

**Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada**



**ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE CONTROLADORES PARA
SISTEMAS NO LINEALES DISCONTINUOS**

**TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS**

ROQUE MARTINEZ ORTIZ

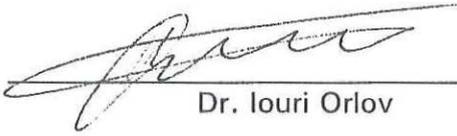
Ensenada, Baja California, Mexico. Diciembre de 2001.

TESIS DEFENDIDA POR
Roque Martínez Ortiz.
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité



Dr. Iouri Orlov

Miembro del Comité



Dr. Alejandro Márquez Martínez

Miembro del Comité



Dr. Gilberto López Mariscal

Miembro del Comité



Dr. José Luis Medina Monroy

*Jefe del Departamento de
Electrónica y Telecomunicaciones*



Dr. Luis Alberto Delgado Argote

Director de Estudios de Posgrado

6 de diciembre de 2001

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**

DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA

**DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES**

**ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE CONTROLADORES PARA
SISTEMAS NO LINEALES DISCONTINUOS**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

Roque Martínez Ortiz

Ensenada, Baja California, México. Diciembre de 2001.

RESUMEN de la tesis de Roque Martínez Ortiz, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES, con especialidad en CONTROL. Ensenada, Baja California, México, Diciembre 2001.

ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS NO LINEALES DISCONTINUOS

Resumen aprobado por:



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director de tesis

En este trabajo se realiza un análisis de estabilidad y el control de una clase de sistemas representados por ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, con términos discontinuos. Los sistemas caracterizados por términos discontinuos considerados aquí son los mecánicos con fricción tipo Coulomb. Para ello se utilizan algunos resultados que extienden la teoría de estabilidad de Lyapunov y la de control de sistemas no lineales diferenciables. Los controladores propuestos cumplen satisfactoriamente los objetivos de control, aún cuando no se tiene acceso a todo el vector de estados del sistema. Los métodos desarrollados no hacen uso de técnicas de compensación de discontinuidades.

Otras de las aportaciones de este trabajo es el diseño de observadores para este tipo de sistemas, que incluyen términos discontinuos. Con ellos es posible mejorar el desempeño del sistema controlado.

Las metodologías mencionadas se aplican al caso particular de modelos de brazos manipuladores de n grados de libertad con fricción viscosa y de Coulomb.

Palabras Claves: Sistemas discontinuos, superficies de discontinuidad, teorema de invarianza, sistemas mecánicos con fricción, observadores, brazos manipuladores.

ABSTRACT of the thesis by **Roque Martínez Ortiz**, in partial fulfillment of the requirements for the degree of **MASTER of SCIENCE in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS**, with specialty in **CONTROL**. Ensenada, Baja California, México, December 2001.

ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS NO LINEALES DISCONTINUOS

In this work, a stability analysis and control of a class of systems described by non-linear ordinary differential equations with discontinuous terms, are developed. The systems we consider here are those mechanical systems with Coulomb friction. We make use of some recent results that extend the Lyapunov stability and non-linear differentiable systems control theories. The controllers proposed satisfy the control objectives, even when the state vector is not completely measured. The developed methods do not use discontinuity compensation techniques.

Another contribution of this work is the design of observers for systems above, that include discontinuous terms. With them it is possible to improve the behaviour of the controlled systems.

These methodologies have been applied particularly to robotic manipulator models n degrees of freedom with viscous and Coulomb friction terms.

Key words: Discontinuous systems, discontinuous surfaces, invariance theorem, mechanical systems with friction, observers, robot manipulators.

A Coco, Rosa y Mayela.

A mis padres y hermanos.

AGRADECIMIENTOS

A Dios.

Al Dr. Joaquín Álvarez Gallegos por brindarme su apoyo y su amistad durante esta etapa de mi vida.

A todos quienes con su trabajo y apoyo contribuyeron para la realización de este proyecto.

A mi familia, siempre.

A Dora Icela, nunca imaginé que existiera.

A mis compas: Didier, Cornelio y Paty.

A Carolina, por todos esos años.

También quiero agradecer al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), porque me dieron la oportunidad de realizar mis estudios de maestría.

CONTENIDO

I. Introducción	1
I.1 Antecedentes	3
I.2 Objetivos	5
I.3 Contenido de la tesis	6
II. Ecuaciones diferenciales con discontinuidades	7
II.1 Sistemas discontinuos	7
II.2 Ecuaciones diferenciales con discontinuidades en el lado derecho	9
II.3 Definiciones de solución de ecuaciones diferenciales autónomas con discontinuidades en el lado derecho	12
II.3.1 Definición del convexo más simple	14
II.3.2 Definición usando el método de control equivalente	17
II.4 Conclusiones	21
III. Análisis de estabilidad	22
III.1 Teorema de invarianza para sistemas discontinuos	22
III.2 Gradiente generalizado	24
III.3 Sistemas bidimensionales	25
III.3.1 Lazo abierto	26

III.3.2 Lazo cerrado	29
III.4 Sistemas n -dimensionales	34
III.4.1 Lazo abierto	35
III.4.2 Lazo cerrado	38
III.5 Conclusiones	43
IV. Control estático	45
IV.1 Control de posición de sistemas bidimensionales	45
IV.1.1 Controladores discontinuos con compensación de gravedad	48
IV.1.2 Controladores discontinuos sin compensación de gravedad	49
IV.2 Control de posición de sistemas n -dimensionales	51
IV.2.1 Controladores discontinuos con compensación de gravedad	55
IV.2.2 Controladores discontinuos sin compensación de gravedad	57
IV.3 Conclusiones	59
V. Control dinámico	61
V.1 Observador de velocidad para sistemas bidimensionales	61
V.1.1 Control de posición	63
V.1.2 Robustez frente a incertidumbres en la fricción	68
V.2 Observador de velocidad para sistemas n -dimensionales	72
V.2.1 Control de posición	74
V.2.2 Robustez frente a incertidumbres en la fricción	81
V.3 Conclusiones	84

VI. Conclusiones	86
VI.1 Trabajo a futuro	87
Bibliografía	88
APÉNDICE A. Unicidad de soluciones a la derecha de ecuaciones diferenciales discontinuas	89
A.1 Control continuo	90
A.2 Control discontinuo	91
A.2.1 Control estático	91
A.2.2 Control dinámico	92
APÉNDICE B. Robot de 2 grados de libertad	94
B.1 Modelo dinámico	94

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
1. Oscilador mecánico.	2
2. Diagrama de bloques de un sistema discontinuo.	8
3. Superficies de conmutación de un sistema bidimensional.	9
4. Soluciones de $\dot{x} = 1 - 2\text{sgn}(x)$	10
5. Interpretación geométrica de la definición de solución del convexo más simple. ...	16
6. Intersección de superficies de discontinuidad.	17
7. Interpretación geométrica de la definición de solución usando el método de control equivalente.	19
8. Péndulo.	28
9. Retratos de fase del péndulo sin ley de control.	30
10. Retratos de fase del péndulo con una ley de control continua.	33
11. Robot de 2 g.d.l.	38
12. Estados del robot de 2 g.d.l. sin ley de control.	39
13. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control continua.	43
14. Retratos de fase del péndulo con una ley de control discontinua estática con compensación de gravedad.	49
15. Entradas de control del péndulo con una ley de control discontinua estática con compensación de gravedad.	50
16. Retratos de fase del péndulo con una ley de control discontinua estática sin compensación de gravedad.	51
17. Entradas de control del péndulo con una ley de control discontinua estática sin compensación de gravedad.	52
18. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua estática con compensación de gravedad.	57
19. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua estática sin compensación de gravedad.	59
20. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.	67
21. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.	68

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

22. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.	71
23. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.	72
24. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.	79
25. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.	80
26. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.	84
27. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.	85
28. Robot de 2 g.d.l.	94

Capítulo I

Introducción

En el presente trabajo de tesis se ha realizado un estudio sobre una clase de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias con términos discontinuos. Conceptos matemáticos relacionados con sus soluciones, la estabilidad de las mismas, un procedimiento de diseño de controladores estáticos, así como varios diseños de controladores dinámicos son analizados en forma detallada.

Un número considerable de procesos en mecánica, ingeniería eléctrica/electrónica y otras áreas, son caracterizados por modelarse con ecuaciones diferenciales que contienen términos con discontinuidades con respecto al tiempo o al estado, o a ambos. Esta situación se presenta con frecuencia en sistemas de control automático donde el deseo de mejorar el desempeño del sistema, minimizar la potencia consumida para propósitos de control, restringir el rango de posibles variaciones de parámetros de control, entre otros, conduce a controles en forma de funciones discontinuas del estado y de la entrada del sistema (Utkin, 1992).

Sin embargo, debido a que actualmente no existe una teoría general para sistemas discontinuos y puesto que una gran variedad de funciones discontinuas o seccionalmente diferenciables pueden expresarse en términos de la función signo, una práctica común es aproximar esta función por medio de una función continua o por una continuamente diferenciable e incluir, en el diseño del controlador términos de compensación (“cancelación”)

de los elementos discontinuos (González Elías, 2000). Esta técnica, aún cuando facilita el análisis y, para muchas situaciones prácticas, ofrecen soluciones adecuadas, no permiten que el objetivo de control se cumpla con alto grado de precisión.

Los mecánicos constituyen una clase importante de sistemas discontinuos, debido a que la fricción seca o de Coulomb puede ser descrita cualitativamente sólo por la función no-lineal signo, cuyo estudio se ha enfocado recientemente al diseño de algoritmos de compensación que le permitan al sistema de control disminuir los efectos nocivos de la fricción.

Un ejemplo típico de un sistema mecánico con fricción seca (Coulomb) es el oscilador que se muestra en la figura 1, cuya fuerza de resistencia al desplazamiento puede tomar uno de dos valores de signo opuesto dependiendo de la dirección del movimiento. Entonces, la ecuación diferencial discontinua que lo describe es

$$m\ddot{x} + P(\dot{x}) + kx = 0,$$

donde x es desplazamiento, m es masa, k es la rigidez del resorte, $P(\dot{x}) = P_0 \text{sgn}(\dot{x})$,

$$\text{sgn}(\dot{x}) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{con } \dot{x} \in R^+ \\ -1 & \text{con } \dot{x} \in R^- \\ [-1, 1] & \text{con } \dot{x} = 0 \end{cases}$$

es la función signo y P_0 es una constante positiva.

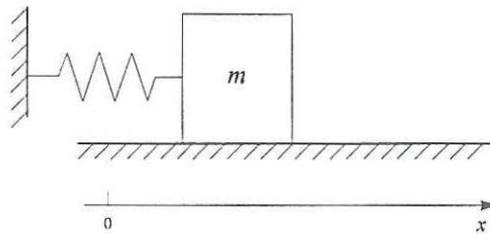


Figura 1. Oscilador mecánico.

Así, la alternativa propuesta en este trabajo considera la naturaleza discontinua de los sistemas mecánicos, es decir las ecuaciones diferenciales con discontinuidades que los representan, para su análisis y control. Esto abre la posibilidad de que la fuerza de fricción no sea directamente contrarrestada, ignorando la complejidad del comportamiento de este fenómeno físico, al buscar el cumplimiento de los objetivos de control.

I.1 Antecedentes

Durante el desarrollo de la teoría de control automático se han realizado intensas investigaciones sobre sistemas discontinuos de control. En particular, los reguladores del tipo relevador fueron ampliamente utilizados al implementar los primeros sistemas de control retroalimentados en el control de plantas industriales (Utkin, 1992). La razón fue su implementación física simple y el deseo de usar recursos para el control con máxima eficacia. Publicaciones como la de Flügge-Lotz en 1953 (Johansson *et al.*, 1999) y la de Tsytkin en 1955 (Utkin, 1992) fueron los primeros esfuerzos para la generalización teórica de la amplia diversidad de análisis y métodos de diseño para sistemas con relevadores (o control bang-bang, según Flügge-Lotz) (Utkin, 1992).

El estudio de sistemas dinámicos discontinuos es un problema multidisciplinario que abarca matemáticas, teoría de control y aspectos de aplicación. Una y otra vez, este problema ha sido planteado por matemáticos, físicos e ingenieros, tratándolo desde sus diferentes puntos de vista. Los resultados obtenidos por especialistas en diferentes disciplinas casi siempre han tenido un efecto positivo significativo en el desarrollo de la teoría de control. Basta mencionar algunos trabajos en la teoría de oscilaciones de sistemas no lineales

discontinuos (Utkin, 1992), estudios matemáticos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias con discontinuidades en su lado derecho (Filippov, 1988) o problemas variacionales de planteamientos no clásicos (Utkin, 1992).

Según Utkin (Utkin, 1987; Utkin, 1992), los sistemas de control discontinuos pueden proporcionar una herramienta efectiva para la solución de problemas de control para plantas con dinámica compleja. El método de control por modos deslizantes, con sus características de desacoplamiento y de rechazo a la influencia de perturbaciones e incertidumbres en la actuación del sistema, es una prueba de ello.

Recientemente, motivados por el creciente interés en sistemas dinámicos híbridos, cuyos modelos simplificados corresponden a sistemas discontinuos (Branicky, 1998), algunos autores han estudiado control óptimo (Skafidas *et al.*, 1999) y el problema de estabilidad para sistemas de estructura variable o con controladores de tipo relevador (Skafidas *et al.*, 1999).

Sin embargo, aún cuando en la actualidad existe una considerable cantidad de publicaciones sobre sistemas dinámicos discontinuos, una teoría general para su análisis y control no existe, por lo que no se ha alcanzado una total comprensión¹ de estos sistemas.

Por otro lado, puesto que los modelos de fricción propuestos hasta ahora no logran describir este fenómeno completamente, el control de sistemas mecánicos utilizando algoritmos de compensación puede ser no satisfactorio, principalmente en tareas de gran precisión.

¹ tanto matemática como físicamente

Por lo tanto, últimamente algunos investigadores de control automático se han dedicado al estudio de sistemas discontinuos que representan, entre otros, a sistemas mecánicos con fricción, tratando de disminuir los efectos indeseados que este fenómeno físico produce (Alvarez Gallegos *et al.*, 2000).

I.2 Objetivos

En este proyecto de tesis se incluye un estudio de una clase de ecuaciones diferenciales ordinarias con términos discontinuos. El objetivo general es proponer alternativas de diseño de controladores estáticos y dinámicos para sistemas así representados. Los algoritmos de control a desarrollar no deberán hacer uso de técnicas de compensación de discontinuidades. Los sistemas discontinuos considerados serán sistemas mecánicos con fricción viscosa y de Coulomb, donde esta última será descrita cualitativamente sólo por la función no lineal signo.

Los objetivos particulares de este trabajo son los siguientes:

- Estudiar las características fundamentales de sistemas dinámicos representados por una clase de ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales, seccionalmente diferenciables.
- Analizar la estabilidad de sistemas discontinuos autónomos.
- Diseñar controladores de posición estáticos y analizar su aplicación a una clase de modelos de sistemas mecánicos.

- Diseñar controladores de posición dinámicos y analizar su aplicación a una clase de modelos de sistemas mecánicos.

I.3 Contenido de la tesis

El capítulo II es una introducción al estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias con términos discontinuos en el lado derecho. Se revisan características fundamentales de estos sistemas dinámicos, así como las definiciones de solución más utilizadas.

En el capítulo III se realiza el análisis de estabilidad para sistemas mecánicos con fricción viscosa y de Coulomb con diferentes leyes de control. Para este fin se utiliza un principio de invarianza para sistemas discontinuos. Los sistemas discontinuos considerados aquí y en el resto del trabajo son autónomos.

Un procedimiento de diseño de controladores de posición estáticos y dinámicos, y su aplicación a modelos de sistemas físicos para esta clase de sistemas, se presentan en los capítulos IV y V.

Finalmente las conclusiones son incluidas en el capítulo VI.

Capítulo II

Ecuaciones diferenciales con discontinuidades

En este capítulo se presentan los conceptos matemáticos que sustentan el análisis y los esquemas de control propuestos aquí y que se darán en los capítulos siguientes. Se incluye una introducción a los sistemas bajo estudio, con definiciones y conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias con términos discontinuos en el lado derecho.

II.1 Sistemas discontinuos

Los sistemas discontinuos pueden encontrarse en la literatura como sistemas de estructura variable, sistemas con controladores tipo relevador, sistemas conmutados, sistemas multimodo, etc.. Incluso, en sistemas híbridos, donde la combinación de procesos lógicos y continuos aparece, los sistemas discontinuos son considerados como modelos simples de sus partes continuas (Branicky, 1998).

En este trabajo, un sistema discontinuo es caracterizado porque el lado derecho de la ecuación de estado que describe su dinámica es discontinuo con respecto al tiempo, al estado, o a ambos.

Ejemplos típicos de sistemas discontinuos incluyen sistemas de transmisión de automóviles y para motores de pasos, manejadores de discos de computadoras, sistemas de fabricación flexibles, circuitos electrónicos de potencia y una amplia variedad de otras aplicaciones en ingeniería (Skafidas *et al.*, 1999).

El modelo en diagrama de bloques considerado aquí para sistemas discontinuos se muestra en la figura 2, donde la planta y todos los controladores son continuos². Como

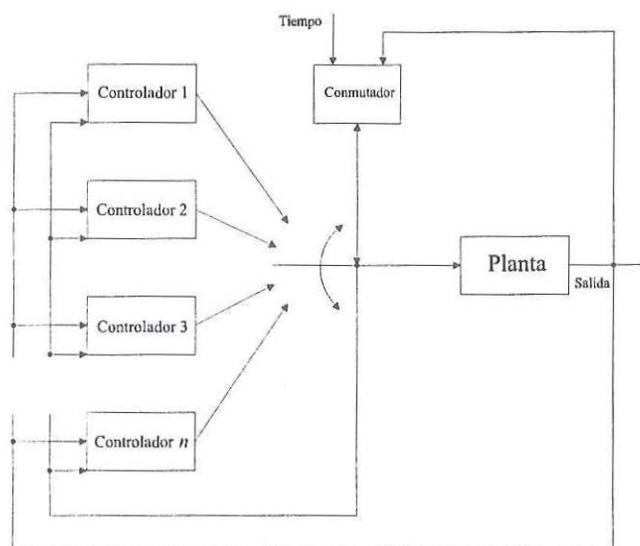


Figura 2. Diagrama de bloques de un sistema discontinuo.

se puede observar fácilmente, una característica fundamental de estos sistemas es la conmutación que se efectúa entre sus diferentes controladores. Así, en el espacio de estados de un sistema discontinuo, estos “cambios” de controladores definen lo que en adelante se llamaran “las superficies de medida cero”. Los bloques llamados controladores pueden formar parte del sistema o ser introducidos con propósitos de control.

Consideremos el caso de sistemas bidimensionales (R^2). Si ahora el sistema de la figura 2 es visto como una amalgama de sistemas continuos f_1, f_2, \dots, f_n , una posible división de los campos vectoriales del espacio de estados correspondiente a este sistema

² Una teoría general para sistemas continuos puede ser encontrada en (Khalil, 1996)

discontinuo se muestra en la figura 3, donde S_1, S_2, \dots, S_n , son “las superficies de medida cero” (superficies de conmutación).

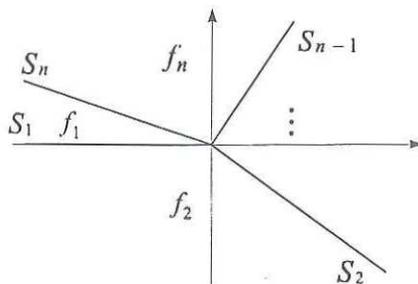


Figura 3. Superficies de conmutación de un sistema bidimensional.

Es importante mencionar que precisamente esta característica de división es la responsable que la extensión de la teoría de análisis y control de sistemas continuos para los sistemas discontinuos no sea sencilla. Por ejemplo, la estabilidad de los subsistemas descritos por f_1, f_2, \dots, f_n no implica la estabilidad del sistema global discontinuo (Branicky, 1998).

En las dos siguientes secciones se presenta una definición formal de sistemas discontinuos.

II.2 Ecuaciones diferenciales con discontinuidades en el lado derecho

Una solución de la ecuación diferencial con el lado derecho continuo,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x),$$

es una función $x(t)$ derivable que satisface esta ecuación en un cierto intervalo.

Esta definición no es válida para ecuaciones con discontinuidades en el lado derecho. Esto se puede observar fácilmente en los siguientes ejemplos (Filippov, 1988).

Ejemplo 1. Sea $\dot{x} = \text{sgn}(t)$. Para $t < 0$, $\dot{x} = -1$, y su solución es $x = -t + c_1$. Para $t > 0$, $\dot{x} = 1$, siendo su solución $x = t + c_2$.

Según el requerimiento de solución continua para $t = 0$, tenemos que

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} (-t + c_1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t + c_2), \quad x(0) = c_1 = c_2.$$

Así, la solución es expresada por la formula $x(t) = |t| + c$, y la derivada $\dot{x}(t)$ no existe para $t = 0$.

Ejemplo 2. Considérese $\dot{x} = 1 - 2\text{sgn}(x)$. Para $x < 0$, $\dot{x} = 3$, y su solución es $x(t) = 3t + c_1$. Para $x > 0$, $\dot{x} = -1$, siendo su solución $x(t) = -t + c_2$. En la figura 4 se muestra las soluciones de este sistema para diferentes condiciones iniciales. Cuando

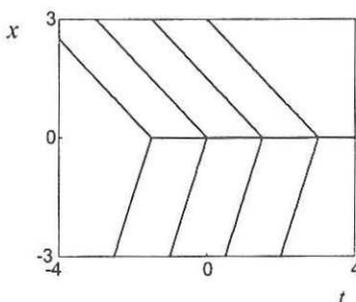


Figura 4. Soluciones de $\dot{x} = 1 - 2\text{sgn}(x)$.

t se incrementa, cada solución alcanza la línea $x = 0$. La dirección del campo vectorial \dot{x} impide a la solución dejar esta línea hacia arriba o hacia abajo. Si la solución continúa a lo largo de esta línea, la función $x(t) = 0$ obtenida no satisface la ecuación en el sentido

usual puesto que para esto $\dot{x} = 0$, y para $x = 0$ el lado derecho de la ecuación tiene el valor $1 - 2\text{sgn}(0) \neq 0$.

Así, la consideración de ecuaciones diferenciales con discontinuidades en el lado derecho requiere una generalización del concepto de solución. En casos donde el lado derecho de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ es continuo en x y discontinuo solamente en t , usualmente la generalización del concepto de solución se lleva a cabo con solo un argumento matemático (en el ejemplo 1 fue el de solución continua). Sin embargo, en casos donde el lado derecho de la ecuación es discontinuo en x , estos argumentos matemáticos son frecuentemente insuficientes. Entonces la solución es definida por medio de un método límite, tomando en cuenta el significado físico del problema dado (Filippov, 1988).

La generalización del concepto de solución debe enfrentar necesariamente los siguientes requisitos (Filippov, 1988):

1. Para ecuaciones diferenciales con un lado derecho continuo la definición de una solución debe ser equivalente a la usual.
2. Para la ecuación $\dot{x} = f(t)$ las soluciones deben ser las funciones $x(t) = \int f(t)dt + c$ solamente.
3. Bajo cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ en una región dada, la solución debe de existir (al menos para $t > t_0$) y ser continua hasta la frontera de esta región o hasta infinito, es decir $(t, x) \rightarrow \infty$.

4. La definición de una solución debe servir como una descripción de una clase de procesos bastante general en sistemas físicos.

Puesto que las ecuaciones con discontinuidades en el lado derecho son investigadas por métodos conocidos, las siguientes condiciones también deben satisfacerse:

5. El límite de una secuencia de soluciones uniformemente convergente debe ser una solución.
6. Bajo los cambios de variables comúnmente usados, una solución puede ser transformada a otra solución.

Muchos resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales ya han sido extendidos (algunas veces con alteraciones necesarias) a ecuaciones diferenciales con discontinuidades en el lado derecho. Por lo tanto, estas ecuaciones son analizadas usualmente por los mismos métodos de las ecuaciones diferenciales con el lado derecho continuo.

En este trabajo de investigación se consideran ecuaciones diferenciales con el lado derecho discontinuo sólo en x (caso del ejemplo 2), ya que los sistemas autónomos mecánicos con fricción son discontinuos sólo en algunos estados. A continuación se revisan las definiciones de solución más conocidas para este tipo de sistemas discontinuos.

II.3 Definiciones de solución de ecuaciones diferenciales autónomas con discontinuidades en el lado derecho

Para generalizar el concepto de solución a ecuaciones diferenciales con discontinuidades en el lado derecho, definimos lo siguiente.

Una función $f(x)$ es llamada continua a tramos en un dominio finito G de un espacio n -dimensional x si el dominio G consiste de un número finito de dominios G_i ($i = 1, \dots, l$), en cada uno de los cuales la función f es continua hasta su frontera, y de un conjunto de medida cero M que consiste de los puntos de la frontera de estos dominios. La función es continua en el dominio hasta su frontera si, cuando su argumento se aproxima a cada punto de su frontera, la función tiende a un límite finito, posiblemente a diferentes límites para diferentes puntos de la frontera. Si el dominio G es infinito, entonces en esta definición cada parte finita del dominio G debe tener puntos comunes solamente con un número finito de dominios G_i .

Considérese una ecuación o un sistema en notación vectorial

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

donde f es una función continua a tramos en un dominio G ; $x \in R^n$, $\dot{x} = dx/dt$; M es un conjunto (de medida cero) de puntos de discontinuidad de la función f .

El caso más frecuente, y que será tratado aquí, es cuando el conjunto M consiste de un número finito de hipersuperficies. En un espacio m -dimensional, un conjunto S es llamado una hipersuperficie k -dimensional si en la vecindad de cada uno de sus puntos a (o un conjunto de puntos a de los puntos S) todas las coordenadas de los puntos del conjunto S son funciones continuas de algunas k coordenadas variando sobre un cierto dominio k -dimensional $G^k(a)$ (Filippov, 1988). Por ejemplo,

$$x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_k) \in C, \quad i = 1, \dots, m; \quad (x_1, \dots, x_k) \in G^k(a).$$

En adelante, una hipersuperficie $(m - 1)$ -dimensional en un espacio m -dimensional será llamada superficie.

Así, si las soluciones del sistema (1) fuera de una superficie S se aproximan a ésta por un lado y la abandonan por el otro, entonces cualquier solución $x(t)$ cruza S ; si las soluciones se aproximan a S por ambos lados, entonces existe velocidad de movimiento \dot{x} en la superficie de discontinuidad (también llamada: velocidad de movimiento en modo deslizante); si las soluciones se alejan de S por ambos lados, entonces cualquier solución $x(t)$ en esta superficie para $t = t_1$ puede o no abandonarla para $t > t_1$ (la velocidad de movimiento en modo deslizante es inestable y no ocurre en sistemas reales (Filippov, 1988)).

Como se verá luego, la superficie de discontinuidad S podrá también representar una intersección de superficies de discontinuidad.

II.3.1 Definición del convexo más simple

Considérese que para cada punto $x \in G$ el conjunto $F_0(x)$ es el conjunto cerrado convexo más simple conteniendo todos los valores límite de la función $f(x^*)$ para $x^* \notin M, x^* \rightarrow x$.

Entonces, una solución de la ecuación (1) es una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F_0(x) \tag{2}$$

En puntos de continuidad de la función f el conjunto F_0 consiste de un punto $f(x)$, y la solución satisface la ecuación (1) en el sentido usual. Si el punto $x \in M$ se encuentra en la frontera de dos o más dominios G_1, \dots, G_k , el conjunto $F_0(x)$ es un segmento, un

polígono conexo, o un poliedro con vértices $f_i(x)$, $i \leq k$, donde

$$f_i(x) = \lim_{x^* \in G_i, x^* \rightarrow x} f(x^*) \quad (3)$$

Todos los puntos $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$) están contenidos en $F_0(x)$, pero no es necesario que todos ellos sean vértices.

Considérese el caso donde la función $f(x)$ es discontinua en una superficie suave S definida por la ecuación $\varphi(x) = 0$. La superficie S separa su vecindad en el espacio x en los dominios G^- y G^+ . Para el punto x^* aproximándose al punto $x \in S$ desde los dominios G^- y G^+ , definimos los valores límite de la función $f(x^*)$ como

$$f^-(x) = \lim_{x^* \in G^-, x^* \rightarrow x} f(x^*), \quad f^+(x) = \lim_{x^* \in G^+, x^* \rightarrow x} f(x^*) \quad (4)$$

Entonces el conjunto $F_0(x)$ es un segmento lineal que une los puntos finales de los vectores $f^-(x)$ y $f^+(x)$ que inician en el punto x .

Si este segmento se encuentra en un lado del plano P tangente a la superficie en el punto x , las soluciones pasan de un lado de la superficie S al otro (figura 5a)

Si este segmento intersecta el plano P , el punto de intersección es el punto final del vector $f^0(x)$ que determina la velocidad de movimiento $\dot{x} = f^0(x)$ a lo largo de la superficie S en el espacio x (figura 5b). Esto significa que la función $x(t)$ que satisface la ecuación

$$\dot{x} = f^0(x) \quad (5)$$

es una solución de la ecuación (1) por la definición (2). Si $f^0 \neq f^-$, $f^0 \neq f^+$, tal solución es llamada un movimiento deslizante. Una función continua $x(t)$, que en una parte del intervalo de tiempo bajo consideración se encuentra en el dominio G^- (o en G^+) sa-

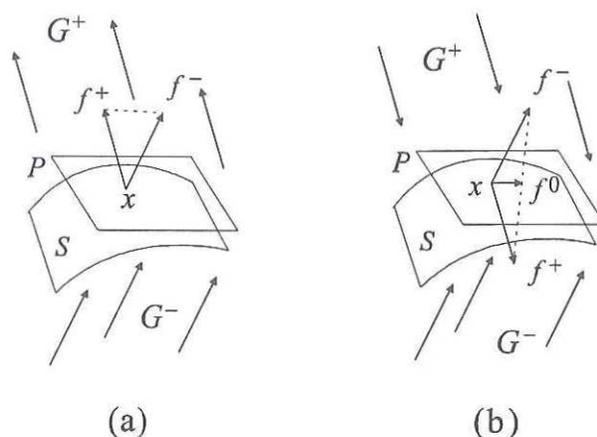


Figura 5. Interpretación geométrica de la definición de solución del convexo más simple.

tisfaciendo la ecuación (1), y en el resto del intervalo se encuentra en la superficie S satisfaciendo la ecuación (5) es, desde luego, también una solución de la ecuación (1) en el sentido de la definición (2).

Sin embargo, si el segmento con los puntos finales de f^- y f^+ se encuentra en el plano P la velocidad f^0 del movimiento a lo largo de la superficie S no es única.

En base a la definición (2), podemos encontrar también la velocidad de movimiento a lo largo de la intersección de superficies de discontinuidad (figura 6). Esta velocidad puede ser única o no única dependiendo si el conjunto $F_0(x)$ tiene uno o mas puntos comunes con la tangente a esta intersección. Si no hay tales puntos comunes, entonces cerca del punto bajo consideración no hay soluciones permaneciendo en la intersección de estas superficies. Se describe en seguida cómo determinar en qué casos ocurre esta situación y cómo encontrar la velocidad de movimiento a lo largo de la intersección de superficies de discontinuidad.

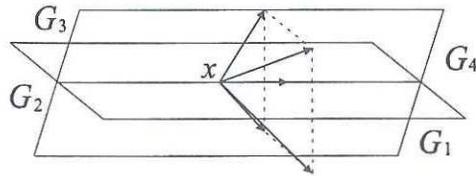


Figura 6. Intersección de superficies de discontinuidad.

II.3.2 Definición usando el método de control equivalente

Considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x, u_1(x), \dots, u_r(x)) \quad (6)$$

donde $x \in R^n$, la función $f(x, u_1, \dots, u_r)$ es continua en el conjunto de argumentos, y la función escalar $u_i(x)$ es discontinua solamente en una superficie suave $S_i(\varphi_i(x) = 0)$, $i = 1, \dots, r$. Estas superficies pueden intersectarse, o incluso coincidir. En cada punto x de discontinuidad de la función u_i debe darse un conjunto cerrado $U_i(x)$, el cual es un conjunto de posibles valores del argumento u_i de la función $f(x, u_1, \dots, u_r)$. Para $i \neq j$ se supone que los argumentos u_i y u_j varían independientemente en los conjuntos $U_i(x)$ y $U_j(x)$ respectivamente. En los puntos donde la función $u_i(x)$ es continua, el conjunto $U_i(x)$ consiste de un punto $u_i(x)$. En los puntos de discontinuidad de la función $u_i(x)$ es necesario que el conjunto $U_i(x)$ contenga todos los puntos límite para cualquier secuencia de la forma $v_k \in U_i(x_k)$, donde $x_k \rightarrow x$, $k = 1, 2, \dots$. Como $u_i(x)$ es una función escalar, entonces $U_i(x)$ es un segmento o un punto.

Sea

$$F_1(x) = f(x, U_i(x), \dots, U_r(x)) \quad (7)$$

un conjunto de valores de la función $f(x, u_i, \dots, u_r)$, donde x es constante y u_1, \dots, u_r varían independientemente en los conjuntos $U_1(x), \dots, U_r(x)$, respectivamente. Así, las soluciones de la ecuación diferencial (6) son soluciones de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F_1(x) \quad (8)$$

En los puntos que pertenecen a un superficie, o simultáneamente a varias superficies, por ejemplo, a las superficies S_1, \dots, S_m ($1 \leq m \leq r$), asumimos (si la solución no puede dejar inmediatamente tal superficie o la intersección de tales superficies) que (6) puede representarse como

$$\dot{x} = f(x, u_1^{eq}(x); \dots, u_m^{eq}(x), u_{m+1}(x), \dots, u_r(x)), \quad (9)$$

donde $u_1^{eq}, \dots, u_m^{eq}$ llamados “controles equivalentes” son definidos de tal forma que el vector f en (9) sea tangente a las superficies S_1, \dots, S_m y el valor de $u_i^{eq}(x)$ está contenido en el intervalo cerrado $u_i^-(x), u_i^+(x)$, que son los valores límite de la función u_i en ambos lados de la superficie S_i , $i = 1, \dots, m$. Así, las funciones $u_i^{eq}(x)$, $i = 1, \dots, m$, son determinadas a partir del sistema de ecuaciones

$$\nabla \varphi_i(x) \cdot f(x, u_1^{eq}, \dots, u_m^{eq}, u_{m+1}(x), \dots, u_r(x)) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Así, una solución es una función absolutamente continua, tal que fuera de la superficies S_i satisface la ecuación (6), y en estas superficies y en sus intersecciones satisface ecuaciones de la forma (9).

Por ejemplo, en el caso $r = 1$ el punto final del vector $f(x, u^{eq}(x))$ se encuentra en la intersección de la tangente a S en el punto x con el arco que se extiende desde el punto final del vector $f(x, u)$ cuando u varía de $u^-(x)$ a $u^+(x)$ (figura 7). La ecuación (6) es

reducida a la inclusión diferencial $\dot{x} \in F_1(x)$. El conjunto $F_1(x)$ es definido en (7), donde $U_i(x)$ es un segmento con finales $u_i^-(x), u_i^+(x)$. Para esos u_i que son continuos en el punto x , el conjunto $U_i(x)$ es el punto $u_i(x)$. El lado derecho de (9) es un vector que termina en el punto de intersección del conjunto $F_1(x)$ con la tangente a la intersección de las superficies S_1, \dots, S_m (figura 7).

Esta velocidad es única si el conjunto $F_1(x)$ tiene solo un punto común con la tangente a esta intersección de superficies, y no es única si F_1 tiene más de uno. Si no hay tales puntos comunes, entonces en las cercanías del punto bajo consideración no hay soluciones permaneciendo en la intersección de estas superficies de discontinuidad.

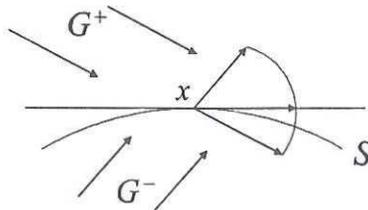


Figura 7. Interpretación geométrica de la definición de solución usando el método de control equivalente.

Es importante mencionar que existen diferencias en las dos definiciones de solución mencionada aquí (compare los ejemplos asociados con las figuras 5 y 7). Sin embargo, en los sistemas considerados en este trabajo la función f es lineal en u_1, \dots, u_r , todas sus superficies S_i son diferentes, y en los puntos de su intersección los vectores normales a estas son linealmente independientes; por lo tanto, los conjuntos F_0, F_1 coinciden y, desde luego, las dos definiciones también coinciden (Filippov, 1988).

Así, para nuestro caso, a continuación será obtenida una sola expresión para la velocidad de movimiento (9) a lo largo de una intersección de superficies de discontinuidad S_1, \dots, S_m (Filippov, 1988).

Considérese que la ecuación (6) es lineal con respecto a los controles escalares u_1, \dots, u_m , que son discontinuos respectivamente en las superficies $S_i(\varphi_i(x) = 0)$, $i = 1, \dots, m$, y los vectores $p_i = \nabla\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, donde $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^T$, son linealmente independientes para $x \in S$. Entonces, en las cercanías de las superficies S_1, \dots, S_m y su intersección S , (6) puede ser escrita en la forma

$$\dot{x} = f_0(x) + B_0(x)u(x) \quad (10)$$

donde $u(x)$ es el vector $(u_1, \dots, u_m)^T$, $1 \leq m \leq r$, $B_0(x)$ es una matriz $n \times m$, y T denota transpuesta. El resto de las funciones u_{m+1}, \dots, u_r son continuas en S , y la manera en que las funciones continuas f_0 y B_0 dependen de ellos no tiene importancia.

Para obtener el movimiento a lo largo de la intersección de las superficies S_1, \dots, S_m , debemos escoger el vector $u = u^{eq}$ en (10) tal que el vector \dot{x} sea tangente a S_1, \dots, S_m , esto es, ortogonal a todos los vectores p_i , $i = 1, \dots, m$. Sea G sea una matriz de $m \times n$, tal que sus renglones son los vectores p_i . Entonces

$$G\dot{x} = Gf_0 + GB_0u^{eq} = 0, \quad u^{eq} = -(GB_0)^{-1}Gf_0, \quad (11)$$

si $\det GB_0 \neq 0$. Si las coordenadas del vector u^{eq} satisfacen la desigualdad

$$u_i^-(x) \leq u_i^{eq}(x) \leq u_i^+(x) \quad (12)$$

(o $u_i^+(x) \leq u_i^{eq}(x) \leq u_i^-(x)$)

entonces, sustituyendo el vector u^{eq} en (10), obtenemos el vector de velocidad del movimiento a lo largo de la intersección S

$$\dot{x} = f_0 - B_0(GB_0)^{-1}Gf_0 \quad (13)$$

Si al menos en una de las coordenadas de u^{eq} la condición (12) no es satisfecha, no existe movimiento a lo largo de S .

II.4 Conclusiones

Se ha presentado en este capítulo una introducción a los sistemas representados por ecuaciones diferenciales con términos discontinuos. La coincidencia de las diferentes definiciones de solución para los sistemas discontinuos tratados en esta tesis resulta de gran importancia para la confiabilidad de resultados de estabilidad y control obtenidos en capítulos posteriores.

Así, considerando los conceptos matemáticos revisados en este capítulo, estamos en posición para establecer un análisis de estabilidad para sistemas mecánicos discontinuos autónomos.

Capítulo III

Análisis de estabilidad

En este capítulo se mostrarán algunos ejemplos de aplicación de las herramientas matemáticas, contenidas en el capítulo anterior, al análisis de sistemas mecánicos discontinuos autónomos. En particular se presentará un análisis de estabilidad para este tipo de sistemas.

La clase de sistemas considerada aquí es conformada por los sistemas de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u_1(x), \dots, u_r(x)), \quad (14)$$

lineales con respecto a funciones escalares u_1, \dots, u_r , que son discontinuas respectivamente en las diferentes superficies $S_i(\varphi_i(x) = 0)$, $i = 1, \dots, r$ y los vectores $p_i = \nabla\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, r$, son linealmente independientes para $x \in S$, donde S es la intersección de las superficies de discontinuidad S_1, \dots, S_r .

A continuación se presenta un Teorema de invarianza³ para sistemas discontinuos propuesto en (Alvarez Gallegos *et al.*, 2000), el cual constituye la herramienta fundamental de análisis en este trabajo de investigación.

III.1 Teorema de invarianza para sistemas discontinuos

Considérese el sistema (1):

$$\dot{x} = f(x) \quad (15)$$

³ El Teorema de invarianza para sistemas continuos puede ser consultado en (Khalil, 1996)

donde f es una función continua a tramos en un dominio G ; $x \in R^n$, $\dot{x} = dx/dt$; M es un conjunto de medida cero de puntos de discontinuidad de la función f .

Se sabe que (15) tiene una solución en el sentido de Filippov (Filippov, 1988)⁴, posiblemente no única, para condiciones iniciales arbitrarias. Considérense entonces los sistemas dados por (15) cuyas soluciones son continuas y únicas a la derecha⁵. Supóngase que existe una función definida positiva $V(x)$, Lipschitz⁶ en una vecindad de $x \in R^n$ y diferenciable excepto en un conjunto de medida cero M_V . Entonces, para cualquier solución de (15), la función $V(x(t))$ es absolutamente continua y

$$D_t V(x(t)) \triangleq \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dh} V(x(t) + h\dot{x}(t))|_{h=0} \quad (16)$$

casi donde sea.

Teorema 1 *Supóngase que existe una función continua, Lipschitz, definida positiva $V(x)$ tal que*

$$D_t V(x(t)) \leq 0 \quad (17)$$

casi donde sea. Sea Ω el subconjunto invariante más grande de la variedad donde se satisface estrictamente la igualdad de (17) y denótese $V(x) \rightarrow \infty$ como $\text{dist}(x, \Omega) \rightarrow \infty$, donde dist es distancia. Entonces todas las trayectorias $x(t)$ de (15) convergen a Ω , es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \Omega) = 0$.

⁴ En nuestro caso, según cualquiera de las dos definiciones presentadas en el capítulo anterior.

⁵ es decir, es continua de manera única cuando t se incrementa.

⁶ $\|V(x) - V(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y$ en alguna vecindad de x_0

Las Proposiciones siguientes ayudan a verificar las condiciones del Teorema anterior.

Proposición 2 *La condición (17) se satisface si (16) es no positiva en el conjunto M_V donde el gradiente $\nabla V(x)$ no existe y en los dominios de $f(x)$ donde (16) se puede expresar en la forma estándar*

$$\frac{d}{dt}V(x) = \nabla V(x) \cdot f(x), \quad x \in R^n \setminus (M \cup M_V). \quad (18)$$

Proposición 3 *Supóngase que ninguna trayectoria de (15) permanece en $M_V \cup \{0\}$ durante un intervalo de tiempo finito. Entonces (17) se satisface casi donde sea si (18) es no positiva para toda $x \in R^n \setminus (M \cup M_V)$.*

Las correspondientes demostraciones pueden ser consultadas en (Alvarez Gallegos *et al.*, 2000).

A continuación se presenta una definición de gradiente para funciones no suaves. La importancia de este concepto matemático resulta del hecho de que las funciones de Lyapunov no suaves son “naturales” para sistemas dinámicos discontinuos (Shevitz y Paden, 1994).

III.2 Gradiente generalizado

Una definición de gradiente comúnmente útil en análisis no suave es la debida a Clarke (Shevitz y Paden, 1994).

Definición 1 (Gradiente generalizado de Clarke): Para una función $V : R^n \rightarrow R$ localmente Lipschitz se define el gradiente generalizado de V en x por

$$\partial V(x) = \overline{\text{co}}\{\lim_{x^* \rightarrow x, x^* \notin M_V} \nabla V(x^*)\} \quad (19)$$

donde $\overline{\text{co}}$ denota el conjunto convexo cerrado, y M_V es el conjunto de medida cero donde el gradiente de V no está definido.

Por ejemplo, la función

$$V(x) = |x|, \quad x \in R$$

tiene un gradiente generalizado

$$\partial V(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x \in R^- \\ +1 & x \in R^+ \\ [-1, 1] & x = 0. \end{cases}$$

En las siguientes dos secciones se analiza la característica de estabilidad de sistemas mecánicos discontinuos bidimensionales y n -dimensionales con algunas leyes de control comúnmente utilizadas, utilizando el Teorema de invarianza presentado aquí.

III.3 Sistemas bidimensionales

Considérese el sistema mecánico descrito por la ecuación diferencial

$$M\ddot{q} + \frac{\partial U(q)}{\partial \dot{q}} + F(\dot{q}) = \tau, \quad (20)$$

donde $q(t) \in R$, $U(q)$ es una función potencial, $F(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sgn}(\dot{q})$; M , f_v y f_c son constantes no negativas y τ es una entrada escalar.

Si $\tilde{q} = q - q_d$, donde q_d es la posición constante deseada, entonces se tiene la representación en el estado $x^T = (\tilde{q}, \dot{q})$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \left(\tau - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - F(\dot{q}) \right) / M \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Por lo tanto, los sistemas bidimensionales tratados aquí tendrán la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \left(-\frac{\partial U(q)}{\partial q} - f_v \dot{q} \right) / M \end{pmatrix} + Bu \quad (22)$$

donde B es una matriz constante de $2 \times r$ y u es el vector $(u_1, \dots, u_r)^T$, u_1, \dots, u_r son funciones escalares discontinuas respectivamente en las diferentes superficies $S_i(\varphi_i(x) = 0)$, $i = 1, \dots, r$, cuyos gradientes $\nabla \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, r$ son linealmente independientes en la intersección de las superficies de discontinuidad S_1, \dots, S_r .

En adelante se considerará que las soluciones de los sistemas dados por (22) son continuas de manera única a la derecha de acuerdo con el apéndice A.

III.3.1 Lazo abierto

El sistema (21) en lazo abierto ($\tau = 0$) puede escribirse, de acuerdo con (22), como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \left(-\frac{\partial U(q)}{\partial q} - f_v \dot{q} \right) / M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (23)$$

donde $u = -f_c \text{sgn}(\dot{q})/M$.

Consideremos la función no negativa asociada a este sistema:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = U(q) - c_U + M\dot{q}^2/2, \quad (24)$$

donde $c_U = \min_q \{U(q)\}$ es una constante finita.

Entonces, de acuerdo a la Proposición 2 del Teorema 1, la derivada temporal \dot{V} a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}F(\dot{q}) = -f_v\dot{q}^2 - f_c|\dot{q}| \leq 0, \quad (25)$$

casi donde sea.

Para concluir sobre la convergencia de las trayectorias del sistema, de acuerdo al Teorema 1, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande contenido en

$$\{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{V} = 0\} = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0\}. \quad (26)$$

Como el eje \tilde{q} es caracterizado por la ecuación $\varphi(x) = \dot{q} = 0$, la cual define una superficie de discontinuidad, el comportamiento de las trayectorias a lo largo del eje \tilde{q} puede ser analizado utilizando la definición de solución del convexo mas simple.

Definanse los campos vectoriales límites a la superficie de discontinuidad de (23) como (véase (4))

$$f^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\frac{\partial U(q)}{\partial q} - f_c\right) / M \end{pmatrix}$$

y

$$f^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\frac{\partial U(q)}{\partial q} + f_c\right) / M \end{pmatrix}$$

para $\dot{q} = 0_+$ y $\dot{q} = 0_-$, respectivamente, y sean los conjuntos $G^\pm = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \pm\dot{q} > 0\}$.

Aquí es fácil determinar cuándo ambos campos vectoriales límite f^+ y f^- se dirigen a la superficie $\varphi(x) = \dot{q} = 0$. En este caso, si

$$\left| \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq f_c, \quad (27)$$

las trayectorias en esta superficie S no podrán abandonarla.

Por lo tanto, el subconjunto invariante mas grande contenido en (26) es

$$\Omega = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ \left| \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq f_c \right\}, \quad (28)$$

hacia donde, segun el Teorema 1, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (23) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1. Considérese un péndulo con fricción viscosa y de Coulomb, como el mostrado en la figura 8.

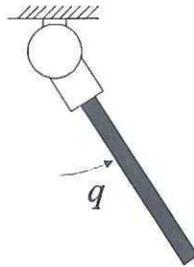


Figura 8. Péndulo.

Un modelo simple para este sistema es dado por:

$$ml^2\ddot{q} + mgl\text{sen}(q) + f_v\dot{q} + f_c\text{sgn}(\dot{q}) = \tau, \quad (29)$$

siendo q la posición angular del péndulo con respecto a la vertical, \dot{q} la correspondiente velocidad angular, y f_v y f_c los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb respectivamente. Su energía potencial es

$$U(q) = mgl(1 - \cos(q)).$$

Si $\tilde{q} = q - q_d$, donde q_d es la posición angular constante deseada, entonces el sistema en el estado $x^T = (\tilde{q}, \dot{q})$ es:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau - mgl\text{sen}(q) - f_v\dot{q} - f_c\text{sgn}(\dot{q})) / (ml^2) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

El sistema en lazo abierto ($\tau = 0$), de acuerdo a la forma (23), es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-mgl\text{sen}(q) - f_v\dot{q}) / (ml^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (31)$$

donde $u = -f_c\text{sgn}(\dot{q}) / (ml^2)$.

La figura 9 muestra cuatro retratos de fase del sistema (31). La figura 9a corresponde al caso donde $f_v = f_c = 0$, es decir donde se satisface estrictamente la igualdad (25).

Si $f_v > 0$ y $f_c = 0$ los vértices estables de la función potencial $U(q)$ constituyen el subconjunto invariante más grande (28), estos se observan en la figura 9b.

La figura 9c presenta el retrato de fase con $f_v > 0$ y $mgl > f_c > 0$, donde el subconjunto invariante más grande lo forman segmentos del eje q , y la figura 9d con $f_v > 0$ y $f_c \geq mgl$, donde el eje q constituye tal subconjunto.

III.3.2 Lazo cerrado

Una estrategia de control comúnmente utilizada para sistemas mecánicos con fricción de Coulomb es incluir en la ley de control un término compensador (“cancelador”) para tal fuerza, buscando obtener un sistema en lazo cerrado continuo (González Elías, 2000). Analizaremos este tipo de controladores.

Considérese la ley de control

$$\tau(x) = \tau_c(x) + f_{cc}\text{sgn}(\dot{q}) \quad (32)$$

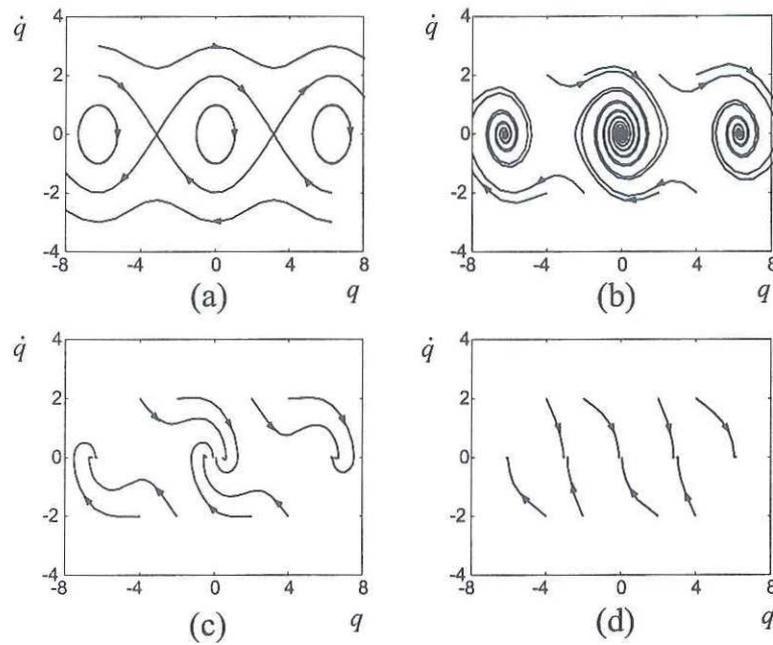


Figura 9. Retratos de fase del péndulo sin ley de control.

donde $\tau_c(x)$ es una función escalar continua y f_{cc} es una constante no negativa. Entonces el sistema (21) en lazo cerrado con (32), de acuerdo con (22), puede ser escrito como (23) pero con

$$u = (\tau_c(x) - (f_c - f_{cc})\text{sgn}(\dot{q}))/M. \quad (33)$$

Si todas las trayectorias de este sistema convergen a un conjunto invariante donde

$$\tilde{q} = \text{const.} \quad \forall t \geq 0, \quad (34)$$

entonces en este conjunto

$$\dot{q} = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (35)$$

Así, para encontrar el subconjunto invariante más grande Ω contenido en

$$\{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0\}, \quad (36)$$

podemos realizar un análisis en la superficie de discontinuidad $\varphi(x) = \dot{q} = 0$ idéntico al del sistema en lazo abierto.

La desigualdad (27) cambia a

$$\left| \tau_c(\tilde{q}, 0) - \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq (f_c - f_{cc}), \quad (37)$$

y

$$\Omega = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ \left| \tau_c(\tilde{q}, 0) - \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq (f_c - f_{cc}) \right\}. \quad (38)$$

Aquí es importante analizar los posibles valores de f_{cc} . Si $f_c > f_{cc}$ los correspondientes campos vectoriales límite f^+ y f^- , y por lo tanto las trayectorias del sistema, se dirigen a la superficie S ($\varphi(x) = \dot{q} = 0$) en Ω . Para $f_c = f_{cc}$, (32) compensa (“cancela”) exactamente la fricción de Coulomb, transformando el sistema discontinuo en uno continuo. Si $f_c < f_{cc}$ los correspondientes campos vectoriales límite f^+ y f^- se dirigen fuera de la superficie S , implicando que $\Omega = \emptyset$.

Puesto que los últimos dos casos ($f_c \leq f_{cc}$) no puede ocurrir y no interesa que ocurra, respectivamente (Filippov, 1988), consideremos el primero ($f_c > f_{cc}$). Debido a que $\tau_c(\tilde{q}, 0)$ es una función continua, de acuerdo a (37) resulta fácil concluir la imposibilidad de que esta desigualdad se satisfaga solo cuando $\tilde{q} = 0$. Por lo tanto, los sistemas discontinuos bidimensionales tratados aquí no pueden ser controlados sin error mediante leyes de control continuas o diferenciables.

Así, finalmente podemos concluir que una ley de control de la forma (32), no será una opción factible a considerar en el diseño de controladores para sistemas discontinuos bidimensionales propuesto en este trabajo.

Ejemplo 2. Considérese el péndulo del ejemplo 1.

Debido a que la mayoría de los controladores para posición y movimiento para sistemas mecánico sin fricción tienen en común, en sus leyes de control, la presencia explícita de un controlador lineal del tipo PD (Berghuis y Nijmeijer, 1993), resulta ilustrativo analizar el comportamiento del sistema (30) con

$$\tau(x) = -k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + mgl \sin(q) + f_{cc} \tanh(c_t \dot{q}), \quad (39)$$

donde $f_c > f_{cc}$, y k_p , k_v y c_t son constantes positivas. Este control es llamado “PD con compensación de gravedad y de fricción de Coulomb” puesto que el término $f_{cc} \tanh(c_t \dot{q})$ es incluido para compensar (“cancelar”) la fricción de Coulomb.

El sistema en lazo cerrado, de acuerdo con (22), puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ (-k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + f_{cc} \tanh(c_t \dot{q}) - f_v \dot{q}) / (ml^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (40)$$

donde $u = -f_c \operatorname{sgn}(\dot{q}) / (ml^2)$.

La función candidata de Lyapunov asociada a este sistema es

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = k_p \tilde{q}^2 / 2 + (ml^2) \dot{q}^2 / 2. \quad (41)$$

La derivada temporal \dot{V} a lo largo de las trayectorias de (40), de acuerdo a la Proposición 2 del Teorema 1, es

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -k_v \dot{q}^2 - f_v \dot{q}^2 - \dot{q}(f_c \operatorname{sgn}(\dot{q}) - f_{cc} \tanh(c_t \dot{q})) \leq 0 \quad (42)$$

casi donde sea.

Así, para concluir sobre la convergencia de las trayectorias del sistema, de acuerdo al Teorema 1, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande Ω contenido en

$$\{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{V} = 0\} = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0\}. \quad (43)$$

Entonces la desigualdad (37) queda como

$$|k_p \tilde{q}| \leq f_c, \quad (44)$$

y, por lo tanto todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (40) convergen, según el Teorema 1, a

$$\Omega = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ |k_p \tilde{q}| \leq f_c\}, \quad (45)$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

En este ejemplo observamos que el término compensador de fricción, $f_{cc} \tanh(c_t \dot{q})$, de la ley de control (39) resulta inútil para reducir el error en el objetivo de control provocado por la fricción de Coulomb, a menos que $c_t = \infty$.

La figura 10 muestra dos retratos de fase del sistema (40). La figura 10a corresponde al caso donde $f_v > 0$ y $f_{cc} = f_c = 0$, es decir el subconjunto invariante más grande (45) contiene solamente el origen del sistema.

La figura 10b presenta el retrato de fase con $f_v > 0$, $f_{cc} = f_c > 0$ y $c_t \rightarrow \infty$, donde asumimos, con fines ilustrativos, el conocimiento exacto del coeficiente de la fricción de Coulomb, lo cual en sistemas reales no se presenta.

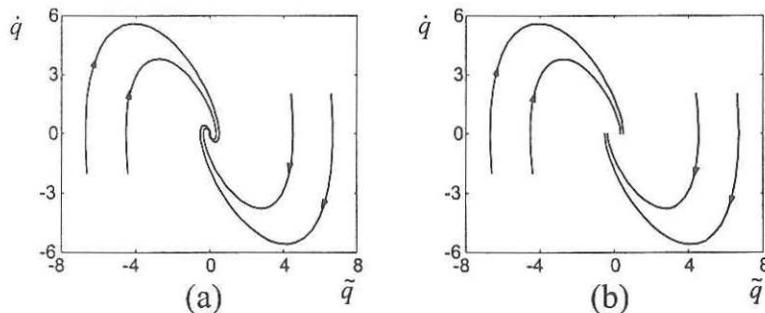


Figura 10. Retratos de fase del péndulo con una ley de control continua.

III.4 Sistemas n -dimensionales

Un sistema mecánico n -dimensional típico es el denominado robot manipulador. Un robot manipulador es un sistema mecánico formado de eslabones conectados a través de uniones.

Considerando fricción en las uniones no elásticas y eslabones rígidos, la ecuación dinámica de un robot manipulador de m grados de libertad (g.d.l.) está dada por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F(\dot{q}) = \tau, \quad (46)$$

donde $q \in R^m$ es la posición, $\tau \in R^m$ es la entrada de control, M , C , g son matrices de dimensiones adecuadas, con términos que son funciones diferenciables, $M = M^T > 0$, $F(\dot{q}) = F_v\dot{q} + F_c\text{sgn}(\dot{q})$ es conocido como el vector de fricción viscosa y de Coulomb, $\text{sgn}(\dot{q}) = (\text{sgn}(\dot{q}_1), \dots, \text{sgn}(\dot{q}_n))^T$, y las matrices $F_v = \text{diag}\{f_{vi}\} \in R^{m \times m}$ y $F_c = \text{diag}\{f_{ci}\} \in R^{m \times m}$ son diagonales y semi-definidas positivas.

A pesar de la complejidad de la ecuación dinámica (46) sus términos poseen propiedades de particular valía en el estudio de sistemas de control para robots manipuladores. Así, los robot manipuladores constituyen un punto de partida interesante para el análisis y control de sistemas discontinuos n -dimensionales.

En ésta y en otras secciones del presente trabajo de investigación son considerados sistemas de la forma (46) al estudiar sistemas discontinuos n -dimensionales.

En adelante se supondrá que todas las uniones del robot son del tipo rotacional.

En términos del vector de estado $x = (\tilde{q}^T, \dot{q}^T)^T$, donde $\tilde{q} = q - q_d$ y q_d es la posición constante deseada, el sistema (46) es representado por :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q})] \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Así, los sistemas n -dimensionales tratados aquí tendrán la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q)^{-1}[-C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F_v \dot{q}] \end{pmatrix} + Bu, \quad (48)$$

donde B es una matriz de bloques, de $m \times m$, de $2 \times r$ y u es el vector $(u_1^T, \dots, u_r^T)^T$, u_1, \dots, u_r son vectores, de $m \times 1$, de funciones escalares discontinuas respectivamente en las diferentes superficies $S_i(\varphi_i(x) = 0)$, $i = 1, \dots, r \cdot m$, cuyos gradientes $\nabla \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, r \cdot m$, son linealmente independientes en la intersección de las superficies de discontinuidad $S_1, \dots, S_{r \cdot m}$.

En adelante se considerará que las soluciones de los sistemas dados por (48) son continuas de manera única a la derecha de acuerdo con el apéndice A.

III.4.1 Lazo abierto

El sistema (47) en lazo abierto ($\tau = 0$) puede escribirse, de acuerdo con (48), como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q)^{-1}[-C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F_v \dot{q}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{pmatrix} u, \quad (49)$$

donde 0 es una matriz de dimensiones adecuadas con elementos nulos y $u = -F_c \text{sgn}(\dot{q})$.

Consideremos la función no negativa asociada a este sistema:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = U(q) - c_U + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (50)$$

donde $U(q)$ es la energía potencial de (46) y $c_U = \min_q \{U(q)\}$.

Entonces, de acuerdo a la Proposición 2 del Teorema 1, la derivada temporal \dot{V} a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T \frac{\partial U(q)}{\partial q} + \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}$$

$$= \dot{q}^T \frac{\partial U(q)}{\partial q} + \dot{q}^T [-C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q})] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}$$

y debido a que siempre $\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0$ y $g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}$, tenemos

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T F(\dot{q}) = -\dot{q}^T F_v \dot{q} - \sum_{i=1}^m f_{ci} |\dot{q}_i| \leq 0, \quad (51)$$

casi donde sea.

Para concluir sobre la convergencia de las trayectorias del sistema, de acuerdo al Teorema 1, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande contenido en

$$\left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{V} = 0 \right\} = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \right\}. \quad (52)$$

Aquí, $\dot{q} = 0$ representa la intersección S de las superficies de discontinuidad $S_i(\varphi_i(x) = \dot{q}_i = 0)$, $i = 1, \dots, m$. Por lo tanto, el comportamiento de las trayectorias a lo largo de S puede ser analizado utilizando una de las definiciones de solución presentadas en el capítulo anterior.

La definición de solución del convexo mas simple, utilizada en la sección anterior, puede también ser considerada para sistemas n -dimensionales, sin embargo el análisis se complica (Filippov, 1988). La alternativa en este caso es emplear la definición de solución usando el método de control equivalente (Filippov, 1988).

Según esta definición, el sistema (49) en las cercanías a las superficies S_1, \dots, S_m y su intersección S puede ser escrito en la forma (10):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M(q)^{-1}[-g(q)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{pmatrix} u \quad (53)$$

donde $u(x)$ es el vector $(u_1, \dots, u_m)^T$.

Al escoger el vector $u = u^{eq}$ en (53) tal que el vector \dot{x} sea tangente a S_1, \dots, S_m , tenemos

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}) = M(q)^{-1}[-g(q) + u^{eq}] = 0. \quad (54)$$

Entonces, si cada coordenada del vector u^{eq} de (54) satisface la desigualdad (12):

$$u_i^-(x) \leq u_i^{eq}(x) \leq u_i^+(x), \quad (55)$$

(o $u_i^+(x) \leq u_i^{eq}(x) \leq u_i^-(x)$)

las trayectorias del sistema en la intersección S no la abandonarán jamás (Filippov, 1988).

De (53) y (54) podemos determinar fácilmente la ecuación diferencial que representa al sistema cuando sus trayectorias permanecen en la intersección S :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0, \quad (56)$$

es decir, no existirá movimiento de las trayectorias del sistema a lo largo de S aún cuando éstas se encuentren en tal intersección.

Por lo tanto, de (54), (55) y (56), el subconjunto invariante más grande contenido en (52) es

$$\Omega = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ |g_i(q)| \leq f_{ci}, \ i = 1, \dots, m\}, \quad (57)$$

donde $(g_1(q), \dots, g_m(q))^T = g(q)$, hacia donde, según el Teorema 1, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (49) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1. Considérese el robot de 2 g.d.l. con fricción viscosa y de Coulomb que se muestra en la figura 11.

Los valores numéricos son incluidos en el apéndice B.

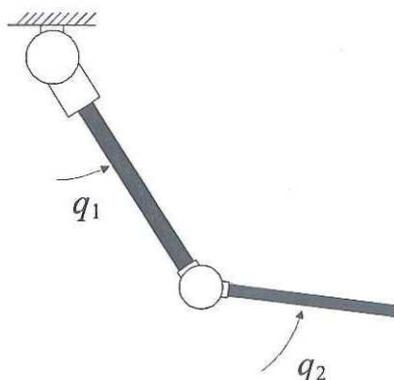


Figura 11. Robot de 2 g.d.l.

La figura 12 muestra los estados de este sistema en lazo abierto para las condiciones iniciales

$$q_1(0) = -1, \quad q_2(0) = -0.5,$$

$$\dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0.$$

Con fines de comparación, se muestran los resultados obtenidos cuando $F_v > 0$ y $F_c = 0$, es decir el subconjunto invariante más grande (57) contiene solamente los puntos de equilibrio estables del sistema (líneas discontinuas), y cuando $F_v > 0$, y $\max_q \{|g_i(q)|\} > f_{ci} > 0, i = 1, 2$, donde el subconjunto invariante más grande lo forman puntos $q \in R^m$ no aislados (líneas sólidas).

III.4.2 Lazo cerrado

Una ley de control con término compensador (“cancelador”) para la fricción de Coulomb, buscando obtener un sistema en lazo cerrado continuo es dada por

$$\tau(x) = \tau_c(x) + F_{cc} \text{sgn}(\dot{q}), \quad (58)$$

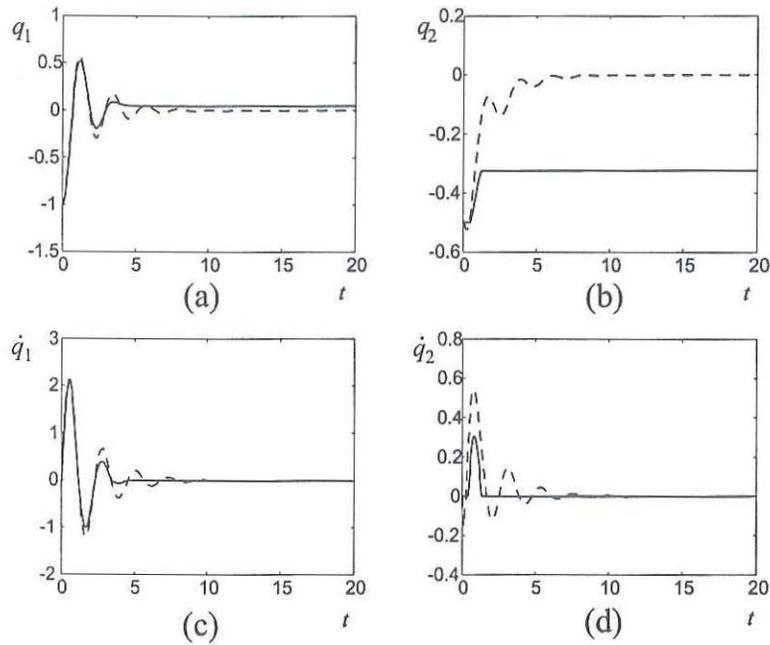


Figura 12. Estados del robot de 2 g.d.l. sin ley de control.

donde $\tau_c(x)$ es el vector $(\tau_{c1}, \dots, \tau_{cm})^T$, $\tau_{ci}, i = 1, \dots, m$ son funciones escalares continuas y $F_{cc} = \text{diag}\{f_{cci}\} \in R^{m \times m}$ es una matriz diagonal y semidefinida positiva.

El sistema (47) en lazo cerrado con (58), puede ser escrito como (49) pero con

$$u = \tau_c(x) - (F_c - F_{cc})\text{sgn}(\dot{q}) \quad (59)$$

Si todas las trayectorias de este sistema convergen a un conjunto invariante donde

$$\tilde{q} = \text{const.} \quad \forall t \geq 0, \quad (60)$$

entonces en este conjunto

$$\dot{q} = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (61)$$

Para encontrar el subconjunto invariante mas grande Ω contenido en

$$\{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0\}, \quad (62)$$

podemos realizar un análisis en la intersección S de las superficies de discontinuidad $S_i(\varphi_i(x) = \dot{q}_i = 0)$, $i = 1, \dots, m$, idéntico al del sistema en lazo abierto.

Así, el subconjunto invariante más grande contenido en (62) es

$$\Omega = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ |\tau_{ci}(\tilde{q}, 0) - g_i(q)| \leq (f_{ci} - f_{cci}), i = 1, \dots, m\}. \quad (63)$$

Aquí, al igual que en los sistemas bidimensionales de la sección anterior, se puede analizar los posibles valores de F_{cc} . Si $F_c > F_{cc}$, las trayectorias del sistema se dirigen a la intersección S en Ω . Para $F_c = F_{cc}$, (58) cancela la fricción de Coulomb, transformando el sistema discontinuo en uno continuo. Si $F_c < F_{cc}$ entonces $\Omega = \emptyset$. Los últimos dos casos ($F_c \leq F_{cc}$) no pueden ocurrir (Filippov, 1988).

De acuerdo con (63), también es fácil concluir que los sistemas discontinuos n -dimensionales tratados aquí no pueden ser controlados sin error mediante leyes de control continuas o diferenciables.

Así, finalmente podemos concluir que, al igual que los sistemas bidimensionales de la sección anterior, una ley de control de la forma (58) no será una opción factible a considerar en el diseño de controladores para sistemas discontinuos n -dimensionales propuesto en este trabajo.

Ejemplo 2. Considérese nuevamente el control PD con compensación de gravedad y de fricción de Coulomb para (47), cuya ley de control es dada por

$$\tau(x) = -K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q) + F_{cc} \tanh(C_t \dot{q}), \quad (64)$$

donde $K_p = \text{diag}\{k_{pi}\} \in R^{m \times m}$, $K_v = \text{diag}\{k_{vi}\} \in R^{m \times m}$ y $C_t = \text{diag}\{c_{ti}\} \in R^{m \times m}$ son matrices diagonales y definidas positivas, $F_c > F_{cc}$ y $\tanh(C_t \dot{q}) = (\tanh(c_{t1} \dot{q}_1), \dots, \tanh(c_{tm} \dot{q}_m))^T$.

El sistema en lazo cerrado, de acuerdo con (48), puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q)^{-1}[-K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + F_{cc} \tanh(C_t \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - F_v \dot{q}] \\ 0 \\ M(q)^{-1} \end{pmatrix} u, \quad (65)$$

donde $u = -F_c \text{sgn}(\dot{q})$.

La función candidata de Lyapunov asociada a este sistema es

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}. \quad (66)$$

La derivada temporal \dot{V} a lo largo de las trayectorias de (65), de acuerdo a la Proposición 2 del Teorema 1 y debido a que siempre $\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0$, es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= -\dot{q}^T F(\dot{q}) - \dot{q}^T [K_v \dot{q} - F_{cc} \tanh(C_t \dot{q})] \\ &= -\dot{q}^T F_v \dot{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} - \sum_{i=1}^m f_{ci} |\dot{q}_i| + \sum_{i=1}^m f_{cci} \dot{q}_i \tanh(c_{ti} \dot{q}_i) \leq 0, \end{aligned} \quad (67)$$

casi donde sea.

Así, para concluir sobre la convergencia de las trayectorias del sistema, de acuerdo al Teorema 1, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande Ω contenido en

$$\{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{V} = 0\} = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0\}. \quad (68)$$

Por lo tanto, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (65) convergen, según el Teorema 1 y de acuerdo a (63), a

$$\Omega = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ |k_{pi}\tilde{q}_i| \leq f_{ci}, i = 1, \dots, m\}. \quad (69)$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Al igual que en el ejemplo 2 de la sección anterior, es fácil observar que el término compensador de fricción, $F_{cc} \tanh(C_t \dot{q})$, de la ley de control (64) resulta inútil para reducir el error en el objetivo de control provocado por la fricción de Coulomb.

La figura 13 muestra los estados del robot del ejemplo 1 con (64) para las condiciones iniciales

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0,$$

$$\dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0,$$

y las posiciones deseadas

$$q_{d1} = -1, \quad q_{d2} = -0.5.$$

Las matrices K_p y K_v se escogen como:

$$K_p = \text{diag}\{20\}$$

$$K_v = \text{diag}\{10\}.$$

De nueva cuenta, se muestran los resultados obtenidos cuando $F_v > 0$ y $F_{cc} = F_c = 0$, es decir el subconjunto invariante más grande (69) contiene solamente el origen del sistema (líneas discontinuas), y cuando $F_v > 0$, $F_{cc} = F_c > 0$ y $c_{ti} \rightarrow \infty, i = 1, \dots, m$, donde asumimos con fines ilustrativos el conocimiento exacto del coeficiente de la fricción de Coulomb (líneas sólidas).

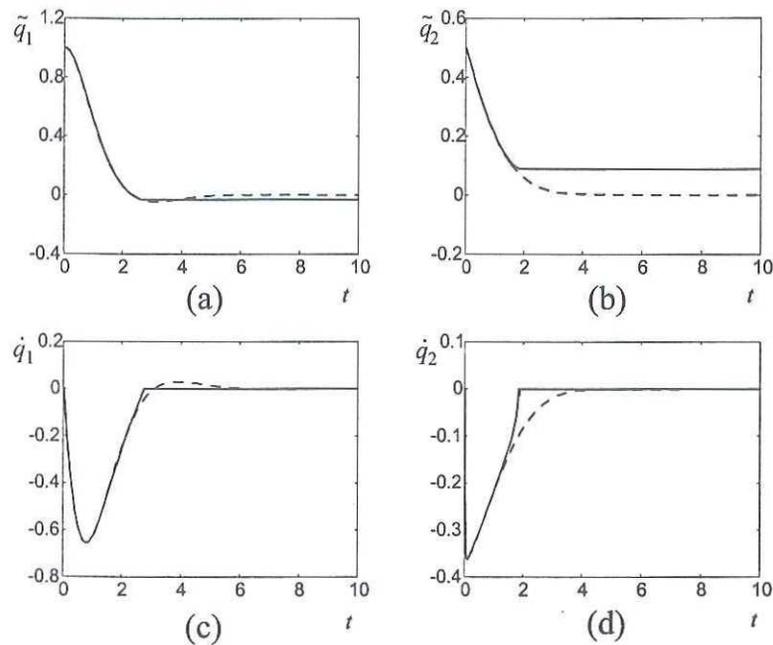


Figura 13. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control continua.

III.5 Conclusiones

Se ha mostrado en este capítulo la aplicación de un resultado sobre estabilidad de una clase de sistemas no lineales discontinuos al análisis de sistemas mecánicos con fricción tanto viscosa como de Coulomb. Así, se concluye que la descripción cualitativa de la fricción de Coulomb, por la función no lineal signo, en estos sistemas mecánicos y controladores continuos con términos compensadores (“canceladores”) de este fenómeno no ayudan a alcanzar un error nulo en los objetivo de control especificados. De aquí surge la necesidad de proponer controladores que no requieran modelos de la fricción para cumplir satisfactoriamente los objetivos de control.

En los siguientes dos capítulos se proponen algoritmos de control que no hacen uso de técnicas de compensación de discontinuidades para los sistemas discontinuos bidimensionales (22) y n -dimensionales (48). El diseño tiene como base el análisis de estabilidad presentado aquí.

Capítulo IV

Control estático

En este capítulo se presenta un procedimiento de diseño de controladores para sistemas mecánicos con fricción de Coulomb y se obtienen algunas leyes de control que cumplen satisfactoriamente los objetivos de control. Para ello se utiliza el análisis de estabilidad presentado en el capítulo 3. Se considera posible el acceso a todos los estados del sistema.

Tales algoritmos de control garantizan, bajo ciertas condiciones, un error nulo en estado estacionario, aún cuando no se conozca con exactitud los coeficientes de fricción, y aún cuando se tenga medición únicamente de la posición.

IV.1 Control de posición de sistemas bidimensionales

Considérese el sistema con estado $x = (\tilde{q}, \dot{q})^T$, de la forma (22):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \left(-\frac{\partial U(q)}{\partial q} - f_v \dot{q} \right) / M \end{pmatrix} + Bu, \quad (70)$$

con

$$u = -\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} - f_c \operatorname{sgn}(\dot{q}), \quad (71)$$

donde $B = (0, 1/M)^T$, $\partial V_1(\tilde{q})$ es una función que puede ser discontinua solo en una superficie S_2 ($\varphi_2(\tilde{q}) = 0$), ∂ denota el gradiente generalizado y $V_2(\dot{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\dot{q} \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0 \forall \dot{q} \in R$. La superficie de discontinuidad S_1 ($\varphi_1(x) = 0$) corresponde al término discontinuo de la fricción de Coulomb en u , es decir $\varphi_1(x) = \dot{q} = 0$.

En adelante se considerará que las soluciones de los sistemas dados por (70) y (71) son continuas de manera única a la derecha de acuerdo con el apéndice A.

Defínase la siguiente función no negativa asociada a este sistema:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = U(q) - c_U + V_1(\tilde{q}) + M\dot{q}^2/2, \quad (72)$$

donde $c_U = \min_q \{U(q)\}$ es una constante finita.

Entonces la derivada temporal de $V(\tilde{q}, \dot{q})$ a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}F(\dot{q}) - \dot{q}\frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = -f_v\dot{q}^2 - f_c|\dot{q}| - \dot{q}\frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \leq 0, \quad (73)$$

fuera de todas las superficies de discontinuidad.

Debido a las Proposiciones 2 y 3, el principio de invarianza (Teorema 1) puede ser utilizado para concluir sobre la convergencia de las trayectorias del sistema.

De acuerdo al Teorema 1, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande contenido en

$$\{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{V} = 0\} = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0\}. \quad (74)$$

Tomando en cuenta que $\frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}|_{\dot{q}=0} = 0$, defínase los campos vectoriales límites a la superficie de discontinuidad S_1 ($\varphi_1(\dot{q}) = \dot{q} = 0$) de (70) y (71) como (ver (4))

$$f^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - f_c\right) / M \end{pmatrix}$$

y

$$f^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial U(q)}{\partial q} + f_c\right) / M \end{pmatrix}$$

para $\dot{q} = 0_+$ y $\dot{q} = 0_-$, respectivamente, y sean los conjuntos $G^\pm = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \pm\dot{q} > 0\}$.

Es fácil determinar que las trayectorias en esta superficie S_1 no podrán abandonarla cuando

$$\left| \partial V_1(\tilde{q}) + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq f_c, \quad (75)$$

y el subconjunto invariante mas grande contenido en (74) es

$$\Omega = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ \left| \partial V_1(\tilde{q}) + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq f_c \right\}, \quad (76)$$

hacia donde, segun el Teorema 1, todas las trayectorias x del sistema (70) y (71) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, el origen ($x = 0$) del sistema (20):

$$M\ddot{q} + \frac{\partial U(q)}{\partial q} + F(\dot{q}) = \tau, \quad (77)$$

con

$$\tau = -\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (78)$$

es asintóticamente estable si se proponen funciones $V_1(\tilde{q})$ y $V_2(\dot{q})$ tales que:

1. $V_2(\dot{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\dot{q} \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0 \ \forall \dot{q} \in R$,
2. $\partial V_1(\tilde{q})$ es una función que puede ser discontinua solo en una superficie S_2 ($\varphi_2(\tilde{q}) = 0$),
3. exista una función no negativa V (72) y
4. la desigualdad (75) se satisfaga sólo en $\tilde{q} = 0$,

en un dominio $D \subset R^2$ que contiene a $x = 0$.

En las siguientes dos subsecciones se obtienen controladores que cumplen satisfactoriamente los objetivos de control para (77).

IV.1.1 Controladores discontinuos con compensación de gravedad

Considérese (77) y (78).

Si

$$V_1(\tilde{q}) = -(U(q) - c_U) + k_c|\tilde{q}| + V_3(\tilde{q}), \quad (79)$$

donde k_c es una constante tal que $k_c > f_c$ y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q} \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0 \forall \tilde{q} \in R$, la función V (72) queda como:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = k_c|\tilde{q}| + V_3(\tilde{q}) + M\dot{q}^2/2, \quad (80)$$

la cual es definida positiva, y la desigualdad (75) como:

$$\left| k_c \text{sgn}(\tilde{q}) + \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \right| \leq f_c, \quad (81)$$

la cual no se satisface $\forall \tilde{q} \neq 0$.

Por lo tanto, el origen del sistema (77) y (78) con (79) es global y asintóticamente estable.

Ejemplo 1. Considérese el péndulo con fricción viscosa y de Coulomb mostrado en la figura 8.

El sistema es dado por (29):

$$ml^2\ddot{q} + mgl\text{sen}(q) + f_v\dot{q} + f_c\text{sgn}(\dot{q}) = \tau, \quad (82)$$

siendo q la posición angular del péndulo con respecto a la vertical, \dot{q} la correspondiente velocidad angular, y f_v y f_c los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb respectivamente.

Así, una ley de control discontinua con compensación de gravedad para (82) que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada por (ver (78) y (79)):

$$\tau = \frac{\partial U(q)}{\partial q} - k_c \text{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (83)$$

donde $k_c > f_c$.

La figura 14 y 15 muestra dos retratos de fase del sistema (82) y (83) con $f_v > 0$, $k_c > f_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = k_p \tilde{q}^2/2$ y dos entradas de control τ . La figura 14a presenta el retrato cuando $V_2(\dot{q}) = 0$ y la figura 14b cuando $V_2(\dot{q}) = k_v \dot{q}^2/2$. Las figuras 15a y 15b muestran entradas de control para ambos casos respectivamente.

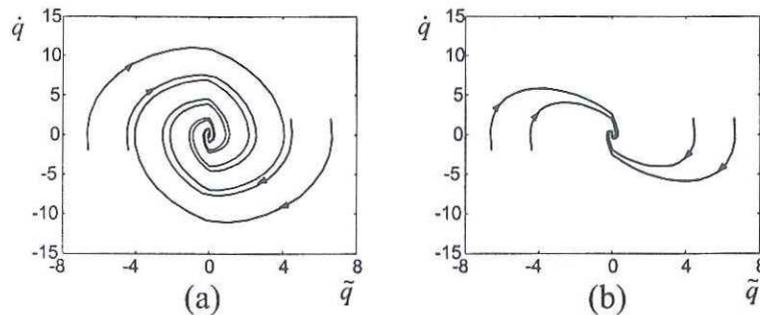


Figura 14. Retratos de fase del péndulo con una ley de control discontinua estática con compensación de gravedad.

IV.1.2 Controladores discontinuos sin compensación de gravedad

Considérese nuevamente (77) y (78).

Si

$$V_1(\tilde{q}) = k_c |\tilde{q}| + V_3(\tilde{q}), \quad (84)$$

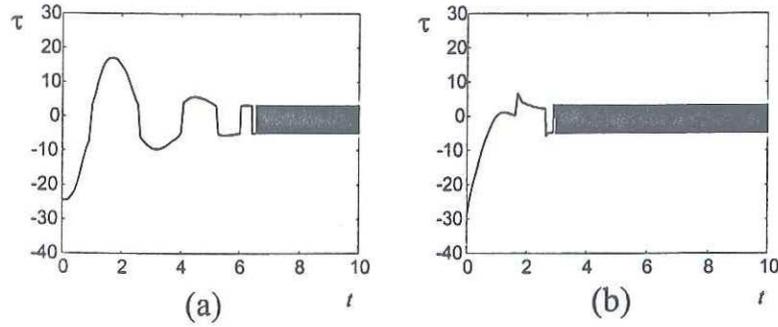


Figura 15. Entradas de control del péndulo con una ley de control discontinua estática con compensación de gravedad.

donde k_c es una constante tal que $k_c > f_c$ y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q} \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0 \forall \tilde{q} \in R$, la función V (72) queda como:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = U(q) - c_U + k_c |\tilde{q}| + V_3(\tilde{q}) + M\dot{q}^2/2, \quad (85)$$

la cual es no negativa, y la desigualdad (75) como:

$$\left| k_c \text{sgn}(\tilde{q}) + \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq f_c, \quad (86)$$

la cual no se satisface $\forall \tilde{q} \neq 0$ si

$$k_c > \left| \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| + f_c \quad \forall q \in R \quad (87)$$

Por lo tanto, el origen del sistema (77) y (78) con (84) si (87) es global y asintóticamente estable.

Ejemplo 2. Considérese nuevamente el sistema (82) del ejemplo anterior.

Una ley de control discontinua sin compensación de gravedad para (82) que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada por:

$$\tau = -k_c \text{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (88)$$

donde $k_c > \left| \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| + f_c$.

La figura 16 y 17 muestran dos retratos de fase del sistema (82) y (88) con $f_v > 0$, $k_c > \left| \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| + f_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = k_p \tilde{q}^2/2$ y dos entradas de control τ . La figura 16a presenta el retrato cuando $V_2(\dot{q}) = 0$ y la figura 16b cuando $V_2(\dot{q}) = k_v \dot{q}^2/2$. Las figuras 17a y 17b muestran entradas de control para ambos casos respectivamente.

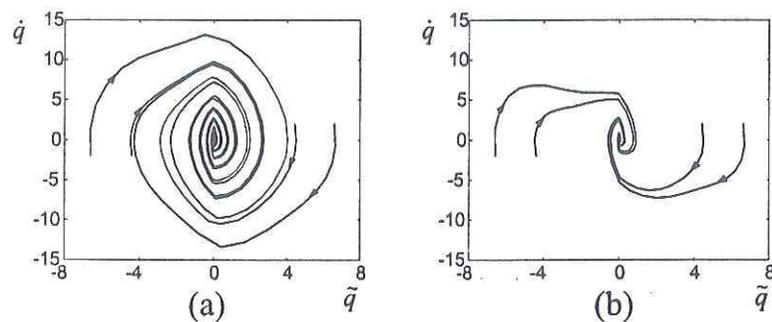


Figura 16. Retratos de fase del péndulo con una ley de control discontinua estática sin compensación de gravedad.

A continuación se obtienen controladores discontinuos para un robot manipulador de m g.d.l. similares a los presentados en esta sección.

IV.2 Control de posición de sistemas n -dimensionales

Considérese el sistema, en el estado $x = (\tilde{q}^T, \dot{q}^T)^T$, de la forma (48):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1}[-C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F_v \dot{q}] \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_f \\ u_k \end{pmatrix}, \quad (89)$$

con

$$u_f = -F_c \text{sgn}(\dot{q}) \quad (90)$$

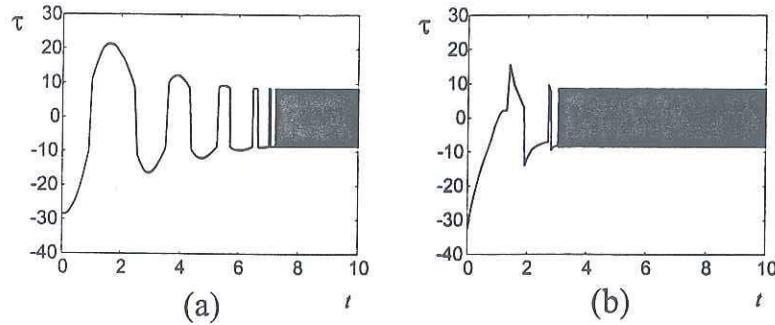


Figura 17. Entradas de control del péndulo con una ley de control discontinua estática sin compensación de gravedad.

$$u_k = -\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}},$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M(q)^{-1} & M(q)^{-1} \end{pmatrix},$$

$\partial V_1(\tilde{q})$ es el vector $(\partial v_{11}(\tilde{q}_1), \dots, \partial v_{1m}(\tilde{q}_m))^T$ cuyos términos son funciones que pueden ser discontinuas respectivamente en las superficies S_{m+i} ($\varphi_{m+i}(\tilde{q}_i) = 0$), $i = 1, \dots, m$, ∂ denota el gradiente generalizado y $V_2(\dot{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\dot{q}^T \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0 \forall \dot{q} \in R^m$. Las superficies de discontinuidad S_i ($\varphi_i(x) = 0$), $i = 1, \dots, m$, corresponde a los términos discontinuos de la fricción de Coulomb en u_f , es decir $\varphi_i(x) = \dot{q}_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

En adelante se considerará que las soluciones de los sistemas dados por (89) y (90) son continuas de manera única a la derecha de acuerdo con el apéndice A.

Defínase la siguiente función no negativa asociada a este sistema:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = U(q) - c_U + V_1(\tilde{q}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (91)$$

donde $c_U = \min_q \{U(q)\}$.

Entonces la derivada temporal de $V(\tilde{q}, \dot{q})$ a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T F(\dot{q}) - \dot{q}^T \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = -\dot{q}^T F_v \dot{q} - \sum_{i=1}^m f_{ci} |\dot{q}_i| - \dot{q}^T \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \leq 0, \quad (92)$$

fuera de todas las superficies de discontinuidad.

Debido a las Proposiciones 2 y 3, el principio de invarianza (Teorema 1) puede ser utilizado para concluir sobre la convergencia de las trayectorias del sistema.

De acuerdo al Teorema 1, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande contenido en

$$\left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{V} = 0 \right\} = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \right\}. \quad (93)$$

Aquí, $\dot{q} = 0$ representa la intersección S de las superficies de discontinuidad $S_i(\varphi_i(x) = \dot{q}_i = 0), i = 1, \dots, m$. Por lo tanto, el comportamiento de las trayectorias a lo largo de S puede ser analizado utilizando una de las definiciones de solución presentadas en el capítulo anterior.

Según la definición de solución usando el método de control equivalente, el sistema (89) en las cercanías a las superficies S_1, \dots, S_m y su intersección S puede ser escrito en la forma (10):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = f_0 + B_0 u, \quad (94)$$

donde u es el vector $(u_f^T, u_{kk}^T)^T$ de $(m+l) \times 1, 0 \leq l \leq m, u_{kk}$ es un vector cuyos elementos son elementos de u_k o no tiene elementos, y f_0 y B_0 son matrices de dimensiones adecuadas con términos que son funciones continuas.

Para obtener el movimiento a lo largo de la intersección de estas $(m+l)$ superficies (definidas por u), escogemos el vector $u = u^{eq}$ en (94) tal que el vector \dot{x} sea tangente a estas $(m+l)$ superficies, esto es, ser ortogonal a todos sus correspondientes vectores

$p_j = \nabla\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \dots, 2m\}$. Esto es, según (89) y (94):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi_{m+1}(\tilde{q}_1)}{\partial\tilde{q}_1} \dot{\tilde{q}}_1 \quad \dots \quad \frac{\partial\varphi_{m+m}(\tilde{q}_m)}{\partial\tilde{q}_m} \dot{\tilde{q}}_m \quad \frac{\partial\varphi_1(\tilde{q}_1)}{\partial\tilde{q}_1} \ddot{\tilde{q}}_1 \quad \dots \quad \frac{\partial\varphi_m(\tilde{q}_m)}{\partial\tilde{q}_m} \ddot{\tilde{q}}_m \right)^T &= 0 \\ \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad \ddot{\tilde{q}}_1 \quad \dots \quad \ddot{\tilde{q}}_m \right)^T &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\dot{q}) &= 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Así, siguiendo con esta definición de solución, si cada coordenada del vector u^{eq} de (95) satisface la desigualdad (12):

$$\begin{aligned} u_j^-(x) &\leq u_j^{eq}(x) \leq u_j^+(x), \\ \text{(o } u_j^+(x) &\leq u_j^{eq}(x) \leq u_j^-(x)) \end{aligned} \quad (96)$$

las trayectorias del sistema en la intersección S no la abandonaran jamás, pero no existirá movimiento a lo largo de ella.

De (89) y (95), y puesto que $\frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial\dot{q}}|_{\dot{q}=0} = 0$, si existe un vector u^{eq} tal que

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}) = M(q)^{-1}[-\partial V_1(\tilde{q}) - g(q) + u^{eq}] = 0 \quad (97)$$

y la desigualdad (96) se satisface para cada coordenada del vector u^{eq} siendo $u = u_f = -F_c \text{sgn}(\dot{q})$, entonces las trayectorias del sistema en la intersección S permanecen sin movimiento.

Entonces, de (96) y (97), el subconjunto invariante más grande contenido en (93) es

$$\Omega = \{(\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ |\partial v_{1i}(\tilde{q}_i) + g_i(q)| \leq f_{ci}, i = 1, \dots, m\}, \quad (98)$$

donde $(g_1(q), \dots, g_m(q))^T = g(q)$, hacia donde, según el Teorema 1, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (89) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, el origen ($x = 0$) del sistema (46):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F(\dot{q}) = \tau, \quad (99)$$

con

$$\tau = -\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (100)$$

es asintóticamente estable si se proponen funciones $V_1(\tilde{q})$ y $V_2(\dot{q})$ tales que:

1. $V_2(\dot{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\dot{q}^T \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0 \forall \dot{q} \in R^m$
2. $\partial V_1(\tilde{q})$ es el vector $(\partial v_{11}(\tilde{q}_1), \dots, \partial v_{1m}(\tilde{q}_m))^T$ cuyos términos son funciones que pueden ser discontinuas respectivamente en las superficies S_{m+i} ($\varphi_{m+i}(\tilde{q}_i) = 0$), $i = 1, \dots, m$,
3. exista una función no negativa V (91) y
4. que el subconjunto invariante mas grande Ω (98) contenga solo al origen del sistema,

en un dominio $D \subset R^{2m}$ conteniendo a $x = 0$.

En las siguientes dos subsecciones se obtienen controladores que cumplen satisfactoriamente los objetivos de control para (99).

IV.2.1 Controladores discontinuos con compensación de gravedad

Considérese (99) y (100).

Si

$$V_1(\tilde{q}) = -(U(q) - c_U) + \sum_{i=1}^m k_{ci} |\tilde{q}_i| + V_3(\tilde{q}), \quad (101)$$

donde k_{ci} es una constante tal que $k_{ci} > f_{ci}$ y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q}^T \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0 \forall \tilde{q} \in R^m$, la función V (91) queda como:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \sum_{i=1}^m k_{ci} |\tilde{q}_i| + V_3(\tilde{q}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (102)$$

la cual es definida positiva, y (98) como:

$$\Omega = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ \left| k_{ci} \text{sgn}(\tilde{q}_i) + \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} \right| \leq f_{ci}, i = 1, \dots, m \right\}, \quad (103)$$

el cual no contiene puntos fuera del origen.

Por lo tanto, el origen del sistema (99) y (100) con (101) es global y asintóticamente estable.

Ejemplo 1. Considérese el mismo robot de 2 g.d.l. con fricción viscosa y de Coulomb que se muestra en la figura 11, referenciado en ejemplos anteriores, cuyos valores numéricos son incluidos en el apéndice B.

Una ley de control discontinua con compensación de gravedad para este sistema que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada por:

$$\tau = \frac{\partial U(q)}{\partial q} - K_c \text{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (104)$$

donde $K_c > F_c$.

La figura 18 muestra los estados de este sistema para las condiciones iniciales

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0,$$

$$\dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0,$$

y las posiciones deseadas

$$q_{d1} = -1, \quad q_{d2} = -0.5.$$

Además $F_v > 0$, $K_c > F_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q}$ y $V_2(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T K_v \dot{q}$, donde $K_p = \text{diag}\{100\}$.

Con fines de comparación, se muestran los resultados cuando $K_v = 0$ (líneas discontinuas), y cuando $K_v = \text{diag}\{30\}$ (líneas sólidas).

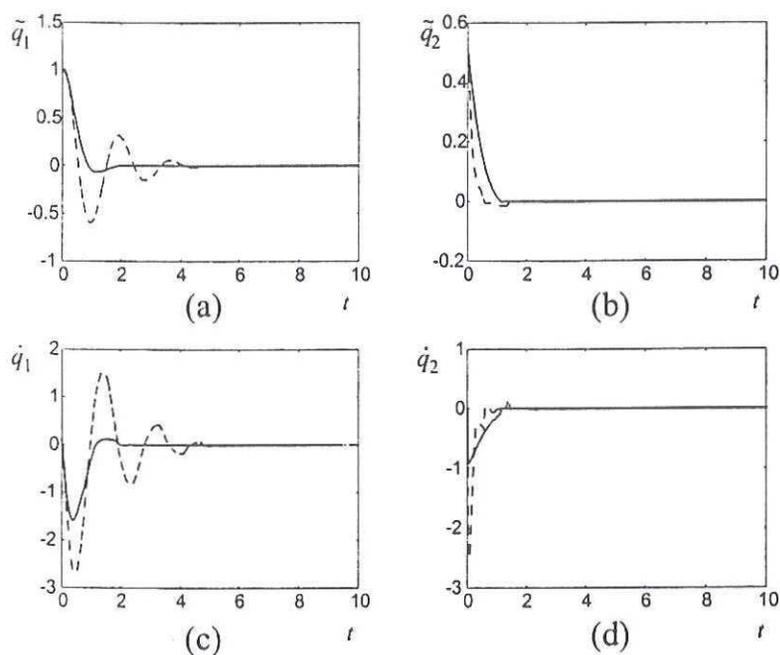


Figura 18. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua estática con compensación de gravedad.

IV.2.2 Controladores discontinuos sin compensación de gravedad

Considérese nuevamente (99) y (100).

Si

$$V_1(\tilde{q}) = \sum_{i=1}^m k_{ci} |\tilde{q}_i| + V_3(\tilde{q}), \quad (105)$$

donde k_{ci} es una constante tal que $k_{ci} > f_{ci}$ y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q}^T \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0 \forall \tilde{q} \in R^m$, la función V (91) queda como:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = U(q) - c_U + \sum_{i=1}^m k_{ci} |\tilde{q}_i| + V_3(\tilde{q}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (106)$$

la cual es no negativa, y (98) como:

$$\Omega = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}) : \dot{q} = 0 \ \& \ \left| k_{ci} \operatorname{sgn}(\tilde{q}_i) + \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} + g_i(q) \right| \leq f_{ci}, i = 1, \dots, m \right\}, \quad (107)$$

el cual no contiene puntos fuera del origen si

$$k_{ci} > |g_i(q)| + f_{ci} \quad \forall q \in R^m, \quad (108)$$

donde $(g_1(q), \dots, g_m(q))^T = g(q)$.

Por lo tanto, el origen del sistema (99) y (100) con (105) si (108) es global y asintóticamente estable.

Ejemplo 2. Considérese nuevamente el robot del ejemplo anterior.

Una ley de control discontinua sin compensación de gravedad para este sistema que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada por:

$$\tau = -K_c \operatorname{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (109)$$

donde $k_{ci} > |g_i(q)| + f_{ci}, i = 1, \dots, m \quad \forall q \in R^m$.

La figura 19 muestra los estados de este sistema para las condiciones iniciales y posiciones deseadas del ejemplo anterior.

Además $F_v > 0$, $K_c > F_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q}$ y $V_2(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T K_v \dot{q}$, donde $K_p = \text{diag}\{100\}$.

Con fines de comparación, se muestran los resultados cuando $K_v = 0$ (líneas discontinuas), y cuando $K_v = \text{diag}\{30\}$ (líneas sólidas).

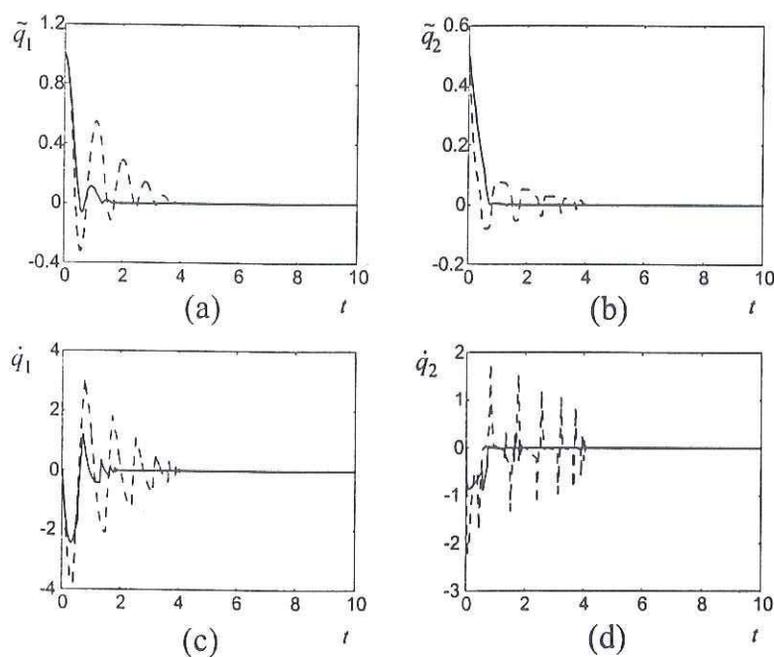


Figura 19. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua estática sin compensación de gravedad.

IV.3 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la aplicación del resultado sobre estabilidad descrito en el capítulo anterior para obtener controladores que bajo ciertas condiciones cumplen satisfactoriamente los objetivos de control para los sistemas mecánicos considerados en

esta tesis. Los controladores son estáticos y necesitan de la medición únicamente de la posición para estabilizar el sistema alrededor de una salida especificada.

Es importante mencionar que las leyes de control considerados aquí no requieren los valores exactos de los coeficientes de la fricción de Coulomb f_{ci} , sólo cotas máximas, las cuales pueden ser obtenidas analítica y/o experimentalmente en sistemas físicos (González Elías, 2000). Esto constituye la diferencia fundamental con los controles con compensación, y lo que los vuelve de gran interés.

Por otra parte, obtuvimos que con leyes de control con términos discontinuos se pueden alcanzar sin errores los objetivos de control. Sin embargo, la naturaleza discontinua del controlador impide su implementación física exacta, lo cual puede provocar desde errores constantes u oscilaciones alrededor de una salida especificada hasta inestabilidad de las salidas del sistema (Filippov, 1988) y (Branicky, 1998).

Los controladores propuestos aquí, y en general, utilizan la información del estado completo x para mejorar la respuesta del sistema. Desafortunadamente, en la práctica no es posible el acceso a todos los estados del sistema, en particular al estado velocidad \dot{q} . El siguiente capítulo muestra una solución a este problema para los sistemas discontinuos tratados aquí.

Capítulo V

Control dinámico

En los controladores propuestos en el capítulo anterior se supuso que se tenía acceso al estado completo de los sistemas discontinuos considerados. Sin embargo, en sistemas físicos solamente la posición q puede ser obtenida de manera confiable. Si el controlador depende de la velocidad, esto conduce a la necesidad de estimar dicho estado \dot{q} por medio de un observador.

Un punto crucial cuando se trata con observadores para sistemas no lineales es su utilidad para leyes de control con retroalimentación de estado. El uso un observador que reconstruye asintóticamente el estado no garantiza que un controlador con retroalimentación de estado tenga un buen desempeño cuando usa los estados estimados en lugar de los verdaderos.

Así, en este capítulo se propone el diseño de observadores para ser usados en los controladores discontinuos con retroalimentación de estado presentados en el capítulo anterior. El uso de un observador en el lazo de control convierte estos controladores estáticos a dinámicos.

V.1 Observador de velocidad para sistemas bidimensionales

Considérese el sistema mecánico descrito por la ecuación diferencial (20):

$$M\ddot{q} + \frac{\partial U(q)}{\partial \dot{q}} + F(\dot{q}) = \tau, \quad (110)$$

donde $q(t) \in R$, $U(q)$ es una función potencial, $F(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sgn}(\dot{q})$; M , f_v y f_c son constantes no negativas y τ es una entrada escalar.

Si $\tilde{q} = q - q_d$, donde q_d es la posición constante deseada, entonces se tiene la representación, en el estado $x^T = (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \left(\tau - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - F(\dot{q}) \right) / M \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Se supone que el desplazamiento q es la variable de salida del sistema (111), es decir, el mapa de salida es:

$$y = q \quad (112)$$

Se propone entonces el observador de velocidad siguiente, para (111),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + \tilde{y} \\ \left(\tau + \tilde{y} - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - F(\hat{x}_1) \right) / M \end{pmatrix} \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \end{aligned} \quad (113)$$

donde \hat{x}_1 es la posición estimada, $\tilde{y} = y - \hat{y}$ es el error de observación de la salida.

La ecuación diferencial de (113) es

$$M\ddot{\tilde{y}} + \frac{\partial U(y)}{\partial y} + F(\dot{\tilde{y}}) = \tau + \tilde{y} + M\dot{\tilde{y}} \quad (114)$$

La dinámica del error de observación se obtiene restando (114) de (110)

$$M\ddot{\tilde{y}} + M\dot{\tilde{y}} - F(\dot{y} - \dot{\tilde{y}}) + \tilde{y} + F(\dot{y}) = 0 \quad (115)$$

El sistema (115) en el estado $(\tilde{y}, \dot{\tilde{y}})^T$, es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{y}} \\ (-\tilde{y} - M\dot{\tilde{y}} + F(\dot{y} - \dot{\tilde{y}}) - F(\dot{y})) / M \end{pmatrix} \quad (116)$$

Por lo tanto, si el estado $x^T = (\bar{q}, \dot{q}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}})$, tenemos el sistema extendido

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \dot{q} \\ \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \left(\tau - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - F(\dot{q}) \right) / M \\ (-\tilde{y} - M\dot{\tilde{y}} + F(\dot{q} - \dot{\tilde{y}}) - F(\dot{q})) / M \end{pmatrix}. \quad (117)$$

cuya propiedad de estabilidad será analizada para las leyes de control presentadas en el capítulo anterior.

En adelante se considerará que las soluciones de los sistemas dados por (117) son continuas de manera única a la derecha de acuerdo con el apéndice A.

V.1.1 Control de posición

Sea la ley de control (78) para (111):

$$\tau = -\partial V_1(\bar{q}) - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (118)$$

tal que conduce al origen del sistema a ser asintóticamente estable como se mostró en el capítulo anterior.

Sea

$$V_2(\dot{q}) = k_v \dot{q}^2 / 2$$

donde k_v es una constante positiva.

Si \hat{x}_1 es la posición estimada, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 + \tilde{y} = \dot{q} - \dot{\tilde{y}}$ será una estimación de la velocidad \dot{q} . Considérese entonces la ley de control que usa la estimación de la velocidad, \hat{x}_1 ,

$$\tau = -\partial V_1(\bar{q}) - k_v \hat{x}_1. \quad (119)$$

El sistema extendido (117) puede ser escrito entonces como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \tilde{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ (-\partial V_1(\tilde{q}) - k_v \dot{q} + k_v \dot{\tilde{y}} - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - F(\dot{q})) / M \\ \dot{\tilde{y}} \\ (-\tilde{y} - M \dot{\tilde{y}} + F(\dot{q} - \dot{\tilde{y}}) - F(\dot{q})) / M \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Una función candidata de Lyapunov para (120) es

$$V(x) = V_1(\tilde{q}) + U(q) - c_U + M\dot{q}^2/2 + \tilde{y}^2/2 + M\dot{\tilde{y}}^2/2 \quad (121)$$

donde $c_U = \min_q \{U(q)\}$ es una constante finita.

La derivada temporal de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema fuera de todas las superficies de discontinuidad es

$$\dot{V}(x) = -f_c |\dot{q}| + \dot{\tilde{y}}(F(\dot{q} - \dot{\tilde{y}}) - F(\dot{q})) - (k_v + f_v)\dot{q}^2 + k_v \dot{q}\dot{\tilde{y}} - M\dot{\tilde{y}}^2. \quad (122)$$

Pero

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}(F(\dot{q} - \dot{\tilde{y}}) - F(\dot{q})) &= f_c \dot{\tilde{y}}(\text{sgn}(\dot{\tilde{y}}) - \text{sgn}(\dot{y})) - f_v \dot{\tilde{y}}^2 \\ &= -f_c |\dot{\tilde{y}}|(1 - \text{sgn}(\dot{y})\text{sgn}(\dot{\tilde{y}})) \\ &\quad - f_c |\dot{\tilde{y}}|(1 - \text{sgn}(\dot{y})\text{sgn}(\dot{\tilde{y}})) - f_v \dot{\tilde{y}}^2 \\ &\leq -f_v \dot{\tilde{y}}^2, \end{aligned}$$

tenemos

$$\dot{V}(x) \leq -f_c |\dot{q}| - (k_v + f_v)\dot{q}^2 + k_v \dot{q}\dot{\tilde{y}} - (M + f_v)\dot{\tilde{y}}^2. \quad (123)$$

Si reescribimos los tres últimos términos como

$$-(k_v + f_v)\dot{q}^2 + k_v \dot{q}\dot{\tilde{y}} - (M + f_v)\dot{\tilde{y}}^2 = - \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_v + f_v & -\frac{k_v}{2} \\ -\frac{k_v}{2} & M + f_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix}$$

determinamos fácilmente que si

$$M > \frac{k_v^2}{4(k_v + f_v)} - f_v \quad (124)$$

la matriz que aparece en la forma cuadrática es definida positiva.

Entonces (122) es semidefinida negativa si (124) se satisface.

Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 1 y a sus Proposiciones, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande contenido en

$$\{(\bar{q}, \dot{q}, \bar{y}, \dot{y}) : \dot{V} = 0\} = \{(\bar{q}, \dot{q}, \bar{y}, \dot{y}) : \dot{q} = 0 \text{ \& } \dot{y} = 0\} \quad (125)$$

para concluir sobre la convergencia de las trayectorias de (120).

De acuerdo a (125) y a la definición de solución utilizando el método de control equivalente, tal conjunto invariante implicaría

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (126)$$

y la ecuación diferencial en este será

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \dot{q} \\ \bar{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (127)$$

Así, siguiendo con esta definición de solución, si cada coordenada del vector u^{eq} de (126) satisface la desigualdad (12):

$$u_j^-(x) \leq u_j^{eq}(x) \leq u_j^+(x), \quad (128)$$

$$(\text{o } u_j^+(x) \leq u_j^{eq}(x) \leq u_j^-(x))$$

las trayectorias del sistema en la intersección S no la abandonaran jamás, pero no existirá movimiento a lo largo de ella.

De (120) y (126), si existe un vector u^{eq} tal que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial U(q)}{\partial q} + u_1^{eq} \right) / M \\ (-\tilde{y} + u_2^{eq} + u_1^{eq}) / M \end{pmatrix} = 0. \quad (129)$$

y la desigualdad (128) se satisface para cada coordenada del vector u^{eq} siendo $u = (u_1, u_2)^T$, $u_1 = -f_c \text{sgn}(\dot{q})$, $u_2 = f_c \text{sgn}(\dot{q} - \dot{\tilde{y}})$, entonces las trayectorias del sistema en la intersección S de las superficies S_1 ($\varphi_1(x) = \dot{q} = 0$) y S_2 ($\varphi_2(x) = \dot{q} - \dot{\tilde{y}} = 0$) permanecen sin movimiento.

Así, de (128) y (129), el subconjunto invariante más grande contenido en (125) es

$$\Omega = \left\{ (\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) : \dot{q} = 0 \ \& \ \dot{\tilde{y}} = 0 \ \& \ \left| \partial V_1(\tilde{q}) + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq f_c \ \& \ |\tilde{y}| \leq 2f_c \right\}, \quad (130)$$

hacia donde, según el Teorema 1, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (120) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, puesto que el error de observación de la salida $\tilde{y} = y - \hat{y}$ no interesa que sea cero, el punto $(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ del sistema (110) con el observador (113) y (119) puede hacerse asintóticamente estable si (124) se satisface y se asegura que $\Omega = \{(0, 0, \tilde{y}, 0) : \tilde{y} \in R\}$.

Ejemplo 1. Considérese nuevamente el péndulo con fricción viscosa y de Coulomb mostrado en la figura 8.

El sistema es dado por (82):

$$ml^2\ddot{q} + mgl\text{sen}(q) + f_v\dot{q} + f_c\text{sgn}(\dot{q}) = \tau. \quad (131)$$

El observador de velocidad propuesto es:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + q - \hat{x}_1 \\ \left(\tau + q - \hat{x}_1 - mgl\text{sen}(q) - f_v\hat{x}_1 - f_c\text{sgn}(\hat{x}_1) \right) / (ml^2) \end{pmatrix} \quad (132)$$

a) Una ley de control discontinua con compensación de gravedad para (131) y (132)

que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada por:

$$\tau = \frac{\partial U(q)}{\partial q} - k_c \text{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - k_v \dot{\tilde{x}}_1, \quad (133)$$

donde $k_c > f_c$ y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q} \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0$ $\forall \tilde{q} \in R$.

Con fines de comparación, las figuras 20a y 20b muestran los estados del sistema (131) con (132) y (133), para $f_v > 0$, $k_c > f_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = k_p \tilde{q}^2 / 2$ y $k_p > 0$, obtenidos cuando $k_v > 0$ (líneas sólidas) y $k_v = 0$ (líneas discontinuas) con $\hat{x}_1(0) = q(0)$.

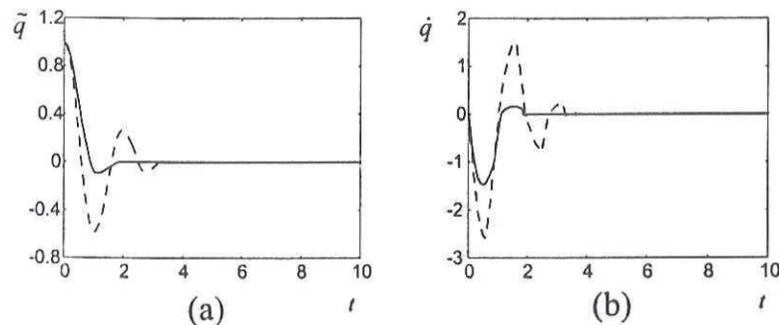


Figura 20. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.

b) Una ley de control discontinua sin compensación de gravedad para (131) y (132)

que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es:

$$\tau = -k_c \text{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - k_v \dot{\tilde{x}}_1, \quad (134)$$

donde $k_c > \left| \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| + f_c \forall q \in R$ y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q} \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0 \forall \tilde{q} \in R$.

Con fines de comparación, las figuras 21a y 21b muestran los estados del sistema (131) con (132) y (134), para $f_v > 0$, $k_c > \left| \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| + f_c > 0 \forall q \in R$, $V_3(\tilde{q}) = k_p \tilde{q}^2/2$ y $k_p > 0$, obtenidos cuando $k_v > 0$ (líneas sólidas) y $k_v = 0$ (líneas discontinuas) con $\hat{x}_1(0) = q(0)$.

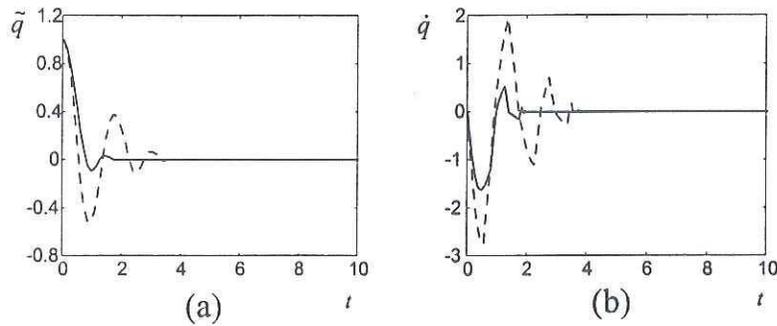


Figura 21. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.

Hasta aquí se ha considerado que los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud, sin embargo en sistemas físicos solo valores aproximados de estos pueden ser obtenidos experimental y/o analíticamente.

V.1.2 Robustez frente a incertidumbres en la fricción

A continuación se analizará la estabilidad de (120) cuando f_v y f_c no son conocidos con exactitud, es decir tenemos que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \left(-\partial V_1(\tilde{q}) - k_v \dot{\tilde{q}} + k_v \dot{\tilde{y}} - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - F(\dot{q}) \right) / M \\ \dot{\tilde{y}} \\ \left(-\tilde{y} - M \dot{\tilde{y}} + F_a(\dot{q} - \dot{\tilde{y}}) - F(\dot{q}) \right) / M \end{pmatrix}, \quad (135)$$

donde $F_a(\dot{q}) = f_{va} \dot{q} + f_{ca} \text{sgn}(\dot{q})$, $f_{va} > f_v$ y $f_{ca} > f_c$.

Una función candidata de Lyapunov para este sistema es nuevamente (121).

La derivada temporal de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema fuera de todas las superficies de discontinuidad es

$$\dot{V}(x) = -f_c |\dot{q}| + \dot{y}(F_a(\dot{q} - \dot{y}) - F(\dot{q})) - (k_v + f_v)\dot{q}^2 + k_v \dot{q}\dot{y} - M\dot{y}^2. \quad (136)$$

Pero

$$\begin{aligned} \dot{y}(F_a(\dot{q} - \dot{y}) - F(\dot{q})) &= \dot{y}(f_{ca}\text{sgn}(\dot{y}) - f_c\text{sgn}(\dot{q})) - \dot{y}(f_v\dot{q} - f_{va}\dot{y}) \\ &= -|\dot{q}|(f_c - f_{ca}\text{sgn}(\dot{q})\text{sgn}(\dot{y})) - |\dot{y}|(f_{ca} - f_c\text{sgn}(\dot{q})\text{sgn}(\dot{y})) \\ &\quad - f_{va}\dot{y}^2 + f_{vs}\dot{y}\dot{q} \end{aligned}$$

donde $f_{vs} = f_{va} - f_v$, así

$$\dot{V}(x) \leq -f_c |\dot{q}| - (f_c - f_{ca}\text{sgn}(\dot{q})\text{sgn}(\dot{y}))|\dot{q}| - (f_v + k_v)\dot{q}^2 + (f_{vs} + k_v)\dot{y}\dot{q} - (f_{va} + M)\dot{y}^2$$

y reescribiendo los 3 últimos términos tenemos:

$$\dot{V}(x) \leq -f_c |\dot{q}| - (f_c - f_{ca}\text{sgn}(\dot{q})\text{sgn}(\dot{y}))|\dot{q}| - \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_v + k_v & -\frac{f_{vs} + k_v}{2} \\ -\frac{f_{vs} + k_v}{2} & f_{va} + M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{y} \end{pmatrix}. \quad (137)$$

En consecuencia, si

$$f_c > \frac{f_{ca}}{2} \quad (138)$$

y

$$f_v > \frac{(f_{vs} + k_v)^2}{4(f_{va} + M)} - k_v, \quad (139)$$

donde $f_{cs} = f_{ca} - f_c$, entonces (136) será semidefinida negativa.

Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 1 y a sus Proposiciones, se requiere encontrar el subconjunto invariante más grande contenido en

$$\{(\bar{q}, \dot{q}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) : \dot{V} = 0\} = \{(\bar{q}, \dot{q}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) : \dot{q} = 0 \text{ \& } \dot{\tilde{y}} = 0\} \quad (140)$$

para concluir sobre la convergencia de las trayectorias de (135).

Nuevamente, de acuerdo a (140) y a la definición de solución utilizando el método de control equivalente, tal conjunto invariante implicaría (126) y la ecuación diferencial en este será (127).

De (135) y (126), si existe un vector u^{eq} tal que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\partial V_1(\bar{q}) - \frac{\partial U(q)}{\partial q} + u_1^{eq})/M \\ (-\tilde{y} + u_2^{eq} + u_1^{eq})/M \end{pmatrix} = 0, \quad (141)$$

y la desigualdad (128) se satisface para cada coordenada del vector u^{eq} siendo $u = (u_1, u_2)^T$, $u_1 = -f_c \text{sgn}(\dot{q})$, $u_2 = f_{ca} \text{sgn}(\dot{q} - \dot{\tilde{y}})$, entonces las trayectorias del sistema en la intersección S de las superficies S_1 ($\varphi_1(x) = \dot{q} = 0$) y S_2 ($\varphi_2(x) = \dot{q} - \dot{\tilde{y}} = 0$) permanecen sin movimiento.

Así, el subconjunto invariante más grande contenido en (140) es

$$\Omega = \left\{ (\bar{q}, \dot{q}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) : \dot{q} = 0 \text{ \& } \dot{\tilde{y}} = 0 \text{ \& } \left| \partial V_1(\bar{q}) + \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right| \leq f_c \text{ \& } |\tilde{y}| \leq (f_c + f_{ca}) \right\}, \quad (142)$$

hacia donde, según el Teorema 1, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (135) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, ya que \tilde{y} no interesa, el punto $(\bar{q}, \dot{q}) = 0$ del sistema (110) con el observador:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + \tilde{y} \\ (\tau + \tilde{y} - \frac{\partial U(q)}{\partial q} - F_a(\hat{x}_1)) / M \end{pmatrix} \quad (143)$$

y (119), es asintóticamente estable si (138), (139) y $\Omega = \{(0, 0, \tilde{y}, 0) : \tilde{y} \in R\}$ se satisfacen.

Ejemplo 2. Considérese nuevamente el péndulo del ejemplo anterior (131).

Un observador de velocidad más real para este sistema es dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + q - \hat{x}_1 \\ (\tau + q - \hat{x}_1 - mgl\text{sen}(q) - f_{va}\hat{x}_1 - f_{ca}\text{sgn}(\hat{x}_1)) / (ml^2) \end{pmatrix}. \quad (144)$$

a) Una ley de control discontinua con compensación de gravedad para (131) y (144) que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada nuevamente por (133).

Las figuras 22a y 22b muestran los estados de este sistema, obtenidos cuando $k_v > 0$ (líneas sólidas) y $k_v = 0$ (líneas discontinuas) con $\hat{x}_1(0) = q(0)$, para $f_v > 0$, $k_c > f_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = k_p \tilde{q}^2 / 2$ y $k_p > 0$.

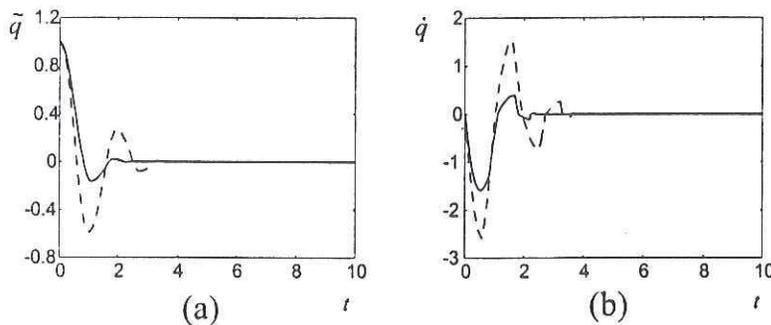


Figura 22. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.

b) Una ley de control discontinua sin compensación de gravedad para (131) y (144) que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es (134).

Las figuras 23a y 23b muestran los estados de este sistema, obtenidos cuando $k_v > 0$ (líneas sólidas) y $k_v = 0$ (líneas discontinuas) con $\hat{x}_1(0) = q(0)$, para $f_v > 0$, $k_c > f_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = k_p \tilde{q}^2 / 2$ y $k_p > 0$.

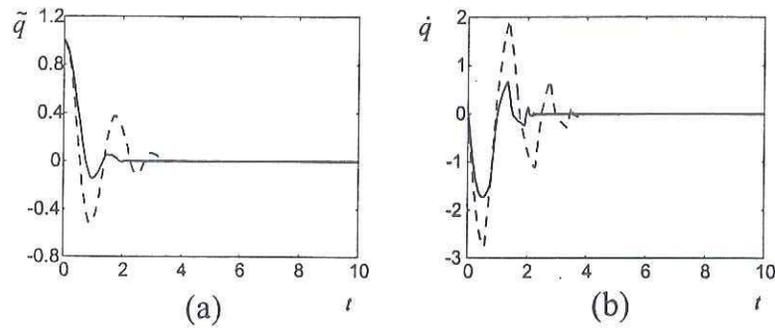


Figura 23. Estados del péndulo con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.

A continuación se obtienen resultados similares a los de esta sección para un robot manipulador de m g.d.l.

V.2 Observador de velocidad para sistemas n -dimensionales

Considérese nuevamente la ecuación dinámica de un robot manipulador de m g.d.l. con fricción en las uniones (46):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F(\dot{q}) = \tau. \quad (145)$$

También, en adelante se supondrá que todas las articulaciones del robot son del tipo rotacional.

Asumiendo que la posición de las uniones son las variables de salida del sistema (145), el mapa de salida es:

$$y = q \quad (146)$$

El observador de velocidad propuesto, para (145), es descrito por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + h_D \tilde{y} \\ M^{-1}(y)[-C(y, \hat{x}_1)\dot{\hat{x}}_1 + \tau + H_P \tilde{y} - g(y) - F(\hat{x}_1)] \end{pmatrix} \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \end{aligned} \quad (147)$$

donde \hat{x}_1 es la posición estimada, $\tilde{y} = y - \hat{y}$ es el error de observación de la salida, h_D es una constante escalar positiva y H_P es una matriz simétrica definida positiva.

La ecuación diferencial de (147) es:

$$M(y)\ddot{\hat{y}} + C(y, \dot{\hat{y}})\dot{\hat{y}} + g(y) + F(\dot{\hat{y}}) = u + H_P \tilde{y} + h_D M(y)\dot{\hat{y}}. \quad (148)$$

Restando (148) de (145) obtenemos la dinámica del error de observación de la salida \tilde{y}

$$M(y)\ddot{\tilde{y}} + C(y, \dot{y})\dot{y} - C(y, \dot{\hat{y}})\dot{\hat{y}} + F(\dot{y}) - F(\dot{\hat{y}}) = -H_P \tilde{y} - h_D M(y)\dot{\hat{y}}. \quad (149)$$

Puesto que para el sistema (145) $C(q, x)y = C(q, y)x$ (Craig, 1989), entonces

$$\begin{aligned} C(y, \dot{y})\dot{y} - C(y, \dot{\hat{y}})\dot{\hat{y}} &= C(y, \dot{y})\dot{y} - C(y, \dot{y})\dot{\hat{y}} + C(y, \dot{y})\dot{\hat{y}} - C(y, \dot{\hat{y}})\dot{\hat{y}} \\ &= C(y, \dot{y})\dot{\hat{y}} + C(y, \dot{\hat{y}})\dot{\hat{y}} \end{aligned}$$

que sustituyendo en (149) produce

$$M(y)\ddot{\tilde{y}} + C(y, \dot{y})\dot{\hat{y}} + F(\dot{y}) - F(\dot{\hat{y}}) = -H_P \tilde{y} - h_D M(y)\dot{\hat{y}} - C(y, \dot{\hat{y}})\dot{\hat{y}}. \quad (150)$$

Sea el estado $x^T = [\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T, \tilde{y}^T, \dot{\tilde{y}}^T]$, donde $\tilde{q} = q - q_d$ es el error entre la posición deseada y la actual, entonces (145) y (150) constituyen el sistema extendido:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1}(q)[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q})] \\ M^{-1}(y)[-C(y, \dot{y})\dot{y} - C(y, \dot{y})\dot{\tilde{y}} - H_P\tilde{y} - h_D M(y)\dot{\tilde{y}} + F(\dot{y}) - F(\dot{\tilde{y}})] \end{pmatrix} \quad (151)$$

cuya propiedad de estabilidad para leyes de control obtenidas en el capítulo anterior sera analizada a continuación.

En adelante se considerará que las soluciones de los sistemas dados por (151) son continuas de manera única a la derecha de acuerdo al apéndice A.

V.2.1 Control de posición

Sea la ley de control (100) para (145)

$$\tau = -\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial V_2(\dot{\tilde{q}})}{\partial \dot{\tilde{q}}}, \quad (152)$$

tal que conduce al origen del sistema a ser asintóticamente estable (ver capítulo anterior).

Sea

$$\begin{aligned} V_2(\dot{\tilde{q}}) &= \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}}, \\ V_3(\tilde{q}) &= \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q}, \end{aligned}$$

donde $K_p = \text{diag}\{k_{pi}\} \in R^{m \times m}$ y $K_v = \text{diag}\{k_{vi}\} \in R^{m \times m}$ son matrices diagonales definidas positivas.

Si \hat{x}_1 es la posición estimada, $\dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_2 + \tilde{y} = \dot{q} - \dot{\tilde{y}}$ será una estimación de la velocidad \dot{q} . Considérese entonces la ley de control que usa la estimación de la velocidad, $\dot{\hat{x}}_1$,

$$\tau = -\partial V_1(\tilde{q}) - K_p \tilde{q} - K_v \dot{\hat{x}}_1. \quad (153)$$

Aquí, el sistema extendido (151) queda

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ M^{-1}(y)[- \partial V_1(\tilde{q}) - K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{y}} + K_v \dot{\tilde{y}} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q})] \\ \dot{\tilde{y}} \\ M^{-1}(y)[-C(y, \dot{y})\dot{\tilde{y}} - C(y, \dot{\tilde{y}})\dot{\tilde{y}} - H_P \tilde{y} - h_D M(y)\dot{\tilde{y}} + F(\dot{\tilde{y}}) - F(\dot{y})] \end{pmatrix} \quad (154)$$

Defínase la siguiente función no negativa asociada a este sistema:

$$V(x) = V_1(\tilde{q}) + U(q) - c_U + \frac{1}{2} x^T A(y) x \quad (155)$$

donde $c_U = \min_q \{U(q)\}$ y $A(y) = \text{block diag}[K_p, M(y), H_P, M(y)]$.

La derivada temporal de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema fuera de todas las superficies de discontinuidad es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2} x^T \dot{A}(\tilde{q} + q_d) x - \dot{q}^T [C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q})] - \dot{q}^T [K_v \dot{\tilde{y}} - K_v \dot{\tilde{y}}] \\ &\quad + \dot{\tilde{y}}^T [-C(y, \dot{y})\dot{\tilde{y}} - C(y, \dot{\tilde{y}})\dot{\tilde{y}} - h_D M(y)\dot{\tilde{y}} + F(\dot{\tilde{y}}) - F(\dot{y})] \end{aligned}$$

y puesto que $w^T [\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})] w = 0 \quad \forall q, \dot{q}, w \in R^m$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\dot{q}^T F(\dot{q}) - \dot{q}^T [K_v \dot{\tilde{y}} - K_v \dot{\tilde{y}}] - \dot{\tilde{y}}^T C(y, \dot{\tilde{y}})\dot{\tilde{y}} - h_D \dot{\tilde{y}}^T M(y)\dot{\tilde{y}} \\ &\quad - \dot{\tilde{y}}^T [F(\dot{\tilde{y}}) - F(\dot{y})] \end{aligned} \quad (156)$$

Sabiendo que $C(q, w)z = C(q, z)w$ y $\|C(q, \dot{q})\| \leq k_q \|\dot{q}\| \quad \forall q, \dot{q}, w, z \in R^m$, donde k_q es una constante definida como

$$k_q = \frac{1}{2} \max_{q \in R^m} \sum_{k=1}^m \|C_k(q)\|,$$

y los elementos de la matriz C_k como

$$C_{k,ij} = \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad i, j, k = 1, \dots, m,$$

(Nicosia y Tomei, 1990) tenemos que (156) puede ser escrita

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & -\dot{q}^T F_c \operatorname{sgn}(\dot{q}) - \dot{y}^T [F_c \operatorname{sgn}(\dot{q}) - F_c \operatorname{sgn}(\dot{y})] - (K_v + F_v)_m \|\dot{q}\|^2 \\ & + K_{v_M} \|\dot{y}\| \|\dot{q}\| - F_{v_m} \|\dot{y}\|^2 - h_D M_m \|\dot{y}\|^2 + k_q \|\dot{q}\| \|\dot{y}\|^2 + k_q \|\dot{y}\|^3, \end{aligned} \quad (157)$$

donde, dada una matriz de $n \times n$ simétrica definida positiva acotada $A(x)$, A_M y A_m denota el máximo y el mínimo de los valores propios de $A(x)$, para cualquier x , respectivamente.

Resulta fácil demostrar que

$$\dot{y}^T F_c [\operatorname{sgn}(\dot{y}) - \operatorname{sgn}(\dot{q})] \leq 0.$$

Además,

$$(K_v + F_v)_m \|\dot{q}\|^2 - K_{v_M} \|\dot{y}\| \|\dot{q}\| + F_{v_m} \|\dot{y}\|^2 = \begin{pmatrix} \|\dot{q}\| \\ \|\dot{y}\| \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (K_v + F_v)_m & -\frac{1}{2} K_{v_M} \\ -\frac{1}{2} K_{v_M} & F_{v_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\dot{q}\| \\ \|\dot{y}\| \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para garantizar que (156) sea semidefinida negativa basta satisfacer

$$(K_v + F_v)_m > \frac{K_{v_M}^2}{4F_{v_m}} \quad (158)$$

y

$$\frac{h_D}{k_q} M_m > \|\dot{q}\| + \|\dot{y}\|, \quad (159)$$

Esta última desigualdad se satisface si

$$\|x\| < \frac{h_D}{\sqrt{2}k_q} M_m. \quad (160)$$

Puesto que

$$\frac{1}{2} A_m \|x\|^2 \leq V(x), \quad (161)$$

de (156), (160) y (161) concluimos que si

$$V(x(0)) \leq \frac{1}{2} A_m \left(\frac{h_D}{\sqrt{2}k_q} M_m \right)^2 \quad (162)$$

entonces

$$V(x) \leq V(x(0)) \quad \forall t \geq 0 \quad (163)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (164)$$

Finalmente, de acuerdo a (156), al Teorema 1 y sus Proposiciones, se requiere encontrar el subconjunto invariante mas grande contenido en

$$\{(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{y}, \dot{y}) : \dot{V} = 0\} = \{(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{y}, \dot{y}) : \dot{q} = 0 \ \& \ \dot{y} = 0\} \quad (165)$$

para concluir sobre la convergencia de la trayectorias de (154).

Nuevamente, de acuerdo a la definición de solución usando el método de control equivalente, la ecuación diferencial en tal conjunto invariante es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \tilde{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (166)$$

Si ocurre el modo deslizante (166) en $\dot{q} = 0 \ \& \ \dot{y} = 0$, existe dos controles continuos u_1^{eq} y u_2^{eq} en (166), tal que $-f_{ci} \leq u_{1i}^{eq} \leq f_{ci}$, y $-f_{ci} \leq u_{2i}^{eq} \leq f_{ci}$ $i = 1, \dots, m$. De (154)

tenemos que el subconjunto invariante mas grande contenido en (165) es

$$\Omega = \left\{ (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) : \dot{\tilde{q}} = 0 \ \& \ \dot{\tilde{y}} = 0 \ \& \ |\partial v_{1i}(\tilde{q}_i) + k_{pi}\tilde{q}_i + g_i(q)| \leq f_{ci} \ \& \ |H_P \tilde{y}| \leq 2f_{ci}, i = 1, \dots, m \right\}, \quad (167)$$

donde $(g_1(q), \dots, g_m(q))^T = g(q)$, hacia donde, segun el Teorema 1, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (154) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, puesto que el error de observación de la salida $\tilde{y} = y - \hat{y}$ no interesa que sea cero, el punto $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0$ del sistema (145) con el observador (147) y (153) es asintóticamente estable si (158), (162) y $\Omega = \{(0, 0, \tilde{y}, 0) : \tilde{y} \in R^m\}$ se satisfacen.

Ejemplo 1. Considérese el robot de 2 g.d.l. con fricción viscosa y de Coulomb que se muestra en la figura 11, cuyos valores numéricos son incluidos en el apéndice B.

a) Una ley de control discontinua con compensación de gravedad para este sistema que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada por (147) y

$$\tau = g(q) - K_c \text{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}}, \quad (168)$$

donde $K_c > F_c$. y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q}^T \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0 \ \forall \tilde{q} \in R^m$.

Sean las condiciones iniciales

$$q(0) = (0, 0)^T,$$

$$\dot{q}(0) = (0, 0)^T,$$

$$\hat{x}_1(0) = q(0),$$

$$\hat{x}_2(0) = (-0.5, -0.5)^T$$

y las posiciones deseadas

$$q_{d1} = -1, \quad q_{d2} = -0.5.$$

La figura 24 muestra los errores de posición \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 , y sus respectivas velocidades (líneas sólidas) del robot de 2 g.d.l. con (147) y (168), para $F_v > 0$, $K_c > F_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = 0$, $K_p > 0$ y $K_v > 0$. Con fines de comparación, se muestran también los resultados obtenidos cuando $K_v = 0$ (líneas discontinuas).

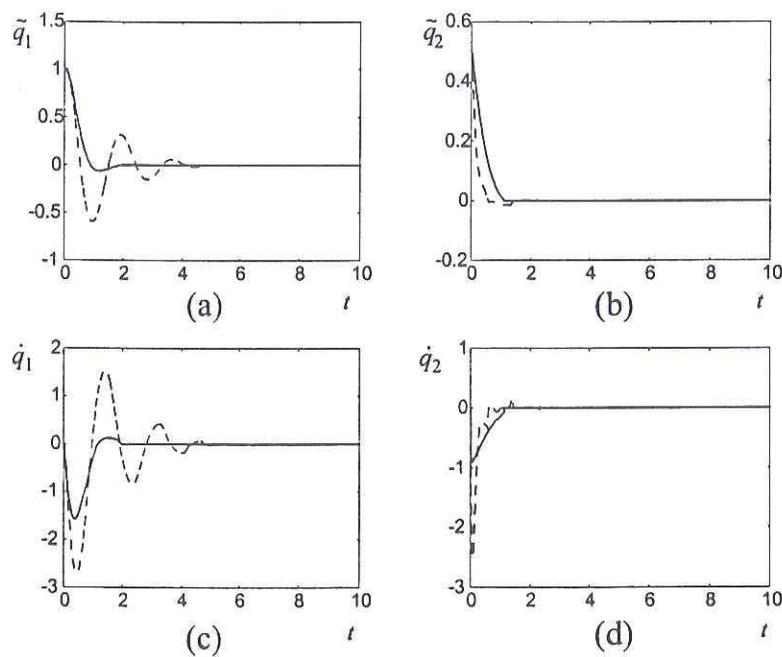


Figura 24. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.

b) Una ley de control discontinua sin compensación de gravedad para este sistema y (147) que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es:

$$\tau = -K_c \text{sgn}(\tilde{q}) - \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} - K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{x}}_1, \quad (169)$$

donde $k_{ci} > |g_i(q)| + f_{ci}$, $i = 1, \dots, m \forall q \in R^m$ y $V_3(\tilde{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\tilde{q}^T \frac{\partial V_3(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \geq 0 \forall \tilde{q} \in R^m$.

Las condiciones iniciales y las posiciones deseadas son las mismas que en el inciso anterior. La figura 25 muestra los errores de posición \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 , y sus respectivas velocidades (líneas sólidas) del robot de 2 g.d.l. con (147) y (169), para $F_v > 0$, $k_{ci} > |g_i(q)| + f_{ci} > 0$, $V_3(\tilde{q}) = 0$, $K_p > 0$ y $K_v > 0$. Con fines de comparación, se muestran también los resultados obtenidos cuando $K_v = 0$ (líneas discontinuas).

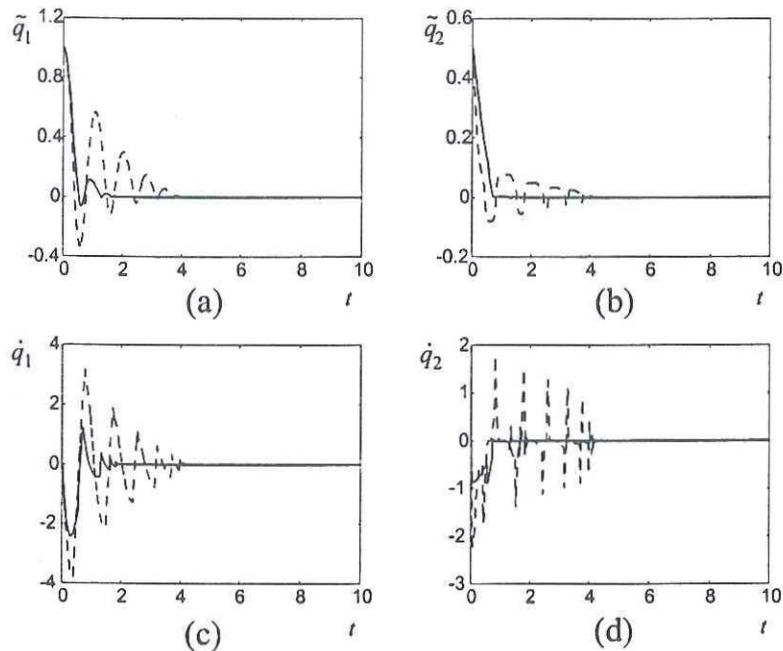


Figura 25. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb son conocidos con exactitud.

V.2.2 Robustez frente a incertidumbres en la fricción

Si F_v y F_c no son conocidos con exactitud, el sistema extendido (154) es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \tilde{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(y)[- \partial V_1(\tilde{q}) - K_p \tilde{q} - K_v \dot{y} + K_v \dot{\tilde{y}} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q})] \\ \dot{\tilde{y}} \\ M^{-1}(y)[-C(y, \dot{y})\dot{\tilde{y}} - C(y, \dot{y})\dot{y} - H_P \dot{y} - h_D M(y)\dot{\tilde{y}} - F(\dot{y}) + F_a(\dot{y})] \end{pmatrix} \quad (170)$$

donde $F_a(\dot{y}) = F_{va}\dot{y} + F_{ca}\text{sgn}(\dot{y})$, $F_{va} = \text{diag}\{f_{vai}\} \in R^{m \times m}$, $F_{ca} = \text{diag}\{f_{cai}\} \in R^{m \times m}$ son diagonales, tales que $F_{va} > F_v$ y $F_{ca} > F_c$.

Utilizando nuevamente la función candidata de Lyapunov (155) obtenemos que su derivada temporal a lo largo de la trayectorias de (170) fuera de todas las superficies de discontinuidad es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & -\dot{q}^T [F_v \dot{q} + F_c \text{sgn}(\dot{q})] - \dot{q}^T [K_v \dot{q} - K_v \dot{y}] - \dot{y}^T [F_v \dot{q} + F_c \text{sgn}(\dot{q}) \\ & - F_{va} \dot{y} - F_{ca} \text{sgn}(\dot{y})] - h_D \dot{y}^T M(q) \dot{\tilde{y}} + k_q \|\dot{q}\| \|\dot{\tilde{y}}\|^2 + k_q \|\dot{\tilde{y}}\|^3. \end{aligned} \quad (171)$$

Resulta fácil determinar que si

$$f_{ci} > \frac{f_{cai}}{2} \quad \text{para } i = 1, \dots, m, \quad (172)$$

se satisface, entonces

$$-\dot{q}^T F_c \text{sgn}(\dot{q}) - \dot{y}^T [F_c \text{sgn}(\dot{q}) - F_{ca} \text{sgn}(\dot{y})] \leq 0$$

y (171) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & -(F_v + K_v)_m \|\dot{q}\|^2 + (F_{vs} + K_v)_M \|\dot{y}\| \|\dot{q}\| - F_{va_m} \|\dot{\tilde{y}}\|^2 \\ & - h_D M_m \|\dot{\tilde{y}}\|^2 + k_q \|\dot{q}\| \|\dot{\tilde{y}}\|^2 + k_q \|\dot{\tilde{y}}\|^3 \end{aligned} \quad (173)$$

o

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & - \begin{pmatrix} \|\dot{q}\| \\ \|\dot{y}\| \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (F_v + K_v)_m & -\frac{1}{2}(F_{vs} + K_v)_M \\ -\frac{1}{2}(F_{vs} + K_v)_M & F_{va_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\dot{q}\| \\ \|\dot{y}\| \end{pmatrix} \\ & - h_D M_m \|\dot{y}\|^2 + k_q \|\dot{q}\| \|\dot{y}\|^2 + k_q \|\dot{y}\|^3. \end{aligned} \quad (174)$$

donde $F_{vs} = F_{va} - F_v$.

Por lo tanto, el lado derecho de (173) sera semidefinido negativo, si la matriz que aparece en (174) es definida positiva, es decir, si

$$(F_v + K_v)_m > \frac{(F_{vs} + K_v)_M^2}{4F_{va_m}}, \quad (175)$$

y, si nuevamente (162) se satisface.

Así, un análisis en la intersección $\dot{q} = 0$ & $\dot{y} = 0$ idéntico a los anteriores nos permite concluir que el subconjunto invariante mas grande contenido en

$$\{(\bar{q}, \dot{q}, \bar{y}, \dot{y}) : \dot{V} = 0\} = \{(\bar{q}, \dot{q}, \bar{y}, \dot{y}) : \dot{q} = 0 \text{ \& \ } \dot{y} = 0\} \quad (176)$$

es

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (\bar{q}, \dot{q}, \bar{y}, \dot{y}) : \dot{q} = 0 \text{ \& \ } \dot{y} = 0 \text{ \& \ } |\partial v_{1i}(\bar{q}_i) + k_{pi}\bar{q}_i + g_i(q)| \leq f_{ci} \\ \text{\& \ } |H_P \bar{y}| \leq (f_{ci} + f_{cai}), i = 1, \dots, m \end{array} \right\}, \quad (177)$$

donde $(g_1(q), \dots, g_m(q))^T = g(q)$, hacia donde, segun el Teorema 1, todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (170) convergen cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, puesto que el error de observación de la salida $\bar{y} = y - \hat{y}$ no interesa que sea cero, el punto $(\bar{q}, \dot{q}) = 0$ del sistema (145) con el observador

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + h_D \bar{y} \\ M^{-1}(y)[-C(y, \hat{x}_1)\hat{x}_1 + \tau + H_P \bar{y} - g(y) - F_a(\hat{x}_1)] \end{pmatrix} \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 \end{aligned} \quad (178)$$

y (153) es asintóticamente estable si (172), (175), (162) y $\Omega = \{(0, 0, \tilde{y}, 0) : \tilde{y} \in R^m\}$ se satisfacen..

Ejemplo 2. Considérese nuevamente el sistema del ejemplo anterior.

Un observador de velocidad más real para este sistema es dado por (178).

a) Una ley de control discontinua con compensación de gravedad para el robot de 2 g.d.l. y (178) que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada nuevamente por (168).

Las condiciones iniciales y las posiciones deseadas son las mismas que en el ejemplo 1 inciso a). La figura 26 muestra los errores de posición \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 , y sus respectivas velocidades (líneas sólidas) del robot de 2 g.d.l. con (178) y (168), para $F_v > 0$, $K_c > F_c > 0$, $V_3(\tilde{q}) = 0$, $K_p > 0$ y $K_v > 0$. Se muestran también los resultados obtenidos cuando $K_v = 0$ (líneas discontinuas).

b) Una ley de control discontinua sin compensación de gravedad para este sistema y (178) que cumple satisfactoriamente el objetivo de control es dada por (169).

Las condiciones iniciales y las posiciones deseadas son las mismas que en el inciso anterior. La figura 27 muestra los errores de posición \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 , y sus respectivas velocidades (líneas sólidas) del robot de 2 g.d.l. con (178) y (169), para $F_v > 0$, $k_{ci} > |g_i(q)| + f_{ci} > 0$, $V_3(\tilde{q}) = 0$, $K_p > 0$ y $K_v > 0$. Se muestran también los resultados obtenidos cuando $K_v = 0$ (líneas discontinuas).

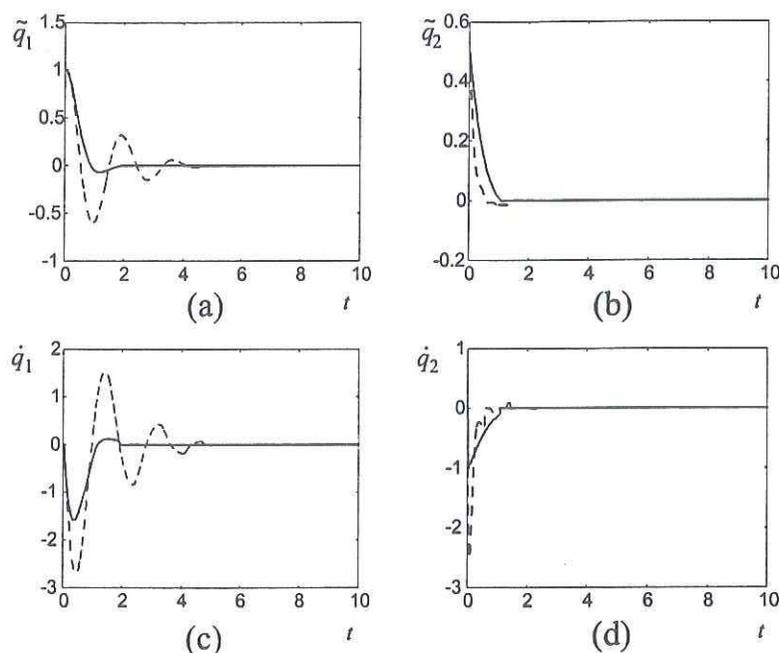


Figura 26. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica con compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.

V.3 Conclusiones

En este capítulo se derivaron observadores asintóticos para estimar el estado velocidad de sistemas mecánicos bidimensionales y n -dimensionales discontinuos, tratados a lo largo de esta tesis, y se muestra que estos observadores pueden ser usados con controladores obtenidos en el capítulo anterior.

Para estos sistemas se encontraron condiciones suficientes para concluir que sus orígenes sean estables asintóticamente cuando las velocidades estimadas por los observadores se usan en lugar de las verdaderas en las leyes de control consideradas. Para los sistemas n -dimensionales una aproximación de la región de atracción fue también obtenida.

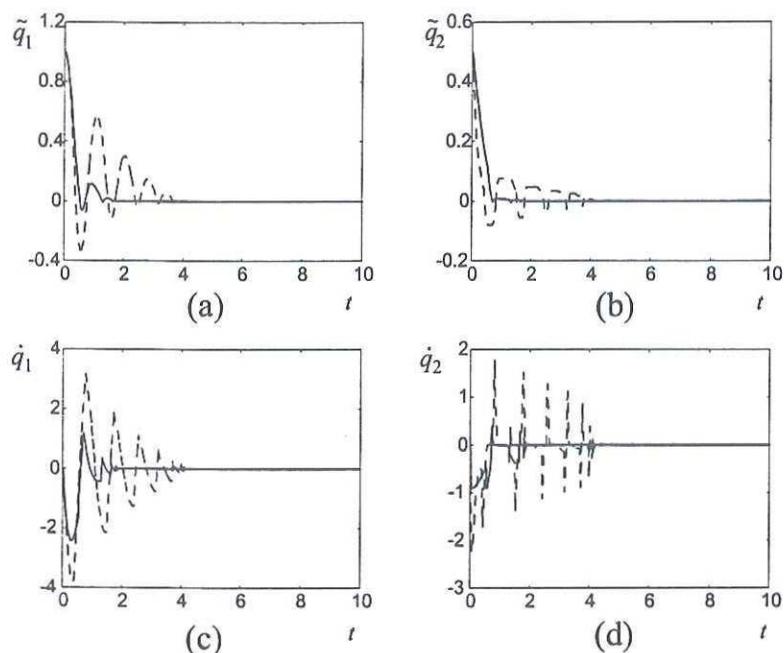


Figura 27. Estados del robot de 2 g.d.l. con una ley de control discontinua dinámica sin compensación de gravedad. Los coeficientes de la fricción viscosa y de Coulomb no son conocidos con exactitud.

Es importante mencionar que los observadores pueden utilizar valores aproximados de los coeficientes de las fricciones consideradas aquí, lo cual permite la validez de los controles dinámicos propuestos en este capítulo, puesto que la obtención de valores aproximados de las fricciones resulta posible analítica y/o experimentalmente en un sistema físico (González Elías, 2000).

Capítulo VI

Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha hecho un estudio sobre sistemas mecánicos con fricción viscosa y de Coulomb. Se analizaron las definiciones de sus soluciones así como la estabilidad de las mismas.

Se ha propuesto un procedimiento de diseño de controladores estáticos y dinámicos, que ofrecen alternativas de solución a los problemas relacionados con los efectos nocivos que provoca la fricción en sistemas de control. Los algoritmos de control desarrollados no hacen uso de técnicas de compensación de fricciones.

Con la información recabada y los conocimientos adquiridos a lo largo de este trabajo de investigación, considero que se puede concluir lo siguiente:

- La descripción cualitativa de la fricción de Coulomb por medio de la función no lineal signo (una aproximación al verdadero fenómeno físico por una cota superior) puede resultar ventajosa, si lo que se busca es no compensarla (“cancelarla”) de forma directa a través de un controlador (como lo fue en nuestro caso).
- En este caso el estudio de ecuaciones diferenciales con términos discontinuos y el análisis de sus soluciones en busca de controladores que cumplan los objetivos de control sin error produce resultados muy satisfactorios.
- Puesto que leyes de control discontinuas no pueden ser implementadas con exactitud en sistemas físicos, los objetivos de control sin error no pueden ser alcanzados. Sin

embargo, una pequeña extensión del análisis presentado aquí ayudará a determinar de manera confiable los posibles errores en los objetivos de control, lo cual no puede ser obtenido con algoritmos de control que usan técnicas de compensación de fricción (González Elías, 2000).

- En el caso de los observadores propuestos sus naturalezas discontinuas pueden pasar desapercibidas puesto que sus implementaciones físicas suelen ser electrónicas, por lo que sus términos discontinuos son implementados con buena exactitud.

VI.1 Trabajo a futuro

En esta tesis se ha pretendido mostrar un panorama de las ecuaciones diferenciales con términos discontinuos y su aplicación a sistemas mecánicos con fricción viscosa y de Coulomb. Así, algunos de los trabajos a futuros pueden ser:

- Implementación física de los controladores propuestos y comparación con controladores que usan técnicas de compensación de fricción.
- Control de movimiento.

Bibliografía

- Alvarez Gallegos, J., Orlov, I. y Acho, L. 2000. "An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a Coulomb friction oscillator". *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Special Issue on Variable Structure Systems*. 122. (4): 687-690 p.
- Berghuis, H., Nijmeijer, H. 1993. "Global regulation of robots using only position measurements". *Systems & Control Letters*. 21: 289-293 p.
- Branicky, M. S. 1998. "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems". *IEEE trans. Aut. Ctrl.* 43. (4). 475-482 p.
- Craig, J. J. 1989. "Introduction to Robotics: Mechanics and Control". Addison Wesley.
- Filippov, A. F. 1988. "Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides". Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- González Elías, M. E. 2000. "Modelos de Friccion con Aplicacion al Control de Mecanismos". CICESE-DET, tesis de maestria en ciencias, México.
- Johansson, K. H., Rantzer, A., Åström, K. J. 1999. "Fast switches in relay feedback systems". *Automatica*. 35: 539-552 p.
- Khalil, H. K. 1996. "Nonlinear Systems". Prentice Hall. 2nd ed. New Jersey.
- Nicosia, S. y Tomei, P. 1990. "Robot control by using only joint position measurements". *IEEE Trans. Automat. Ctrl.* 35. (9): 1058-1061 p.
- Shevitz, D., Paden, B. 1994. "Lyapunov stability theory of nonsmooth systems". *IEEE Trans. Automat. Ctrl.* 39. (9): 1910-1914 p.
- Skafidas, E., Evans, J. R., Savkin, A. V., Petersen, I. R. 1999. "Stability results for switched controller systems". *Automatica*. 35: 553-564 p.
- Utkin, V. I. 1987. "Discontinuous control system: state of art in theory y applications". IFAC. 10th Triennial World Congress, Munich, FRG.
- Utkin, V. I. 1992. "Sliding Modes in Control Optimization". Springer Verlag. Berlin.

APÉNDICE A. Unicidad de soluciones a la derecha de ecuaciones diferenciales discontinuas

En este apéndice se presentan un método para demostrar unicidad de soluciones a la derecha de los sistemas discontinuos considerados a lo largo de esta tesis. Puesto que en este trabajo los sistemas bidimensionales es un caso particular de los sistemas n -dimensionales, se demuestra unicidad a la derecha del robot manipulador de m g.d.l. con fricción viscosa y de Coulomb.

Para este fin, es conveniente primeramente recordar el siguiente Teorema para sistemas continuos, el cual pueden consultarse en (Khalil, 1996).

Teorema 4 (Existencia y unicidad global de soluciones de sistemas continuos) *Supóngase que $f(x)$ satisface*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \quad (\text{A.1})$$

$$\|f(x_0)\| \leq h \quad (\text{A.2})$$

$\forall x, y \in R^n$. Entonces, la ecuación de estado

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{A.3})$$

con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, \infty)$.

El sistema n -dimensional considerado en los ejemplos de este trabajo de investigación es el robot manipulador de m g.d.l. con fricción viscosa y de Coulomb dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q})] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

donde $q \in R^m$ es la posición, $\tilde{q} = q - q_d$, q_d es la posición constante deseada, $\tau \in R^m$ es la entrada de control, M , C , g son matrices de dimensiones adecuadas, con términos que son funciones diferenciables, $M = M^T > 0$, $F(\dot{q}) = F_v \dot{q} + F_c \text{sgn}(\dot{q})$ es conocido como el vector de fricción viscosa y de Coulomb, $\text{sgn}(\dot{q}) = (\text{sgn}(\dot{q}_1), \dots, \text{sgn}(\dot{q}_n))^T$, y las matrices $F_v = \text{diag}\{f_{vi}\} \in R^{m \times m}$ y $F_c = \text{diag}\{f_{ci}\} \in R^{m \times m}$ son diagonales y semi-definidas positivas. Además, se supone que todas las uniones del robot son del tipo rotacional.

A.1 Control continuo

El sistema (A.4) con una ley de control τ continua queda como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q})] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

De acuerdo con (Filippov, 1988) si determinamos unicidad de soluciones fuera de las superficies de discontinuidad S_i ($\dot{q}_i = 0$), $i = 1, \dots, m$, y en estas superficies y en sus intersecciones implicará unicidad de soluciones a la derecha de este sistema discontinuo.

Fuera de toda superficie de discontinuidad (A.5) puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F_v \dot{q} - C] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

donde C es el vector constante $(c_1, \dots, c_m)^T$ tal que $c_i \in \{-f_{ci}, f_{ci}\}$, $i = 1, \dots, m$.

Por otro lado, de acuerdo con la definición de solución usando el método de control equivalente, si las trayectorias del sistema (A.5) en cualquier superficie de discontinuidad $\dot{q}_i = 0$ permanecen en ella implica que

$$\ddot{\tilde{q}}_i = \ddot{q}_i = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{A.7})$$

por lo que

$$\tilde{q}_i = \text{const. } \forall t \geq 0. \quad (\text{A.8})$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 4 tanto al sistema (A.6) como al sistema obtenido considerando (A.7) y (A.8) podemos concluir que si ambos tienen soluciones únicas implicará, según (Filippov, 1988), que las soluciones de (A.5) son únicas a la derecha.

A.2 Control discontinuo

La misma filosofía que para el control continuo puede ser utilizada para determinar unicidad de soluciones a la derecha del sistema (A.4) con una ley de control τ discontinua.

A.2.1 Control estático

El sistema (A.4) con la ley de control

$$\tau = -\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad (\text{A.9})$$

queda como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q)^{-1} \left[-\partial V_1(\tilde{q}) - \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - F(\dot{q}) \right] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

donde $\partial V_1(\tilde{q})$ es el vector $(\partial v_{11}(\tilde{q}_1), \dots, \partial v_{1m}(\tilde{q}_m))^T$ cuyos términos son funciones que pueden ser discontinuas respectivamente en las superficies S_{m+i} ($\varphi_{m+i}(\tilde{q}_i) = 0$), $i = 1, \dots, m$, ∂ denota el gradiente generalizado y $V_2(\dot{q})$ es una función suave definida positiva o cero, tal que $\dot{q}^T \frac{\partial V_2(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0 \forall \dot{q} \in R^m$. Las superficies de discontinuidad S_i ($\varphi_i(x) = 0$), $i = 1, \dots, m$, corresponde los términos discontinuos de la fricción de Coulomb, es decir $\varphi_i(x) = \dot{q}_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Fuera de toda superficie de discontinuidad (A.10) puede representarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-1} \left[-\frac{\partial V_2(\dot{\tilde{q}})}{\partial \dot{\tilde{q}}} - C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} - g(q) - F_v\dot{\tilde{q}} - K(\tilde{q}) \right] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

donde $K(\tilde{q})$ es el vector $(k_1(\tilde{q}_1), \dots, k_m(\tilde{q}_m))^T$ cuyos términos son funciones continuas.

Por otro lado, de acuerdo con la definición de solución usando el método de control equivalente, si las trayectorias del sistema (A.10) en cualquier superficie de discontinuidad $\dot{q}_i = 0$ permanecen en ella implica que

$$\dot{\tilde{q}}_i = \ddot{q}_i = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.12})$$

Si las trayectorias de este sistema en cualquier superficie de discontinuidad $\varphi_{m+i}(\tilde{q}_i) = 0$ permanecen en ella implica nuevamente (A.12).

Por lo tanto, aplicando el Teorema 4 tanto al sistema (A.11) como al sistema obtenido considerando (A.12) podemos concluir que si ambos tienen soluciones únicas implicará, según (Filippov, 1988), que las soluciones de (A.10) son únicas a la derecha.

A.2.2 Control dinámico

Considérese el sistema que representa a (A.4) con un control dinámico

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ M^{-1}(q) [-\partial V_1(\tilde{q}) - K_p\tilde{q} - K_v\dot{\tilde{q}} + K_v\dot{\tilde{y}} - C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} - g(q) - F(\dot{\tilde{q}})] \\ \dot{\tilde{y}} \\ M^{-1}(q) [-C(q, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{y}} - C(q, \dot{\tilde{y}})\dot{\tilde{y}} - H_P\tilde{y} - h_D M(q)\dot{\tilde{y}} - F(\dot{\tilde{q}}) + F_a(\dot{\tilde{y}})] \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

donde $\tilde{y} = q - \hat{y}$, h_D es una constante escalar positiva, H_P es una matriz simétrica definida positiva, $F_a(\dot{\tilde{y}}) = F_{va}\dot{\tilde{y}} + F_{ca}\text{sgn}(\dot{\tilde{y}})$, $F_{va} = \text{diag}\{f_{vai}\} \in R^{m \times m}$, $F_{ca} = \text{diag}\{f_{cai}\} \in R^{m \times m}$ son diagonales, tales que $F_{va} > F_v$ y $F_{ca} > F_c$.

Fuera de toda superficie de discontinuidad (A.13) puede representarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1}(q)[-K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{y}} - C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} - g(q) - F_v \dot{\tilde{q}} - K(\tilde{q})] \\ M^{-1}(q)[-C(q, \dot{q})\dot{\tilde{y}} - C(q, \dot{\tilde{y}})\dot{\tilde{y}} - H_P \tilde{y} - h_D M(q)\dot{\tilde{y}} - F_v \dot{\tilde{q}} + F_{va}\dot{\tilde{y}} - C + C_a] \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

donde $K(\tilde{q})$ es el vector $(k_1(\tilde{q}_1), \dots, k_m(\tilde{q}_m))^T$ cuyos términos son funciones continuas, C es el vector constante $(c_1, \dots, c_m)^T$ tal que $c_i \in \{-f_{ci}, f_{ci}\}$, $i = 1, \dots, m$ y C_a es el vector constante $(c_{a1}, \dots, c_{am})^T$ tal que $c_{ai} \in \{-f_{cai}, f_{cai}\}$, $i = 1, \dots, m$.

De acuerdo con la definición de solución usando el método de control equivalente, si las trayectorias del sistema (A.13) en cualquier superficie de discontinuidad $\dot{q}_i = 0$ permanecen en ella implica que

$$\ddot{\tilde{q}}_i = \ddot{q}_i = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.15})$$

De igual manera si las trayectorias de este sistema en cualquier superficie de discontinuidad $\varphi_{m+i}(\tilde{q}_i) = 0$ permanecen en ella implica nuevamente (A.15).

Finalmente, si las trayectorias de (A.13) en cualquier superficie de discontinuidad $\dot{y}_i = \dot{q}_i - \dot{\tilde{y}}_i = 0$ permanecen en ella implica

$$\ddot{\tilde{q}}_i - \ddot{\tilde{y}}_i = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 4 tanto al sistema (A.14) como al sistema obtenido considerando (A.15) y (A.16) podemos concluir que si ambos tienen soluciones únicas implicará, según (Filippov, 1988), que las soluciones de (A.13) son únicas a la derecha.

APÉNDICE B. Robot de 2 grados de libertad

En este apéndice se incluyen varios datos numéricos del modelo dinámico del robot de 2 g.d.l. que es usado en diversos ejemplos de la presente tesis.

El robot considerado es mostrado en la figura 28. Este consiste de 2 eslabones unidos a través de articulaciones rotacionales.

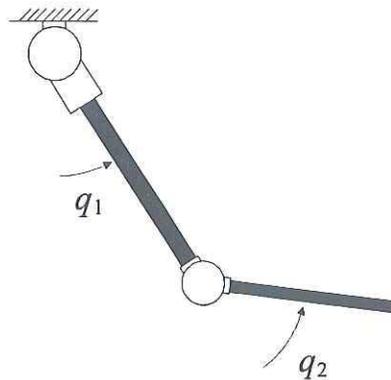


Figura 28. Robot de 2 g.d.l.

B.1 Modelo dinámico

El modelo dinámico del sistema mostrado en la figura 28 es expresado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F(\dot{q}) = \tau,$$

donde (Berghuis y Nijmeijer, 1993)

$$M(q) = \begin{pmatrix} 8.77 + 1.02 \cos(q_2) & 0.76 + 0.51 \cos(q_2) \\ 0.76 + 0.51 \cos(q_2) & 0.62 \end{pmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -0.51 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -0.51 \text{sen}(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0.51 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g(q) = 9.8 \begin{pmatrix} 7.6\text{sen}(q_1) + 0.63\text{sen}(q_1 + q_2) \\ 0.63\text{sen}(q_1 + q_2) \end{pmatrix}.$$

Además, puesto que

$$F(\dot{q}) = F_v \dot{q} + F_c \text{sgn}(\dot{q}),$$

donde $\text{sgn}(\dot{q}) = (\text{sgn}(\dot{q}_1), \text{sgn}(\dot{q}_2))^T$, proponemos

$$F_v = \text{diag}\{10\}$$

y

$$F_c = \text{diag}\{3\}.$$

Aquí, el valor propio mínimo de $M(q)$, para cualquier q , es

$$M_m \leq 0.4,$$

y

$$k_q = \frac{1}{2} \max_{q \in R^m} \sum_{k=1}^m \|C_k(q)\| \geq 1.3,$$

donde

$$C_{k,ij} = \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad i, j, k = 1, \dots, m.$$

Finalmente, al considerar los observadores (147) y (178), proponemos

$$H_p = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix},$$

$$h_D = 130$$

y

$$K_p = \text{diag}\{100\}.$$

y obtenemos el valor propio mínimo de $A(q) = \text{block diag}\{K_p, M(q), H_p, M(q)\}$:

$$A_m \leq 0.4.$$