), $g_p(0) \neq 0$ y el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de la planta, es decir, la matriz jacobiana asociada con la linealización alrededor del origen es estrictamente Hurwitz estable.

Suposición 1 *Supóngase que existe una solución de la ecuación*

$$f_p(\tilde{z}) - \frac{g_p(\tilde{z})}{g_m(\tilde{z} - \bar{e}_1)} f_m(\tilde{z} - \bar{e}_1) = 0 \quad (19)$$

donde f_p, g_p son las definidas anteriormente, $\tilde{z}$ es la referencia a seguir por el CMI y $\bar{e}_1$ es una constante.

Ahora si usamos como planta a (18) en (10), de acuerdo a lo visto en la sección anterior (II.10.1) el hecho de que exista una solución de esta ecuación (19), implica que el CMI perturbado tiene un equilibrio en

$$\bar{\zeta} = (\bar{e}, \bar{x}_r, \bar{y}) \quad (20)$$

donde

$$\bar{e} = (\bar{e}_1, 0, \dots, 0)$$

$$\bar{x}_r = (\bar{e}_1, 0, \dots, 0)$$

$$\bar{y} = (0, \dots, 0)$$

La estabilidad del equilibrio está definida por el siguiente lema.

Lema : 2 *Si se cumplen las especificaciones de la suposición (1) y la matriz $\tilde{A}$ definida en (26) tiene sus valores propios con parte real negativa, entonces, el equilibrio $\bar{\zeta}$ definido en (20) del CMI perturbado es asintóticamente estable.*

Para probar el lema usaremos el método indirecto de Lyapunov.

La matriz A asociada con la linealización del CMI perturbado alrededor del equilibrio $\bar{\zeta}$ está definida por

$$A = \begin{pmatrix} A_r & A_{re} & 0 \\ A_{er} & A_e & A_{ey} \\ 0 & 0 & A_y \end{pmatrix} \quad (21)$$

donde

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial e_1} & \frac{\partial \phi_e}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial \phi_e}{\partial e_n} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$A_{er} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial x_{r,1}} & \dots & \frac{\partial \phi_e}{\partial x_{r,n}} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$A_{ey} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \phi_e}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$A_{re} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,r} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

ϕ_e está definida en (11), A_r y A_y están definidas en (13) y (14) respectivamente.

Defina la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_r & A_{re} \\ A_{er} & A_e \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Los valores propios de la matriz A están definidos por las raíces de

$$\lambda(A) = \det(\lambda I - A_y) \det(\lambda I - \tilde{A}) = 0$$

con $\tilde{A}$ definida en (26).

El polinomio característico de la matriz $\tilde{A}$ es

$$\lambda^{2n} + q_{2n}\lambda^{2n-1} + \dots + q_2\lambda + q_1 \quad (27)$$

donde

$$q_j = \sum_{k=1}^j b_k d_{j-k+1} - c_j a_{1,r}, \quad j = 1 \dots n; \quad (28)$$

$$q_{n+i} = \sum_{k=i+1}^n b_k d_{n+i-k+1} - b_i - d_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad (29)$$

$$q_{2n} = -b_n - d_n; \quad (30)$$

$$b_i = \left. \frac{\partial \phi_e}{\partial e_i} \right|_{\bar{\zeta}}, \quad c_i = \left. \frac{\partial \phi_e}{\partial x_{r,i}} \right|_{\bar{\zeta}}, \quad d_i = -a_{i,r}, \quad i = 1 \dots, n \quad (31)$$

en ciertos casos es posible hacer que este polinomio característico tenga todas sus raíces con parte real negativa (Alvarez Gallegos y Zazueta Rubio, 1998). Esto garantiza que todos los valores propios de la matriz A del CMI perturbado tienen parte real negativa.

Con esto queda comprobada la estabilidad del CMI perturbado y la validez del lema (2).

Resta demostrar que la perturbación no afecta la regulación, es decir, que la salida de la planta tiende a la referencia deseada.

Una vez más, el hecho de que existe un equilibrio $\bar{\zeta}$ para el CMI perturbado y que éste es estable, implica que

$$\bar{y}_1 = 0,$$

lo que a su vez implica que, $x_{p,1} = \tilde{z}$. Así pues, la salida de la planta tiende a la referencia deseada.

Comentario: Una de las suposiciones a priori del análisis anterior es saber la localización del equilibrio del CMI perturbado. Es posible eliminar esta suposición sin cambio en el análisis, si la referencia a seguir por el CMI es cero. En este caso la posición

del equilibrio es el origen y lo que se necesita conocer es sólo la función que define a la perturbación. En ambos casos el análisis sirve para establecer la estabilidad del CMI perturbado si las funciones que definen la perturbación cumplen con los requisitos del análisis presentado.

Para $\tilde{z} = 0$ se tiene un único equilibrio en el origen. Es posible por medio del teorema de la función implícita, mostrar que se tendrá un equilibrio cerca del origen, para referencias pequeñas. Esto se cumple si la linealización del modelo no forzado no tiene valores propios en el origen del plano complejo, vea (Alvarez Gallegos y Zazueta Rubio, 1998).

II.11 RESUMEN DEL CAPITULO

El objetivo principal de esta sección fue dar una descripción de la estructura de control con modelo interno (CMI), así como familiarizar al lector en la notación que se usará a lo largo del trabajo.

También se mostró el análisis de la estabilidad local de la estructura CMI para varios casos, a saber:

- El caso del CMI NOMINAL, que comprende aquel cuando se tiene acceso a un modelo perfecto de la planta.
- El caso de modelo perfecto de la planta, pero con una perturbación constante que actúa en la salida de la planta.
- El caso de una perturbación en la planta en función del estado. Este caso es el más general y puede ser ocasionado por errores en el modelado o por una variación paramétrica gradual en la planta.

El análisis de estabilidad local se realizó usando el método indirecto de Lyapunov.

CAPITULO III

ANALISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA DEL CMI

En este capítulo se presenta un análisis de estabilidad de la estructura CMI con una herramienta diferente de la presentada en el capítulo anterior. Este nuevo análisis incluye el estudio de la estabilidad y de la robustez del sistema en lazo cerrado frente a incertidumbres paramétricas.

Los resultados de este capítulo se pueden sintetizar en el cálculo de una medida de robustez para el CMI frente a variaciones paramétricas. La medida de robustez que se presenta se obtiene directamente a partir del modelo nominal de diseño del CMI. Esto quiere decir que la estimación de robustez presentada, aunque conservadora, es útil y fácil de obtener. Lo anterior nos permite estimar de manera general una cota para las perturbaciones toleradas por la estructura CMI con la acción de control nominal presentada en el capítulo anterior.

En esta sección hablamos de robustez en el sentido de mantener la estabilidad cuando se presenta una perturbación o una incertidumbre en el sistema. En la literatura el término se conoce como estabilidad robusta ("robust stability").

La perturbación puede ser debida a errores de modelado, que es la situación normal en cada lazo de control, cambios en la consigna de control, cambios graduales en las características de la planta o perturbaciones exógenas.

En este capítulo se describe primero el problema de variación paramétrica, posteriormente se presenta el análisis de estabilidad y robustez para el CMI. Finalmente se dan las conclusiones de los análisis realizados.

III.1 EL PROBLEMA DE VARIACION PARAMETRICA

El problema de variación paramétrica se puede definir de la siguiente manera: dado un sistema nominal

$$\dot{x} = f(x)$$

suponga que este sistema posee un equilibrio estable en $x = \bar{x}$, es decir, $f(\bar{x}) = 0$ y que $D_x f(\bar{x})$ tiene todos sus valores propios con parte real negativa. Ahora considere que se presenta un cambio en los parámetros del sistema o una perturbación externa. Esto nos obliga a usar un nuevo modelo donde se tome en cuenta dicho cambio. Suponemos que el sistema perturbado se puede representar por

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x, \tilde{p})$$

donde $\Delta f(x, \tilde{p})$ es el modelo considerado para la perturbación y $\tilde{p}$ denota la desviación de un vector de parámetros con respecto a su valor nominal que, sin pérdida de generalidad, puede tomarse como cero. Supondremos que este valor, aunque incierto, es constante.

Este nuevo sistema, dependiendo de la perturbación y la magnitud de la misma,

puede tener un equilibrio igual o diferente al nominal. Además, el equilibrio puede ser estable, inestable o inclusive puede desaparecer.

El problema por estudiar aquí es estimar una medida general de robustez en función de los parámetros del sistema nominal. Además, se trata de cuantificar la magnitud de las perturbaciones toleradas por la estructura de tal manera que el equilibrio original y su estabilidad no desaparezcan.

Entendemos como robustez que el sistema tolere cambios en sus parámetros o perturbaciones, sin menoscabo de su estabilidad.

Se dirá que un sistema es más robusto que otro si tiene alguna de las siguientes propiedades:

- Tolera un cambio mayor en sus parámetros, conservando su estabilidad .
- Para los mismos valores paramétricos, su cuenca de atracción es mayor.

En el análisis de SNL se dice que una perturbación es evanescente si el equilibrio del sistema perturbado es igual al equilibrio del sistema nominal. Si la posición del equilibrio cambia o éste desaparece, se dice que la perturbación es no evanescente. En el análisis presentado aquí se consideran ambos tipos de perturbaciones.

III.2 UNA MEDIDA DE ROBUSTEZ PARA EL CMI

En esta sección se analiza el CMI representado en la ecuaciones (10), aplicando a la estructura los resultados generales para un tipo de SNL presentados por Wang y Michel (Wang y Michel, 1994). Como resultado del análisis se obtendrá una medida de la robustez de la estructura frente a variaciones paramétricas o perturbaciones que

cumplan con los requisitos del análisis.

Se asume a lo largo de esta sección que dicha variación es producto de un error en el modelado, situación natural en todo problema de control. También se puede dar el caso de que la variación paramétrica sea debida a una perturbación externa, ya que el análisis es general y sólo se requiere que la perturbación satisfaga cierto criterio de acoplamiento. Se requiere que la perturbación actúe en la misma ecuación donde el sistema tiene su entrada de control.

La medida de robustez se calcula directamente a partir del modelo nominal del CMI. Esta medida nos permite estimar una cota en la variación de los parámetros del sistema o la magnitud del error de modelado tal que el CMI permanezca estable.

Se analizan tres casos, dos de ellos particulares y uno general:

- Caso 1.

La planta y el modelo difieren y están relacionados por

$$f_p(x_p) = f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p), \quad g_m = g_p = c$$

con c una constante.

- Caso 2.

La planta y el modelo difieren y están relacionados por

$$f_p(x_p) = f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p), \quad g_m + \Delta g_m = g_p = c$$

con c una constante.

- Caso 3.

Este es el caso general:

$$f_p(x_p) = f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p)$$

y

$$g_p(x_p) = g_m(x_p) + \Delta g_m(x_p).$$

Se analizarán estos tres casos para tener una medida gradual de complejidad y dar una idea de la magnitud de las variaciones de la medida de robustez en cada uno de ellos. Cabe mencionar que el caso 2 es el que se presenta en la realización del CMI para nuestra planta experimental (ver el capítulo VII).

III.2.1 ANALISIS DEL CASO 1

$$f_p = f_m + \Delta f_m, g_m = g_p = \text{cte.}$$

En este apartado se analiza el caso 1 descrito anteriormente, es decir, la planta y el modelo están relacionados por

$$f_p(x_p) = f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p), g_m = g_p = c.$$

Antes del análisis se introducen unas normas matriciales y un lema que serán útiles posteriormente.

A lo largo del trabajo se usan las siguientes normas matriciales

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

y

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

En el análisis de los casos 1 y 2 haremos uso del siguiente lema (Wang y Michel, 1994).

Lema : 3 :

Considere un sistema

$$\dot{x} = f(x) + h(x) \tag{32}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f, h \in C^1[U, \mathbb{R}^n]$, $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, con $h(x)$ como término perturbador.

Suponga que el sistema cumple con las siguientes condiciones:

- B1)

El sistema $\dot{x} = f(x)$ tiene un equilibrio exponencialmente estable en el origen, $f, h \in C^1[U, \mathbb{R}^n]$, $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, donde U es una vecindad del origen del espacio de estado.

- B2)

La linealización de $h(x)$, dada por $D_x h(0) = \Delta A$, satisface la condición

$$\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A\|_1 < \frac{1}{\|P\|_\infty} \quad (33)$$

donde $P = P^T > 0$ es la solución de la ecuación de Lyapunov $PA + A^T P = -I$.

Entonces la solución $x = 0$ del sistema (32) es estable.

PRUEBA:

La prueba del lema 3 se puede consultar en el apéndice.

Ahora estamos listos para analizar la estabilidad del controlador CMI para el caso simple definido en esta sección (caso 1 pag. 38).

Considérese el sistema definido por (10). Suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

- A1)

El sistema definido por (10), suponiendo que planta y modelo son iguales, ($f_p(\cdot) = f_m(\cdot)$), posee un equilibrio estable en el origen, es decir la matriz jacobiana A asociada con la linealización alrededor del origen de (10) es estrictamente Hurwitz

estable (e.g. tiene todos sus valores propios en el lado izquierdo del plano complejo).

- A2)

$f_p(\cdot) = f_m(\cdot) + \Delta f_m(\cdot)$, $f_p(0) = 0$, $f_m(0) = 0$, donde Δf_m es el término perturbador, $g_p = g_m = c$ con c una constante y $\tilde{z} = 0$.

- A3)

La planta $(f_p(\cdot), g_p)$ sin forzar ($u = 0$) tiene al origen como un equilibrio exponencialmente estable.

- A4)

Se mantiene la siguiente relación

$$\left\| \frac{\partial \Delta f_m}{\partial e}(0) \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial \Delta f_m}{\partial x_r}(0) \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial \Delta f_m}{\partial y}(0) \right\|_{\infty} < \frac{1}{2 \|P\|_{\infty}} \quad (34)$$

donde $P = P^T > 0$ es la única solución de

$$PA + A^T P = -I$$

y A es la matriz jacobiana asociada a la linealización del CMI nominal (10) alrededor del origen, cuando la planta y el modelo son idénticos.

Lema : 4 *Si se satisfacen las condiciones A1 hasta A4, entonces, el origen del CMI perturbado es exponencialmente estable.*

PRUEBA:

El sistema (10) se puede expresar como sigue (de la suposición A2)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{r,i} &= x_{r,i+1} \\
\dot{x}_{r,n} &= -a_{1,r}x_{r,1} - \dots - a_{n,r}x_{r,n} + a_{1,r}e_1 = f_r(x_r) + a_{1,r}e_1 \\
\dot{e}_i &= e_{i+1} \\
\dot{e}_n &= f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p) - f_m(x_m) = \phi_1(x_r, e, y) \\
\dot{y}_i &= y_{i+1} \\
\dot{y}_n &= -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n = f_y(y)
\end{aligned} \tag{35}$$

donde $i = 1 \dots n-1$ y $f_m(x_p), \Delta f_m(x_p), f_m(x_m)$ se evalúan para sus argumentos respectivos.

Reescribiendo (35) de una manera compacta

$$\begin{aligned}
\dot{x}_r &= F_{x_r}(x_r, e) \\
\dot{e} &= F_e(x_r, e, y) + \Delta F_e(x_r, e, y) \\
\dot{y} &= F_y(y)
\end{aligned} \tag{36}$$

Supóngase primeramente que el término perturbador

$$\Delta F_e = 0,$$

donde $\Delta F_e = (\underbrace{0}_n, \underbrace{0 \dots \Delta f_m}_n, \underbrace{0}_n)^T$. Posteriormente se eliminará esta restricción.

Bajo estas condiciones la linealización alrededor del origen de (35) es

$$A = \begin{bmatrix} A_{x_r} & A_{1x_r} & 0 \\ 0 & A_e & 0 \\ 0 & 0 & A_y \end{bmatrix} \tag{37}$$

donde

$$A_e = D_e F_e(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \underbrace{D_e f_m(0)}_{\in \mathbb{R}^{1 \times n}} \end{bmatrix}$$

$$A_{1x_r} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{x_r} = D_{x_r} F_{x_r}(0)$$

$$A_y = D_y F_y(0)$$

Si el sistema regulador (x_r) , el modelo nominal de la planta (x_p) y el sistema y son estables, entonces los valores propios de la matriz A , dada por (37), son los valores propios de estos tres subsistemas, e.g.

$$\lambda(A) = [\lambda(A_e), \lambda(A_{x_r}), \lambda(A_y)]$$

donde $\lambda(A_e)$ representa los valores propios de la matriz de linealización en el origen del subsistema e , que en este caso coinciden con los valores propios del modelo nominal de la planta; $\lambda(A_{x_r})$ son los valores propios del subsistema regulador y $\lambda(A_y)$ los valores propios del subsistema y .

Lo anterior permite asegurar, por A3, que la matriz A nominal es estrictamente Hurwitz estable, y por diseño, las matrices de los sistemas regulador (x_r) y del subsistema (y) , A_{x_r} y A_y respectivamente, son estrictamente Hurwitz estables.

La existencia de $P = P^T > 0$, que es la única solución de

$$PA + A^T P = -I$$

está garantizada, puesto que A es estrictamente Hurwitz.

Ahora suponga que el término $\Delta F_e \neq 0$, es decir, $\Delta f_m \neq 0$. Esto produce un término perturbador ΔA en la linealización, dado por

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k\Delta_{x_r} & k\Delta_e & k\Delta_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

donde las $k\Delta_x$ y los 0 representan matrices de dimensión $n \times n$, definidas por

$$k\Delta_e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{e_1}\Delta f_m(0) & \dots & D_{e_n}\Delta f_m(0) \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$k\Delta_{x_r} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{x_{r,1}}\Delta f_m(0) & \dots & D_{x_{r,n}}\Delta f_m(0) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$k\Delta_y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{y_1}\Delta f_m(0) & \dots & D_{y_n}\Delta f_m(0) \end{bmatrix}. \quad (41)$$

En general, los términos diferentes de cero, aparecen en el n -ésimo renglón de cada matriz. Los términos de dicho renglón, de cada matriz, están dados por

$$D_e\Delta f_m(0), D_{x_r}\Delta f_m(0), D_y\Delta f_m(0).$$

El sistema (35), cuando el término perturbador $\Delta f_m \neq 0$, se puede expresar como sigue

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \Delta A(\zeta) + m(\zeta) + m_1(\zeta) \quad (42)$$

que puede verse como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{\zeta} = A\zeta + m(\zeta) \quad (43)$$

donde $m(\zeta)$ agrupa los términos de orden superior del sistema nominal y $m_1(\zeta)$ agrupa los términos de orden superior de la perturbación. Puesto que por suposición

$$\Delta f_m(0) = 0; f_m(0) = 0,$$

los términos de orden superior cumplen con

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|m_1(x) + m(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Esta forma (42) es la presentada en el lema 3 y bajo nuestras suposiciones cumple con los requisitos del mismo. El lema (3) demuestra la estabilidad del sistema

$$\dot{x} = f(x) + h(x)$$

que es una perturbación del sistema

$$\dot{x} = f(x).$$

En nuestro caso,

$$f(x) = Ax + m(x), h(x) = \Delta Ax + m_1(x).$$

Usando la definición de ΔA dada en (38) se evalúa la siguiente norma

$$\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A^T\|_\infty \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A^T\|_\infty &= \|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A\|_1 \\ &= \|2 \|k\Delta_e\|_\infty + 2 \|k\Delta_{x_r}\|_\infty + 2 \|k\Delta_y\|_\infty\|_\infty \\ &= 2 \{ \|k\Delta_e\|_\infty + \|k\Delta_y\|_\infty + \|k\Delta_{x_r}\|_\infty \} \end{aligned}$$

evaluando las normas individuales se obtiene

$$\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A^T\|_\infty = 2 \left\{ \left\| \frac{\partial \Delta f_m}{\partial e}(0) \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial \Delta f_m}{\partial x_r}(0) \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial \Delta f_m}{\partial y}(0) \right\|_\infty \right\}. \tag{45}$$

Ahora usando la parte última de la hipótesis A4 y sustituyendo (45) en la desigualdad (34) se tiene que

$$\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A^T\|_\infty = \frac{1}{\|P\|_\infty}$$

que era la condición faltante para usar el lema (3) para el CMI perturbado.

Entonces utilizando el lema (3) se puede concluir que el sistema CMI perturbado mantiene al origen como un equilibrio estable con lo que se concluye la prueba del lema (4). ■

III.2.2 ANALISIS DEL CASO 2

$$f_p = f_m + \Delta f_m, g_p = g_m + \Delta g_m = \text{cte.}$$

En esta sección se analiza el caso en que la planta y el modelo del CMI están relacionados por

$$f_p(x_p) = f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p), g_p = g_m + \Delta g_m = c. \quad (46)$$

con c una constante y $\tilde{z} = 0$.

Este modelo (46) de la planta se usa en las ecuaciones del CMI definidas en (10).

Suponga que se cumplen las condiciones A1 y A3 (ver página 39) del apartado anterior. Además suponga lo siguiente:

- A5)

Se cumple la siguiente relación

$$\|k_y\|_\infty + \|k_e\|_\infty + \|k_{x_r}\|_\infty < \frac{1}{2\|P\|_\infty}$$

donde P se obtiene como en la suposición (A4), y donde

$$k_y = -k_g (D_y f_m(0) + D_y F_y(0)) + k\Delta_y \quad (47)$$

$$k_e = -k_g a_{1,r} + k\Delta_e \quad (48)$$

$$k_{x_r} = -k_g (D_{x_r} f_m(0) - D_{x_r} F_{x_r}(0)) + k\Delta_{x_r} \quad (49)$$

con $k_g = \Delta g_m / g_m$ y $k\Delta_e, k\Delta_{x_r}, k\Delta_y$ se especifican como en (39, 40, 41).

Lema : 5 :

Si se cumplen las suposiciones A1, A3 y A5, entonces el CMI perturbado mantiene al origen como un equilibrio exponencialmente estable.

PRUEBA:

La prueba es muy similar al caso presentado anteriormente. Las ecuaciones del subsistema e (error) son

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= e_{i+1} \\ \dot{e}_n &= f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p) - f_m(x_m) + \Delta g_m u\end{aligned}\tag{50}$$

donde $i = 1 \dots n-1$, $f_m(x_p)$, $\Delta f_m(x_p)$ son evaluadas para $x_p = e + y - x_r + z$ y $f_m(x_m)$ es evaluada para $x_m = y - x_r + z$.

El sistema CMI en lazo cerrado posee un equilibrio en el origen $\zeta = 0 \in \mathbb{R}^{3n}$ asumiendo que $\tilde{z} = 0$ y que la planta y el modelo son iguales. Como un comentario esto es válido aún cuando $x_{1,p} = \tilde{z} \neq 0$.

La matriz de linealización alrededor del origen del CMI nominal ($\Delta f_m = 0, \Delta g_m = 0$) es la definida previamente en la ecuación (37). Cuando los términos de perturbación no son cero ($\Delta f_m \neq 0, \Delta g_m \neq 0$), ΔA está definido por

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{x_r} & K_e & K_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{51}$$

donde los "0" y " K_x " representan matrices de dimensión $n \times n$, y

$$K_{x_r} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ k_{x_r} \end{bmatrix},$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ k_e \end{bmatrix},$$

$$K_y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ & & k_y \end{bmatrix},$$

donde los vectores $\{k_e, k_{x_r}, k_y\} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ se definen en (48, 49 y 47).

La norma de la linealización del término perturbador está dada por

$$\|\Delta A\|_\infty = \|\Delta A^T\|_\infty = \|k_{x_r}\|_\infty + \|k_e\|_\infty + \|k_y\|_\infty \quad (52)$$

Usando la suposición A5 obtenemos

$$\|k_{x_r}\|_\infty + \|k_e\|_\infty + \|k_y\|_\infty < \frac{1}{2\|P\|_\infty}$$

o puesto de otra manera

$$\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A^T\|_\infty < \frac{1}{\|P\|_\infty} \quad (53)$$

La relación (53) es necesaria para poder hacer uso del lema 3.

Nótese que el sistema CMI perturbado se puede poner de la forma

$$\dot{x} = Ax + \Delta Ax + m(x) + m_1(x)$$

que puede verse como una perturbación del sistema

$$\dot{x} = Ax + m(x)$$

donde A y ΔA han sido definidas previamente y m, m_1 agrupan los términos de orden superior que se desvanecen en el origen. En este caso la perturbación está dada por

$$\Delta f_m(x_p) + \Delta g_m u$$

Puesto que este sistema cumple con las condiciones del lema 3, se concluye que el CMI perturbado posee un equilibrio exponencialmente estable en el origen. Esto finaliza la prueba del lema (5). ■

A manera de comentario, se observa que un término que contribuye muy significativamente a la disminución de la medida de robustez es el presentado en (48). Dicha contribución se puede disminuir haciendo más pequeño el valor de $a_{1,r}$ ó minimizando el error en el término Δg_m . Esto concuerda con una idea presentada por Morari y Zafriou para el CMI lineal en (Morari y Zafriou, 1989), en donde se afirma que una manera de aumentar la robustez de la estructura (CMI lineal) es haciendo más lento al sistema regulador (x_r). Cabe mencionar que esto se logra a costa de una pérdida en la velocidad de respuesta del CMI, es decir, se establece un compromiso entre velocidad de respuesta y robustez de la estructura. Además, existe un límite para el aumento en la robustez vía la disminución de la constante de tiempo del regulador; es decir, si se selecciona una constante de tiempo muy lenta la medida de robustez obtenida empieza a decrecer. Este comentario se ilustra por medio de un ejemplo en la sección V.1.2.

Los resultados del análisis presentado nos permiten determinar una cota en las perturbaciones toleradas y nos dan información sobre los parámetros que afectan de manera más significativa la robustez. Esto nos permite enfocar el modelado o la cuantificación experimental a una mejor determinación de estos parámetros para minimizar sus efectos adversos para el buen desempeño del sistema.

III.2.3 ANALISIS DEL CASO GENERAL

En esta sección se analiza el caso general del CMI, es decir, cuando

$$f_p(x_p) \neq f_m(x_p), \quad g_p(x_p) \neq g_m(x_p)$$

y la referencia a seguir es distinta de cero. En general, al cambiar la referencia $\tilde{z}$ se genera una perturbación no evanescente y la herramienta presentada anteriormente no se puede utilizar. El objetivo del análisis presentado en esta sección es doble: Por una parte, demostrar que bajo ciertas condiciones que debe cumplir la perturbación se

puede afirmar que existe un nuevo equilibrio del sistema con incertidumbres. Por otra parte, encontrar las condiciones que aseguren que este equilibrio mantiene las mismas propiedades de estabilidad que el equilibrio nominal. Para ello, como se verá en el análisis, las perturbaciones deben ser lo suficientemente pequeñas y deberán cumplir con ciertas condiciones presentadas más adelante.

En este apartado haremos uso de varios lemas y un teorema presentados a continuación (Wang y Michel, 1994).

Lema : 6 :

Sea $q \in C^2[\bar{U}, \mathbb{R}^n]$ donde U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\bar{U}$ denota la cerradura de U . Entonces existe una función $Q \in C^1[U \times U, \mathbb{R}^{n \times n}]$ que satisface las siguientes propiedades:

- a1) $q(x) - q(y) = Q(x, y)(x - y)$
- a2) $Q(x, y) = Q(y, x)$
- a3) $Q(x, x) = (Dq)(x)$ donde $(Dq)(x) = \frac{\partial q}{\partial x}(x)$
- a4) $\|Q(x, y) - Q(z, y)\|_\infty \leq \alpha \|x - z\|_\infty$

Como consecuencia del Lema 6, para cualesquiera $x, x_e, \tilde{x}_e \in U$, se tiene que

$$\|Q(x, x_e) - (Dq)(x_e)\|_\infty \leq \alpha \|x - x_e\|_\infty$$

y

$$\|Q(x, \tilde{x}_e) - (Dq)(x_e)\|_\infty \leq \alpha (\|x - x_e\|_\infty + \|\tilde{x}_e - x_e\|_\infty) \quad (54)$$

Para obtener (54) se usa la siguiente desigualdad, que es una consecuencia del lema 6 partes a1 y a2 :

$$\|Q(x, y) - Q(z, w)\|_{\infty} \leq \alpha(\|x - z\|_{\infty} + \|y - w\|_{\infty}) \quad (55)$$

para todo $x, y, z, w \in U$. La prueba del lema 6 se puede ver en (Wang y Michel, 1994)

Lema : 7 :

Sean A y ΔA dos matrices $n \times n$. Asuma que A^{-1} existe, y que $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$.

Entonces $(A + \Delta A)^{-1}$ existe y

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|}$$

donde $\|\cdot\|$, es cualquier norma matricial.

La prueba de este lema se puede ver en el apéndice.

Lema : 8 :

Para la ecuación

$$x + G(x) = 0$$

donde $x \in R^n$, $G \in C^1[R^n, R^n]$, se supone que $\|G(x)\|_{\infty} < \epsilon$ para todo $\|x\|_{\infty} \leq \epsilon$ y ϵ lo suficientemente pequeño. Entonces existe un x_0 tal que $\|x_0\|_{\infty} \leq \epsilon$ y

$$x_0 + G(x_0) = 0$$

La prueba del lema se puede ver en el apéndice.

Teorema : 1 Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x) + h(x) \quad (56)$$

que se puede ver como una perturbación del sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad (57)$$

y suponga que se cumplen las siguientes condiciones

- x_e es un equilibrio estable de (57)
- $f, h \in C^2[U, \mathbb{R}^n]$ donde U es una vecindad abierta de x_e
- Sea la matriz A la linealización del sistema (57) alrededor de x_e y $P = P^T > 0$ es la única solución de

$$PA + A^T P = -I$$

- El término perturbador h satisface

$$\|Dh(x_e)\|_\infty \leq a \quad (58)$$

$$\|h(x_e)\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|_\infty} \quad (59)$$

donde $\epsilon > 0$ satisface

$$\epsilon < \frac{a}{\alpha} \quad (60)$$

y $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_e\|_\infty \leq \epsilon\} \subset U$ donde

$$a = \frac{1}{4} \min \left\{ \|A^{-1}\|_\infty^{-1}, ((n+1)\|P\|_\infty)^{-1} \right\}$$

y α se especifica de

$$\|D_x q(x) - D_y q(y)\|_\infty \leq \alpha \|x - y\|_\infty$$

para $q(x) = Ax + m(x) + h(x)$. Aquí, $m(x)$ representa la parte no lineal de (57), es decir

$$m(x) = f(x) - Ax.$$

- La matriz A es estrictamente Hurwitz y se cumple la siguiente relación

$$\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A\|_1 < \frac{1}{\|P\|_\infty} \quad (61)$$

Si se cumplen las suposiciones anteriores, entonces el sistema perturbado (56) tiene un nuevo equilibrio $\tilde{x}_e$ que es exponencialmente estable y se mantiene la siguiente estimación

$$\|\tilde{x}_e - x_e\| < 2 \|A^{-1}\|_\infty \|h(x_e)\|_\infty \quad (62)$$

donde A es la matriz del sistema linealizado alrededor del punto x_e de (57).

A continuación se presenta la prueba del teorema anterior. Esta demostración puede verse en (Wang y Michel, 1994); sin embargo, se incluye aquí por considerarlo muy importante para el trabajo presentado.

PRUEBA: PARTE 1:

En esta parte se demostrará que existe un equilibrio $\tilde{x}_e$, y éste, satisface $|\tilde{x}_e - x_e| < \epsilon$.
Sea

$$\begin{aligned} f(x) + h(x) &= f(x) + h(x) - (f(x_e) + h(x_e)) + h(x_e) \\ &= Q(x, x_e)(x - x_e) + h(x_e) \end{aligned} \quad (63)$$

donde $Q(x, x_e) = F(x, x_e) + H(x, x_e)$ y F, H y $Q \in C^1[U \times U, R^{n \times n}]$ satisfacen las propiedades del lema 6 con respecto a $q = f, h, f + h$.

Sean $A = D_x f(x_e)$ y $\Delta A = Q(x, x_e) - A$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta A &= Q(x, x_e) - A = Q(x, x_e) - Df(x_e) \\ &= Q(x, x_e) - Df(x_e) - Dh(x_e) + Dh(x_e) \\ &= Q(x, x_e) - D(f + h)(x_e) + Dh(x_e) \end{aligned}$$

Por el lema 6,

$$\begin{aligned}\|\Delta A\|_\infty &\leq \|Q(x, x_e) - D(f + h)(x_e)\|_\infty + \|Dh(x_e)\|_\infty \\ &\leq \alpha \|x - x_e\|_\infty + \|Dh(x_e)\|_\infty\end{aligned}\tag{64}$$

Para probar que $(A + \Delta A)^{-1}$ existe cuando $\|x - x_e\|_\infty < \epsilon$ demostramos que

$$\|\Delta A\|_\infty < \frac{1}{2 \|A^{-1}\|_\infty}\tag{65}$$

cuando $\|x - x_e\|_\infty \leq \epsilon$. Por (58,60,64), para $\|x - x_e\|_\infty \leq \epsilon$, se obtiene

$$\|\Delta A\|_\infty \leq \alpha \epsilon + \|Dh(x_e)\|_\infty < \frac{\|A^{-1}\|_\infty^{-1}}{2}$$

A continuación, (65) y el lema 7 implican

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|A^{-1}\|_\infty}{1 - \|\Delta A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty} < 2 \|A^{-1}\|_\infty\tag{66}$$

donde hemos usado (65) para obtener $1 - \|\Delta A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty > 1/2$.

Sea

$$G(x) = (Q(x, x_e))^{-1}h(x_e) = (A + \Delta A)^{-1}h(x_e).\tag{67}$$

Por (63), sabemos que $\|x - x_e\|_\infty \leq \epsilon$ y, además,

$$f(x) + h(x) = 0\tag{68}$$

si y sólo si

$$(x - x_e) + G(x) = 0\tag{69}$$

Por (67,66,59) obtenemos que, para $\|x - x_e\| \leq \epsilon$,

$$\begin{aligned}\|G(x)\|_\infty &\leq \|(A + \Delta A)^{-1}\|_\infty \|h(x_e)\|_\infty \\ &< 2 \|A^{-1}\|_\infty \|h(x_e)\|_\infty \leq \epsilon\end{aligned}\tag{70}$$

Esto es $\|G(x)\|_\infty < \epsilon$ siempre y cuando $\|x - x_e\| < \epsilon$. Por el lema 8 (del punto fijo) existe un $x = \tilde{x}_e$ que satisface (69) y $\|x - x_e\| < \epsilon$. Por lo tanto, $x = \tilde{x}_e$ satisface (68), e. g., $x = \tilde{x}_e$ es un equilibrio del sistema (56).

PARTE 2 PRUEBA TEOREMA 1

A continuación se prueba que el equilibrio es exponencialmente estable. Primero reescribimos

$$\begin{aligned} f(x) + h(x) &= f(x) + h(x) - (f(\tilde{x}_e) + h(\tilde{x}_e)) \\ &= Q(x, \tilde{x}_e)(x - \tilde{x}_e) \end{aligned} \quad (71)$$

donde $Q(x, \tilde{x}_e) = F(x, \tilde{x}_e) + H(x, \tilde{x}_e)$ y Q, F y H son las funciones matriciales de la parte 1 de la presente demostración. Q, F y H satisfacen las propiedades del lema 6.

Por (71), (56) es equivalente a la siguiente ecuación :

$$\dot{x} = Q(x, \tilde{x}_e)(x - \tilde{x}_e) \quad (72)$$

Sea $A = D_x f(x_e)$, $\delta A = Q(x, \tilde{x}_e) - A$. Entonces

$$\begin{aligned} \delta A &= Q(x, \tilde{x}_e) - Df(x_e) \\ &= F(x, \tilde{x}_e) - Df(x_e) + H(x, \tilde{x}_e) \\ &= F(x, \tilde{x}_e) - Df(x_e) + H(x, \tilde{x}_e) - Dh(x_e) + Dh(x_e) \end{aligned}$$

Por la propiedad (54), que es una consecuencia del lema 6, se tiene que para $\|x - x_e\| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \|\delta A\|_\infty &\leq \alpha_1(\|x - x_e\|_\infty + \|\tilde{x}_e - x_e\|_\infty) \\ &+ \alpha_2(\|x - x_e\|_\infty + \|\tilde{x}_e - x_e\|_\infty) + \|Dh(x_e)\|_\infty \\ &< 2\alpha_1\epsilon + 2\alpha_2\epsilon + \|Dh(x_e)\|_\infty \\ &= 2\alpha\epsilon + \|Dh(x_e)\|_\infty \leq 2a + a \\ &< 4a \leq \frac{1}{(n+1)\|P\|_\infty} \end{aligned} \quad (73)$$

donde a se define en las suposiciones del teorema 1 y donde hemos usado (58,60).

Ahora , (73) implica

$$\|\delta A\|_\infty + \|\delta A\|_1 \leq \|\delta A\|_\infty + n \|\delta A\|_\infty = (n+1) \|\delta A\|_\infty < \frac{1}{\|P\|_\infty}. \quad (74)$$

Por lo tanto, por suposición del teorema 1, (74) y la suposición (61) hemos probado que $x = \tilde{x}_e$, que es un equilibrio de

$$\dot{x} = (A + \delta A)(x - \tilde{x}_e) \quad (75)$$

es exponencialmente estable. Puesto que (75) y (72) representan el mismo sistema, y son equivalentes a (56), la parte 2 del teorema está probada.

PARTE 3

Puesto que $x = \tilde{x}_e$ satisface (69), se tiene

$$(\tilde{x}_e - x_e) + G(x_e) = 0. \quad (76)$$

Por lo tanto, por (71) y (70), se obtiene

$$\|\tilde{x}_e - x_e\|_\infty = \|G(x_e)\|_\infty < 2 \|A^{-1}\|_\infty \|h(x_e)\|_\infty.$$

Por lo tanto la desigualdad (62) está probada. Esto completa la prueba del teorema 1.

■

Ahora presentamos el análisis de estabilidad del caso general del CMI.

Suponga que se cumplen las siguientes condiciones:

- D1)

$f_p(x) = f_m(x) + \Delta f_m(x)$, $g_p(x) = g_m(x) + \Delta g_m(x)$, $f_m(0) = 0$, $g_p(0) \neq 0$, $g_m(0) \neq 0$. Además, la matriz jacobiana de linealización alrededor del origen ($x_p = 0$) de la planta es estrictamente Hurwitz estable y $\tilde{z} \neq 0$ pero suficientemente pequeña.

- D2)

En las coordenadas $\zeta = (x_r, e, y)$, sea ζ_e un equilibrio del CMI original (10) cuando la planta y el modelo son iguales, es decir, cuando $\Delta f_m(x) = 0$, $\Delta g_m(x) = 0$. Los campos vectoriales $f_m, f_p, g_m, g_p \in C^2[U, \mathbb{R}^n]$, donde U es una vecindad

abierta de ζ_e . Bajo la suposición de que tenemos modelo perfecto, la matriz A correspondiente a la linealización del CMI nominal (10) alrededor de $\zeta_e = 0$ es estrictamente Hurwitz estable. Sea P la matriz obtenida como en la suposición A4 (c.f. pág. 39).

- D3)

El término perturbador $h(\zeta) = \Delta f_m(\zeta) + \Delta g_m(\zeta)u(\zeta)$ satisface

$$\begin{aligned} \|D_\zeta h(\zeta_e)\|_\infty &\leq a \\ \|h(\zeta_e)\|_\infty &\leq \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|_\infty} \end{aligned} \quad (77)$$

donde $\epsilon > 0$ satisface

$$\epsilon < \frac{a}{\alpha} \quad (78)$$

y $\{\zeta \in \mathbb{R}^{3n} : \|\zeta - \zeta_e\|_\infty \leq \epsilon\} \subset U$ donde

$$a = \frac{1}{4} \min \left\{ \|A^{-1}\|_\infty^{-1}, ((3n+1)\|P\|_\infty)^{-1} \right\}$$

y α se especifica de

$$\|D_x q(x) - D_y q(y)\|_\infty \leq \alpha \|x - y\|_\infty$$

para $q(x) = Ax + B(m(x) + h(x))$. Aquí, $m(x)$ representa la parte no lineal nominal del CMI (10) y está especificada como sigue. Escribiendo al CMI en forma compacta

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B(m(x) + h(x))$$

donde la matriz A es la linealización alrededor del origen del CMI nominal y B

$$\text{es } B = \left(\underbrace{0 \dots 0}_n \underbrace{0 \dots 1}_n \underbrace{0 \dots 0}_n \right)^T.$$

- D4)

Se cumple la siguiente relación

$$\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A\|_1 < \frac{1}{\|P\|_\infty}$$

donde $\Delta A = D_\zeta h(\zeta_e)$.

Lema : 9 *Si se cumplen las suposiciones anteriores (D1, D2, D3, D4) entonces el sistema CMI perturbado tiene un nuevo equilibrio $\tilde{\zeta}_e$, exponencialmente estable y se mantiene la siguiente estimación*

$$\|\tilde{\zeta}_e - \zeta_e\| < 2 \|A^{-1}\|_\infty \|h(\zeta_e)\|_\infty. \quad (79)$$

PRUEBA :

En esta sección se prueba que el CMI perturbado tiene un equilibrio estable distinto del origen. Para la prueba se usa el teorema 1 presentado anteriormente. Puesto que las suposiciones para el lema 9 son idénticas a las del teorema lo que resta es expresar al CMI como

$$\dot{x} = f(x) + h(x)$$

con $h(x)$ como la perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(x)$$

para poder hacer uso del teorema 1.

En nuestro caso la parte perturbadora está dada por

$$h(x) = \Delta f_m(x) + \Delta g_m(x)u(x)$$

y el sistema nominal es (10) con $f_p(\cdot) = f_m(\cdot)$, $g_p(\cdot) = g_m(\cdot)$.

Es posible reescribir de manera compacta al CMI nominal de la siguiente manera

$$\dot{\zeta} = F(\zeta)$$

y al CMI perturbado como

$$\dot{\zeta} = F(\zeta) + H(\zeta)$$

donde $H(\zeta) = (0, \dots, h(x), 0, \dots, 0)^T$.

Puesto que se cumplen las proposiciones del teorema 1, se concluye que el CMI perturbado posee un nuevo equilibrio $\zeta = \bar{\zeta}_e$, y éste es exponencialmente estable.

Esto concluye la prueba del lema (9). ■

III.3 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

En este capítulo se presentó un análisis de estabilidad y robustez general para la estructura de control con modelo interno. Como resultado del análisis se obtuvo una medida general de las perturbaciones toleradas por la estructura. El análisis de estabilidad y robustez se dividió en dos casos particulares y el caso general. El tipo de perturbaciones analizadas dan lugar a problemas de tipo evanescentes y no evanescentes.

Para todos los casos analizados se obtuvo una cota de las perturbaciones toleradas por la estructura sin menoscabo en su estabilidad, e.g. una medida de la robustez de la estructura. La medida es general y se obtiene a partir de las ecuaciones del diseño nominal del CMI.

Los resultados nos permiten identificar los términos que contribuyen de manera mas significativa a la disminución de robustez de la estructura. En particular se puede observar una regla empírica del CMI lineal propuesta por Morari y Zafriou en (Morari y Zafriou, 1989), donde se establece, que para aumentar la robustez del CMI lineal, había que hacer mas lento al sistema regulador (x_r). Como se vió en el análisis del caso

2 (ver página 45) la aseveración anterior equivale a disminuir el valor de la constante de tiempo del subsistema regulador, lo que repercute en un valor pequeño del parámetro $\alpha_{1,r}$ del subsistema regulador. Este parámetro contribuye de manera muy significativa en la disminución de robustez como se vió en la sección (III.2.2). Sin embargo, disminuir el valor de este parámetro para minimizar su contribución negativa conlleva problemas de desempeño, la respuesta del CMI se vuelve muy lenta y se presentan oscilaciones de periodo largo.

Como se comentó previamente es posible identificar los parámetros que más afectan la robustez del CMI. Esto permite enfocar el esfuerzo a una mejor identificación de éstos o mejorar el modelado a fin de optimizar el desempeño de la estructura.

La relación

$$\|\Delta A\|_{\infty} + \|\Delta A^T\|_{\infty} < \frac{1}{\|P\|_{\infty}}$$

establece una medida de la robustez de la estructura y una cota para la perturbación ΔA tolerada. De esta relación se puede observar que una manera de aumentar la robustez de la estructura es haciendo que la matriz A contenga todos sus polos lo más a la izquierda posible del origen del semiplano complejo, ya que esto implica disminuir el valor de la norma de la matriz P , puesto que esta última proviene de la solución de $PA + A^TP = -I$. Lo anterior nos permite establecer un criterio de diseño para el CMI tendiente a disminuir la contribución de los sistemas a los cuales se tiene acceso, e.g. el sistema regulador y el sistema y . Una vez hecho esto, la medida de robustez tiende a ser dominada por el error de modelado entre la planta y el modelo.

Como conclusión general, el capítulo se puede sintetizar en la obtención de una medida de robustez para la estructura CMI de carácter general y de fácil estimación, ya que ésta se calcula a partir de los parámetros de diseño nominal de la estructura y nos permite estimar la magnitud de las perturbaciones toleradas.

CAPITULO IV

REDISEÑO DE LA ACCION DE CONTROL DEL CMI

La estructura del CMI con la acción de control nominal presenta un cierto margen de robustez. Las simulaciones de algunos sistemas y las medidas generales de robustez obtenidas en los análisis de las secciones previas de este documento, muestran que es deseable aumentar este margen de robustez. Las pruebas en simulación muestran que, aún con un modelo perfecto la cuenca de atracción del CMI no lineal para ciertos sistemas no es muy grande. Además, cuando existe un error de modelado, la cuenca de atracción puede disminuir considerablemente.

En este capítulo se propone un rediseño de la acción de control nominal del CMI para obtener una mejora en el margen de robustez. Para lograrlo se plantea modificar la ley de control nominal del CMI por medio de la técnica de rediseño de Lyapunov (Khalil, 1992). Se entenderá como un margen de robustez mejorado la ampliación de la cuenca de atracción ó el rechazo de un conjunto más grande de perturbaciones de tipo paramétrico que el tolerado por la acción de control nominal del CMI.

Los resultados del análisis del CMI de las secciones anteriores son de carácter local,

los que se detallan a continuación son de tipo regional. En general, un resultado regional es mejor que uno de tipo local, puesto que un resultado regional engloba a los de tipo local. Además, el resultado regional nos provee una medida de la zona de atracción del sistema.

La acción de control nominal del CMI utiliza la salida de la planta y los estados accesibles del controlador. El rediseño de la ley de control que se plantea en este capítulo requiere del acceso a todo el estado de la planta, es decir, requiere conocer todo el estado e del subsistema del error entre la planta y el modelo. Puesto que el uso de variables accesibles es una característica del CMI que nos interesa conservar, se propone entonces hacer uso de un estimador rápido del estado e .

La inclusión de este “estimador”, el cual se propone como un observador de alta ganancia, puede generar un problema de estabilidad. Este problema se resuelve acotando la salida del estimador en la zona de interés. El análisis de estabilidad se realiza con técnicas de análisis de perturbaciones singulares y las herramientas estándar de la metodología de Lyapunov.

A continuación se describen los temas desarrollados en este capítulo.

- El objetivo de la primera sección es encontrar una medida de la cuenca de atracción del controlador nominal del CMI. La estimación se basa en la función general de Lyapunov $V(x) = x^T Px$. Esta estimación se usa como referencia de comparación contra la zona de atracción que se obtendrá para el controlador rediseñado.
- Rediseño de Lyapunov para el CMI. En esta sección se presenta el rediseño de la acción de control del CMI. Se muestra el análisis de estabilidad y se establece el aumento en la robustez con respecto al controlador nominal del CMI. Como se mencionó anteriormente, el marco de comparación de la robustez es el aumento en

la zona de atracción. Al control rediseñado lo llamamos CMI++. Cabe mencionar que el CMI++ no sólo aumenta la zona de atracción, sino que también presenta un rechazo de un conjunto más grande de perturbaciones o incertidumbres de tipo evanescente que la acción de control nominal del CMI, es decir, se logra un mejor desempeño en general. En el capítulo V se pueden ver los resultados de simulación para el control nominal del CMI y el CMI++ donde es posible establecer una comparación del desempeño de ambos controladores.

- El diseño del CMI++ requiere tener acceso al estado e completo del CMI. Para resolver este problema se propone el uso de un estimador de alta ganancia. En la sección IV.2.3 se presenta el estimador propuesto y el análisis de estabilidad de la interconexión CMI++-estimador. Dicho análisis se realiza por medio de técnicas de perturbación singular en combinación con las técnicas de análisis de Lyapunov.
- Por último se dan las conclusiones del capítulo de rediseño de la acción de control para el CMI y un panorama de los problemas abiertos.

IV.1 ESTIMACION DE LA CUENCA DE ATRACCION DEL CMI (Acción de control nominal)

El objetivo de la sección es obtener una medida general de la cuenca de atracción para sistemas no lineales con la acción de control nominal del CMI. Esta medida servirá como referencia o parámetro de comparación para estimar la mejoría en el margen de robustez del controlador CMI++ que se analizará en una sección posterior del presente capítulo. Diremos que el controlador con una estimación mayor de la cuenca de atracción es más

robusto.

El control con rediseño que se presentará posteriormente posee una cuenca de atracción más grande y además tolera una variación paramétrica o incertidumbres mucho mayores que el presentado por la acción de control nominal del CMI. Esto indica un aumento en la robustez en dos sentidos: el aumento en la cuenca de atracción y la capacidad de tolerar variaciones paramétricas o incertidumbres de modelado mucho mayores. Decidimos establecer como marco o criterio de comparación el tamaño de la cuenca de atracción entre ambos controladores, puesto que la función de Lyapunov para estimar dicha cuenca es la misma en ambos casos. Sin embargo, no se debe menospreciar el rechazo de un conjunto mayor de perturbaciones o incertidumbres que se logra con el control rediseñado, ya que en sí, es uno de los principales objetivos de cualquier controlador útil.

Dicho lo anterior abordaremos el análisis para estimar la cuenca de atracción para el control nominal del CMI. El CMI puede representarse en las coordenadas $\zeta = (x_r, e, y)$ como sigue

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{r,i} &= x_{r,i+1} \\
 \dot{x}_{r,n} &= -a_{1,r}x_{r,1} - \dots - a_{n,r}x_{r,n} + a_{1,r}e_1 = f_r(x_r, e_1) \\
 \dot{e}_i &= e_{i+1} \\
 \dot{e}_n &= f_p(x_p) - f_m(x_m) + (g_m(x_p) - g_m(x_m))u \\
 \dot{y}_i &= y_{i+1} \\
 \dot{y}_n &= -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n = f_y(y)
 \end{aligned} \tag{80}$$

donde $i = 1 \dots n-1$, $f_p(x_p)$ se evalúa para $x_p = e + y - x_r + z$, $f_m(x_m)$ se evalúa para $x_m = y - x_r + z$ y u está dado por

$$u(e_1, x_r, y) = -\frac{f_m(y - x_r + z) + f_r(x_r, e_1) - f_y(y)}{g_m(y - x_r + z)} \tag{81}$$

donde $z = (\tilde{z} \ 0, \dots, 0)$ con $\tilde{z}$ una constante, es el vector de referencias. La acción

de control (81) es la que llamamos acción de control nominal del CMI.

Llamaremos CMI nominal al sistema (80) con la acción de control (81) cuando la planta y el modelo son iguales, es decir, $f_p(x) = f_m(x)$, $g_p(x) = g_m(x)$.

A lo largo de esta sección se toman como un hecho las siguientes suposiciones:

Suposición 2 *Todas las funciones son al menos C^1 .*

Suposición 3 *El sistema CMI nominal (80) tiene al origen como un punto de equilibrio hiperbólico estable en el origen cuando la entrada es cero, $u = 0$.*

En general, la suposición (3) se cumple siempre cuando la planta presenta un equilibrio hiperbólico estable en el origen, e.g. esta es estrictamente Hurwitz estable.

Cuando existe un error de modelado o una variación paramétrica el sistema en lazo cerrado se puede representar con el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{r,i} &= x_{r,i+1} \\
 \dot{x}_{r,n} &= -a_{1,r}x_{r,1} - \dots - a_{n,r}x_{r,n} + a_{1,r}e_1 \\
 \dot{e}_i &= e_{i+1} \\
 \dot{e}_n &= f_m(x_p) - f_m(x_m) + (g_m(x_p) - g_m(x_m))u + \Delta f_m(x_p) + \Delta g_m(x_p)u \\
 \dot{y}_i &= y_{i+1} \\
 \dot{y}_n &= -\alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n
 \end{aligned} \tag{82}$$

donde $i = 1 \dots n - 1$.

Usando una notación compacta se puede reescribir las ecuaciones de (82) como sigue

$$\dot{\zeta} = F(\zeta) + B[\Delta f_m(\cdot) + \Delta g_m(\cdot)u] \tag{83}$$

con $B = [\underbrace{0 \dots 0}_n \underbrace{0 \dots 1}_n \underbrace{0 \dots 0}_n]^T$, $\zeta = (x_r, e, y)^T \in \mathbb{R}^{3n}$ y F representa al CMI nominal.

Considere que se mantienen las siguientes condiciones:

- La referencia a seguir es $z = 0$.
- Se mantiene la suposición (3), es decir, el CMI nominal tiene al origen como un equilibrio estrictamente Hurwitz estable.
- Se cumple lo siguiente: $\Delta f_m(0) = 0, \Delta g_m(0) \neq 0$, es decir se trata de una perturbación evanescente.

Usando las tres condiciones anteriores y el hecho de que el equilibrio en el origen del CMI nominal es estrictamente Hurwitz estable, es posible reescribir la ecuación (83) como sigue

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B[\phi(\zeta) + \Delta f_m(x_p) + \Delta g_m(x_p)u] \quad (84)$$

donde A es la matriz jacobiana $A = \left. \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}$ evaluada en el origen, $\phi(\zeta)$ agrupa los términos de orden superior que se desvanecen en el origen del CMI nominal y $x_p = e + y - x_r + z$.

Defina la siguiente variable

$$\delta(\zeta) = \Delta f_m(x_p) + \Delta g_m(x_p)u(\zeta)$$

y sustituyendo en (84) se obtiene

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B\phi(\zeta) + B\delta(\zeta). \quad (85)$$

De la suposición (3) sabemos que existe una matriz $P = P^T > 0$ que es la solución única de la ecuación de Lyapunov

$$PA + A^T P = -I.$$

Usaremos la función positiva definida $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$ como una función candidata de Lyapunov para el sistema (85).

La teoría de Lyapunov usando el método directo nos dice que si $\dot{V}(\zeta) < 0$ en un conjunto compacto Ω_1 entonces el conjunto Ω_1 es un estimado de la cuenca de atracción del sistema.

La derivada de la función de Lyapunov propuesta, a lo largo de las trayectorias del sistema, es

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta) &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= (A\zeta + B\phi(\zeta) + B\delta(\zeta))^T P \zeta + \zeta^T P (A\zeta + B\phi(\zeta) + B\delta(\zeta)) \\ &= \zeta^T (PA + A^T P) \zeta + 2B^T \zeta P (\phi(\zeta) + \delta(\zeta)) \\ &= -\zeta^T \zeta + 2B^T \zeta P (\phi(\zeta) + \delta(\zeta)).\end{aligned}$$

Sea $g(\zeta) = \phi(\zeta) + \delta(\zeta)$ y suponga que se satisface

$$\|g(\zeta)\| < k_\Omega \|\zeta\|$$

en cierto dominio

$$D_1 = \{\zeta \in \mathbb{R}^{3n} : \|\zeta\| < r_1\}. \quad (86)$$

Entonces en este dominio D_1 la derivada $\dot{V}$ satisface

$$\begin{aligned}\dot{V}(\zeta) &\leq -\|\zeta\|^2 + 2\lambda_M(P)k_\Omega \|\zeta\|^2 \\ &\leq -\|\zeta\|^2 (1 - 2\lambda_M(P)k_\Omega)\end{aligned}$$

que es negativa definida si

$$k_\Omega < \frac{1}{2\lambda_M(P)} \quad (87)$$

donde $\lambda_M(P)$ representa el valor propio máximo de P . Usando los resultados anteriores concluimos que el conjunto invariante positivo

$$\Omega_1 = \{\zeta \in \mathbb{R}^{3n} : \zeta^T P \zeta < c_1\} \quad (88)$$

con $c_1 < r_1^2 \lambda_M(P)$ y k_Ω que satisface (87) es un estimado de la región de atracción para el CMI con la acción de control nominal.

IV.2 REDISEÑO DE LYAPUNOV PARA EL CMI

La acción de control nominal del CMI presenta un cierto margen de robustez. Los resultados de las simulaciones efectuadas con este controlador muestran un buen desempeño. Sin embargo, aún para el caso de un modelo perfecto, el tamaño de la cuenca de atracción no es muy grande. En el capítulo V en la sección V.1.1 se muestra un ejemplo de diseño donde se puede observar el efecto en las simulaciones de una perturbación paramétrica en el tamaño de la cuenca de atracción y en el desempeño en general de la acción de control nominal del CMI. Lo anterior implica que es posible desestabilizar al CMI si se presenta una perturbación lo suficientemente grande o las condiciones iniciales de la planta y el modelo están fuera de la zona de atracción del sistema. Cuando existe una perturbación paramétrica o una incertidumbre de modelado y se usa el control nominal del CMI, la circunstancia anterior se agrava; es decir, la zona de atracción disminuye considerablemente.

En esta sección se presenta el diseño de un controlador basado en la estructura del CMI que muestra una mejora en robustez, comparado con el control nominal. Se analiza una clase de perturbaciones que dependen del estado y en general del tipo de variación paramétrica. Este cambio en los parámetros puede ser debido a errores de modelado o cambios en la planta. El tipo de perturbaciones que son analizadas satisfacen la condición de acoplamiento, es decir aparecen en donde actúa la acción de control (“matching condition”). Además las perturbaciones deben ser evanescentes.

El problema de análisis de perturbaciones no acopladas con la estructura de control con modelo interno permanece abierto. Una manera de abordar este problema parece ser el método de paso adelante paso atrás (“backstepping (one step forward)”) presentado

en (Qu, 1997).

IV.2.1 CONTROL CMI++ (DISCONTINUO)

En este apartado se propone un rediseño de la acción de control para mejorar el margen de robustez del CMI. Suponemos que la perturbación está dada por una función invariante o que puede tomarse como una función invariante si el conjunto de parámetros de dimensión r varía muy lentamente con el tiempo. Bajo esta suposición es posible llevar a cabo el análisis en el espacio de estado del sistema, e.g. $\mathbb{R}^{3n}$, y no en el espacio $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^r$ aumentado por el tamaño r de la dimensión del espacio de los parámetros. La consideración anterior permite establecer el marco de comparación como el aumento de la cuenca de atracción en el espacio $\mathbb{R}^{3n}$.

A la acción de control con rediseño de Lyapunov para el CMI la llamaremos CMI++.

Suponga que la planta está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,i} &= x_{p,i+1}; \quad i = 1 \dots n-1 \\ \dot{x}_p &= f_m(x_p) + \Delta f_m(x_p) + (g_m(x_p) + \Delta g_m(x_p))u\end{aligned}$$

donde los términos Δ representan incertidumbres de modelado o una perturbación externa actuando donde entra la señal de control. Usando esta planta el CMI en lazo cerrado es el presentado por las ecuaciones (82).

Suponga que la acción de control que entra a la planta está dada por

$$u_p = u + v$$

y el control que entra al modelo es

$$u_m = u$$

donde u es la acción de control nominal del CMI definida en (81). Usando estas defini-

ciones en (84,85) obtenemos

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B\phi(\zeta) + B\delta(\zeta) + Bg_p(x_p)v \quad (89)$$

Usaremos como función candidata de Lyapunov la propuesta en el apartado anterior, $V = \zeta^T P \zeta$. La derivada de $V(\zeta)$ satisface

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\zeta^T \zeta + 2B^T P \zeta (\phi(\zeta) + \delta(\zeta) + g_p(x_p)v). \quad (90)$$

De la ecuación (84) sabemos que el término perturbador (lineal y no lineal) consiste de $\phi(\zeta)$ y $\delta(\zeta)$.

Suponga que se conoce una función $\rho(\zeta)$ que satisface

$$\rho(\zeta) > \|\delta(\zeta)\| + \|\phi(\zeta)\| \quad (91)$$

en algun dominio

$$D_2 = \{\zeta \in R^{3n} : \|\zeta\| < r_2\} \quad (92)$$

con $r_2 > r_1$ tal que $D_1 \subset D_2$. La definición del conjunto D_1 se puede ver en la ecuación (86).

Si se define

$$v(\zeta) = -k\rho(\zeta) \frac{w}{\|w\|}; w = 2B^T P \zeta \quad (93)$$

donde la constante k se escoge de tal manera que satisface

$$g_p(x_p)k > 1$$

este último requerimiento implica que el signo de $g_p(x_p)$ permanece constante en todo el dominio de interés o que es posible determinarlo pues éste determina el de la constante k . Usando (93) y (91) en (90) se obtiene

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\zeta^T \zeta + w \left(\delta(\zeta) + \phi(\zeta) - kg_p\rho(\zeta) \frac{w}{\|w\|} \right)$$

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 + \|w\| (|\delta(\zeta) + \phi(\zeta)| - kg_p \rho(\zeta))$$

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 - \|w\| (k_1 - 1) \rho(\zeta)$$

$$\dot{V}(\zeta) \leq 0$$

donde $k_1 = kg_p(x_p)$. La derivada de la función V a lo largo de las trayectorias del sistema es negativa definida, por lo tanto, por medio del método directo de Lyapunov se puede concluir la estabilidad del origen. Además, el conjunto invariante positivo D_2 es un estimado de la región de atracción del sistema en lazo cerrado. Puesto que $D_1 \subset D_2$, hemos obtenido un margen de robustez mayor comparado con el CMI nominal, ya que el sistema rediseñado posee una cuenca de atracción más grande. Se puede agregar que si D_2 es el espacio de estado entonces el sistema es globalmente estable.

Una ventaja adicional del diseño presentado es que no es necesario establecer a priori una cota en la variación paramétrica tolerada por la estructura. Es decir, si podemos encontrar una función $\rho(\zeta)$ que cumpla con (91) sin importar la magnitud de la variación de los parámetros o en su defecto el error de modelado, es posible la estabilización del CMI++ en el conjunto D_2 . Esto nos permite un aumento en la robustez en las dos direcciones mencionadas en una sección anterior: el sistema con el control CMI++ aumenta su cuenca de atracción y tolera un cambio más grande en los parámetros o un conjunto de perturbaciones también mucho mayor.

Lo expuesto anteriormente se puede resumir en el siguiente lema.

Lema : 10 *Considere un esquema CMI como el presentado en (82). La acción de control compuesta*

$$\begin{aligned} u_p &= u - \frac{k\rho(\zeta)w}{\|w\|} \\ u_m &= u \end{aligned} \tag{94}$$

donde $w = 2B^T P \zeta$, $kg_p(x_p) > 1$, u_m es la entrada de control al modelo, u_p es la entrada de control a la planta, con u la acción de control nominal del CMI definida en (81), $P = P^T > 0$ es la única solución de

$$PA + A^T P = -I$$

con A la matriz jacobiana del CMI nominal y $\rho(\zeta)$ que satisface los requerimientos de (91), mejora el margen de robustez del sistema CMI con la acción de control nominal al tener una zona de atracción más grande y eliminar el efecto de todas las perturbaciones ϕ, δ que satisfacen (91).

A esta acción de control (94) la llamaremos en el resto del trabajo CMI++. En la sección (V.1.3) se puede ver un ejemplo de diseño y el desempeño en simulación del CMI++ con acceso al estado completo.

Aún cuando el controlador (94) presenta una mejora en robustez existen dos desventajas con respecto al diseño nominal del CMI, éstas son:

- 1) Se requiere acceso al estado e completo, lo que elimina una de las ventajas más importantes de utilizar la estructura de control con modelo interno. Dicha ventaja es el uso, de sólo variables directamente accesibles.
- 2) La función de control es discontinua. Esto produce ciertos problemas, entre los cuales se pueden mencionar que la solución de la ecuación diferencial puede no ser única y la implementación práctica puede presentar un fenómeno que se conoce como “castañeteo” debido a los retardos de los dispositivos utilizados en la puesta en práctica del controlador.

A cambio de estas desventajas se gana en robustez, puesto que se logra obtener una zona de atracción más grande y el sistema tolera una variación paramétrica o una

incertidumbre en el modelado mucho más grande. Por otra parte, en algunos casos es posible lograr la estabilización global del sistema con el controlador CMI++.

En el capítulo V se presenta un ejemplo en simulación del CMI++. Ahí se puede observar en un marco experimental controlado el aumento en robustez y desempeño del CMI++ comparado con la acción de control nominal del CMI.

En las secciones subsecuentes se propone una solución a estos problemas. Para el problema de acceso al estado e , se plantea el uso de un subsistema estimador del estado (un “cuasi” observador) como el presentado en (Khalil, 1994).

El problema de la discontinuidad del control se tratará de eliminar por medio de una redefinición de la ley de control dentro de una zona muy pequeña de la zona de atracción.

La solución de estos problemas implica recobrar el desempeño del CMI++.

IV.2.2 CONTROL CMI++ (CONTINUO)

Los controladores discontinuos presentan dos problemas: uno analítico y otro práctico. El primero es debido a que una discontinuidad no cumple la condición de Lipschitz y la solución de una ecuación diferencial con una discontinuidad no es necesariamente única. El problema práctico se refiere a un fenómeno conocido como “castañeteo”, éste se debe a los retardos de los dispositivos físicos utilizados para poner en práctica el controlador discontinuo. Un ejemplo de tales dispositivos son los relevadores, transistores, amplificadores conmutados etc.

En esta sección se propone una aproximación continua de la función de control del CMI++ que mantiene la estabilidad del origen y conserva el mismo tamaño en la cuenca de atracción.

La idea para eliminar la discontinuidad en el origen de la función de control CMI++

presentada en (94) se basa en lo siguiente: 1) Usar el rediseño de Lyapunov (CMI++) para acercar al sistema a una zona donde se sabe que éste es estable, e.g. el subespacio D_1 obtenido en una sección anterior, ver página 66.

2) Intercambiar la función de control dentro de la zona D_1 manteniendo a ésta como una región de atracción de la nueva acción de control.

La nueva acción de control propuesta es, entonces,

$$\begin{aligned} u_p &= u(\zeta) + \theta(\zeta) \\ u_m &= u \end{aligned} \tag{95}$$

donde u es la acción de control nominal de CMI definida en (81), u_m es la acción de control del modelo, u_p es la acción de control de la planta y $\theta(\zeta)$ está definida por

$$\theta(\zeta) = \begin{cases} -\frac{k\rho(\zeta)^2 w}{c_1} & \text{si } \rho(\zeta) \|w\| \leq c_1 \\ -\frac{k\rho(\zeta)w}{\|w\|} & \text{si } \rho(\zeta) \|w\| > c_1 \end{cases} \tag{96}$$

donde

$$kg_p(x_p) > 1, \tag{97}$$

y c_1 es una constante positiva a especificar posteriormente.

Usando esta función de control el sistema en lazo cerrado resulta

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B(\delta(\zeta) + \phi(\zeta)) + Bg_p\theta(\zeta).$$

La derivada de la función de Lyapunov $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$ a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(\zeta) = -\zeta^T \zeta + 2B^T P \zeta (\Delta(\zeta) + g_p \theta(\zeta)) \tag{98}$$

donde $\Delta(\zeta) = \delta(\zeta) + \phi(\zeta)$,

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 + \|w\| (|\Delta(\zeta)| + g_p \theta(\zeta)).$$

Sustituyendo el valor de la acción de control θ dentro del conjunto $w\rho(\zeta) < c_1$, y usando $\|\rho(\zeta)\| > \|\Delta(\zeta)\|$ se obtiene

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 - \frac{kg_p w^2 \rho(\zeta)^2}{c_1} + \rho(\zeta) \|w\|. \quad (99)$$

El término que determina el signo de la derivada de V es

$$-\frac{k_1 w^2 \rho(\zeta)^2}{c_1} + \rho(\zeta) \|w\| = -k_1 \frac{f^2}{c_1} + f$$

donde $\rho(\zeta)w = f$ y $k_1 = kg_p > 1$ por la desigualdad (97). Este término tiene un máximo en $f = \frac{c_1}{2k_1}$. Esto puede obtenerse derivando como sigue

$$\frac{\partial}{\partial f}(-k_1 f^2/c_1 + f) = -2k_1 f/c_1 + 1.$$

Igualando esta derivada a cero se obtiene el valor extremo

$$f = \frac{c_1}{2k_1}.$$

Este valor es un máximo puesto que

$$\frac{\partial}{\partial^2 f}(-k_1 f^2/c_1 + f) = -\frac{2}{k_1 c_1} < 0.$$

Sustituyendo este valor en la desigualdad (99) se obtiene

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 + \frac{c_1}{4k_1}, \forall \zeta \in D_2$$

donde D_2 se define como en (92). Lo anterior implica que usando la acción de control (95), con las restricciones presentadas, el sistema tiende a un conjunto invariante mas pequeño.

Suponga que la región de interés donde se desea estabilizar el sistema está definida por el siguiente conjunto

$$D_c = \{\zeta \in R^{3n} | V(\zeta) \leq c\} \quad (100)$$

donde $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$.

Haciendo $\beta = \alpha c_1 \lambda_{\max}(P)/4$ para cierto $\alpha > 1$ y si escogemos c_1 lo suficientemente pequeña para que se satisfaga $\beta < c$ con c definida en (100), se puede concluir que el conjunto

$$D_\beta = \{V(\zeta) \leq \beta\} \subset D_1,$$

es un conjunto invariante positivo y toda trayectoria que empiece en D_1 converge a D_β en tiempo finito y permanece dentro de éste de ahí en adelante. Dentro de D_β queremos que el control sea una función de ω lo mas lineal posible. Esto se puede lograr haciendo

$$\rho(\zeta) = \rho_o. \quad (101)$$

Es decir, $\rho(\zeta) = \rho_o$ para todo $\zeta \in D_\beta$.

En el conjunto D_β el control de la planta está definido por $u + \theta$, con

$$\theta = -\frac{k_1 \rho_o^2 \omega}{c_1}.$$

Bajo esta acción de control la derivada de $V(\zeta)$ cumple con la siguiente ecuación

$$\dot{V}(\zeta) = -\zeta^T \zeta + w \left(\Delta(\zeta) - \frac{k_1 \rho_o^2 \omega}{c_1} \right) \quad (102)$$

que se obtiene de la sustitución del valor del control θ en (98). Por continuidad en el conjunto D_β es posible encontrar alguna k_2 , tal que

$$\|\Delta(\zeta)\| \leq k_2 \|\zeta\|$$

Usando esta desigualdad en (102) se obtiene

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 + \|w\| k_2 \|\zeta\| - \frac{k_1 \rho_o^2 \omega}{c_1} \|w\|.$$

Recordando que $\omega = 2B^T P \zeta$, y sustituyendo este valor en la desigualdad anterior resulta

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 + k_2 \|2B^T P\| \|\zeta\|^2 - \|2B^T P\|^2 \frac{k_1 \rho_o^2}{c_1} \|\zeta\|^2.$$

Sea $k_3 = \|2B^T P\|$, usando esto en la desigualdad anterior obtenemos

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\|\zeta\|^2 + k_3 \|\zeta\|^2 \left(k_2 - \frac{k_3 k_1 \rho_0^2}{c_1} \right).$$

Es posible hacer a $\dot{V}$ negativa definida si se cumple

$$\rho_0 > \sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 k_3}}.$$

Puesto que $V(\zeta)$ es una función decreciente, $\dot{V}(\zeta) < 0$ y $V(0) = 0$ usando el método directo de Lyapunov queda demostrada la estabilidad del origen.

Resumiendo, si se usa como ley de control para el CMI a (95), (101) con

$$c_1 < \frac{4c}{\alpha \lambda_{\max}(P)} \quad (103)$$

donde c se escoge de $\{\zeta^T P \zeta \leq c\}$ (zona donde se requiere estabilidad) y

$$\rho_0 \geq \max \left\{ \sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 k_3}}, \max_{\zeta \in D_\beta} \rho(\zeta) \right\} \quad (104)$$

el CMI++ continuo es estable y contiene en su región de atracción a D_2 .

Por lo expuesto anteriormente hemos resuelto el problema de la discontinuidad del controlador CMI++ por medio de la aproximación de éste dada por (96). Resta proponer una solución del problema de acceso al estado completo del sistema “e”. En la siguiente sección se plantea una solución del mismo por medio de un observador de alta ganancia del estado e .

IV.2.3 ESTIMADOR DE ESTADO

El diseño del controlador CMI++ requiere de acceso al estado completo del sistema, en particular el estado e que corresponde al error entre la salida de la planta y el modelo, así como sus derivadas. La estructura original del CMI sólo toma las medidas de la salida

y los estados accesibles directamente de los subsistemas regulador, modelo, planta y el subsistema auxiliar “ y ”. Esta característica del CMI es muy importante desde el punto de vista práctico para la aplicación de un controlador. Puesto que se desea conservar esta característica se plantea el uso de un “observador” rápido similar al propuesto en (Khalil, 1994) para estimar el valor del estado e del CMI. Esta estimación se usará para implementar el CMI++. En (Khalil, 1994) también se le llama a este sistema “observador de alta ganancia”.

Existen varios tipos de observadores aplicables a sistemas no lineales en la literatura actual. Sin embargo, decidimos usar el observador de alta ganancia por su simplicidad y su desempeño. Entre otros trabajos sobre observadores y estimadores de estado para sistemas no lineales, se puede mencionar las siguientes publicaciones (Moraal y Grizzle, 1993; Gauthier et al., 1992; Boutayeb y Aubry, 1999; Celle et al., 1989).

El observador propuesto es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{e}}_i &= \tilde{e}_{i+1} + \frac{\beta_i(e_1 - \tilde{e}_1)}{\epsilon^i}, i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{e}}_n &= \frac{\beta_n(e_1 - \tilde{e}_1)}{\epsilon^n}\end{aligned}\tag{105}$$

En forma compacta

$$\dot{\tilde{e}} = \hat{A}\tilde{e} + \hat{B}e_1$$

donde $e_1 = y_p - y_m$, $\tilde{e}$ es el estado e estimado, ϵ es un parámetro a especificar y los coeficientes β_i definen un polinomio

$$s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n = 0\tag{106}$$

cuyas raíces deben tener parte real negativa. Este observador es de alta ganancia y exhibe un fenómeno conocido como respuesta impulsiva (en inglés “peaking”). Este comportamiento puede eliminarse si se satura el estado del observador fuera de la zona donde se requiere estabilizar el sistema. El hecho de saturar a cierto valor este estado

permite también demostrar la estabilidad de la interconexión estimador-CMI++, como se muestra en la siguiente sección.

IV.3 ESTABILIDAD DE LA INTERCONEXION CMI++-ESTIMADOR DE ESTADO

En esta sección se analiza la estabilidad de la interconexión del CMI++ con el estimador de estado propuesto anteriormente.

El CMI nominal usa un subsistema regulador de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_{r,i} &= x_{r,i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{r,n} &= -a_1 x_{r,1} - \dots - a_n x_{r,n} + a_1 e_1\end{aligned}\tag{107}$$

o en forma compacta,

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r e_1.$$

El subsistema observador (105) se puede poner de esta forma por medio de una transformación lineal. La única observación es hacer este estimador lo suficientemente rápido para que su estado tienda al estado e lo más pronto posible. La manera de acelerar la respuesta del observador es haciendo tender a cero el valor del parámetro ϵ .

Usando este estimador se logra reproducir el desempeño del CMI++ presentado en la sección (IV.2.1). Vea la sección (V.1.4) donde se presenta un ejemplo en simulación que ilustra el comentario anterior.

La acción de control CMI++ se implementa sustituyendo en el control el error e por su estimado $\tilde{e}_s$ saturado, dado por

$$\tilde{e}_s = \text{Sat}(\tilde{e}, x)$$

donde $\text{Sat}(\tilde{e}, x)$ es la función saturación con límite de saturación x . El límite de saturación se especifica por el valor máximo de la acción de control en una zona predeterminada. La zona se delimita por medio de la función de Lyapunov tal que

$$u_{\max} = \max u(\zeta) \forall \zeta \in \{\zeta \in R^{3n} : \zeta^T P \zeta \leq c\}$$

con c escogida de manera arbitraria, P es la solución de $PA + A^T P = -I$ y A la matriz jacobiana asociada con la linealización en el origen del CMI nominal.

En la figura (4) se muestra un diagrama a bloques del controlador CMI++ con el estimador de estado. En la figura P es la planta, M el modelo, R el regulador, C el control cmi nominal, C_1 la función de rediseño de Lyapunov y E es el estimador del estado e .

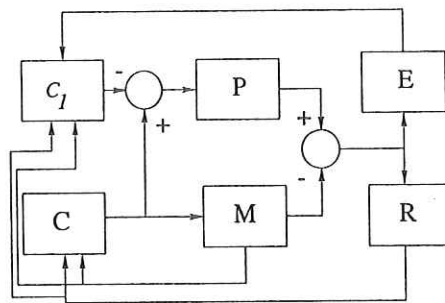


Figura 4: Diagrama a bloques del CMI++ con el estimador de estado.

La estabilidad de la interconexión CMI++-estimador queda establecida por el siguiente lema.

Lema : 11 *Suponga que el diseño CMI++ con acceso al estado completo garantiza que el origen del sistema CMI en lazo cerrado es exponencialmente estable. Si se usa la acción de control CMI++ dada en (95), sustituyendo el error e por $\text{Sat}(\tilde{e}, x)$, donde $\tilde{e}$ se calcula mediante un estimador de la forma (105) para un cierto ϵ pequeño, entonces la*

interconexión CMI++-estimador tiene al origen como un equilibrio exponencialmente estable.

PRUEBA

Para demostrar la estabilidad de la interconexión CMI++-estimador de estado usaremos herramientas de perturbaciones singulares y análisis de Lyapunov.

El sistema CMI con el controlador CMI++ y el estimador se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= A_1\chi + B_1e_1 \\ \dot{e} &= A_e e + B_2\phi(e, \tilde{e}, \chi) \\ \dot{\tilde{e}} &= A_e \tilde{e} + H(Ce - C\tilde{e})\end{aligned}\tag{108}$$

donde $\chi = (x_r, y)$, $A_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times 1}$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{x_r} & 0 \\ 0 & A_y \end{pmatrix}; A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \underbrace{[0, \dots, 1]^T}_{\text{tam. } n} \\ \underbrace{[0, \dots, 0]^T}_{\text{tam. } n} \end{pmatrix}; B_2 = \underbrace{(0, \dots, 1)^T}_{\text{tam. } n},$$

$$C = (1, 0, \dots, 0),$$

$$H = (\beta_i / \epsilon^i), i = 1, \dots, n$$

$(A_{x_r}, A_y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son las matrices en forma canónica de los subsistemas “regulador” e “y” respectivamente. $\phi(e, \tilde{e}, \chi) = f_p(x_p) - f_m(x_m) + g_p(x_p)u_p - g_m(x_m)u$, donde u es la acción de control nominal del CMI, u_p está definida en (95) solo que se sustituye en ésta los términos que dependen del estado e por su estimado saturado $\tilde{e}_s$ y los parámetros β_i definen el polinomio Hurwitz estable dado en (106).

La idea es poner en forma de perturbación singular a la interconexión CMI++-estimador dada en (108).

Defina la siguiente variable

$$\eta_i = \frac{1}{\epsilon^{n-i}}(e_i - \tilde{e}_i), i = 1, \dots, n$$

en forma matricial

$$\eta = D(\epsilon)^{-1}(e - \tilde{e})$$

de esto se obtiene

$$\dot{\eta} = D(\epsilon)^{-1}(\dot{e} - \dot{\tilde{e}}).$$

Sustituyendo los valores de $\dot{e}, \dot{\tilde{e}}$ en la ecuación anterior obtenemos

$$D(\epsilon)\dot{\eta} = A_e(e - \tilde{e}) - HCe + HC\tilde{e} + B_2\phi(e, \tilde{e}, \chi)$$

$$D(\epsilon)\dot{\eta} = (A_e - HC)D(\epsilon)\eta + B_2\phi(e, e - D(\epsilon)\eta, \chi)$$

$$\dot{\eta} = D(\epsilon)^{-1}(A_e - HC)D(\epsilon)\eta + D(\epsilon)^{-1}B_2\phi(e, e - D(\epsilon)\eta, \chi)$$

que es equivalente a

$$\epsilon\dot{\eta} = \epsilon D(\epsilon)^{-1}(A_e - HC)D(\epsilon)\eta + \epsilon D(\epsilon)^{-1}B_2\phi(e, e - D(\epsilon)\eta, \chi)$$

o en forma compacta

$$\epsilon \dot{\eta} = A_0 \eta + \epsilon B_2 \phi(e, e - D(\epsilon) \eta, \chi). \quad (109)$$

En (109) hicimos uso de

$$A_0 = \epsilon D(\epsilon)^{-1} (A_e - HC) D(\epsilon) = \epsilon (A_e - HC)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2/\epsilon & 0 & \epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \beta_{n-1}/\epsilon^{n-2} & 0 & 0 & \dots & \epsilon \\ \beta_n/\epsilon^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

los valores propios de la matriz A_0 son las raíces del polinomio (106). También en (109) se usó el hecho de que $\epsilon D(\epsilon)^{-1} B_2 = \epsilon B_2$ por la forma particular de B_2 .

La interconexión del CMI++-estimador queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A_1 \chi + B_1 e_1 \\ \dot{e} &= A_e e + B_2 \phi(e, e - D(\epsilon) \eta, \chi) \\ \epsilon \dot{\eta} &= A_0 \eta + \epsilon B_2 \phi(e, e - D(\epsilon) \eta, \chi) \end{aligned} \quad (110)$$

que se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \tilde{A} \xi + \tilde{B} \varphi(\xi, D(\epsilon) \eta) = F_r(\xi, D(\epsilon) \eta) \\ \epsilon \dot{\eta} &= A_0 \eta + \epsilon B_2 \varphi(\xi, D(\epsilon) \eta) \end{aligned} \quad (111)$$

Las ecuaciones (111) definen un problema de perturbación singular estándar. La teoría de perturbaciones singulares nos dice que si las condiciones iniciales del sistema $\{\eta(0), \xi(0)\}$ pertenecen a cierto conjunto acotado entonces la interconexión del sistema rápido-lento es estable (Kokotović et al., 1986). A continuación exponemos dicha prueba.

Por hipótesis el origen $\xi = 0$ de

$$\dot{\xi} = \tilde{A} \xi + \tilde{B} \varphi(\xi, 0) = F_r(\xi, 0) \quad (112)$$

es exponencialmente estable.

Esto quiere decir que el sistema con el controlador CMI++ con acceso al estado completo es exponencialmente estable. En el apartado de rediseño del CMI se probó la estabilidad del CMI++, ver sección (IV.2.2).

La estabilidad de este sistema permite afirmar que existe una función de Lyapunov

$$V_2(\xi) \in C^1 \quad (113)$$

definida en $\mathbb{H}(0, r_2) \subset \mathbb{R}$ para algún $r_2 > 0$ y cuatro constantes tal que para todo $\xi \in \mathbb{H}(0, r_2)$

$$a_1 \|\xi\|^2 \leq V_2(\xi) \leq a_2 \|\xi\|^2 \quad (114)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \xi} F_r(\xi, 0) \leq -a_3 \|\xi\|^2 \quad (115)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \xi} \leq a_4 \|\xi\| \quad (116)$$

Por la estabilidad del sistema (112) es posible encontrar para todo $\xi \in \mathbb{H}$ y para todo $\eta \in \mathbb{E}$ las siguientes constantes de Lipschitz

$$\|F_r(\xi, D(\epsilon)\eta) - F_r(\xi, 0)\| \leq L_1 \|\eta\| \quad (117)$$

$$\|\varphi(\xi, D(\epsilon)\eta)\| \leq L_5 \|\xi\| + L_6 \|\eta\| \quad (118)$$

donde $\mathbb{E}$ es un conjunto en la vecindad del origen de $\eta = 0$.

Dividiremos a la interconexión en subsistemas rápido-lento, para el subsistema rápido

$$\epsilon \dot{\eta} = A_0 \eta + \epsilon B_2 \varphi(\xi, D(\epsilon)\eta)$$

proponemos como una función candidata de Lyapunov a

$$W(\eta) = \eta^T P_1 \eta \quad (119)$$

con $P_1 = P_1^T > 0$ solución de

$$A_0^T P_1 + P_1 A_0 = -I$$

la función $\varphi(\xi, D(\epsilon)\eta)$ es acotada (localmente Lipschitz). La derivada de W cumple para todo $(\xi \in \mathbb{H}) \times (\eta \in \mathbb{E})$

$$\begin{aligned} \dot{W}(\eta) &= \dot{\eta}^T P_1 \eta + \eta^T P_1 \dot{\eta} \\ &\leq -\frac{1}{\epsilon} \|\eta\|^2 + 2 \|\eta\| \|B_1\| \|P_1\| (L_5 \|\xi\| + L_6 \|\eta\|) \end{aligned}$$

Ahora proponemos la siguiente función compuesta $V(\xi, \eta)$ definida por

$$V(\xi, \eta) = V_2(\xi) + \beta W(\eta)$$

como una función candidata de Lyapunov para el sistema (111) con V_2, W definidas en (113 y 119), β es una constante a estimar posteriormente.

La derivada de V a lo largo de (111) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \eta) &\leq \frac{\partial V_2}{\partial \xi} [F_r(\xi, 0) + F_r(\xi, D(\epsilon)\eta) - F_r(\xi, 0)] - \frac{\beta}{\epsilon} \|\eta\|^2 + \\ &\quad 2\beta \|B_1\| \|P_1\| \varphi(\xi, D(\epsilon)\eta) \|\eta\| \\ &\leq -a_3 \|\xi\|^2 + a_4 L_1 \|\xi\| \|\eta\| - \beta/\epsilon \|\eta\|^2 + \\ &\quad 2\beta \|P_1\| [L_5 \|\xi\| \|\eta\| + L_6 \|\eta\|^2] \\ &\leq \left[-\beta/\epsilon + \tilde{k} L_6 + \epsilon_0 L_1 a_4 + \epsilon_0 \tilde{k} L_5 \right] \|\eta\|^2 + \left[-a_3 + \frac{L_1 a_4}{\epsilon_0} + \frac{\tilde{k} L_5}{\epsilon_0} \right] \|\xi\|^2 \end{aligned} \quad (120)$$

donde $\tilde{k} = 2\beta \|P_1\|$ y para el último paso usamos la desigualdad de Young que se presenta a continuación: Dados $x, y, \forall x, y \in R_+, \forall p > 1 \forall \epsilon_0 > 0$ se tiene

$$xy \leq \frac{1}{\epsilon_0} x^p + (\epsilon_0)^{p_0} y^{\frac{p}{p-1}}$$

aquí $p_0 = \frac{1}{p-1}$.

La última parte de (120) se puede reescribir como sigue

$$\dot{V}(\xi, \eta) \leq -\frac{\beta}{2\epsilon} \|\eta\|^2 - \frac{a_3}{2} \|\xi\|^2 - b_1 \|\eta\|^2 - b_2 \|\xi\|^2$$

con $b_1 = \frac{\beta}{2\epsilon} - \tilde{k}L_6 - \epsilon_0 (a_4L_1 + \tilde{k}L_5)$ y $b_2 = \frac{a_3}{2} - \frac{(a_4L_1 + \tilde{k}L_5)}{\epsilon_0}$. Si escogemos β lo suficientemente pequeño y a ϵ_0 lo suficientemente grande podemos hacer $b_2 > 0$. Ahora podemos escoger un ϵ lo suficientemente pequeño para hacer el término $b_1 > 0$. Hecho lo anterior, implica

$$\dot{V}(\xi, \eta) \leq -\min(a_3/2, \beta/(2\epsilon)) [\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2]$$

con lo que podemos concluir que la interconexión CMI++ con el estimador del estado “e” es exponencialmente estable. Con esto queda demostrado el lema 11.

En general la búsqueda de la constante ϵ que garantice la estabilidad se puede dar por medios experimentales, ya que el lema garantiza la existencia del tal ϵ , mas no nos da una forma de estimarlo.

En el capítulo V se muestra con un ejemplo en simulación el desempeño de la interconexión CMI++-estimador. Ahí se puede observar una manera experimental para encontrar un valor de ϵ adecuado para el ejemplo presentado.

IV.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se propuso un controlador que aumenta la robustez de la estructura CMI con respecto a la presentada por la estructura con el controlador nominal. El diseño propuesto se basa en las técnicas de rediseño de Lyapunov. Al control obtenido le llamamos CMI++.

Se logra el rechazo de perturbaciones paramétricas o de incertidumbres en el modelo que satisfacen la condición de acoplamiento, es decir se presentan donde actúa el

control. La magnitud de las perturbaciones no está condicionada a priori y por medio de una función de control adecuada es posible rechazar perturbaciones de gran magnitud. Además, para ciertos casos es posible la estabilización global del sistema. Puesto que el tamaño de la zona de atracción del CMI++ se puede fijar arbitrariamente por medio de la función de Lyapunov se le puede llamar al resultado estabilización semiglobal.

El CMI++ presenta dos desventajas con respecto al diseño nominal del CMI: una es que el controlador es discontinuo y la otra es que se requiere acceso al estado completo.

Se propuso una función alternativa para aproximar la función de control del CMI++ en una región pequeña alrededor del origen. Se demostró la estabilidad del origen para la aproximación continua del controlador CMI++ discontinuo. Esto permite mantener el desempeño del CMI++ sin los problemas prácticos de realización de un controlador discontinuo, e.g. “castañeteo”.

El controlador CMI++ propuesto y analizado en la sección (IV.2.2) requiere del estado completo del CMI. Puesto que una de las ventajas de la estructura de control con modelo interno es el uso de la salida de la planta y otros estados accesibles, usamos un estimador rápido del error e para recuperar esta característica deseable del CMI.

Se demostró que la inclusión del estimador no altera la estabilidad de la estructura para ciertas condiciones del estimador analizadas en la sección (IV.3). El desempeño del CMI++-estimador tiende a ser el del CMI++ con estado completo a medida que el parámetro ϵ del estimador tiende a cero. En la puesta en práctica del controlador CMI++-estimador es posible determinar de manera experimental el valor adecuado de ϵ puesto que una vez encontrada una cota superior de este parámetro tal que se mantenga estabilidad de la interconexión CMI++-estimador en la región de interés, cualquier valor por debajo de esta cota mantiene la estabilidad. El hecho de encontrar una cota superior adecuada para el valor de ϵ es importante para la aplicación práctica

del CMI++.

IV.4.1 PROBLEMAS ABIERTOS

El estudio de perturbaciones no-acopladas para el CMI es un problema abierto. Se realizaron algunas tentativas de análisis de este problema en base a la técnica de “back-stepping”, sin lograr resultados positivos. De acuerdo a Qu (Qu, 1997), es posible rechazar perturbaciones no-acopladas en sistemas no lineales con una técnica de “back-stepping adelante-atrás” recursiva. El uso de esta herramienta promete resultados positivos al aplicarse al CMI cuando el sistema presenta perturbaciones no acopladas, pero cabe mencionar que la acción de control que arroja esta técnica es muy complicada.

Por otra parte, otro problema abierto es el uso de estas técnicas de rediseño con el CMI para sistemas de fase no mínima y para sistemas donde el número de entradas es diferente al número de salidas. La extensión de los resultados presentados en el capítulo a sistemas de varias entradas y varias salidas, cuando el número de entradas es igual al número de salidas, es relativamente directa. También es posible extender de manera directa los resultados del CMI++ a sistemas de grado relativo incompleto pero con dinámica interna estable.

CAPITULO V

EJEMPLOS DE DISEÑO

Una manera práctica de observar el desempeño de un controlador y los resultados del análisis es por medio de un ejemplo donde se apliquen estos resultados.

En este capítulo se presentan resultados de simulación de los controladores para la estructura CMI propuestos en los capítulos anteriores, el objetivo es establecer una comparación directa del desempeño de los mismos.

A lo largo del capítulo se presentan los ejemplos de diseño para las diferentes acciones de control propuestas en los capítulos anteriores, tales son:

- El diseño de la acción de control nominal del CMI.
- Diseño del CMI++ con acceso al estado completo del sistema e .
- Diseño del CMI++ con el estimador del estado e .

Para el primer caso, el del diseño nominal del CMI, se presenta la prueba de estabilidad de acuerdo a los resultados de los análisis efectuados en los capítulos previos. Para todos los casos se muestran gráficas de las respuestas de simulación de varios experimentos que muestran el desempeño del CMI y del CMI++.

Se presentan dos ejemplos de diseño, una planta de orden 2 y una de orden 3. En ambos casos es posible notar las características principales del CMI como son: error cero de estado estable para referencias constantes y un cierto grado de robustez.

En el primer ejemplo sólo se incluyen simulaciones con perturbaciones del tipo evanescente en el ejemplo dos se incluyen perturbaciones de ambos tipos, evanescentes y no evanescentes. Las perturbaciones de tipo no evanescentes consideradas son constantes y se presentan en la salida de la planta.

V.1 EJEMPLO 1

La planta que usaremos para el ejemplo 1 de diseño de los controladores es un péndulo de segundo orden con un par aplicado en la base del mismo como acción de control. El modelo matemático de esta planta está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p,1} &= x_{p,2} \\ \dot{x}_{p,2} &= -a_{1p}x_{p,2} - a_{2p}\sin(x_{p,1}) + g_p u = f_p(x_p) + g_p u \\ y_p &= x_{p,1} \end{aligned} \tag{121}$$

donde $x_p \in \mathbb{R}^2$ es el estado de la planta, y_p es la salida y los valores propuestos para las constantes son:

$$a_{1p} = 0.08, a_{2p} = 1.2, g_p = 0.98.$$

Este modelo de la planta es muy similar, excepto por el valor de los parámetros, al modelo utilizado para la prueba experimental de los controladores CMI, CMI++ que se presenta en el capítulo (VII); de ahí la motivación para el uso de esta planta en las simulaciones.

V.1.1 ACCION DE CONTROL NOMINAL DEL CMI

En esta sección se presenta el diseño de la acción de control nominal de la estructura CMI. Se supone que nuestro modelo tiene un error de estimación de los parámetros con respecto a los parámetros de la planta y que conocemos esta diferencia a priori. Esto se hace para evaluar si se cumplen los requerimientos del análisis de estabilidad y robustez presentado en el capítulo III. El modelo que utilizaremos en nuestro diseño y para los experimentos de simulación está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m,1} &= x_{m,2} \\ \dot{x}_{m,2} &= -a_{1m}x_{m,2} - a_{2m}\text{sen}(x_{m,1}) + g_mu = f_m(x_m) + g_mu \\ y_m &= x_{m,1}\end{aligned}\tag{122}$$

con los siguientes valores para las constantes:

$$a_{1m} = 0.1, a_{2m} = 1.0, g_m = 1.0$$

El subsistema regulador del CMI está dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_{r,1} &= x_{r,2} \\ \dot{x}_{r,2} &= -a_{1,r}x_{r,1} - a_{2,r}x_{r,2} + a_{1,r}u \\ y_m &= x_{m,1}\end{aligned}\tag{123}$$

La colocación de los polos de este sistema se escogió en $px_{(1,r),(2,r)} = -10$; de esta selección resultan las constantes $a_{1,r} = 100, a_{2,r} = 20$.

Ahora usaremos algunas variables auxiliares para formar un sistema aumentado, e.g. el CMI como se presenta en (10).

Recordando del capítulo II la definición de las variables auxiliares del CMI

$$y = x_m + x_r + z; e = x_p - x_m$$

y usando las variables auxiliares se obtiene, para el estado de la planta y el modelo, las siguientes definiciones

$$x_m = y - x_r + z$$

$$x_p = e + y - x_r + z$$

La acción de control nominal del CMI está dada por

$$u = -g_m^{-1}(f_m + f_r - f_y)$$

con

$$f_m(x_m) = -a_{1m}x_{m,2} - a_{2m}\text{sen}(x_{m,1})$$

$$f_r(x_r) = -a_{1,r}x_{r,1} - a_{2,r}x_{r,2} + a_{1,r}(y_p - y_m)$$

$$f_y(y) = -\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2$$

Si usamos esta acción de control la dinámica de la variable y está dada por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2\end{aligned}\tag{124}$$

La ubicación de los polos del subsistema y se escogió en $py_{1,2} = -2$, de lo que resultan las siguientes constantes

$$\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 4.$$

Ahora estamos listos para presentar el sistema CMI nominal, es decir suponiendo que la planta y el modelo son idénticos, el cual resulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_{r,1} &= x_{r,2} \\ \dot{x}_{r,2} &= f_r(x_r) \\ \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= f_m(x_p) - f_m(x_m) \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= f_y(y)\end{aligned}\tag{125}$$

La matriz de linealización del CMI nominal, suponiendo que se requiere seguir una referencia $\tilde{z} = 0.0$, es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{1,r} & -a_{2,r} & a_{1,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2m} \cos(\tilde{z}) & a_{1m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Como se comentó en el capítulo II esta matriz no cambia si la referencia a seguir es diferente de cero (cuando la planta y el modelo son idénticos). Los valores propios de la matriz A , para los valores propuestos del ejemplo, son :

$$\lambda(A) = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -0.05 + 1.00i \\ -0.05 - 1.00i \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Puesto que la parte real de los valores propios es menor que cero con esto queda comprobada la estabilidad local del CMI nominal.

V.1.2 ESTIMACION DE LA MEDIDA DE ROBUSTEZ

A continuación se presenta la estimación de la medida de robustez que se obtuvo en el análisis de la sección III.2.2.

El primer paso es calcular la matriz P solución de la ecuación de Lyapunov,

$$PA + A^T P = -I.$$

La matriz P está dada por

$$P = \begin{pmatrix} 2.63 & 0.00 & -2.35 & -0.47 & 0 & 0 \\ 0.00 & 0.03 & 0.01 & -0.02 & 0 & 0 \\ -2.35 & 0.01 & 22.2 & 1.47 & 0 & 0 \\ -0.47 & -0.02 & 1.47 & 19.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.13 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

cuya norma es

$$\|P\|_{\infty} = 26.22^{-1}.$$

Usando los resultados del análisis de la sección (III.2.2) el sistema CMI es estable si la norma de la linealización del término perturbador

$$h(\zeta) = \Delta f_m(\zeta) + \Delta g_m(\zeta)u(\zeta)$$

satisface la condición

$$\|\tilde{k}_y\|_{\infty} + \|\tilde{k}_e\|_{\infty} + \|\tilde{k}_{x_r}\|_{\infty} < \frac{1}{2\|P\|_{\infty}},$$

donde

$$\tilde{k}_y = D_{x_y}h(0),$$

$$\tilde{k}_e = D_e h(0),$$

$$\tilde{k}_{x_r} = D_{x_r}h(0).$$

En el ejemplo el término perturbador está dado por

$$h(\zeta) = \Delta a_{1m}x_{p,2} + \Delta a_{2m}\text{sen}(x_{p,1}) + \Delta g_mu.$$

Evaluando $D_\zeta h(0)$ resulta

$$D_\zeta h^T = \begin{bmatrix} \Delta a_{2m} \cos(\tilde{z}) + \Delta g_m a_{1r} / g_m \\ \Delta a_{1m} \\ \Delta a_{2m} \cos(z) + \Delta g_m (-a_{1r} + a_{2m} \cos(\tilde{z})) / g_m \\ \Delta g_m (a_{1m} - a_{2r}) / g_m - \Delta a_{1m} \\ \Delta g_m (\alpha_1 - a_{2m} \cos(\tilde{z})) / g_m + \Delta a_{2m} \cos(\tilde{z}) \\ \Delta g_m (\alpha_2 - a_{1m}) / g_m + \Delta a_{1m} \end{bmatrix},$$

y calculando el valor de la norma de éste término para los valores del ejemplo se tiene que

$$\|D_\zeta h\|_\infty = 5.096.$$

Este valor no cumple con los requerimientos del análisis presentado en la sección III.2.2. Sin embargo, al evaluar la matriz de linealización del sistema perturbado se puede notar que éste es estable. Los valores propios del sistema perturbado son

$$\lambda(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} -8.42 \\ -11.52 \\ -0.07 + 1.01i \\ -0.07 - 1.01i \\ -2.00 \\ -2.00 \end{pmatrix}.$$

Comentario: El valor de la medida de robustez obtenido con el análisis de la sección III.2 es muy conservador.

Del ejemplo se puede observar que el diseño del regulador, en particular el parámetro $a_{1,r}$ en conjunción con Δg_m , es el factor dominante en nuestra medida de robustez. Esto nos da un cierto conocimiento para aumentar este margen disminuyendo la contribución de este término. Es decir, si se minimiza la contribución en la norma de los sistemas a

los cuales se tiene acceso, e.g. el sistema regulador y el sistema y , es posible aumentar el margen de robustez hasta un cierto punto en donde el valor de la norma es dominado por la contribución debida al error de modelado entre la planta y el modelo ó por la planta misma si se tiene modelo perfecto. A la situación anterior se le puede llamar el límite del margen de robustez.

El uso de la constante de tiempo del regulador, que influye directamente sobre el parámetro $a_{1,r}$, como un parámetro de sintonía concuerda con un resultado empírico presentado en el libro (Morari y Zafriou, 1989) donde se establece que es posible aumentar la robustez del CMI para sistemas lineales haciendo más lento al sistema regulador.

Cabe mencionar que existe un límite para el cual el valor de la norma de las matrices A crece y P decrece. Más allá de este punto el valor de la norma de la matriz P empieza a crecer nuevamente, por lo tanto disminuye la medida de robustez.

A manera de ejemplo, si se colocan los polos del regulador en $px_{(1,r),(2,r)} = -1$ los valores de las normas de estas matrices son:

- $\|A\|_{\infty} = 8$.
- $\|P\|_{\infty} = 13.8571$.

Si colocamos los polos del regulador en $px_{(1,r),(2,r)} = -0.1$ el valor de las normas de las matrices es:

- $\|A\|_{\infty} = 8$.
- $\|P\|_{\infty} = 305.31358$.

Además existe una buena razón para no colocar los polos del regulador muy cerca del origen del semiplano complejo, pues al hacer esto se tiende a volver muy lenta la respuesta del sistema y se presentan demasiadas oscilaciones de periodo largo. También, como se ve del ejemplo, el margen de robustez empieza a decrecer.

Nota: La medida de robustez presentada en la sección III.2 se obtiene directamente de las matrices de linealización del sistema tomando en cuenta cierto margen de error en los parámetros o cierta cota en la magnitud de las perturbaciones. Esta medida es muy fácil de obtener, como se vió en el ejemplo. La principal desventaja de la misma es que es muy conservadora.

En defensa de este resultado cabe mencionar que permite demostrar, en el caso de perturbaciones evanescentes, la estabilidad del sistema perturbado y una estimación de las perturbaciones admisibles. En el caso de perturbaciones no evanescentes, se puede demostrar la existencia de un nuevo equilibrio y su estabilidad en una zona bien definida alrededor del equilibrio en el origen del CMI nominal si el sistema cumple con los requisitos de los lemas presentados, ver el capítulo III.

A continuación se presentan algunos resultados de simulaciones para el diseño de la acción de control nominal del CMI.

En la figura (5) se muestra la respuesta del sistema con el controlador nominal para el CMI¹ para un cambio en escalón de la referencia a $\tilde{z} = 0.2$, las condiciones iniciales del experimento son $(x_p, x_m, x_r)^T = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.

La figura (6) muestra un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1.0$. En está gráfica se puede ver la inestabilidad del sistema. Las condiciones iniciales de la simulación son las establecidas para la figura anterior.

¹En la mayoría de las gráficas el eje x representa segundos de tiempo a menos que se especifique otra cosa.

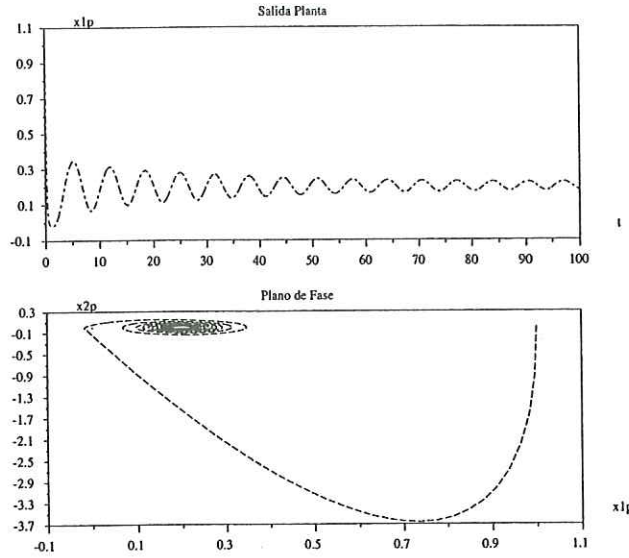


Figura 5: Cambio de referencia a 0.2, diseño nominal CMI. En la parte superior de la gráfica se muestra la salida de la planta contra segundos de tiempo. En la parte inferior de la gráfica se muestra el plano de fase del estado de la planta, es decir, se muestra $x_{p,2}$ contra $x_{p,1}$.

V.1.3 CMI++ (Estado Completo)

En esta sección se presenta el diseño del CMI++ con acceso al estado completo. La planta, el modelo, el regulador y el subsistema y son los propuestos anteriormente en (121, 122, 123 y 124).

La acción de control compuesta que actúa sobre la planta está definida por :

$$u_p = u - \theta(\zeta)$$

donde u es la acción de control nominal del CMI y $\zeta = (x_r, e, y)^T$ es el estado global del CMI en lazo cerrado, $\theta(\zeta)$ es

$$\theta(\zeta) = \begin{cases} \frac{k\rho(\zeta)w}{\|w\|} & \text{si } \rho(\zeta)\|w\| \geq c_1 > 0 \\ \frac{k\rho(\zeta)^2w}{c_1} & \text{otro valor} \end{cases} \quad (126)$$

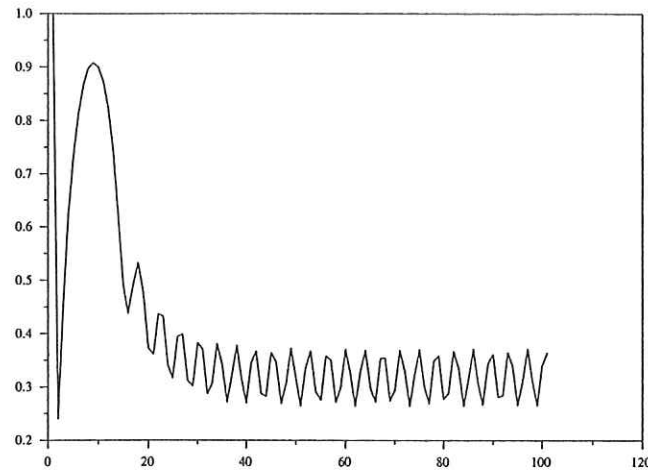


Figura 6: Salida de la planta para un cambio de referencia a 1.0, diseño nominal del CMI.

donde $\rho(\zeta)$ una función que satisface

$$\rho(\zeta) > \|h(\zeta) + \delta(\zeta)\|$$

en alguna región $D_2 \subset \mathbb{R}^{3n}$ alrededor del origen y $k > 1/g_p$. La acción de control que actúa sobre modelo es la acción de control nominal del CMI.

En el ejemplo, la función $\rho(\zeta)$ la definimos como

$$\rho(\zeta) = |k_1 u| + |\delta a_{1p} x_{p,2} + \delta a_{2p} \sin(x_{p,1}) + k_2|$$

donde $\delta a_{1p}, \delta a_{2p}$ son los estimados del error en los parámetros de la planta, $k > 1/g_p$ y $k_2 > 0$. La definición del resto de variables y su función se puede ver con detalle en la sección (IV.2).

Los valores escogidos en el ejemplo para las distintas constantes son: $\delta a_{1p} = 0.2$, $\delta a_{2p} = 1$, $k = 1.5$ y $k_2 = 5$. El valor de c_1 que se escogió para los experimentos es $c_1 = 0.1$.

En la figura (7) se muestra la respuesta de este controlador para un cambio de referencia en escalón a $\tilde{z} = 0.2$ con las condiciones iniciales

$$(x_p, x_m, x_r)^T = (-2, -2, 0, 0, 0, 0)^T,$$

estas condiciones iniciales son mucho más “fuertes” que las utilizadas para los experimentos realizados con la acción de control nominal del CMI (ver figura (5)), de hecho para esta condición inicial el diseño nominal del CMI es inestable. En otras palabras, la zona de atracción del CMI++ es más grande que la del sistema con la acción de control nominal del CMI. Este experimento corrobora los resultados del análisis del controlador CMI++ donde se especifica el agrandamiento de la cuenca de atracción.

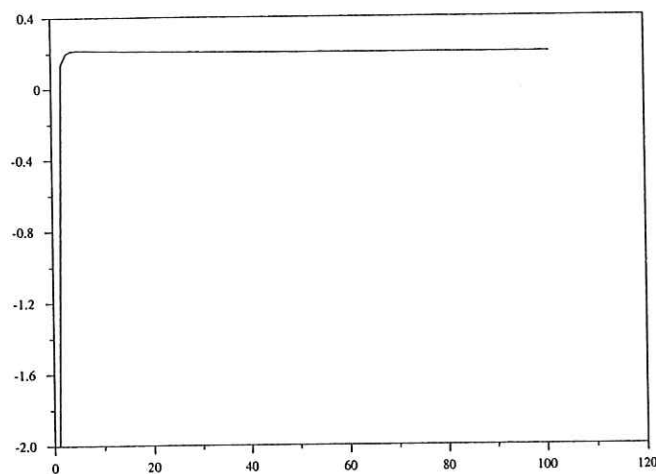


Figura 7: Salida de la planta para un cambio de referencia a 0.2, CMI++ con acceso al estado completo

En la figura 8 se muestra el cambio de la referencia a 1.0. Las condiciones iniciales son las definidas en el experimento anterior.

De estas gráficas es posible ver el aumento en desempeño y en robustez del CMI++

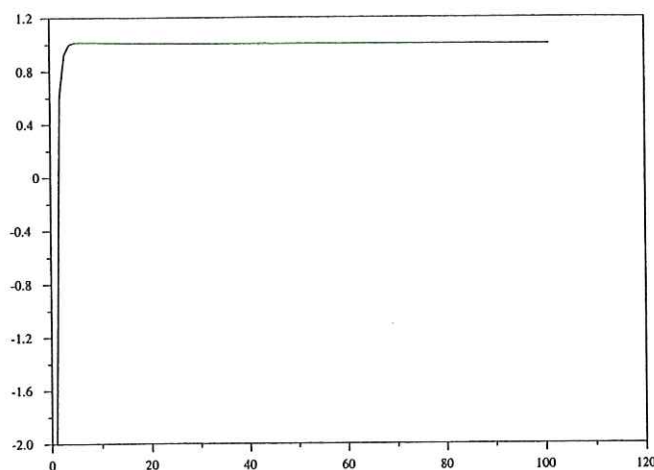


Figura 8: Salida de la planta para un cambio de referencia a 1.0, CMI++ con acceso al estado completo

comparado con el diseño nominal del CMI.

La desventaja del CMI++ con respecto al controlador nominal del CMI es una acción de control más compleja y que requiere de acceso al estado completo del CMI. A cambio de estas desventajas se logra un margen de robustez mucho mayor, entendiendo como un margen de robustez mayor el agrandamiento de la cuenca de atracción para el mismo juego de valores en las perturbaciones paramétricas.

V.1.4 CMI++ (Estimador de Estado)

En esta sección se diseñará un estimador del estado e que utiliza solamente estados accesibles. El objetivo es intercambiar en la acción de control CMI++ al estado e por su estimado y reproducir en las simulaciones el desempeño del CMI++ con acceso al estado completo presentado en la sección anterior.

El estimador que usaremos presenta la misma estructura que el subsistema regula-

dor. La única diferencia es que la ubicación de los polos de éste último es 10 veces o más alejada del origen que los polos del subsistema regulador. El estimador utilizado tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{e}}_1 &= \tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{e}}_2 &= -\tilde{a}_1\tilde{e}_1 - \tilde{a}_2\tilde{e}_2 + \tilde{a}_1e_1\end{aligned}$$

con los polos en $p\tilde{e}_{1,2} = -100$, de lo que resultan las constantes $\tilde{a}_1 = 10000$, $\tilde{a}_2 = 200$.

Incorporando el estimador al CMI++ la interconexión en lazo cerrado es

$$\begin{aligned}\dot{x}_{r,1} &= x_{r,2}, \\ \dot{x}_{r,2} &= -a_{1r}x_{r,1} - a_{2r}x_{r,2} + a_{1r}e_1, \\ \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= f_p(x_p) - f_m(x_m) + (g_p - g_m)u - g_p\theta(\hat{\zeta}, \text{Sat}(\tilde{e}_s, \bar{e}_M)), \\ \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\alpha_1y_1 - \alpha_2y_2, \\ \dot{\tilde{e}}_1 &= \tilde{e}_2, \\ \dot{\tilde{e}}_2 &= -\tilde{a}_1\tilde{e}_1 - \tilde{a}_2\tilde{e}_2 + \tilde{a}_1e_1,\end{aligned}$$

con $\hat{\zeta} = (x_r, y)^T$, $\tilde{e}_s$ estado e estimado, $\text{Sat}(e_s, \bar{e}_M)$ es la función de saturación con límite de saturación $\bar{e}_M$ y θ es la acción de control del CMI++ presentada en (126) intercambiando el estado e por el estado estimado $\tilde{e}_s$ saturado.

Este sistema puede ponerse con la estructura de un sistema perturbado singularmente. El análisis de estabilidad de la interconexión CMI++-estimador se puede ver en la sección IV.2.3.

El valor de saturación escogido para el estado $\tilde{e}$ es 10, es decir, se usó la función

$$\tilde{e}_s = \text{Sat}(\tilde{e}, 10).$$

La figura (9) muestra los resultados de un cambio de referencia en escalón a ($\tilde{z} = 1$), además se muestra en la misma figura una ampliación de una zona de la respuesta para

observar una oscilación de alta frecuencia y de muy baja amplitud en la salida de la planta.

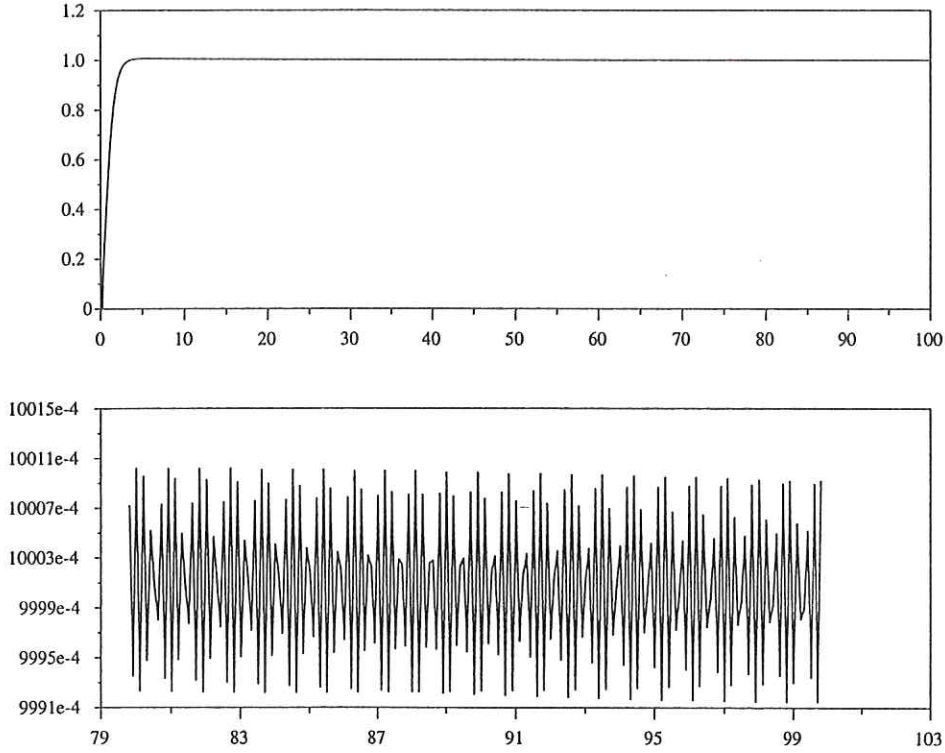


Figura 9: Respuesta del CMI++ con el estimador del estado e , polos del estimador en -100 . La parte superior de la gráfica muestra la salida de la planta. La parte inferior muestra una ampliación de la zona entre 79 y 100 segundos.

Para el siguiente experimento se colocaron los polos del estimador en $p\tilde{e}_{1,2} = -1000$, es decir, 100 veces más a la izquierda del semiplano complejo que los del sistema regulador x_r . De acuerdo con la teoría mientras más rápido sea el estimador mejor es la respuesta del sistema, es decir, se tiende a reproducir el desempeño del sistema con acceso al estado completo. Lo anterior implica disminuir el parámetro ϵ del análisis presentado en la sección IV.3.

La figura 10 muestra el cambio de referencia $\tilde{z} = 1$. Las condiciones iniciales son las mismas que el experimento anterior. Se presenta tambien una ampliación mayor a la de la figura (9) para mostrar que las oscilaciones desaparecen y se observa convergencia asintótica.

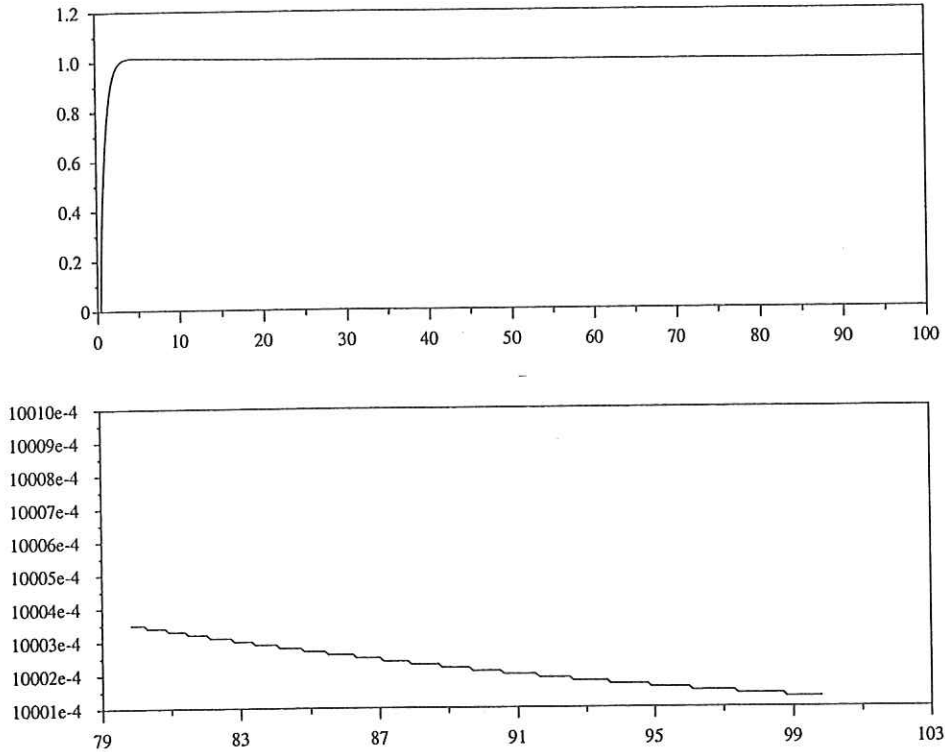


Figura 10: Respuesta del CMI++ con el estimador del estado e , polos del estimador en -1000 . La parte superior de la gráfica muestra la salida de la planta. La parte inferior muestra una ampliación de la zona entre 79 y 100 segundos.

En la figura (11) se muestra la salida de la planta y la acción de control que entra a la misma para un cambio de referencia a 1 del CMI++ con estimador. Las condiciones iniciales de la planta son $x_p = (2, 2)^T$. Los polos del estimador ubicados en -1000 .

La magnitud observada de las oscilaciones en la salida de la planta al variar la

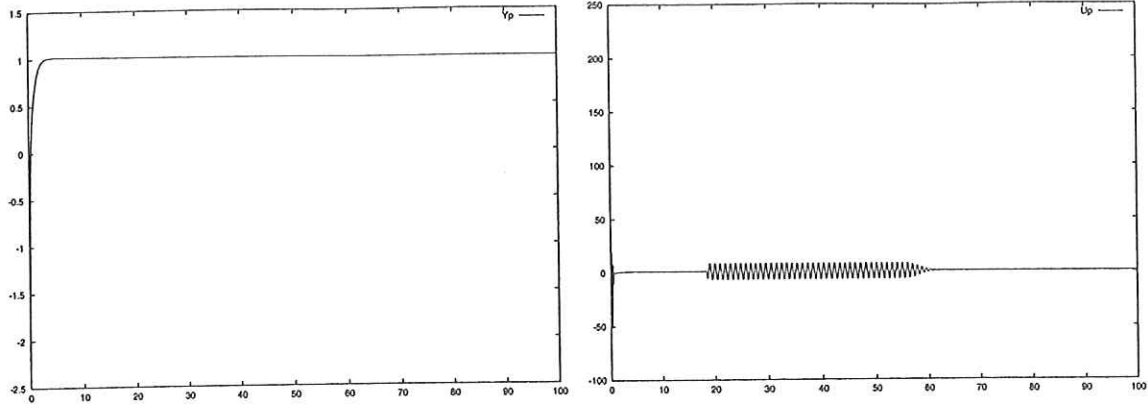


Figura 11: Salida de la planta y acción de control del CMI++ con el estimador del estado e , polos del estimador en -1000, para un cambio de referencia a 1.

ubicación de los polos del estimador se puede ver en la tabla (I).

COLOCACION DE LOS POLOS DEL ESTIMADOR	MAGNITUD DE LA OSCILACION EN LA SALIDA
-100.00	0.0018
-200.00	0.0004
-500.00	1×10^{-5}
-1000.00	0.00

TABLA I: Tabla de ubicación de polos, magnitud de la oscilación observada.

La función que define los equilibrios del sistema CMI++ del ejemplo es

$$-a_{2p}\sin(z) + a_{2m}\sin(z - x_{r,1}) - \frac{a_{2m}(g_p - g_m)\sin(z - x_{r,1})}{g_m} + f_1(x_{r,1}) = 0;$$

donde $f_1(x_{r,1})$ es

$$f_1(x_{r,1}) = \frac{(P_{2,1}x_{r,1} + P_{2,3}x_{1r}) \left(|k_2 + \sin(z)\delta a_{2p}| + k_1 \left| \frac{a_{2m}\sin(z-x_{r,1})}{g_m} \right| \right)^2}{\mu}$$

y $P_{2,1}, P_{2,3}$ son elementos de la matriz P . La gráfica de esta función para los parámetros del ejemplo muestra que existe un sólo equilibrio independientemente del valor de z .

V.2 EJEMPLO 2

En esta sección presentamos un ejemplo de diseño para una planta de orden 3. Omitimos muchos pasos en el diseño pues los suponemos obvios dado el ejemplo 1. Los resultados se presentan en simulaciones numéricas donde se puede observar el desempeño de los diferentes controladores presentados anteriormente. Además, se incluyen resultados de simulaciones numéricas con perturbaciones de tipo no evanescente.

Considere la siguiente planta:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,1} &= x_{p,2} \\ \dot{x}_{p,2} &= x_{p,3} \\ \dot{x}_{p,3} &= -a_{1,p}x_{p,1}(1 + \text{sen}(x_{p,1})) - a_{2,p}x_{p,2}(1 + 0.1x_{p,3}) - a_{3,p}x_{p,3} + g_p u\end{aligned}\tag{127}$$

con los siguientes valores ($a_{1,p} = 1.1, a_{2,p} = 3.01, a_{3,p} = 3.1, g_p = 0.5$). Esta planta cumple con los requerimientos de los análisis presentados anteriormente.

El modelo de la planta utilizado para el diseño del CMI es

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m,1} &= x_{m,2} \\ \dot{x}_{m,2} &= x_{m,3} \\ \dot{x}_{m,3} &= -a_{1,m}x_{m,1}(1 + \text{sen}(x_{m,1})) - a_{2,m}x_{m,2}(1 + 0.1x_{m,3}) - a_{3,m}x_{m,3} + g_m u,\end{aligned}\tag{128}$$

suponga que los parámetros nominales del modelo presentan un error y están dados por ($a_{1,m} = 1.0, a_{2,p} = 3.0, a_{3,p} = 3., g_p = 0.6$). Esto lo hacemos para simular un error de modelado y verificar las propiedades de la estructura CMI.

La colocación de los polos del regulador la escogemos en $pr_{1,2,3} = -2$ y los polos del subsistema y en $py_{1,2,3} = -1$.

La matriz A correspondiente a la linealización alrededor del origen del CMI nominal posee los siguientes valores propios

$$\lambda(A) = \{\lambda(x_p) = (-1, -1, -1), \lambda(x_r) = (-2, -2, -2), \lambda(y) = (-1, -1, -1)\}$$

de donde se concluye la estabilidad del CMI nominal en lazo cerrado.

La norma infinito de la matriz P solución de $PA + A^T P = -I$ es

$$\|P\|_\infty = 11.199267$$

de esto obtenemos que la medida de robustez presentada en nuestro análisis es

$$\|\Delta A\|_\infty < \frac{1}{2 \times 11.199267}.$$

A continuación presentamos unos experimentos en simulación para el CMI nominal.

En la figura 12 se puede ver la salida de la planta para un cambio de referencia a la posición $\tilde{z} = 1$, las condiciones iniciales (CI) de la planta son $(x_{p,1}(0) = -0.5, x_{p,2}(0) = 1.0, x_{p,3}(0) = 0)$ el resto son cero, se puede observar el buen desempeño del controlador.

En la figura 13 se puede observar un cambio de referencia a la posición $\tilde{z} = \pi$ se puede notar en la inestabilidad del sistema. En los siguientes párrafos se muestran dos experimentos con las mismas condiciones iniciales sólo que utilizando el CMI++ se podrá notar el aumento en robustez de la estructura.

En la figura 14 se puede observar la salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$ combinado con una perturbación constante sumada a la salida de la planta de magnitud 0.5 actuando después de 50 segundos. Se puede observar el rechazo de ambas perturbaciones la evanescente para $t < 50$ y la acción conjunta de la no evanescente y la evanescente para $t > 50$.

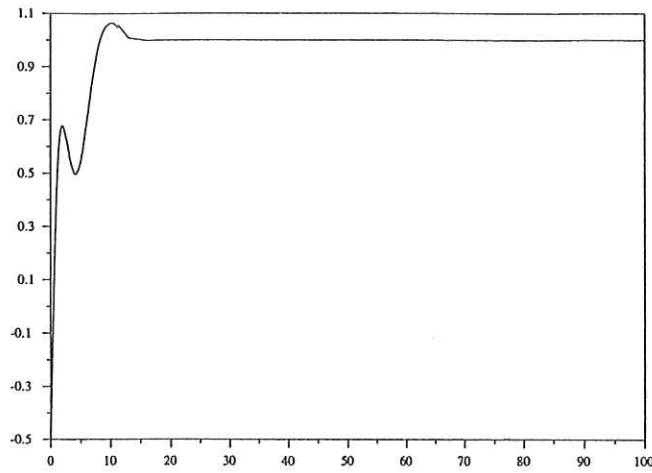


Figura 12: Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$, control CMI.

V.2.1 DISEÑO CMI++

En este apartado presentamos el diseño d CMI++ con el estimador del estado e presentado en la sección IV.2.3. Los polos del estimador se colocaron en $pe_{1,2,3} = -200$.

Para el diseño del CMI++ tomamos como función mayorizante la siguiente expresión

$$\rho(\zeta) = \Delta g_m |u| + \Delta a_{1,m} |\tilde{e}_1| + \Delta a_{2,m} (|\tilde{e}_2| + |\tilde{e}_3|) + \Delta a_{3,m} |\tilde{e}_3|.$$

donde ζ es el estado general del CMI y $\tilde{e}$ es el estado e estimado por el observador de alta ganancia. Los valores de los parámetros son $\Delta g_m = 0.5$, $\Delta a_{1,m} = 0.5$, $\Delta a_{2,m} = .5$ y $\Delta a_{3,m} = 0.5$.

La matriz P es la obtenida en la sección anterior de diseño del CMI para la estimación de la medida de robustez. El límite de saturación del control del rediseño fué de $u_{max} = 10$, el valor de $c_1 = 0.1$, para una descripción de estos parámetros vea la sección IV.2.2.

En la figura 15 se puede la salida de la planta para un cambio de referencia a

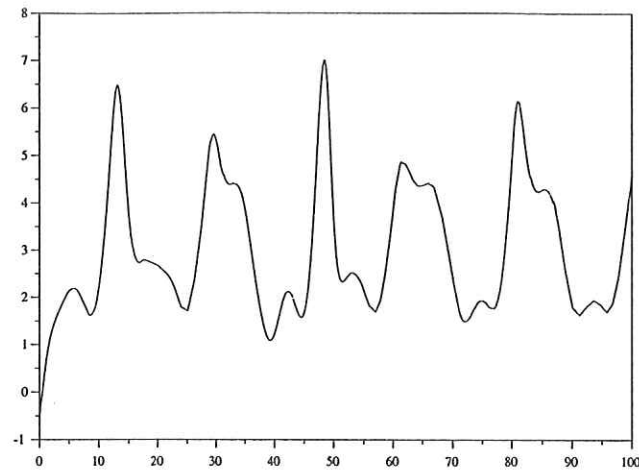


Figura 13: Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = \pi$, control CMI. Se puede notar claramente la inestabilidad del sistema.

la posición $\tilde{z} = 1$, las CI de la planta son similares a las de la figura 12. Se puede establecer una diferencia entre las respuestas del CMI++ y del CMI (fig. 12) para este experimento, sin embargo, lo más notable es que en ambos casos se conserva la estabilidad.

La figura 16 presenta la salida de la planta para un cambio de referencia a la posición π , CI similares a las de la figura 13. El CMI++ logra la estabilidad para esta referencia mientras que el CMI es inestable para la misma. En este experimento se puede notar claramente el aumento de la zona de robustez y estabilidad del CMI++ comparado con el CMI.

La figura 17 presenta la salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$ combinado con una perturbación constante actuando a la salida de la planta cuando $t > 50$ segundos. La magnitud de la perturbación no evanescente es 0.5. Se puede observar el rechazo de ambos tipos de perturbaciones como en el caso del CMI salvo

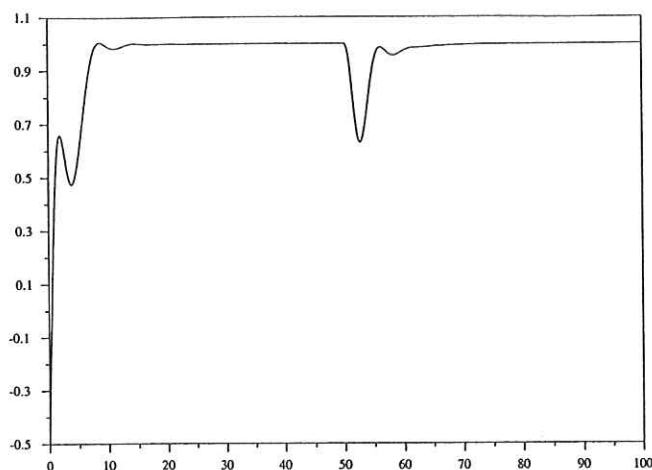


Figura 14: Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$ combinada con una perturbación aditiva a la salida de la planta de magnitud 0.5 actuando después de 50 segundos. La perturbación constante permanece activa después de los 50 s. , aún así, se mantiene la regulación de la referencia deseada. Tipo de control: CMI.

una pequeña diferencia en la magnitud de los sobretiros con respecto a la gráfica 14.

V.3 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

En este capítulo se presentó el diseño para dos plantas no lineales de las acciones de control propuestas para el CMI en los capítulos anteriores. Se presentó el diseño de la acción de control nominal del CMI, la del CMI++ con acceso al estado completo y la del CMI++ con un estimador del estado e .

Los resultados del desempeño de cada acción de control se presentan con gráficas de las respuestas en simulación para varios experimentos con diferentes condiciones iniciales.

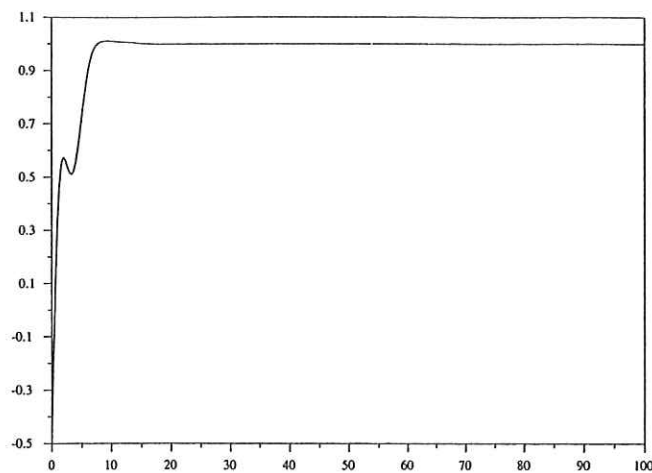


Figura 15: Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$, control CMI++.

En la sección V.1.2 del ejemplo de diseño de la acción de control nominal del CMI se pudo establecer la influencia de algunos parámetros en la medida de robustez presentada en el análisis de la sección III.2. En particular se puede reafirmar y extender al caso no lineal lo propuesto en (Morari y Zafiriou, 1989) donde se afirma que una manera de aumentar la robustez del CMI lineal es haciendo más lento al sistema regulador. También se pudo observar que uno de los parámetros que más contribuye a la disminución de la medida de robustez presentada es $a_{1,r}$ en conjunción con el error de modelado de la función $g_p(x_p)$ del modelo, es decir el valor de $\Delta g_m(x_p)$.

De las gráficas de las respuestas de los diferentes experimentos realizados es posible extraer varias conclusiones. Estas conclusiones ya se habían presentado de manera formal en los capítulos de análisis y en este capítulo se corroboraron numéricamente. Se pudo observar las ventajas en el desempeño del controlador CMI++ con respecto al diseño de control nominal del CMI. Las ventajas del CMI++ con respecto al controlador nominal del CMI son:

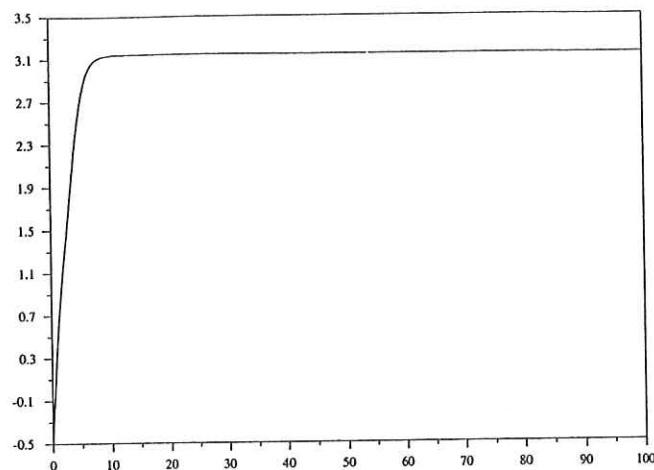


Figura 16: Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = \pi$, control CMI++.

- Una zona de atracción más grande.
- Rechazo de perturbaciones o incertidumbres también mayor.

Las desventajas del CMI++ con respecto al CMI son:

- Una acción de control más complicada.
- Necesita de acceso al estado e completo lo que obliga a la inclusión de un estimador del mismo. Lo anterior implica que el orden del controlador se incrementa.
- En general es necesario efectuar varias pruebas para encontrar el valor adecuado de la ubicación de los polos del estimador para reproducir el desempeño del CMI++ con acceso al estado completo. La ubicación de los polos del estimador determina el valor del parámetro ϵ presentado en el análisis de la sección IV.3.

Con respecto al último punto es posible empezar los experimentos con un valor muy pequeño del parámetro ϵ , e.g. un estimador muy rápido, e ir aumentando o

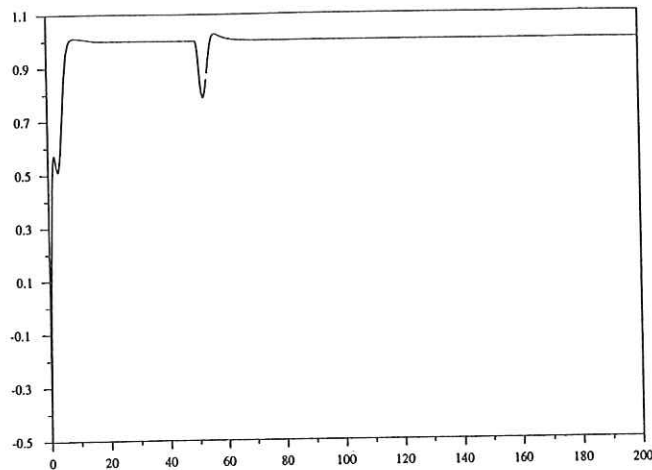


Figura 17: Salida de la planta para un cambio de referencia a $\tilde{z} = 1$ combinado con una perturbación constante no evanescente que actúa a la salida de la planta cuando $t > 50$. Control CMI++.

disminuyendo hasta encontrar un valor adecuado. En simulación no es muy difícil encontrar un valor muy pequeño para ϵ tal que se logre la estabilidad de la interconexión CMI++-estimador. Sin embargo, es importante encontrar el valor más grande posible de ϵ para cuestiones de realización del CMI++-estimador, como se verá en el capítulo VII.

Pese a las desventajas mencionadas el aumento en desempeño y robustez con respecto al diseño nominal del CMI justifican por mucho el uso del CMI++.

Sintetizando, los resultados de los experimentos presentados en el capítulo permiten corroborar el aumento en la robustez y desempeño en general del CMI++-estimador con respecto al diseño nominal del CMI. En cuanto al cálculo de la medida de robustez del diseño nominal del CMI se ve su naturaleza conservadora, pero también se ve su utilidad en la determinación de los parámetros que más contribuyen negativamente a

la medida de robustez.

CAPITULO VI

SEGUIMIENTO CON EL CMI

El propósito de este capítulo es describir la aplicación de la estructura CMI al seguimiento de trayectorias, en particular se trata el caso del seguimiento de una trayectoria de tipo rampa. Se elige este tipo de trayectoria puesto que una de las posibles aplicaciones prácticas de los resultados del trabajo es el apuntado y seguimiento de objetos astronómicos (control de telescopios) y algunos otros tipos de servomecanismos que utilizan motores eléctricos y cuyo objetivo de operación es seguir trayectorias de este tipo.

La trayectoria deseada que debe seguir la salida de la planta se genera por medio de un integrador de la forma

$$\dot{z}_1 = k_l \quad (129)$$

donde z_1 es el estado del integrador y k_l es una constante que define la pendiente de la rampa de salida. El objetivo es, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_p - z_1) = 0. \quad (130)$$

Obsérvese que una trayectoria de este tipo es no acotada, lo cual implica, desde el punto de vista de estabilidad entrada-salida, que no es posible demostrar la estabilidad

de la interconexión en serie de dos sistemas cuando uno de ellos es no acotado. Para solucionar este problema se plantea el seguimiento de la rampa durante un tiempo finito, por lo que el generador de trayectorias está definido por

$$\dot{z}_1 = k_t \quad (131)$$

con

$$k_t = \begin{cases} k_t & \text{si } t \leq T \\ 0 & \text{si } t > T. \end{cases}$$

Aun con esta redefinición de la trayectoria no es posible lograr el objetivo de seguimiento con error cero cuando la planta y el modelo son distintos, para un valor de $t_1 \leq T$. Sin embargo, es posible disminuir el valor del error del seguimiento por medio de algunas de las variables a las que se tiene acceso en el diseño. Una consideración más es que el error de seguimiento es un error de posición y no un error de velocidad. Esto quiere decir que es posible seguir la pendiente de la rampa con error cero manteniendo constante el error de posición a lo largo de la trayectoria, situación que es útil cuando es posible modificar el punto de operación para corregir este pequeño error y lograr un seguimiento perfecto; tal es el caso de un sistema como un telescopio astronómico.

Un bosquejo del capítulo es el siguiente.

Se analiza la estabilidad local del seguimiento y el valor del error en estado estable para dos casos:

- El caso cuando la planta y el modelo son idénticos. En este caso se logra seguimiento perfecto.
- El caso cuando la planta y el modelo son diferentes. En este caso se presenta un error de posición cuya magnitud es posible acotar por medio de algunas variables de diseño como se verá posteriormente.

Más adelante se presenta un ejemplo en simulación de los resultados del análisis. Se muestran gráficas de las respuestas de simulación que muestran el valor acotado del error de seguimiento en estado estacionario. Se dan las conclusiones de las secciones de análisis del CMI cuando es utilizado para el seguimiento de trayectorias de tipo rampa como la descrita en esta sección.

Por último, se utiliza una sección de este capítulo para establecer una comparación cualitativa entre el regulador robusto de Isidori presentado en (Isidori y Astolfi, 1994) y el CMI para seguimiento. Se establecen las condiciones que debe cumplir cada enfoque para el seguimiento de una trayectoria y se enlistan las ventajas y desventajas de cada enfoque.

VI.1 PLANTA y MODELO IDENTICOS

En esta sección se analiza la estabilidad del diseño nominal del CMI para el seguimiento de una trayectoria del tipo rampa, cuando se tiene un modelo perfecto de la planta.

Considere el CMI definido por las ecuaciones (10), utilizando el siguiente nuevo vector de referencias z por seguir

$$z = (z_1 \quad k_l \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T \quad (132)$$

con z_1, k_l definidos en (131). Sustituyendo este valor en las variables auxiliares y resulta

$$y_1 = x_{m,1} + x_{r,1} - z_1$$

$$y_2 = x_{m,2} + x_{r,2} - k_l$$

$$y_3 = x_{m,2} + x_{r,2}$$

$$\vdots$$

$$y_n = x_{m,n} + x_{r,n}$$

Uno de los requerimientos que se plantean en el análisis posterior es que la estabilidad de la planta y el modelo no debe cambiar en la zona del espacio de estado donde la trayectoria a seguir hace incursionar al sistema. Es decir, la matriz A no debe cambiar mucho en esta zona. Esto se puede lograr de dos formas, acortando el tiempo T de seguimiento de la trayectoria o haciendo su pendiente k_t no muy pronunciada.

Obsérvese que en las coordenadas (e, x_r, y) , el sistema es no autónomo ($x_m = y - x_r + z$, $x_p = e + y - x_r + z$ puesto que z es un vector dependiente del tiempo). Sin embargo, si la planta y el modelo son idénticos y asintóticamente estables entonces existe un equilibrio del CMI (10) en el origen del espacio de estado (e, x_r, y) , es decir,

$$(\bar{e} = 0, \bar{x}_r = 0, \bar{y} = 0)$$

donde las variables con barra denotan el valor del estado en el equilibrio. Lo anterior implica

$$\bar{y}_1 = 0 = \bar{x}_{m,1} + \bar{x}_{r,1} - z_1 = \bar{x}_{m,1} + \bar{e}_1 - z_1 = \bar{x}_{m,1} + (\bar{x}_{p,1} - \bar{x}_{m,1}) - z_1$$

o sea,

$$\bar{x}_{p,1} = z_1.$$

Es decir, si el equilibrio del CMI es estable para el nuevo vector de referencias, entonces la salida de la planta sigue la trayectoria deseada con error cero. Así pues, el problema por analizar es determinar la estabilidad del origen para este nuevo vector de referencia.

Para demostrar la estabilidad y el error cero de seguimiento con modelo perfecto usaremos técnicas de sistemas lineales.

Suposición 4 *Suponga que la planta cumple con todos los requerimientos del análisis de la sección (III.2).*

El sistema CMI modificado, en lazo cerrado, resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{r,i} &= x_{r,i+1} \\
 \dot{x}_{r,n} &= -\sum a_{j,r} x_{r,j} + a_{1,r} e_1 \\
 \dot{e}_i &= e_{i+1} \\
 \dot{e}_n &= f_p(x_p) - f_m(x_m) + (g_p(x_p) - g_m(x_m)) u \\
 \dot{y}_i &= y_{i+1} \\
 \dot{y}_n &= -\sum \alpha_j y_j \\
 \dot{z}_1 &= k_l
 \end{aligned} \tag{133}$$

donde u es la acción de control nominal del CMI definida en (7), $i = 1 \dots n-1$ y $j = 1 \dots n$. Reescribiendo en forma compacta

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_r &= F_{x_r}(x_r, e) \\
 \dot{e} &= F_e(x_r, e, y, z_1, k_l) \\
 \dot{y} &= F_y(y) \\
 \dot{z}_1 &= k_l
 \end{aligned} \tag{134}$$

o bien

$$\dot{\zeta} = F(\zeta, z_1, k_l).$$

Si consideramos como entradas a (z_1, k_l) el sistema se puede escribir de la siguiente forma

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \Phi(\zeta, z_1, k_l) + B_1 z_1 + B_2 k_l$$

donde $A = D_\zeta F(0)$, $\Phi(\zeta, z_1, k_l)$ es la parte no lineal que se desvanece en el origen, $B_1 = D_{z_1} F(0)$ y $B_2 = D_{k_l} F(0)$.

La matriz jacobiana asociada con la linealización en el origen del sistema CMI modificado es

$$A = \begin{pmatrix} A_{x_r} & A_{1x_r} & 0 \\ 0 & A_e & 0 \\ 0 & 0 & A_y \end{pmatrix}$$

donde

$$A_e = D_e f_m(0)$$

$$A_{1x_r} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots \\ a_{1,r} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{x_r} = D_{x_r} F_{x_r}(0)$$

$$A_y = D_y F_y(0)$$

donde F_{x_r}, F_y están definidos en (134). Esta matriz A es idéntica a la obtenida en la sección (III.2) y de la cual ya se ha demostrado estabilidad.

Resta demostrar que el error de seguimiento es cero, caso al que nos abocaremos a continuación. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado, considerando a $x_{p,1}$ como la salida y a las entradas (z_1, k_l) , está dada por

$$Y(s) = \frac{Z_1(s)N_1(s)}{D(s)} + \frac{K_l(s)N_2(s)}{D(s)}$$

donde $D(s) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_1$ es el polinomio característico de la matriz A_y definida previamente y (N_1, N_2) son los numeradores obtenidos para cada entrada. Puesto que $K_l(s) = sZ_1(s)$ se tiene

$$Y(s) = \frac{Z_1(s)N_1(s)}{D(s)} + \frac{N_2(s)sZ_1(s)}{D(s)}$$

El error de seguimiento está definido por

$$E(s) = Z_1(s) - Y(s),$$

por medio de manipulaciones algebraicas es posible llegar a lo siguiente

$$E(s) = Z_1(s) \frac{s^2 N_3(s)}{D(s)}.$$

donde N_3 es un polinomio de grado $n - 2$. Aplicando el teorema del valor final con una entrada rampa ($Z_1(s) = k_l/s^2$), e.g.,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_l s^2 N_3(s)}{s^2 D(s)}$$

puesto que en el límite $s = 0$ multiplica al numerador y el límite está bien definido se tiene que el error de seguimiento tiende a cero. A manera de ejemplo los polinomios para los sistemas de orden 2 y 3 son $N_3(s) = 1$ y $N_3(s) = s + \alpha_3$ respectivamente.

Nótese que éste es un resultado local pues depende de los valores propios de la matriz de linealización. Sin embargo, es posible aplicar los mismos resultados del análisis de robustez de capítulos previos, en particular los del capítulo III.

Ahora analizaremos el caso del seguimiento de la rampa cuando existe un error de modelado o no se tiene acceso a un modelo perfecto de la planta.

VI.2 PLANTA y MODELO DIFERENTES

Considere que la planta y el modelo son diferentes y asintóticamente estables.

Suponga que se cumplen los requerimientos de la sección (III.2.2) para la planta y el modelo.

Debido a la diferencia entre planta y modelo se generan términos adicionales en la matriz de linealización presentada en la sección anterior. En general se espera que exista un cierto error en el seguimiento de la rampa cuando la planta y el modelo son diferentes. Esto nos lleva a utilizar herramientas de análisis de sistemas lineales para cuantificar la magnitud del error y tratar de ver si es posible disminuirlo por medio de algunos parámetros sobre los que se tiene acceso en el proceso de diseño.

Es posible escribir al CMI en las coordenadas $\tilde{\zeta} = (x_m, x_p, x_r)$ de la siguiente manera:

$$\dot{\tilde{\zeta}} = F(\tilde{\zeta}, z),$$

o bien, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\zeta}} &= \tilde{A}\tilde{\zeta} + B_1z_1 + B_2z_2 + \Phi_e(\tilde{\zeta}, z_1, z_2) \\ y &= C\tilde{\zeta} = x_{1,p}\end{aligned}\tag{135}$$

donde $\tilde{A} = D_{\tilde{\zeta}}F(0)$ es la matriz jacobiana del CMI perturbado evaluada en el origen, $C = (0 \dots 0, 1 \dots 0, 0 \dots 0)$, $B_1 = D_{z_1}F(0)$, $B_2 = D_{z_2}F(0)$ y $\Phi_e(\tilde{\zeta}, z_1, z_2)$ es la parte no lineal de orden superior que se desvanece en el origen; es decir, $\Phi_e(0, 0, 0) = 0$.

Si se cumple para la planta y el modelo los requerimientos del análisis presentado en la sección III.2.3 entonces es posible afirmar que la matriz $\tilde{A}$ es estrictamente Hurwitz estable.

Considerando sólo la parte lineal de (135) es posible obtener la función de transferencia del sistema que relaciona las entradas de referencia z_1 y z_2 con la salida de la planta

$$Y(s) = C(sI - \tilde{A})B_1z_1 + C(sI - \tilde{A})B_2z_2$$

donde s es la variable compleja de Laplace. Si consideramos que las entradas de referencia son $z_1 = r(t)$ y $z_2 = \dot{r}(t)$, como es el caso, entonces se tiene

$$Y(s) = C(sI - \tilde{A})B_1R(s) + C(sI - \tilde{A})B_2sR(s).$$

El error de seguimiento está definido por

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$E(s) = R(s)(1 - C(sI - \tilde{A})B_1 - C(sI - \tilde{A})B_2s).$$

Entonces es posible encontrar por medio del teorema del valor final el error en estado estacionario del sistema para una rampa por medio del siguiente límite

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(sE(s) \frac{k_l}{s^2} \right).$$

Es posible encontrar para un sistema dado la contribución de cada factor en el valor de e_{ss} . En particular presentaremos el caso de un sistema de segundo orden para ilustrar la reciente afirmación. Sea la planta, Hurwitz estable, definida por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,1} &= x_{p,2} \\ \dot{x}_{p,2} &= -(a_{1,m} + \delta a_{1,m})x_{p,1} - (a_{2,m} + \delta a_{2,m})x_{p,2} + (g_m + \delta g_m)u + \phi(x_p) + \delta\phi(x_p)\end{aligned}$$

donde $(a_{1,m}, a_{2,m}, g_m)$ son los valores nominales o del modelo, $\phi(x_p)$ es la parte no lineal de orden superior que se desvanece en el origen y los parámetros δ representan los errores de modelado o variaciones muy lentas de la planta tal que se puedan considerar como constantes. El modelo de la planta presentada es

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m,1} &= x_{m,2} \\ \dot{x}_{m,2} &= -a_{1,m}x_{m,1} - a_{2,m}x_{m,1} + g_mu + \phi(x_m)\end{aligned}$$

Considerando la parte lineal del CMI el valor de e_{ss} del error de seguimiento que se obtiene para esta planta y modelo para una entrada rampa es

$$e_{ss} = \frac{a_{2,r}}{a_{1,r}} \left(\frac{g_m \delta a_{1,m}}{a_{1,m} (g_m + \delta g_m)} - \frac{\delta g_m}{g_m + \delta g_m} \right) k_l \quad (136)$$

donde $(a_{1,r}, a_{2,r})$ son los parámetros del regulador. De este valor para e_{ss} podemos observar lo siguiente:

- Se comprueba indirectamente que el error de seguimiento a la rampa en caso de modelo perfecto es cero.
- Es posible disminuir el valor de este error de estado estable por medio de un mejor modelo o para un modelo dado, disminuyendo la razón

$$\frac{a_{2,r}}{a_{1,r}}.$$

- De la relación para el error se puede observar que haciendo cero el valor de la constante $a_{2,r}$ del regulador es posible lograr un seguimiento perfecto de la rampa. Sin embargo el análisis de tal posibilidad requiere del uso de técnicas del teorema de la variedad central y se deja como un problema abierto. Cabe mencionar que en pruebas de simulación, haciendo cero este parámetro, se observó una oscilación de muy baja amplitud (1×10^{-6}) alrededor del error cero lo cual quiere decir que por medio de una redefinición de la ley de control es posible lograr el seguimiento perfecto con la estructura CMI cuando existe diferencia entre la planta y el modelo.

Concluyendo, los resultados de este análisis se basan en resultados para sistemas lineales y por lo tanto son de carácter local. Es necesario que la pendiente de la rampa sea lo suficientemente pequeña para lograr el error esperado. Otro requerimiento es que la matriz $\tilde{A}$ mantenga su estabilidad en la zona del espacio de estado donde la trayectoria hace evolucionar al sistema aunque este requisito es aparentemente implicado por el anterior.

Más adelante en el capítulo se presenta un ejemplo en simulación donde se muestran los resultados del análisis presentado.

VI.3 EJEMPLO del CMI para SEGUIMIENTO DE RAMPA

Los resultados del análisis del CMI aplicado al seguimiento de una trayectoria de tipo rampa presentados anteriormente se muestran a continuación por medio de un ejemplo

en simulación. Sea la planta

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,1} &= x_{p,2} \\ \dot{x}_{p,2} &= -a_{1,p}\text{sen}(x_{p,1}) - a_{2,p}x_{p,2} + g_p u\end{aligned}$$

y el modelo

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m,1} &= x_{m,2} \\ \dot{x}_{m,2} &= -a_{1,m}\text{sen}(x_{m,1}) - a_{2,m}x_{m,2} + g_m u\end{aligned}$$

con el siguiente conjunto de valores

$$\begin{aligned}a_{1,p} &= 1.01, a_{2,p} = 0.08, g_p = 0.99 \\ a_{1,m} &= 1.0, a_{2,m} = 0.1, g_m = 1.0\end{aligned}$$

el modelo es el supuesto nominal de la planta a controlar. Los polos del subsistema y se seleccionan en $py_{(1,2)} = -2$ y los del regulador $pr_{(1,2)} = -10$. De esta selección resultan los parámetros

$$\begin{aligned}a_{j,r} &= (100, 20) \\ \alpha_j &= (4, 4)\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$.

El generador de la rampa de referencia está dado por

$$\dot{z}_1 = k_l$$

con $k_l = 0.001$.

Usamos como variables y a

$$y_1 = x_{m,1} + x_{r,1} - z_1, y_2 = x_{m,2} + x_{r,2} - k_l$$

en la acción de control nominal del CMI.

La figura (18) muestra la salida de la planta y el error de seguimiento, nótese la tendencia del error a un cierto valor en estado estacionario. En este caso el valor

es $e_{ss} = 4 \times 10^{-6}$ y concuerda con el valor determinado por la ecuación (136). Las condiciones iniciales (C.I.) del experimento son $x_{p,1} = 0.1$ y el resto de las variables en cero.

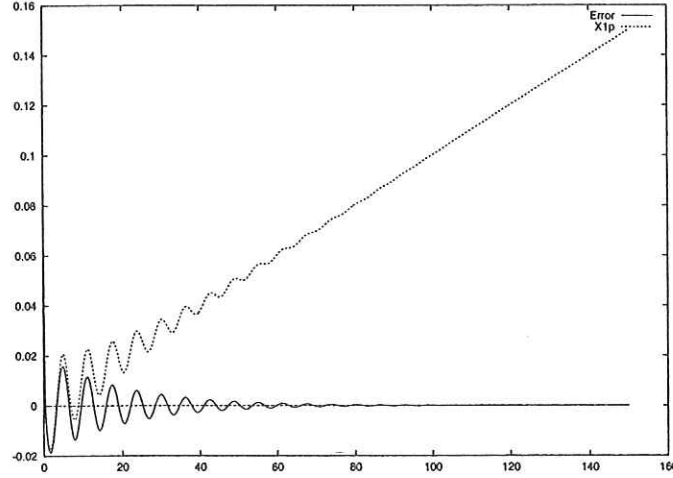


Figura 18: Salida de la planta y error de seguimiento del CMI para el ejemplo de la sección (VI.3) condición inicial de la planta $x_{p,1} = 0.1$

En la figura (19) se muestra el mismo experimento anterior con un cambio en las C.I. a $x_{p,1} = -0.2$, $x_{p,2} = -0.2$ el resto de variables en cero.

La figura (20) muestra la tendencia del valor del error de seguimiento al establecido durante el análisis, las condiciones iniciales del experimento son todas en cero para hacer notar el valor de e_{ss} .

Como último experimento se muestra el error de seguimiento en la figura (21) cuando el parámetro $a_{2,r} = 0$. De acuerdo a la relación para el error esperado, éste debería ser cero. Sin embargo, como se ve en la figura (21) se presenta una oscilación de muy baja amplitud.

Una observación que se puede extraer de este experimento es la posibilidad de reducir el error de seguimiento a cero por medio de una redefinición de la acción de control

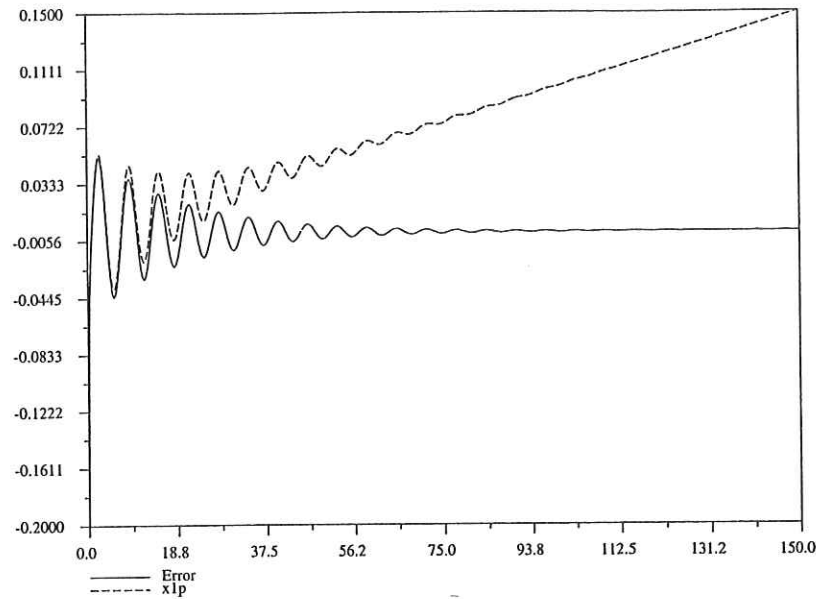


Figura 19: Salida de la planta y error de seguimiento del CMI para el ejemplo de la sección (VI.3) C.I. de la planta $x_{p,1} = -0.2$, $x_{p,2} = -0.2$

del CMI. Para demostrar esta conjetura es necesario emplear técnicas de la variedad central puesto que el sistema posee 3 polos sobre el eje imaginario del plano complejo, éste análisis y el rediseño de la acción de control quedan como un problema abierto.

VI.4 CONCLUSIONES PARA EL SEGUIMIENTO CON EL CMI

La estructura CMI se puede utilizar para el seguimiento de trayectorias, en particular se analizó el caso de una trayectoria del tipo rampa.

Se demostró que la salida de la planta tiende asintóticamente a la rampa de referencia cuando se tiene un modelo perfecto de la planta.

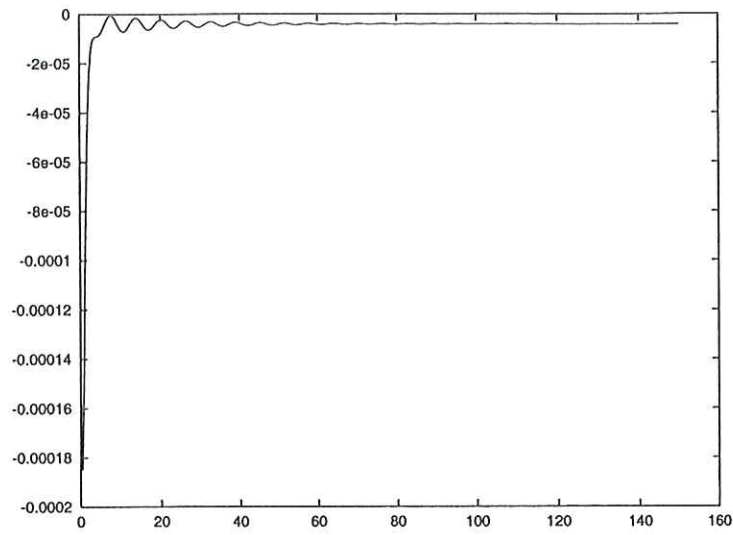


Figura 20: Error de seguimiento con condiciones iniciales cero.

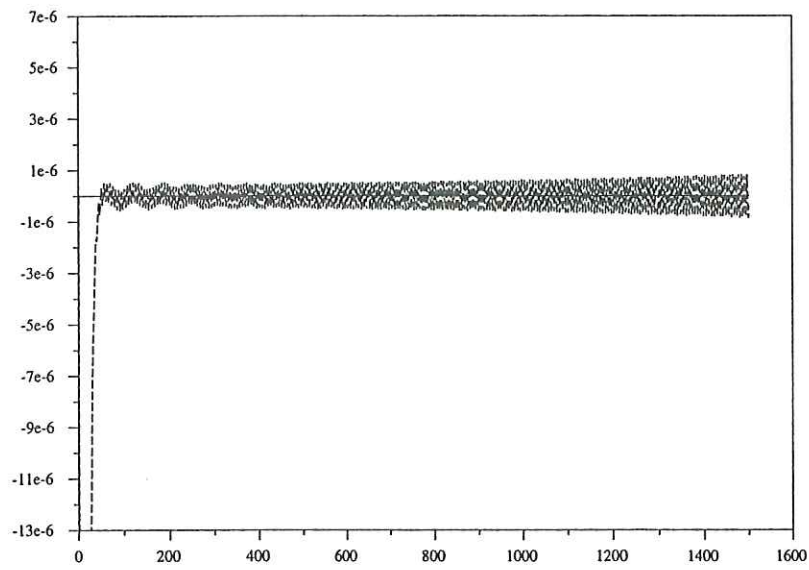


Figura 21: Error de seguimiento con condiciones iniciales cero y con el parámetro $a_{2,r} = 0$. El eje x representa décimas de segundo.

Cuando existe diferencia entre la planta y el modelo se presenta un error de seguimiento como una desviación entre la salida del generador de referencia y la salida de la planta. Cabe mencionar que la pendiente de la rampa se sigue con error cero por la variable $x_{p,2}$ de la planta.

Las cualidades de robustez de la estructura CMI permanecen inalteradas.

Debido a que no existe ningun cambio en la estructura es posible aplicar los resultados de estabilidad y robustez de la sección de análisis (III.2).

Las condiciones del análisis de estabilidad son similares a las presentadas en los capítulos anteriores en particular la sección (III.2) en el apartado (III.2.2) .

En resumen, las condiciones requeridas para el seguimiento de una trayectoria del tipo rampa con el CMI son:

- La planta y modelo deben cumplir los requerimientos de la sección (III.2.2).
- La estabilidad de la planta no debe cambiar en la zona del espacio de estado donde la trayectoria a seguir hace evolucionar al sistema.
- La pendiente de la rampa no debe ser muy pronunciada para cumplir los requerimientos del análisis en cuanto a una referencia lo suficientemente cerca del origen, dado que el análisis realizado es de carácter local.

VI.5 COMPARACION CUALITATIVA ENTRE EL CMI Y EL REGULADOR ROBUSTO DE ISIDORI

En este apartado se da una comparación cualitativa entre el CMI y el regulador robusto de Isidori (Byrnes et al., 1997). La comparación se establece en el marco de las

condiciones que deben cumplir ambas estrategias de diseño para el seguimiento de una trayectoria dada y se presenta un ejemplo en simulación de ambas estrategias de control para evaluar el desempeño de manera práctica.

Las condiciones que debe cumplir el CMI para el seguimiento de una trayectoria del tipo rampa fueron establecidas en la sección VI.4. A continuación se presentan las condiciones que debe cumplir el sistema para diseñar el regulador robusto.

VI.5.1 CONDICIONES DE EXISTENCIA PARA EL REGULADOR ROBUSTO DE ISIDORI

Empezaremos por definir el sistema al cual se aplica el diseño del regulador, posteriormente mostraremos el resultado de Isidori sobre regulación y seguimiento de trayectorias.

Sea un sistema modelado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Z(\mu)z + p_0(x_1, w, \mu) \\ \dot{x} &= F(\mu)x + G(\mu)u + P(z, x, w, \mu) \\ e &= H(\mu)x - q(w, \mu)\end{aligned}\tag{137}$$

donde

$$F(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & a_2(\mu) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\mu) & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n(\mu) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, G(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ b(\mu) \end{pmatrix}$$

y

$$P(z, x, w, \mu) = \begin{pmatrix} p_1(z, x_1, w, \mu) \\ p_2(z, x_1, x_2, w, \mu) \\ \dots \\ p_{n-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, w, \mu) \\ p_n(z, x_1, x_2, \dots, x_n, w, \mu) \end{pmatrix}$$

donde $x \in X \subset R^n$, $u \in R^m$, $e \in R^m$, $w \in W \subset R^q$ y $z \in R^m$. $P(a) = 0$ si $a = 0$ y la función $p_0(a) = 0$ si $a = 0$, e.g. el origen es un equilibrio del sistema.

En este sistema se supone que $\mu \in R^p$ es un vector de parámetros que varía lentamente y se pueden tomar como errores en el modelado o perturbaciones exógenas. Se supone que para cada $\mu \in \mathbb{P}$ con $\mathbb{P}$ un cierto conjunto, $q(w, \mu)$, $p_0, p_1, \dots, p_n$ son polinomios en z, x, w de grado fijo y que no exceden cierto valor k que es independiente de μ . Además se supone que los valores propios de $Z(\mu)$ tienen parte real negativa. Finalmente se supone que el conjunto $\mathbb{P}$ es conexo, es decir, $a_2(\mu) > 0, a_3(\mu) > 0, \dots, a_n(\mu), b(\mu) > 0, c(\mu) > 0$ para todo $\mu \in \mathbb{P}$.

Bajo estas hipótesis, las ecuaciones del sistema poseen una solución

$$\pi^a(w, \mu), c^a(w, \mu)$$

única y definida globalmente, la cual satisface para c^a una identidad de la forma

$$L_s^q c^a(w, \mu) = a_0 c^a(w, \mu) - a_1 L_s c^a(w, \mu) - \dots - a_{q-1} L_s^{q-1} c^a(w, \mu)$$

donde el operador recursivo $L_s^q f(w, \mu)$ está definido por

$$L_s^q f(w, \mu) = \frac{\partial L_s^{q-1} f(w, \mu)}{\partial w} s(w)$$

y

$$L_s f(w, \mu) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial w} s(w)$$

y como último paso en la recursión se tiene

$$L_s^0 f(w, \mu) = f(w, \mu).$$

Esto a su vez determina la existencia de una matriz Φ de $q \times q$, un vector Γ de $1 \times q$, y un mapeo $\tau(w, \mu)$ definido globalmente tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^a(w, \mu)}{\partial w} S w &= \Phi \tau^a(w, \mu) \\ c^a(w, \mu) &= \Gamma \tau^a(w, \mu) \end{aligned} \quad (138)$$

Ahora considere una ley de control de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= K \xi_0 + L e \\ \dot{\xi}_1 &= \Phi \xi_1 + N e \\ u &= \alpha(\xi_0) + T \xi_1 \end{aligned} \quad (139)$$

donde $\alpha(\xi_0) + T \xi_1$ es una función (posiblemente no lineal), suave en una vecindad de $\xi_0 = 0$ tal que $\alpha(0) = 0$.

Si se cumple lo anterior entonces se mantiene el siguiente lema.

Lema : 12 *Suponga que la ley de control (139) estabiliza asintóticamente la aproximación lineal del sistema (137) en el equilibrio $(\xi_0, \xi_1, z, x) = (0, 0, 0, 0)$, $(w, \mu) = (0, 0)$. Suponga que los valores propios de $\sigma(K) \in C^-$. Entonces, existe una matriz Π de $q \times q$ que satisface*

$$\begin{aligned} \Phi \Pi &= \Pi \Phi \\ T \Pi &= \Gamma \end{aligned} \quad (140)$$

donde

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{pmatrix}, \Gamma = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Como consecuencia el sistema compuesto

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + L(H(\mu)x - q(w, \mu)) \\
 \dot{\xi}_1 &= \Phi\xi_1 + N(H(\mu)x - q(w, \mu)) \\
 \dot{z} &= Z(\mu)z + p_0(x_1, w, \mu) \\
 \dot{x} &= F(\mu)x + G(\mu)(\alpha(\xi_0) + T\xi_1) + P(z, x, w, \mu) \\
 \dot{w} &= Sw
 \end{aligned} \tag{141}$$

posee una variedad central definida globalmente

$$M_c = \{(\xi_0, \xi_1, z, x, w) : \xi_0 = 0, \xi_1 = \Pi\tau^a(w, \mu), z = \zeta(w, \mu), x = \pi^a(w, \mu)\}$$

alrededor de $(\xi_0, \xi_1, z, x, w) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

En el lema S debe contener todos sus valores propios como pares conjugados con parte real cero para poder hacer uso de las herramientas de la variedad central.

La prueba del lema se puede ver en (Byrnes et al., 1997) en la página 92.

Considere el sistema (137) con la ley de control (139) y sujeto a una perturbación generada por el exosistema

$$\dot{w} = Sw,$$

por ejemplo el sistema (141). Suponga que se satisfacen las condiciones del lema 12 y considere la siguiente transformación de coordenadas (definida en forma global) en el espacio de estado de (141)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi}_1 &= \xi_1 - \Pi\tau^a(w, \mu) \\
 \tilde{z} &= z - \zeta(w, \mu) \\
 \tilde{x} &= x - \pi^a(w, \mu)
 \end{aligned} \tag{142}$$

En estas nuevas coordenadas el sistema (141) está representado por las siguientes ecua-

ciones

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + Lc(\mu)\tilde{x}_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= \Phi\tilde{\xi}_1 + Nc(\mu)\tilde{x}_1 \\
 \dot{\tilde{z}} &= Z(\mu)\tilde{z} + \tilde{p}_0(\tilde{x}_1, w, \mu) \\
 \dot{\tilde{x}} &= F(\mu)\tilde{x} + G(\mu)(\alpha(\xi_0) + T\xi_1) + \tilde{P}(\tilde{z}, \tilde{x}, w, \mu) \\
 \dot{w} &= Sw
 \end{aligned} \tag{143}$$

y la variedad central M_c es el subconjunto donde

$$\xi_0 = 0, \tilde{\xi}_1 = 0, \tilde{z} = 0, \tilde{x} = 0.$$

Por construcción, el error de seguimiento dado por

$$e = \tilde{x}_1$$

es cero en M_c , y si M_c es atractivo, e.g.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_0(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0,$$

entonces claramente se ve que tambien se debe cumplir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

El problema de regulación robusta puede verse como el problema de encontrar una ley de control dinámica de la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + Le \\
 u &= \alpha(\xi_0) + T\xi_1.
 \end{aligned} \tag{144}$$

que estabilice robustamente (con una cuenca de atracción que contiene un conjunto compacto fijo de condiciones iniciales) un sistema variante en el tiempo. Este sistema

presenta además incertidumbres y está modelado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \Phi \xi_1 + Nc(\mu)\tilde{x}_1 \\
 \dot{\tilde{z}} &= Z(\mu)\tilde{z} + \tilde{p}_0(c(\mu)\tilde{x}_1, \exp(St)w^0, \mu) \\
 \dot{\tilde{x}} &= F(\mu)\tilde{x} + G(\mu)u + \tilde{P}(\tilde{z}, \exp(St)w^0, \mu) \\
 e &= c(\mu)\tilde{x}_1.
 \end{aligned} \tag{145}$$

Este sistema es incierto puesto que el valor de μ y la condición inicial w^0 del exosistema son desconocidos.

Por consistencia diremos que μ, w^0 varían en un conjunto fijo compacto conocido a priori. Es decir las funciones indeterminadas o perturbadoras del sistema son acotadas, además se desvanecen en el origen $(\tilde{z}, \tilde{x}) = (0, 0)$ para todo t y todos los valores de (μ, w^0) en el conjunto compacto propuesto.

El sistema definido por (145) se puede poner de una manera más simple si reemplazamos las variables de estado $\tilde{x}$ por la variable del error e y sus primeras $n - 1$ derivadas con respecto al tiempo.

Defina

$$\eta_1 = \eta_1(\tilde{z}, \tilde{x}, t) = c(\mu)\tilde{x}_1$$

y, recursivamente, para $2 \leq i \leq n$,

$$\eta_i = \frac{\partial \eta_{i-1}}{\partial \tilde{z}} \dot{\tilde{z}} + \frac{\partial \eta_{i-1}}{\partial \tilde{x}} \dot{\tilde{x}} + \frac{\partial \eta_{i-1}}{\partial t} \dot{\tilde{z}},$$

entonces el mapeo

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \dots \\ \tilde{\eta}_n \end{pmatrix} \tag{146}$$

puede ser usado globalmente para definir un cambio parcial del coordenadas en el espacio de estado de (145). Observe que por construcción,

$$\begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{e}^{(1)} \\ \dots \\ \tilde{e}^{(n-1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \dots \\ \tilde{\eta}_n \end{pmatrix}. \quad (147)$$

NOTA: Las coordenadas $\tilde{x}, \eta$ nunca estarán disponibles para retroalimentarlas, puesto que, dependen de los parámetros w^0, μ . Esta inconveniencia se puede remover, como se verá después, si se cuenta con estimados razonables de las primeras $n - 1$ derivadas del error.

El cambio de coordenadas (146), el cual mapea conjuntos compactos de condiciones iniciales a conjuntos compactos de condiciones iniciales, permite poner al sistema de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_0 &= K\tilde{\xi}_0 + LH\eta \\ \dot{\tilde{\xi}}_1 &= \Phi\tilde{\xi}_1 + NH\eta \\ \dot{\tilde{z}} &= Z(\theta)\tilde{z} + p(H\eta, t, \theta) \\ \dot{\eta} &= F\eta + Gk(\theta)(T\tilde{\xi}_1 + \psi(M\tilde{\xi}_0) + q(\tilde{z}, \eta, t, \theta)) \end{aligned} \quad (148)$$

para el cual se debe determinar K, L, N, T, M y $\psi(a)$ de tal manera que el equilibrio $(\tilde{\xi}_0, \tilde{x}_1, \tilde{z}, \eta) = (0, 0, 0, 0)$ sea asintóticamente estable, y su cuenca de atracción contenga un conjunto compacto fijo de condiciones iniciales.

Es posible probar que si $\xi_0 = \eta$ y $\psi(a) = a$, las matrices N, T, M se pueden encontrar y se cumple con la propiedad de estabilidad robusta. Así que resta probar que es posible encontrar K, L y que se mantiene la robustez. Para esto se usa una idea presentada por Khalil y Esfandiari, la cual consiste en lo siguiente: escójase una función de saturación

para ψ

$$\psi(a) = U_{\max} \text{sat} \left(\frac{a}{U_{\max}} \right) \quad (149)$$

donde $U_{\max}$ es un número grande y escoja para

$$\dot{\xi}_0 = K\xi_0 + Le$$

la estructura de un observador de alta ganancia, e.g.

$$\dot{\xi}_0 = \begin{pmatrix} 0, 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 1, \dots, 0 \\ \vdots, \vdots, \vdots, \dots, \vdots \\ 0, 0, 0, \dots, 1 \\ 0, 0, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \xi_0 + \begin{pmatrix} Ra_{n-1} \\ R^2a_{n-2} \\ \dots \\ R^{n-1}a_1 \\ R^na_0 \end{pmatrix} (e - H\xi_0) \quad (150)$$

donde R es un número grande. Haciendo uso de la estructura anterior es un hecho que es posible probar el siguiente resultado.

Lema : 13 *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= K\tilde{\xi}_0 + LH\eta \\ \dot{\xi}_1 &= \Phi\tilde{\xi}_1 + NH\eta \\ \dot{z} &= Z(\theta)\tilde{z} + p(H\eta, t, \theta) \\ \dot{\eta} &= F\eta + Gk(\theta)(T\tilde{\xi}_1 + \psi(M\xi_0) + q(\tilde{z}, \eta, t, \theta)) \end{aligned} \quad (151)$$

donde K, L tienen la estructura definida en (150), $\psi(a)$ tiene la estructura definida en (149), N es tal que el par (Φ, N) es controlable, p, q son funciones acotadas que se desvanecen en el origen $(\tilde{z}, \eta) = (0, 0)$ para todo t y θ , $k(\theta) > 0$, y θ es un vector de parámetros que varían en un conjunto fijo compacto Θ . Sean $a_0, \dots, a_{n-1}$ tales que la

matriz

$$K = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

tenga todos sus valores propios con parte real negativa.

Dado cualquier conjunto compacto $S \subset R^q \times R^m \times R^n$, existen matrices, T, M un número $U^* > 0$ y un número $R^* > 0$, tal que, si $U_{\max} = U^*$ y $R > R^*$, toda trayectoria del sistema (151) con condiciones iniciales en un conjunto compacto de la forma $\tilde{\xi}_0 \times S$ converge al equilibrio cuando t tiende a ∞ .

La prueba del lema se puede ver en (Byrnes et al., 1997).

Con esto queda concluida la exposición de condiciones para la solución del problema de seguimiento con el regulador robusto de Isidori.

VI.5.2 EJEMPLO DE SEGUIMIENTO:

REGULADOR DE ISIDORI y CMI

El objetivo de esta sección es presentar un ejemplo en simulación del desempeño del regulador de Isidori y del CMI para el seguimiento de una trayectoria senoidal. Este tipo de trayectoria cumple con los requerimientos del regulador de Isidori, es decir, es Poisson estable y posee un par de polos conjugados sobre el eje imaginario del plano complejo. El sistema utilizado como planta para este ejemplo es un péndulo con un par

de control actuando en su base, el modelo matemático está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,1} &= x_{p,2} \\ \dot{x}_{p,2} &= -a \sin(x_{p,1}) - bx_{p,2} + cu \\ y_p &= x_{p,1}\end{aligned}\tag{152}$$

donde u es la acción de control y la salida $y_p = x_{p,1}$ es el ángulo con respecto a la vertical del péndulo. Supondremos como nominales para esta planta los siguientes valores: $a = 75.21$, $b = 10.0$ y $c = 0.21$.

A continuación presentamos el diseño de la ley de control del regulador de Isidori.

Primero se necesita encontrar un vector K de ganancia tal que la matriz $A + BK$ sea Hurwitz estable, recordemos que A es la linealización en el origen de la planta nominal dada por (152). Los valores propios de $\tilde{A} = A + BK$ se escogen en $\lambda(\tilde{A}) = (-50, -50)$ de esto resulta

$$K = (-11546.619 \quad -428.57143).$$

El sistema que genera la referencia a seguir está dado por

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= -w_1\end{aligned}\tag{153}$$

es decir nuestro diseño debe tratar de lograr que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = y_p - w_1 = 0.$$

Ahora bien, el diseño de Isidori plantea la búsqueda de un mapeo $\pi(w) = x$ y una función $c(w)$ que de solución a la ecuación diferencial parcial dada por

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} S w = f(w) + g(w)c(w),$$

además, se debe cumplir

$$\pi_1(w) - x_{p,1} = 0.$$

Se puede decir que esta parte del diseño del regulador es la más complicada, sin embargo, en el ejemplo que tratamos el mapeo es directo y está dado por

$$\pi(w) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

La función $c(w)$ está dada por

$$c(w) = \frac{1}{c} (b \sin(w_1) + a w_2 - w_1).$$

Como estimador de la dinámica del error proponemos al siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}_1 &= \tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{e}}_2 &= E_r \tilde{e} + E_1 e \end{aligned} \tag{154}$$

con $E_r = (E_1 = 1 \times 10^6 \quad E_2 = 2000.0)$. Escogimos los polos de este estimador 20 veces más rápido que la dinámica de la matriz $A + BK$.

Utilizando todo lo anterior, la ley de control dada por

$$u = \text{Sat}(c(w) + K\tilde{e}, U_{max})$$

con U_{max} un cierto valor grande, logra el seguimiento de la trayectoria senoidal con error cero como se vió en el el análisis previo.

Cabe mencionar que cuando existe un error de modelado en la planta se genera un error en el seguimiento, esto se mostrará por medio de simulaciones numéricas un poco más adelante.

La figura 22 muestra el seguimiento de la trayectoria senoidal, la parte superior de la figura muestra la salida de la planta y la parte inferior de la figura muestra el error entre la salida de la planta y la referencia $e = y_p - w_1$. Las condiciones iniciales son $w_2(0) = 0.1$ el resto de las condiciones iniciales (CI) son cero. Para este experimento se supone que se tiene acceso a un modelo perfecto de la planta.

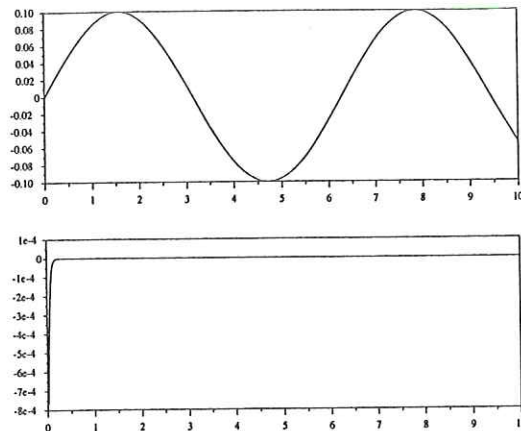


Figura 22: Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta perfecto.

La figura 23 muestra el seguimiento de la trayectoria senoidal cuando existe un error de modelado por una variación de los parámetros. Las CI son similares al experimento anterior. La parte inferior de la gráfica, es decir la gráfica del error, muestra que existe un error de seguimiento. Los valores de los parámetros son: $a = 76.21$, $b = 10.21$ y $c = .31$.

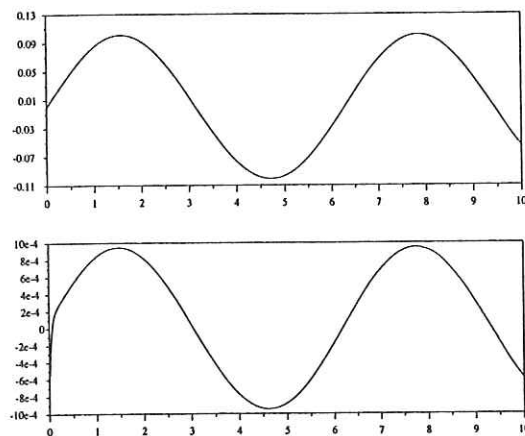


Figura 23: Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta perturbado.

El siguiente experimento para el regulador de Isidori se muestra en la gráfica 24

las CI son $w_2(0) = 2.0$ el resto son cero. Se mantiene la planta con la variación de sus parámetros. La parte más destacada de este experimento es que se mantiene la estabilidad y la magnitud del error de seguimiento es relativamente pequeña.

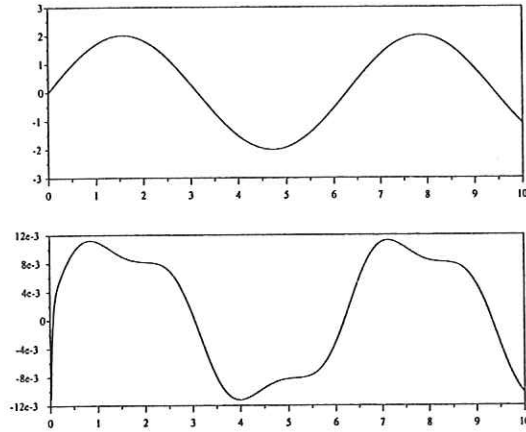


Figura 24: Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta perturbado.

La figura 25 muestra la salida de la planta y el error de seguimiento cuando existe un gran error de modelado. La amplitud de la señal a seguir es de 2π . Los parámetros de la planta son $a = 76.21$, $b = 10.21$ y $c = 0.021$. Se puede observar que aun cuando el error de seguimiento es relativamente grande se mantiene la estabilidad del sistema.

Con esto concluyen los experimentos del regulador y a continuación presentaremos los realizados con el CMI.

Puesto que el diseño del CMI se expuso para esta misma planta en la sección V.1.1 omitimos el diseño y presentamos los resultados de las simulaciones numéricas para el seguimiento de la trayectoria senoidal. Los valores escogidos para los polos del regulador y el subsistema y del CMI fueron $p_{xr} = (-80, -80)$ y $p_y = (-50, -50)$ respectivamente.

Los experimentos realizados con el CMI fueron similares en cuanto a condiciones iniciales y errores de modelado a los presentados para el regulador de Isidori.

En la figura 26 se muestra la salida de la planta y el error de seguimiento del sistema

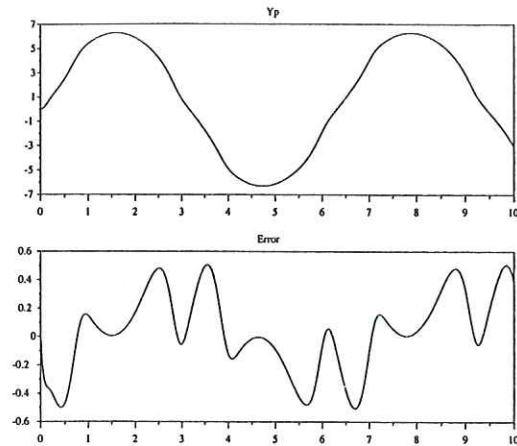


Figura 25: Seguimiento con el regulador de Isidori, modelo de la planta muy perturbado.

CMI para una trayectoria senoidal. Se supone acceso a modelo perfecto y las CI son similares al experimento de la figura 22.

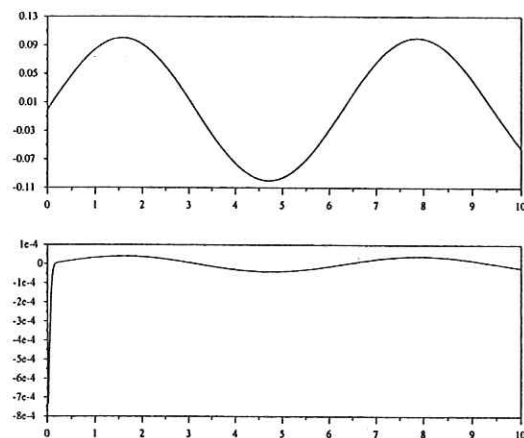


Figura 26: Seguimiento con el CMI, modelo de la planta perfecto

La figura 27 muestra la salida de la planta y el error de seguimiento cuando existe un error de modelado. Las CI y los valores de las constantes seleccionadas para este experimento son similares a las del experimento presentado en la gráfica 23.

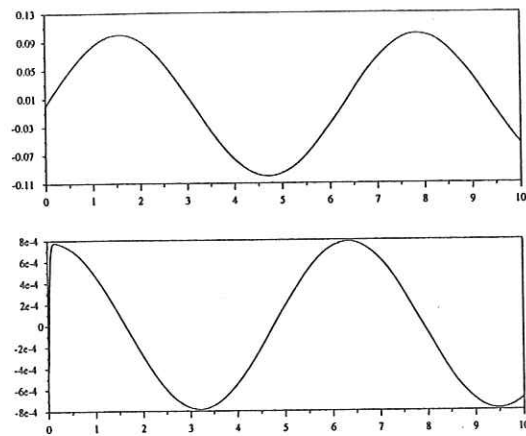


Figura 27: Seguimiento con el CMI, modelo de la planta perturbado.

La figura 28 muestra la salida de la planta y el error de seguimiento para el CMI. Las CI son similares a las del experimento de la figura 24. Se puede apreciar que la magnitud del error es un poco mayor que la observada para el regulador de Isidori.

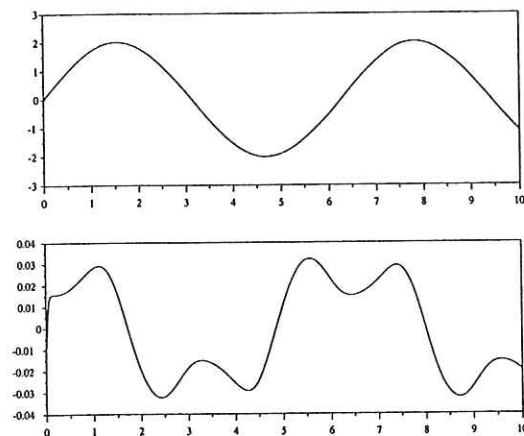


Figura 28: Seguimiento con el CMI, modelo de la planta perturbado.

En la figura 29 se puede apreciar la salida de la planta y el error de seguimiento cuando existe un cambio de los parámetros de la planta dado por $a = 76.21$, $b = 10.21$ y $c = 0.021$. La amplitud del seno a seguir es de 2π se puede observar que el sistema

prácticamente no sigue la trayectoria deseada, es decir, se encuentra al borde de la estabilidad.

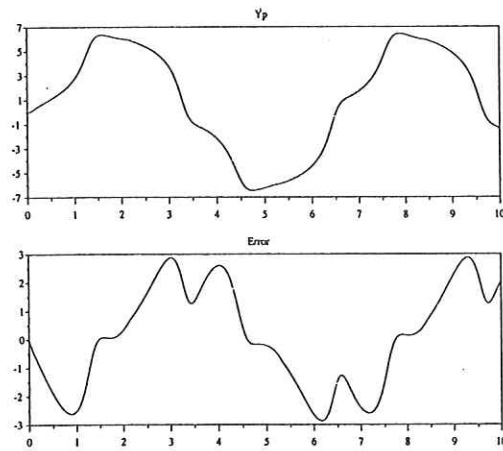


Figura 29: Seguimiento con el CMI, modelo de la planta muy perturbado.

VI.5.3 COMPARACION ENTRE el CMI y EL REGULADOR ROBUSTO

Como se vió en la sección VI.5.1, para poder garantizar la existencia de una solución del regulador de Isidori es necesario encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial (138). No siempre es fácil o posible encontrar dicha solución, lo cual es una desventaja de este diseño con respecto al del CMI.

El resto del diseño del regulador robusto es muy similar al presentado para el CMI++ en el capítulo IV, puesto que se debe incorporar un “estimador rápido” de los estados no accesibles y la prueba de estabilidad se basa en la misma idea presentada por Esfandiari y Khalil en (Khalil y Esfandiari, 1993).

En general, las condiciones establecidas para el seguimiento con el CMI y el regulador de Isidori son similares pues es necesario que se mantenga la estabilidad de la planta en la

zona del espacio de estado donde la trayectoria a seguir hace incursionar al sistema. Esta situación puede entenderse en el caso del regulador de Isidori mediante la estabilidad de Poisson del sistema exógeno. En el caso del CMI es una restricción que debe cumplir la planta a controlar puesto que el sistema exógeno, e.g. el generador de rampa, no es Poisson estable.

El diseño del regulador robusto es superior al CMI en cuanto a que garantiza una mayor robustez respecto al análisis presentado para el CMI. Esto es debido a que la naturaleza del análisis del CMI para seguimiento es de tipo local, mientras que el regulador robusto presenta una estimación de su cuenca de atracción y es posible definir una acción de control tal que se mantenga la estabilidad en forma semiglobal. Cabe agregar que esta robustez se puede decir que proviene del término $A + BK$ de la linealización del diseño del regulador y del acceso a una acción de control de gran magnitud.

Una ventaja considerable del regulador de Isidori sobre el CMI es que se abarca una clase más amplia de sistemas no lineales mientras que en el análisis del CMI sólo se trata de sistemas con grado relativo completo.

Sin embargo, es necesario comentar que cuando existe un error de modelado o una perturbación no modelada adecuadamente, el regulador robusto de Isidori presenta un error de estado estacionario similar al del CMI. Debido a esto, la simplicidad del diseño del CMI se puede tomar como una alternativa más viable para su aplicación a un problema práctico o una posible realización.

CAPITULO VII

REALIZACION DEL CMI

En esta sección se describen los resultados obtenidos al llevar a la práctica la ley de control nominal del CMI y del CMI++ para una planta experimental en el laboratorio. La planta utilizada en los experimentos es un sistema amplificador-motor de corriente directa que usa como sensor de posición un codificador óptico incremental con salida de pulsos en cuadratura acoplado al eje de motor. Se efectuaron experimentos con dos configuraciones de carga para el motor. La primera configuración presenta un modelo lineal mientras que la segunda configuración presenta un modelo no lineal. La ley de control se ejecuta por medio de un programa en una computadora digital compatible con IBM-PC. La interfaz a la planta experimental se logra con una tarjeta de diseño y construcción propios. La tarjeta de interfaz se conecta en el puerto IDE de la PC.

La acción de control del CMI nominal y la del CMI++ son complejas y para realizarlas se escogió una computadora con un procesador intel Pentium (o compatible) con una velocidad de 166 megaHertz o superior. El programa de control se ejecuta desde una unidad de disco blando de 3.5 pulgadas, o desde un disco simulado en RAM (memoria de acceso aleatorio), es posible incorporar a la PC de control un disco de memoria de lectura exclusivamente (ROM) para lograr un sistema de control dedicado. A lo

largo del trabajo denominaremos a esta máquina PC-CMI .

La selección de este tipo de máquina se debe a la gran cantidad de paquetes de desarrollo de programación y el gran soporte logístico disponible. Además, existe la opción de aumentar el desempeño de cálculo intercambiando la tarjeta madre de la PC-CMI por una con un procesador de mejor desempeño como el Pentium II sin tener la necesidad de rediseñar la tarjeta de interfaz o rescribir el programa de control.

La tarjeta de interfaz se diseñó y construyó para conectarse en el puerto IDE de la PC. Se usa el puerto IDE ya que la PC-CMI no usará disco duro u otro dispositivo conectado a este puerto. Es posible usar un disco duro en máquinas que poseen dos puertos IDE. Otras consideraciones para la selección del puerto IDE son el costo muy bajo de las tarjetas de interfaz de este tipo, la disponibilidad de una gran variedad de las mismas y la circuitería para lograr la lógica de conexión al ducto es muy sencilla.

VII.1 TARJETA DE INTERFAZ

La interfaz entre la planta experimental y la computadora de control se logra por medio de una tarjeta de interfaz de diseño y construcción propios. El objetivo de esta sección es describir las principales características técnicas de la tarjeta de interfaz.

La tarjeta de interfaz se conecta al puerto IDE de una computadora compatible con IBM-PC/AT. La tarjeta debe ser el único dispositivo conectado al ducto IDE, puesto que no puede funcionar en el modo de operación maestro-esclavo que es el modo de funcionamiento normal del puerto IDE.

A grosso modo, la interfaz consiste de un contador arriba-abajo de 16 bits, un decodificador de pulsos en cuadratura y una salida digital-analógica con resolución de 12 bits.

Las características principales de la tarjeta son:

- Entrada de pulsos en cuadratura, las señales de entrada deben estar defasadas 90 grados eléctricos para que funcione el decodificador de cuadratura. Una descripción de una señal en cuadratura es la siguiente, se tienen dos señales A y B. EL canal A se adelanta al canal B por 90 grados cuando la rotación o el movimiento del sensor es en un sentido o se atrasa 90 grados cuando el sentido del movimiento es el opuesto (ver figura (30)).

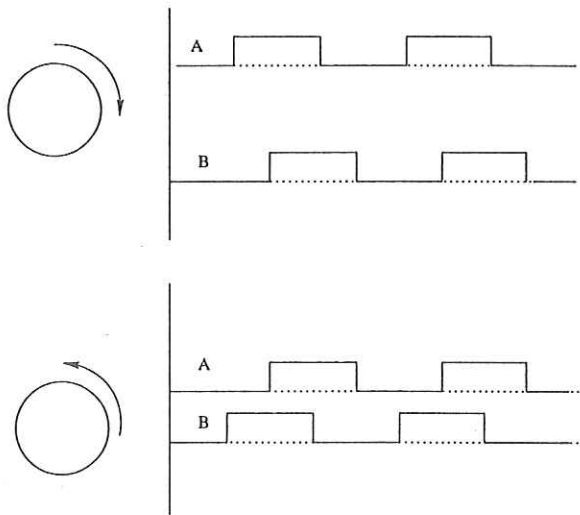


Figura 30: Señales en cuadratura

- Decodificador de cuadratura, este permite multiplicar la resolución del sensor cuatro veces. En nuestro caso se cuenta con un codificador óptico con 3600 ppr (pulsos por revolución), al pasar por el decodificador de cuadratura se logran 14400 ppr.
- Las señales A, B pueden ser del tipo TTL o diferenciales compatibles con el receptor de línea 26LS32. Un selector en la tarjeta permite seleccionar el tipo de entrada.
- La frecuencia máxima de entrada de pulsos en cuadratura de los canales A, B es

2 megaHertz.

- Contador arriba-abajo de 16 bits en circuitería (el programa de control lo extiende por programación a 32 bits).
- Salida analógica ajustable entre ± 1 volts y ± 10 volts, con resolución de 12 bits. La excursión máxima de voltaje se ajusta por medio de un potenciómetro multivuelta en la tarjeta.
- La frecuencia máxima de muestreo de la tarjeta, es decir ejecutar la siguiente secuencia:
 - Leer el contador.
 - Cálculo de la cuenta de 32 bits.
 - Actualizar un dato en el convertidor digital-analógico.

es de 30 khz. con un procesador 386DX-33.

NOTA : Esta frecuencia no varía mucho con el aumento en desempeño de la PC-CMI puesto que está ligada directamente con la velocidad del puerto IDE.

Se desarrolló una biblioteca de rutinas de programación para el manejo de la tarjeta de interfaz. El lenguaje de desarrollo usado es el "C" y el compilador usado para la programación es el turboc de Borland versión 2. Actualmente se está trabajando en una versión del programa de control que funciona en la PC-CMI con el operativo Linux-RT (Linux con extensiones de tiempo real).

En la figura (31) se muestra un diagrama a bloques de la tarjeta de interfaz.

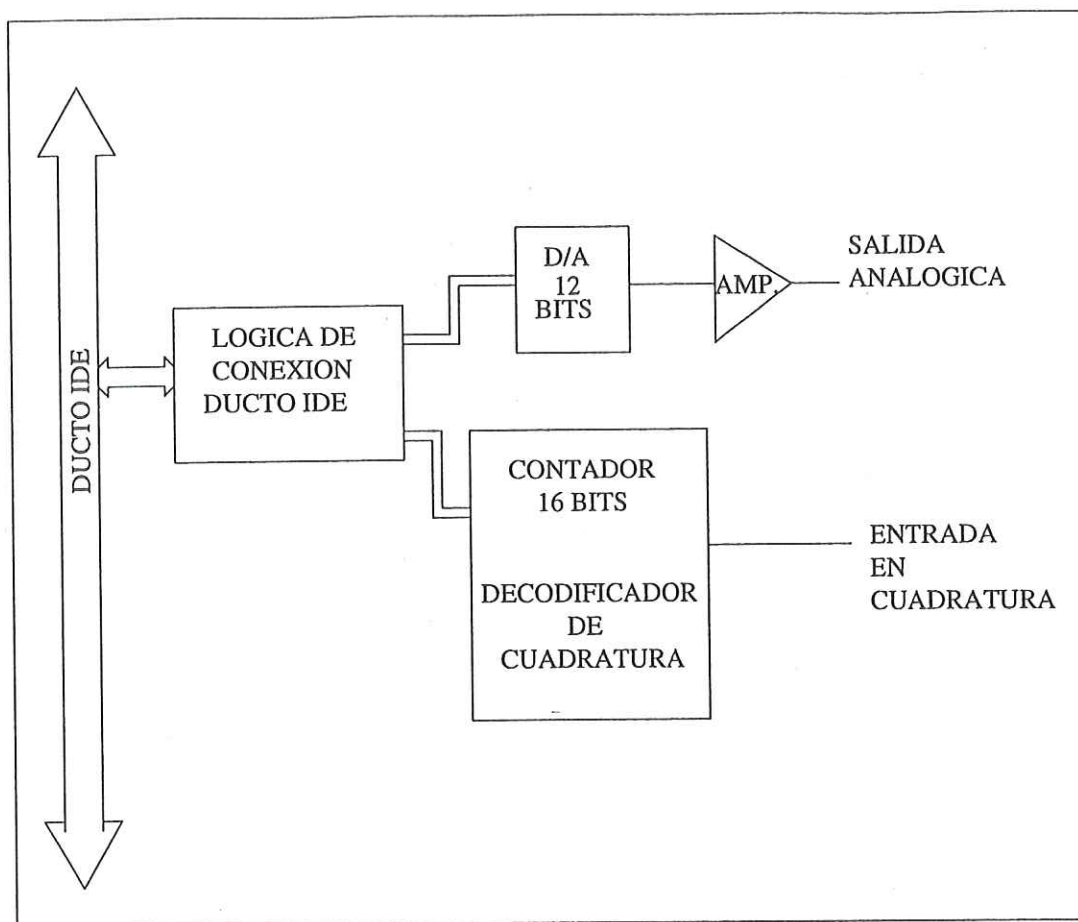


Figura 31: Diagrama a bloques de la tarjeta de interfaz

VII.2 CARACTERISTICAS DE LA PLANTA

La planta usada en los experimentos es un motor de c.d. de imán permanente del tipo usado muy comunmente en servomecanismos de control de posición o velocidad. Como sensor de posición se utiliza un codificador óptico incremental con salida de pulsos en cuadratura.

Para el desarrollo de los experimentos usamos dos configuraciones diferentes para la carga del motor. La primera configuración genera un modelo lineal, el motor está funcionando sin carga. La segunda configuración genera un modelo no lineal, para esto

se le agregó como carga al motor un vástago con una masa fija en el extremo. El modelo dinámico que se obtiene para esta configuración es el de un péndulo.

A continuación se detallan las configuraciones experimentales.

VII.3 PRIMERA CONFIGURACION: PLANTA LINEAL

La primera configuración utilizada en los experimentos consiste del motor sin carga. Como se verá, esta configuración presenta un modelo lineal.

La función de transferencia de esta planta es de la siguiente forma

$$G(s) = \frac{k}{s(s + \tau)}.$$

Este tipo de sistema no cumple con los requerimientos del análisis para el CMI realizado en las secciones anteriores, puesto que tiene un polo en el origen. La solución adoptada al problema anterior es la siguiente. En el programa de control se realizó un lazo interno de control proporcional con una ganancia k_p . Esto permite que el sistema cumpla con los requerimientos del controlador CMI (planta Hurwitz estable, etc). La función de transferencia de la planta modificada es

$$G_1(s) = \frac{kk_p}{s^2 + \tau s + kk_p}$$

El modelo en espacio de estado y en forma normal está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1m} &= x_{2m} \\ \dot{x}_{2m} &= -kk_p x_{1m} - \tau x_{2m} + kk_p u \\ y_m &= x_{1m}\end{aligned}\tag{155}$$

donde u es la señal de referencia de entrada al sistema e $y_m = x_{1m}$ es la salida de posición del eje del motor, ambas medidas en cuentas del codificador.

Aunque el análisis presentado en secciones anteriores está enfocado a sistemas no lineales, una de las aplicaciones posibles de los resultados es el control de posicionamiento de un telescopio astronómico. Este sistema, bajo ciertas suposiciones, tiene un modelo similar al presentado arriba. Esto justifica el uso de un sistema lineal para probar el algoritmo del CMI.

A continuación se describen las características de los componentes de la planta experimental. El motor es del tipo de imán permanente de corriente directa con un par máximo de salida de 500 onzas pulgada. El voltaje máximo de alimentación es de 38 vcd. La resistencia de armadura es de 3.8Ω .

El amplificador utilizado es un convertidor voltaje-corriente del tipo conmutado con PWM (modulación de ancho de pulso). La salida máxima de corriente es de 12 amperes con un voltaje de alimentación de 38 vcd. Es fabricado por Galil Motion Control Inc. y el modelo es 25A8B-GAL.

El codificador óptico que usamos como sensor de posición es del tipo incremental y tiene una resolución de 3600 pulsos por revolución (ppr) y decodificando la señal en cuadratura (4X) se logran 14400 ppr. Posee salida de manejador de línea diferencial compatible con el integrado 26LS31. Es fabricado por Teledyne-Gurley, el número del modelo es DDQA-3600.

El uso de este codificador nos permite una resolución de movimiento de 0.025 grados por pulso del codificador en el eje del motor.

VII.4 IDENTIFICACION DEL MODELO LINEAL

La identificación del modelo lineal del conjunto amplificador-motor se realizó mediante el método de identificación de mínimos cuadrados (LS). La función de transferencia (en discreto) que se obtuvo es

$$y_k = 0.078909u_{k-1} + 0.081435u_{k-2} + 1.742y_{k-1} - 0.89925y_{k-2}$$

donde y es la salida de la planta y u es la entrada, ambas cantidades medidas en pulsos del codificador. Posteriormente la función de transferencia discreta se trasladó al dominio continuo. El periodo de muestreo escogido para la discretización es de 300 hz. El modelo en forma normal en el dominio continuo está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1m} &= x_{2m} \\ \dot{x}_{2m} &= a_{1m}x_{1m} + a_{2m}x_{2m} + g_mu \\ y_m &= x_{1m}\end{aligned}\tag{156}$$

donde

$$a_{1m} = -1681, a_{2m} = -10.62, g_m = 1714$$

este modelo (156) es el que se usó para la realización práctica del CMI en la PC-CMI. La transformación del dominio discreto al continuo se realizó con la rutina "d2c" del paquete de control del "matlab" usando el periodo de muestreo de 300 hz.

En la figura (32) se puede ver una gráfica de las respuestas real y simulada con el modelo para la misma entrada de identificación.

La gráfica muestra que existe una diferencia notoria entre la respuesta real del sistema y la del modelo.

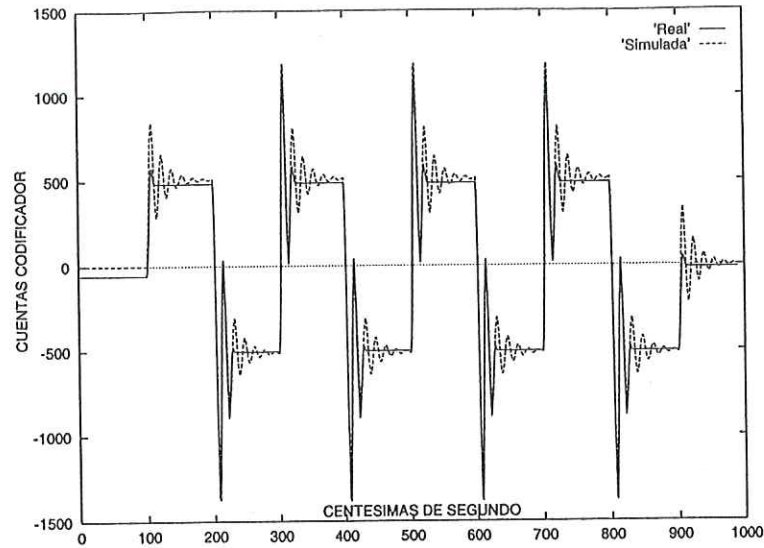


Figura 32: Respuesta real del sistema y simulada con el modelo

En la gráfica (figura 33) se puede observar que el error de modelado es de cierta magnitud

$$\max |y_p - y_m| < 300$$

donde los 300 son cuentas del codificador. Es posible lograr un mejor modelado agregando algunos términos no lineales. Sin embargo, para nuestros fines de realización y para demostrar los resultados del análisis del CMI se usa este modelo.

Durante los experimentos de identificación se notó que el motor presenta una zona en la cual no responde a cambios de voltaje. Este comportamiento es el de una no linealidad por zona muerta. Un modelo más realista de nuestro prototipo está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_{p,1} &= x_{p,2} \\ \dot{x}_{p,2} &= -a_{1,p}x_{p,1} - a_{2,p}x_{p,2} - \phi(x_p) + ku\end{aligned}$$

donde $\phi(x_p)$ representa la parte no modelada (zona muerta) del sistema. Aun sin tomar en cuenta esta perturbación no lineal, el CMI muestra un desempeño muy bueno como se verá en una sección posterior.

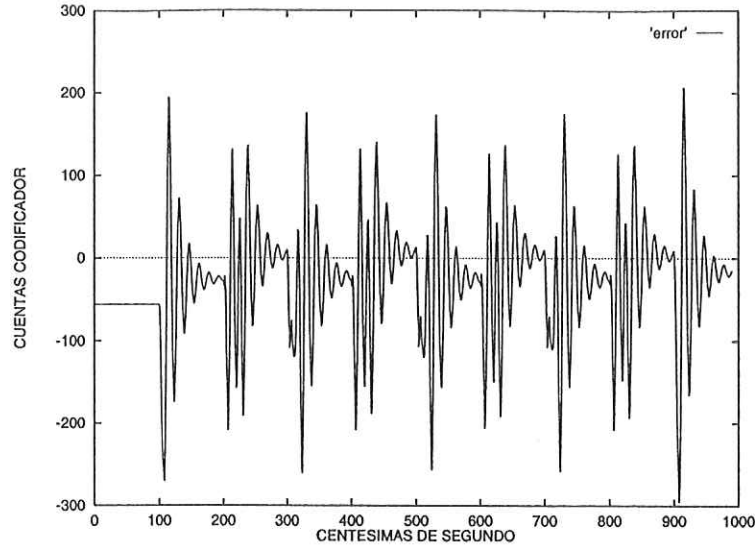


Figura 33: Error de modelado $y_p - y_m$

VII.5 SEGUNDA CONFIGURACION: PLANTA NO LINEAL

Para incorporar una no linealidad más fuerte al sistema del motor-codificador se le acopló un vástago con una masa en un extremo. Esta configuración, por otra parte, reproduce una situación más cercana a la aplicación considerada sobre el control de telescopios. La posición de la masa se puede ajustar en cualquier posición a lo largo del vástago. En la figura 34 se muestra el diagrama simplificado del sistema descrito.

La longitud (l) del vástago es de 13 cm. y el peso de la masa (M) es de 160 gramos.

El modelo matemático de este sistema es el de un péndulo con actuador en su eje. El modelo obtenido por una combinación de métodos experimentales y analíticos, es el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}_{m,1} &= x_{m,2} \\ \dot{x}_{m,2} &= 75.2\text{sen}(x_{m,1}) + 12x_{m,2} + 0.2138u\end{aligned}\tag{157}$$

donde $x_{m,1}$ es el ángulo en radianes del vástago con respecto a la vertical, $x_{m,2}$ es la

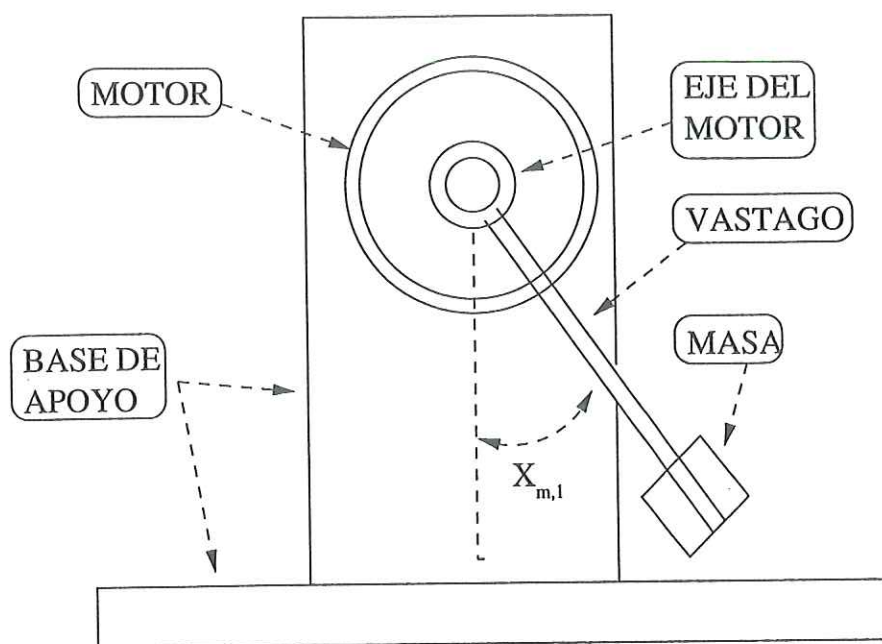


Figura 34: Esquema simplificado del motor con el vástago y la masa acoplados.

velocidad angular del mismo y u es el valor de voltaje (en cuentas del convertidor D/A) que genera la señal que entra al amplificador de corriente.

VII.6 PROGRAMA DE CONTROL

Las leyes de control CMI, CMI++ se realizaron por medio de un programa que se ejecuta en la PC-CMI.

El método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones diferenciales de los diferentes subsistemas del CMI y CMI++ es el de Runge-Kutta de 4to./5to. orden (RK4) (William et al., 1988).

La frecuencia máxima de muestreo para el CMI con la planta de orden 2 es de aproximadamente 8 khz. con el procesador Pentium-166. Este desempeño se debe a la gran cantidad de operaciones efectuadas en el método de integración RK4.

Puesto que este desempeño es adecuado para nuestros fines se decidió usar este procesador. En pruebas realizadas con un procesador 80486-33 se logra una frecuencia de muestreo de 6 khz. para la planta de orden 2. Lo anterior nos indica que es posible aplicar este enfoque de diseño a plantas de orden 6 con un procesador 80486 y mantener un periodo de muestreo superior a los 2 khz. Esto quiere decir que es posible usar una PC con un procesador más barato que el 80486 y lograr un buen desempeño para plantas de orden menor o igual que 3.

El programa tiene la capacidad de modificar los parámetros del modelo de la planta del CMI y todos los parámetros de los distintos controladores al vuelo. Posee cierta capacidad gráfica, es posible analizar las respuestas de los experimentos realizados inmediatamente.

La interfaz con el usuario se realiza por medio de instrucciones de línea. El usuario introduce por medio del teclado la instrucción deseada y el programa interpreta la línea y ejecuta las acciones requeridas. El largo máximo de la línea de instrucciones no debe exceder 70 caracteres. Vease en el apéndice la sección "Instrucciones del Programa" para una descripción de las instrucciones.

Se realizaron otras acciones de control como auxiliares al CMI, CMI++. Las leyes de control desarrolladas son del tipo P, PI, PID. Los parámetros de estas acciones de control son también modificables en tiempo real. Puesto que el CMI requiere un lazo interno de control para lograr que la planta cumpla con los requisitos del análisis, el control CMI se superpone a alguno de los tipos básicos de control, en particular el control P. En el caso de la configuración no lineal de la planta no es necesario incorporar el lazo interno.

El programa posee un generador de trayectorias opcional para limitar el cambio en la referencia. Las trayectorias generadas son del tipo S con un perfil de aceleración

constante y una velocidad máxima del movimiento. La velocidad y aceleración del perfil son ajustables por el usuario.

Como se mencionó previamente una posible aplicación de los resultados es el control de movimiento de un telescopio, el uso de este tipo de trayectorias es necesario para proteger las partes mecánicas y ópticas del instrumento.

VII.7 EXPERIMENTOS CMI: LINEAL y NO LINEAL

En esta sección se muestran los resultados experimentales del CMI realizado para el motor de cd. Los modelos usados para los experimentos son los definidos en (156) y (157). Estos modelos presentan un error con respecto a las respuestas reales obtenidas; sin embargo, el propósito de los experimentos es demostrar que nuestra realización cumple con algunas propiedades mencionadas del CMI y del CMI++ como son:

- a) robustez frente a variación paramétrica o errores de modelado.
- b) error de estado estacionario cero aún cuando la planta y el modelo no sean iguales.

VII.8 EXPERIMENTOS CMI: PLANTA LINEAL

Los polos del regulador (sistema x_r) se colocaron en $px_{r,1,2} = -2$. Los polos del sistema y se colocaron en $py_{1,2} = -10$. La elección de la posición de los polos de estos subsistemas no altera las propiedades de estabilidad de los experimentos. Es posible mover estos

parámetros en un rango amplio sin menoscabo del desempeño. El efecto más apreciable de esta elección es la variación de los tiempos de establecimiento de la respuesta, además de una variación en el tamaño de la cuenca de atracción lo cual concuerda con la teoría. En la figura (35) se muestra un cambio de referencia tipo escalón, la amplitud de los escalones es de 5000 y 10000 cuentas del codificador. Se puede ver que el desempeño del CMI es muy bueno tomando en cuenta que la respuesta de la planta en lazo abierto para un escalón de entrada presenta un sobre tiro considerable (ver figura (32)).

El controlador CMI propuesto cumple con los requerimientos de establecimiento de la respuesta de acuerdo a la dinámica de los polos seleccionados para el sistema y . En la figura (35) se observa que la respuesta del CMI no presenta las oscilaciones del sistema original, además, no se requiere del ajuste de ningún otro parámetro que no sea la elección de la posición de los polos del sistema regulador y el sistema y en el semiplano complejo izquierdo.

En la figura (36) se muestra un cambio de referencia de 20000 cuentas a cero usando el generador de trayectorias. Se puede observar el error de seguimiento de la trayectoria y la convergencia a cero del error una vez que la referencia permanece constante. Este tipo de respuesta es de un sistema del tipo 1, vease (Ogata, 1983), para una entrada del tipo rampa. El error de estado estacionario de "velocidad" es directamente proporcional a la velocidad de entrada e inversamente proporcional a la magnitud de la ganancia del sistema.

$$e_{ss} = \frac{V_d}{K}$$

donde e_{ss} error de estado estacionario, V_d velocidad deseada y K ganancia proporcional del sistema. Cabe mencionar que e_{ss} no es un error de velocidad propiamente dicho, sino un error de posición (un desplazamiento de la posición deseada). La velocidad en estado estacionario es la deseada en la entrada. En el capítulo (VI) se analizó la modificación

del algoritmo del CMI para disminuir el error de seguimiento para trayectorias del tipo rampa.

Las figuras (37 y 38) muestran un cambio en escalón y la acción de control generada por el CMI para lograr esta respuesta.

VII.9 EXPERIMENTOS CMI:

PLANTA NO LINEAL

A continuación se muestran algunos experimentos realizados con la configuración que presenta dinámica no lineal cuyo modelo está definido en (157). La figura 39 muestra un cambio de referencia de tipo escalón.

La figura 40 muestra otro cambio de referencia en escalón para el CMI y la planta no lineal, esta posición es la que corresponde a poner el vástago en forma vertical, claramente se puede ver la inestabilidad del sistema. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en simulaciones para el sistema del péndulo.

En las figuras 41 y 42 se muestra la salida de la planta y la acción de control para varios experimentos de cambio de referencia a través del generador de trayectorias. Lo interesante de estas figuras es el hecho de que se fue variando la posición de la carga a lo largo del vástago, es decir, se cambió el centro de masa para cada experimento. Las posiciones de la carga fueron: al extremo (lo normal), a media carrera del vástago, al extremo opuesto del vástago y sin carga. Se puede observar que la salida de la planta no presenta una variación notable (fig. 41). Situación que no es así, como era de esperarse, para la acción de control (fig. 42). De estos experimentos es posible concluir que el sistema es bastante robusto frente a variaciones de carga.

Las gráficas de los experimentos muestran que para la diferencia existente entre

planta y modelo las características del CMI como son robustez y error de estado estable cero para referencias constantes se comprueban.

VII.10 REALIZACION DEL CMI++

En esta sección se muestran los experimentos realizados con el CMI++ para la planta dada por el motor con carga (péndulo). El modelo que se usa es el presentado en (157).

Los polos del sistema estimador se colocaron en $p\tilde{e}_{1,2} = (-100)$. Los polos del regulador se colocaron en $pr_{1,2} = (-10)$ y los del subsistema y se colocaron en $py_{1,2} = (-4)$.

La función de control que usamos para estos experimentos es la siguiente

$$\begin{aligned} u_m &= u_{cmi} \\ u_p &= u_{cmi} - \theta(\zeta) \end{aligned}$$

donde θ esta definida en la ecuación (96), u_p entrada de control a la planta, u_m entrada de control al modelo y u_{cmi} es la acción de control nominal del CMI.

El diseño del CMI++ requiere de encontrar una función que “elimine” las perturbaciones. Esta función $\rho(\zeta)$ está definida en los experimentos por

$$\rho(\zeta) = (|15\text{sen}(x_1)| + |5x_2| + 10 + 2.5 |u_{cmi}|) .$$

El valor de c_1 (ver pag. 73) que se escogió es 0.15. Para más detalles del diseño del CMI++ vea la sección (IV.2.1).

Los experimentos realizados confirman el aumento en la robustez del CMI++ con respecto al diseño nominal del CMI.

La frecuencia de muestreo que se usa en los experimentos de la acción de control nominal del CMI es de 300 Hertz, que es adecuada para el CMI pero no para el CMI++. Al incluir en el diseño del CMI++ el estimador del estado e , se requiere un tiempo de

integración mucho más pequeño puesto que la dinámica de este subsistema es muy rápida. El aumento en el muestreo es necesario para que el cálculo de Runge Kutta no muestre errores de estimación considerables. Esto nos generó un problema en la realización, puesto que la frecuencia máxima de la tarjeta de control desarrollada, debe ser inferior o igual a 5 kiloHertz para darle tiempo a la PC-CMI de evaluar los algoritmos de control requeridos, es decir, no se puede tener un tiempo de muestreo muy pequeños y efectuar los cálculos a la vez.

Para realizar un tiempo de muestreo que sea compatible con el estimador del estado e usamos el siguiente método¹.

En cada paso de integración del CMI (300 hz) se integra 100 veces el sistema estimador. Esto tiene como consecuencia que el estimador "ve" un tiempo de integración de $33 \frac{1}{3} \mu s$ lo que equivale a una frecuencia de muestreo de 30 kiloHertz.

Las simulaciones llevadas a cabo nos confirmaron la viabilidad de este método. Una vez que se programó en la PC-CMI el CMI++ se confirmaron los resultados de las simulaciones como se muestra con los experimentos que se detallan a continuación.

La figura 44 muestra un cambio de referencia a la posición vertical del vástago, cabe mencionar que el CMI es inestable para esta posición con lo que queda confirmado experimentalmente el aumento en robustez del CMI++ para esta posición.

Los experimentos muestran un aumento considerable en la robustez del CMI++ con respecto a lo observado experimentalmente para la acción de control nominal del CMI. La prueba más contundente es que se logra la regulación robusta de un punto para el cual el CMI es inestable (posición vertical del vástago del sistema).

Esto concluye la sección de experimentos de los algoritmos CMI y CMI++ para la

¹ Como regla empírica usamos 10 veces, o más si es posible, la dinámica más rápida esperada. Sin embargo, no se debe extender mucho esta regla puesto que un muestreo muy rápido conlleva a problemas de cálculo por la longitud finita de la palabra del microprocesador.

planta lineal y la no lineal.

VII.11 CONCLUSIONES

En este capítulo se presentó la realización en el laboratorio de los controladores propuestos y analizados en los capítulos anteriores para la estructura CMI. La planta utilizada en el arreglo experimental es un motor de c.d. con un vástago acoplado a su eje. El sensor de posición es un codificador óptico de tipo incremental con salida de pulsos en cuadratura.

La acción de control es ejecutada por medio de una computadora del tipo PC. Las ecuaciones de los algoritmos de control se discretizan usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un periodo de muestreo o paso de integración de 300 Hertz. La dinámica muy rápida del estimador de estado requerido por el rediseño del CMI++ pone de manifiesto la necesidad de un tiempo de integración mucho más pequeño, e.g. 30 kiloHertz. La capacidad de cálculo de la computadora no nos permite este tiempo de integración para todo el conjunto CMI++-estimador. Para solucionar este problema se realiza un muestreo doble en el programa, 300 Hertz para las dinámicas lentas e.g. CMI, regulador y el modelo y 30 kiloHertz para la dinámica del estimador.

Para lograr la interfaz entre la computadora y el motor-amplificador se diseñó y construyó una tarjeta insertable en el puerto IDE de la computadora.

Se presentaron varios experimentos con dos configuraciones de la planta para las acciones de control CMI nominal y CMI++-estimador. La primera configuración presenta un modelo lineal, el motor está sin carga. La segunda configuración presenta un modelo no lineal; la carga es un vástago, con una masa en su extremo, acoplado al eje del motor. Los experimentos realizados corroboran los resultados de los análisis de estabilidad y robustez presentados en los capítulos anteriores. Además, el diseño pre-

sentado muestra la viabilidad de aplicar los algoritmos CMI y CMI++ para el control de servomecanismos en aplicaciones prácticas.

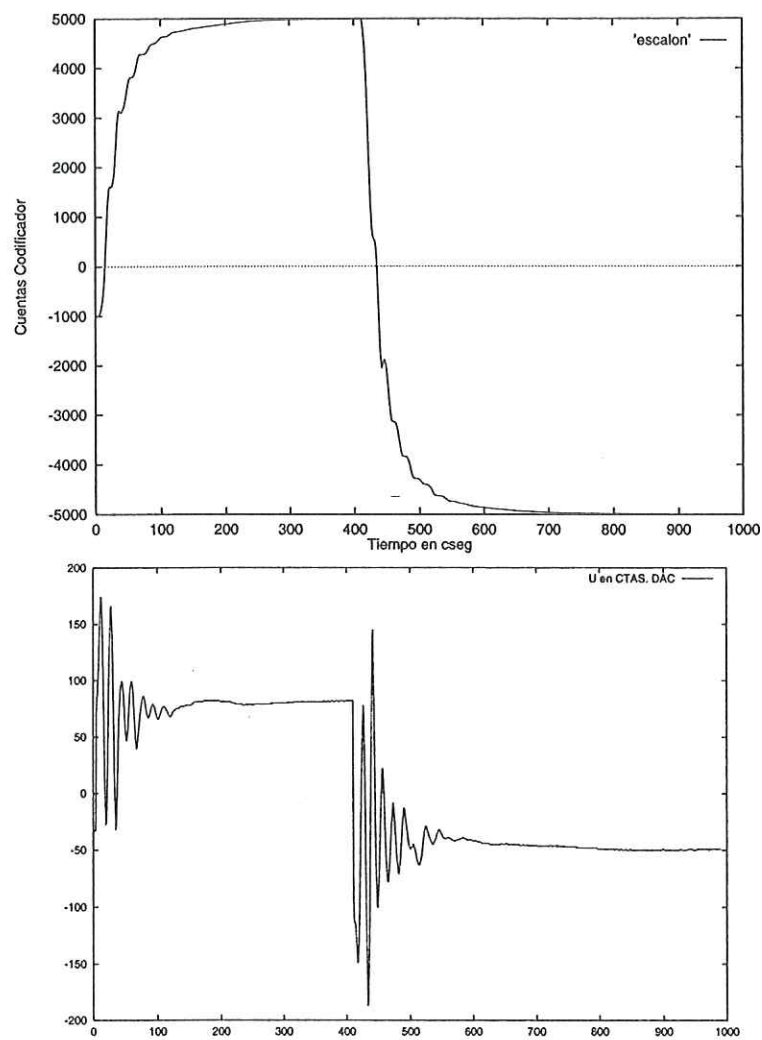


Figura 35: Cambio de referencia del CMI, modelo lineal. La gráfica de arriba muestra la salida del motor, la gráfica de abajo muestra la acción de control en cuentas del DAC.

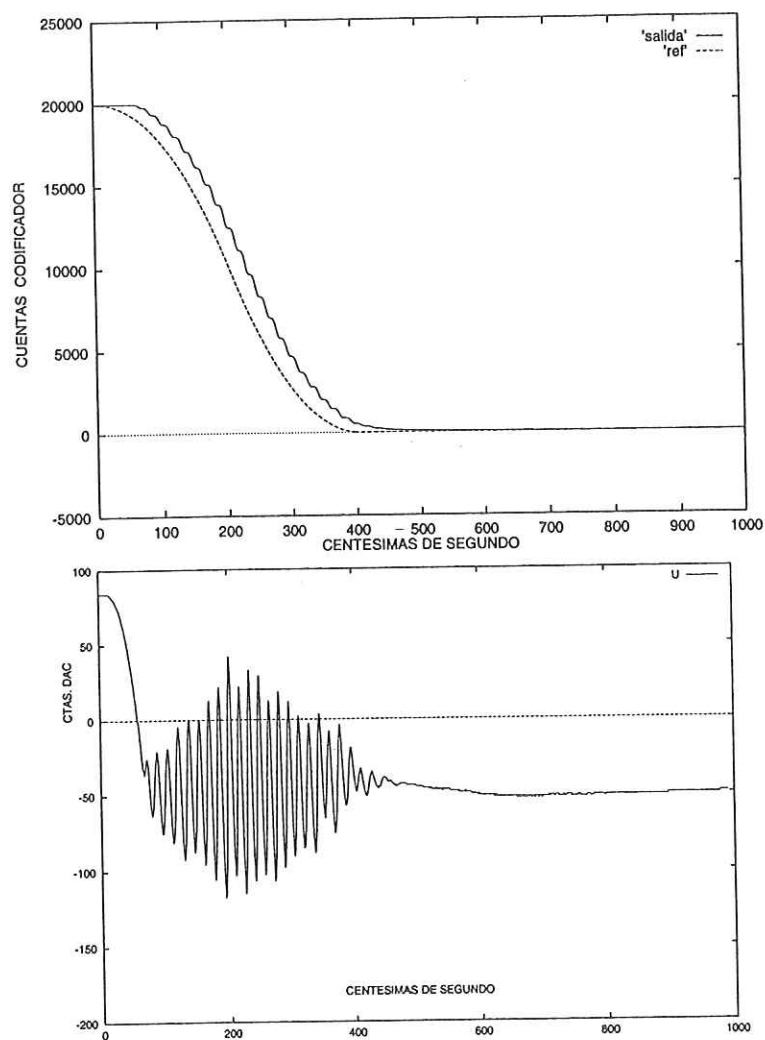


Figura 36: Cambio de referencia usando el generador de trayectorias, modelo lineal. La gráfica de arriba muestra la salida y la referencia, la gráfica de abajo muestra la acción de control en cuentas del DAC.

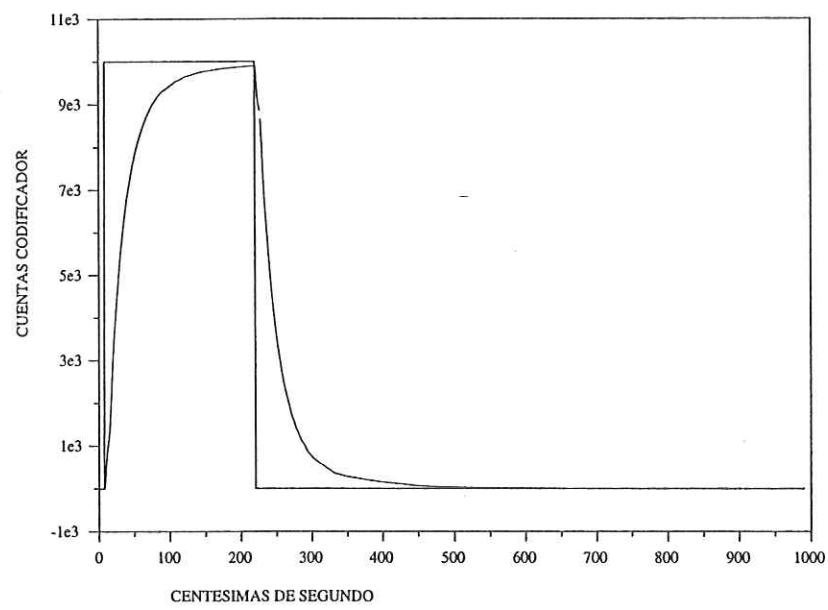


Figura 37: Cambio de referencia tipo escalón, modelo lineal

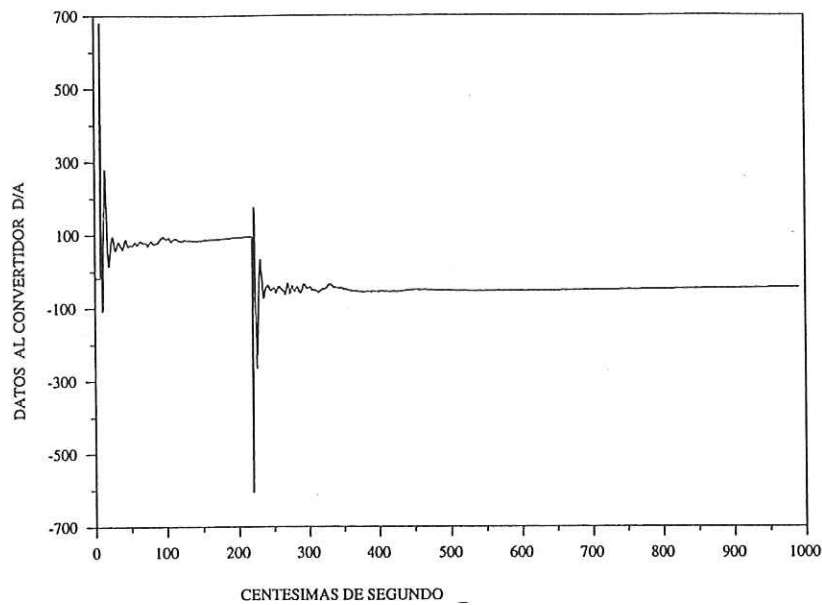


Figura 38: Acción de control en la entrada del convertidor analógico-digital, para la figura (37)

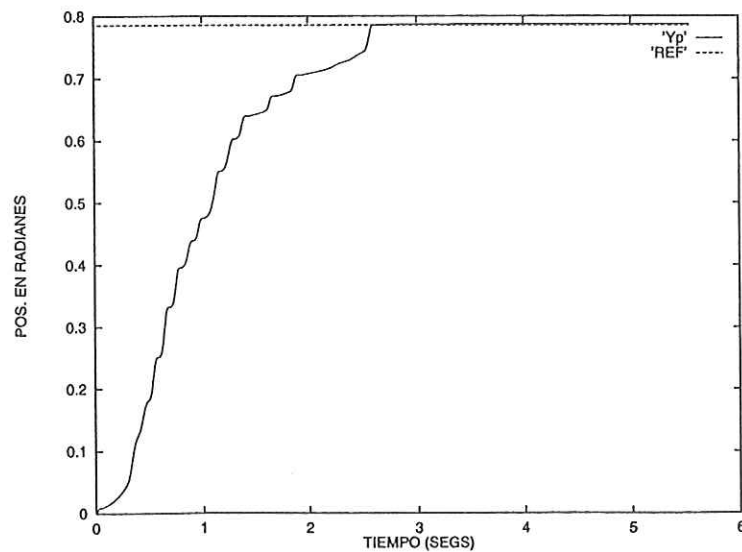


Figura 39: Cambio de referencia para el CMI, modelo no lineal.

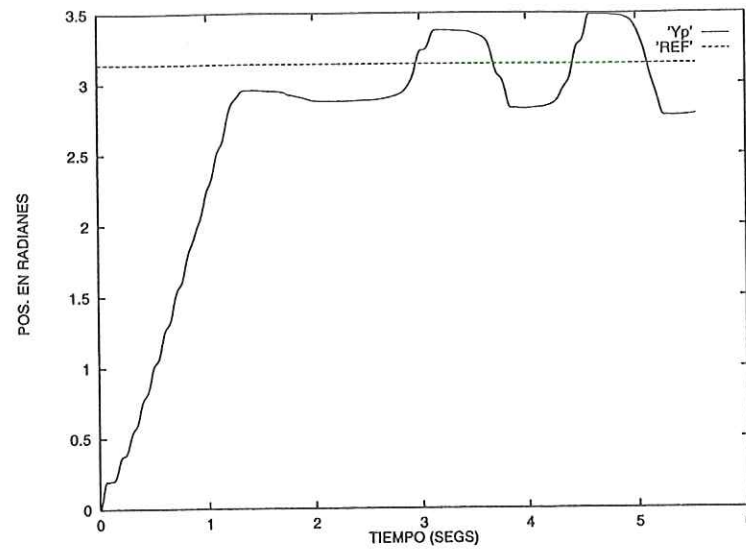


Figura 40: Cambio de referencia a la posición vertical para el CMI, modelo no lineal. Se puede observar la inestabilidad del sistema.

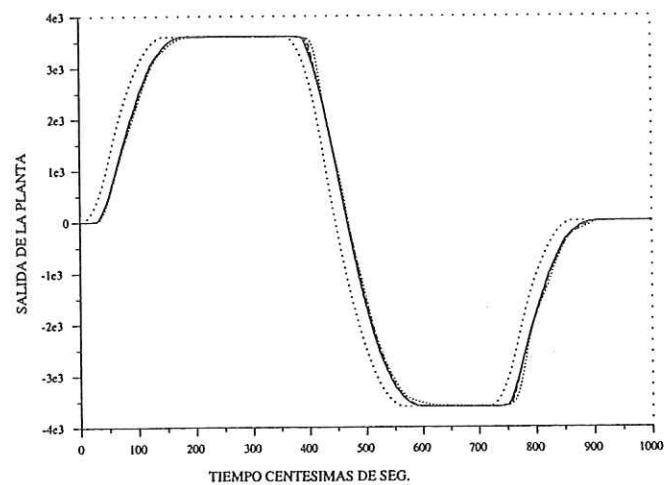


Figura 41: Salidas de la planta para un cambio de referencia con diferente posición del centro de masa para el péndulo. La línea punteada más a la izquierda es la referencia.

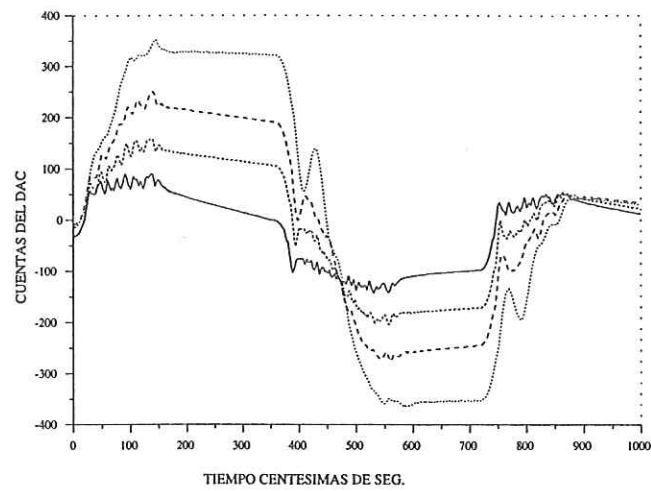


Figura 42: Acción de control para un cambio de referencia con diferente posición del centro de masa para el péndulo.

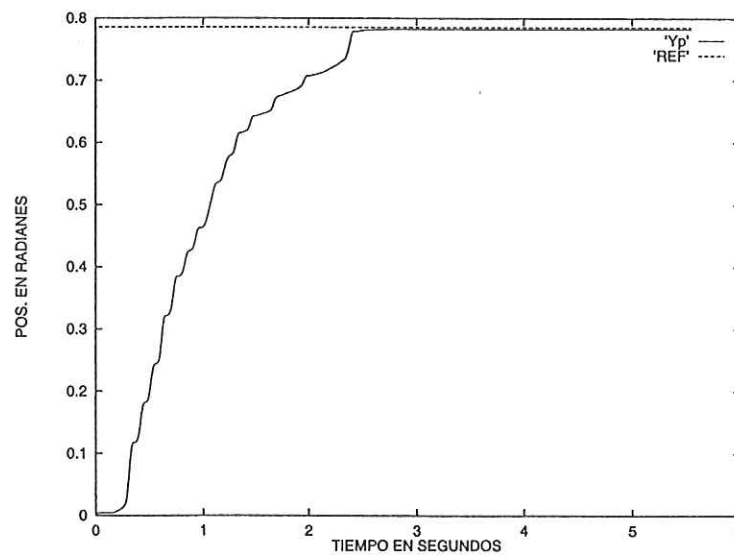


Figura 43: Cambio de referencia para el CMI++, modelo no lineal.

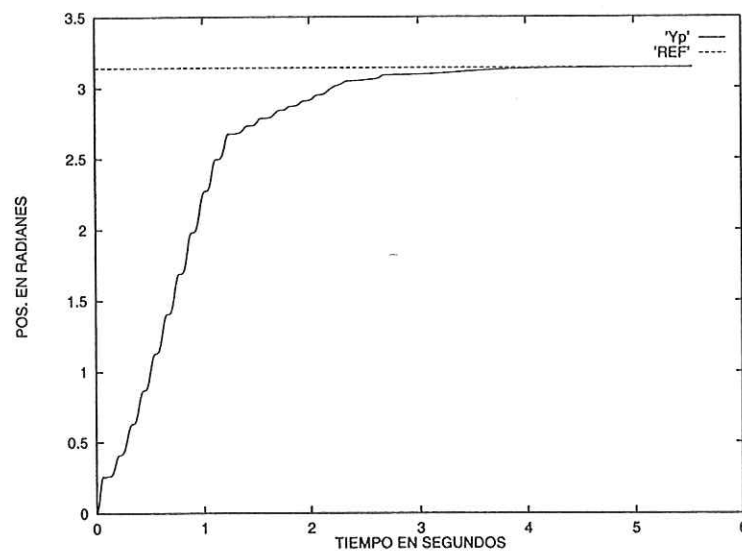


Figura 44: Cambio de referencia a la posición vertical del vástago para el CMI++, modelo no lineal.

CAPITULO VIII

CONCLUSIONES GENERALES

En este capítulo se presentan las conclusiones generales del trabajo y un panorama de los problemas abiertos que surgen a partir del mismo.

El objetivo principal del trabajo es establecer el método de diseño de un controlador robusto para una clase de sistemas no lineales basado en la estructura conocida como Control con Modelo Interno (CMI).

A partir del objetivo principal surgen objetivos parciales que en conjunto nos permiten lograr el objetivo principal.

Los objetivos parciales que se desarrollaron a lo largo del trabajo son:

- Análisis de sistemas no lineales de grado relativo completo controlados por el método del CMI. El objetivo primordial del análisis es obtener una medida general de robustez de la estructura, dicha medida se obtiene de manera directa a partir de las ecuaciones de diseño y establece un rango de las perturbaciones toleradas por el CMI.
- Rediseño de la ley de control nominal del CMI para aumentar la robustez de la misma. A este rediseño le denominamos CMI++. La técnica de diseño utilizada

para el desarrollo del CMI++ es el rediseño de Lyapunov. El CMI++ requiere para su síntesis acceso al estado completo del sistema en lazo cerrado. Esto nos llevó a la inclusión de un estimador de alta ganancia en el sistema. Utilizando una saturación del control fue posible demostrar la estabilidad de la interconexión CMI++ con el estimador. Este controlador es capaz de estabilizar de manera semiglobal al sistema en lazo cerrado. Además, el análisis permite establecer a priori una estimación de la cuenca de atracción.

- Análisis de estabilidad local del CMI cuando se usa para el seguimiento de una trayectoria de tipo rampa. Se mostró que el CMI con modelo perfecto sigue con error cero una rampa acotada en el tiempo. Además, se presentó una estimación de los errores de seguimiento esperados cuando planta y modelo son diferentes.
- Realización de los controladores propuestos para una planta experimental en el laboratorio por medio de una computadora digital. Se presentó un programa desarrollado en lenguaje "C" para realizar el control de un motor de corriente directa con retroalimentación de la posición del eje por medio de un codificador óptico con salida de pulsos en cuadratura. Asimismo, se presenta el diseño de una tarjeta de interfaz insertable en el puerto IDE de la computadora para el control del motor.

Los resultados obtenidos en las partes analíticas y experimentales del trabajo muestran la viabilidad del uso del CMI y CMI++ para el control robusto de sistemas físicos de uso común en la industria y la investigación.

Los resultados presentados también aportan un punto de partida para abordar algunos problemas abiertos relacionados con el CMI que pueden tomarse en trabajos futuros, entre otros, se puede mencionar los siguientes:

- La extensión del análisis a sistemas no lineales de grado relativo incompleto.
- La extensión a sistemas de varias entradas y salidas, en particular cuando se presenta un número distinto de ellas.
- El rediseño de la acción de control para lograr el seguimiento de trayectorias con error cero cuando se presentan perturbaciones o errores de modelado.
- El análisis de estabilidad y desempeño del CMI bajo restricciones de diseño como saturación de la acción de control.

En síntesis el trabajo aporta una extensión a los análisis presentados en la literatura para el CMI. También aporta un rediseño de la acción de control del CMI para lograr un aumento en la robustez de la estructura. Además, la realización de los controladores propuestos y los problemas resueltos para dicha realización en conjunto con los resultados de análisis y diseño representan una contribución significativa para la ingeniería de control automático.

Bibliografía

- Alvarez Gallegos Joaquín , Zazueta Rubio Salvador. 1998,. An Internal Model Controller for A Class of Nonlinear Systems: Stability and Robustness. *Dynamics And Control*.
- Arkun Y. , Calvet J. P. 1992,. Robust Stabilization of Input/Output Linearizable Systems Under Uncertainty and Disturbances. *AIChE*, Vol. 38(No. 8).
- Atassi A. N. , Khalil H. K. 1999, A Separation Principle for the Stabilization of a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 9, Sept., pag. 1672-1687.
- Ball J. A., Helton J. William, , Walker Michael L. 1993,. H_{∞} Control for Nonlinear Systems with Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL.38 (No. 4).
- Boutayeb M. , Aubry D. 1999,. A Strong Tracking Extended Kalman Observer for Discrete Time Non Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44(No. 8).
- Byrnes Christopher I., Priscoli Francesco Delli , Isidori Alberto. 1997. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser.
- Celle F., gauthier J. P., Kazarkos D., , Sallet G. 1989,. Synthesis of Nonlinear Observers:

- A Harmonic Analysis Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22 (No. 4).
- Di Benedetto M. D. 1994,. Asymptotic Model Matching for Nonlinear Systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 39(No. 8).
- Economou C. G., Morari M., , Palsson B.O. 1986,. Internal Model Control. Extension to NonLinear Systems. *Industrial Eng. Chem. Proc. Des. and Dev.*
- Gauthier J. P., Hammouri H., , Othman S. 1992,. A Simple Observer for Non Linear Systems: Application to Bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37:875-880.
- Gaylord R., Kamin S. N., , Wellin P. R. 1996. *An Introduction to Programming with Mathematica, Second Edition*. Springer-Verlag.
- Henson M. A. , Seborg D. E. 1991,. An Internal Model Control Strategy for Nonlinear Systems. *AIChE*, Vol. 37(No. 7).
- Hirsh W. , Smale S. 1974. *DIFFERENTIAL EQUATIONS DYNAMICAL SYSTEMS AND LINEAR ALGEBRA*. Academic Press, New York.
- Huang J. , Rugh W. J. 1992,. Stabilization on Zero-Error Manifolds and the Nonlinear Servomechanism Theory. *IEEE Transactions On Automatic Control*, VOL. 37(No. 7).
- Isidori A. 1985-1989. *NONLINEAR CONTROL SYSTEMS AN INTRODUCTION*. Springer-Verlag. 2nd edition.
- Isidori A. , Astolfi A. 1994,. DISTURBANCE ATTENUATION AND H_∞ CONTROL

VIA MEASUREMENT FEEDBACK IN NONLINEAR SYSTEMS. *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL.37(No. 9).

Kailath T. 1980. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Khalil H. K. 1992. *NONLINEAR SYSTEMS*. Maxwell MacMillan Canada.

Khalil H. K. 1994,. Robust Servomechanism Output Feedback Controllers for Feedback Linearizable Systems. *Automatica*, Vol. 30(10):1587–1599.

Khalil H. K. 1996,. Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Represented by Input-Output Models. *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 41 (No. 2).

Khalil H. K. , Esfandiari F. 1993,. Semiglobal Estabilization of a Class of Nonlinear Systems Using Output Feedback. *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 38 (9):1412–1415.

Kharitonov V.L. 1979,. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential equations. *Differential Equations (en ruso)*, 1483–1485.

Kokotović P., Khalil H. K., , O'Reilly J. 1986. *SINGULAR PERTURBATION METHODS IN CONTROL:ANALYSIS AND DESIGN*. Academic Press.

Kravaris C. , Palanki S. 1988,. Robust Nonlinear State Feedback Under Structured Uncertainty. *AIChE*, Vol. 34(No. 7).

Krstić Miroslav, Kanellakopoulos Ioannis, , Kokotović 1995. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. JOHN WILEY & SONS, INC.

Kuo Benjamin C. 1982. *Automatic Control Systems*. Prentice Hall INC. 4th edition.

- Michel A. N. , Wang K. 1995. *QUALITATIVE THEORY OF DINAMICAL SYSTEMS THE ROLE OF STABILITY PRESERVING MAPPINGS*. Marcel Dekker Inc.
- Moraal P.E. , Grizzle J.W. 1993,. Observer Design for Nonlineas Systems with Discrete Time Measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:395-404.
- Morari M. , Zafiriou E. 1989. *Robust Process Control*. Prentice Hall.
- Ogata K. 1983. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall.
- Phillips Charles L. , Nagle H. T. 1989. *Digital Control System Analysis and Design*. Prentice Hall. Second Edition.
- Qu Zhihua. 1997. *ROBUST CONTROL OF NONLINEAR UNCERTAIN SYSTEMS*. Wiley-Interscience Publication, Jhon Wiley and Sons, INC.
- Todd M. J. 1976. *The Computation of Fixed Points and Applications*. New York Springer-Verlag.
- Utkin Vadim I. 1992. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Verlag.
- Vanelli A. , Vidyasagar M. 1985,. Maximal Lyapunov Functions and Domain of Attraction for Autonomous Systems. *Automatica*, Vol. 21(1):69-80.
- Varios. 1999,. Special Section on Neural Networks in Control, Identification and Decision Making. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44.
- Wang K. , Michel A. N. 1994,. Robustness and Perturbation Analysis of a Class of Nonlinear Systems with Applications to Neural Networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 41.
- William H. , others. 1988. *NUMERICAL RECIPES IN C*. Cambridge University.

Zadeh Lotfi A., editor. 1992. *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems*. Kluwer International Series in Engineering and Computer Science.

APENDICE

INSTRUCCIONES DEL PROGRAMA DE CONTROL

En esta sección se describen las instrucciones que ejecuta el programa de control **PPAL.EXE**, además, se describen algunas indicaciones para la configuración de la PC-CMI como un sistema de control autónomo. El programa de control acepta las instrucciones por medio de líneas de caracteres e.g. la línea:

RCD R= 10000 (ENTER)

ejecuta las instrucciones **RCD, R= 1000, (ENTER)** implica pulsar la tecla de **ENTER** o **RETURN** en la PC-CMI.

Las instrucciones se pueden introducir por medio del teclado o del puerto serie (RS-232) de la PC-CMI. Se puede usar los puertos serie estándar del MS-DOS de **COM1** al **COM4**.

Para introducir una instrucción por medio del puerto serie de la PC-CMI es necesario redirigir la consola de instrucciones del MS-DOS, esto se logra con las siguientes instrucciones :

MODE COM1:9600,N,8,1 (ENTER)

CTTY COM1 (ENTER)

el primer parámetro a la instrucción **MODE** puede ser **COM1** hasta **COM4**. La instrucción **MODE** configura los parámetros de comunicación del puerto serie, en el ejemplo, la configuración

COM1:9600,N,8,1

significa: COM1 - el puerto serie 1, 9600 bauds, n no paridad, 8 bits de datos y 1 bit de paro.

En general las instrucciones **MODE** y **CTTY** así como la ejecución del programa de control **PPAL.EXE** pueden efectuarse en el **AUTOEXEC.BAT** del MS-DOS, esto implica que al encender o restablecer la PC-CMI, ésta se encontrará lista para recibir las instrucciones por medio del puerto serie. Se requiere de un adaptador del tipo "NULL-MODEM" para poder usar un cable de comunicación serie con tres líneas (TX,RX,TIERRA) o en su defecto hacer interconexiones entre las señales (RTS-CTS) y (DSR-DTR) del puerto de la computadora PC-CMI, esto es necesario pues estamos usando las funciones de comunicación y redireccionamiento del puerto del sistema operativo.

Las líneas de instrucciones recibidas por el puerto serie deben contener un retorno de carro (caracter 12 del conjunto ASCII) para poder ser interpretadas por el programa de control.

El uso de la comunicación por medio del puerto serie (COM1-COM4) permite que la PC-CMI se vea como un sistema de control autónomo.

Puesto que las instrucciones son cadenas de caracteres ASCII es posible utilizar un programa de emulación de terminal en otra computadora con más recursos. Esto posibilita el análisis de los resultados de los experimentos con paquetes de manipulación de datos muy avanzados como son MATLAB, SCILAB y MATHEMATICA.

A continuación se listan las instrucciones del programa y una breve descripción de su uso.

AYUDA	 Lista los comandos que se pueden ejecutar en línea
?	 Da una descripción del comando, e.g.

? P

describe el comando "P".

- P Pone el controlador proporcional.
- PI Pone el controlador proporcional integral.
- PID Pone el controlador PID.
- CMI Pone el controlador CMI.
- CMI++ Pone el controlador CMI++ .
- ST Pinta el estado actual del controlador en el formato siguiente:
 CONTROL_P(tipo de control actual)
 RA=0 PA=4152 (referencia actual y posición actual)
 CNT=991 (contador de datos adquiridos)
- R= Cambia la referencia del controlador.
 e.g.: R= 1000
 pone la referencia del controlador en 1000.
- PLOT1 Pinta en la pantalla gráfica la respuesta del controlador,
 grafica la salida contra la entrada de referencia.
 Los datos pintados son los obtenidos por el contador
 de datos. Se puede especificar el rango de datos a
 pintar e.g.
 PLOT1 200 300
 pinta los datos de 200 a 300 del vector capturado. Por
 omisión , se pintan todos los elementos del vector
 capturado (990 elementos).
- PLOT2 Pinta en la pantalla gráfica la acción de control al convertidor
 D/A, vea ayuda de PLOT1 para una descripción mas detallada.

DATOS		Pone en pantalla los datos obtenidos. Si no se da el parámetro pinta los datos de 1 en 1 de otra manera se pinta de n en n datos, e.g. DATOS 10 pinta los datos capturados de 10 en 10.
GRABA		Graba los datos capturados en un archivo.
RCD		Restablece (contador=0) el contador de datos.
DA		Saca el valor del parámetro al DA, abre el lazo de control, e.g. DA 1000 saca 1000 cuentas al DA, rango (+/- 2047).
CUENTA_NEG		Invierte el valor del contador de entrada, es decir si el codificador cuenta positivo a la derecha con este comando contará negativo a la derecha.
CUENTA_POS		Lo contrario de CUENTA_NEG, vea el comando CUENTA_NEG.
KP=		Pone el valor del parámetro en kp del controlador P,PI,PID e.g. KP= 1.0
KD=		Pone el valor del parámetro en la constante Kd (derivativa) del controlador PID.
KI=		Pone el valor del parámetro en la constante Ki (integral) del PID.
MONO		Pone la pantalla de gráficos en modo monocromático, si la pantalla está en modo a color la regresa al modo monocromo.

ESCS	 Genera unos escalones de entrada por omisión toma los valores 1000 y 100 (valor de la amplitud del escalón y numero de muestras en un 1 segundo entre escalones) e.g. ESCS 2000 150 (amp. 2000 tiempo de 1.5 segundos entre escalones.
RAMPA	 Entrada de rampa con amplitud de la rampa especificada por el parámetro e.g RAMPA 10 ejecuta una rampa de 10 ctas./muestreo.
NORAMPA	 Quita el modo de rampa.
VEL=	 Velocidad máxima del generador de trayectorias trapezoidales e.g. VEL= 100 pone una velocidad máxima de 100 cuentas/muestreo.
ACEL=	 Aceleración del generador de trayectorias e.g. ACEL= 0.1 pone la aceleración en 0.1 cuentas/muestreo ² .
TRAPECIO	 Pone o quita el modo de trayectoria de velocidad trapezoidal.
TRAY	 Pinta el estado de la velocidad actual y la posición deseada del generador de trayectorias trapezoidal.
RESTABLECE	 Pone todas las variables de control en cero.
PARSY	 Pone los parámetros del sistema Y del CMI.
PARSREG	 Pone los parámetros del regulador del CMI , e.g. PARSREG -100 -20 asigna $a_{1r} = -100$, $a_{2r} = -20$.

- PARSMODELO Pone los parámetros del modelo lineal.
 Se debe dar los parámetros desde A1 hasta An del modelo y
 por último el valor de Gm., e.g.
 PARSMODELO -10 -123 12
 asigna los valores -10 y -123 en los coefs. de A1 y A2 y
 Gm = 12 esto es suponiendo que el orden del CMI es 2.
- PINTACMI Pinta en pantalla las variables del CMI.
- PINTAPID Pinta en pantalla las variables del P, PI,PID.
- IDENT Identifica en base a los datos obtenidos, para obtener
 datos para este proceso use el comando "ESCS".
 El método de identificación es el de mínimos
 cuadrados.
- NP Pone un modo de control directo, este se usa como
 control interno por el CMI++.

PRUEBA DEL LEMA 3

Prueba del lema 3 presentado en la página 39.

Se tiene que $f(x) + h(x) = Ax + \Delta Ax + m(x)$, donde $\lim_{x \rightarrow 0} [|m(x)|_2 / |x|_2] = 0$.

Considérese el segundo método de Lyapunov, con $V(x) = x^T P x$ como función de Lyapunov. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (PA + A^T P)x + x^T (P\Delta A + \Delta A^T P)x + 2x^T P m(x) \\ &\leq -x^T x + \mu x^T x + 2x^T P m(x) \end{aligned} \quad (158)$$

donde μ el valor propio máximo de $[P\Delta A + \Delta A^T P]$. Se tiene además que, usando (33),

$$\begin{aligned}\|P\Delta A + \Delta A^T P\|_\infty &\leq \|P\|_\infty \|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A^T\|_\infty \|P\|_\infty \\ &= \|P\|_\infty (\|\Delta A\|_\infty + \|\Delta A\|_1) < 1\end{aligned}$$

Demostraremos que $\mu < 1$, para lo cual es suficiente mostrar que, para cualquier matriz cuadrada B , $|\lambda(B)| \leq \|B\|_\infty$, donde $\lambda(B)$ es cualquier valor propio de B . Existe un vector x_0 tal que $Bx_0 = \lambda(B)x_0$. Puesto que

$$\|Bx_0\|_\infty = \|\lambda(B)\| \|x_0\|_\infty$$

entonces

$$\|\lambda(B)\| = \frac{\|Bx_0\|_\infty}{\|x_0\|_\infty} \leq \|B\|_\infty$$

por lo tanto $\mu < 1$.

Ahora, de (158), si $\mu = 1 - 3\epsilon$, $\epsilon > 0$, se obtiene

$$\dot{V}(x) \leq -3\epsilon x^T x + 2x^T P m(x), \forall x \in U. \quad (159)$$

Mostraremos que existe una vecindad del origen $S \subset U$, tal que

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon x^T x. \quad (160)$$

Al usar (159) para probar (160), es suficiente mostrar que

$$x^T P m(x) \leq \epsilon x^T x, \forall x \in V.$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|m(x)\|_2}{\|x\|_2} = 0$, se puede escoger $S \subset U$ de tal manera que

$$\frac{\|m(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\epsilon}{\|P\|_2}, \forall x \in S$$

Por medio de la desigualdad de Schwartz se obtiene

$$x^T P m(x) \leq \|x\|_2 \|m(x)\|_2 \|P\|_2 \leq \epsilon \|x\|_2^2 = \epsilon x^T x \quad (161)$$

$\forall x \in S$. Por lo tanto, por (159) y (161), (160) es verdadera. De lo anterior se concluye que la solución trivial de (32) es exponencialmente estable y se concluye la prueba del lema 3. ■

PRUEBA DEL LEMA 7

Prueba del lema 7 presentado en la página 50.

Por el teorema de Gastinel-Kahan Wang y Michel (1994), sabemos que $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$ garantiza la existencia de $(A + \Delta A)^{-1}$. Sea $G = (A + \Delta A)^{-1}$. Entonces

$$G = A^{-1} - G(\Delta A)A^{-1}$$

y

$$\|G\| \leq \|A^{-1}\| + \|G\| \|\Delta A\| \|A^{-1}\|$$

por lo tanto

$$\|G\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|}$$

donde, por hipótesis, se satisface $1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\| > 0$. ■

PRUEBA DEL LEMA 8

Prueba del lema 8 presentado en la página 50.

Por suposición $-G$ es un mapeo continuo de $[-\epsilon, \epsilon]^n$ a $[-\epsilon, \epsilon]^n$. Por el teorema de Brower Todd (1976), existe un punto fijo $x_0 \in [-\epsilon, \epsilon]^n$ tal que $(-G)(x_0) = x_0$, e.g. $x_0 + G(x_0) = 0$. Finalmente, nótese que $\|x_0\|_\infty = \|G(x_0)\|_\infty$, puesto que $\|x_0\|_\infty \leq \epsilon$. Esto concluye la prueba del lema. ■

GLOSARIO

En este apartado se definen los acrónimos y abreviaturas usados en el trabajo.

ACRONIMO	SIGNIFICADO
cd	Corriente directa.
CMI	Contol con Modelo Interno.
CMI++	Control con Modelo Interno con rediseño de Lyapunov.
D/A	Digital a analógico.
ppr	Pulsos por revolución.
PWM	Modulación de ancho de pulso (pulse width modulation).
RAM	Memoria de acceso aleatorio (Random access memory).
ROM	Memoria de lectura solamente (Read only memory).
SL	Sistema lineal.
SNL	Sistema no lineal.
vcd	Voltios de corriente directa.

