

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

UN METODO APROXIMADO PARA INVERTIR DATOS
DE RESISTIVIDAD Y POLARIZACION INDUCIDA. CA-
SO TRIDIMENSIONAL RESTRINGIDO

T E S I S
MAESTRIA EN CIENCIAS

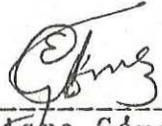
Ricardo Cavazos Garza

Resumen de la tesis de RICARDO CAVAZOS GARZA, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en GEOFISICA..

Ensenada, Baja California, México.. Julio de 1986.

UN METODO APROXIMADO PARA INVERTIR DATOS DE
RESISTIVIDAD Y POLARIZACION INDUCIDA: CASO
TRIDIMENSIONAL RESTRINGIDO..

Resumen aprobado por:



Dr. Enrique Gómez Treviño
Director de tesis

Se desarrolla un método aproximado para invertir datos de resistividad y polarización inducida.. La inversión se efectúa en términos de estructuras tridimensionales de forma cilíndrica con sección transversal y longitud arbitrarias; los datos se suponen tomados a lo largo de un perfil perpendicular al rumbo de la estructura.. Tanto la cargabilidad como la resistividad de la zona anómala pueden ser funciones arbitrarias de la posición.. El método no requiere de un modelo inicial y por lo general se obtienen ajustes satisfactorios en una o dos iteraciones.. Debido a la aproximación utilizada, su aplicación está restringida a estructuras que presentan contrastes moderados en resistividad.. En estos casos, el método es rápido y lo suficientemente exacto para ser utilizado en interpretaciones

de rutina. Se incluyen resultados de simulaciones numéricas así como resultados de la inversión de datos de campo.

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION CIENCIAS DE LA TIERRA

DEPARTAMENTO DE GEOFISICA

UN METODO APROXIMADO PARA INVERTIR DATOS DE
RESISTIVIDAD Y POLARIZACION INDUCIDA: CASO
TRIDIMENSIONAL RESTRINGIDO

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para
obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta

RICARDO CAVAZOS GARZA

Ensenada, B. C. Junio de 1986

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:



Dr. Enrique Gómez Creviño, Director del Comité



Dr. Mario Martínez García, Miembro del Comité



Dr. Ricardo Fernández Tomé, Miembro del Comité



M.C. Raymundo Vega Aguilar, Miembro del Comité



M.C. Silvio Guido Lorenzo Marinone Moschetto, Miembro del Comité



Dr. Mario Martínez García, Jefe del Departamento de Geofísica de Exploración



M.C. Francisco Suárez Vidal, Director de la División de Ciencias de la Tierra

C. Nava B.

M.C. Cuauhtémoc Nava Button, Director Académico Interino

Tesis presentada en Julio 2, 1986

DEDICATORIA

A mis padres María Guadalupe y Gonzalo por
su gran cariño y apoyo de toda la vida.

A Juracy, con todo mi amor.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Enrique Gómez Treviño por sus enseñanzas y ayuda a la realización de este trabajo.

A mi familia por la ayuda y apoyo que me ha dado.

A Juracy por impulsarme a la terminación de este trabajo y por sus correcciones al mismo.

A Eloy y Arturo por el apoyo que me han brindado.

Al personal de CICESE y compañeros que de alguna manera contribuyeron a mi formación académica.

Al Dr. José Frez por los conocimientos y subrutinas brindados durante su curso de inversión.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

CONTENIDO

| | Página |
|--|--------|
| I.- INTRODUCCION | 1 |
| II.- FORMULACION DEL PROBLEMA INVERSO | 10 |
| II.1.- INTRODUCCION | 10 |
| II.2.- FORMULACION PARAMETRICA | 10 |
| II.3.- FORMULACION PARA MEDIOS CONTINUOS | 14 |
| II.3.1.- CASO GENERAL: CONTRASTES ARBITRARIOS EN RESISTIVIDAD | 14 |
| II.3.2.- CASO PARTICULAR: CONTRASTES MODERADOS EN RESISTIVIDAD | 16 |
| II.4.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO | 21 |
| III.- SOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO | 27 |
| III.1.- INTRODUCCION | 27 |
| III.2.- CONSTRUCCION DE LA SOLUCION | 28 |
| III.2.1.- ESTIMADOR "DVS" | 29 |
| III.2.1.a.- ESTIMADOR "DVS": DATOS SIN RUIDO | 34 |
| III.2.1.b.- ESTIMADOR "DVS": DATOS CON RUIDO | 44 |
| III.2.2.- ESTIMADOR "DVS" MODIFICADO | 48 |
| III.2.2.a.- ESTIMADOR "DVS" MODIFICADO: DATOS SIN RUIDO | 56 |
| III.2.2.b.- ESTIMADOR "DVS" MODIFICADO: DATOS CON RUIDO | 58 |
| III.3.- ESTADISTICA DE LA SOLUCION | 61 |
| IV.- APLICACIONES | 81 |
| IV.1.- INTRODUCCION | 81 |

CONTENIDO (Cont.)

| | página |
|--|--------|
| IV.2.- UN EJEMPLO SENCILLO | 81 |
| IV.3.- EJEMPLOS DE ANOMALIAS ADYACENTES | 86 |
| IV.4.- EL EFECTO DEL CONTRASTE EN RESISTIVIDAD | 99 |
| IV.5.- EL EFECTO DE LA LONGITUD | 108 |
| IV.2.- APLICACION A DATOS DE CAMPO | 111 |
| V.- CONCLUSIONES | 119 |
| LITERATURA CITADA | 121 |

LISTA DE FIGURAS

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 1 | Curva del decaimiento del tranciente en una muestra de roca.. | 3 |
| 2 | Ilustración de la toma de datos de resistividad y PI empleando el arreglo de dipolo-dipolo.. | 4 |
| 3 | Simulación de datos de campo (símbolos), y respuesta (línea continua) de un modelo sugerido por las obervaciones.. | 6 |
| 4 | Obtención de datos con el arreglo dipolo dipolo y presentación de los mismos en forma de pseudosección.. | 8 |
| 5 | Esquematzación de la estimación de modelos mediante inversión paramétrica.. | 12 |
| 6 | Vista en sección y en planta de la geometría del modelo a estimar.. | 26 |
| 7 | Prueba de convergencia.. a) Respuesta calculada discretizando el modelo con cubos de 0.25a de lado, b) respuesta calculada discretizando el modelo con cubos de 0.5a de lado, c) modelo hipotético.. | 33 |
| 8 | Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 8 datos.. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.. | 35 |
| 9 | Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 16 datos.. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.. | 37 |

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

| Figura | | Página |
|--------|---|--------|
| 10 | Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 24 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado. | 38 |
| 11 | Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 32 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado. | 39 |
| 12 | Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 40 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado. | 40 |
| 13 | Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 48 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado. | 41 |
| 14 | a) Seudosección de $M_a(\%)$ para seis aberturas dipolares diferentes, b) modelo hipotético correspondiente. | 42 |
| 15 | Estimación del modelo 2 a partir de datos sin ruido. a) Datos, b) valores calculados, c) modelo estimado. | 43 |
| 16 | Gráficas de la magnitud del valor singular (λ) y del residuo ($ r /N$) contra el orden de la descomposición, correspondientes a la inversión de datos sin ruido de los modelos 1 y 2. | 45 |
| 17 | Gráficas del comportamiento de los valores singulares y del ajuste Ji-cuadrada, en función del orden de la descomposición. Las gráficas corresponden a la inversión de datos con 10% de ruido para los modelos 1 y 2. | 47 |

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 18 | Modelos estimados para diferentes valores del ajuste Ji-cuadrada. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 1. | 49 |
| 19 | Resultados de la inversión a partir de datos con 10% de ruido. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 1. | 50 |
| 20 | Modelos estimados para diferentes valores del ajuste Ji-cuadrada. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 2. | 51 |
| 21 | Resultados de la inversión a partir de datos con 10% de ruido. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 2. | 52 |
| 22 | Gráficas de magnitud del valor singular (λ) y del residuo ($ r /N$) contra el orden de la descomposición. Las gráficas corresponden a la segunda iteración para el caso de inversión de datos sin ruido de los modelos 1 y 2. | 57 |
| 23 | Resultados de la segunda iteración correspondientes a la inversión de datos sin ruido para el modelo 1. | 59 |
| 24 | Resultados de la segunda iteración correspondientes a la inversión de datos sin ruido para el modelo 2. | 60 |
| 25 | Gráficas de la magnitud del valor singular (λ) y del ajuste Ji-cuadrada contra el orden de la descomposición. Las gráficas corresponden a la segunda iteración para el caso de la inversión de datos con ruido de los modelos 1 y 2. | 62 |

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 26 | Resultados de la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos con 10% de ruido para el modelo 1. | 63 |
| 27 | Resultados de la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos con 10% de ruido para el modelo 2. | 64 |
| 28 | Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1. Se consideran todos los eigenvalores. Las gráficas representan la mejor resolución posible con los datos disponibles. | 69 |
| 29 | Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1. Se consideran todos los eigenvalores. Las gráficas representan la mejor resolución posible con los datos disponibles. | 70 |
| 30 | Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1. Se consideran todos los eigenvalores. Las gráficas representan la mejor resolución posible con los datos disponibles. | 72 |
| 31 | Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1, correspondientes a desviaciones estándar σ 0.15. | 73 |
| 32 | Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1, correspondientes a desviaciones estándar σ 0.15 | 74 |
| 33 | Modelos promedio de PI correspondientes al modelo 1, para desviaciones estándar menores o iguales que 0.15 y 0.05 respectivamente. | 75 |

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

| Figura | | Página |
|--------|---|--------|
| 34 | Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 2, correspondientes a desviaciones estándar σ 0.15. | 77 |
| 35 | Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 2, correspondientes a desviaciones estándar σ 0.15. | 78 |
| 36 | Modelos promedio de PI correspondientes al modelo 2, para desviaciones estándar menores o iguales que 0.15 y 0.05 respectivamente. | 79 |
| 37 | Datos sintéticos de M_n (%) alterados con un 10% de ruido y el modelo hipotético correspondiente. Los valores fueron tomados de Hohmann (1975). | 83 |
| 38 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de PI para el cubo de la Figura 37. | 84 |
| 39 | Modelos promedio de cargabilidad correspondientes al cubo de la Figura 37 para dos errores de estimación. | 85 |
| 40 | Datos sintéticos de cargabilidad alterados con un 10% de ruido y modelo hipotético (2-D). Los valores fueron tomados de Snyder (1976). | 87 |
| 41 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de los cilindros de la Figura 40. | 88 |
| 42 | Modelos promedio de cargabilidad correspondientes a la inversión de datos de los dos cilindros de la Figura 40. | 89 |

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 43 | Gráficas bidimensionales de la fila de la matriz de resolución para el sexto elemento de la rejilla. Los valores corresponden a desviaciones estándar menores o iguales que 0.05, 0.2 y 1.0 respectivamente. | 90 |
| 44 | Datos sintéticos de resistividad alterados con un 10% de ruido, y modelo hipotético (2-D). Los valores fueron tomados de Snyder (1976). | 92 |
| 45 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de resistividad para los cilindros de la Figura 40. | 93 |
| 46 | Modelos promedio de resistividad correspondientes a los cilindros de la Figura 40. Los valores de desviación estándar son para el parámetro $\rho_1 K$. | 94 |
| 47 | Datos sintéticos de M_a (%) alterados con un 10% de ruido y el correspondiente modelo hipotético. Los valores fueron tomados de Hohmann (1978). | 96 |
| 48 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondiente a la inversión de datos de PI para el modelo de la Figura 47. | 97 |
| 49 | Modelos promedio de cargabilidad correspondientes a la inversión de los datos de los diques de la Figura 47. | 98 |
| 50 | Datos sintéticos de M_a (%) mas 10% de ruido, y modelo hipotético de un dique conductor. Los valores fueron tomados de Hohmann (1975). | 101 |

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 51 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de PI para el modelo de la Figura 50.. | 102 |
| 52 | Datos sintéticos de M_a (%) más 10% de ruido, y modelo hipotético de un dique resistivo. Los valores fueron tomados de Hohmann (1975).. | 103 |
| 53 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de PI para el modelo de la Figura 52.. | 104 |
| 54 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de resistividad de un modelo de sección transversal cuadrada de dimensión a , con la parte superior en $Z=a$ y longitud de $4a$, con contraste $\rho_2/\rho_1=10$.. | 106 |
| 55 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de resistividad de un modelo de sección transversal cuadrada de dimensión a , con la parte superior en $Z=a$ y longitud de $4a$, con contraste $\rho_2/\rho_1=0.1$ | 107 |
| 56 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondiente a la inversión de datos de PI para el modelo de la Figura 52.. La inversión se realizó suponiendo $L=3$. | 109 |
| 57 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de PI para el modelo de la Figura 52.. La inversión se realizó suponiendo que $L=8$. | 110 |

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 58 | Figuras tomadas de Pelton y otros (1978). a) Resultados de la inversión de datos de polarización inducida. b) Resultados de la inversión de datos de resistividad. | 112 |
| 59 | Resultados obtenidos en la primer iteración correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos. | 114 |
| 60 | Resultados obtenidos en la primer iteración correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos. | 115 |
| 61 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos. | 116 |
| 62 | Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos. | 117 |

I INTODUCCION

Los métodos de resistividad y polarización inducida son utilizados principalmente en la exploración minera y en la evaluación de acuíferos someros. Existe actualmente, además, un renovado interés por utilizar estos métodos en la exploración de petróleo.

En el método de resistividad, las mediciones se expresan en la forma de resistividad aparente (ρ_a). El arreglo electródico en general consiste de dos electrodos para inyectar corriente directa, combinados con dos electrodos para medir el potencial. La resistividad aparente depende de la razón del potencial medido a la corriente de inyección (V/I); este término está directamente relacionado con la resistividad del medio. La resistividad aparente también depende de un factor geométrico que varía según la configuración de electrodos.

El gran uso del método de polarización inducida ha dado origen a dos principales técnicas de medición, éstas son: el método en el dominio del tiempo y el método en el dominio de la frecuencia. En el dominio del tiempo se mide la polarización del subsuelo integrando la curva de decaimiento del voltaje transitorio, cuando la corriente directa de inyección es interrumpida abruptamente (Seigel, 1959; Wait,

1959), como se muestra en la Figura 1. En esta técnica la cargabilidad es el parámetro que se usa para indicar la capacidad de polarización del medio, y la cargabilidad aparente (M_a) es la cantidad que se mide. Esta última está dada por

$$M_a = 1/V_p \int_{t_1}^{t_2} V_s(t) dt ,$$

donde V_p es el voltaje primario y $V_s(t)$ es el transitorio.

En el dominio de la frecuencia la polarización es medida detectando el decaimiento de la resistividad aparente a medida que se aumenta la frecuencia en la corriente aplicada (Hallob, 1957, 1961; Marshal and Madden, 1959). El parámetro de interés es el efecto de frecuencia aparente (F_{ea}) y está dado por

$$F_{ea} = \frac{(\rho_{dc} - \rho_{ac})}{\rho_{ac}}$$

La cargabilidad y el efecto de frecuencia aparentes, son formas diferentes de detectar el mismo fenómeno. Hallob (1964) ha demostrado formalmente que ambos parámetros están directamente relacionados. Además concluye que mediciones de M_a y F_{ea} para una misma zona nos proporcionan exactamente la misma información.

En este trabajo emplearemos datos tomados con el arreglo dipolo-dipolo, el cual se muestra en la Figura 2. Este arreglo consta de un dipolo de corriente y otro de potencial,

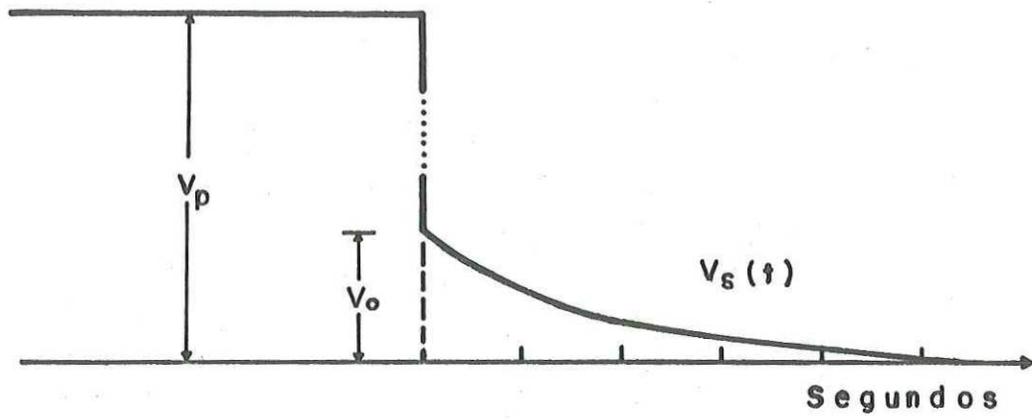


FIGURA I. Curva de decaimiento del transiente en una muestra de roca.

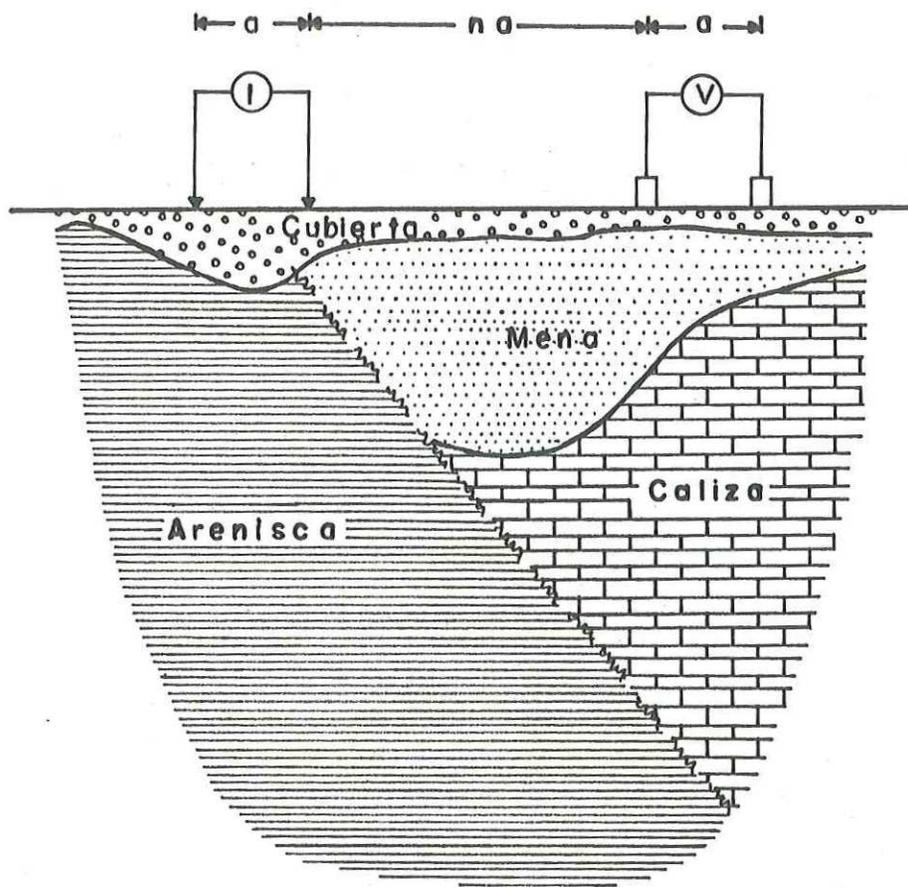


FIGURA 2. Ilustración de la toma de datos de Resistividad y PI empleando el arreglo de dipolo - dipolo.

ambos con separación a entre electrodos. La separación entre los dos electrodos más cercanos de corriente y potencial es na , donde n es un número entero entre 1 y 6.

Existen varias técnicas de interpretación cualitativa que se basan solamente en diferentes presentaciones de datos. No obstante, para hacer una interpretación cuantitativa, es necesario obtener modelos que reproduzcan aproximadamente los datos. Esto puede realizarse ajustando visualmente los datos a curvas patron, o bien utilizando métodos automáticos de inversión.

En la Figura 3 se ilustra gráficamente el proceso de ajuste. En la Figura 3.a se representan datos marcados con símbolos y en la Figura 3.b se muestra un modelo sencillo del subsuelo. Este modelo deberá tener una respuesta (línea continua) de tal forma que ajuste aproximadamente los datos, como se muestra en la parte superior. La desventaja principal de utilizar curvas patron en este proceso de ajuste, es que se requiere por lo general de un gran número de éstas.

En el método inverso, el punto de partida son los datos de campo y el objetivo es encontrar un modelo que los ajuste de acuerdo a un criterio estadístico preestablecido. El problema puede plantearse en términos de un sistema de

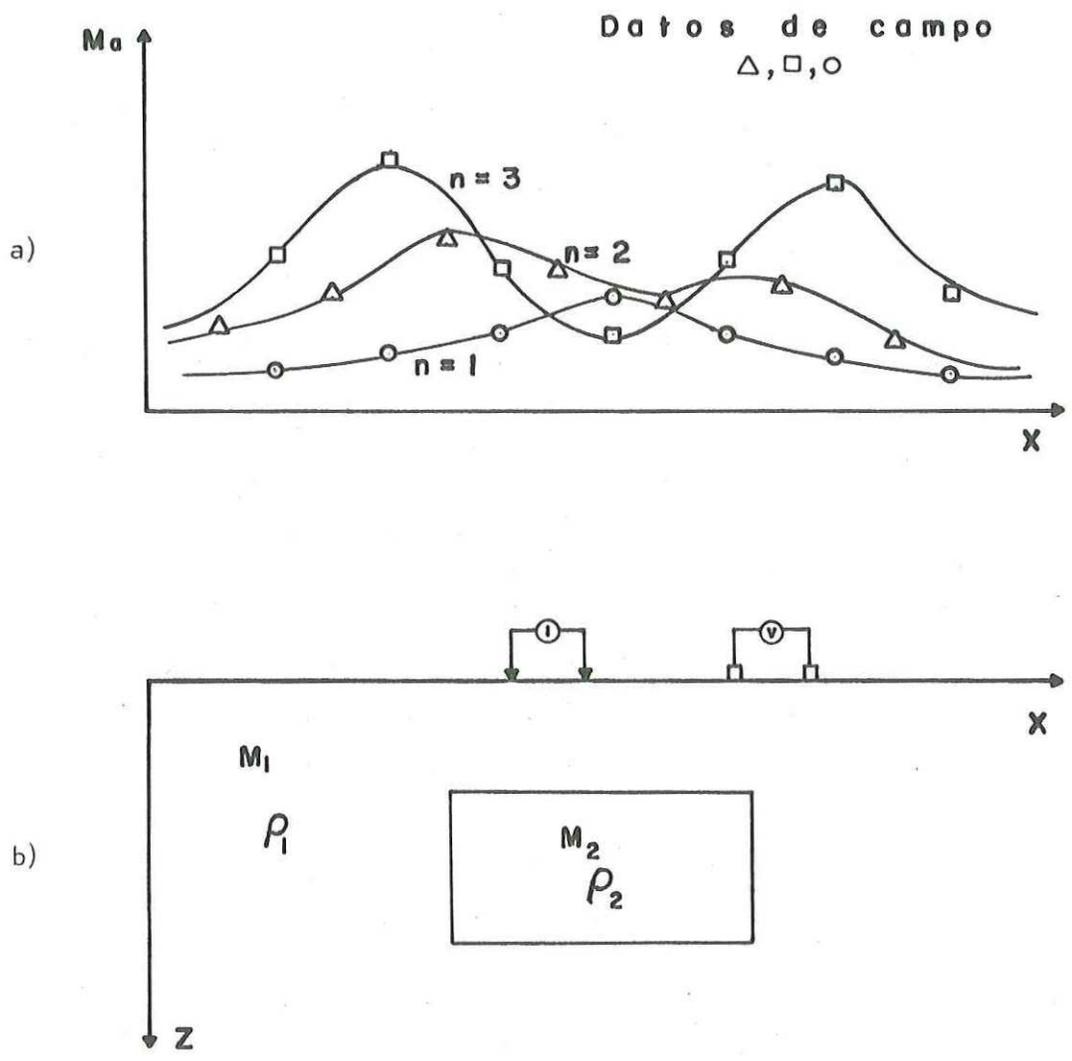


FIGURA 3. Simulación de datos de campo (símbolos), y respuesta - (línea continua) de un modelo sugerido por las observaciones.

ecuaciones, que en principio son no lineales. En este trabajo se linealiza el problema aplicando una aproximación asintótica (Gómez Treviño, 1984), tanto para resistividad como para PI, para el caso tridimensional.

Cuando se emplea el arreglo dipolo-dipolo, los datos se presentan en forma de pseudosección como se muestra en la Figura 4.a, siendo tomados como se ve en la Figura 4.b. Para colocar los datos en el plano se traza una línea a 45 grados con respecto a la horizontal, desde el centro de cada dipolo y dirigida al centro del arreglo. Cada dato se acomoda en el punto de intersección de ambas líneas, para diferentes posiciones y aberturas del arreglo. De esta manera entre más grande sea la separación entre dipolos, más abajo se colocará el dato, dándonos una idea de las propiedades del medio a profundidad.

En el capítulo II se presenta el problema inverso de resistividad y PI para medios continuos, y se obtiene su forma explícita cuando existen pequeños contrastes en la resistividad del medio.

El problema inverso se resuelve en el capítulo III y se hace un análisis estadístico de la solución. Cada aspecto del problema se ilustra con ejemplos.

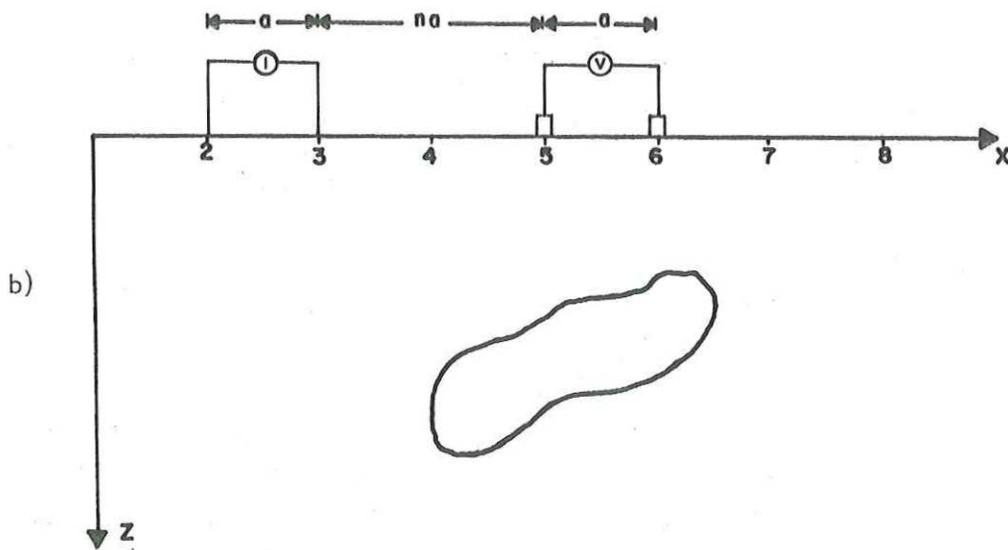
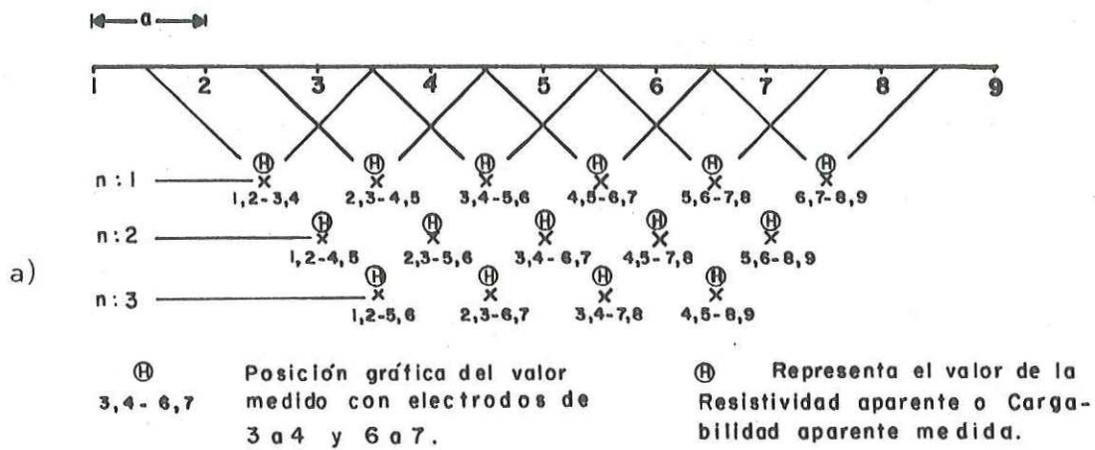


FIGURA 4. Obtención de datos con el arreglo dipolo-dipolo y presentación de los mismos en forma de pseudosección.

Finalmente en el capítulo IV se aplica el método de interpretación desarrollado en este trabajo. Se presentan ejemplos utilizando como datos las respuestas de algunos modelos que han sido estudiados en la literatura. Como una aplicación final se incluye un caso práctico utilizando datos de campo.

II FORMULACION DEL PROBLEMA INVERSO

II.1 INTRODUCCION

La evolución en la tecnología ha proporcionado la capacidad de obtener datos de campo cada vez más precisos, y ésto ha traído como consecuencia un mayor requerimiento de cuantificación de la interpretación de los datos. El método visual de ajuste a curvas patron, como técnica de interpretación, nos da muy poca información acerca de la no unicidad del modelo obtenido. Por otro lado los métodos de inversión sí proporcionan esta información, y permiten obtener resultados satisfactorios.

La formulación del problema inverso puede hacerse desde un punto de vista paramétrico o bien para medios continuos. En este capítulo veremos en qué consiste la formulación paramétrica, y después se presenta la formulación para medios continuos, tanto para resistividad como para PI y enseguida se plantea el problema inverso con esta formulación.

II.2 FORMULACION PARAMETRICA

La formulación paramétrica del problema inverso consiste en obtener información acerca de un número determinado de parámetros lo cuales definen las propiedades y la geometría

de la anomalía en cuestión. En toda técnica de estimación, los datos de campo son el punto de partida, y el objetivo es encontrar un modelo físico que reproduzca estos datos bajo cierto criterio de ajuste y estabilidad.

En la Figura 5 se ilustra cualitativamente la forma de estimación paramétrica. En la Figura 5.a se muestran supuestos datos de campo para dos separaciones de dipolos. En la Figura 5.c se muestra un modelo estimado, donde las incógnitas son las propiedades físicas de los dos medios y las dimensiones y profundidad de la estructura rectangular. En la Figura 5.b se muestra como deben de ajustarse aproximadamente los datos con la respuesta del modelo.

Generalmente en este tipo de problemas el número de datos es mayor que el número de parámetros, y la estimación se realiza linealizando la dependencia no lineal entre datos y modelos. La solución final se encuentra a través de un proceso iterativo utilizando el criterio de mínimos cuadrados. Pelton y otros (1978) y Rijo (1984) han utilizado esta formulación para interpretar datos en términos de cuerpos rectangulares. Para abatir el costo de calcular las respuestas teóricas de los modelos y de sus respectivas matrices de derivadas, ellos utilizan bancos de respuestas previamente calculadas. Si bien esto permite realizar inversiones de una manera relativamente rápida, su desventaja

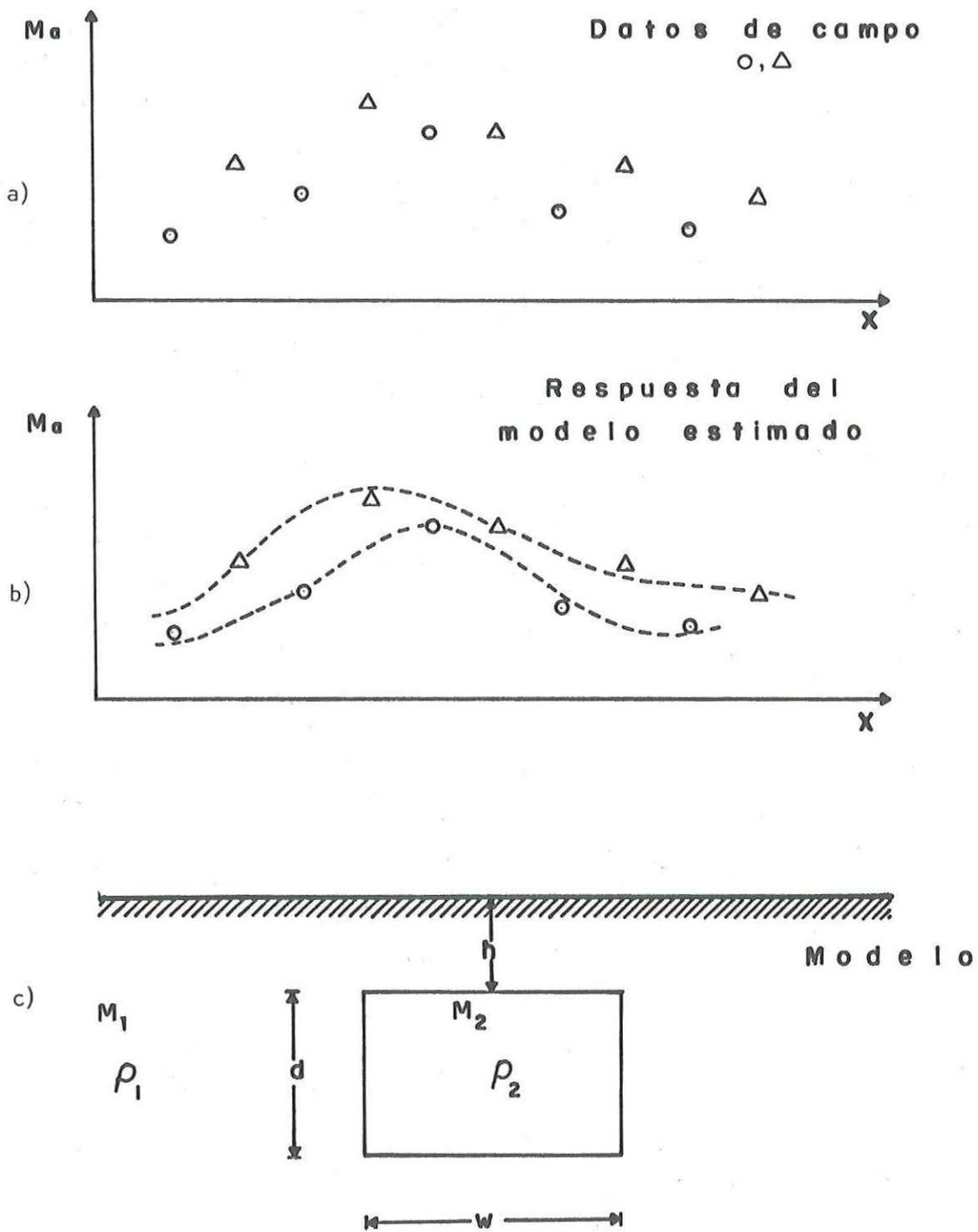


FIGURA 5. Esquematización de la estimación de modelos mediante inversión paramétrica.

consiste en que los bancos de respuestas son de carácter privado. Otra de las limitaciones del método consiste en que solo se consideran cuerpos de forma rectangular con caras horizontales y verticales.

Más flexible es el método utilizado por Smith y Vozoff (1984) y Tripp y otros (1984), quienes consideran bloques de geometrías fijas y hacen variar sus resistividades. Sin embargo, debido a restricciones en el número de estos bloques, el tipo de estructuras que se pueden formar con éstos es por lo general limitado. El origen de estas restricciones es el costo de calcular las respuestas de los modelos en el proceso iterativo.

En general se puede afirmar que los métodos existentes, aunque potentes y relativamente flexibles, no son lo suficientemente económicos y versátiles para ser utilizados en interpretaciones de rutina. Con este fin sería deseable abatir los costos e incrementar el número y tipo de modelos utilizados para interpretar los datos. El presente trabajo tiene como finalidad alcanzar estos dos objetivos aparentemente contradictorios. Para abatir los costos se utilizan formas asintóticas de las ecuaciones y formas analíticas para las derivadas. Por otro lado, para conseguir mayor flexibilidad se considera el problema en términos de distribuciones continuas. De esta manera es posible

construir modelos de formas completamente arbitraria.

II.3 FORMULACION PARA MEDIOS CONTINUOS

La formulación del problema inverso para medios continuos, consiste en plantear éste tal que las incógnitas sean funciones continuas en el espacio. Con esta formulación no es necesario estimar parámetros geométricos (vértices, ángulos de inclinación, espesores, etc.). La formulación para medios continuos es más general que la paramétrica. No obstante, esta formulación tiene el inconveniente de requerir el conocimiento del valor de la función incógnita en una infinidad de puntos, lo que no siempre es posible. En la práctica se discretiza el problema, y la función incógnita se estima en un número finito de puntos.

En esta sección se presenta la formulación para medios continuos de la manera más general, para los problemas de resistividad y PI en tres dimensiones, y también para el caso en el que se emplea una solución asintótica para bajos contrastes en resistividad. Después se plantean los problemas en términos de funciones discretas.

II.3.a CASO GENERAL: CONTRASTES ARBITRARIOS EN RESISTIVIDAD

La resistividad y cargabilidad aparentes asociadas con

un medio compuesto de n regiones con resistividades ρ_i y cargabilidades M_i , se representa según la formulación de Seigel (1959) como

$$\rho_a = \sum_{i=1}^n \rho_i \partial \rho_a / \partial \rho_i \quad (\text{II.1})$$

$$M_a = \sum_{i=1}^n M_i \frac{\rho_i}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_i} \quad (\text{II.2})$$

Estas ecuaciones son válidas para cualquier número de medios y para contraste arbitrario de resistividad.

Gómez Treviño (1986a, 1986b) ha generalizado estas ecuaciones para distribuciones continuas de resistividad y cargabilidad. Una de las ventajas de esta formulación es que las derivadas parciales quedan expresadas en forma analítica. La ecuación para M_a en términos de funciones continuas para el arreglo polo-polo viene dada como

$$M_a = - \int_V \frac{C}{\rho_a I} \bar{\nabla} \phi \cdot \bar{J} M(\bar{r}) dV \quad (\text{II.3})$$

Según la ley de Ohm

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} = -\sigma \bar{\nabla} \phi,$$

y M_a puede escribirse como

$$M_a = \int_V \frac{C}{\rho_a I} \bar{\nabla} \Psi \cdot \sigma \bar{\nabla} \phi M(\bar{r}) dV, \quad (\text{II.4})$$

donde C es un factor geométrico, I la corriente de inyección, y Ψ y ϕ son soluciones de

$$\bar{\nabla} \cdot (\sigma \bar{\nabla} \phi) = -I \delta(\bar{r}_A - \bar{r}) \quad (\text{II.5})$$

y

$$\bar{\nabla} (\sigma \bar{\nabla} \Psi) = -\delta(\bar{r} - \bar{r}_N) \quad (\text{II.6})$$

\emptyset es el potencial eléctrico cuando el electrodo de corriente se coloca en \bar{r}_A , y Ψ es el potencial eléctrico dividido por la corriente cuando la fuente se coloca en la posición del receptor \bar{r}_N .

La expresión de ρ_a para medios continuos empleando el arreglo polo-polo está dada por

$$\rho_a = \frac{C}{I} \int_V \nabla \Psi \cdot \nabla \emptyset \sigma(\bar{r}) dV \quad (II.7)$$

donde C , Ψ y \emptyset significan lo mismo que para la ecuación de M_a .

II.3.b CASO PARTICULAR: CONTRASTES MODERADOS EN RESISTIVIDAD

En esta sección se simplifican las expresiones de M_a y ρ_a para el caso de bajos contrastes en resistividad. Específicamente, se considera un semiespacio de resistividad uniforme para evaluar los términos $\nabla \Psi$ y $\nabla \emptyset$ en las ecuaciones (II.4) y (II.7).

La ecuación que cumple \emptyset es

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \emptyset) = -I \delta(\bar{r}_A - \bar{r}) ,$$

y Ψ satisface

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Psi) = -\delta(\bar{r} - \bar{r}_N) .$$

Considerando en las dos ecuaciones anteriores que $\sigma(\bar{r})$ es una función constante del espacio, se llega a las siguientes expresiones para \emptyset y Ψ

$$\nabla^2 \phi = -2\rho I \delta(\bar{r}_A - \bar{r}) , \quad (\text{II.8})$$

y

$$\nabla^2 \Psi = -2\rho \delta(\bar{r} - \bar{r}_N) \quad .. \quad (\text{II.9})$$

Los electrodos de corriente y potencial se suponen colocados en la superficie de la tierra..

Las ecuaciones (II.8) y (II.9) son ecuaciones de Poisson, y las soluciones para ϕ y Ψ son las siguientes

$$\phi = \frac{I\rho}{2\pi} \frac{1}{|\bar{r}_A - \bar{r}|} , \quad (\text{II.10})$$

y

$$\Psi = \frac{\rho}{2\pi} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_N|} \quad .. \quad (\text{II.11})$$

Aplicando el operador gradiente a ϕ se llega a

$$\nabla \phi = -\frac{\rho I}{2\pi} \frac{(\bar{r}_A - \bar{r})}{|\bar{r}_A - \bar{r}|^3} \quad (\text{II.12})$$

y similarmente

$$\nabla \Psi = -\frac{\rho}{2\pi} \frac{(\bar{r} - \bar{r}_N)}{|\bar{r} - \bar{r}_N|^3} \quad .. \quad (\text{II.13})$$

sustituyendo el producto punto $\nabla \Psi \cdot \nabla \phi$ en la ecuación para M_a

(II.4) se obtiene

$$M_a = \frac{|\bar{r}_N - \bar{r}_A|}{2\pi} \int_V \frac{(\bar{r}_A - \bar{r}) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_N)}{|\bar{r}_A - \bar{r}|^3 |\bar{r} - \bar{r}_N|^3} M(\bar{r}) dv \quad (\text{II.14})$$

donde se ha considerado el factor geométrico C igual a $2\pi |\bar{r}_N - \bar{r}_A|$, siendo $|\bar{r}_N - \bar{r}_A|$ la distancia entre electrodos..

Para encontrar la cargabilidad aparente con la ecuación (II.14) es necesario integrar sobre un volumen V , tan grande

que las partes más alejadas no contribuyan significativamente a la integral. Pero en la práctica por lo general se tiene que el área de estudio trata de una anomalía inmersa en un medio homogéneo. Para estos casos la expresión de M_a puede modificarse de tal forma que solo se integre sobre el volumen de la anomalía, y se le sume la contribución de un semiespacio con cargabilidad M_1 . De esta manera la expresión para M_a queda como

$$M_a = M_1 + \frac{|\bar{r}_N - \bar{r}_A|}{2\pi} \int_V \frac{(\bar{r}_A - \bar{r}) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_N)}{|\bar{r}_A - \bar{r}|^3 |\bar{r} - \bar{r}_N|^3} D(\bar{r}) dv, \quad (\text{II.15})$$

donde $D(\bar{r}) = M(\bar{r}) - M_1$.

El segundo término de (II.15) contribuye únicamente por la diferencia que existe entre el cuerpo anómalo $M(\bar{r})$ y el medio que lo rodea M_1 . Así, la integral es diferente de cero solamente donde $M(\bar{r})$ es diferente de M_1 . Con esta nueva forma de expresar a M_a se reducen considerablemente los cálculos, ya que solo se tiene que integrar sobre el volumen con $M(\bar{r}) \neq M_1$.

De la ecuación (II.15) se puede llegar a conocer la cargabilidad aparente para cualquier arreglo de electrodos, simplemente aplicando el principio de superposición.

De la expresión de ρ_a para medios continuos se deduce que

$$\rho_a = \rho_1 + C \int_V \frac{\nabla\psi \cdot \nabla\phi}{|\rho^2(\bar{r})|} \delta\rho(\bar{r}) dv \quad (\text{II.16})$$

donde ρ_1 es la resistividad del medio homogéneo, y $\delta\rho$ es una perturbación en la resistividad de este medio.

Para presentar esta expresión de una forma más operativa se sustituye en ella los términos $\nabla\psi$ y $\nabla\phi$ de las ecuaciones (II.12) y (II.13), y el factor geométrico (C) se iguala a $2\pi|\bar{r}_N - \bar{r}_A|$, para llegar a

$$\rho_a = \rho_1 + \frac{|\bar{r}_N - \bar{r}_A|}{2\pi} \int_V \frac{(\bar{r}_A - \bar{r}) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_N)}{|\bar{r}_A - \bar{r}|^3 |\bar{r} - \bar{r}_N|^3} \delta\rho(\bar{r}) dv \quad (\text{II.17})$$

Esta fórmula es válida para pequeños contrastes, esto es, para $\delta\rho(\bar{r})$ pequeña. A continuación se hace un análisis de la utilidad de la ecuación para ρ_a .

Cambios grandes de $\delta\rho(\bar{r})$ en (II.17) producirán cambios grandes en ρ_a , cosa que no es cierta en la realidad, y por lo tanto esta fórmula es válida para contrastes muy pequeños solamente. Con el fin de incrementar el rango de utilidad de ésta, se sustituye el factor $\delta\rho(\bar{r})$ por el siguiente

$$2\rho_1 \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 + \rho_1}$$

Este factor tiende a $\delta\rho$ cuando ρ_1 se aproxima a ρ_2 y tiende a $2\rho_1$ cuando $\delta\rho$ es muy grande. Este factor puede escribirse como $2\rho_1 K$, donde K es el coeficiente de reflexión. De esta forma se aprecia más claro el uso de este término, ya que la experiencia y resultados teóricos nos indican que ρ_a depende

como ρ_1 mas una perturbación que es aproximadamente proporcional a K , y no a $\delta\rho$ como en la ecuación (II.17). Por esta razón y considerando que las mediciones reales de resistividad aparente tienen siempre un porcentaje de error (Aprox. 10% a 15%), es muy factible que la sustitución de $2\rho_1 K$ por $\delta\rho$, aumente el rango de utilidad de la expresión para ρ_a . Esta adquiere la nueva forma

$$\rho_a = \rho_1 + \frac{|\bar{r}_N - \bar{r}_A|}{\pi} \int_V \frac{(\bar{r}_A - \bar{r}) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_N)}{|\bar{r}_A - \bar{r}|^3 |\bar{r} - \bar{r}_N|^3} \rho_1 K(\bar{r}) dv \quad (II.18)$$

La aproximación de ρ_a (II.18) y la fórmula de M_a para un semiespacio (II.15), ya ha sido utilizada para resolver el problema directo (Gómez Treviño, 1984; Cavazos Garza, 1985), y se ha encontrado que ambas proporcionan valores satisfactorios cuando se tiene un contraste de 1 a 5 o menor, esto es, K en el rango $[-0.66, 0.66]$.

Cabe recordar que las fórmulas para M_a (II.15) y ρ_a (II.18) tienen validez solo para bajos contrastes en resistividad, por lo que su uso estará restringido a estos casos. A pesar de esta limitación las expresiones de M_a y ρ_a podrán ser ampliamente utilizadas, debido a que en la naturaleza se presentan con bastante frecuencia este tipo de contrastes.

Hemos llegado a expresar ρ_a y M_a en términos de funciones continuas y factores geométricos. De esta manera,

el problema inverso de PI con bajos contrastes en resistividad consiste en estimar M_1 y la función $D(\bar{r})$, y en resistividad ρ_1 y la función incógnita $\rho_1 K(\bar{r})$. En ambos casos se trata de resolver ecuaciones integrales de Fredholm de la primera clase.

II.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA INVERSO

A continuación se plantea el problema inverso de resistividad y PI en términos matriciales, empleando el arreglo dipolo-dipolo.

Aplicando el principio de superposición a las ecuaciones (II.15) y (II.18) se encuentran las siguientes expresiones de M_a y ρ_a , para el arreglo mencionado.

$$M_a = M_1 + \frac{a(n)(n+1)(n+2)}{4\pi} \int_V (R_{AN} - R_{BN} - R_{AM} + R_{BM}) D(\bar{r}) dv \quad (II.19)$$

y

$$\rho_a = \rho_1 + \frac{a(n)(n+1)(n+2)}{2\pi} \int_V (R_{AN} - R_{BN} - R_{AM} + R_{BM}) \rho_1 K(\bar{r}) dv, \quad (II.20)$$

donde

$$R_{ij} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_j)}{|\bar{r}_i - \bar{r}|^3 |\bar{r} - \bar{r}_j|^3}$$

En el factor R_{ij} los subíndices indican los electrodos involucrados, los cuales pueden ser A y B para inyectar corriente, mientras que M y N para medir el potencial.

Para resolver el problema inverso es conveniente

transformar las ecuaciones de ρ_a y M_a de continuas a discretas, para presentar el problema en forma matricial y solucionarlo numéricamente. Esto se logra cambiando el signo de integral por sumatoria y dividiendo en partes pequeñas (ΔV_j) al volumen V de integración.

En forma discreta las expresiones de M_a y ρ_a toman la forma

$$M_{ai} = M_1 + \sum_{j=1}^1 G_i(\bar{r}_j) D(\bar{r}_j) \Delta V_j \quad (\text{II.21})$$

y

$$\rho_{ai} = \rho_1 + \sum_{j=1}^1 2G_i(\bar{r}_j) \rho_1 K(\bar{r}_j) \Delta V_j \quad (\text{II.22})$$

Pensando en el problema inverso las ecuaciones (II.21) y (II.22) son muy semejantes, de hecho la única diferencia radica en el significado de la función incógnita. Mientras que en PI la incógnita es M_1 y $D(\bar{r})$, en resistividad es ρ_1 y $2\rho_1 K(\bar{r})$. Las derivadas de Fréchet están dadas por el factor $G_i(\bar{r}_j)$ y son idénticas para ambos casos. Con esta semejanza, el problema inverso de PI se plantea de la misma forma que el de resistividad. Por lo tanto, en lo subsiguiente solo se especificará un problema de los dos y se entenderá que el otro es igual.

La ecuación (II.21) tiene la forma de una ecuación de Fredholm de primera clase discretizada. Por ende la estimación de M_1 y $D(\bar{r})$ es un problema lineal, el cual se expresa en forma matricial como sigue

$$\underline{ma} = \underline{A} \underline{m} , \quad (\text{II.23})$$

donde \underline{ma} es el vector de datos de cargabilidad aparente, \underline{m} es la función incógnita ($M_1 + D(\bar{r})$), y \underline{A} es la matriz de derivadas de las mediciones (\underline{ma}) con respecto a las incógnitas (\underline{m}).

En forma no compactada la ecuación (II.23) se escribe

$$\begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \\ ma_3 \\ ma_4 \\ \vdots \\ ma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial ma_1}{\partial m_1} & \frac{\partial ma_1}{\partial m_2} & \frac{\partial ma_1}{\partial m_3} & \frac{\partial ma_1}{\partial m_4} & \dots & \frac{\partial ma_1}{\partial m_1} \\ 1 & \frac{\partial ma_2}{\partial m_1} & \frac{\partial ma_2}{\partial m_2} & \frac{\partial ma_2}{\partial m_3} & \frac{\partial ma_2}{\partial m_4} & \dots & \frac{\partial ma_2}{\partial m_1} \\ 1 & \frac{\partial ma_3}{\partial m_1} & \frac{\partial ma_3}{\partial m_2} & \frac{\partial ma_3}{\partial m_3} & \frac{\partial ma_3}{\partial m_4} & \dots & \frac{\partial ma_3}{\partial m_1} \\ 1 & \frac{\partial ma_4}{\partial m_1} & \frac{\partial ma_4}{\partial m_2} & \frac{\partial ma_4}{\partial m_3} & \frac{\partial ma_4}{\partial m_4} & \dots & \frac{\partial ma_4}{\partial m_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{\partial ma_k}{\partial m_1} & \frac{\partial ma_k}{\partial m_2} & \frac{\partial ma_k}{\partial m_3} & \frac{\partial ma_k}{\partial m_4} & \dots & \frac{\partial ma_k}{\partial m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \\ m_1 \end{pmatrix}$$

Aquí M_1 está dada por $m(1)$ y $D(\bar{r}_j) = m(j)$ para $i > 1$. Las derivadas parciales se evalúan analíticamente utilizando el integrando en II.19 y II.20.

Mediante la ecuación (II.23) estamos en condiciones de estimar la cargabilidad en un número finito de elementos de volumen. Debido a las limitaciones que se tienen con los sistemas de cómputo (memoria limitada), se restringe la dimensionalidad del problema considerando que la cargabilidad no varía dentro de ciertos límites en una dirección horizontal (Y). De esta manera se estima la propiedad solamente en una sección transversal. La longitud de cada uno de los elementos de la sección transversal estimada, es igual a la que se utilice para generar las derivadas parciales con respecto a cada uno de estos elementos. Así, a cada incógnita le puede corresponder una longitud diferente, excepto a M_1 que no se le puede asignar una longitud ya que es la cargabilidad del medio que rodea al volumen de estimación.

En este trabajo se presentan resultados de inversión de datos considerando 97 incógnitas. De éstas, una es M_1 y las 96 restantes se distribuyen en una sección transversal en forma de rejilla. Esta tiene una dimensión de $6a$ en la dirección X y $4a$ con la profundidad, siendo a la abertura de un dipolo del arreglo. Cada incógnita representa el valor de la función en el centro de un cuadrado de $0.5a$ de lado, con lo que se tienen 12 incógnitas en la dirección X y 8 a profundidad. Esto se ve más claramente con la ayuda de la Figura 6.a, donde se muestra la rejilla con sus dimensiones y

distribución de incógnitas. En la Figura 6.b se muestra una vista de planta para ilustrar la longitud de la anomalía.

En todos los resultados que se presentan en este trabajo se considera la misma longitud para todas las incógnitas, aunque ésta puede variar de problema a problema.

Sección

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

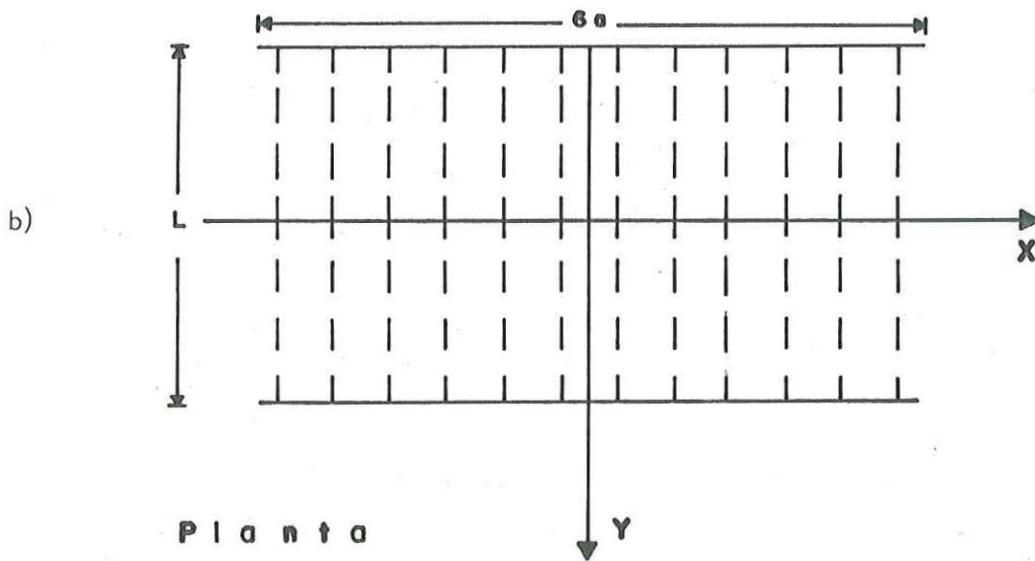
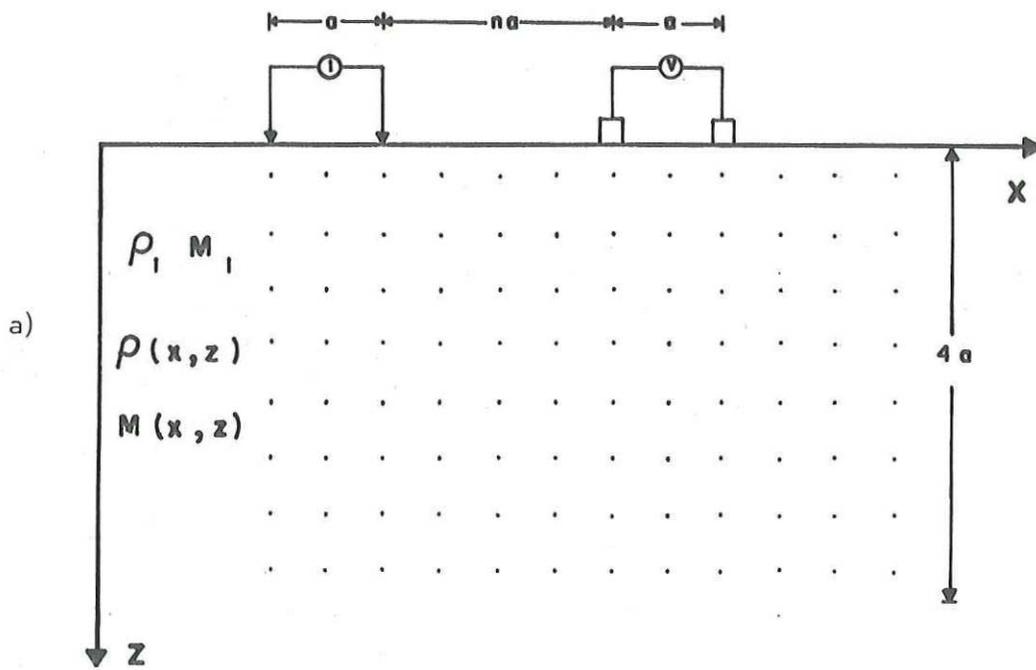


FIGURA 6. Vista en sección y en planta de la geometría del modelo a estimar.

III SOLUCION AL PROBLEMA INVERSO

III.1 INTRODUCCION

Existen varios métodos para invertir datos de resistividad y PI en términos de cuerpos anómalos de dos y tres dimensiones (Pelton et al., 1978; Petrick et al., 1981; Smith y Vozoff, 1984; Tripp et al., 1984; Rijo, 1984). Estos métodos se basan en diversas soluciones numéricas del problema directo que por lo general, requieren de mucho tiempo de cómputo, sobre todo para calcular las derivadas de las mediciones con respecto a los parámetros que definen la anomalía. Para aminorar en parte esta dificultad se utilizan las aproximaciones para M_a y ρ_a obtenidas en la sección anterior, en el cálculo de la respuesta del modelo y la matriz de derivadas. Estas aproximaciones están basadas en una formulación para medios continuos, y su finalidad es desarrollar un método de inversión que pueda utilizarse en interpretaciones de rutina.

En problemas de inversión, algunos autores han empleado diferentes algoritmos de estimación como el de "Ridge Regression" (Pelton et al, 1978; Inman, 1975; Rijo et al, 1977; Petrick et al, 1977). El algoritmo empleado en este trabajo para resolver el problema inverso es el de Descomposición en Valores Singulares (DVS), y aunque el

problema es lineal se hace una segunda iteración empleando un artificio matemático, con el fin de afinar la solución.

III.2 CONSTRUCCION DE LA SOLUCION

La solución del problema inverso de cargabilidad y resistividad tratado en este trabajo, consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales proporcionadas por las fórmulas (II.21) y (II.22) respectivamente.

Se emplearon tres algoritmos de estimación diferentes para probar cual funcionaba mejor. Estos son: Mínimos Cuadrados Ponderados, Mínimos Cuadrados Estabilizado y Descomposición en Valores Singulares. Los tres estimadores obtienen buenos resultados cuando los datos carecen de ruido. Mínimos Cuadrados Ponderados proporciona modelos altamente oscilantes cuando se le añade menos del 1% de ruido a los datos, mientras que las soluciones obtenidas en estas circunstancias con Mínimos Cuadrados Estabilizados, son muy rígidas o muy oscilantes sin poder llegar a soluciones satisfactorias. Por lo tanto estos dos métodos se descartaron.

El algoritmo de Descomposición en Valores Singulares fue probado con un 10% de ruido y se llegó a buenas soluciones, por lo que se seleccionó para resolver el problema inverso

tratado en esta tesis.

III.2.1 ESTIMADOR "DVS"

Nuestro problema se expresa matricialmente de la siguiente forma:

$$\underline{m}a = \underline{A}m, \quad (\text{III.1})$$

donde el vector $\underline{m}a$ ($N \times 1$) representa los datos, el vector \underline{m} ($M \times 1$) las incógnitas y \underline{A} ($N \times M$) es la matriz de coeficientes. Para estimar \underline{m} se utiliza la inversa generalizada de \underline{A} (Lanczos, 1961). De esta manera la estimación de \underline{m} queda expresada como

$$\underline{m} = \underline{V} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{U}^T \underline{m}a, \quad (\text{III.2})$$

donde \underline{V} ($N \times P$) es la matriz que contiene los P eigenvectores asociados a los P eigenvalores diferentes de cero de la matriz $\underline{A}^T \underline{A}$, de tal manera que

$$\underline{A}^T \underline{A} \underline{v}_i = \lambda_i^2 \underline{v}_i, \quad i=1, \dots, P$$

Similarmente \underline{U} ($N \times P$) es la matriz que contiene los P eigenvectores de la matriz $\underline{A} \underline{A}^T$, de tal manera que

$$\underline{A} \underline{A}^T \underline{u}_j = \lambda_j^2 \underline{u}_j, \quad j=1, \dots, P$$

$\underline{\Lambda}$ es la matriz diagonal de eigenvalores común a ambas factorizaciones.

Para encontrar la solución \underline{m} es necesario decidir cuantos eigenvectores considerar para construir \underline{V} , y \underline{U}^T , porque por lo general los eigenvalores más pequeños

contribuyen solamente produciendo oscilaciones en la solución. Por esta razón es necesario establecer un compromiso entre ajuste y estabilidad, a fin de encontrar una solución satisfactoria.

La ventaja que se obtiene al utilizar el estimador DVS estriba en su flexibilidad en el cálculo de la solución ya que ésta es función del número de eigenvalores que se tomen. Así, cuando se obtiene una solución que cumple con un criterio de ajuste establecido, se interrumen los cálculos y nos quedamos con esta estimación del vector \underline{m} .

En este trabajo se presentan resultados de inversión de datos con y sin ruido, para una y dos iteraciones, por lo que se requiere de un criterio de ajuste para cortar la solución en cada caso. Cuando se considera ruido en los datos, éstos se normalizan como es costumbre por su correspondiente desviación estándar. El mismo operador aplicado a \underline{ma} se emplea para normalizar la matriz $\underline{\Lambda}$.

Para determinar un criterio de ajuste o de corte se hicieron pruebas con datos sintéticos. Estos se invirtieron y se observó para que orden de la descomposición se tenía la mejor solución. Lo último se sabe comparando la solución estimada con el modelo hipotético. Una vez obtenido el número de eigenvalores que se requiere para lograr la mejor

estimación, se observa el ajuste de los datos con los valores calculados. Este proceso se realizó para varios modelos, con y sin ruido, utilizando una iteración y luego dos. Después de estas pruebas se encontró que, para el caso de datos sin ruido y empleando solamente una iteración, la mejor solución se tiene cuando el factor

$$|\underline{r}|/N = 1/N \left[\sum_{i=1}^n (Y_{obs_i} - Y_{cal_i})^2 \right] \quad (III.3)$$

es mínimo, donde Y_{obs} son los datos observados, Y_{cal} la respuesta del modelo estimado, N el número de datos y $|\underline{r}|$ la magnitud del residuo.

Cuando los datos contienen ruido, la situación es muy diferente. Se encontró que la mejor solución es cuando se tiene el siguiente ajuste en los datos:

$$\chi^2 = \frac{1}{N-k} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(Y_{obs_i} - Y_{cal_i})^2}{E_{y_i}^2} \right]^{1/2} \approx 1 \quad (III.4)$$

donde k es el número de eigenvalores que se emplean para encontrar la solución, y E_y es la desviación estándar de los datos. Por la característica de este término se dice que es un criterio de ajuste Ji cuadrada (χ^2), que nos indica seleccionar la solución cuando la diferencia cuadrática entre los datos y los valores calculados $(Y_{obs_i} - Y_{cal_i})^2$, es en general del orden del error observacional de los datos al cuadrado ($E_{y_i}^2$). Con el criterio (III.4) nos aseguramos de que la solución seleccionada no ajuste a los datos más allá de los errores de éstos.

Cuando se utilizan dos iteraciones, en la primera se corta la solución según los criterios mencionados, y en la última, para el caso de datos sin ruido se emplea el mismo criterio, mientras que para el caso de datos con ruido la solución se corta cuando el factor (III.4) es mínimo, entendiéndose ahora como k el número de eigenvalores empleados en la segunda iteración.

En la siguiente sección se muestran algunas pruebas de las que se hicieron para determinar los criterios de ajuste.

Un aspecto importante que debe considerarse para lograr una buena estimación, es la discretización adecuada de los modelos para el cálculo del problema directo. Entre más pequeños sean los diferenciales de volumen, más exacto será el cálculo de la respuesta. Sin embargo, hay que hacer notar que tampoco es conveniente hacer los diferenciales muy pequeños porque el trabajo numérico aumenta considerablemente. Por lo tanto, es necesario seleccionar un tamaño adecuado para el diferencial de volumen, que no sea ni muy pequeño ni muy grande, para ello llevamos a cabo una prueba de convergencia.

En la Figura 7.a se colocan en forma de pseudosección valores de cargabilidad aparente ($M_a\%$) para seis aberturas ($n=1,2,3,4,5$ y 6), correspondientes al modelo trazado en la

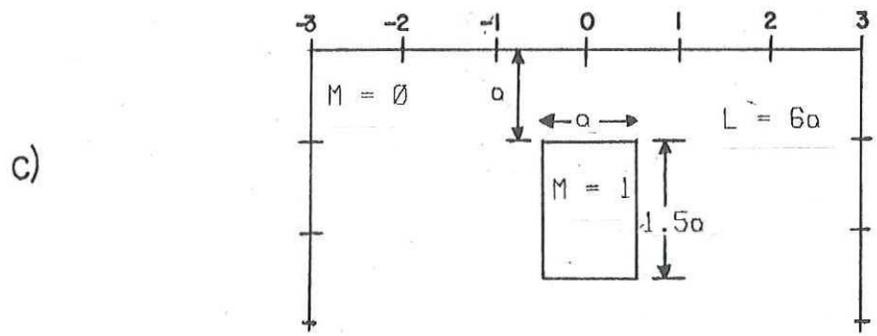
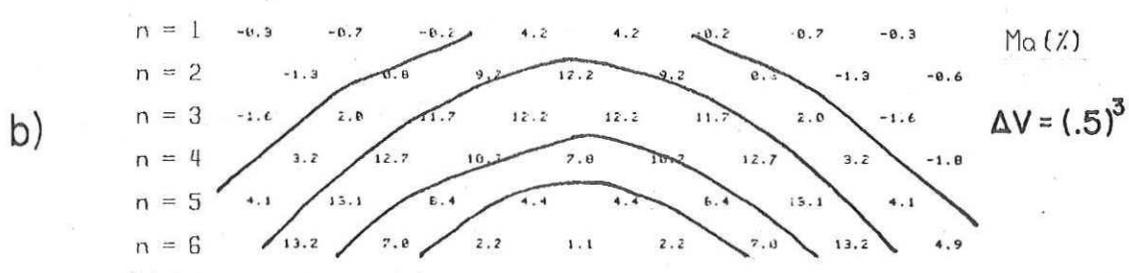
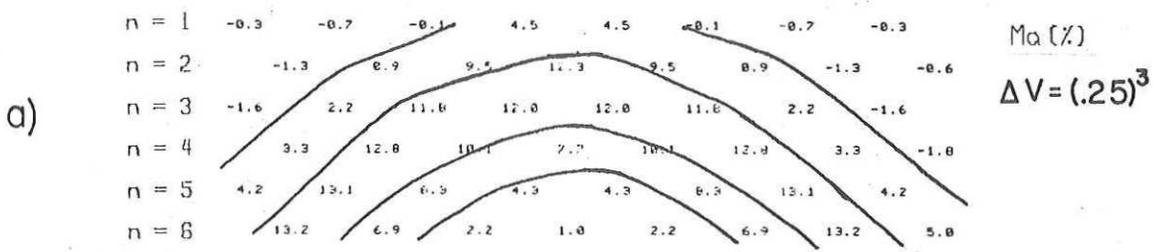


Fig.7.- Prueba de convergencia. a) Respuesta calculada discretizando el modelo con cubos de 0.25a de lado, b) respuesta calculada discretizando el modelo con cubos de 0.5a de lado, c) modelo hipotético.

Figura 7.c, discretizando su volumen con cubos de $0.25a$ de lado, donde a es la abertura dipolar. En la Figura 7.b se muestran datos similares excepto que ahora los cubos son de $0.5a$ de lado. Comparando las dos seudosecciones se observa que no existe una diferencia significativa entre ellas, por lo que no tiene caso discretizar modelos con cubos de arista menor que $0.5a$. Todas las respuestas calculadas en este trabajo, se hicieron discretizando los cuerpos con cubos de $0.5a$ de lado.

III.2.1.a ESTIMADOR "DVS": DATOS SIN RUIDO

En este apartado se muestran resultados de la inversión de datos de cargabilidad aparente sin ruido. También se hace un cálculo del número de aberturas necesarias para llegar a una buena estimación. Para este propósito se emplean los datos de M_a sin ruido de la Figura 7.b, correspondientes al modelo que está bajo ésta, al que se le llamará modelo 1.

Se invirtieron los datos para $n=1$ con 8 mediciones, y se estimó el modelo que se encuentra en la Figura 8.c, sobre el que se han trazado contornos de cargabilidad. En las Figuras 8.a y 8.b se muestran los datos y los valores de $M_a\%$ calculados. Los datos y los valores calculados son idénticos y el parámetro M_1 está muy bien estimado. No obstante la anomalía se concentra en la superficie y sus valores son

a) $n = 1$ -0.3 -0.7 -0.2 4.2 4.2 -0.2 -0.7 -0.3
Ma (%) obs

b) $n = 1$ -0.3 -0.7 -0.2 4.2 4.2 -0.2 -0.7 -0.3
Ma (%) cal

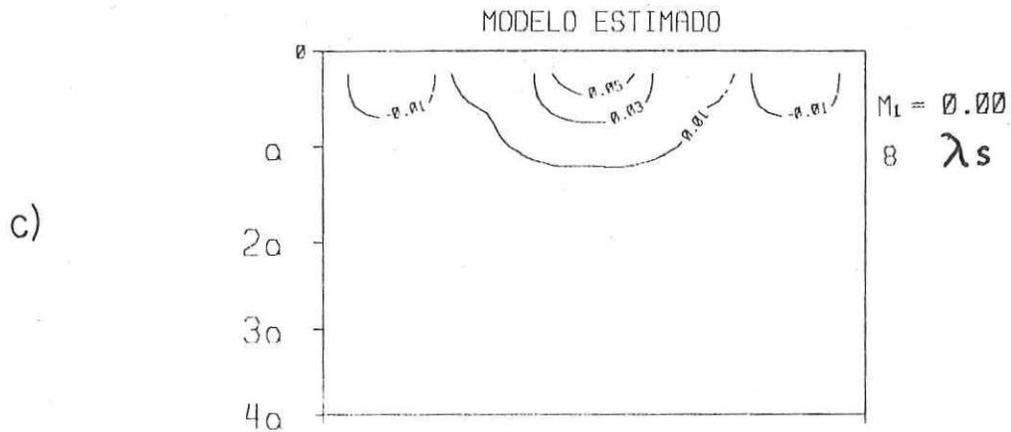


Fig.8.- Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 8 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.

demasiado pequeños. Se sigue el mismo procedimiento para estimar modelos empleando datos con $n = 2, 3, 4, 5$ y 6 , y los resultados se muestran igual que para el caso de $n=1$, en las Figuras 9 a la 13 respectivamente. Todos los modelos estimados reproducen muy bien los datos y la estimación de M_1 es muy buena.

Al observar los modelos estimados se aprecia como éstos van mejorando gradualmente a medida que se emplean más aberturas simultáneamente. Cuando se utilizan 5 aberturas (Figura 12) se obtiene una solución bastante parecida al modelo hipotético de la Figura 7. La estimación al agregar $n=6$ (Figura 13) adquiere una pequeña tendencia hacia la oscilación y pierde simetría; de cualquier manera puede considerarse como mejor estimación a esta última. Dado que la solución mejoró muy poco al incluir $n=6$, ya no se hicieron pruebas con mayor número de aberturas.

En lo que sigue todas las inversiones se efectuaron empleando 6 aberturas ($n=1,2,3,4,5$ y 6) con ocho mediciones en cada caso. Ahora invocamos otro modelo al cual denotaremos como modelo 2, el cual se muestra en la Figura 14, junto con su pseudosección de $M_a\%$. El modelo corresponde a un dique inclinado.

Los datos de M_a sin ruido del modelo 2 se invirtieron

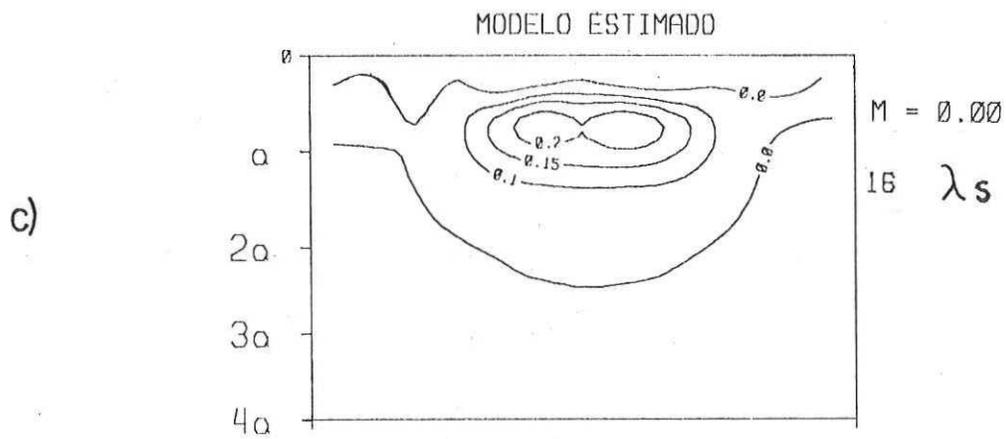
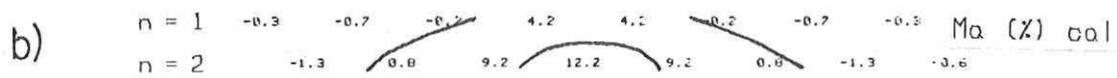
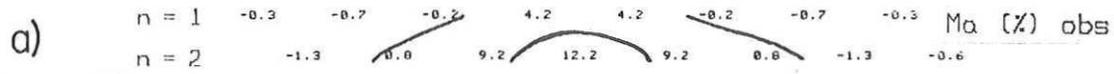


Fig.9.- Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 16 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.

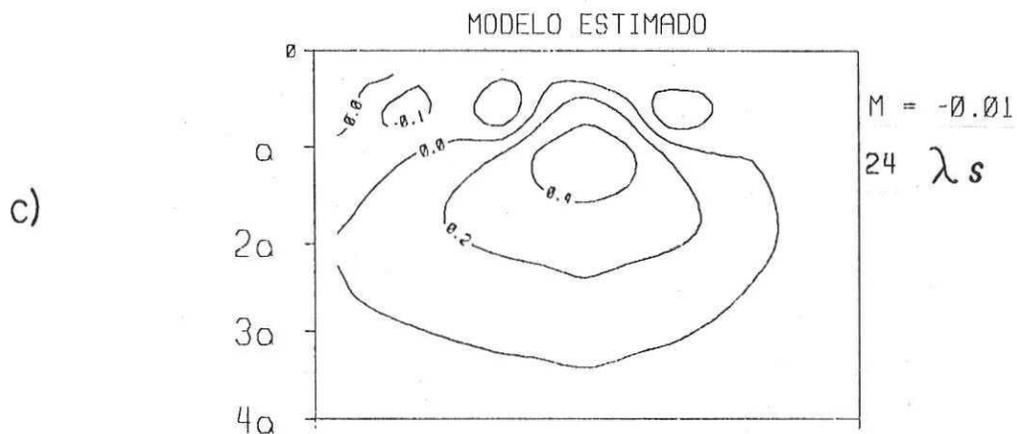
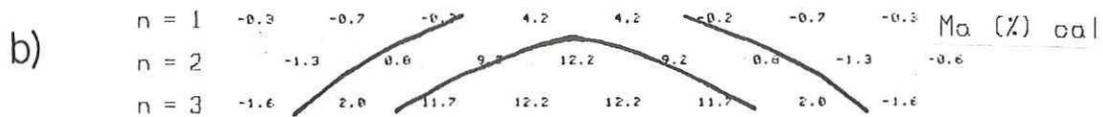
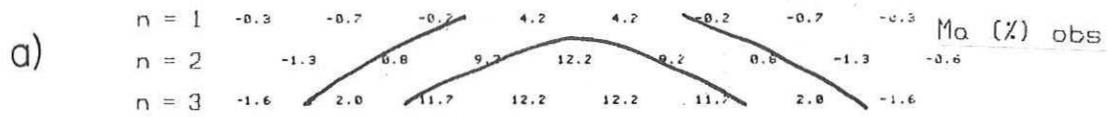


Fig.10.- Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 24 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.

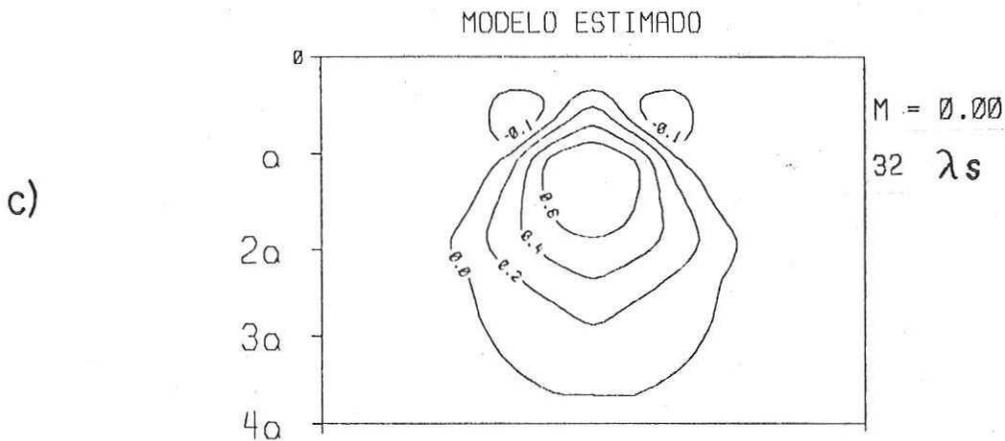
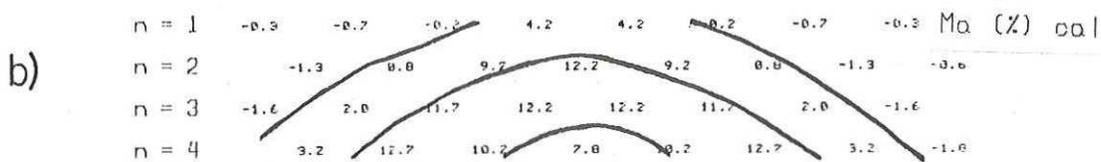
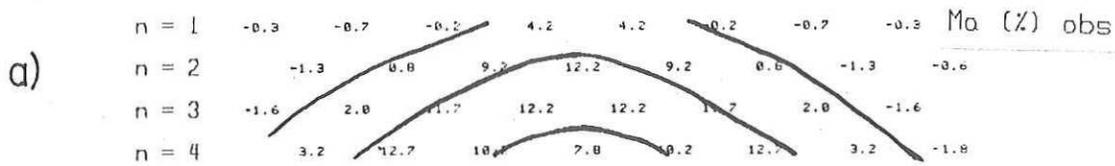


Fig.11.- Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 32 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.

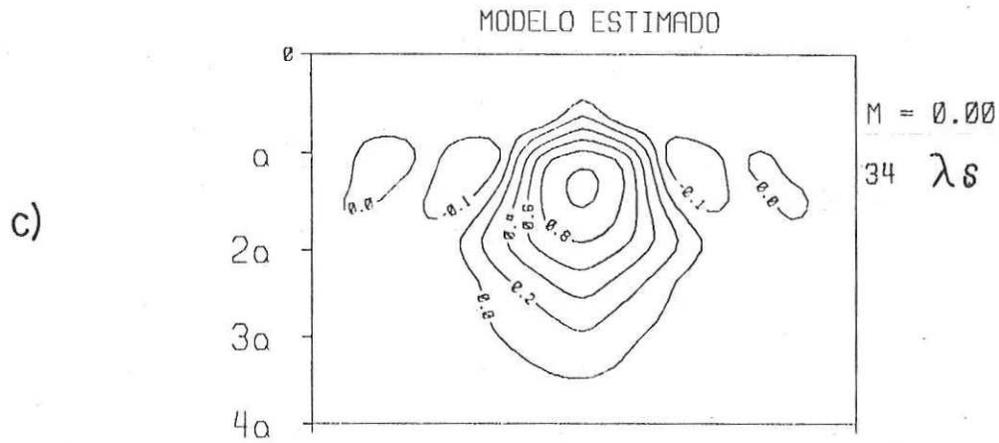
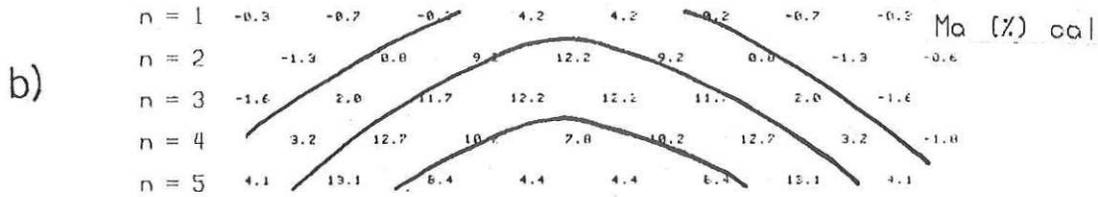
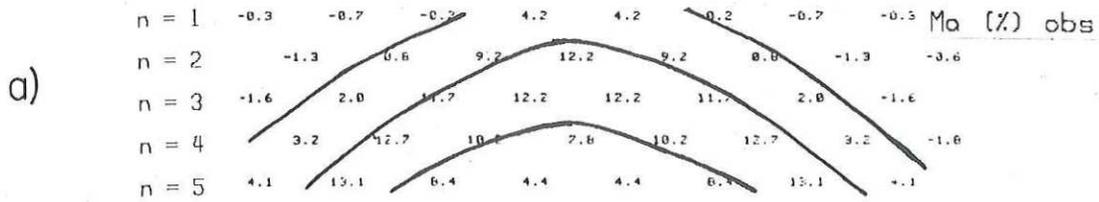


Fig.12.- Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 40 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.

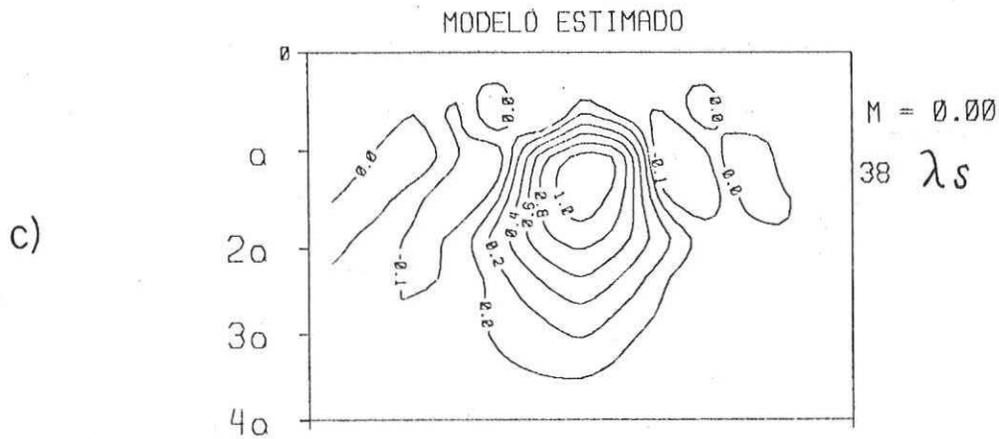
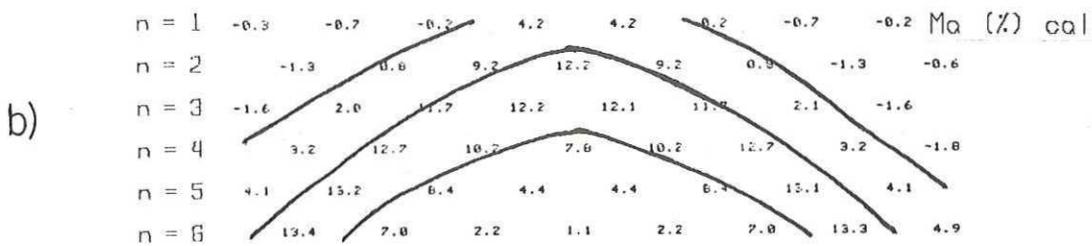
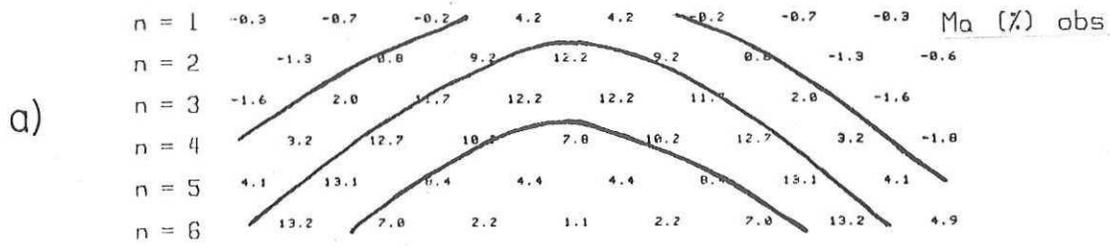
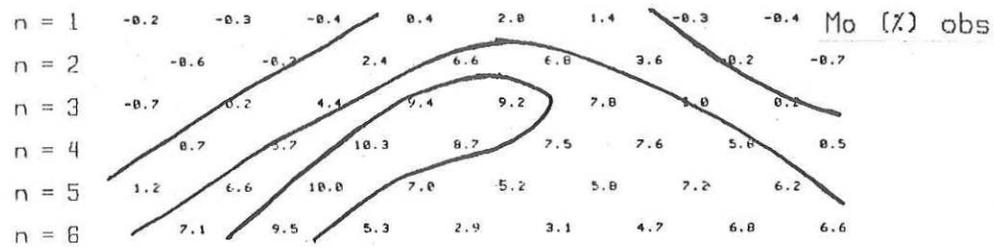


Fig.13.- Estimación correspondiente al modelo 1 empleando 48 datos. a) datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.

a)



b)

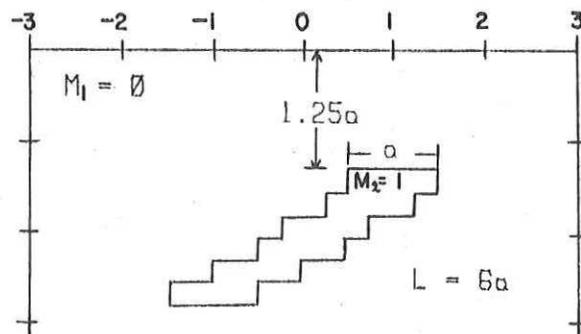


Fig.14.- a) Seudosección de M_a (%) para seis aberturas dipolares diferentes, b) modelo hipotético correspondiente.

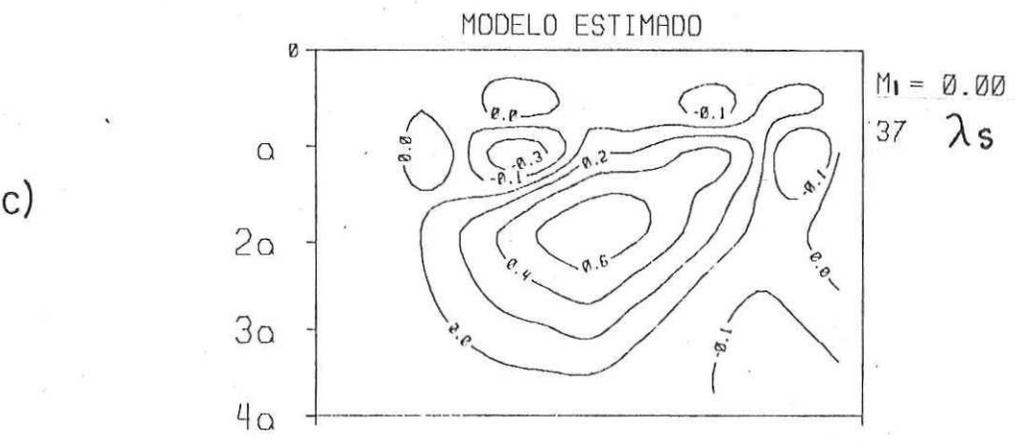
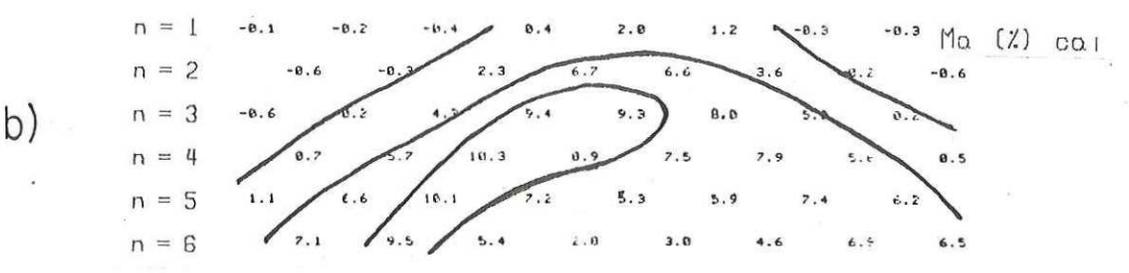
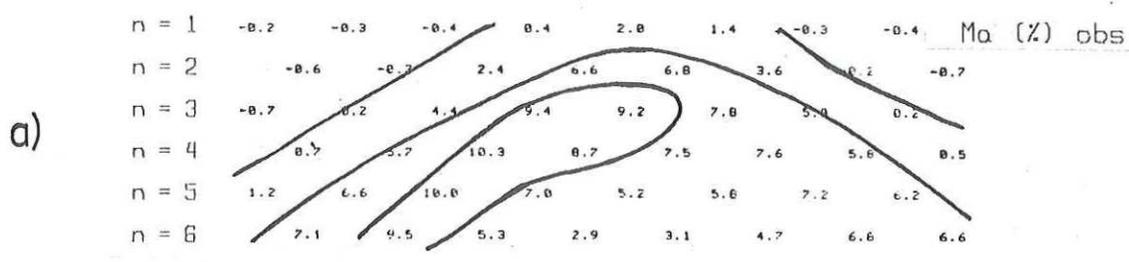


Fig.15.- Estimación del modelo 2 a partir de datos sin ruido.
a) Datos, b) valores calculados, c) modelo estimado.

obteniendo los resultados mostrados en la Figura 15. El ajuste entre datos y respuesta del modelo estimado es bueno, como puede verse en la Figura 15. El modelo estimado representa una versión un tanto difusa del dique inclinado.

En todos los modelos estimados que se han presentado, se emplearon datos sin ruido y por lo tanto se ha utilizado el criterio de corte mencionado anteriormente, el cual establece que la solución se escoge cuando el orden de la descomposición es tal que es mínimo el factor (III.3). Siguiendo este criterio, se requirieron de 38 eigenvalores para la estimación del modelo 1 y 37 para la del modelo 2. En la Figura 16 se muestra el comportamiento de $|\underline{x}|/N$ para ambos modelos. Además en estas gráficas se traza la magnitud del valor singular (λ) con respecto al orden de la descomposición, donde se observa que esta magnitud decae aproximadamente 4 ordenes de magnitud para que $|\underline{x}|/N$ sea mínimo.

III.2.1.b ESTIMADOR "DVS": DATOS CON RUIDO

La inversión de datos sin ruido proporciona modelos que son muy semejantes a los reales. Pero debido a diversas causas las mediciones de campo siempre tienen error, y la inversión de éstas se torna un tanto más complicada.

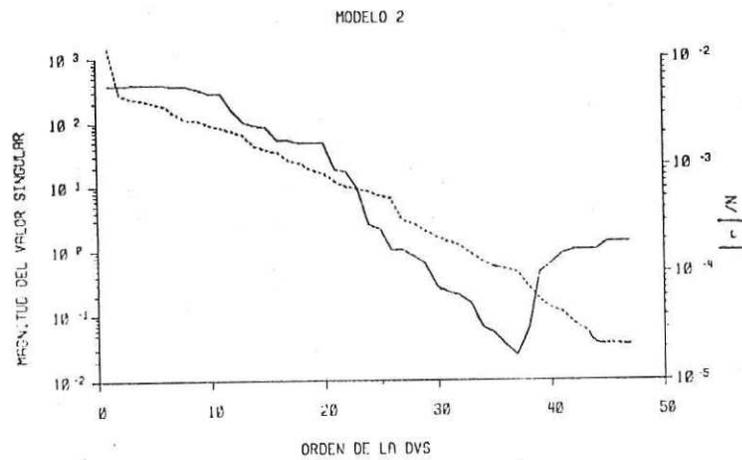
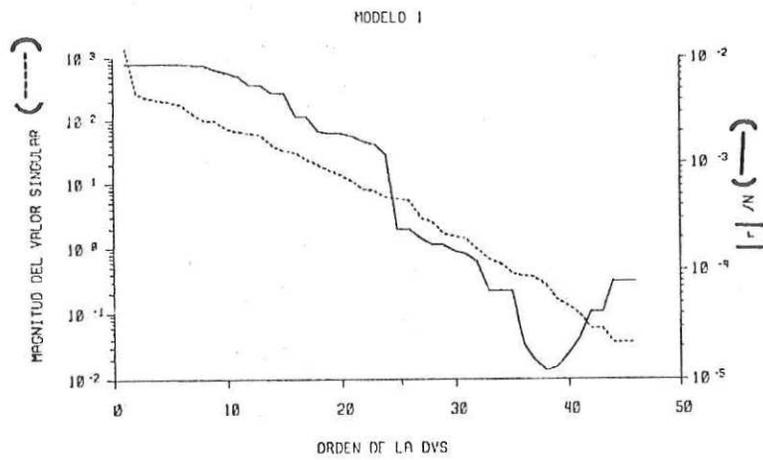


Fig.16.- Gráficas de la magnitud del valor singular (λ) y del residuo ($|r|/N$) contra el orden de la descomposición, correspondientes a la inversión de datos sin ruido de los modelos 1 y 2.

La gran diferencia entre estimaciones usando datos exactos y con ruido, es que esta última no debe de ajustar los datos con más precisión que la requerida por el error observacional. De lo contrario se estarían estimando modelos que simularían la respuesta ocasionada por el ruido, por lo que se requeriría que fuesen oscilantes, lo cual no sería aceptable físicamente.

El criterio Ji cuadrada (III.4) nos da una medida global del ajuste, y cuando es del orden de la unidad indica que la desviación media cuadrática entre los datos y los valores calculados es aproximadamente igual a la varianza media de las mediciones.

Para ilustrar el efecto del ruido en la estimación, a las respuestas de los modelos 1 y 2 se les añadió un 10% de ruido aleatorio. El comportamiento de χ^2 para cada uno de los casos se muestra en la Figura 17. Con el fin de evitar un sobre ajuste en los valores pequeños de \underline{m}_a , se definió un valor mínimo de la desviación estándar para éstos. El valor mínimo fué de 0.01 en algunos casos y hasta 0.02 en otros.

Cuando $\chi^2 \gg 1$ el modelo estimado es demasiado suave, si $\chi^2 \ll 1$ el modelo es demasiado oscilante, mientras que para $\chi^2 \simeq 1$ éste se asemeja mejor al modelo hipotético. Este efecto lo podemos ver en las Figuras 18 y 20, donde se

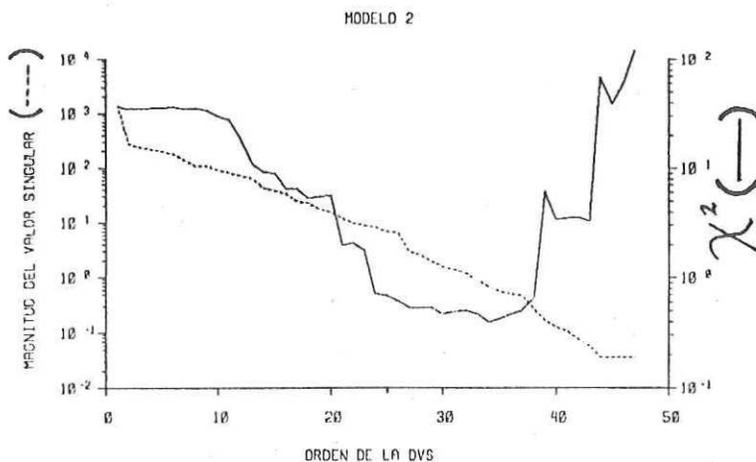
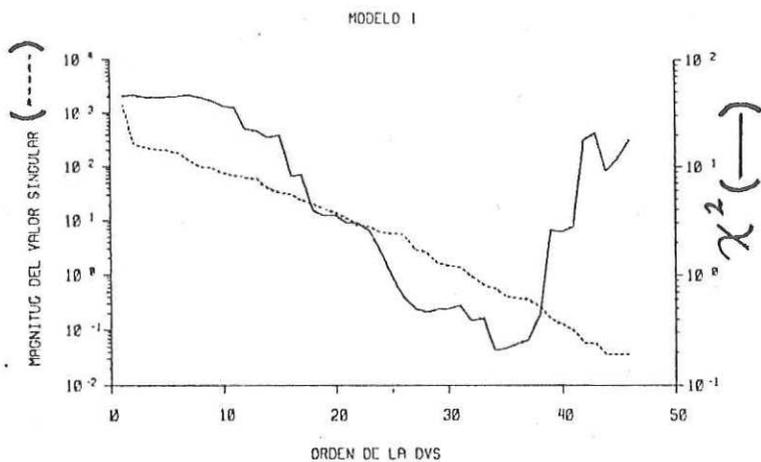


Fig.17.- Gráficas del comportamiento de los valores singulares y del ajuste Ji-cuadrada, en función del orden de la descomposición. Las gráficas corresponden a la inversión de datos con 10% de ruido para los modelos 1 y 2.

muestran estimaciones utilizando 20 eigenvalores ($\chi^2 \gg 1$), 26 ($\chi^2 \simeq 1$) y 34 eigenvalores ($\chi^2 \ll 1$) para el modelo 1, y 20 ($\chi^2 \gg 1$), 24 ($\chi^2 \simeq 1$) y 34 eigenvalores ($\chi^2 \ll 1$), para el modelo 2.. Como era de esperarse, la mejor solución es cuando se tiene una $\chi^2 \simeq 1$. Las mejores estimaciones junto con su pseudosección de datos y valores calculados se muestran en la Figura 19 para el modelo 1 y en la Figura 21 para el modelo 2..

Las anomalías estimadas están bien delimitadas en su parte más superficial mientras que a profundidad la estructura es un poco difusa.. Esto era de esperarse ya que las mediciones proporcionan más información de las partes someras que de las profundas..

Hasta aquí hemos logrado estimar modelos a partir de datos con ruido, obteniendo soluciones satisfactorias como las de las Figuras 19 y 21.. A pesar de ello se hace un segundo esfuerzo con el propósito de llegar a estimaciones que no contengan valores negativos.. En general es conveniente que $M(\bar{r}) - M_1$ sea siempre positiva..

III.2.2 ESTIMADOR "DVS" MODIFICADO

En la práctica por lo general se tienen regiones de estudio que pueden modelarse con un semiespacio con cargabilidad uniforme M_1 , y dentro de éste un cuerpo anómalo

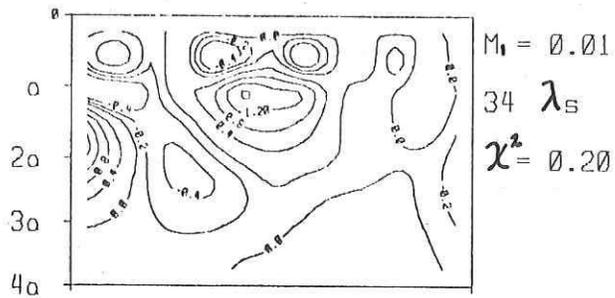
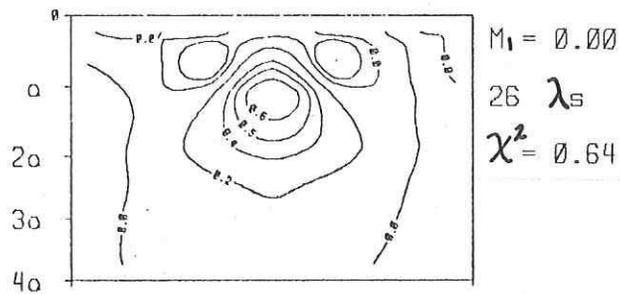
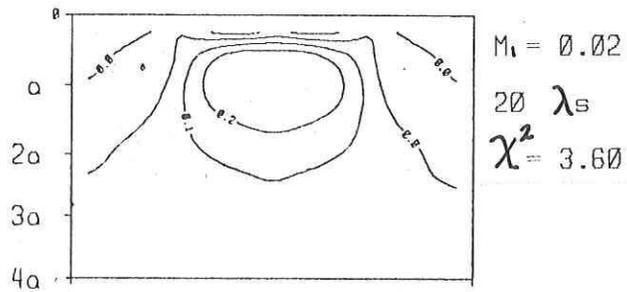


Fig.18.- Modelos estimados para diferentes valores del ajuste Ji-cuadrada. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 1.

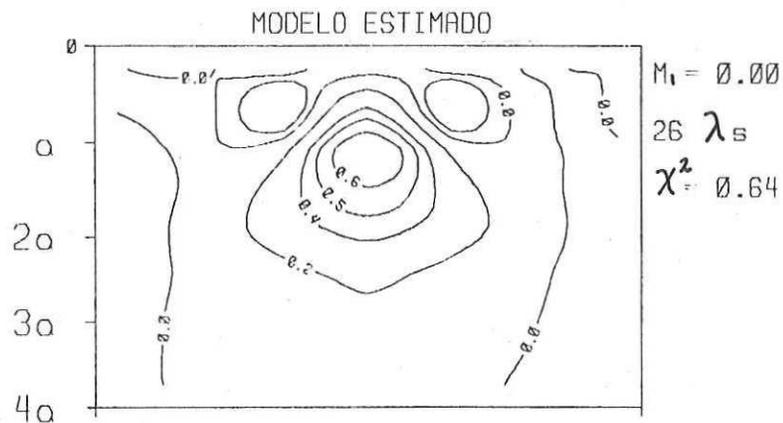
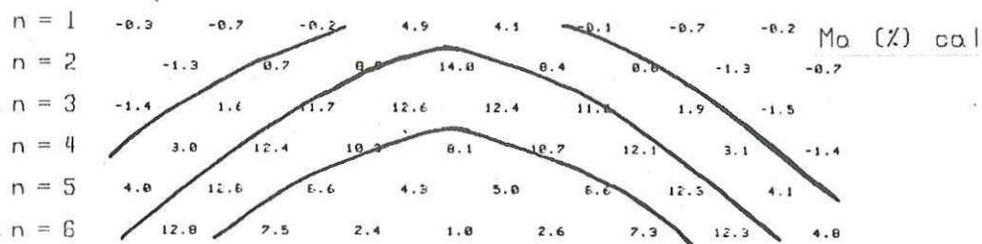
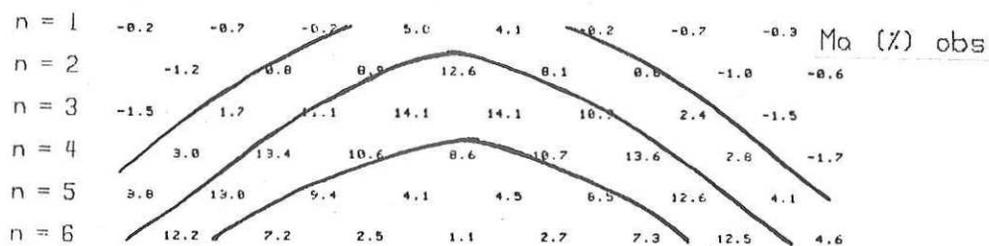


Fig.19.- Resultados de la inversión a partir de datos con 10% de ruido. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 1.

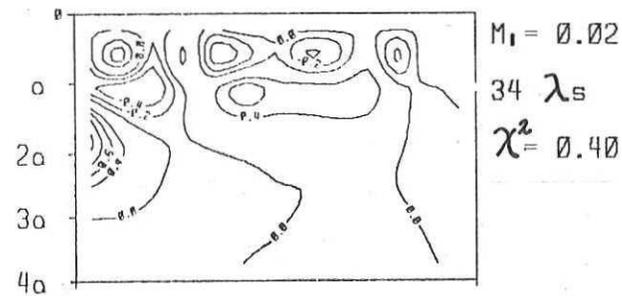
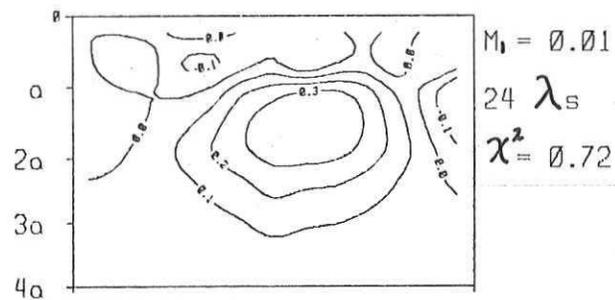
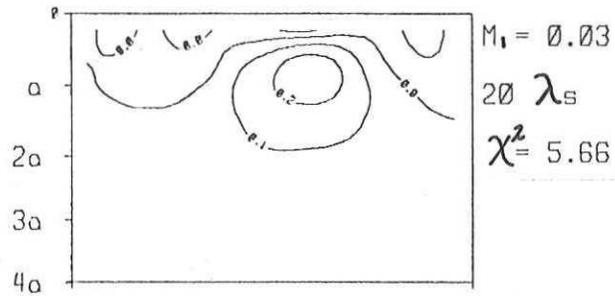


Fig.20.- Modelos estimados para diferentes valores del ajuste Ji-cuadrada. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 2.

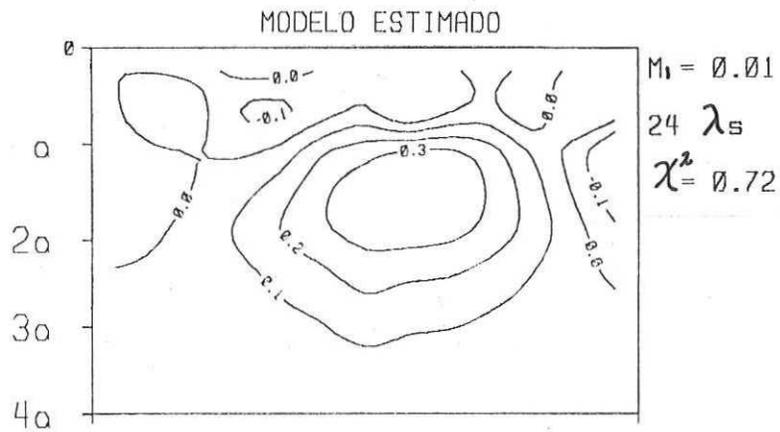
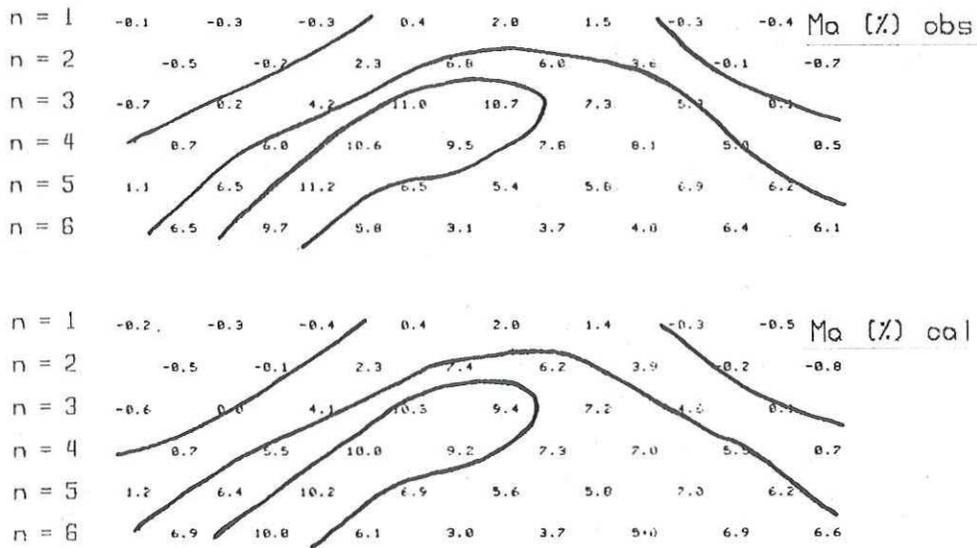


Fig.21.- Resultados de la inversión a partir de datos con 10% de ruido. Los contornos corresponden a estimaciones del modelo 2.

con cargabilidad mayor o menor que M_1 . Esto significa que $M(\bar{r}) - M_1$ debe tener el mismo signo sobre toda la región anómala. Para forzar esta condición se encuentra una segunda solución, la cual es estimada de tal manera que las 96 incógnitas de la malla sean mayores o menores que M_1 , según sea el caso de anomalía positiva o negativa. Este mismo razonamiento se sigue para el caso de anomalías de resistividad.

El procedimiento para realizar la segunda iteración se describe a continuación.

Empleando DVS bajo el criterio de ajuste ya mencionado encontramos el vector de incógnitas \hat{m} del sistema original (II.23). El primer elemento de \hat{m} es M_1 , el cual permanece sin alterarse, mientras que los 96 restantes se modifican de tal manera que estos sean mayores o menores que cero, según sea el contraste en cargabilidad. El vector de incógnitas viene dado como

$$\hat{m}_j = M(\bar{r}_j) - M_1, \quad \text{para } j > 1 \quad \text{(III.5)}$$

Si se tiene el caso de una anomalía positiva se crea un nuevo vector \hat{m}^c tal que

$$\hat{m}^c_j = 0.1(M_1) \quad \text{si } \hat{m}_j < 0,$$

y

$$\hat{m}^c_j = \hat{m}_j \quad \text{si } \hat{m}_j > 0,$$

con lo que ahora $M(\bar{r}_j) = 1.1(M_1)$ para los elementos de la rejilla que tenían cargabilidad menor a M_1 .

Cuando se sabe que la anomalía que se quiere estimar es negativa, el vector corregido ($\hat{m}c$) se calcula como

$$\hat{m}c_j = -0.1(M_1) , \quad \text{si } \hat{m}_j > 0 ,$$

y

$$\hat{m}c_j = \hat{m}_j , \quad \text{si } \hat{m}_j < 0 .$$

De esta manera la cargabilidad de la malla es siempre menor que la del medio, esto es, $M(\bar{r}_j) = 0.9(M_1)$.

La respuesta calculada utilizando $\hat{m}c$ no necesariamente cumple con los datos, debido a que ésta fué obtenida violando el esquema de estimación.

Con el fin de remediar esta situación, se emplea $\hat{m}c$ como modelo inicial para hacer una segunda iteración mediante DVS, y se encuentra una nueva solución \hat{m} que sí los satisfaga y que tenga el sentido físico deseado.

Primeramente se encuentran los valores teóricos (\underline{mac}) que produce el modelo $\hat{m}c$. Esto es

$$\underline{mac} = \underline{A}\hat{m}c ,$$

y se trabaja con los residuos

$$\underline{\Delta m} = \underline{ma} - \underline{mac} = \underline{A}(\hat{m} - \hat{m}c) .$$

El lado derecho de esta ecuación se multiplica y divide por

las incógnitas corregidas, esto es

$$\Delta m_i = A_{ij} \hat{m} c_j \frac{(\hat{m}_j - \hat{m} c_j)}{\hat{m} c_j} .$$

Escrito de otra manera

$$\underline{m} a' = \underline{A}' \underline{m}' \quad (\text{III.6})$$

donde $\underline{m} a'$ es $\Delta \underline{m}$, A'_{ij} es $A_{ij} \hat{m} c_j$ y m'_j es el factor

$$m'_j = \frac{(\hat{m}_j - \hat{m} c_j)}{\hat{m} c_j} . \quad (\text{III.7})$$

Hemos generado un nuevo sistema de ecuaciones (III.6) donde \underline{m}' es el vector de interés. Por lo que suponemos desconocido a \underline{m}' , y se procede a estimarlo con DVS cortando con el criterio de ajuste ya mencionado para la segunda iteración. Una vez estimado el vector \underline{m}' se obtiene la cargabilidad del medio ($M(\bar{r}_j)$). Esta se calcula empleando la ecuación (III.7) como sigue

$$\hat{m}'_j = \frac{(m_j - \hat{m} c_j)}{\hat{m} c_j} \simeq \text{Ln}(m_j) - \text{Ln}(\hat{m} c_j) ,$$

donde se ha supuesto que $(m_j - \hat{m} c_j)$ es mucho menor que $\hat{m} c_j$. Despejando se tiene

$$\hat{m}_j = \hat{m} c_j \text{Exp}(\hat{m}'_j) \quad (\text{III.8})$$

El vector \hat{m} en (III.8) tiene el mismo significado que en la primera iteración, esto es

$$\hat{m}(1) = M_1 , \text{ y } \hat{m}(j) = M(\bar{r}_j) - M_1 \quad \text{para } j > 1 ,$$

donde $M(\bar{r}_j)$ es la cargabilidad de cada uno de los elementos de la malla. Los parámetros finales se expresan como

$$M_1 = \hat{m}(1)$$

$$\text{y } M(\bar{r}_j) = M_1 + \hat{m} c_j \text{Exp}(\hat{m}'_j) \quad \text{para } j > 1 \quad (\text{III.9})$$

Los elementos de la malla para el problema de anomalías positivas siempre tienen cargabilidad mayor que M_1 , esto es $M(\bar{x}_j) > M_1$ ya que en estos casos el vector $\hat{m}c_j$ es mayor o igual que cero. Para anomalías negativas $M(\bar{x}_j) < M_1$, debido a que $\hat{m}c_j$ es menor o igual que cero. Por lo tanto, los modelos estimados en la segunda iteración tienen, en principio, más sentido físico que aquellos encontrados en la primera iteración. Para comprobar esta hipótesis, a continuación se muestra una serie de resultados numéricos.

III.2.2.a ESTIMADOR "DVS" MODIFICADO: DATOS SIN RUIDO

La solución que se emplea como modelo inicial es sesgada por construcción, por lo que es de esperarse que el modelo obtenido en la segunda iteración también lo sea. En la mayoría de los casos ocurre esto, y se observa que los datos no se ajustan tan bien como en la primera iteración. Esto puede verse en la Figura 22, donde se grafica $|r|/N$ contra el orden de la descomposición, para los modelos 1 y 2. Las gráficas corresponden al caso de inversión de datos sin ruido. En ambas gráficas se puede ver que el ajuste varía muy poco con respecto al orden de la descomposición.

En la segunda iteración la solución que se selecciona es la correspondiente al mínimo en $|r|/N$, siendo este el mismo criterio que en la primera.

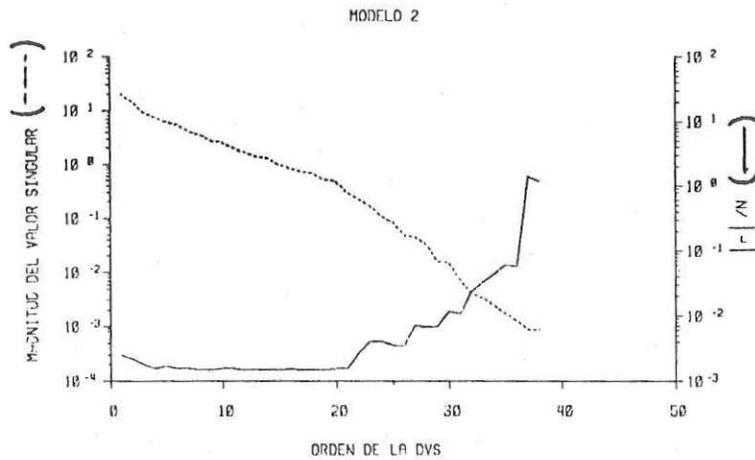
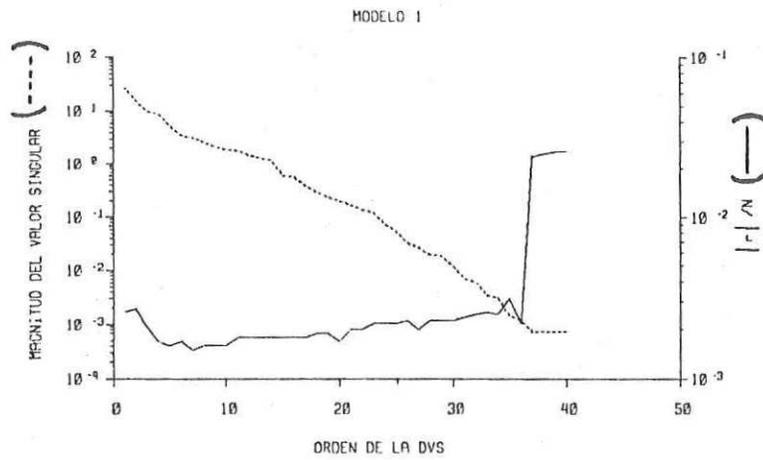


Fig.22.- Gráficas de magnitud del valor singular (λ) y del residuo ($|r|/N$) contra el orden de la descomposición. Las gráficas corresponden a la segunda iteración para el caso de inversión de datos sin ruido de los modelos 1 y 2.

La mejor estimación del modelo 1 es cuando se emplean los primeros 7 eigenvalores, mientras que para el modelo 2 se requiere de 9.. Estas soluciones junto con sus datos y valores calculados se muestran en las Figuras 23 y 24 respectivamente..

Comparando las estimaciones del modelo 1 y 2 en la segunda iteración (Figuras 23 y 24), con las de la primera (Figuras 13 y 15), se observa que la delimitación del cuerpo anómalo es muy semejante para ambas iteraciones, con la diferencia de que en la primera iteración se obtienen oscilaciones en la solución a los lados de la anomalía, mientras que en la segunda esto no ocurre..

En la segunda iteración la solución no ajusta tan bien los datos como en la primera, pero debido a la característica de positividad, ésta solución es considerada mejor a la obtenida en la primer iteración..

III.2.2.b ESTIMADOR "DVS" MODIFICADO: DATOS CON RUIDO

En el caso de datos con ruido, la restricción de positividad permite obtener modelos más compactos que aquellos obtenidos en la primera iteración..

En la segunda iteración para datos con ruido el criterio

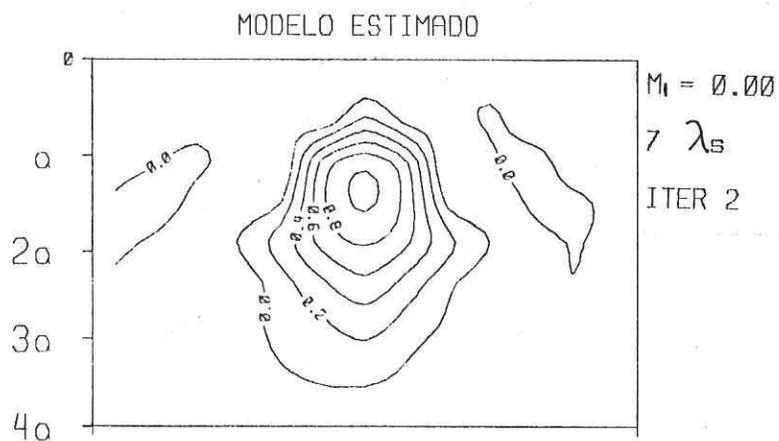
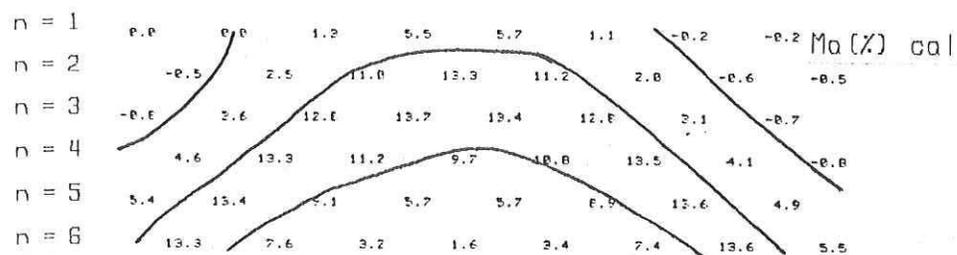
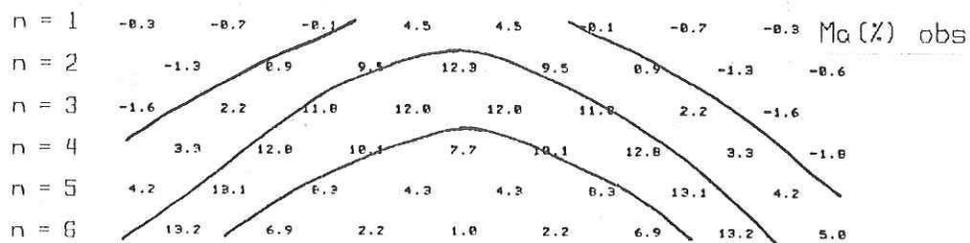


Fig.23.- Resultados de la segunda iteración correspondientes a la inversión de datos sin ruido para el modelo 1.

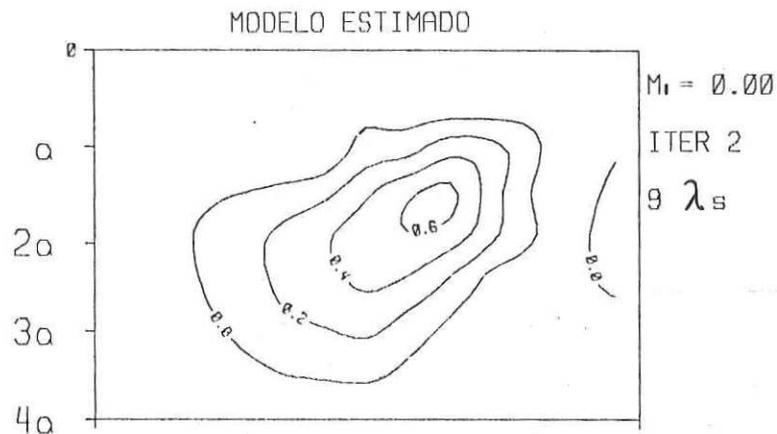
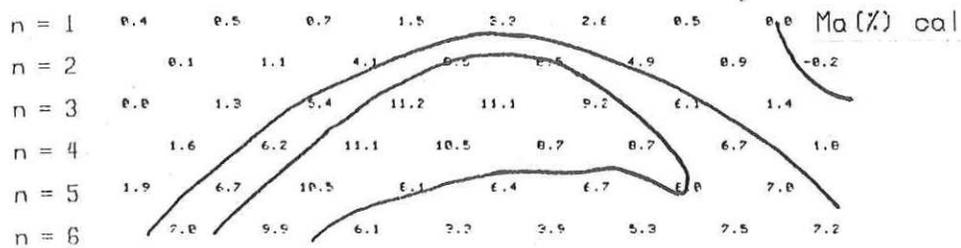
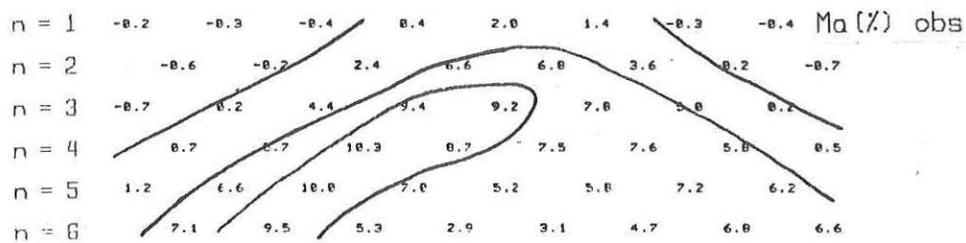


Fig.24.- Resultados de la segunda iteración correspondientes a la inversión de datos sin ruido para el modelo 2.

de ajuste que se considera es diferente que para datos sin ruido. En este caso la solución se selecciona cuando el parámetro (III.4) es mínimo.

El comportamiento χ^2 con el número de eigenvalores utilizados se muestra en la Figura 25. La estimación para los modelos 1 y 2 se muestran junto con los datos y los valores calculados en las Figuras 26 y 27. Se utilizaron 8 eigenvalores para estimar el modelo 1 y 10 para el modelo 2.

Comparando las estimaciones de los modelos 1 y 2 obtenidos en la primera iteración (Figuras 19 y 21), con las obtenidas en la segunda (Figuras 26 y 27), se observa que éstas últimas son mejor estimaciones de los modelos originales.

Con esto se muestra que la segunda iteración sí nos proporciona una mejor estimación que la primera, a pesar de que los datos no sean tan bien ajustados.

III.3 ESTADISTICA DE LA SOLUCION

Cuando se habla de la solución encontrada aplicando algún esquema de estimación, se está refiriendo solamente a una de muchas que pueden serlo. Nuestro problema, en particular, no tiene solución única. Esto puede fácilmente

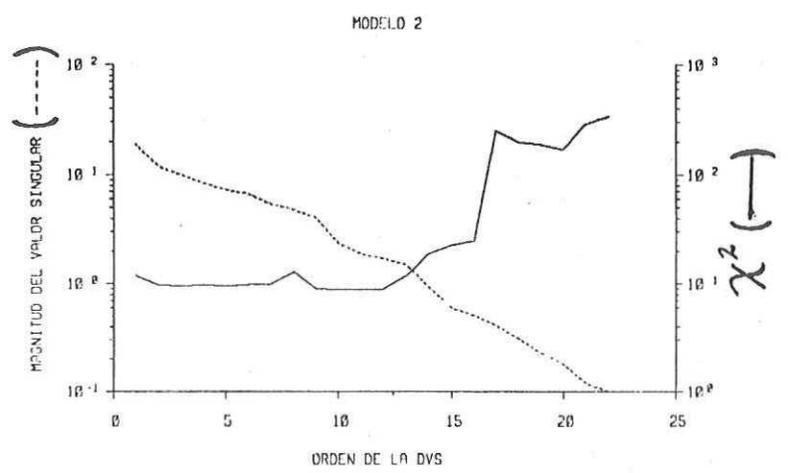
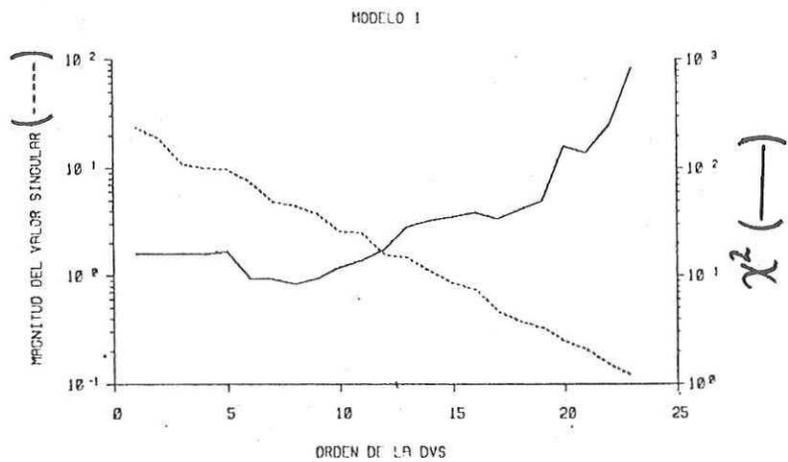


Fig.25.- Gráficas de la magnitud del valor singular (λ) y del ajuste Ji-cuadrada contra el orden de la descomposición. Las gráficas corresponden a la segunda iteración para el caso de la inversión de datos con ruido de los modelos 1 y 2.

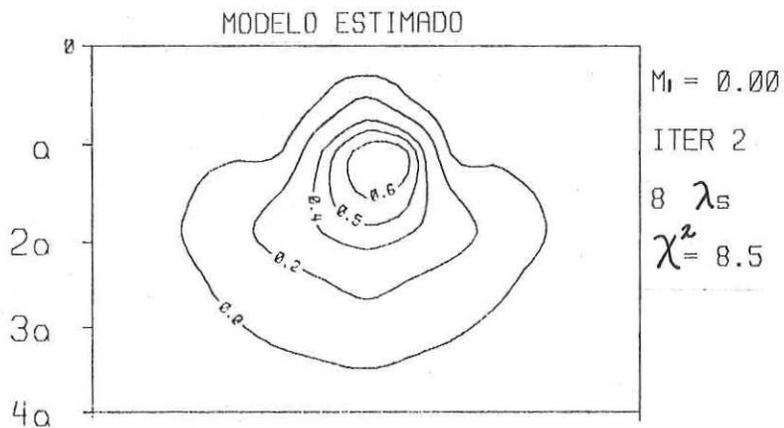
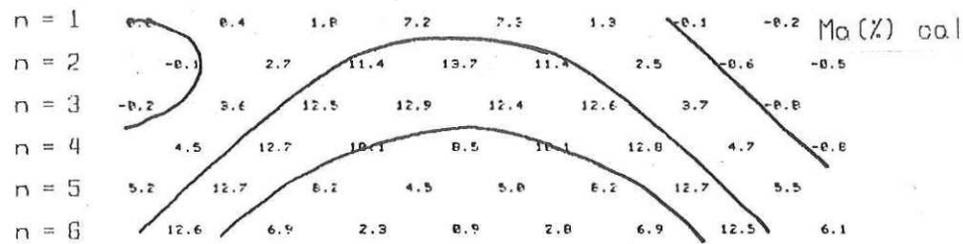
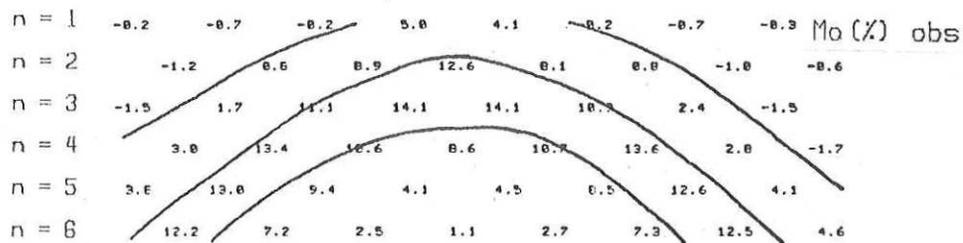


Fig.26.- Resultados de la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos con 10% de ruido para el modelo 1.

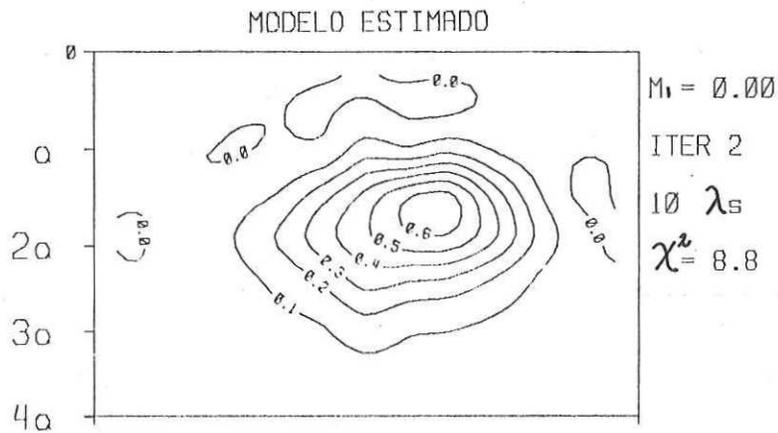
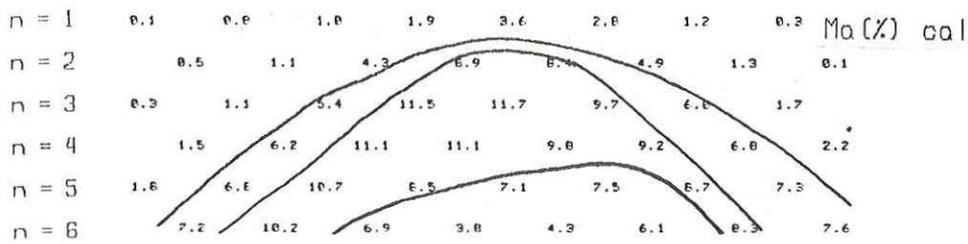
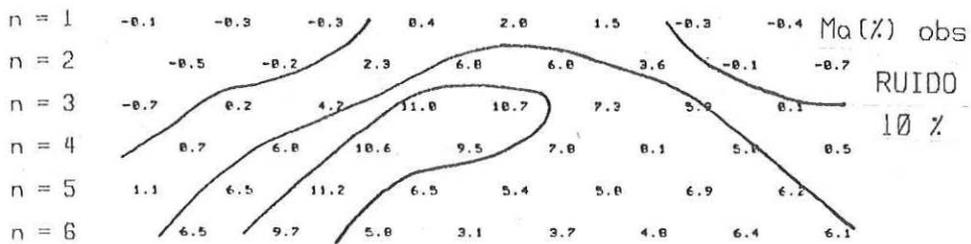


Fig.27.- Resultados de la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos con 10% de ruido para el modelo 2.

inferirse del hecho de que nuestro sistema de ecuaciones contiene más incógnitas que ecuaciones. De la infinidad de soluciones posibles, hemos seleccionado la que se obtiene utilizando el operador de descomposición en valores singulares. Los ejemplos que hemos considerado hasta aquí demuestran la utilidad del operador en el problema de estimar las principales características de anomalías compactas. Sin embargo, queda pendiente la pregunta de la no unicidad de la solución.

La metodología desarrollada por Backus y Gilbert (1970) permite tratar de una manera rigurosa este problema. En lugar de estimar modelos que de alguna manera ajusten a los datos, Backus y Gilbert (1970) proponen estimar promedios espaciales del modelo real. En términos de nuestro problema, el conjunto de los valores promedio en los diferentes puntos de la malla representa un modelo promedio. Denotando a este modelo promedio por \tilde{x} y al modelo real por x , la relación entre ellos viene dada como

$$E(\tilde{x}) = \underline{R} x \quad \text{(III.10)}$$

Cuando los errores en los datos son variables aleatorias con media cero, los promedios \tilde{x}_i son también variables aleatorias y su valor esperado está dado por (III.10). A la matriz \underline{R} se le conoce con el nombre de matriz de resolución. Cuando $R_{ij} = \delta_{ij}$ el modelo promedio coincide con el modelo real y se dice que la resolución es perfecta. Sin embargo, esto no es

posible en la práctica.

Para construir la matriz \underline{R} es necesario tomar en cuenta la varianza de \tilde{x} . Backus y Gilbert (1970) demuestran, en general, que no es posible optimizar simultaneamente la resolución y la varianza. Es por lo tanto una necesidad el hacer un compromiso entre ellas. Cuando el problema se plantea en términos matriciales, el compromiso puede facilmente establecerse tambien en términos matriciales (Wiggins, 1972). Cuando la medida de la resolución es la diferencia mínimo cuadrática entre la i -ésima fila de \underline{R} y δ_{ij} , la matriz de resolución viene dada como

$$R_{ij} = \sum_{L=1}^P V_{iL} V_{Lj} , \quad (\text{III.11})$$

y la varianza de x_j como

$$\text{Var}(x_j) = \sigma^2 \sum_{i=1}^P (V_{ji}/\lambda_i)^2 , \quad (\text{III.12})$$

donde V_{iL} y V_{Lj} son elementos de la matriz \underline{V} que se obtiene en la factorización de la matriz de derivadas $\underline{\Lambda}$. λ_i es el i -ésimo eigenvalor de la misma factorización y σ^2 es la varianza de los datos, la cual se supone uniforme para todos ellos. En la realización de los cálculos se normalizan los datos respecto a su desviación estándar por lo que $\sigma^2 = 1$. La sumatoria en (III.11) y (III.12) se toma para un número arbitrario P igual o menor que el número de datos.

Para calcular \tilde{x} utilizando (III.10) se reemplaza a \underline{x} , el modelo real, por cualquier otro modelo que satisfaga los

datos..

El modelo promedio está determinado mediante la matriz de resolución, la cual se construye estableciendo un compromiso entre ésta y la varianza. Primeramente se selecciona la máxima varianza de estimación que deseamos que tenga cada uno de los parámetros, y en base a esto se encuentra el número de eigenvectores necesarios a considerar, tal que (III.12) no rebase la varianza máxima preestablecida para cada elemento. Así, cada fila de la matriz de resolución, correspondiente a cada parámetro del modelo es construída empleando únicamente el número de eigenvectores que satisface a (III.12). En síntesis, se puede decir que el modelo promedio tiene un error de estimación preestablecido, y en base a ésto es la resolución de sus parámetros.

A continuación se muestran gráficas de algunas filas de la matriz de resolución correspondientes a los modelos 1 y 2, considerando diferentes errores de estimación. Para hacer estas gráficas, previamente se normaliza la matriz dividiendo todos los elementos de cada fila por el correspondiente a la diagonal de la matriz. De esta manera la diagonal de la matriz de resolución normalizada es igual a uno en todos sus elementos.

La resolución de los parámetros no solamente depende de

su varianza, sino también de la información que tenga de ellos la matriz de derivadas. Para el caso de resistividad y PI se tiene que los parámetros más profundos tienen la resolución de menor calidad. Esto se aprecia en las Figuras 28 y 29, donde se trazan 8 filas de la matriz de resolución correspondientes al modelo 1. La matriz se construyó empleando todos los eigenvalores disponibles, con el propósito de obtener la mejor resolución aunque la varianza de los parámetros sea extremadamente grande. De esta manera se puede observar con mayor claridad la limitación que tiene el método de resistividad y PI en cuanto a la resolución a profundidad.

Las gráficas de las filas de la matriz de resolución normalizada se trazan en dos dimensiones, tal como las del modelo mismo presentadas anteriormente. La posición del parámetro al que le corresponde la fila de resolución se indica con una cruz en la gráfica, en donde el valor de R_{ij} es siempre la unidad.

En la Figura 28 se observa que los parámetros que están en la superficie, y a las profundidades $Z=0.75a$, $Z=1.25a$ y $Z=1.75a$ tienen muy buena resolución. Mientras que en la Figura 29 se ve como la resolución no es tan buena para los parámetros que están a $2.25a$ y $2.75a$ de profundidad. Para elementos del modelo que se encuentran más abajo la

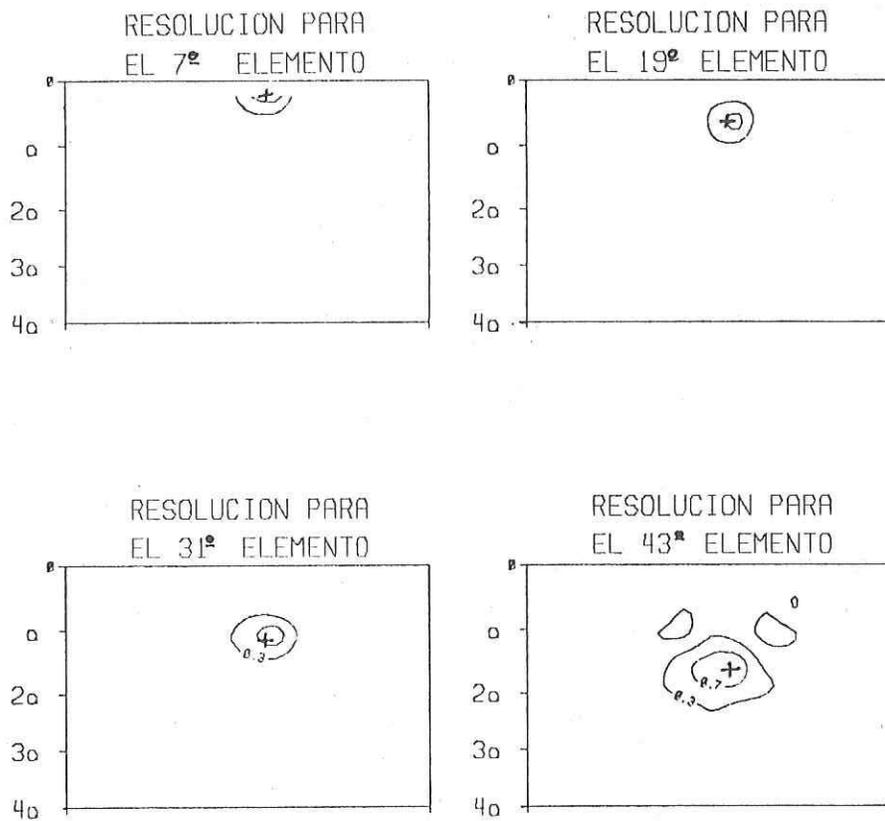


Fig.28.- Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1. Se consideran todos los eigenvalores. Las gráficas representan la mejor resolución posible con los datos disponibles.

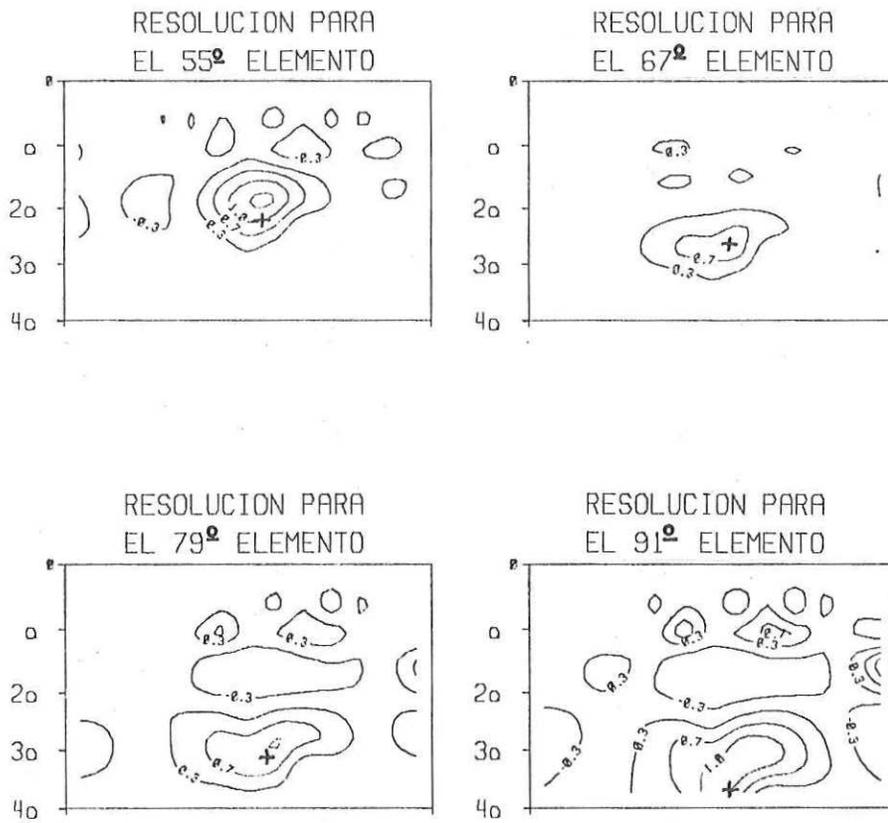


Fig.29.- Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1. Se consideran todos los eigenvalores. Las gráficas representan la mejor resolución posible con los datos disponibles.

resolución es muy mala. En la Figura 30 se muestran las gráficas correspondientes a los parámetros que están colocados en el extremo derecho de la malla, a las profundidades $Z=0.75a$, $Z=1.75a$ y $Z=3.75a$.

En las Figuras 31 y 32 se muestran las gráficas correspondientes para los mismos parámetros que en las Figuras 28 y 29, pero con la diferencia de que ahora el error de estimación se sujeta a que sea menor o igual que 0.15 . Este es un error razonable ya que el cuerpo anómalo tiene una cargabilidad igual a la unidad. La matriz de resolución fue calculada empleando el máximo número de eigenvalores tal que la raíz cuadrada de la varianza no exceda 0.15 , para cada parámetro por separado.

Las Figuras 31 y 32 nos indican que la resolución sigue siendo casi de la misma calidad que cuando se consideraban todos los eigenvalores, a pesar de que ahora el error de estimación es menor o igual que 0.15 .

Para construir el modelo promedio se utiliza el modelo estimado en la segunda iteración, y la matriz de resolución calculada en función de la varianza deseada en cada parámetro. En la Figura 33 se ilustra un modelo promedio que tiene una desviación estándar menor o igual que 0.15 , y otro menor o igual que 0.05 . Ambos casos corresponden a

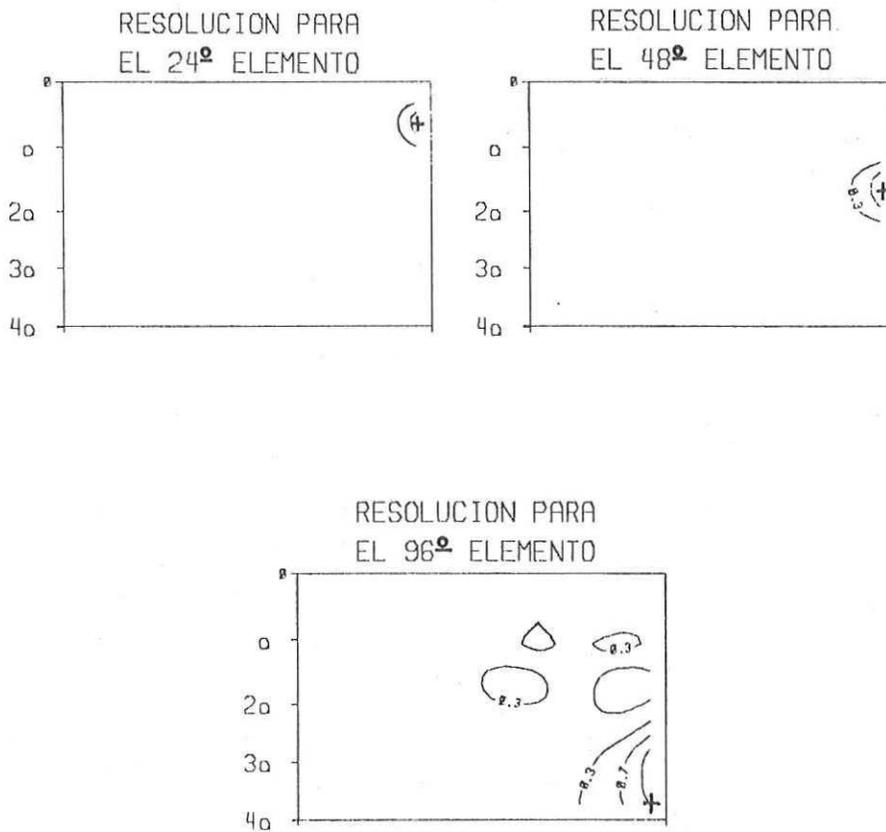


Fig.30.- Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1. Se consideran todos los eigenvalores. Las gráficas representan la mejor resolución posible con los datos disponibles.

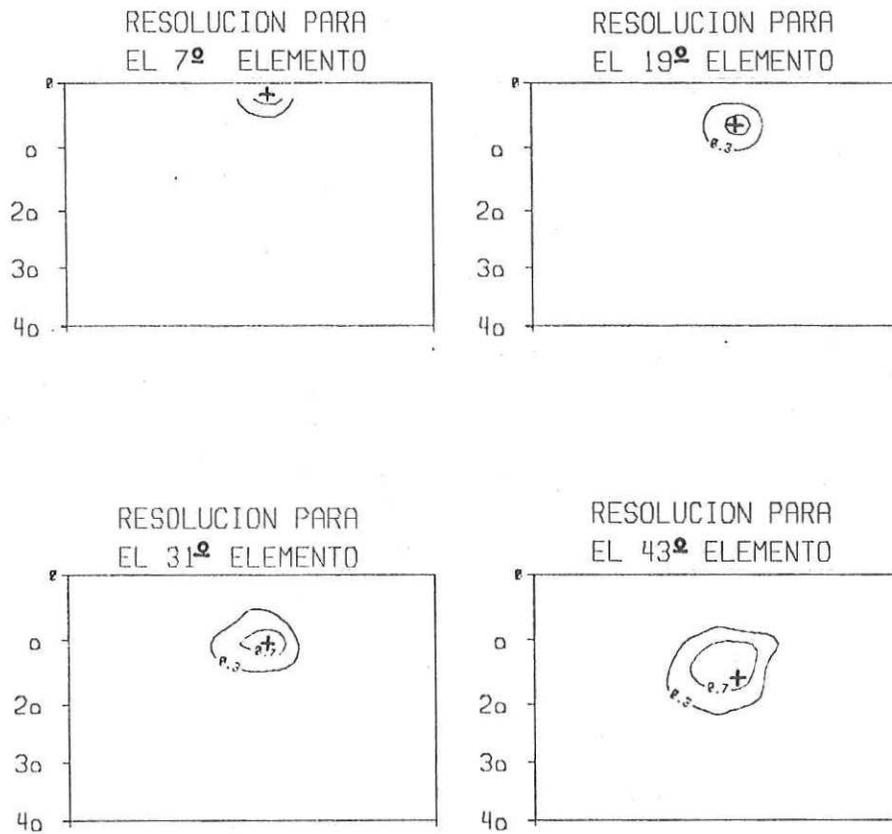


Fig.31.- Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1, correspondientes a desviaciones estándar $\sigma \leq 0.15$.

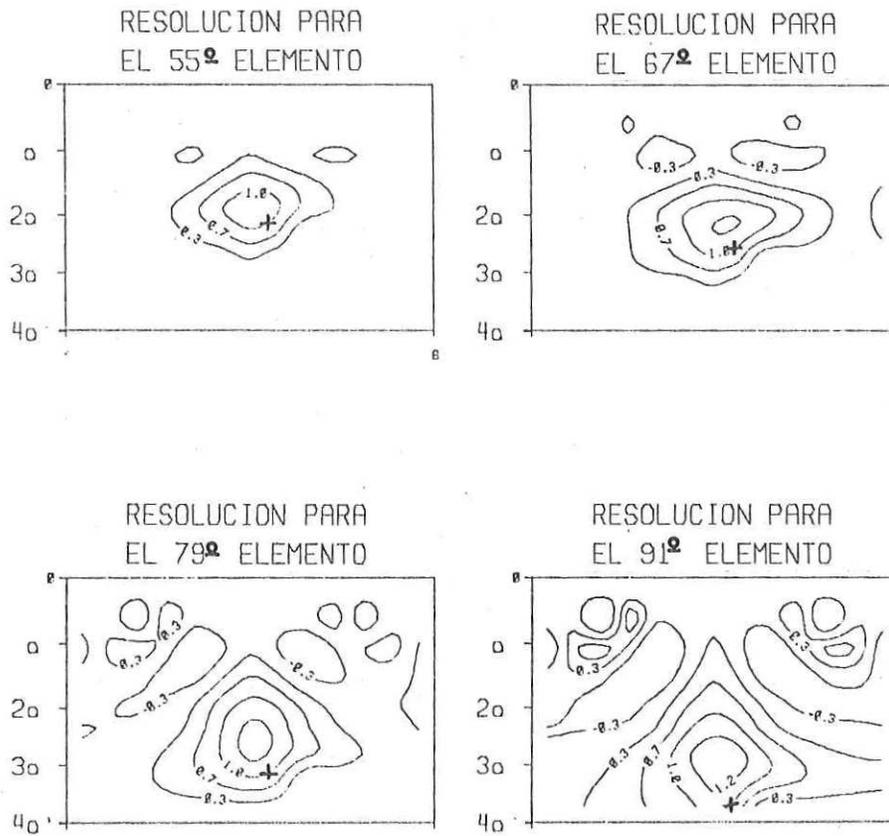


Fig.32.- Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 1, correspondientes a desviaciones estándar $\sigma \leq 0.15$

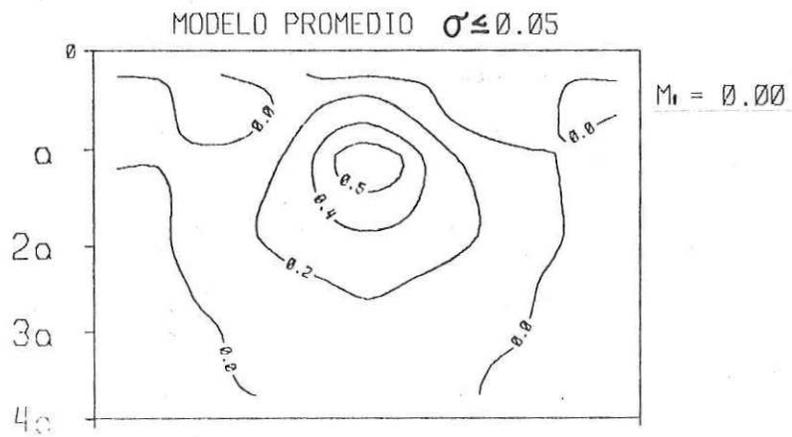
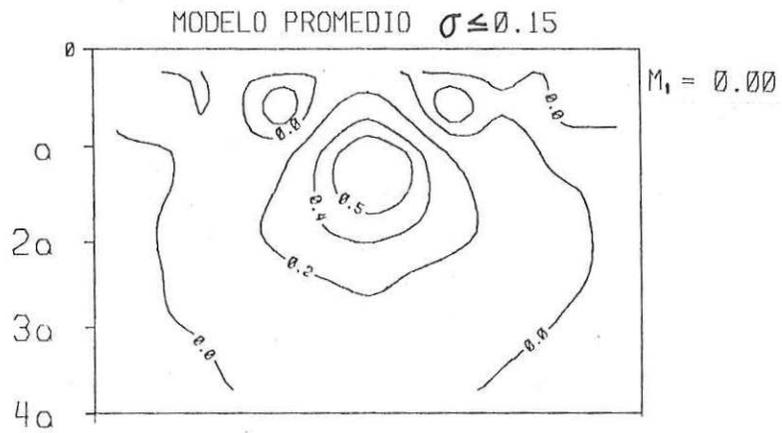


Fig.33.- Modelos promedio de PI correspondientes al modelo 1, para desviaciones estándar menores o iguales que 0.15 y 0.05 respectivamente.

estimaciones del modelo 1 con un 10% de ruido en las mediciones. A pesar de que existen variaciones suaves, los modelos promedio siguen presentando las mismas características que los modelos estimados inicialmente (Figura 26). Esto es, la profundidad y las dimensiones laterales siguen estando bien determinadas.

En las figuras 34 y 35 se trazan las filas de la matriz de resolución del modelo 2, correspondientes a los mismos parámetros y desviación estándar (menor o igual que 0.15) que para las gráficas del modelo 1. Al comparar gráficas análogas del modelo 1 con las del modelo 2 se aprecia que son casi idénticas. De hecho la matriz de resolución para ambos modelos debería de ser igual porque los dos modelos tienen la misma matriz de derivadas \underline{A} , pero no lo son exactamente ya que \underline{A} ha sido normalizada con respecto a los errores en los datos al tiempo de ser factorizada. Por lo tanto ésta difiere ligeramente para los dos modelos porque los errores en sus datos no son exactamente los mismos, provocando una ligera diferencia en las matrices de resolución para los modelos.

Finalmente en la Figura 36 se trazan los modelos promedio con errores de estimación no mayores que 0.15 y 0.05 para el modelo 2. Estos modelos promedio presentan las mismas características de suavidad que en el caso del

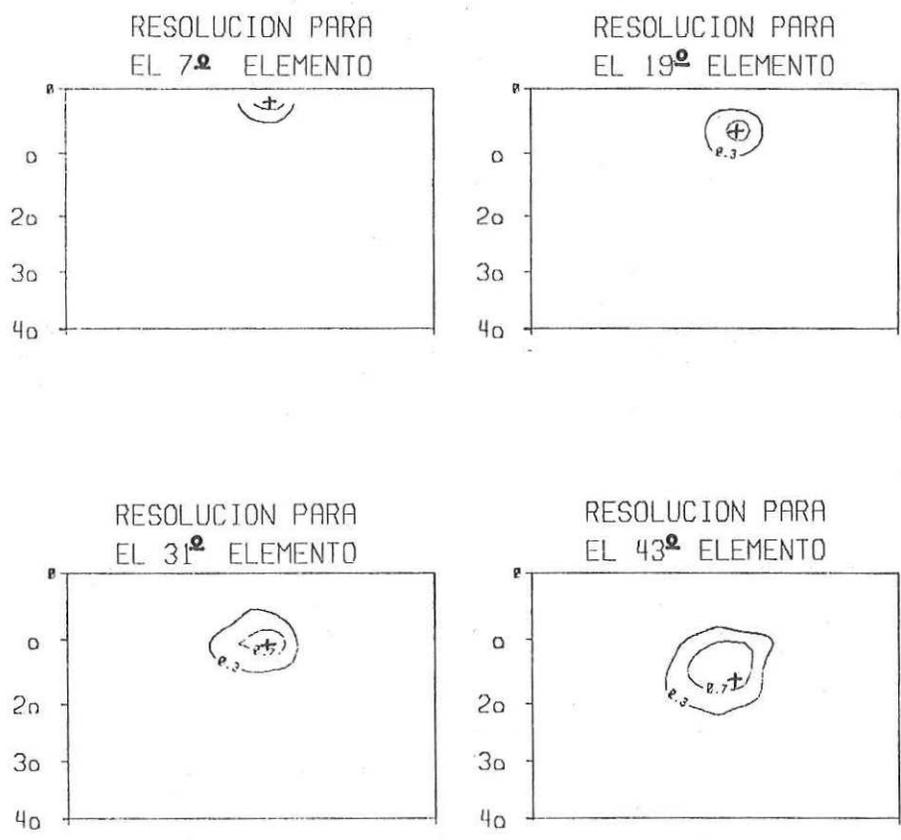


Fig.34.- Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 2, correspondientes a desviaciones estándar $\sigma \leq 0.15$.

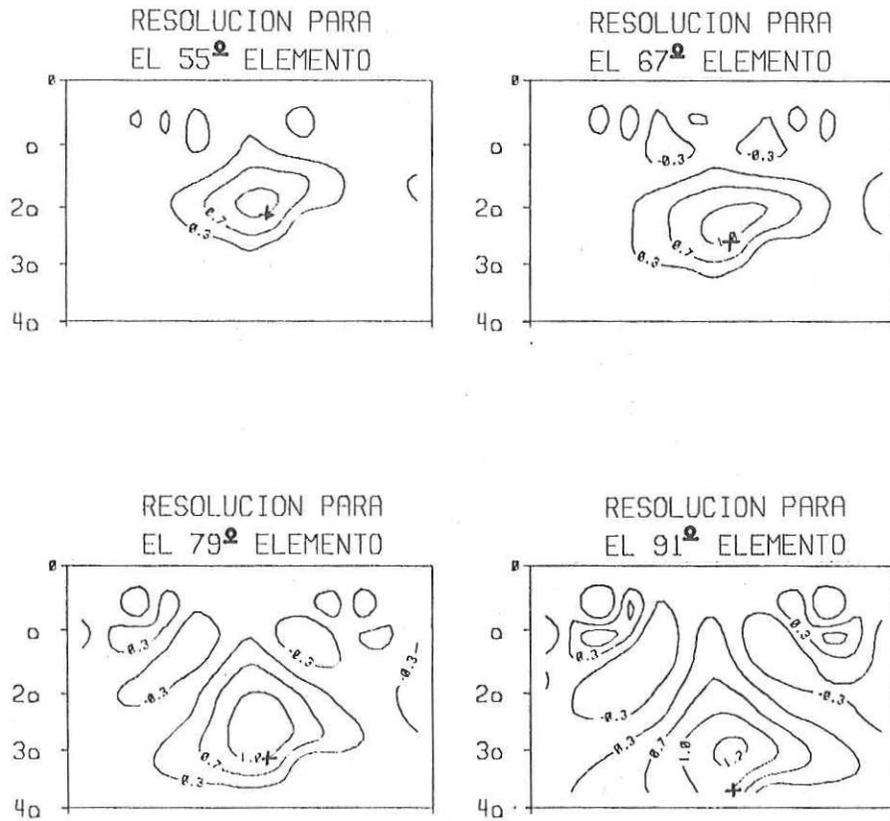


Fig.35.- Gráficas de resolución normalizada para parámetros del modelo 2, correspondientes a desviaciones estándar $\sigma \leq 0.15$.

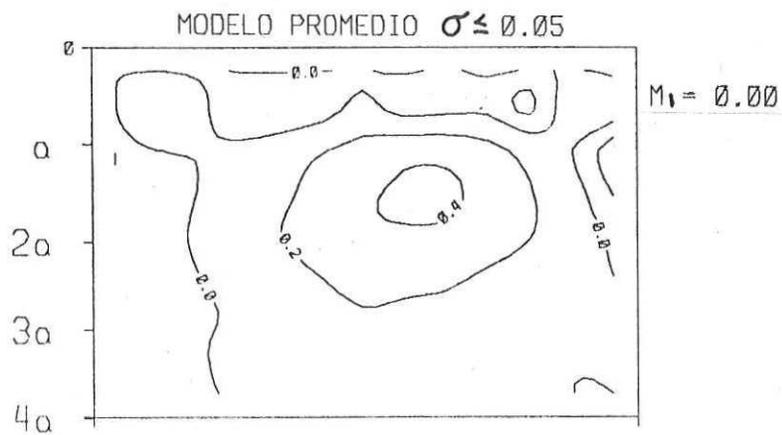
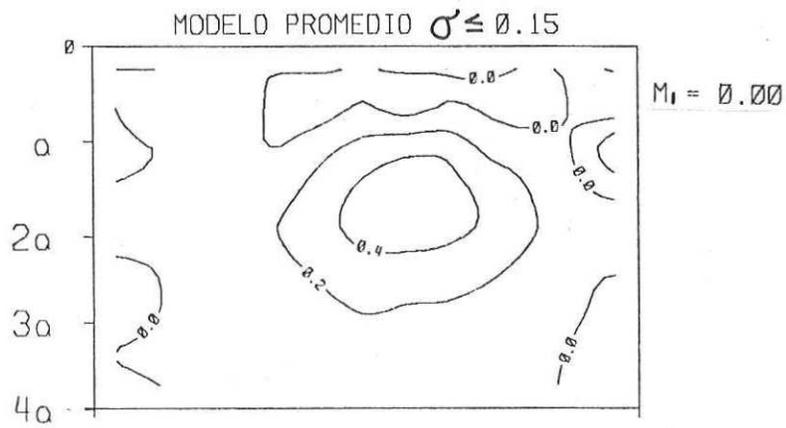


Fig.36.- Modelos promedio de PI correspondientes al modelo 2, para desviaciones estándar menores o iguales que 0.15 y 0.05 respectivamente.

modelo 1. Por otra parte también indican una anomalía con ubicación y tamaño aproximadamente iguales a los del modelo estimado inicialmente (Figura 27)..

Después de haber visto los dos ejemplos de construcción de modelos promedio, se puede decir que estos presentan las principales características del modelo estimado inicialmente. En el siguiente capítulo se muestran resultados de estimaciones junto con sus modelos promedio, empleando datos (sintéticos y de campo) publicados por varios autores..

IV APLICACIONES

IV.1 INTRODUCCION

El objetivo principal de este capítulo es demostrar que las aproximaciones de ρ_a y M_a para pequeños contrastes en resistividad, pueden ser utilizadas para invertir datos aún en el caso de contrastes moderados.

En el capítulo III se invirtieron datos sintéticos calculados con la aproximación asintótica y, aunque los resultados obtenidos son satisfactorios, la aplicabilidad de las aproximaciones de ρ_a y M_a a casos más complicados permanece incierta. Para resolver este problema, a continuación se muestran resultados de la inversión de datos de ρ_a y M_a tomados de la literatura. Primero se consideran datos sintéticos que han sido publicados por varios autores en relación con soluciones numéricas del problema directo. Los datos sintéticos que se toman de la literatura no tienen ruido. Con el fin de simular datos reales se les añade a éstos ruido aleatorio. Finalmente se invierten datos de campo.

IV.2 UN EJEMPLO SENCILLO

Primero consideraremos un grupo de datos de M_a (%)

publicados por Hohmann (1975).. Estos corresponden al cubo que se muestra en la Figura 37. Y la seudosección correspondiente se muestra en la parte superior de la figura.. A los datos se les añade el 10% de ruido para simular datos de campo.. Los valores de M_a (%) corresponden al caso cuando la razón de la resistividad del cubo a la del semiespacio es de 0.2..

Para generar la matriz de derivadas se considera que la longitud de la malla es $2a$, ya que el modelo hipotético tiene esa longitud.. Más adelante veremos el efecto que produce tomar una longitud errónea..

El modelo estimado en este caso se muestra en la Figura 38, junto con las seudosecciones de datos y valores calculados.. Como puede observarse existe cierta sobrestimación de la anomalía en la parte central.. No obstante, la solución obtenida simula de una manera satisfactoria al modelo hipotético..

Los modelos promedio para este caso, correspondientes a desviaciones estándar de 0.2 y 0.5 se muestran en la Figura 39.. Estos modelos presentan una anomalía más suave que la del modelo estimado.. A pesar de esta particularidad, los modelos promedio siguen indicando la existencia de un cuerpo de cargabilidad superior a la del medio, ubicado en la

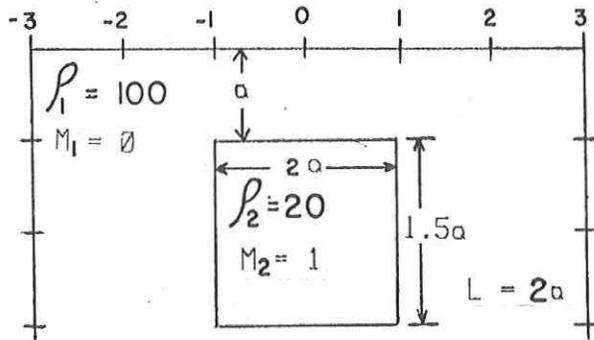
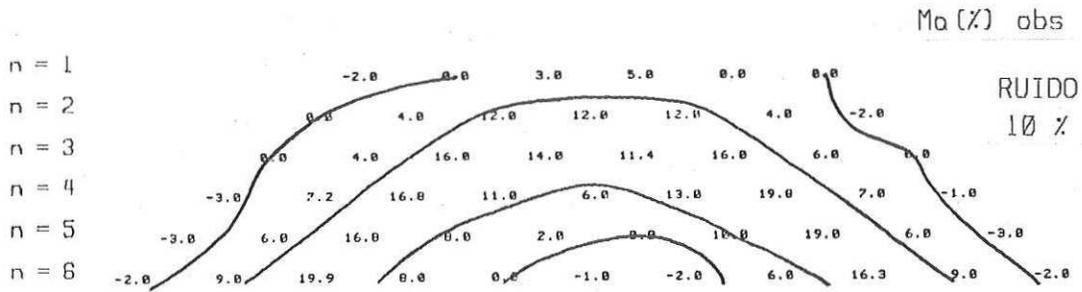


Fig.37.- Datos sintéticos de M_a (%) alterados con un 10% de ruido y el modelo hipotético correspondiente. Los valores fueron tomados de Hohmann (1975).

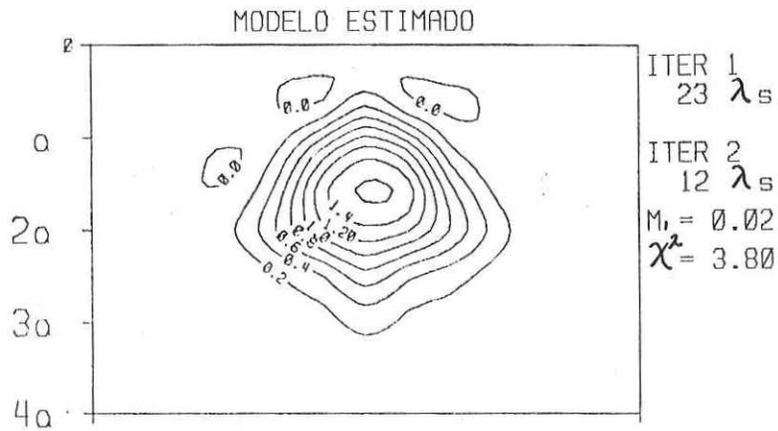
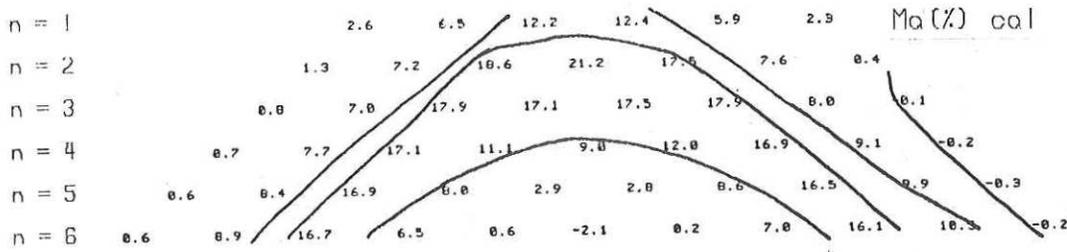
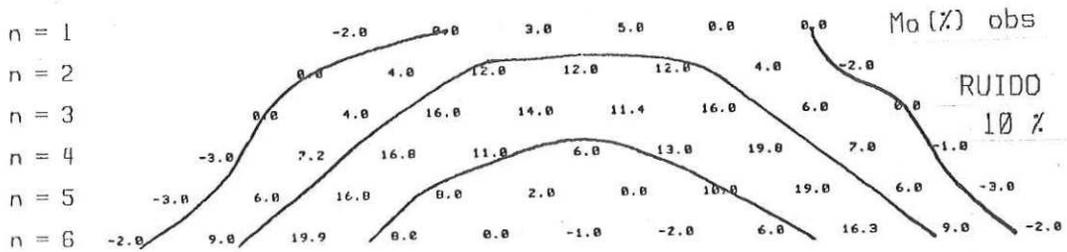


Fig.38.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de PI para el cubo de la Figura 37.

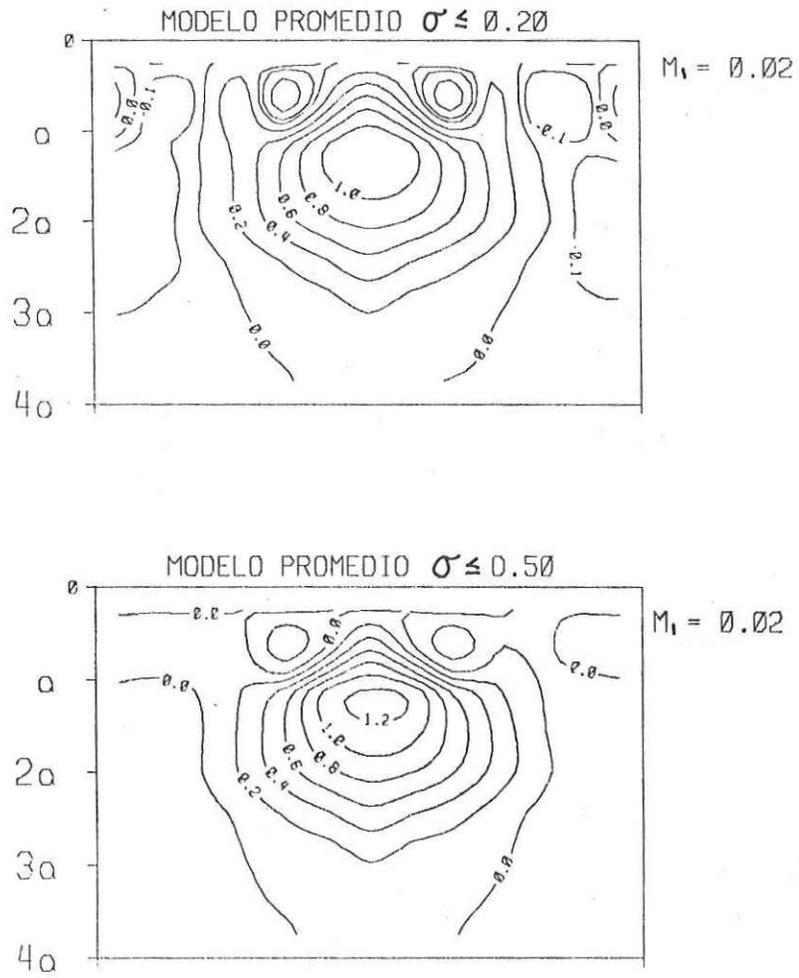


Fig.39.- Modelos promedio de cargabilidad correspondientes al cubo de la Figura 37 para dos errores de estimación.

posición aproximada del modelo hipotético (Figura 37).

IV.3 EJEMPLOS DE ANOMALIAS ADYACENTES

Ahora consideraremos el caso de anomalías utilizando respuestas tomadas de Snyder (1976). El modelo consiste de dos cilindros de radio $0.5a$ y centro en $Z=a$, con una pequeña separación entre ellos. El modelo junto con su respuesta de polarización inducida se muestran en la Figura 40. En este caso la razón de la resistividad de los cilindros a la del semiespacio es de 0.56 . Los modelos de Snyder (1976) son bidimensionales por lo que en este caso se consideró una malla de longitud $L = 16a$, para simular estructuras elongadas.

Los datos junto con la respuesta del modelo estimado se muestran en la Figura 41. Dos modelos promedio se muestran en la Figura 42, donde se aprecia que éstos son casi idénticos, y que los dos se parecen mucho al modelo estimado. La razón principal de la buena resolución en este caso es la proximidad de la anomalía a la superficie de la Tierra.

Como ya se había mencionado, para obtener una buena resolución es necesario sacrificar la desviación estándar de los parámetros promedio. En la Figura 43 se muestran gráficas bidimensionales de la fila de la matriz de

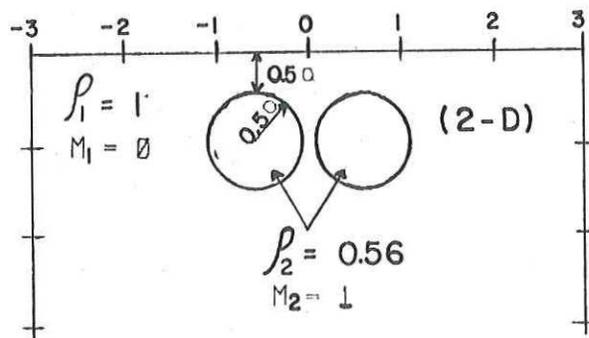
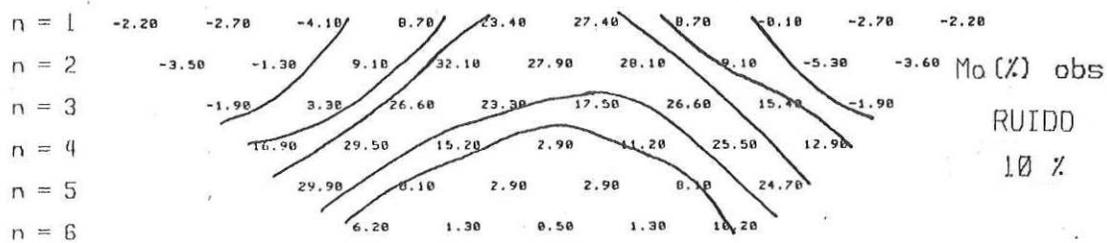


Fig.40.- Datos sintéticos de cargabilidad alterados con un 10% de ruido y modelo hipotético (2-D). Los valores fueron tomados de Snyder (1976).

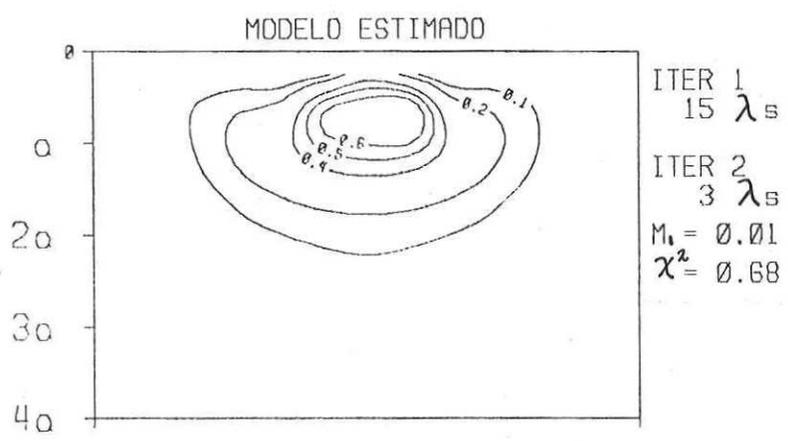
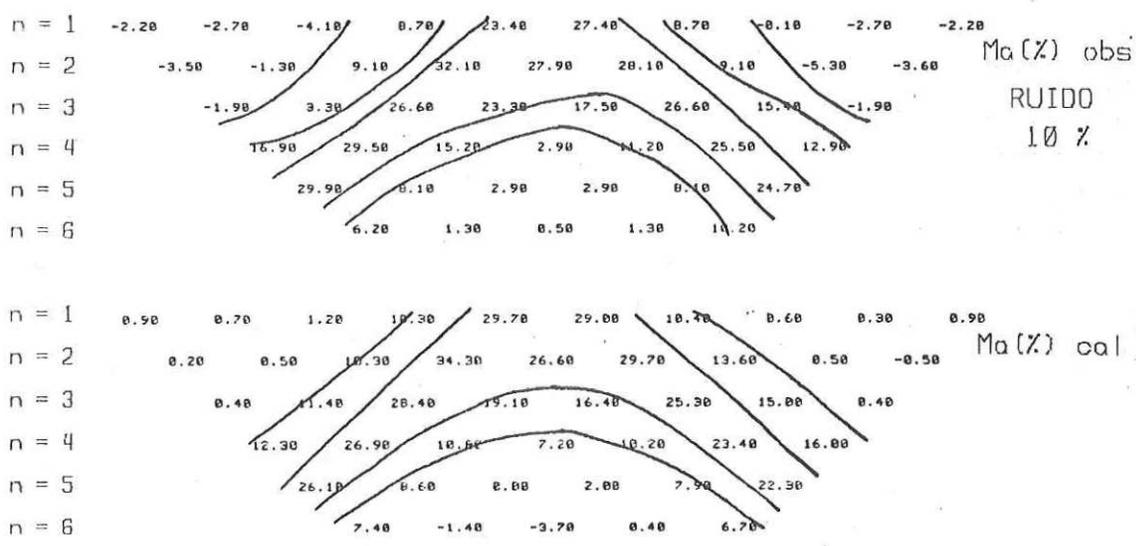


Fig.41.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de los cilindros de la Figura 40.

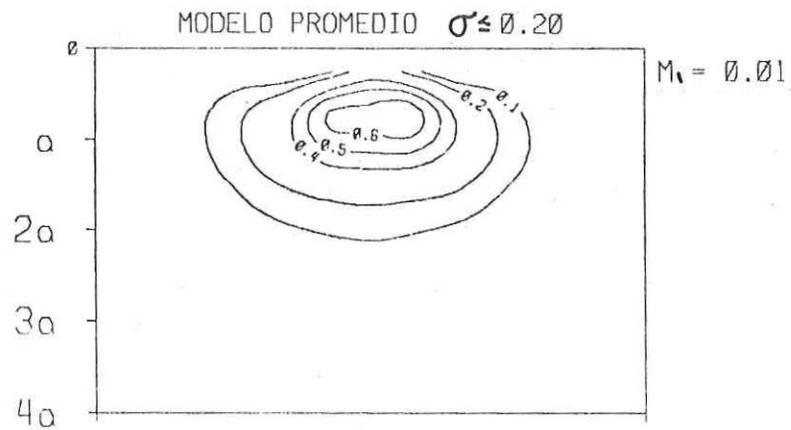
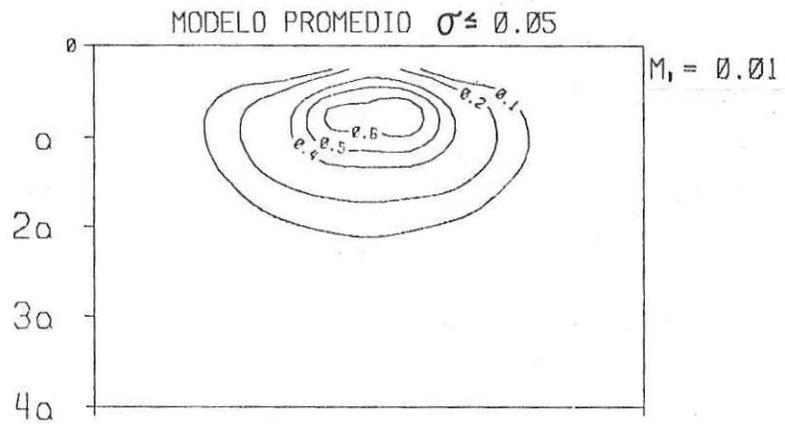
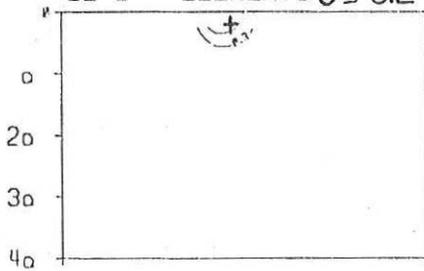


Fig.42.- Modelos promedio de cargabilidad correspondientes a la inversión de datos de los dos cilindros de la Figura 40.

RESOLUCION PARA
EL 6º ELEMENTO $\sigma \leq 0,05$



RESOLUCION PARA
EL 6º ELEMENTO $\sigma \leq 0.2$



RESOLUCION PARA
EL 6º ELEMENTO $\sigma \leq 1.0$

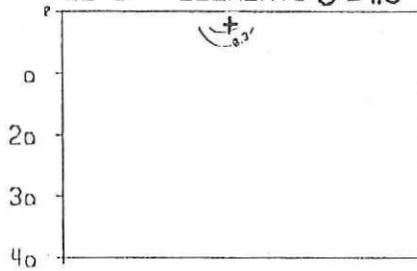


Fig.43.- Gráficas bidimensionales de la fila de la matriz de resolución para el sexto elemento de la rejilla. Los valores corresponden a desviaciones estándar menores o iguales que 0.05, 0.2 y 1.0 respectivamente.

resolución normalizada, correspondiente al sexto elemento de la rejilla para desviaciones estándar menores o iguales que 0.05, 0.2 y 1.0. En estas tres gráficas se aprecia cómo el parámetro es resuelto de manera similar para una desviación estándar pequeña que para una muy grande.

El siguiente ejemplo de aplicación es tomado del mismo artículo de Snyder (1976), y el modelo para este caso tiene la misma geometría que en el anterior, pero ahora se trata el problema de estimar la resistividad. Aquí también se considera una longitud (L) igual a 16a para la malla de parámetros.

Los dos cilindros tienen resistividad de 0.56 Ohm-m y el semiespacio de 1.0 Ohm-m. Los datos junto con el modelo hipotético se muestra en la Figura 44.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso anterior, se estimó el modelo mostrado en la Figura 45. Al igual que para PI, el modelo estimado tiene gran similitud con el modelo teórico. En ambos casos, sin embargo, no es posible saber si se trata de dos anomalías o bien de una sola.

Los modelos promedio correspondientes a dos desviaciones estándar se muestran en la Figura 46. Nuevamente los modelos

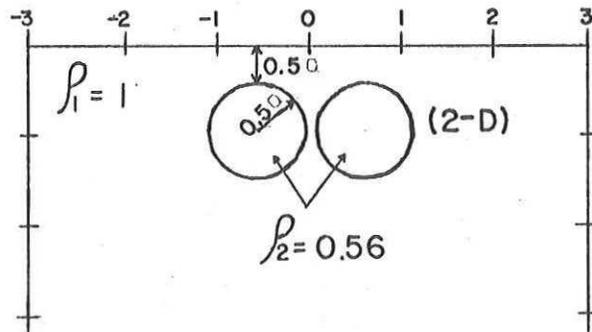
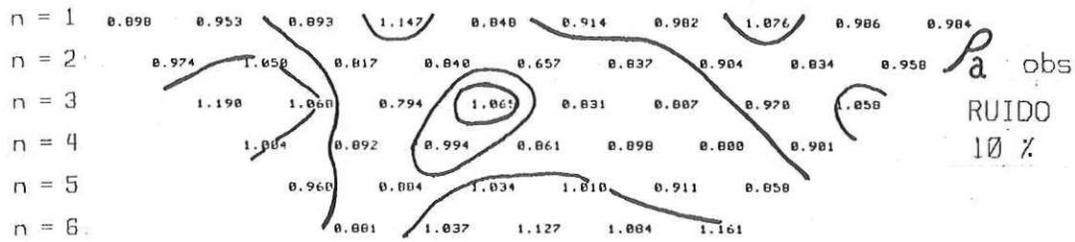


Fig.44.- Datos sintéticos de resistividad alterados con un 10% de ruido, y modelo hipotético (2-D). Los valores fueron tomados de Snyder (1976).

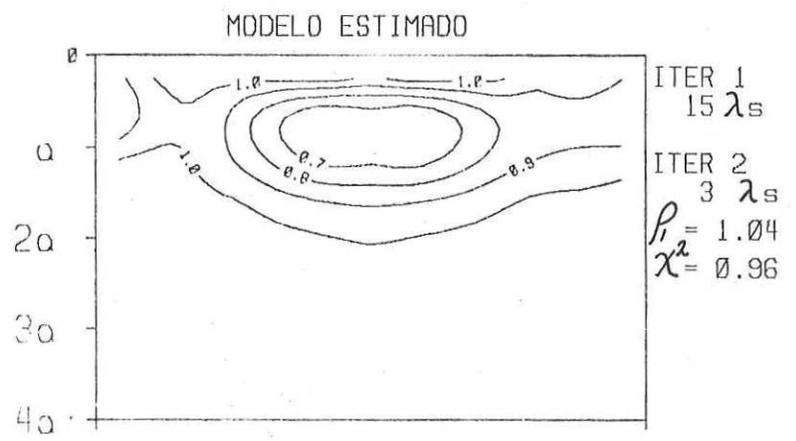
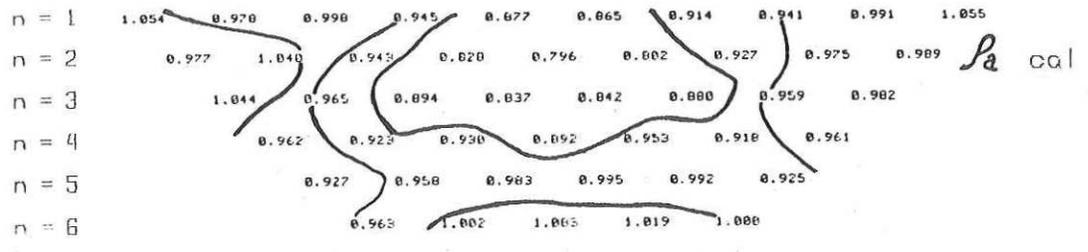
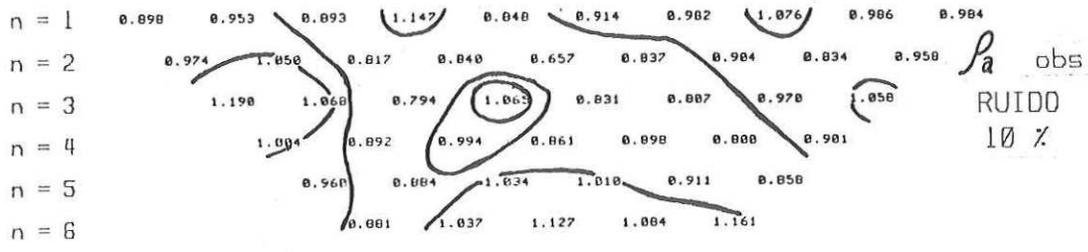


Fig.45.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de resistividad para los cilindros de la Figura 40.

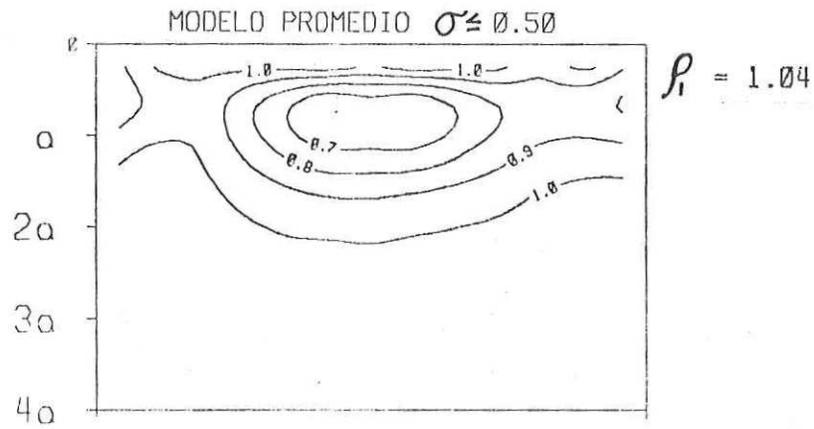
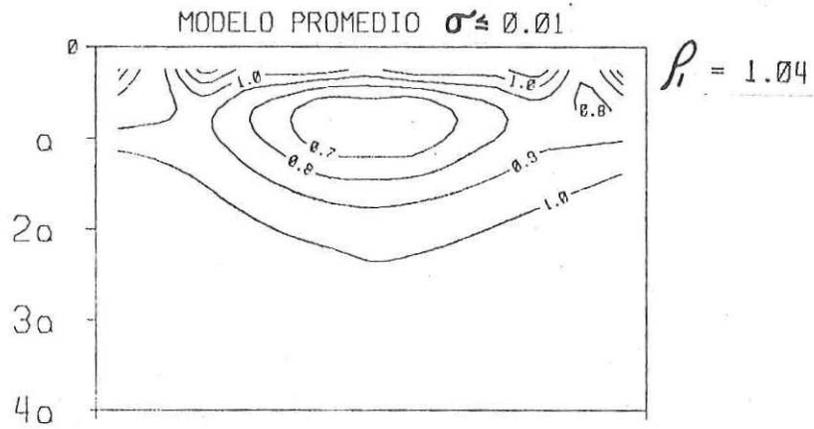


Fig.46.- Modelos promedio de resistividad correspondientes a los cilindros de la Figura 40. Los valores de desviación estándar son para el parámetro $\rho_1 K$.

promedio son muy semejantes al modelo estimado.

Para ilustrar con otro ejemplo el problema de anomalías adyacentes consideraremos datos de $M_a(\%)$ tomados de Hohmann 1978, para un modelo hipotético de dos diques verticales.

En este caso la parte inferior de los diques se encuentra a una profundidad de 5a, mientras que con la malla que se ha usado solo se puede estimar hasta una profundidad de 4a. En los ejemplos anteriores se vió como los datos no tienen capacidad de resolución para los parámetros más profundos, por lo que trataremos este caso utilizando la misma malla.

El modelo teórico y su respuesta de $M_a(\%)$ se muestran en la Figura 47.

El modelo estimado junto con los datos y los valores calculados se presentan en la Figura 48. Esta estimación logra distinguir la existencia de dos cuerpos anómalos, delimitándolos muy bien en la parte más superficial y lateralmente. Como era de esperarse, no se determina la presencia de los diques a profundidad.

En la Figura 49 se trazan los modelos promedio para desviaciones estándar de 0.2 y 0.5, teniendo estos la misma

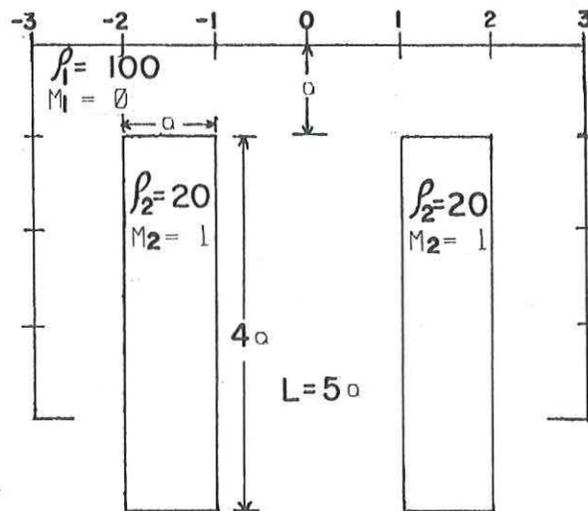
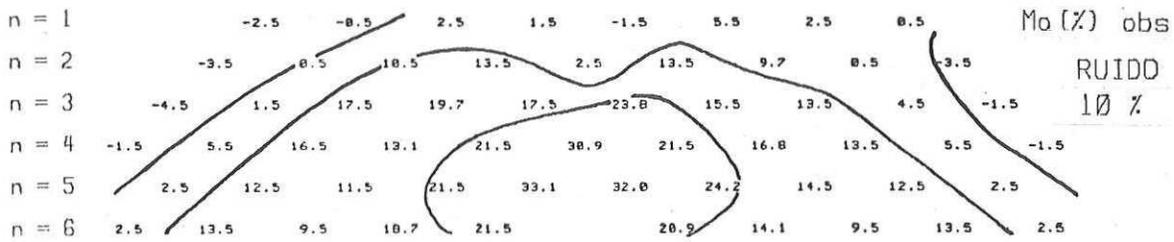


Fig.47.- Datos sintéticos de M_a (%) alterados con un 10% de ruido y el correspondiente modelo hipotético. Los valores fueron tomados de Hohmann (1978).

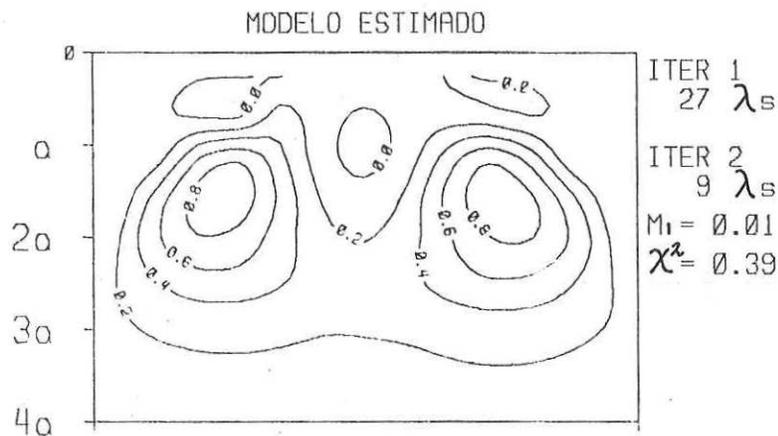
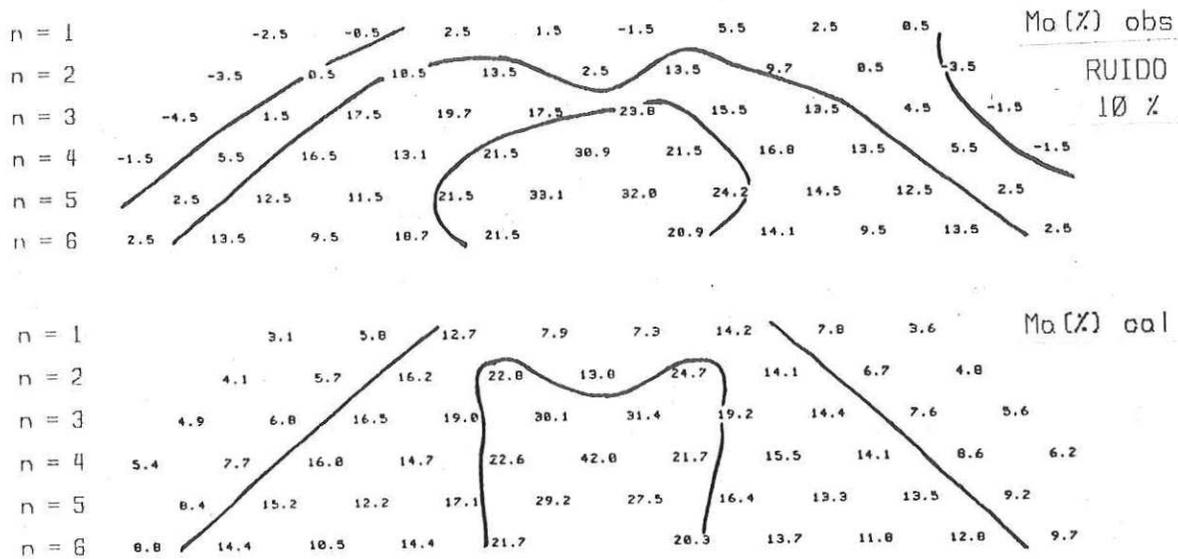


Fig.48.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondiente a la inversión de datos de PI para el modelo de la Figura 47.

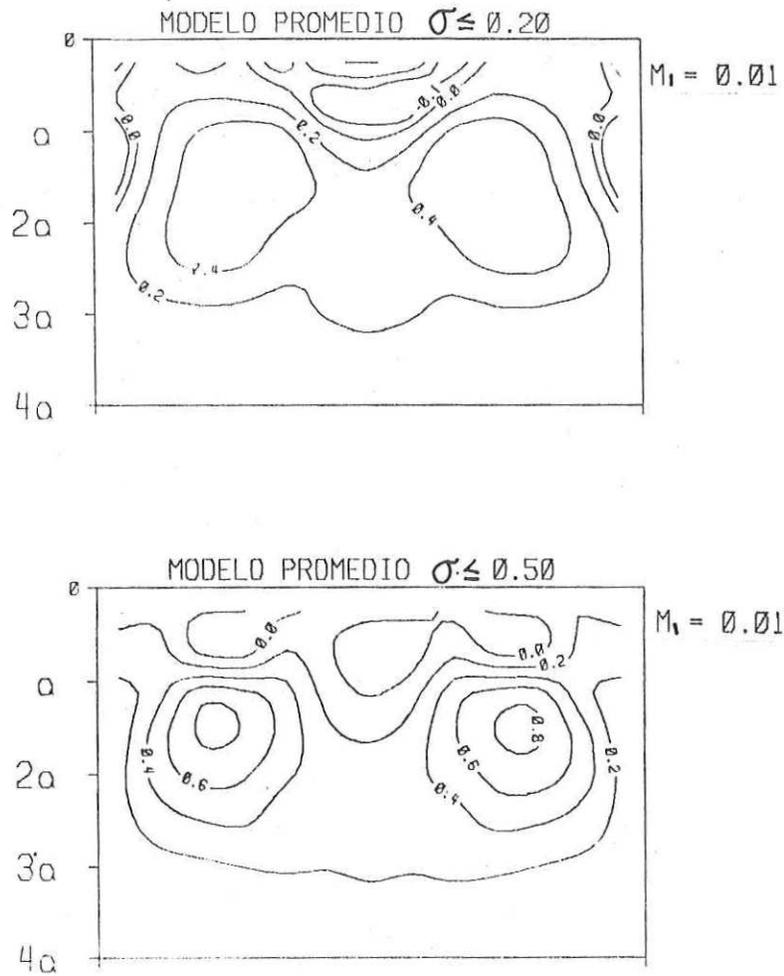


Fig. 49.- Modelos promedio de cargabilidad correspondientes a la inversión de los datos de los diques de la Figura 47.

característica de suavidad que en los casos anteriores.

IV.4 EL EFECTO DE CONTRASTE EN RESISTIVIDAD

A continuación se hacen estimaciones a partir de datos de M_a (%) correspondientes a un dique inclinado, para el cual la razón de su resistividad a la del semiespacio es de 5 y 0.2 respectivamente. Ambos casos son tomados de Hohmann (1975). Se muestran estos dos ejemplos con el propósito de ilustrar una limitación de la aproximación para bajos contrastes en resistividad. La limitación reside en que la fórmula de M_a para pequeños contrastes (II.19) no involucra las resistividades.

Primeramente podemos notar que la respuesta de cargabilidad es diferente para ambos casos. Esto se ilustra en las Figuras 50 y 52, donde se presentan los dos modelos con sus respectivas respuestas de M_a (%). La respuesta del dique de resistividad menor que la del medio adquiere los valores mayores sobre la parte más somera del dique (Figura 50). Mientras que para el otro caso los máximos de la respuesta de PI se encuentran por el lado de la parte más profunda del dique. Estas respuestas ponen de manifiesto la dependencia de la cargabilidad aparente con respecto a la resistividad de la estructura, por lo que ahora debemos pensar que la estimación correspondiente a estos dos casos

será diferente..

En la Figura 51 se muestran los datos de M_a (%) para el dique conductor junto con los valores calculados y el modelo estimado.. La Figura 53 es análoga a ésta, con la diferencia de que corresponde al dique resistivo de la Figura 52..

La estimación para el caso del dique conductor (Figura 51) nos indica la presencia de un cuerpo anómalo, en una posición aproximadamente igual que la parte más somera del modelo hipotético, pero no se logra hacer una apreciación acerca de la inclinación.. Por otro lado, la estimación correspondiente al dique resistivo (Figura 53) sugiere un cuerpo con inclinación y posición muy parecidas a las del modelo hipotético.. Esto significa que la aproximación tiene mayor validez para anomalías resistivas que para las conductoras..

A continuación se presentan resultados para una anomalía de resistividad de geometría sencilla pero con una razón de resistividades $\rho_2/\rho_1 = 0.1$ y posteriormente para una razón $\rho_2/\rho_1 = 10$.. Los datos son tomados de Hohmann (1986). La anomalía tiene sección transversal cuadrada de dimensión a , con su parte superior a una profundidad de a y longitud igual a $4a$..

Se trata el caso de anomalía sencilla con contrastes relativamente altos para observar las limitaciones del método ante este tipo de contrastes.

Los resultados correspondientes al caso en que la resistividad del medio es 100 Ohm-m y la de la anomalía es 10 Ohm-m ($\rho_2/\rho_1=0.1$) se muestran en la Figura 54. En la parte superior se muestran los datos con un 10% de ruido aleatorio, y bajo éstos la respuesta del modelo estimado, el cual se traza en la parte inferior de la figura. Similarmente, en la Figura 55, se muestran los resultados para el caso en que la resistividad del medio es 100 Ohm-m y la de la anomalía es de 1000 Ohm-m ($\rho_2/\rho_1=10$).

En ambos casos los modelos estimados presentan las mismas características entre ellos. Los dos sugieren la existencia de un cuerpo de menor tamaño que el hipotético y con su parte superior en $Z=0.5a$, además los valores anómalos son muy pequeños. Estos resultados no son tan satisfactorios como los obtenidos en los casos anteriores. Esto nos indica que el método aproximado empleado en este trabajo no proporciona buenos resultados para ρ_2/ρ_1 fuera del rango (0.1,10).

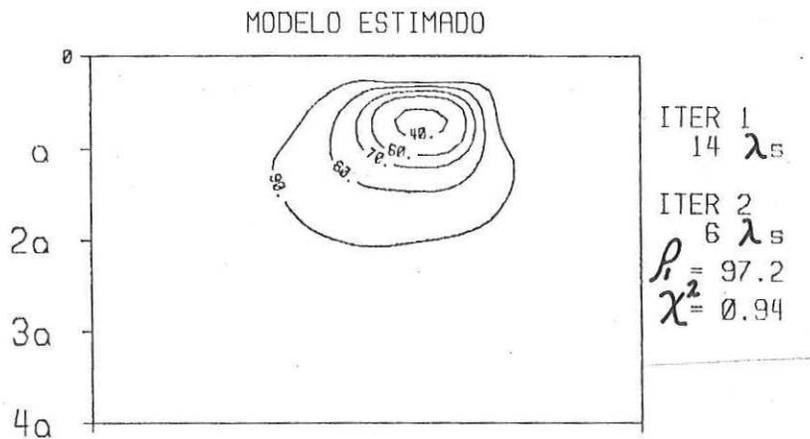
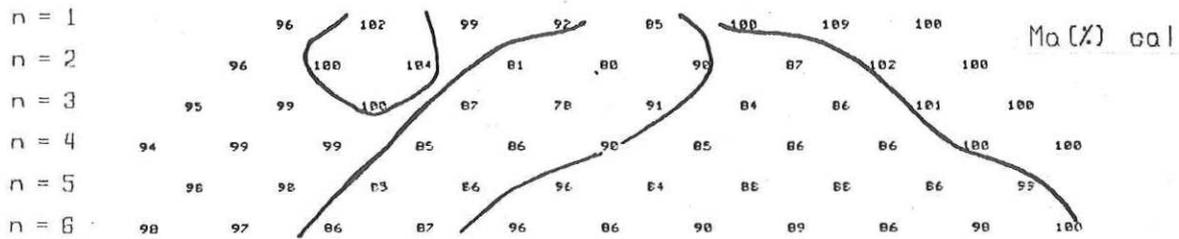
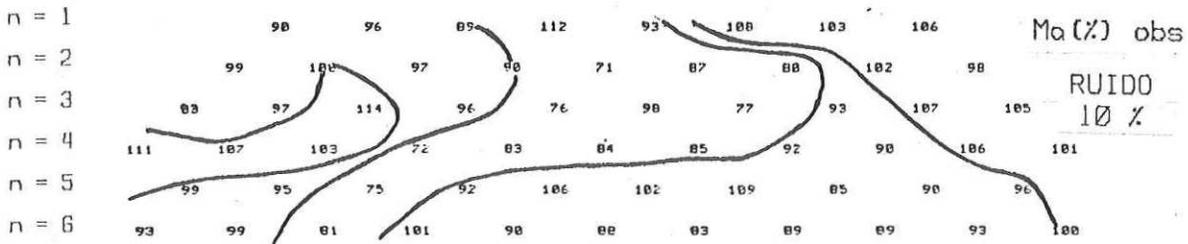


Fig.54.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de resistividad de un modelo de sección transversal cuadrada de dimensión a , con la parte superior en $Z=a$ y longitud de $4a$, con contraste $\rho_2/\rho_1=10$.

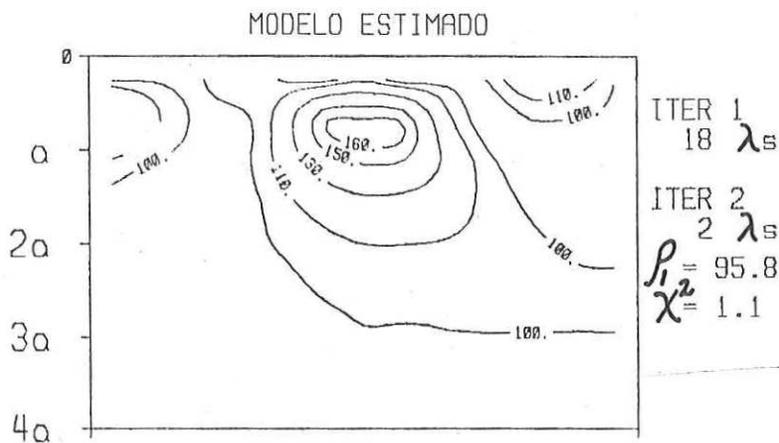
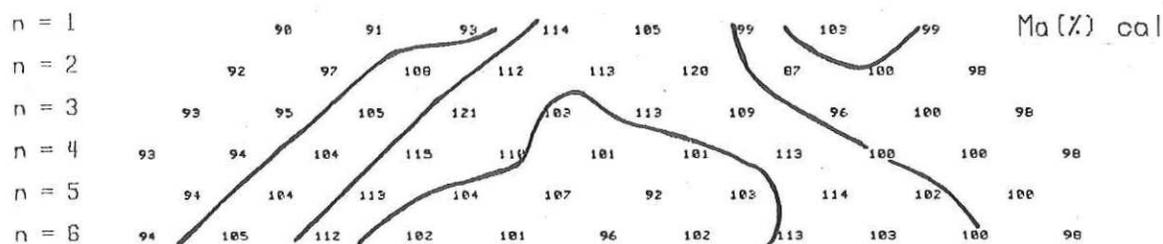
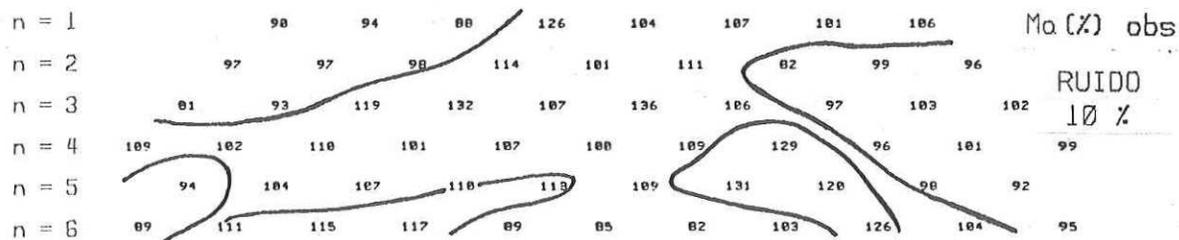


Fig.55.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de datos de resistividad de un modelo de sección transversal cuadrada de dimensión a , con la parte superior en $Z=a$ y longitud de $4a$, con contraste $\rho_2/\rho_1=0.1$

IV.5 EL EFECTO DE LA LONGITUD

Ahora utilizaremos el modelo resistivo del dique inclinado para analizar el efecto que produce el considerar una longitud equivocada al generar la matriz de derivadas. Para cumplir este propósito primero se estima el modelo considerando que éste tiene una longitud de tres unidades dipolares, cuando en realidad tiene cinco. El resultado se ilustra en la Figura 56, donde se muestra la solución junto con los datos observados y los valores calculados. Como era de esperarse, el modelo estimado para $L=3$ sugiere valores mayores de cargabilidad. Esto se debe a que entre menos volumen le asignemos a la anomalía, se requiere de material más polarizable para reproducir los datos.

La solución suponiendo que el dique tiene una longitud igual a 8 unidades se presenta en la Figura 57. A diferencia del caso anterior esta estimación conserva la inclinación del cuerpo y subestima la cargabilidad. Esto último era de esperarse ya que entre más largo sea el cuerpo, se requiere de material menos polarizable para reproducir los datos.

Aunque existen diferencias entre las estimaciones para las tres longitudes, la delimitación de la zona anómala es aproximadamente la misma. Sin embargo, es recomendable tener un buen conocimiento acerca de las dimensiones de los cuerpos

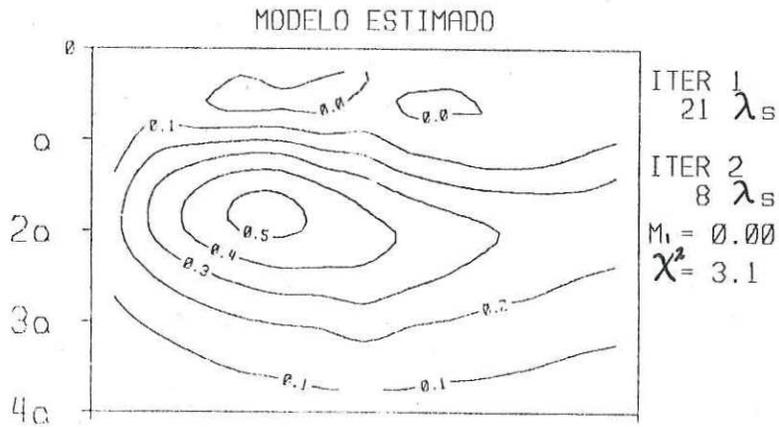
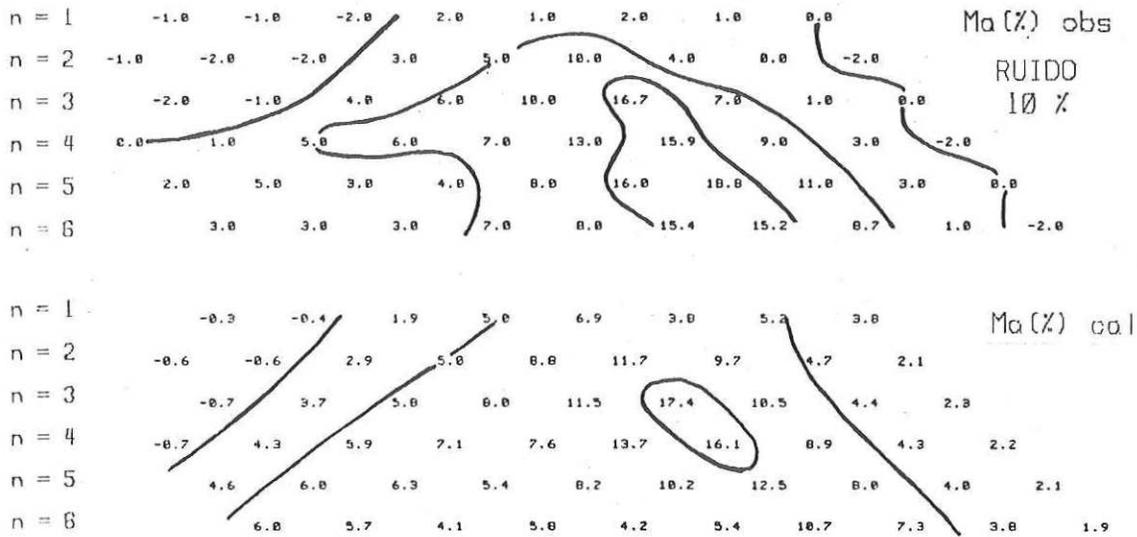


Fig.56.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondiente a la inversión de datos de PI para el modelo de la Figura 52. La inversión se realizó suponiendo $L=3$.

anómalos para hacer una estimación aceptable de la cargabilidad verdadera..

IV.6 APLICACION A DATOS DE CAMPO

Una prueba decisiva de la aplicabilidad del método de interpretación tratado en este trabajo es emplearlo con datos reales.. Para llevar ésto a cabo se utilizan datos de M_a y ρ_a tomados de Hallof (1972).. Estos datos fueron interpretados en forma conjunta por Pelton et al (1978) utilizando modelos de longitud infinita y sección transversal rectangular.. En la Figura 58 se muestran los datos de M_a y ρ_a junto con el modelo que propone Hallof (1972).. También se presenta en esta figura el modelo obtenido por Pelton et al (1978)..

Para invertir los datos de M_a suponemos que tienen un error observacional del 25%, y si éste error resulta menor que 0.1, se toma como 0.1, para evitar un sobre ajuste de los datos pequeños.. Para resistividad se les adjudicó un 25% de error a todos los datos..

El modelo que obtiene Pelton et al (1978) es bidimensional, mientras que el buscado en este trabajo tiene longitud igual a 5a.. De esta manera el modelo no se aleja mucho de la bidimensionalidad, ya que éste es muy somero y de extensión a profundidad muy corta..

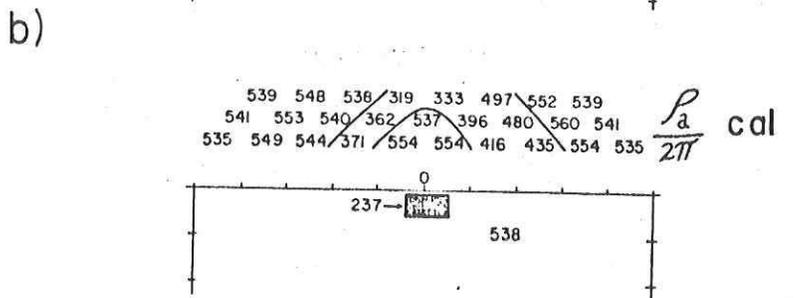
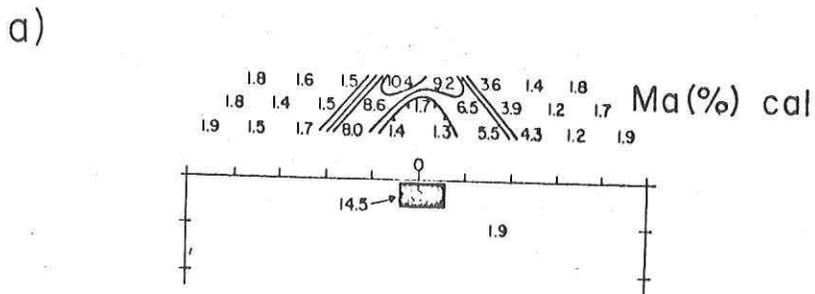
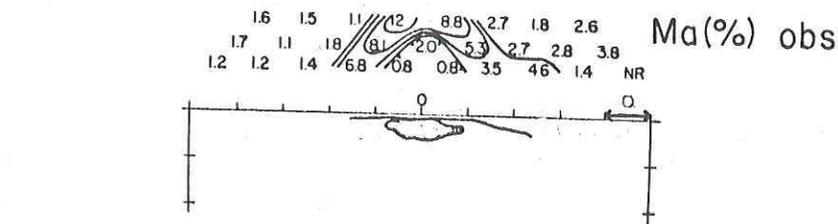


Fig.58.- Figuras tomadas de Pelton y otros (1978).
a) Resultados de la inversión de datos de polarización inducida. b) Resultados de la inversión de datos de resistividad.

Para hacer una comparación entre la primera y la segunda iteración se muestra la estimación obtenida en la primera iteración para el caso de cargabilidad en la Figura 59. Con el mismo propósito se presentan en la Figura 60 los resultados en la primera iteración para el caso de resistividad.

Los resultados de la segunda iteración se muestran en las Figura 61 y 62 para el caso de cargabilidad y resistividad, respectivamente.

Al comparar resultados de la segunda iteración con los de la primera se observa que en la segunda iteración la anomalía es un poco más compacta. Por lo tanto se considera que las soluciones obtenidas en la segunda iteración son las mejores, y a continuación se hace un análisis acerca de ellas.

Los modelos obtenidos en los dos casos indican anomalías en la misma posición y de dimensiones muy semejantes. Estos cuerpos anómalos concuerdan bastante bien con el modelo propuesto por Hallof (1972) y con el estimado por Pelton et al (1978), en cuanto a su posición y extensión lateral.

Los valores de las anomalías estimadas tienen también una gran similitud con los encontrados por Pelton y otros

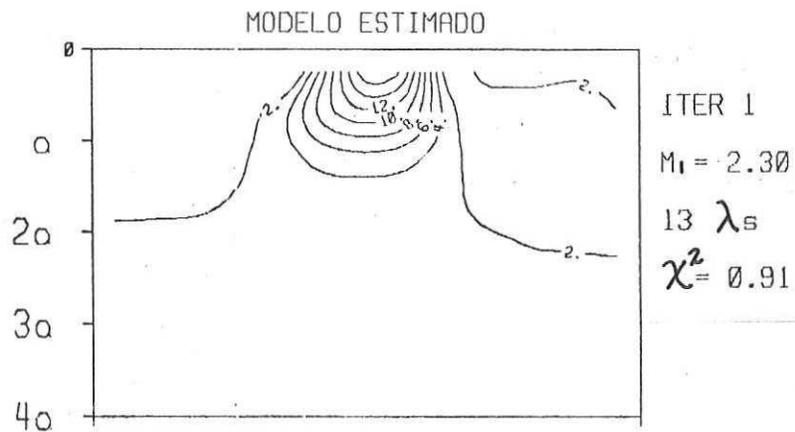
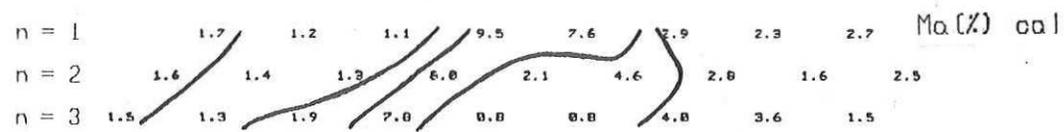
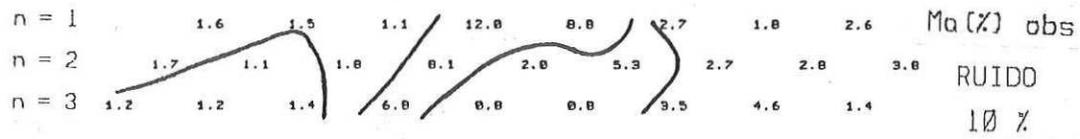


Fig.59.- Resultados obtenidos en la primer iteración correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos.

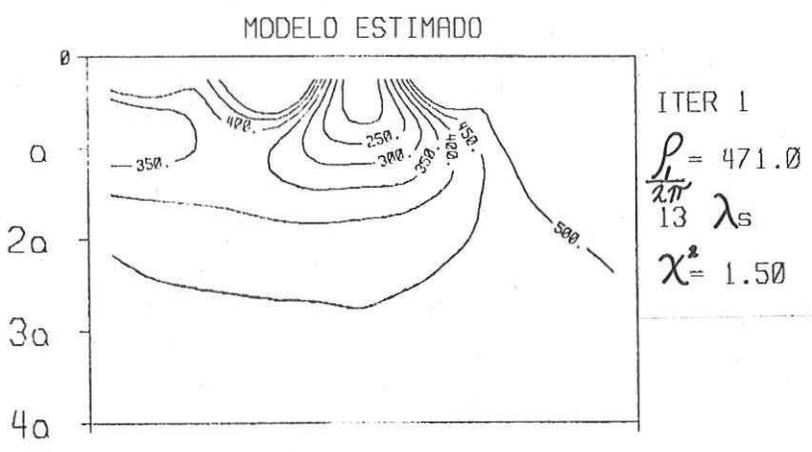
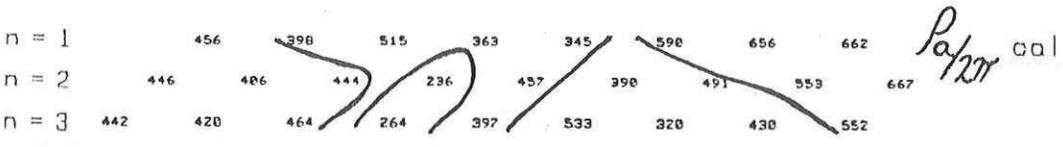
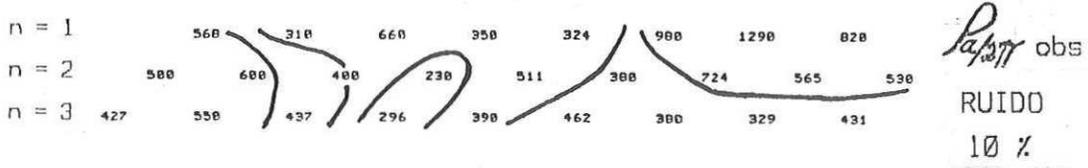


Fig.60.- Resultados obtenidos en la primer iteración correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos.

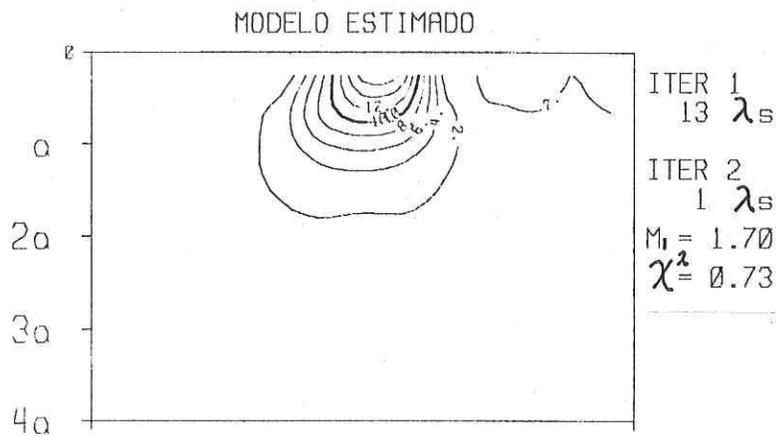
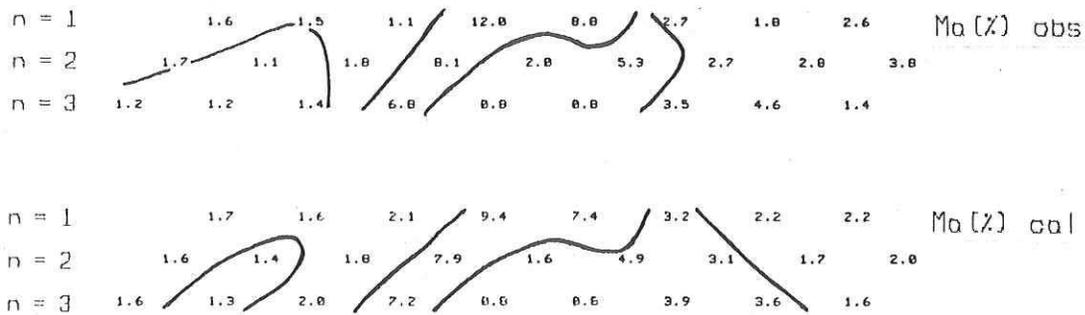


Fig.61.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos.

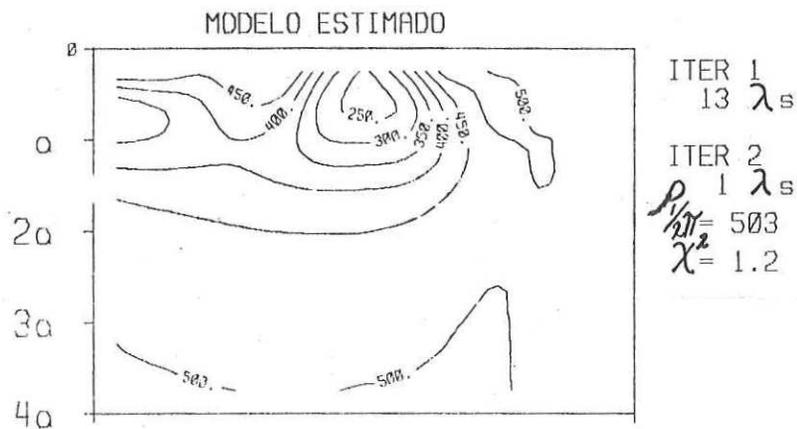
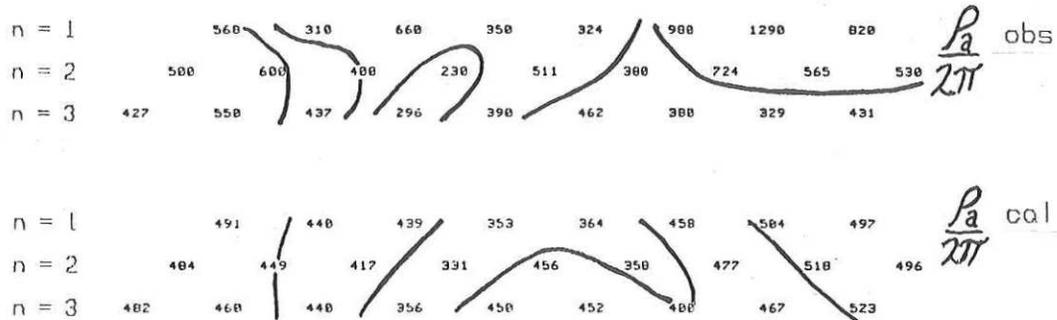


Fig.62.- Resultados obtenidos en la segunda iteración, correspondientes a la inversión de los datos mostrados en la Figura 58. La inversión se realizó suponiendo un 25% de error en los datos.

(1978).. Para el caso de PI, ellos encuentran que el semiespacio tiene un F_{ca} de 1.9 y el cuerpo anómalo de 14.5, mientras que los valores presentados en este trabajo son de 1.7 para el F_{ca} del semiespacio y de 10 a 16 para la región anómala.

Para el caso de resistividad, el modelo rectangular tiene una resistividad de 237 Ohm-m y el semiespacio de 538 Ohm-m. En la presente estimación el valor de la resistividad del medio es 503 Ohm-m y la anomalía se considera con un valor entre 250 y 350 Ohm-m.

IV. CONCLUSIONES

Los resultados presentados indican que el estimador empleado en este trabajo proporciona modelos apropiados a situaciones geológicas comunes. La aproximación asintótica es aplicable a casos reales en que existe contraste moderado en resistividad.

Una de las principales ventajas del método desarrollado consiste en que se obtienen resultados satisfactorios con solamente una o dos iteraciones. No es necesario, por otra parte, suponer de antemano la forma geométrica de la anomalía.

El uso de fórmulas analíticas para las derivadas y de formas asintóticas para calcular las respuestas de los modelos, permite efectuar inversiones con relativa rapidez. Es de esperarse que estas aproximaciones permitan que los métodos de inversión puedan aplicarse en interpretaciones de rutina. Sin embargo, es importante recordar que no se puede obtener todo sin perder algo. Es precisamente en la misma flexibilidad del método en donde reside su debilidad. La aproximación es válida solamente para bajos contrastes en resistividad. Es, en este tipo de condiciones, en las que el método proporciona mejores resultados.

En este tipo de condiciones , también, es en las que el método de polarización inducida es de mayor utilidad en problemas de exploración.

LITERATURA CITADA

Backus, G., and Gilbert, F., 1970.. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data: Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 266, 123-192..

Cavazos Garza, R., 1985.. Curvas teóricas de resistividad y PI para estructuras tridimensionales: Aproximación asintótica mediante integrales de volumen: Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de Nuevo León; Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas..

Gómez Treviño, E., 1984.. Soluciones asintóticas para el problema directo de resistividad y polarización inducida: reporte de investigación para la Universidad Autónoma de Nuevo León; Facultad de Ciencias físico-Matemáticas (sin publicar)..

Gómez Treviño, E., 1986a.. Nonlinear integral equations for electromagnetic inverse problems: Enviado para su consideración a la revista Geophysics..

Gómez Treviño, E., 1986b.. The three-dimensional resistivity and induced polarization inverse problem: (en preparación)..

Hallof, P. G., 1957. On the interpretation of resistivity

and induced polarization results: Doctoral thesis, M.I.T.
Dept. of Geol. and Geoph.

Hallof, G. P., 1961. Variable-frequency induced polarization data compared with drilling results at four properties: Northern Miner, November 30.

Hallof G. P., 1964. A comparison of the various parameters employed in the variable-frequency induced-polarization method: Geophysics, V. 29, p. 425-433.

Hallof, G. P., 1972. The induced polarization method: Presented at the 24th [nt] Geolog. Montreal, August.

Hohmann, G. W., 1975. Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling: Geophysics, V. 40, p. 309-324.

Hohmann G. W., 1978. Three-dimensional integral equation modeling: Workshop on modeling of electrical and electromagnetics methods. Mayo de 1978.

Hohmann G. W., 1986. Three dimensional resistivity-IP catalog dipole-dipole array. Univ. of Utah Research Institute.

Inman, J. R., 1975. Resistivity inversion with ridge regression: *Geophysics*, V. 40, p. 798-817.

Lanczos, C., 1961. *Linear Differential Operators*: Van Nostrand. London.

Marshal, D. J., and Madden, T. R., 1959. Induced polarization, a study of its causes: *Geophysics*, V. 24, p. 790-816.

Pelton, W. H., Rijo, L., and Swift, C. M., Jr., 1978, Inversion of two-dimensional resistivity and induced polarization data: *Geophysics*, 43, 788-803.

Petrick, W. R., Pelton, W. H., and Ward, S. H., 1977. Ridge regression applied to crustal resistivity sounding data from South Africa: *Geophysics*, V. 42, p. 995-1005.

Petrick, W. R., Sill, W. M., and Ward, S. H., 1981, Three-dimensional resistivity inversion using alpha centers: *Geophysics*, V. 46, P. 1148-1162.

Rijo, L., 1977. Electromagnetic modeling by the finite element method: Ph. D. thesis, Univ. of Utah.

Rijo, L., 1984. Inversion of three-dimensional resistivity

and induced polarization data: Presentado en la reunion anual de SEG, Atlanta, Nov., 1984.

Seigel, H. O., 1959. Mathematical formulation and type curves for induced polarization: Geophysics, V. 24, p. 547-563.

Snyder, D. D., 1976. A method for modeling the resistivity and IP response of two dimensional bodies: Geophysics, V.41, P. 997-1015.

Smith, N. C., and Vozoff, K., 1984, Two-dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data: Inst. of Elec. and Electron. Engineers, Trans. Geoscience and Remote Sensing, 22. 21-28.

Tripp, A. C., Hohmann, G. W., and Swift, C. M., Jr., 1984, Two-dimensional resistivity inversion: Geophysics, V. 49, P. 1708-1717.

Wait, J. R. (Editor), 1959. Overvoltage research and geophysical applications: London, Pergamon Press.

