

Tesis defendida por

Lilia Marcela Cháirez Rosales

y aprobada por el siguiente comité

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director del Comité

Dr. César Cruz Hernández

Miembro del Comité

Dr. Roberto Conte Galván

Miembro del Comité

Dra. Meritxell Riquelme Pérez

Miembro del Comité

Dr. César Cruz Hernández

Coordinador del programa de
Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

20 de noviembre de 2012

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones**

Control cinemático de energía para mecanismos:
aplicación a casos de estudio

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

Lilia Marcela Cháirez Rosales

Ensenada, Baja California, México

2012

Resumen de la tesis de Lilia Marcela Cháirez Rosales, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control. Ensenada, Baja California, Noviembre de 2012.

Control cinemático de energía para mecanismos:
aplicación a casos de estudio

Resumen aprobado por:

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director de Tesis

La filosofía de control de mecanismos, tradicionalmente, consiste en obtener el modelo dinámico del mismo y utilizar este modelo para proponer leyes de control que permitan obtener un comportamiento deseado. Tomando en cuenta que algunos robots industriales y otros mecanismos tienen actuadores de velocidad articular, en lugar de actuadores ideales de fuerzas o pares; en esta tesis se plantea la filosofía de *control cinemático*, en que las acciones de control son precisamente las velocidades articulares. El control de energía abordado en Robótica hasta el momento, ha relacionado el objetivo de control de una posición deseada con un valor de energía deseada; es decir, se ha enfocado en moldear las funciones de energía del mecanismo de manera que los mínimos de dicha función coincidan con un posición deseada.

Este trabajo de tesis presenta el estudio teórico de controladores para dos modelos de mecanismos con actuadores ideales de velocidad: péndulo y satélite ideales. Se trabaja con un modelo cinemático, con la posibilidad de modificar su etapa de salida y los objetivos de control planteados son de energía (cinética y potencial) y posición deseadas. Los controladores propuestos van acompañados de un análisis donde se demuestra el cumplimiento de los objetivos de control bajo las hipótesis presentadas.

Palabras Clave: **control, cinemática, energía, péndulo, satélite ideal**

Abstract of the thesis presented by Lilia Marcela Cháirez Rosales, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Sciences in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control. Ensenada, Baja California, November 2012.

Kinematic control of energy for mechanisms: application to case-studies

Abstract approved by:

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Thesis Director

Traditionally, the control of mechanisms philosophy deals with obtaining the dynamical model of the mechanism and proposing different control laws which use this model in order to achieve a desired behaviour. Taking into account that some industrial robots and some other mechanisms have velocity actuators, instead of the torque ones; this thesis proposes the philosophy of *kinematic control*, in which the control inputs are the joint velocities.

The energy control dealt, up until now, in Robotics, had related the control objectives of a desired position with a desired value of energy; that is, it had focused on model the energy functions of the mechanism so that the minimum of that function matches the desired position.

This thesis deals with the theoretical study of control algorithms for two case-studies with ideal velocity actuators: ideal pendulum and ideal satellite. This thesis uses a kinematic model, with the possibility to modify the output stage. Control algorithms, including energy-kinematic-control ones, are proposed and supported by analysis to demonstrate the control objectives achievement under the given hypothesis.

Keywords: **control, Kinematics, energy, pendulum, ideal satellite**

A mi mamá.

Agradecimientos

Al CICESE y al CONACYT por el apoyo económico para obtener este grado.

Al Dr. Rafael Kelly, por su tiempo y dirección de este trabajo. Y a su equipo de trabajo, Dann de la Torre y Dra. Carmen Monroy, por todo el apoyo en este año de tesis.

Al comité de tesis Dr. César Cruz y Dra. Meritxell Riquelme, por su tiempo y valiosos comentarios. Al Dr. Roberto Conte por las ideas de aplicación del tema de tesis y la bibliografía facilitada.

A mis *hermanitos* Adriana Salinas y Luis Guerrero, por su amistad y consejos.

A mis compañeros de generación, Jorge Quiroz y Antonio Zacarias por su compañía y amistad. A Oscar Montaña por sus ideas y discreción.

A todos los que siempre me echaron porras desde la Laguna, gracias.

A mis padres, Francisco y Raquel, y mi hermana Andreita, gracias por creer en mí y por ser mi motivación.

Al Ing. Joaquín Aranda, por su invaluable paciencia, consejos, regaños, cuidados, visitas y todo el apoyo a lo largo de estos años. Gracias por estar conmigo.

Contenido

	Página
Resumen en español	1
Resumen en inglés	2
Dedicatoria	3
Agradecimientos	4
Lista de Figuras	6
1. Introducción	8
1.1 Energía	8
1.2 Control cinemático	10
1.3 Control de energía	12
1.4 Objetivos de la tesis	13
1.5 Organización del documento	14
2. Caso estudio: Modelo de un péndulo ideal	15
2.1 Control cinemático de energía potencial	16
2.2 Control cinemático de energía cinética	26
2.3 Control cinemático de posición articular con entradas acotadas	39
3. Caso estudio: Modelo de un satélite ideal	44
3.1 Control cinemático de energía cinética de un modelo de un satélite cilíndrico ideal	44
3.1.1 Estabilización axial	48
3.2 Control cinemático de apuntamiento/orientación del modelo de un satélite ideal	55
3.2.1 Caso 1	68
3.2.2 Caso 2	73
Conclusiones	81
Referencias bibliográficas	82

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Péndulo ideal	15
2	Gráfica de la salida $y(t)$	24
3	Gráfica del error $\tilde{y}(t)$	24
4	Gráfica de la salida $y(t)$	25
5	Gráfica del error $\tilde{y}(t)$	25
6	Gráfica de la salida $y(t)$	28
7	Gráfica del error $\tilde{y}(t)$	29
8	Gráfica de la salida $y(t)$	30
9	Gráfica del error $\tilde{y}(t)$	31
10	Objetivo de control: prestación de la regulación de energía cinética . .	33
11	Gráfica de salida $y(t)$	36
12	Gráfica del error $\tilde{y}(t)$	37
13	Gráfica de salida $y(t)$	37
14	Gráfica del error $\tilde{y}(t)$	38
15	Gráfica de la posición $q(t)$	42
16	Gráfica del error $\tilde{q}(t)$	42
17	Gráfica de la entrada de control u	43
18	Satélite ideal	47
19	Satélite almacenado (izquierda), en órbita (derecha). Recuperada de <i>Boeing</i> , tomada de <i>www.boeing.com</i>	47
20	Gráfica de la evolución de la energía cinética $y(t)$	51
21	Gráfica de la evolución de la velocidad articular $\dot{q}(t)$	52
22	Gráfica del error de energía cinética $\tilde{y}(t)$	52
23	Gráfica de la evolución de la energía cinética $y(t)$	53

Figura	Página
24	Gráfica de la evolución de la velocidad articular $\dot{q}(t)$ 54
25	Gráfica del error de energía cinética $\tilde{y}(t)$ 54
26	El problema de los dos cuerpos 57
27	Ecuación de las cónicas en coordenadas polares 60
28	Variables que describen una órbita elíptica 62
29	Relación entre las anomalías media y excéntrica, por la componente horizontal de la velocidad \mathbf{v} 63
30	Control cinemático de apuntamiento/orientación de un satélite. Caso 1. 68
31	Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos) 71
32	Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos) 72
33	Gráfica del error de posición del apuntamiento $\tilde{q}(t)$ 72
34	Control cinemático de apuntamiento/orientación de un satélite. Caso 2. 73
35	Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos) 79
36	Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos) 80
37	Gráfica del error de posición del apuntamiento $\tilde{q}(t)$ 80

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo de tesis se ha planteado el diseño y análisis de sistemas de control para el caso de dos **mecanismos con modelos actuados por medio de velocidades articulares**: péndulo y satélite ideales.

En primera instancia se ha considerado el caso de control de energía potencial, para después abordar el caso de energía cinética de un modelo de un péndulo ideal; y finalmente un planteamiento de control de posición articular con entradas acotadas.

Mientras que para el segundo caso, el modelo de un satélite ideal, se ha planteado el control de energía cinética y uno más sobre apuntamiento u orientación de un satélite ideal hacia la Tierra.

A continuación se presentarán algunas definiciones importantes para el capítulo 2 y 3 referentes a energía, y además un resumen sobre control de energía y control cinemático.

1.1 Energía

Energía potencial y fuerzas conservativas

“La energía potencial \mathcal{U} de un sistema puede considerarse como la energía almacenada en el sistema que puede convertirse en energía cinética o para realizar un trabajo. Sin embargo este concepto sólo aplica cuando se habla de fuerzas conservativas” (Serway, 1986, pg. 235).

En general, una fuerza es conservativa si el trabajo realizado por dicha fuerza al mover una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria que lleve entre ellos.

El trabajo total realizado por una fuerza conservativa es cero cuando la partícula se mueve en una trayectoria cerrada (regresa a su posición inicial).

“El trabajo \mathcal{W} hecho por una fuerza conservativa es igual al negativo del cambio en la energía potencial $-\Delta\mathcal{U}$ asociada con esa fuerza \mathbf{F} :

$$\mathcal{W} = -\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_f - \mathcal{U}_i = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

donde F_x es la componente de \mathbf{F} en la dirección del desplazamiento desde x_i hasta x_f ” (Serway, 1986, pg. 235).

Energía cinética

La energía cinética es la energía asociada con el movimiento de un cuerpo. Es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el *trabajo*.

“La energía cinética \mathcal{K} de una partícula de masa m que se mueve con una rapidez v se define como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}mv^2$$

(donde v es pequeña, comparada con la rapidez de la luz)” (Serway, 1986, pg. 194).

Energía mecánica

“La ley de conservación de la energía mecánica establece que el total de la energía mecánica \mathcal{E} de un sistema permanece constante, si y sólo si, las fuerzas que actúan son conservativas. Esto es equivalente a decir que si la energía potencial \mathcal{U} de un sistema aumenta (o disminuye) en cierta cantidad, la energía cinética \mathcal{K} debe disminuir (o aumentar) en la misma cantidad”

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{K} + \mathcal{U}$$

(Serway, 1986, pg. 221).

1.2 Control cinemático

Originalmente el concepto de control cinemático viene de Robótica, y se refiere al control de postura en robots manipuladores con actuadores ideales de velocidad articular.

El autor Bruno Siciliano presentó en su artículo *Control cinemático de robots redundantes*, una recopilación hasta el año 1989 de controladores cinemáticos (Siciliano, 1990). Entre ellas:

- Técnicas basadas en el Jacobiano

- Pseudoinversa

$$\dot{\mathbf{q}} = J^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$$

donde \mathbf{q} es el vector de variables articulares, \mathbf{x} es el vector de variables de postura y el punto sobre ellas denota su derivada con respecto al tiempo. Además J es la matriz Jacobiana, definida como $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{q}$, donde \mathbf{f} es una función no lineal diferenciable que relaciona las variables articulares con las de postura. El superíndice $+$ denota la pseudoinversa de la matriz jacobiana, que se define como $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$

- Inversa amortiguada por mínimos cuadrados

$$\dot{\mathbf{q}} = J^*(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}},$$

donde $J^* = J^T(JJ^T + \lambda^2 I)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. El valor λ depende del mínimo valor singular (*S-number*) de la matriz J . Un valor singular es por definición un número no negativo. Si $\lambda = 0$ equivale a la técnica basada en la pseudoinversa.

- Técnicas basadas en el gradiente

– Optimización de funciones para evitar redundancias

$$\dot{\mathbf{q}} = J^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} + [I + J^+(\mathbf{q})J(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}_0,$$

donde $\dot{\mathbf{q}}_0 = (\frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}})$. La función h puede ser cualquiera mientras pueda reducirse a una expresión sólo en términos de las variables articulares; además, dependiendo del tipo de función utilizada, se puede mejorar el comportamiento del mecanismo, por ejemplo al evitar el límite mecánico en articulaciones. (Siciliano, 1990)

También existe el concepto de control cinemático de impedancia propuesto por los autores R. Kelly, R. Carelli y C. Soria en su artículo *Sobre control cinemático de impedancia en robots industriales* (Kelly *et al.*, 2004). En este concepto, el objetivo de control es lograr una impedancia mecánica deseada en los robots manipuladores, es decir, no se trata de controlar la postura del robot, sino una relación dinámica de las fuerzas con las que interactúa con su medio ambiente. Este objetivo se motiva tomando en cuenta que algunos robots industriales tienen actuadores de velocidad, en lugar de actuadores ideales de fuerzas o pares.

Es decir, el mecanismo (modelo de la planta):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \end{cases}$$

donde \mathbf{q} es el vector de variables articulares, \mathbf{u} es el vector de entradas de la planta, \mathbf{y} es el vector de salidas del sistema y \mathbf{f} es la función que relaciona las variables articulares con las variables de posición del marco de referencia del extremo del robot.

El trabajo en esta tesis no tratará el control de postura ni de impedancia; como se mencionó al principio de este capítulo, se utilizará el concepto de control cinemático

como:

Aquel en que las entradas de control para el mecanismo son las velocidades articulares

1.3 Control de energía

Moldeo de energía y pasividad

Según Del Puerto en (Del Puerto, 2006), en la técnica de control *Moldeo de energía* se logra la estabilización mediante la modificación de la energía a través de la realimentación de manera tal que la nueva función de energía tenga un mínimo en el punto de equilibrio deseado.

De acuerdo al trabajo de Del Puerto, en un principio se trataron con sistemas dinámicos pasivos, y el modelado matemático basado en el principio de Hamilton facilitaba mucho el diseño del controlador. Sin embargo, cuando se utilizaba el modelado basado en Euler-Lagrange el diseño de controladores no funcionaba para todos los casos, ya que también comprendían sistemas no conservativos.

Del Puerto también plantea que la idea de modificar la energía tiene sus raíces en la metodología de control de posición de robots manipuladores, la cual evolucionó al método de control por moldeo de energía e inyección de amortiguamiento.

Es decir moldear la energía potencial del sistema mecánico y hacer que el mínimo de esta energía modificada coincidiera con la posición deseada para el manipulador, entonces el sistema en lazo cerrado evoluciona de manera natural hacia el objetivo de control. Si, además, es posible inyectar más amortiguamiento al sistema, entonces esta convergencia será más rápida.

Los autores R. Ortega et al, presentaron una “extensión” del trabajo de moldeo de energía en su libro (Ortega *et al.*, 1998). Esta “extensión” combina los conceptos de

pasividad, interconexión y asignación de amortiguamiento (IDA-PBC). Los autores plantean que esta metodología dota al sistema en lazo cerrado con una estructura Hamiltoniana, donde las funciones de energía cinética y potencial poseen algunas características “deseadas”, garantizando que la función de energía total alcance un mínimo en el punto de operación.

Control de energía total

Los autores I. Fantoni y R. Lozano, en su trabajo *Estabilización del péndulo de Furuta alrededor de su órbita homoclínica*, proponen un ley de control con un enfoque basado en energía (Fantoni y Lozano, 2002).

En este artículo del año 2002, establecen como objetivo llevar al sistema a su órbita homoclínica. Esta órbita viene dada por valores nulos en la energía total del sistema y en la velocidad y posición del brazo ($\mathcal{E} = 0, \theta = 0, \dot{\theta} = 0$)

Siendo entonces el objetivo parcial de control (regulación de energía total):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_d$$

donde $\mathcal{E}_d = 0$.

1.4 Objetivos de la tesis

Los objetivos planteados para este trabajo de tesis fueron:

- Emplear el concepto de control cinemático para el diseño de controladores de energía potencial y energía cinética para mecanismos.
- Realizar las simulaciones correspondientes para comprobar las predicciones obtenidas del análisis teórico.

Se utilizará el concepto de control cinemático en dos casos de estudio. Para ambos casos se obtendrán controladores de energía (potencial y cinética), y además se presentará una aplicación donde se trabaja con control cinemático de posición articular. Las simulaciones correspondientes se mostrarán al final del análisis de cada controlador.

1.5 Organización del documento

El documento de tesis está organizado de la siguiente manera:

El capítulo 2 muestra el trabajo realizado con el primer caso de estudio: Modelo de un péndulo ideal. Se presentan los resultados obtenidos del análisis de tres controladores cinemáticos de energía (uno de energía potencial y dos de energía cinética), y uno más de control cinemático de posición articular con entradas acotadas, y además se presentan las simulaciones para acompañar las demostraciones del análisis teórico.

El capítulo 3 se dedica al trabajo del segundo caso de estudio: Modelo de un satélite ideal. Principalmente, se muestra el análisis de un controlador cinemático de energía cinética, de un controlador cinemático de apuntamiento/orientación, y las simulaciones de ambos controladores. Además se presentan los conceptos básicos de la *Mecánica Celeste*, necesarios para el desarrollo del controlador cinemático de apuntamiento/orientación.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas del presente trabajo de tesis.

Capítulo 2

Caso estudio: Modelo de un péndulo ideal

El péndulo ideal considerado para este caso de estudio, es aquel que cuenta con un actuador ideal de velocidad sin fricción, ni elasticidad en la articulación y eslabón rígido. En la figura 1 se presenta un bosquejo del mecanismo y las variables que lo describen.

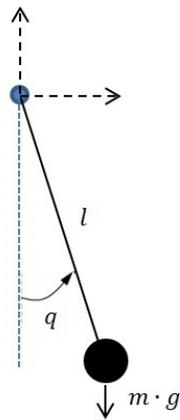


Figura 1. Péndulo ideal

Donde m corresponde a la masa puntual en el extremo del eslabón de longitud l , g representa la aceleración de la gravedad y q es la posición angular o articular del péndulo.

2.1 Control cinemático de energía potencial

Considere el siguiente modelo no lineal para el mecanismo:

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ y = \mathcal{U}(q) = mgl[1 - \cos(q)] \end{cases} \quad (1)$$

donde:

- $q \in \mathbb{R}$ es la posición articular
- $y \in \mathbb{R}$ es la salida (energía potencial)
- $u \in \mathbb{R}$ es la entrada (velocidad articular)
- $\mathcal{U}(q) \in \mathbb{R}$ es la función de energía potencial del sistema

El objetivo de control, conocido en la literatura de control automático como regulación, y específicamente para nuestro caso, regulación de energía potencial, puede expresarse como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d - y(t) = 0$$

donde y_d (energía potencial deseada) es constante.

Antes de proseguir con la propuesta y análisis de controlador, conviene hacer las siguientes definiciones:

- Defínase el conjunto de configuraciones críticas como \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{R} : \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} = 0\} \quad (2)$$

- Defínase el conjunto de energías potenciales críticas como \mathcal{Y} :

$$\mathcal{Y} = \{y = \mathcal{U}(q) : q \in \mathcal{Q}\} \quad (3)$$

- Defínase el conjunto de energías potenciales admisibles como \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \{y_d = \mathcal{U}(q^*) : q^* \notin \mathcal{Q}\} \quad (4)$$

Las hipótesis que se consideran son:

- q^* desconocida
- m, g conocidas
- l desconocida
- q no medible
- u, y medibles
- y_d admisible

De las definiciones en (2), (3) y (4), se tienen para este caso de estudio:

$$\mathcal{Q} = \{q = n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{Y} = \{0, 2mgl\}$$

$$\mathcal{A} = \{y_d \in (0, 2mgl)\}$$

La propuesta de controlador (controlador Proporcional):

$$u = k(y_d - y)$$

donde $k \in \mathbb{R}_{>0}$

Sustituyendo la acción de control en la ecuación de estado de (1):

$$\dot{q} = \underbrace{k(y_d - y)}_u \quad (5)$$

Definiendo la variable de error de energía potencial como:

$$\tilde{y} = y_d - y$$

$$\dot{\tilde{y}} = -\dot{y}$$

Se sabe que:

$$y = \mathcal{U}(q)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} \dot{q}$$

Reemplazando (5) en la ecuación anterior:

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} k(y_d - y)$$

Aplicando la definición de error:

$$\dot{\tilde{y}} = -\frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} k\tilde{y}$$

$$\dot{\tilde{y}} = -mgl \sin(q) k\tilde{y} \quad (6)$$

Conviene expresar sólo en términos de \tilde{y} , por lo que se obtiene una expresión para q :

$$y = y_d - \tilde{y} = mgl[1 - \cos(q)]$$

$$q = \arccos\left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl}\right)$$

Sustituyendo la expresión de q en (6) para obtener la ecuación de malla cerrada del sistema de control del mecanismo:

$$\dot{\tilde{y}} = -mgl \sin\left[\arccos\left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl}\right)\right] k\tilde{y} \quad (7)$$

La ecuación de malla cerrada (7) sólo está bien definida para ciertos valores de \tilde{y} , que a su vez dependen de y_d :

$$\left|1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl}\right| \leq 1$$

$$y_d - 2mgl \leq \tilde{y} \leq y_d \quad (8)$$

Dado que $y_d \in \mathcal{A}$:

$$0 < y_d < 2mgl$$

Por tanto, los valores para \tilde{y} serán:

$$-2mgl < \tilde{y} < 2mgl$$

Para continuar con el análisis, considérese la definición de punto de equilibrio según Hale y Koçak en su trabajo (Hale y Koçak, 1991):

Definición de punto de equilibrio

“El punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ es llamado un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$, si $f(\bar{x}) = 0$.”

(Hale y Koçak, 1991, pg. 11)

Los equilibrios de la ecuación de malla cerrada:

$$-kmg \sin \left[\arccos \left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl} \right) \right] \tilde{y} = 0$$

$$\bar{y}_1 = 0$$

$$\sin \left[\arccos \left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl} \right) \right] = 0$$

$$\bar{y}_2 = y_d$$

$$\bar{y}_3 = y_d - 2mgl$$

Y para el análisis de estabilidad de los equilibrios, considérese el siguiente lema, también de Hale y Koçak (1991):

Lemma 1.12

“Un punto de equilibrio \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$ es estable si existe un $\delta > 0$ tal que $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$ para $|x - \bar{x}| < \delta$.

De manera similiar, \bar{x} es asintóticamente estable, si y sólo si, existe un $\delta > 0$ tal que $(x - \bar{x})f(x) < 0$ para $0 < |x - \bar{x}| < \delta$.

Un punto de equilibrio \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$ es inestable si existe un $\delta > 0$ tal que $(x - \bar{x})f(x) > 0$, para $0 < x - \bar{x} < \delta$ o para $-\delta < x - \bar{x} < 0$.” (Hale y Koçak, 1991, pg. 17)

Para $\bar{y}_1 = 0$

$$(\tilde{y} - 0)(-kmgl \sin \left[\arccos \left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl} \right) \right] \tilde{y}) < 0$$

$$-kmgl \sin \left[\arccos \left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl} \right) \right] \tilde{y}^2 < 0$$

Esto se cumple para $0 < |\tilde{y} - 0| < \delta$, donde $\delta \in (0, y_d)$. Por tanto el equilibrio es **asintóticamente estable**.

Para los equilibrios $\bar{y}_2 = y_d$ y $\bar{y}_3 = y_d - 2mgl$, se trató de demostrar inestabilidad mediante el método indirecto de Lyapunov y los lemas propuestos por Hale y Koçak (1991); sin embargo, se presentaron indeterminaciones con el primer método y no se pudo determinar el valor de δ para el segundo método.

Se procede entonces a encontrar un estimado del dominio de atracción para el equilibrio en el origen, el cual ya se demostró es estable asintóticamente, a partir del teorema 25 de Vidyasagar (1978).

Teorema 25. Sobre estabilidad asintótica

“El equilibrio $\mathbf{0}$ de $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t)]$, $t \geq 0$ es uniformemente asintóticamente estable

si existe una función V localmente definida positiva decreciente continuamente diferenciable, tal que $-\dot{V}$ sea una función localmente definida positiva” (Vidyasagar, 1978, pg. 165).

El teorema anterior no sólo da las condiciones suficientes para estabilidad asintótica, sino que también provee una estimación del dominio de atracción para el caso que el sistema bajo estudio sea autónomo, y que las funciones V y \dot{V} sean también independientes del tiempo.

Si se define un dominio $S \in \mathbb{R}^n$ tal que contenga el cero, y cumpla:

$$V(\mathbf{x}) > 0, \dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in S \quad (9)$$

esto implica que el dominio de atracción del equilibrio está contenido en S .

Recordando la ecuación de malla cerrada del sistema (7):

$$\dot{\tilde{y}} = -kmg \sin \left[\arccos \left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl} \right) \right] \tilde{y}$$

Se propone la siguiente función V :

$$V(\tilde{y}) = \frac{1}{2} \tilde{y}^2$$

Su derivada temporal, viene dada por:

$$\dot{V}(\tilde{y}) = \tilde{y} \dot{\tilde{y}}$$

Sustituyendo de (7):

$$\dot{V}(\tilde{y}) = -kmg \sin \left[\arccos \left(1 - \frac{y_d - \tilde{y}}{mgl} \right) \right] \tilde{y}^2$$

El dominio S para que V y $-\dot{V}$ sean localmente definidas positivas es:

$$y_d - 2mgl < S < y_d$$

Que corresponde a los valores permitidos para \tilde{y} en (8), excepto los otros puntos de equilibrio. De manera que se cumple (9):

$$V(\tilde{y}) > 0, \dot{V}(\tilde{y}) < 0, \forall \tilde{y} \neq 0 \in S$$

Lemma 40. “Suponga que existe una función $C^1 V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un dominio S que contiene $\mathbf{0}$, tal que $V(\mathbf{0}) = 0$ y (9) se satisface. Sea c cualquier constante positiva tal que el conjunto de nivel $L_V(c) \subseteq M_V(c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq c\}$ esté contenido en S y sea acotado. Entonces $L_V(c)$ es un subconjunto del dominio de atracción $D(\mathbf{0})$ ” (Vidyasagar, 1978, pg.167).

Este lema indica que las soluciones de la ecuación diferencial contenidas en el conjunto $L_V(c)$ tienden a cero, conforme t tiende a infinito.

Para el caso de estudio definimos la constante auxiliar b :

$$b = \max\{|y_d - 2mgl|, |y_d|\}$$

La cual será el valor que acotará el conjunto de nivel L_V y también definirá la constante c como $c = b^2$, de manera que el conjunto de nivel queda definido como:

$$L_V(c) = \{x \in (y_d - 2mgl, y_d) : V(x) \leq c\}$$

$$L_V(c) = S$$

$$= (y_d - 2mgl, y_d)$$

Por lo que se puede concluir que, dada una condición inicial $\tilde{y}(0)$ tal que

$$y_d - 2mgl < \tilde{y}(0) < y_d,$$

el error de energía potencial \tilde{y} tiende a cero conforme t tiende a infinito, cumpliendo con el objetivo de control propuesto.

Se realizaron las simulaciones del controlador Proporcional propuesto en el modelo del mecanismo conocido como péndulo simple. El programa computacional utilizado fue SIMNON[©].

En la figura 2 se muestra la evolución de la salida en la simulación con diferentes condiciones iniciales, utilizando los siguientes valores: $k = 1$, $m = 1$, $g = 1$, $l = 1$, $y_d = 1$, $\tilde{y} \in (-1, 1)$. Para observar mejor el cumplimiento del objetivo de control (ya demostrado), en la figura 3 se muestra la variable de error de energía potencial $\tilde{y}(t)$.

En la figura 4, se muestra una vez más la salida (energía potencial) en la simulación, pero los valores utilizados fueron: $k = 1$, $m = 1$, $g = 1$, $l = 1$, $y_d = 1.5$, $\tilde{y} \in (-0.5, 1.5)$.

La variable de error para estos valores de simulación se muestra en la figura 5.

Las condiciones iniciales utilizadas en ambas simulaciones son:

- $q(0) = 0$ (línea continua),
- $q(0) = \pi/4$ (línea discontinua a rayas),
- $q(0) = \pi/2$ (línea discontinua a puntos),
- $q(0) = 3\pi/4$ (línea discontinua a raya-punto),
- $q(0) = \pi$ (línea discontinua a cruces).

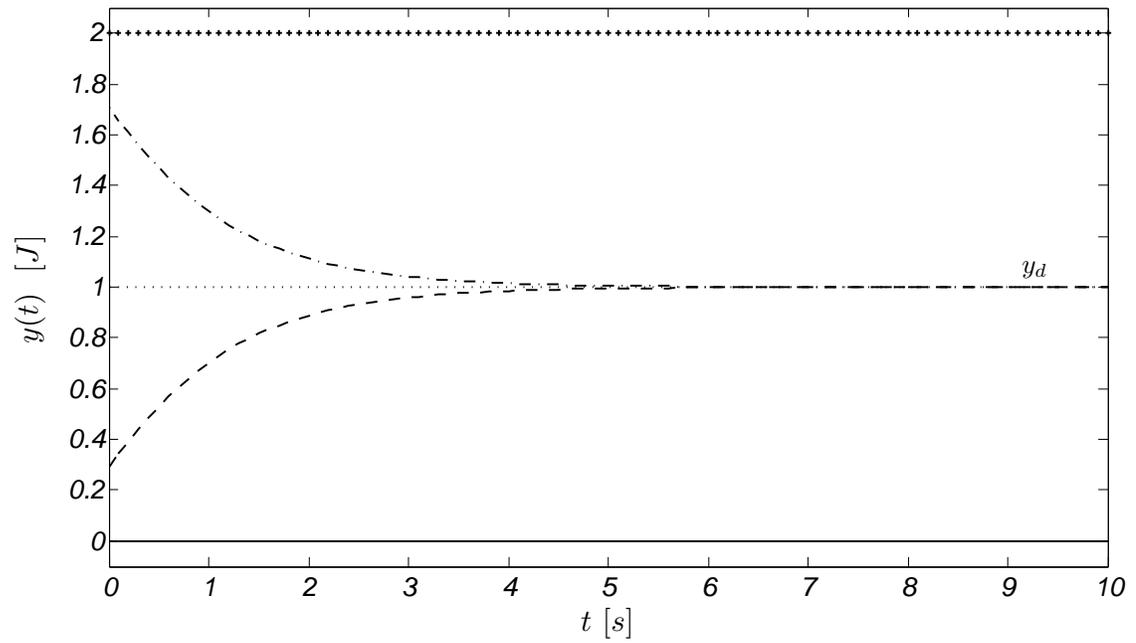


Figura 2. Gráfica de la evolución de la energía potencial $y(t)$ a diferentes condiciones iniciales

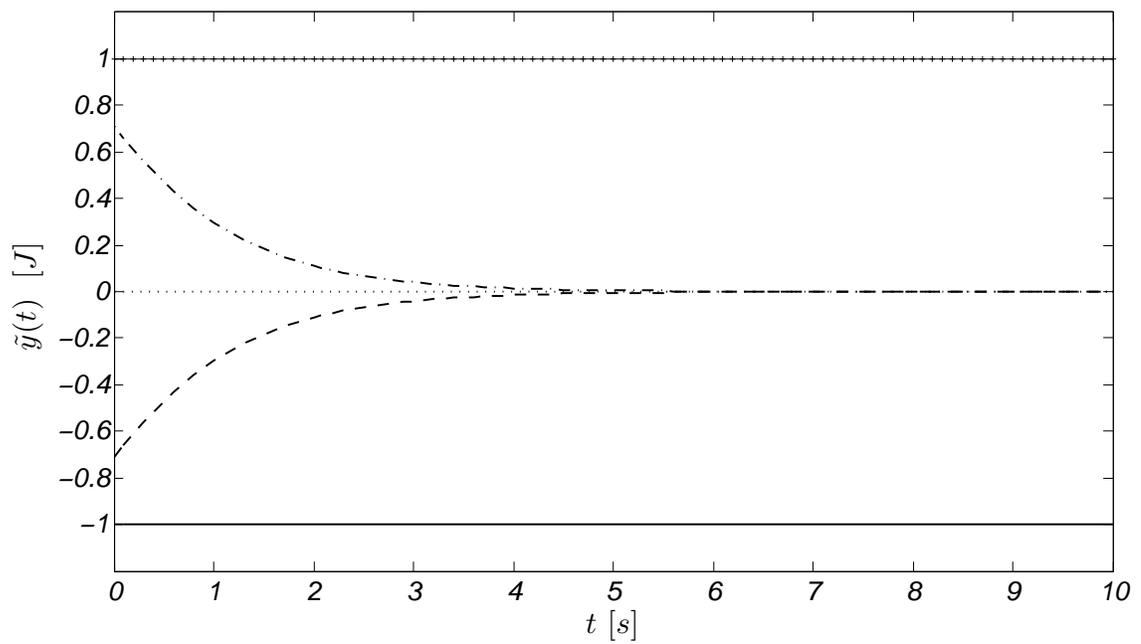


Figura 3. Gráfica del error de energía potencial $\tilde{y}(t)$ a diferentes condiciones iniciales

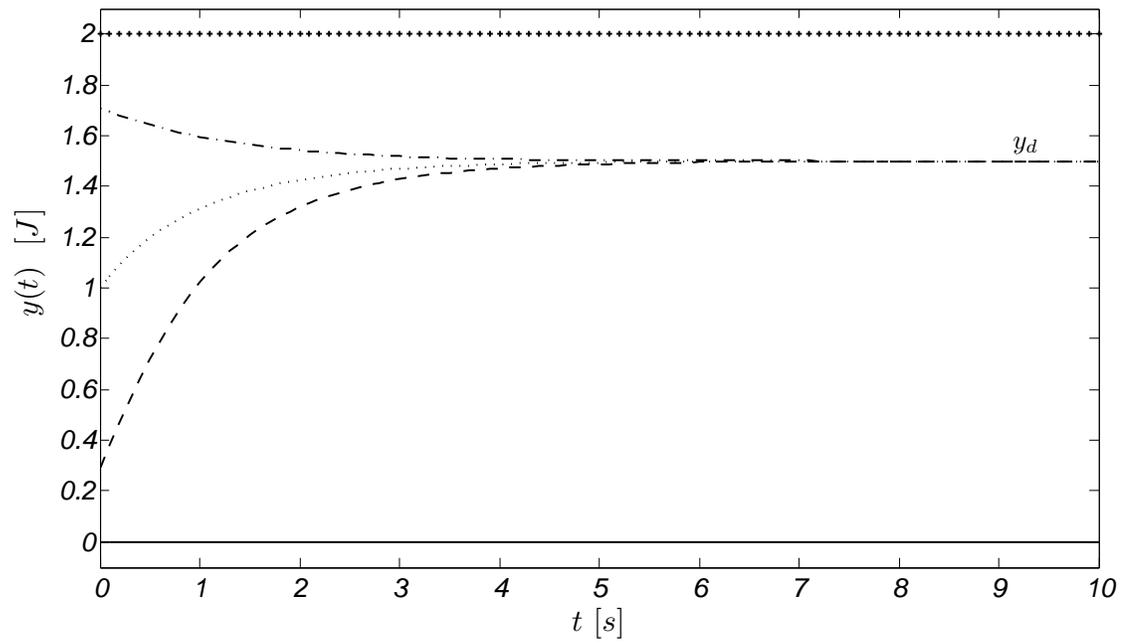


Figura 4. Gráfica de la evolución de la energía potencial a diferentes condiciones iniciales

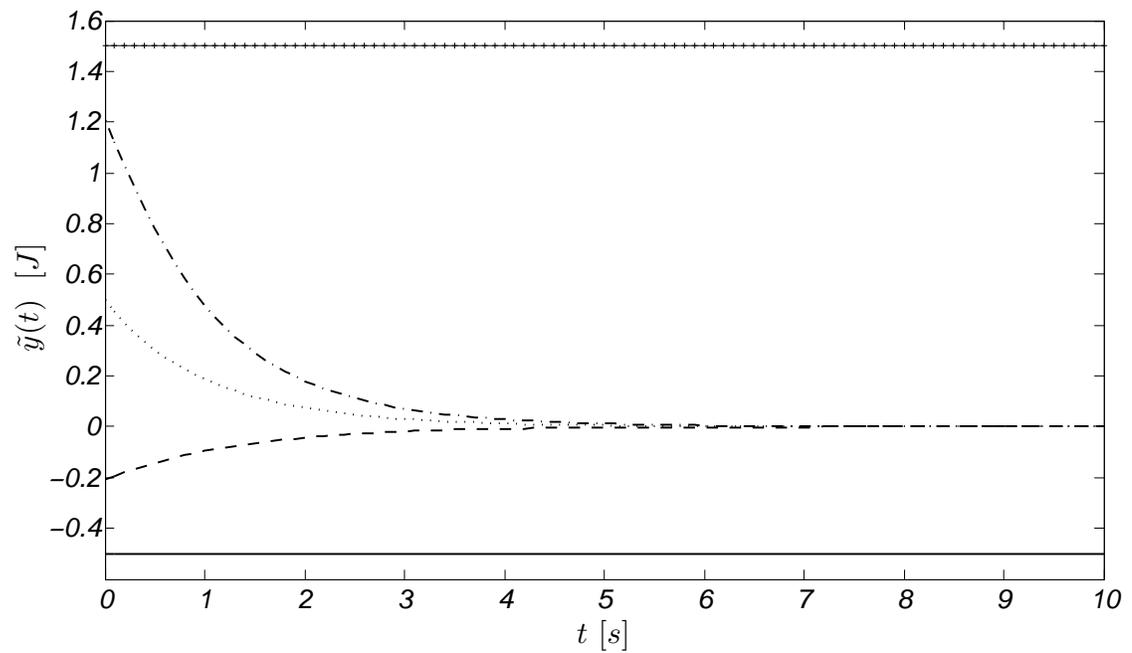


Figura 5. Gráfica del error de energía potencial $\tilde{y}(t)$ a diferentes condiciones iniciales

2.2 Control cinemático de energía cinética

Regulación de energía cinética

Considere el siguiente modelo no lineal para el mecanismo del caso de estudio (péndulo ideal):

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ y = \mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 \end{cases} \quad (10)$$

donde:

- $q \in \mathbb{R}$ es la posición articular
- $y \in \mathbb{R}$ es la salida (energía cinética)
- $u \in \mathbb{R}$ es la entrada (velocidad articular)
- $\mathcal{K}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}$ es la función de energía cinética del mecanismo.

El nuevo objetivo de control (regulación de energía cinética):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d - y(t) = 0$$

donde y_d (energía cinética deseada) es un número real no negativo constante.

Las hipótesis a considerar son:

- m, l conocidas
- q medible

La propuesta de controlador es:

$$u = -\dot{q} + \alpha t$$

Donde $\alpha = \sqrt{\frac{2}{ml^2}y_d}$

El análisis del controlador propuesto se muestra a continuación, al sustituir la entrada de control en la ecuación de estado del modelo (10):

$$\begin{aligned}\dot{q} &= u \\ \dot{q} &= -q + \alpha t\end{aligned}\tag{11}$$

Aplicando la transformada de Laplace y reacomodando sumandos de (11):

$$\begin{aligned}sQ(s) + Q(s) &= \frac{\alpha}{s^2} + q(0) \\ Q(s) &= \frac{\alpha + q(0)s^2}{s^2(s+1)}\end{aligned}$$

Desarrollando en fracciones parciales esta última expresión:

$$Q(s) = \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s} + \frac{\alpha + q(0)}{s+1}\tag{12}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace de (12):

$$q(t) = \alpha t - \alpha + [\alpha + q(0)]e^{-t}\tag{13}$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión (13):

$$\dot{q}(t) = \alpha \left[1 - \left(1 + \frac{q(0)}{\alpha} \right) e^{-t} \right]$$

A partir de este resultado, se puede obtener la expresión para la salida $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}ml^2\alpha^2 \left[1 - \left(1 + \frac{q(0)}{\alpha} \right) e^{-t} \right]^2$$

Se obtiene el límite de esta función:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}ml^2\alpha^2 \left[1 - \left(1 + \frac{q(0)}{\alpha} \right) e^{-t} \right]^2 = \frac{1}{2}ml^2\alpha^2 = \frac{1}{2}ml^2 \left(\sqrt{\frac{2}{ml^2}y_d} \right)^2 = y_d$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d - y(t) = 0$$

Con lo que se demuestra que se cumple el objetivo de control.

Se realizaron simulaciones del controlador propuesto en el modelo del mecanismo péndulo simple. En la figura 6 se puede observar el comportamiento de la salida $y(t)$. Los valores utilizados en esta simulación fueron: $m = 1$, $l = 1$, $y_d = 1$, y condiciones iniciales:

- $q(0) = -\pi/2$ (línea continua),
- $q(0) = 0$ (línea discontinua a rayas),
- $q(0) = \pi/2$ (línea discontinua a puntos),

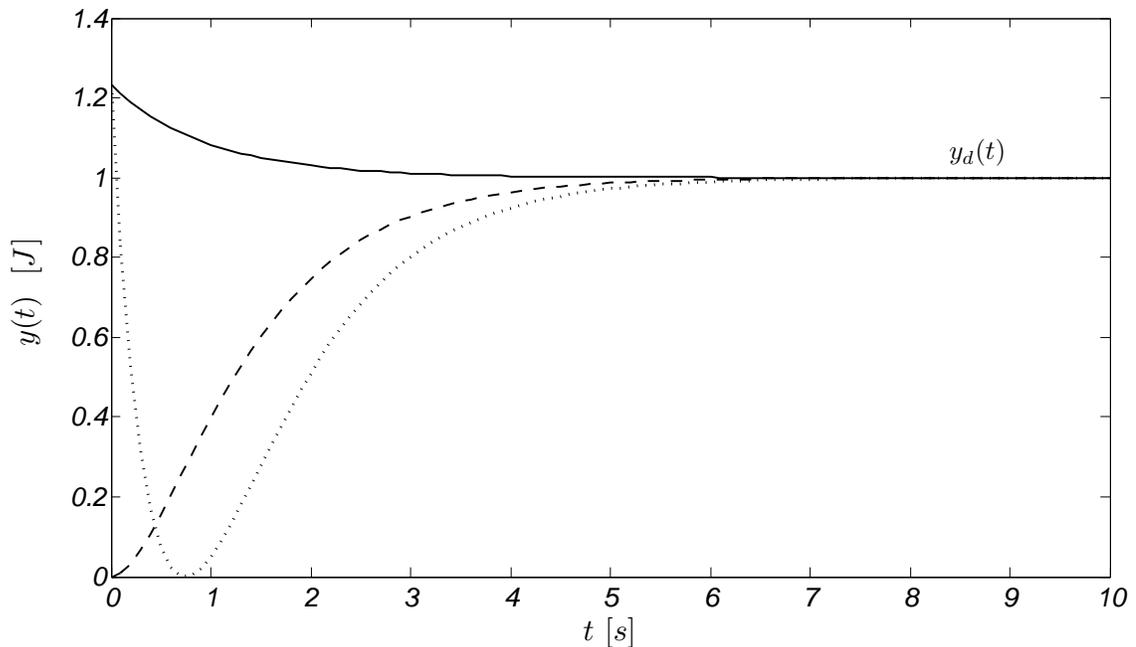


Figura 6. Gráfica de la evolución de la energía cinética $y(t)$ a diferentes condiciones iniciales

Para observar cómo la salida tiende al valor deseado, observemos en la figura 7 la gráfica del error definido como: $\tilde{y}(t) = y_d - y(t)$. Al final de los 10 segundos de simulación se tiene un error de $\tilde{y} = \{-1.01 \times 10^{-5}, 9.08 \times 10^{-5}, 1.92 \times 10^{-4}\}$ para cada una de las condiciones iniciales.

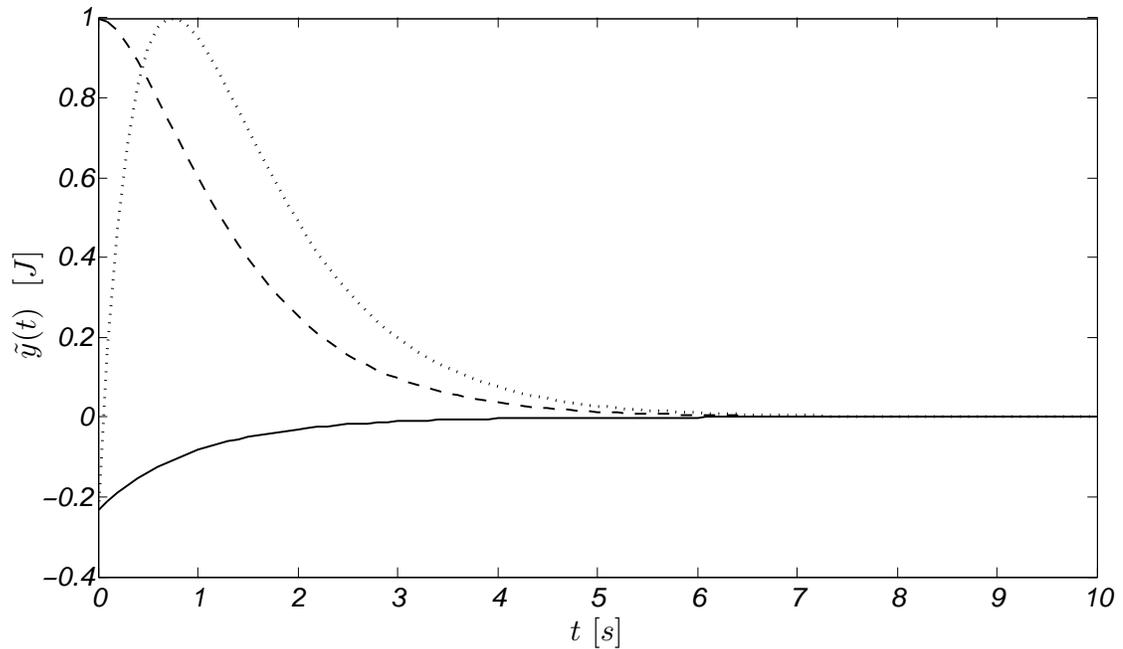


Figura 7. Gráfica del error de energía cinética $\tilde{y}(t)$ a diferentes condiciones iniciales

Para la siguiente simulación, los valores utilizados fueron: $m = 1$, $l = 1$, $y_d = 5$, y condiciones iniciales:

- $q(0) = -\pi/2$ (línea continua),
- $q(0) = 0$ (línea discontinua a rayas),
- $q(0) = \pi/2$ (línea discontinua a puntos),

La evolución de la salida $y(t)$ se observa en la figura 8.

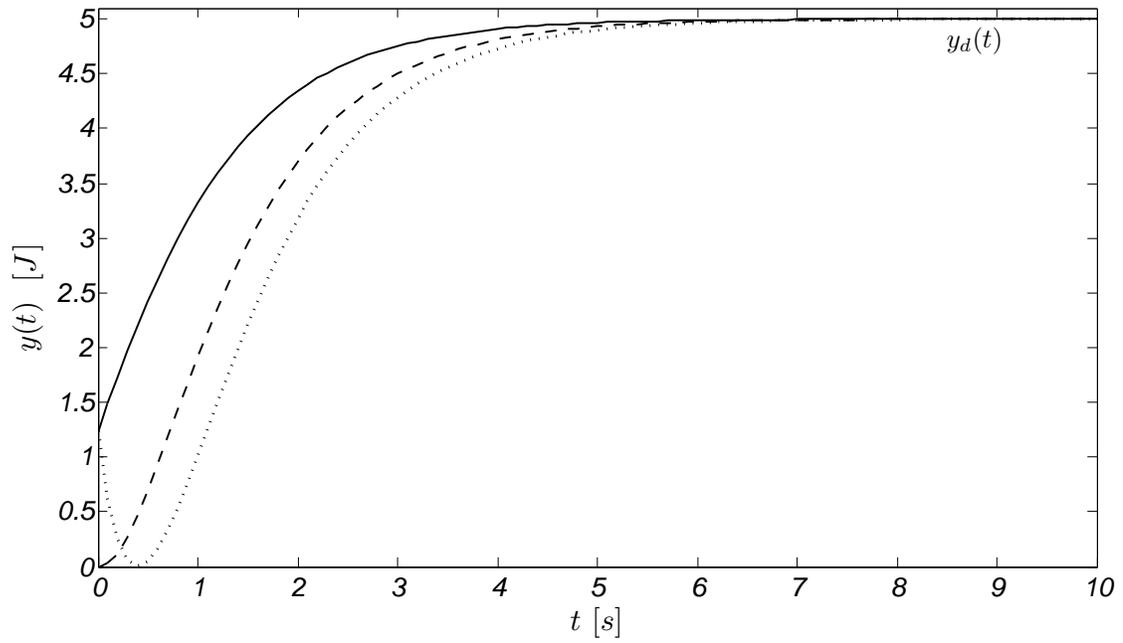


Figura 8. Gráfica de la evolución de la energía cinética $y(t)$ a diferentes condiciones iniciales

La gráfica del error de energía cinética se presenta en la figura 9. Al final de los 10 segundos de simulación se tiene un error de $\tilde{y} = \{2.28 \times 10^{-4}, 4.54 \times 10^{-4}, 6.79 \times 10^{-4}\}$ para cada una de las condiciones iniciales.

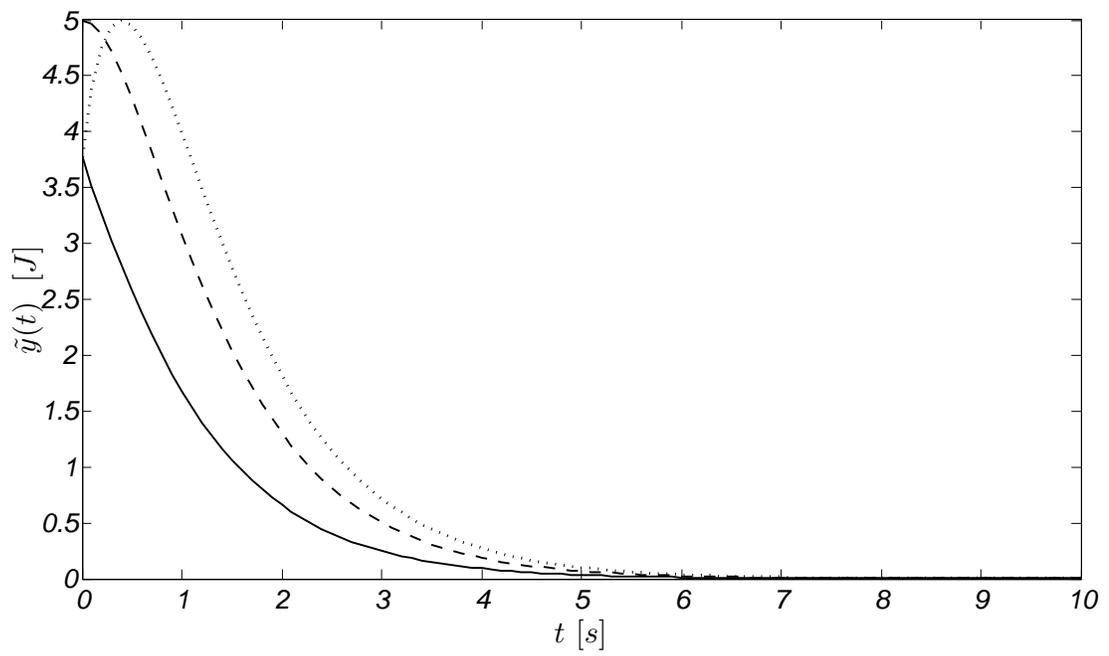


Figura 9. Gráfica del error de energía potencial $\tilde{y}(t)$ a diferentes condiciones iniciales

Prestación de la regulación de energía cinética

Considere una vez más el siguiente modelo no lineal para el mecanismo:

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ y = \mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 \end{cases}$$

donde:

- $q \in \mathbb{R}$ es la posición articular
- $y \in \mathbb{R}$ es la salida (energía cinética)
- $u \in \mathbb{R}$ es la entrada (velocidad articular)
- $\mathcal{K}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}$ es la función de energía cinética del mecanismo.

El objetivo de control (prestación de la regulación de energía cinética):

$$y_d - \Delta \leq y(t) \leq y_d + \Delta; \quad t > t_d$$

donde:

- $y_d > 0$ (energía cinética deseada) constante.
- $0 < \Delta < y_d$ (banda de prestación) constante.
- $t_d > 0$ (tiempo deseado para la prestación de la regulación)

En la figura 10, se muestra gráficamente el objetivo de control planteado.

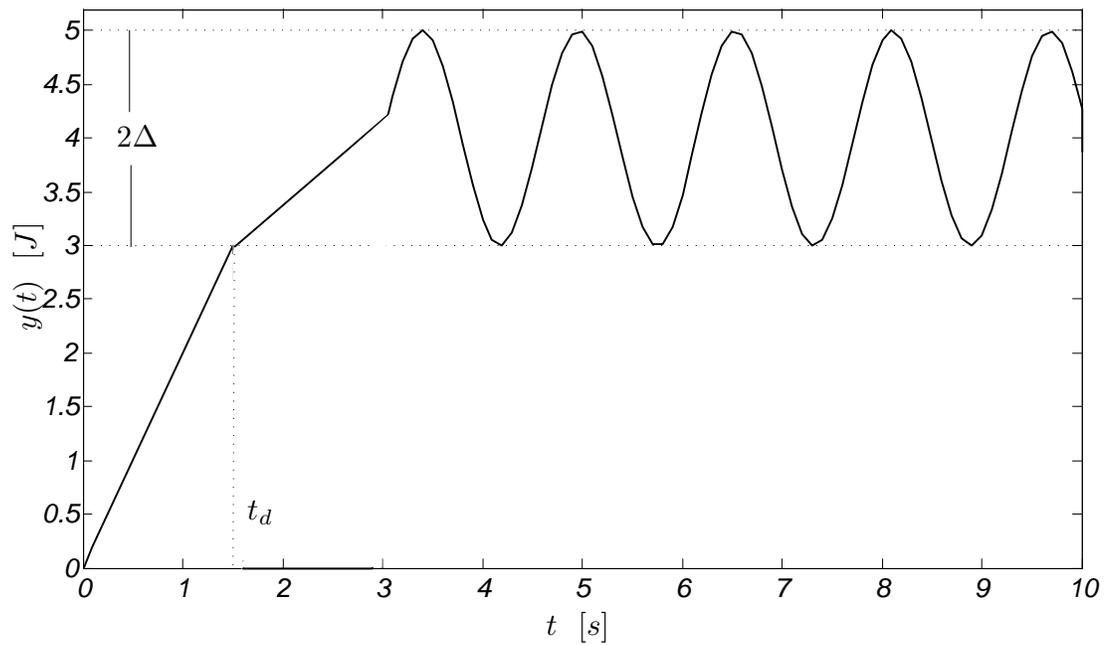


Figura 10. Objetivo de control: prestación de la regulación de energía cinética

Hipótesis:

- m, l conocidas
- q medible
- $q(0) = 0$

La propuesta de controlador:

$$u = \frac{1}{\tau} [-q + \alpha t]$$

donde $\alpha = \sqrt{\frac{2}{ml^2} y_d}$, $\tau = -\frac{t_d}{\ln[1-\sqrt{1-\Delta'}]}$ y $\Delta' = \frac{\Delta}{y_d}$

El análisis del controlador comienza sustituyendo la entrada de control propuesta en el modelo del mecanismo:

$$\dot{q} = u$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{\tau}q + \frac{\alpha}{\tau}t \quad (14)$$

Aplicando la transformada de Laplace, reacomodando sumandos de (14) y sustituyendo la condición inicial $q(0) = 0$:

$$sQ(s) + \frac{1}{\tau}Q(s) = \frac{\alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$Q(s) = \frac{\alpha}{\tau s^2(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{\alpha}{s^2(\tau s + 1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales esta última expresión:

$$Q(s) = \alpha \left[\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1} \right] \quad (15)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace de (15):

$$q(t) = \alpha \left[t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (16)$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión (16):

$$\dot{q}(t) = \alpha \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

A partir de este resultado, se puede obtener la expresión para la salida $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}ml^2\alpha^2 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]^2$$

Con esta expresión se procede a demostrar el objetivo de prestación:

Para $t = t_d$:

$$y(t) = \frac{1}{2}ml^2\alpha^2 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]^2$$

$$y(t_d) = \frac{1}{2}ml^2 \left(\sqrt{\frac{2}{ml^2}}y_d \right)^2 \left[1 - e^{-t_d \left(\frac{\ln(1 - \sqrt{1 - \Delta'})}{-t_d} \right)} \right]^2$$

$$= y_d \left[1 - e^{\ln(1 - \sqrt{1 - \Delta'})} \right]^2$$

$$= y_d \left[\sqrt{1 - \Delta'} \right]^2 = y_d [1 - \Delta'] y(t_d) \quad = y_d - \Delta$$

Demostrando que llega a la banda de prestación en el tiempo deseado.

Para $t > t_d$; $t = \beta t_d$ con $\beta > 1 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{2}ml^2\alpha^2 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]^2 \\
 y(\beta t_d) &= \frac{1}{2}ml^2 \left(\sqrt{\frac{2}{ml^2}y_d}\right)^2 \left[1 - e^{-\beta t_d \left(\frac{\ln(1-\sqrt{1-\Delta'})}{-t_d}\right)}\right]^2 \\
 &= y_d \left[1 - e^{\beta \ln(1-\sqrt{1-\Delta'})}\right]^2 \\
 &= y_d \left[1 - (1 - \sqrt{1 - \Delta'})^\beta\right]^2 \\
 y(\beta t_d) &\in (0, y_d) \\
 y(\beta t_d) &< y_d
 \end{aligned}$$

Demostrando que respeta la cota superior impuesta en el objetivo de control.

Ahora, obteniendo la razón de cambio de la salida y analizando para $t > t_d$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}y(t) &= 2y_d \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\
 &= \frac{2y_d}{\tau} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \\
 \frac{d}{dt}y(\beta t_d) &= \frac{2y_d}{\tau} \left(e^{-\beta t_d \left(\frac{\ln(1-\sqrt{1-\Delta'})}{-t_d}\right)} - e^{-2\beta t_d \left(\frac{\ln(1-\sqrt{1-\Delta'})}{-t_d}\right)}\right) \\
 &= \frac{2y_d}{\tau} \left((1 - \sqrt{1 - \Delta'})^\beta - (1 - \sqrt{1 - \Delta'})^{2\beta}\right)
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior se puede observar que la derivada temporal no cambia de signo, por lo que la función no decrece para valores de $t > t_d$. A partir de esto, se concluye que se respeta la cota inferior del objetivo de control.

Se realizaron las simulaciones del controlador propuesto para fines ilustrativos.

Los valores utilizados en esta simulación fueron: $m = 1$, $l = 1$, $y_d = 1$, $t_d = 3$, $\Delta = 0.2$.

La figura 11 muestra el comportamiento de la energía cinética.

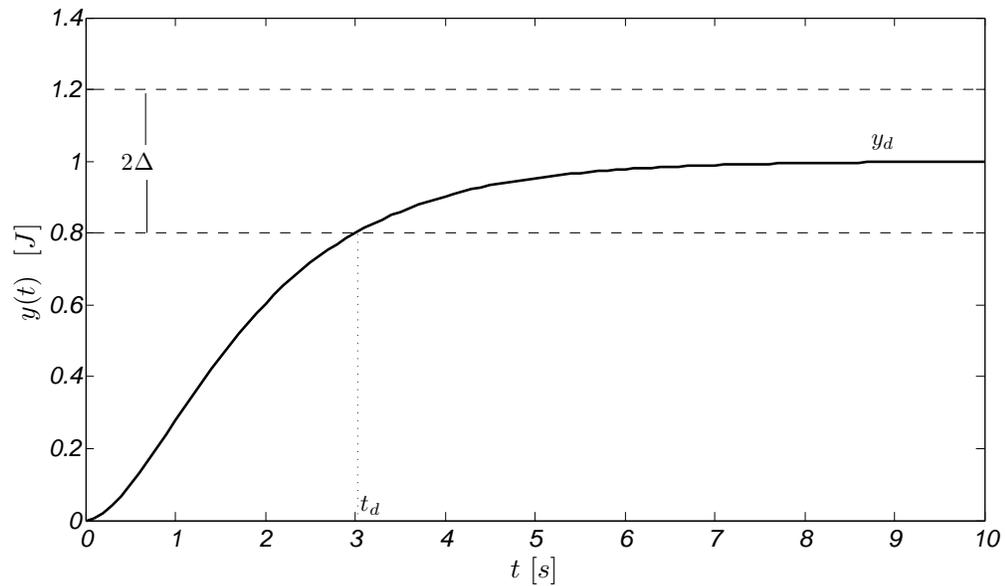


Figura 11. Gráfica de la prestación de la energía cinética $y(t)$

Para observar cómo la salida tiende al valor deseado y_d en el tiempo deseado t_d , en la figura 12 aparece la gráfica del error definido como: $\tilde{y}(t) = y_d - y(t)$. Al final de los 10 segundos de simulación el error es de $\tilde{y}(t) = 1.12 \times 10^{-3}$

Para la segunda simulación, los valores utilizados fueron: $m = 1$, $l = 1$, $y_d = 5$, $t_d = 4.5$, $\Delta = 1$. La figura 13 muestra la salida $y(t)$ y la figura 14 muestra el error de energía cinética. Al final de los 10 segundos de simulación el error es de $\tilde{y}(t) = 1.12 \times 10^{-3}$.

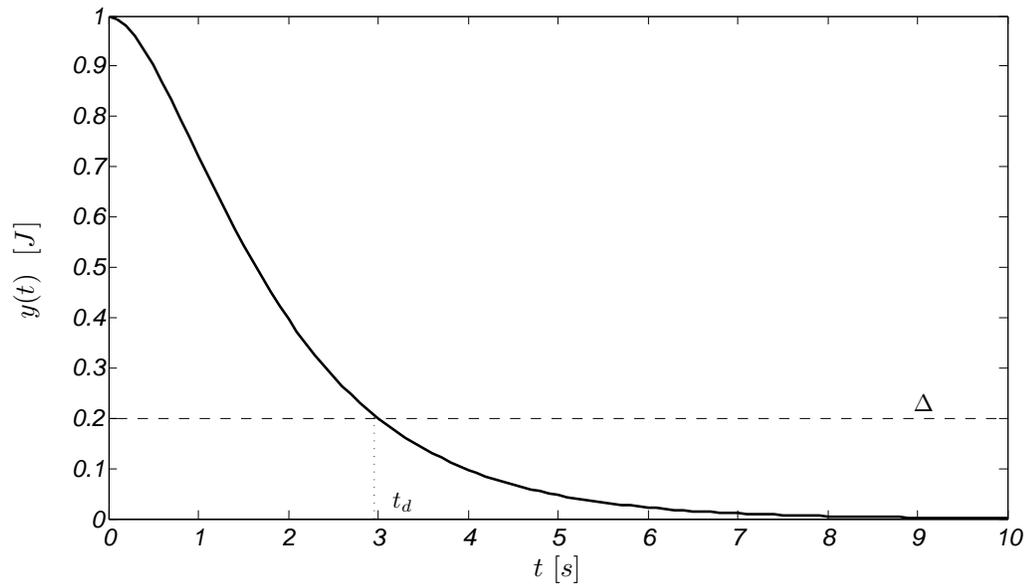


Figura 12. Gráfica del error de energía cinética $\tilde{y}(t)$

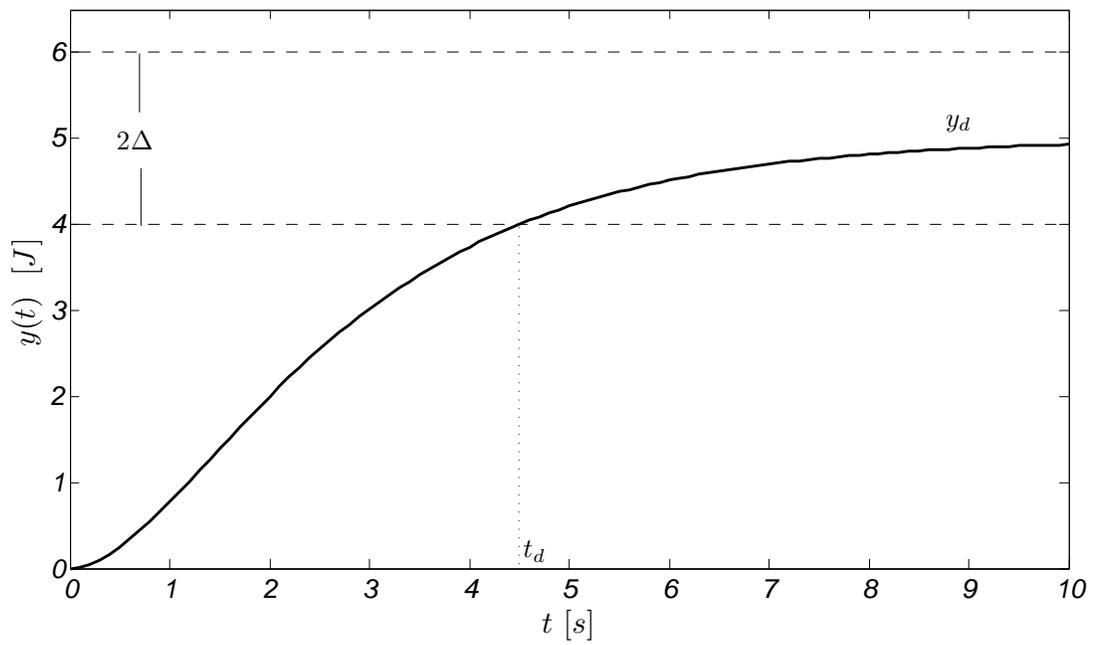


Figura 13. Gráfica de la prestación de la energía cinética $y(t)$

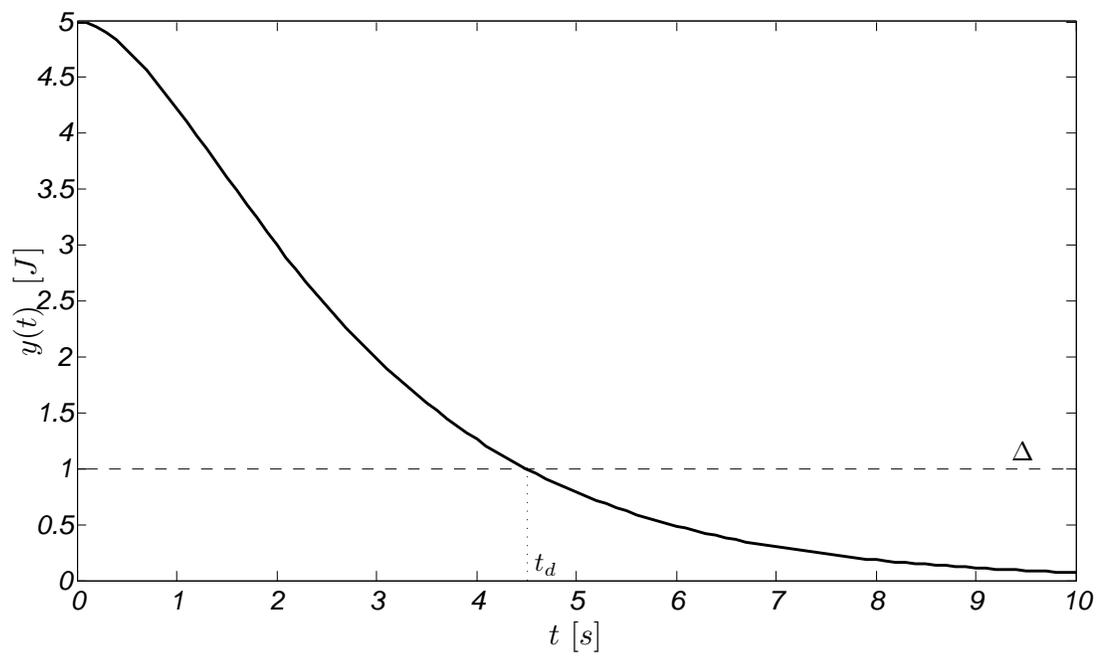


Figura 14. Gráfica del error de energía cinética $\tilde{y}(t)$

2.3 Control cinemático de posición articular con entradas acotadas

Considere el siguiente modelo no lineal para el mecanismo:

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ y = q \end{cases}$$

donde:

- $q \in \mathbb{R}$ es la posición articular
- $u \in \mathbb{R}$ es la entrada (velocidad articular)
- $y \in \mathbb{R}$ es la salida (posición articular)

El objetivo de control de regulación con entrada acotada:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} q_d - q(t) = 0 \\ |u(t)| \leq u_{max} \end{cases}$$

donde q_d (posición articular deseada) es constante y $u_{max} > 0$ (valor máximo de la magnitud de la entrada de control).

Hipótesis:

- q medible

Se define primero la variable de error de posición como:

$$\tilde{q} = q_d - q$$

$$\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$$

La propuesta de controlador:

$$u = u_{max}[\tanh(\tilde{q})]$$

La función tangente hiperbólica tiene una imagen de $(-1, 1)$, por lo que el valor máximo del valor absoluto de la entrada de control vendrá dado precisamente por el valor u_{max} , con lo que se demuestra la segunda parte del objetivo de control.

Para demostrar la primera parte, continúa el análisis sustituyendo la acción de control en el modelo propuesto:

$$\dot{q} = \underbrace{u_{max}[\tanh(\tilde{q})]}_u$$

Y sustituyendo la ecuación anterior en la derivada temporal de la variable de error, para obtener la ecuación de malla cerrada del sistema de control:

$$\dot{\tilde{q}} = -u_{max}[\tanh(\tilde{q})]$$

El sistema tiene un único punto de equilibrio en el origen $\tilde{q} = 0$, y para analizar estabilidad de éste, se recurre al teorema de estabilidad en (Khalil, 2002):

Teorema 4.1. Teorema de estabilidad

“Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}]$, y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $V(0) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ en $D - \{0\}$ y $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ en $D - \{0\}$. Entonces el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable” (Khalil, 2002, pg. 114).

Se propone la siguiente función V :

$$V(\tilde{q}) = \frac{1}{2}\tilde{q}^2$$

Su derivada temporal, viene dada por:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = \tilde{q}\dot{\tilde{q}}$$

Sustituyendo de la ecuación de malla cerrada:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = -u_{max}[\tanh(\tilde{q})]\tilde{q}$$

La función y su derivada temporal cumplen con las condiciones para estabilidad asintótica del equilibrio $\tilde{q} = 0$, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$$

Y de la definición de la variable de error de posición, vemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_d - q(t) = 0$$

Con lo que se demuestra que se cumple la primera parte del objetivo de control.

A continuación se presentan las simulaciones del controlador propuesto. Los valores utilizados en ésta fueron: $u_{max} = 1$, $q_d = \pi/4$. La figura 15 muestra el comportamiento de la posición q , la figura 16 muestra el error de posición, y la figura 17 muestra la entrada de control $u(t)$, todas con las siguientes condiciones iniciales:

- $q(0) = -\pi/2$ (línea continua),
- $q(0) = 0$ (línea discontinua a rayas),
- $q(0) = \pi/2$ (línea discontinua a puntos),

Al final de los 10 segundos de simulación el error es de $\tilde{q}(t) = \{2.37 \times 10^{-4}, 3.94 \times 10^{-5}, -3.95 \times 10^{-5}\}$, respectivamente.

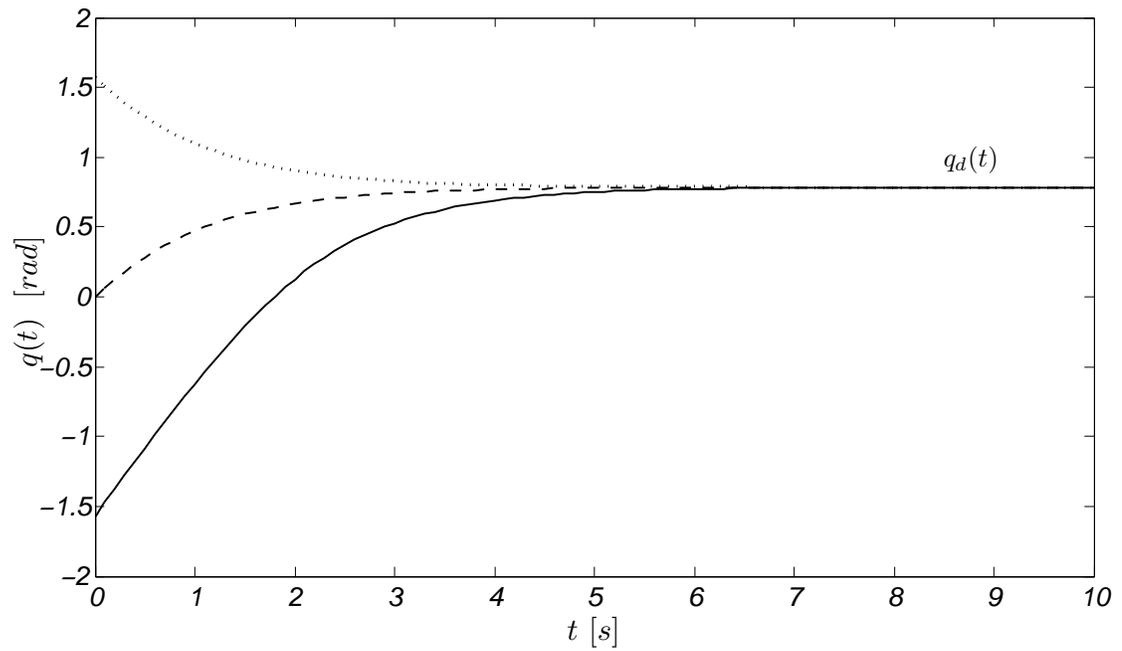


Figura 15. Gráfica de la evolución de la posición $q(t)$ a diferentes condiciones iniciales

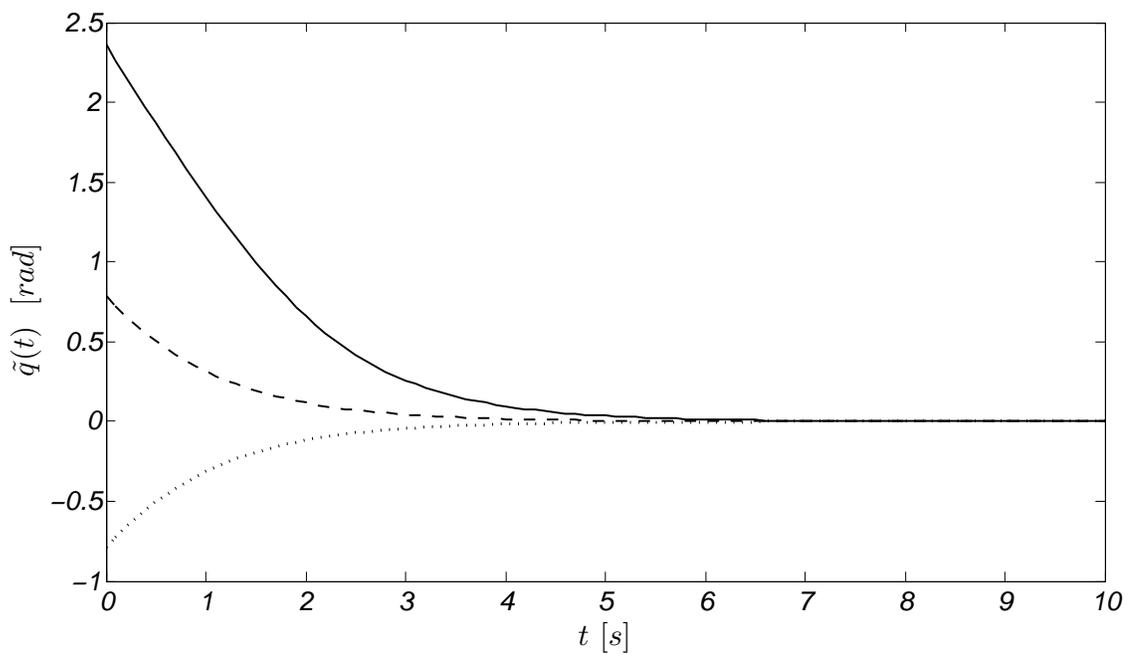


Figura 16. Gráfica de la evolución del error de posición $\tilde{q}(t)$ a diferentes condiciones iniciales

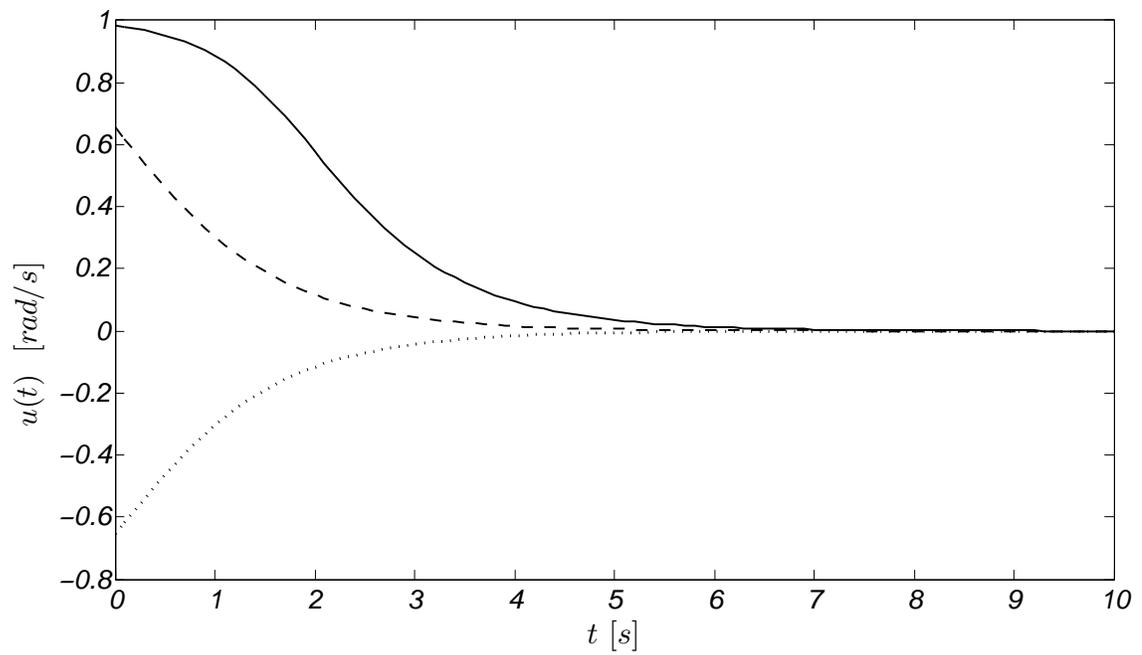


Figura 17. Gráfica de la entrada de control u a diferentes condiciones iniciales

Capítulo 3

Caso estudio: Modelo de un satélite ideal

Las actividades referentes a investigación espacial implican diferentes disciplinas científicas como lo son Astrofísica, Astronomía, Electrónica, Telecomunicaciones, Robótica y Control Automático, entre otras. El desarrollo de subsistemas satelitales, ya sean los subsistemas de potencia, comunicaciones o estabilización, requiere del trabajo de especialistas de las diferentes áreas. En México, con la creación de la Agencia Espacial Mexicana se está llevando a cabo la centralización de diferentes proyectos a nivel nacional en cuanto al desarrollo de tecnología aeroespacial (Pacheco *et al.*, 2009). En un intento de formar parte de este esfuerzo nacional en temas aeroespaciales, este capítulo presenta una propuesta de solución para el problema de control de los subsistemas de estabilización y orientación en el modelo de un satélite ideal.

3.1 Control cinemático de energía cinética de un modelo de un satélite cilíndrico ideal

De acuerdo a la teoría de comunicaciones por satélite, los sistemas de satélites pueden dividirse en base a su tipo de estabilización en axial (por giro o *spin*) y triaxial (giróscopos). Los satélites estabilizados por giro son cilíndricos y llevan las celdas solares montadas en la superficie envolviendo casi totalmente su superficie perimetral. Por otra parte, los satélites con estabilización triaxial tienen una geometría parecida a un cubo y normalmente los paneles solares emergen a los costados en forma de alas. El

caso de estudio de esta tesis se enfoca en aquellos satélites de geometría cilíndrica y su correspondiente estabilización axial.

En los satélites cilíndricos no todas las celdas solares están expuestas al Sol al mismo tiempo y sólo se aprovecha una parte de ellas para realizar la conversión a electricidad. Aún así, este tipo de satélites siguen siendo una opción en el mercado por ser de los más baratos.

Con la técnica de estabilización axial una parte del satélite (estructura externa donde van montadas las celdas solares) gira para permitir el funcionamiento de la mayor parte de los paneles solares al exponerlos a la luz solar; mientras que el resto de la estructura (que incluye las antenas) se mantiene fijo. La unión entre la sección que gira y la que no, es un mecanismo con muy poca fricción. Este mecanismo posee rodamientos para la interfase mecánica, anillos conductores para la transferencia de energía eléctrica de una sección a otra y motores que controlan la velocidad relativa entre las dos secciones. De acuerdo con el fabricante, la estructura debe girar a una velocidad de entre 30 y 90 revoluciones por minuto (Neri-Vela, 2003).

Recordando que, por definición, la energía cinética es la energía asociada con el movimiento de un cuerpo, se abordará el problema de estabilización axial relacionándolo con el problema de control de energía cinética.

Energía cinética de un objeto rígido.

“La energía cinética de un objeto rígido \mathcal{K}_O que rota sobre un eje fijo con una velocidad angular ω , es la suma de la energía cinética de cada partícula \mathcal{K}_i que lo forma:

$$\mathcal{K}_O = \sum_i \mathcal{K}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

donde m_i representa la masa de la i -ésima partícula del objeto y r_i la distancia de dicha partícula al eje sobre el que está rotando” (Serway, 1986, pg. 300).

Recordando que la rapidez angular ω para cada partícula en el objeto es la misma, podemos reescribir:

$$\mathcal{K}_O = I\omega^2$$

Donde I es el momento de inercia. Esta cantidad es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su movimiento rotacional, tal como la *masa* es una medida de la resistencia de una partícula a cambiar su movimiento lineal.

Sin embargo, existe una importante diferencia entre masa y momento de inercia. La masa es una propiedad inherente de un objeto, mientras que el momento de inercia depende del eje de rotación seleccionado. Por tanto, no existe un único valor para el momento de inercia de un objeto.

Momento de inercia.

“El momento de inercia se calcula a partir de una integral sobre el volumen del objeto:

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Donde V es el volumen del objeto y ρ es la densidad del mismo. En caso de que el objeto sea homogéneo, ρ es una constante y la integral se evalúa con la geometría del objeto” (Serway, 1986, pg. 302).

Para el caso de un satélite *ideal*, la geometría a considerar es una estructura cilíndrica delgada; mostrada en la figura 18, y cuyo momento de inercia será:

$$I = mr_s^2$$

donde m corresponde a la masa de la estructura cilíndrica, y r_s al radio de la misma.

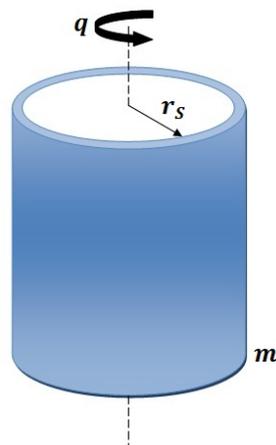


Figura 18. Satélite ideal

Nótese que el momento de inercia del satélite ideal no depende de su altura, es decir, el momento de inercia no se verá afectado por el cambio en este parámetro. Esto es relevante para el caso particular de los satélites cilíndricos cuya estructura se despliega una vez que se encuentra en órbita, véase la figura 19.

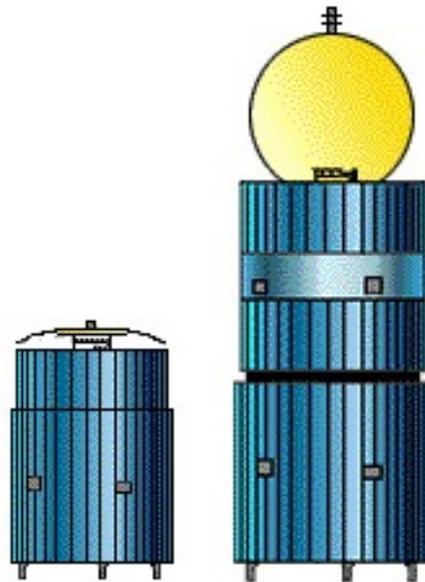


Figura 19. Satélite almacenado (izquierda), en órbita (derecha). Recuperada de *Boeing*, tomada de www.boeing.com

3.1.1 Estabilización axial

Considere el siguiente modelo no lineal de un satélite ideal:

$$\begin{cases} \dot{q} = u \\ y = \frac{1}{2}I\dot{q}^2 \end{cases} \quad (17)$$

donde:

- $q \in \mathbb{R}$ es la posición articular
- $y \in \mathbb{R}$ es la salida (función de energía cinética del satélite)
- $u \in \mathbb{R}$ es la entrada (velocidad articular)

El objetivo de control (regulación de energía cinética, estabilización axial):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_d$$

donde y_d (energía cinética deseada) es un número real no negativo constante.

Para el caso de estabilización axial del satélite, y_d se calcula a partir de la rapidez angular deseada ω_d a través de la fórmula:

$$y_d = \frac{1}{2}mr_s^2\omega_d^2$$

Además, para este caso de estudio en que $\dot{q} \in \mathbb{R}$, se puede reescribir esta fórmula como:

$$y_d = \frac{1}{2}mr_s^2\dot{q}_d^2 \quad (18)$$

Hipótesis:

- m, r_s conocidas

- q medible

La propuesta de controlador:

$$u = -q + \alpha t$$

donde:

- $\alpha = \sqrt{\frac{2}{I}y_d}$,
- $I = mr_s^2$,
- $y_d \in \left[\frac{\pi^2 mr_s^2}{4}, \frac{9\pi^2 mr_s^2}{4} \right]$

El análisis del controlador se presenta a continuación, sustituyendo la ecuación del controlador propuesto en la ecuación de estado del sistema:

$$\dot{q} = u$$

$$\dot{q} = -q + \alpha t \tag{19}$$

Aplicando la transformada de Laplace y acomodando sumandos de (19):

$$sQ(s) + Q(s) = \frac{\alpha}{s^2} + q(0)$$

$$Q(s) = \frac{\alpha + q(0)s^2}{s^2(s+1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales esta última expresión:

$$Q(s) = \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s} + \frac{\alpha + q(0)}{s+1} \tag{20}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace de (20):

$$q(t) = \alpha t - \alpha + (\alpha + q(0))e^{-t} \tag{21}$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión (21):

$$\dot{q}(t) = \alpha - (\alpha + q(0))e^{-t}$$

A partir de este resultado, se puede obtener la expresión para la salida $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}I\alpha^2 \left[1 - e^{-t} - \frac{q(0)}{\alpha}e^{-t} \right]^2$$

Se obtiene el límite de la función:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}I\alpha^2 \left[1 - e^{-t} - \frac{q(0)}{\alpha}e^{-t} \right]^2 = \frac{1}{2}I\alpha^2 = \frac{1}{2}I \left(\sqrt{\frac{2}{I}y_d} \right)^2 = y_d$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_d$$

Con lo que se demuestra que se cumple el objetivo de control.

Además sustituyendo la ecuación de salida del modelo (17) y la fórmula para obtener la energía cinética deseada (18), se puede apreciar el comportamiento de la velocidad articular:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= y_d \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}I\dot{q}(t)^2 &= \frac{1}{2}I\dot{q}_d^2 \\ \frac{1}{2}I \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t)^2 &= \frac{1}{2}I\dot{q}_d^2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t)^2 &= \dot{q}_d^2 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de potencias para límites, esta última expresión equivale a:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) &= \dot{q}_d \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) &= -\dot{q}_d \end{aligned}$$

Para este caso, es indistinto el signo de la velocidad articular, siempre que gire a la rapidez deseada. Concluyendo que la velocidad articular tiende a la velocidad articular deseada conforme t tiende a infinito. Se realizaron las simulaciones del controlador en

el modelo propuesto.

Los valores utilizados en esta simulación corresponden al satélite *Explorer I*, (NASA-JPL, 2003): $m = 4.82$ kg, $r_s = 0.152$ m, $y_d = 0.5495$ J ($\dot{q}_d = \pi$ rad/seg= 30 rev/min), y las siguiente condiciones iniciales:

- $q(0) = -\pi/2$ (línea continua),
- $q(0) = 0$ (línea discontinua a rayas),
- $q(0) = \pi/2$ (línea discontinua a puntos),

En la figura 20 se muestra la evolución de la energía cinética, en la figura 21 cómo la velocidad articular para la estabilización axial es lograda y en la figura 22 cómo el error de energía cinética definido como $\tilde{y}(t) = y_d - y(t)$ tiende a cero.

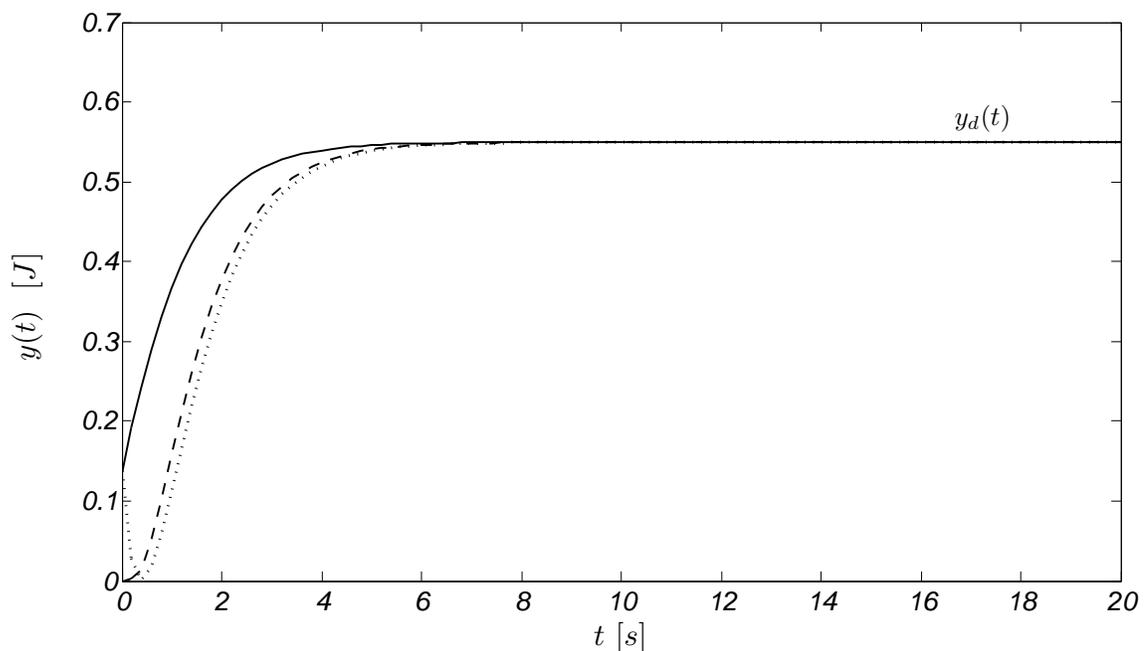


Figura 20. Gráfica de la evolución de la energía cinética $y(t)$

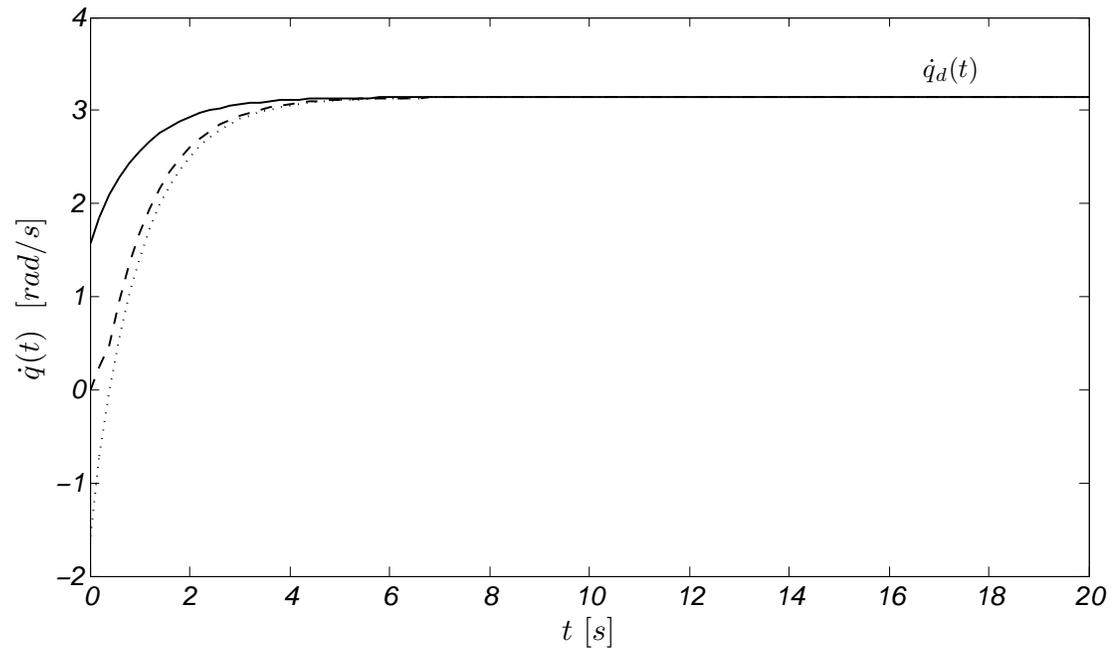


Figura 21. Gráfica de la evolución de la velocidad articular $\dot{q}(t)$

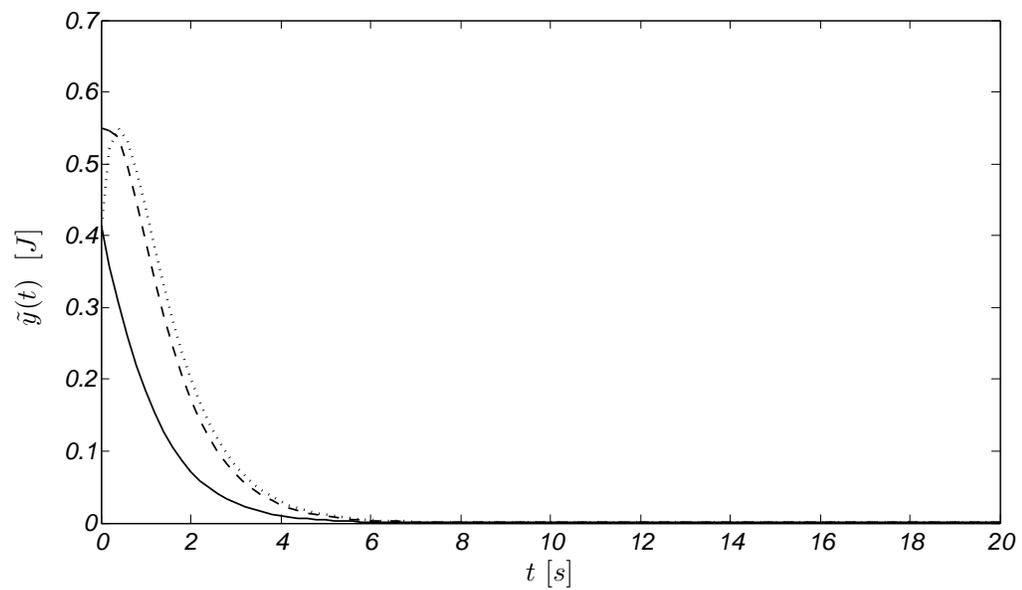


Figura 22. Gráfica del error de energía cinética $\tilde{y}(t)$

Se presenta también una segunda simulación, con los mismos valores de condiciones iniciales, masa y radio, pero un nuevo valor para la energía cinética deseada: $y_d = 2.66$ J ($\dot{q}_d = 2.2\pi$ rad/seg = 66.5 rev/min). En la figura 23 se muestra la evolución de la salida $y(t)$, en la figura 24 cómo se logra la velocidad articular deseada y en la figura 25 cómo el error de energía cinética tiende a cero.

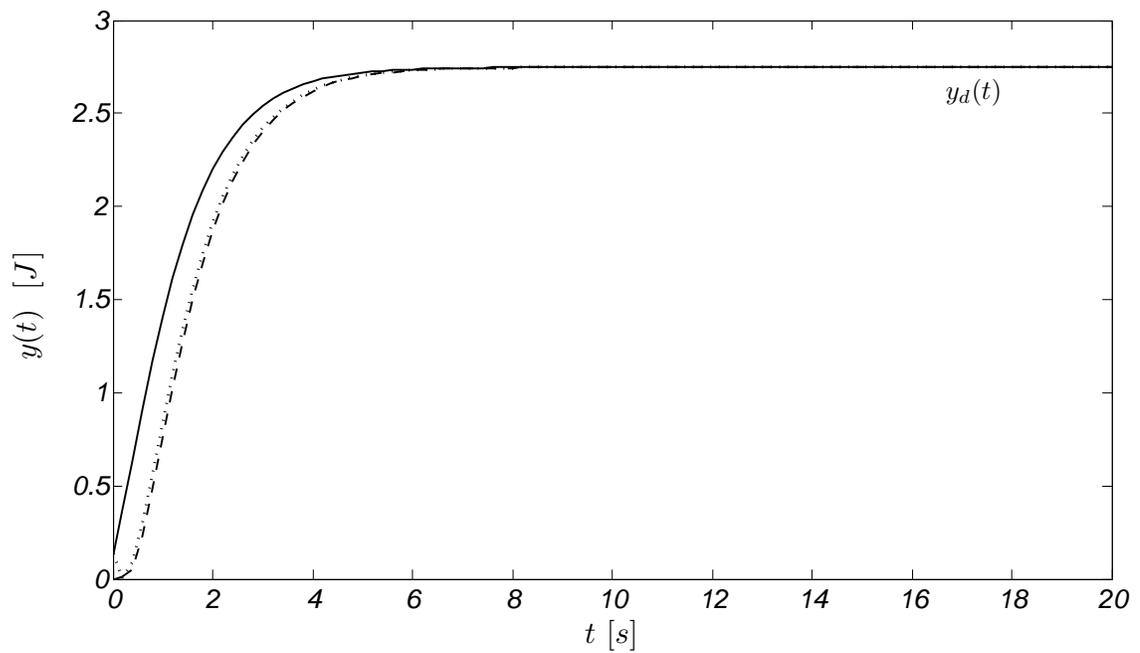


Figura 23. Gráfica de la evolución de la energía cinética $y(t)$

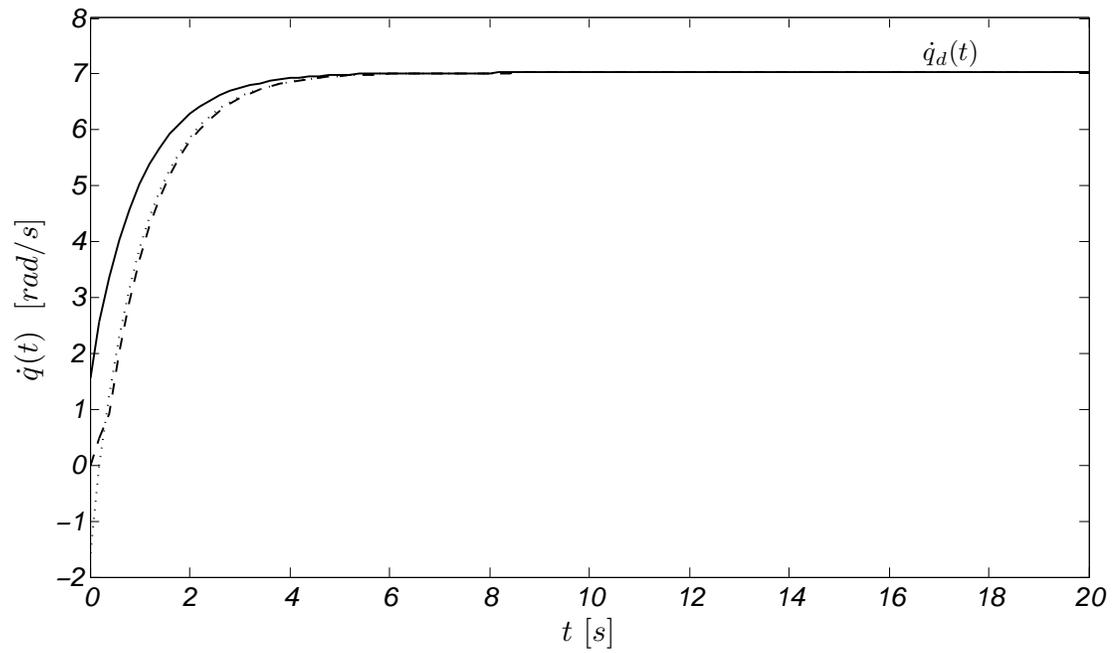


Figura 24. Gráfica de la evolución de la velocidad articular $\dot{q}(t)$

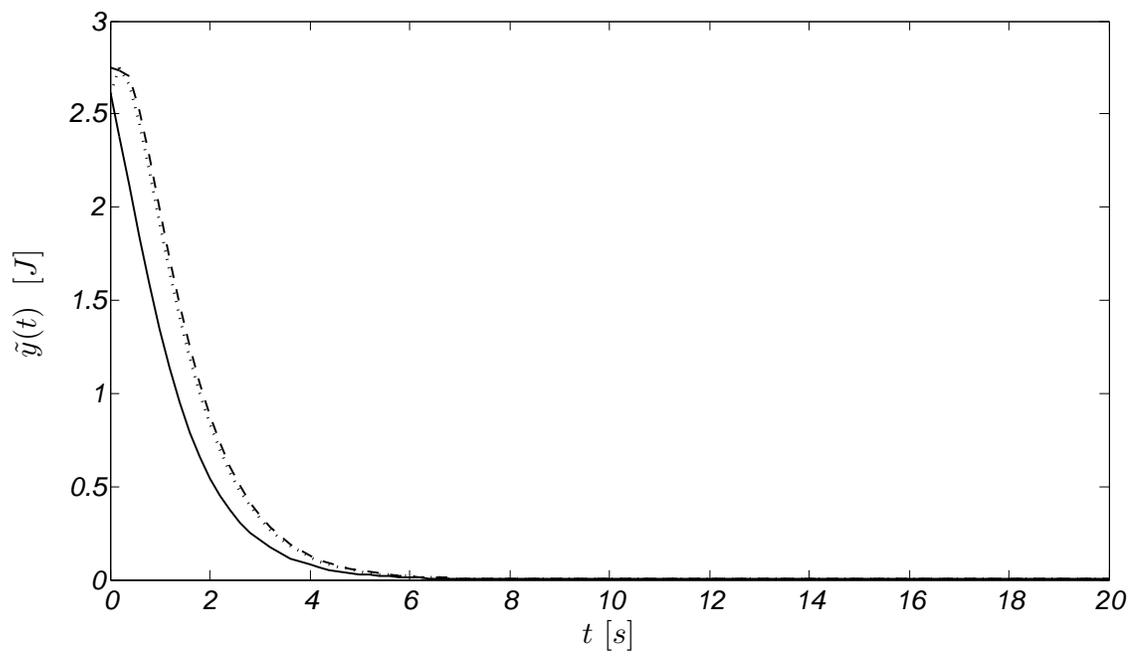


Figura 25. Gráfica del error de energía cinética $\tilde{y}(t)$

3.2 Control cinemático de apuntamiento/orientación del modelo de un satélite ideal

De acuerdo a Pacheco *et al.* (2009), la estructura en que van montadas las antenas de un satélite cilíndrico es independiente al sistema de estabilización axial; es decir, se cuenta con un equipamiento dedicado a la orientación de las antenas u otros dispositivos, como cámaras. El objetivo de esta sección es precisamente el apuntamiento u orientación de estos dispositivos en el satélite hacia la Tierra *una vez en órbita*, para lo cual se requiere presentar algunos conceptos básicos de *mecánica celeste*.

Mecánica celeste.

“Rama de la astronomía que estudia los movimientos de los astros por la interacción gravitatoria” (RAE, 2001).

La mecánica celeste u orbital es básicamente la aplicación de la *Ley de la gravitación universal* de Isaac Newton y sus tres leyes de movimiento para resolver el problema de los dos cuerpos o problema de Kepler.

Las tres leyes del movimiento interplanetario de Kepler (Bate *et al.*, 1971, pg. 2).

1. Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando éste situado en uno de los 2 focos que contiene la elipse.
2. Las áreas barridas por los radios de los planetas, son proporcionales al tiempo empleado por estos en recorrer el perímetro de dichas áreas.
3. El cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al Sol.

Las tres leyes de la dinámica de Newton (Bate *et al.*, 1971, pg. 3).

1. Todo cuerpo permanecerá en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado por fuerzas externas a cambiar su estado.
2. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz externa y ocurre en la misma dirección en la cual aquella fuerza se aplica.
3. Con toda acción ocurre siempre una reacción de igual magnitud y sentido contrario.

La ley de la gravitación universal de Newton (Bate *et al.*, 1971, pg. 4).

1. La fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados una distancia r es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La expresión matemática con notación vectorial de esta ley es:

$$\mathbf{f} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

donde \mathbf{f} es el vector de fuerza en m_1 debido a m_2 , \mathbf{r} es el vector de m_1 a m_2 , r la magnitud de dicho vector, y G es la constante de gravitación universal, cuyo valor es $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

El problema de dos cuerpos plantea el movimiento relativo de dos cuerpos, también conocido como *interacción gravitatoria*. El planteamiento de este problema requiere de dos supuestos Bate *et al.* (1971):

1. Los cuerpos son esferas simétricas. Este concepto de *simetría* equivale a considerar a los cuerpos como partículas cuya masa se encuentra concentrada en su centro.
2. Se desprecia el efecto gravitatorio de otros cuerpos. No existen fuerzas internas o externas que perturben el sistema, mas que la fuerza gravitacional que actúa a lo largo de la línea que *une* los centros de ambos cuerpos.

Para propósito del desarrollo de esta tesis, la primera hipótesis se reescribe como:

1. Los cuerpos son esferas simétricas, pero con una *marca* que permita denotar una orientación.

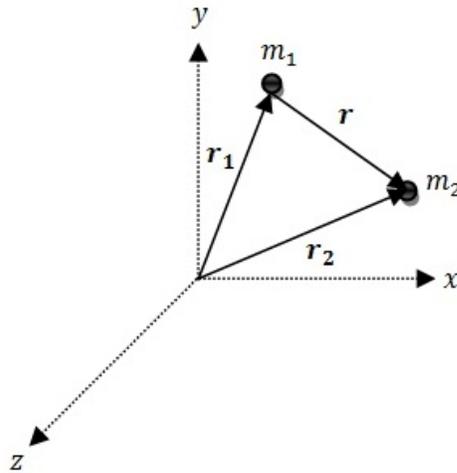


Figura 26. El problema de los dos cuerpos

De la figura 26, se obtiene:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Y aplicando las leyes de Newton en el marco inercial mostrado se obtiene:

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (22)$$

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (23)$$

Restando la ecuación (23) de (22), obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (24)$$

La ecuación (24) se conoce como la ecuación diferencial de movimiento del problema de los dos cuerpos.

Para el problema de esta tesis, se considera una nueva hipótesis:

- $m_1 \gg m_2$. Es decir, se considera el movimiento de un satélite artificial (m_2) orbitando alrededor de la Tierra (m_1)

En esta hipótesis se considera el originalmente satélite cilíndrico, ahora como una esfera simétrica (para poder tratar el cuerpo como si su masa estuviera concentrada en su centro), y su antena como una *marca* en esta esfera. La diferencia de masas y dimensiones, permite suponer que esta hipótesis no afecta el desarrollo posterior en el problema de los dos cuerpos. A partir de esta hipótesis, se define el **parámetro gravitacional** (μ), cuyo valor es (Bate *et al.*, 1971, pg. 361):

$$\mu \equiv Gm_1 = 3.986 \times 10^5 \frac{km^3}{s^2}$$

De manera que la ecuación (24) se reescribe como:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (25)$$

Si bien la ecuación (25) parece simple, la solución completa no es fácil de obtener.

A falta de una función en el tiempo para el vector \mathbf{r} (solución completa), conviene por lo menos encontrar una solución parcial que proporcione información sobre el movimiento que describirá el objeto orbitando. Una forma de obtener esta solución “parcial” es la propuesta por Bate *et al* en *Fundamentals of astrodynamics* que se muestra a continuación , a partir de ella se obtiene el tamaño y forma de la órbita.

“Primero se define el momento angular del cuerpo m_2 relativo a m_1 , o *momento angular específico* \mathbf{h} :

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

donde \mathbf{v} es el vector velocidad (derivada temporal del vector radio \mathbf{r}).

Y tomando la derivada con respecto al tiempo del momento angular tenemos que:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Sabiendo que el producto cruz de un vector por sí mismo es cero, y sustituyendo $\ddot{\mathbf{r}}$ de la ecuación (25):

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r} \times \left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}\right) = 0$$

Demostrando entonces la conservación del momento angular, lo que implica que el movimiento de m_2 queda restringido al plano formado por los vectores \mathbf{r} y \mathbf{v}

Para la solución parcial mencionada, se realiza el producto cruz con el vector \mathbf{h} en ambos lados de la ecuación (25) quedando:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r}) \quad (26)$$

El lado izquierdo de la igualdad equivale a $\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})$, por lo que se manipulará el lado derecho de la igualdad para dejarlo también en razón de cambio con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r}) &= \frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} \\ &= \frac{\mu}{r^3}[\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})] \\ &= \frac{\mu}{r}\mathbf{v} - \frac{\mu v}{r^2}\mathbf{r} \\ &= \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \end{aligned}$$

Se reescribe la ecuación (26) como:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

La ecuación anterior se integra en ambos lados para dar lugar a:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \boldsymbol{\beta} \quad (27)$$

Donde β es un vector constante de integración. Luego se realiza el producto punto con el vector \mathbf{r} para obtener una ecuación escalar:

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{r} \cdot \beta$$

Simplificando con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$

$$h^2 = \mu r + r\beta \cos \nu$$

Donde ν es el ángulo entre el vector constante β y el vector del radio \mathbf{r} . Y de esta última expresión obtenemos:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (\beta/\mu) \cos \nu} = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (28)$$

que se considera la solución parcial.” (Bate *et al.*, 1971, pg. 19)

Esta solución parcial es comparada con la ecuación polar de las cónicas en (28), definiendo los parámetros *semi-latus rectum* (p) y excentricidad (e).

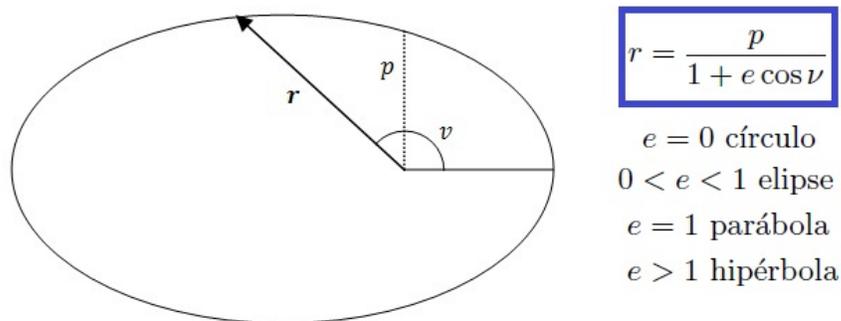


Figura 27. Ecuación de las cónicas en coordenadas polares. Si $e > 1$, esta ecuación define una hipérbola; si $e = 1$, define una parábola; si $0 < e < 1$, define una elipse; si $e = 0$ resulta en un círculo.

De esta manera no sólo se comprueba la primera ley de Kepler, sino que además se extiende el concepto del movimiento orbital en cualquiera de las cónicas. Sin embargo,

para propósitos de esta tesis, sólo se tomarán en cuentas las órbitas elípticas.

Dado que el parámetro excentricidad está en función del vector constante de integración, podemos afirmar que serán las condiciones iniciales de posición y velocidad las que dicten el tipo de órbita que seguirá el cuerpo en movimiento.

En órbitas elípticas se definen las siguientes variables, las cuales se utilizarán posteriormente para el problema del apuntamiento de un satélite ideal:

- Periapsis, apoapsis. El periapsis es el punto de la órbita elíptica donde la distancia entre los cuerpos es mínima. Por el contrario, el apoapsis es el punto con la máxima distancia. Se les llaman perigeo y apogeo, respectivamente, si la Tierra es el cuerpo al que se orbita.
- Vector excentricidad (\mathbf{e}). Vector constante que apunta al perigeo. Se obtiene despejando $\boldsymbol{\beta}$ de la ecuación (27):

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mu} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

- Excentricidad (e). Constante que define la forma de la cónica, magnitud del vector excentricidad.

$$e = \|\mathbf{e}\|$$

- Semi-eje mayor (a). Constante que define el tamaño de la órbita cónica.

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)}$$

- Semi-eje menor (b). Constante que define el tamaño de la órbita cónica.

$$b = \frac{h^2}{\mu\sqrt{1 - e^2}}$$

- Periodo de una órbita. El tiempo que tarda el vector \mathbf{r} en barrer el área total de la elipse:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}}$$

- Anomalía excéntrica (ρ). Es el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del cuerpo que orbita sobre la circunferencia principal, y el eje de la elipse
- Anomalía verdadera (ν). Es el ángulo que forma el cuerpo que orbita medido desde el foco de la órbita elíptica con el perigeo.
- Anomalía media (nt). Es la fracción de un período orbital que ha transcurrido, expresada como ángulo. Donde n es el movimiento medio y se define como $n \equiv \sqrt{\mu/a^3}$.

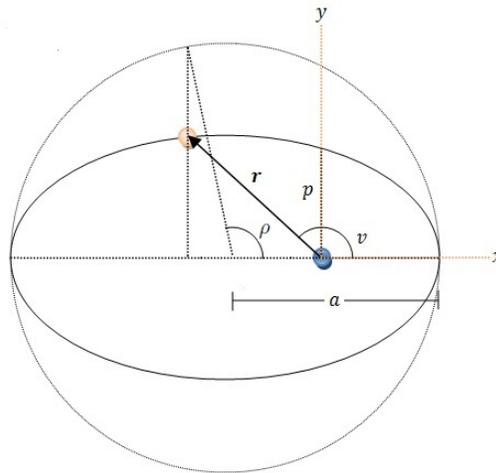


Figura 28. Variables que describen una órbita elíptica

Conviene obtener una expresión que relacione la anomalía excéntrica con la anomalía

media: (véase la figura 29)

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$h = rv \cos(\zeta)$$

$$h = r(r\dot{\nu})$$

$$h = r^2 \frac{d\nu}{dt}$$

$$\int_{t_0}^t h dt = \int_0^\nu r^2 d\nu$$

$$h(t - t_0) = \int_0^\nu \frac{p^2 d\nu}{(1 + e \cos(\nu))^2}$$

$$h(t - t_0) = \frac{pa}{\sqrt{1 - e^2}} \int_0^\rho (1 - e \cos(\rho)) d\rho$$

$$h(t - t_0) = \frac{pa}{\sqrt{1 - e^2}} (\rho - e \sin(\rho))$$

$$nt = \rho - e \sin(\rho)$$

Esta última expresión es conocida como la ecuación de Kepler. (Bate *et al.*, 1971)

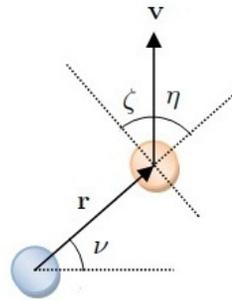


Figura 29. Relación entre las anomalías media y excéntrica, por la componente horizontal de la velocidad \mathbf{v}

Hasta este punto, ya se conoce qué tipo de órbita va a describir el satélite ideal a partir de las condiciones iniciales de posición y velocidad, y además se conoce cómo obtener los parámetros en el caso de órbitas elípticas. Sin embargo, sigue la incógnita en cuanto a la expresión de la solución general de la ecuación diferencial del problema de

los dos cuerpos. En trabajos como Tyrell (1961), Danby (1962) y Curtis (2004), hacen referencia a soluciones numéricas. Sin embargo, el autor Moulton en su libro *An introduction to celestial mechanics*, presenta el método de la inversión de Lagrange como un *método conveniente para prácticamente resolver la ecuación de Kepler* (Moulton, 1914).

Teorema de inversión de Lagrange.

“Suponga que z es una función de w dada por la siguiente ecuación:

$$z = w + \alpha\phi(z), \quad (29)$$

donde α es un parámetro y $\phi(\cdot)$ es una función analítica.

Toda función de z puede expresarse como una serie de potencias de α , que converge para valores pequeños de α , de la forma:

$$F(z) = F(w) + \frac{\alpha}{1}\phi(w)F'(w) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2}\frac{\partial}{\partial w} [\phi(w)^2 F'(w)] + \dots \\ + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial w^n} [\phi(w)^{n+1} F'(w)] + \dots"$$

(Moulton, 1914, pg. 161).

El teorema de inversión de Lagrange, también conocido como expansión de Lagrange, es una generalización de la expansión en series de Taylor en la que la variable independiente es definida por la función implícita de la ecuación (29). Y, por tanto, puede obtenerse la expansión en potencias del parámetro α para cualquier función $F(z)$, siempre que ésta sea diferenciable (Moulton, 1914).

Para resolver la ecuación de Kepler se procede entonces a obtener una expansión en serie de potencias de e para la anomalía excéntrica ρ . Al reescribir la ecuación de Kepler como:

$$\rho = nt + e \sin(\rho)$$

toma la forma de la ecuación (29) en el teorema de inversión de Lagrange, donde $w = nt$, $z = \rho$, $\phi(z) = \sin(\rho)$, $\alpha = e$.

La función a resolver, aplicando el cambio de variable $z = \rho$, es:

$$F(z) = F(\rho) = \rho$$

y el resultado es:

$$\begin{aligned} \rho = & nt + e \sin(nt) + \frac{e^2}{2} \sin(2nt) + \frac{e^3}{24} [9 \sin(3nt) - 3 \sin(nt)] \\ & + \frac{e^4}{192} [64 \sin(4nt) - 32 \sin(2nt)] + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

El autor también plantea la expansión en series de las expresiones para el radio r y para la anomalía verdadera ν , es decir, para las ecuaciones paramétricas en coordenadas polares, de manera de obtener una solución general para la ecuación diferencial del problema de los dos cuerpos.

Las expresiones de r y ν serán las nuevas funciones $F(z) = F(\rho)$. Es decir, a partir de:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos(\rho)) \\ \tan\left(\frac{1}{2}\nu\right) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{1}{2}\rho\right) \end{aligned}$$

Aplicando la segunda parte del teorema de inversión de Lagrange obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{r(t)}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - e \cos(nt) - \frac{e^2}{2} \cos(2nt) - \frac{e^3}{2! \cdot 2^2} [3 \cos(3nt) - 3 \cos(nt)] \\ &\quad - \frac{e^4}{3! \cdot 2^3} [4^2 \cos(4nt) - 2^4 \cos(2nt)] \\ &\quad - \frac{e^5}{4! \cdot 2^4} [5^3 \cos(5nt) - 5 \cdot 3^3 \cos(3nt) + 10 \cos(nt)] + \dots \\ \nu(t) &= nt + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) \sin(nt) + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right) \sin(2nt) \\ &\quad + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right) \sin(3nt) + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right) \sin(4nt) \\ &\quad + \frac{1097}{960}e^3 \sin(5nt) + \frac{1223}{960}e^6 \sin(6nt) + \dots \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, los ángulos de las anomalías ν y nt se miden a partir del perigeo coincidente con el eje positivo \mathbf{x} . Suponga que el perigeo, exista en el plano xy pero no coincida con el eje unitario \mathbf{x} , es decir que el vector excentricidad \mathbf{e} tenga componentes diferentes a $[1 \ 0 \ 0]^T$, entonces el ángulo ν se verá incrementado por una cantidad constante que denotaremos con ϕ :

$$\phi = \text{sgn} \left([\mathbf{x} \times \mathbf{e}] \hat{\mathbf{k}} \right) \arcsin \left(\frac{|\mathbf{x} \times \mathbf{e}|}{|\mathbf{x}| |\mathbf{e}|} \right)$$

donde $|\cdot|$ representa la magnitud del vector, $[\cdot \times \cdot] \hat{\mathbf{k}}$ es la notación propuesta en esta tesis para la magnitud de la componente en sentido del eje \mathbf{z} del vector resultante de ese producto cruz, y $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo que se define como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

En caso de que el vector excentricidad \mathbf{e} sea coincidente con el eje \mathbf{x} , el ángulo ϕ es cero.

Además considere que el inicio del tiempo t no coincide con el paso por el perigeo; si se fija en cualquier otro instante, el ángulo nt se verá incrementada por una cantidad constante que se denotará por $\varphi - \phi$, el ángulo φ se obtendrá entonces como:

$$\text{Si } \text{sgn} \left([\mathbf{e} \times \mathbf{r}(0)] \hat{\mathbf{k}} \right) = 1$$

$$\varphi = \text{sgn} \left([\mathbf{e} \times \mathbf{r}(0)] \hat{\mathbf{k}} \right) \arcsin \left(\frac{|\mathbf{r}(0) \times \mathbf{e}|}{|\mathbf{r}(0)| |\mathbf{e}|} \right) + \phi$$

$$\text{Si } \text{sgn} \left([\mathbf{e} \times \mathbf{r}(0)] \hat{\mathbf{k}} \right) = -1$$

$$\varphi = \text{sgn} \left([\mathbf{e} \times \mathbf{r}(0)] \hat{\mathbf{k}} \right) \arcsin \left(\frac{|\mathbf{r}(0) \times \mathbf{x}|}{|\mathbf{r}(0)|} \right) + \phi$$

En estos casos también se utiliza la notación $|\cdot|$ para la magnitud del vector, $[\cdot \times \cdot] \hat{\mathbf{k}}$ para la componente en sentido del eje \mathbf{z} del vector resultante de ese producto cruz, y

$sgn(\cdot)$ para la función signo.

En caso de que el inicio del tiempo t coincida con el paso por el perigeo, el ángulo φ es cero.

De manera que se amplía la solución para la ecuación de Kepler originalmente propuesto por el autor en (Moulton, 1914) para cualesquiera condiciones iniciales de posición y velocidad en el plano xy , y las expresiones quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{r(t)}{a} = & 1 + \frac{e^2}{2} - e \cos(nt + \varphi - \phi) - \frac{e^2}{2} \cos(2nt + \varphi - \phi) \\ & - \frac{e^3}{2! \cdot 2^2} [3 \cos(3nt + \varphi - \phi) - 3 \cos(nt + \varphi - \phi)] \\ & - \frac{e^4}{3! \cdot 2^3} [4^2 \cos(4nt + \varphi - \phi) - 2^4 \cos(2nt + \varphi - \phi)] \\ & - \frac{e^5}{4! \cdot 2^4} [5^3 \cos(5nt + \varphi - \phi) - 5 \cdot 3^3 \cos(3nt + \varphi - \phi) + 10 \cos(nt + \varphi - \phi)] + \dots \\ \nu(t) = & nt + \varphi + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) \sin(nt + \varphi - \phi) \\ & + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right) \sin(2nt + \varphi - \phi) \\ & + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right) \sin(3nt + \varphi - \phi) + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right) \sin(4nt + \varphi - \phi) \\ & + \frac{1097}{960}e^3 \sin(5nt + \varphi - \phi) + \frac{1223}{960}e^6 \sin(6nt + \varphi - \phi) + \dots \end{aligned}$$

Se utilizará esta última expresión, $\nu(t)$, para presentar una solución al problema de apuntamiento/orientación de un satélite ideal.

3.2.1 Caso 1

Considérese el problema de apuntar u orientar la cámara en un satélite ideal en dirección a la Tierra. Siendo de interés fotografiar la superficie terrestre, apuntar la cámara al *centro de la Tierra* garantiza las tomas correctas. Obsérvese la figura 30 donde se muestra la órbita elíptica que describirá el satélite y el apuntamiento/orientación deseado.

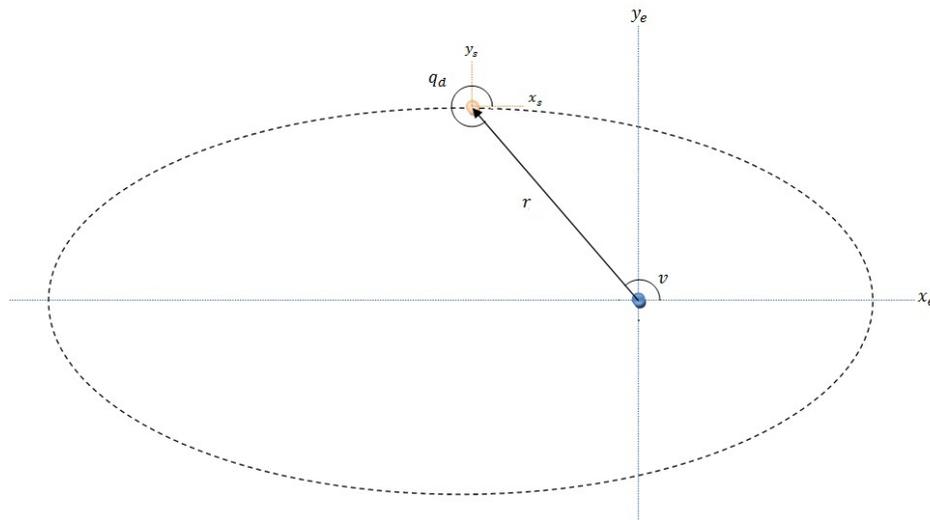


Figura 30. Control cinemático de apuntamiento/orientación de un satélite. Caso 1.

Objetivo de control: Apuntamiento/orientación (Seguimiento)

Sea la planta (actuador ideal de velocidad para apuntamiento/orientación):

$$\dot{q} = u$$

Objetivo de control:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_d(t) - q(t) = 0$$

Hipótesis:

$$\mathbf{r}(0) \text{ y } \mathbf{v}(0) \text{ conocidas.}$$

Propuesta de controlador:

$$u = -q + q_d + \dot{q}_d$$

donde:

$$q_d(t) = \nu(t) + \pi \text{ y}$$

$$\dot{q}_d(t) = \dot{\nu}(t)$$

Primero se obtiene la expresión $\nu(t)$ por el método de inversión de Lagrange y posteriormente la derivada temporal de esta función. Los parámetros necesarios para estas expresiones (\mathbf{e} , e , n) se obtienen a partir de las condiciones iniciales de posición y velocidad de la siguiente manera:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}(\mathbf{0}) \times \mathbf{v}(\mathbf{0})$$

$$h = \|\mathbf{h}\|$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{0}) \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{0})}{r(0)}$$

$$e = \|\mathbf{e}\|$$

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)}$$

$$n \equiv \sqrt{\mu/a^3}$$

donde: $\mu \equiv 3.986 \times 10^5 \frac{km^3}{s^2}$

Definimos la variable de error y su derivada temporal como:

$$\tilde{q} = q_d - q,$$

$$\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}$$

Sustituyendo la acción de control:

$$\dot{q} = \underbrace{-q + q_d + \dot{q}_d}_u$$

Aplicando la definición de error, obtenemos la ecuación de malla cerrada del sistema:

$$\dot{\tilde{q}} = -\tilde{q}$$

Para analizar la estabilidad del único equilibrio del sistema en lazo cerrado (el origen) recurrimos a los teoremas de estabilidad de Lyapunov utilizados anteriormente en la tesis.

Se propone la siguiente función V :

$$V(\tilde{q}) = \frac{1}{2}\tilde{q}^2$$

Su derivada temporal, viene dada por:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = \tilde{q}\dot{\tilde{q}}$$

Y sustituyendo de la ecuación de malla cerrada:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = -\tilde{q}^2$$

De manera que se cumplen las condiciones para decir que el equilibrio en el origen es asintóticamente estable. Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_d(t) - q(t) = 0$$

Cumpléndose el objetivo de control.

Se realizaron las simulaciones del controlador propuesto.

Los valores utilizados para definir la órbita en esta simulación fueron: $r(0) = [7000 \quad -12124]^T \text{ km}$, $v(0) = [2.6679 \quad 4.6210]^T \text{ km/seg}$, mientras que la condición inicial para el actuador de apuntamiento/orientación fue $q(0) = 8 \text{ rad}$. El tiempo de simulación

corresponde al necesario para que el satélite recorra mínimo una vez la órbita.

En la figura 31 se muestra la evolución de la posición articular $q(t)$, la posición articular deseada $q_d(t)$ y el ángulo anomalía verdadera $\nu(t)$. Note que, como en la definición, las últimas dos variables mantienen una diferencia constante de π radianes.

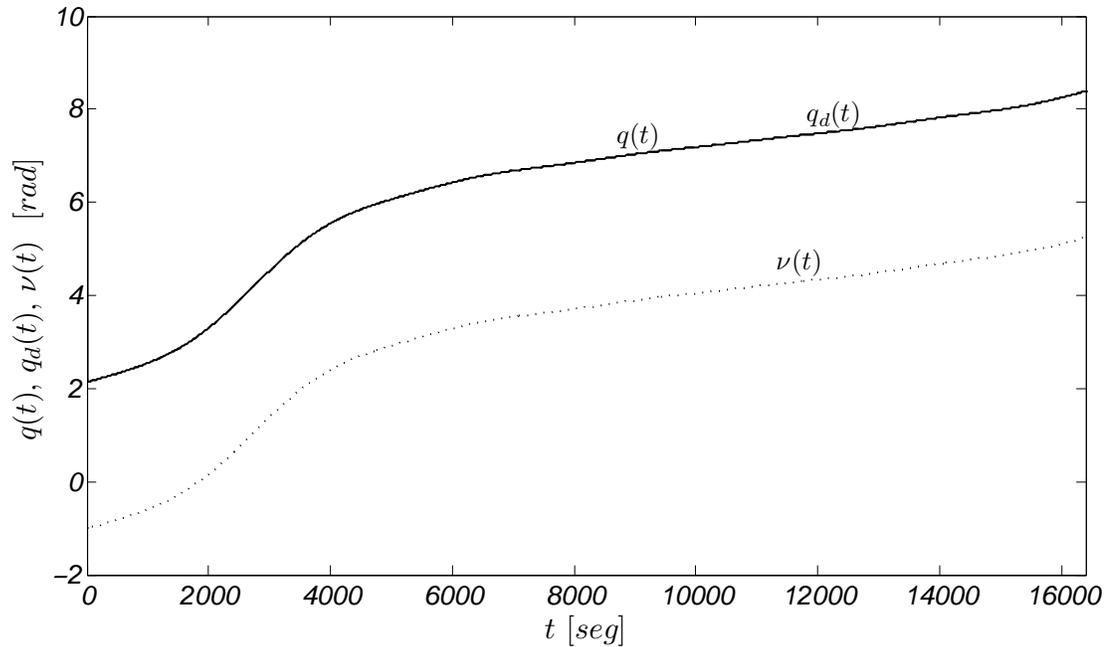


Figura 31. Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos)

En la figura 32 se realiza un acercamiento a los primeros 10 segundos de simulación para apreciar cómo tiende la posición articular $q(t)$ a la posición deseada $q_d(t)$. La función $\nu(t)$ presenta pocas variaciones en ese tiempo, es por ello que, tanto $\nu(t)$ como $q_d(t)$ parecen *constantes*.

Para mostrar cómo el ángulo $q(t)$ tiende al valor deseado $q_d(t)$, se define la variable de error de posición como: $\tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t)$, cuya gráfica se puede observar en la figura 33.

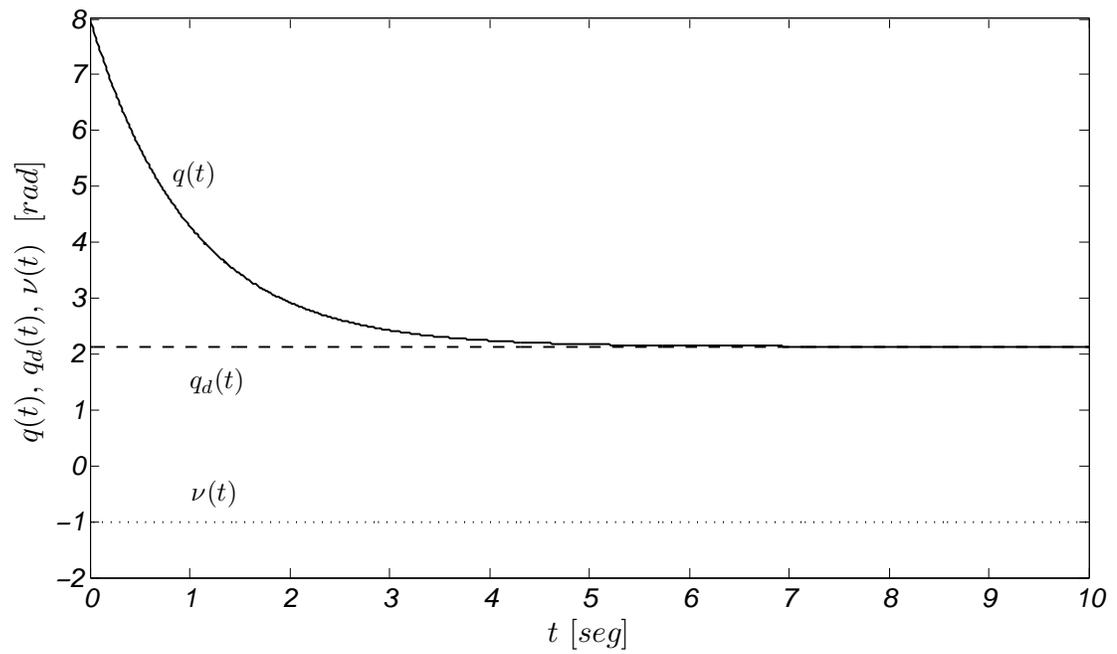


Figura 32. Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos)

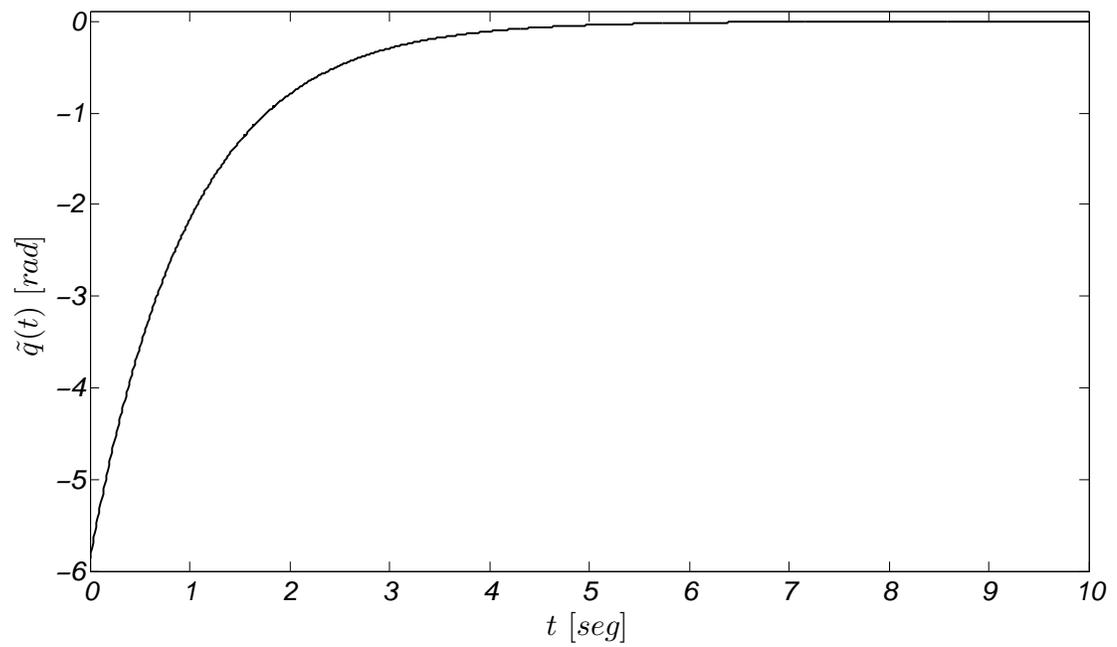


Figura 33. Gráfica del error de posición del apuntamiento $\tilde{q}(t)$

3.2.2 Caso 2

Ahora considere el problema de apuntar u orientar la antena en un satélite ideal en dirección a una estación específica sobre la Tierra. Siendo de interés maximizar el tiempo de comunicación entre los dos puntos, conviene que el satélite siempre esté direccionado a *ese punto* sobre la superficie terrestre. Obsérvese la figura 34 donde se muestra la órbita elíptica que describirá el satélite y el apuntamiento/orientación deseado.

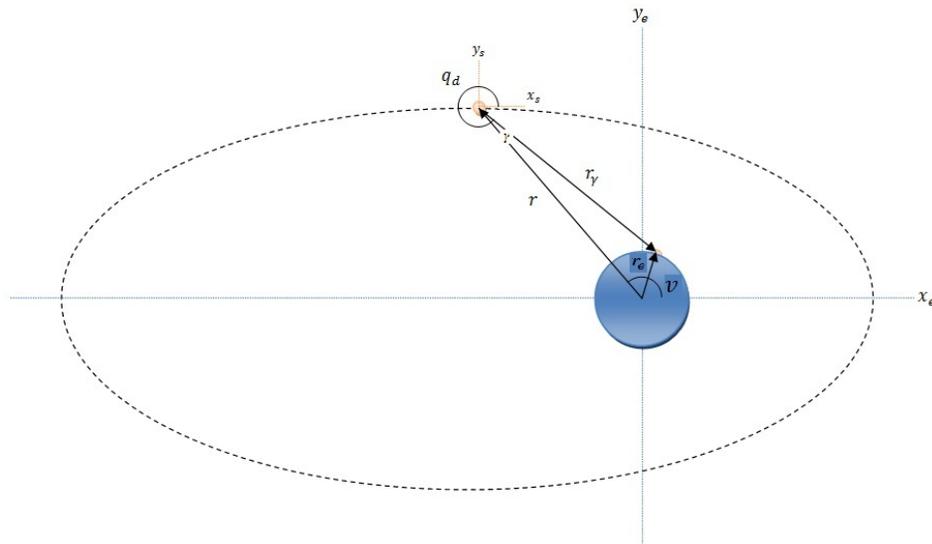


Figura 34. Control cinemático de apuntamiento/orientación de un satélite. Caso 2.

En la figura anterior, \mathbf{r}_E corresponde al vector cuyas componentes muestran la posición del punto de interés sobre la superficie de la Tierra (conocido), \mathbf{r}_γ representa la diferencia entre los vectores \mathbf{r}_E y \mathbf{r} , y γ es el ángulo formado entre los vectores \mathbf{r}_γ y \mathbf{r} . Una forma de obtener las nuevas variables γ y r_γ es a partir de las expresiones temporales de la órbita en coordenadas cartesianas. Aplicando el teorema de inversión

de Lagrange a:

$$nt = \rho - e \sin(\rho)$$

$$x = ae \cos(\rho) - ae$$

$$y = b \sin(\rho)$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{322560}{a} x(t) = & 322560 \cos(nt) - 483840e + 161280e \cos(2nt) - 120960e^2 \cos(nt) \\ & + 8400e^4 \cos(nt) + 120960e^2 \cos(3nt) - 107520e^3 \cos(2nt) \\ & - 245e^6 \cos(nt) + 107520e^3 \cos(4nt) - 113400e^4 \cos(3nt) \\ & + 20160e^5 \cos(2nt) + 105000e^4 \cos(5nt) - 129024e^5 \cos(4nt) \\ & + 35721e^6 \cos(3nt) - 1792e^7 \cos(2nt) + 108864e^5 \cos(6nt) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{322560}{b} y(t) = & 322560 \sin(nt) + 161280e \sin(2nt) - 40320e^2 \sin(nt) \\ & + 1680e^4 \sin(nt) + 120960e^2 \sin(3nt) - 53760e^3 \sin(2nt) \\ & - 35e^6 \sin(nt) + 107520e^3 \sin(4nt) - 68040e^4 \sin(3nt) \\ & + 6720e^5 \sin(2nt) + 105000e^4 \sin(5nt) - 86016e^5 \sin(4nt) \\ & + 15309e^6 \sin(3nt) - 448e^7 \sin(2nt) + 108864e^5 \sin(6nt) + \dots \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, la anomalía nt se mide a partir del perigeo coincidente con el eje positivo \mathbf{x} . Suponga que el inicio del tiempo t no coincide con el paso por el perigeo, es decir que el vector de condiciones iniciales de posición tenga componentes diferentes a las del vector excentricidad; y además suponga que el perigeo existe en el plano xy , pero no coincide con el eje \mathbf{x} , es decir que el vector excentricidad \mathbf{e} tenga componentes diferentes a $[1 \ 0 \ 0]^T$, entonces el argumento de las expresiones seno y coseno deberá modificarse por la cantidad constante denotada por $\epsilon - \omega$. Estas cantidades se obtendrán

como:

$$\epsilon = \arcsin \left(\frac{|\mathbf{r}(0) \times \mathbf{e}|}{|\mathbf{r}(0)| |\mathbf{e}|} \right)$$

$$\omega = \arcsin \left(\frac{|\mathbf{x} \times \mathbf{e}|}{|\mathbf{x}| |\mathbf{e}|} \right)$$

donde $|\cdot|$ representa la magnitud de dicho vector.

En caso de que el inicio del tiempo coincida con el paso del perigeo, se dice que $\epsilon = 0$.

Y si el perigeo coincide con el eje \mathbf{x} , entonces $\omega = 0$.

De manera que un resultado más general, es decir, para cualesquiera condiciones iniciales de posición y velocidad en el plano xy , vendrá dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{322560}{a} x(t) = & 322560 \cos(nt + \epsilon - \omega) - 483840e + 161280e \cos(2nt + \epsilon - \omega) \\ & - 120960e^2 \cos(nt + \epsilon - \omega) + 8400e^4 \cos(nt + \epsilon - \omega) \\ & + 120960e^2 \cos(3[nt + \epsilon - \omega]) - 107520e^3 \cos(2[nt + \epsilon - \omega]) \\ & - 245e^6 \cos(nt + \epsilon - \omega) + 107520e^3 \cos(4[nt + \epsilon - \omega]) \\ & - 113400e^4 \cos(3[nt + \epsilon - \omega]) + 20160e^5 \cos(2[nt + \epsilon - \omega]) \\ & + 105000e^4 \cos(5[nt + \epsilon - \omega]) - 129024e^5 \cos(4[nt + \epsilon - \omega]) \\ & + 35721e^6 \cos(3[nt + \epsilon - \omega]) - 1792e^7 \cos(2[nt + \epsilon - \omega]) \\ & + 108864e^5 \cos(6[nt + \epsilon - \omega]) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{322560}{b} y(t) = & 322560 \sin(nt + \epsilon - \omega) + 161280e \sin(2[nt + \epsilon - \omega]) \\
& - 40320e^2 \sin(nt + \epsilon - \omega) + 1680e^4 \sin(nt + \epsilon - \omega) \\
& + 120960e^2 \sin(3[nt + \epsilon - \omega]) - 53760e^3 \sin(2[nt + \epsilon - \omega]) \\
& - 35e^6 \sin(nt + \epsilon - \omega) + 107520e^3 \sin(4[nt + \epsilon - \omega]) \\
& - 68040e^4 \sin(3[nt + \epsilon - \omega]) + 6720e^5 \sin(2[nt + \epsilon - \omega]) \\
& + 105000e^4 \sin(5[nt + \epsilon - \omega]) - 86016e^5 \sin(4[nt + \epsilon - \omega]) \\
& + 15309e^6 \sin(3[nt + \epsilon - \omega]) - 448e^7 \sin(2[nt + \epsilon - \omega]) \\
& + 108864e^5 \sin(6[nt + \epsilon - \omega]) + \dots
\end{aligned}$$

Estas expresiones en coordenadas cartesianas, se utilizarán en el siguiente controlador.

Objetivo de control: Apuntamiento/orientación (Seguimiento)

Sea la planta (actuador ideal de velocidad para apuntamiento/orientación):

$$\dot{q} = u$$

Objetivo de control:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_d(t) - q(t) = 0$$

Propuesta de controlador:

$$u = -q + q_d + \dot{q}_d$$

donde:

$$q_d(t) = \nu(t) + \pi + \sigma(t)\gamma(t)$$

$$\dot{q}_d(t) = \dot{\nu}(t) + \dot{\sigma}(t)\gamma(t) + \sigma(t)\dot{\gamma}(t)$$

$$\sigma(t) = \tanh(x(t)[y_e - y(t)] - y(t)[x_e - x(t)])$$

$$\gamma(t) = \arccos\left(\frac{\|r_e\|^2 - \|r(t)\|^2 - \|r_\gamma(t)\|^2}{-2\|r(t)\|\|r_\gamma(t)\|}\right)$$

$$\|r_e\| = \sqrt{x_e^2 + y_e^2}$$

$$\|r(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

$$\|r_\gamma\| = \sqrt{(x_e - x(t))^2 + (y_e - y(t))^2}$$

Primero se obtienen las expresiones $\nu(t)$, $x(t)$, $y(t)$ por el método de inversión de Lagrange y posteriormente la derivada temporal de estas funciones. Los parámetros necesarios para estas expresiones (\mathbf{e} , e , n , a , b) se obtienen a partir de las condiciones iniciales de posición y velocidad de la siguiente manera:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}(\mathbf{0}) \times \mathbf{v}(\mathbf{0})$$

$$h = \|\mathbf{h}\|$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{0}) \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{0})}{r(\mathbf{0})}$$

$$e = \|\mathbf{e}\|$$

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)}$$

$$b = \frac{h^2}{\mu\sqrt{1 - e^2}}$$

$$n \equiv \sqrt{\mu/a^3}$$

donde: $\mu \equiv 3.986 \times 10^5 \frac{km^3}{s^2}$

Los valores x_e , y_e serán las componentes constantes del vector \mathbf{r}_E que representan el punto donde se encuentra la estación terrestre.

Definimos una vez más la variable de error y su derivada temporal como:

$$\tilde{q} = q_d - q, \quad \dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}$$

Sustituyendo la acción de control:

$$\dot{q} = \underbrace{-q + q_d + \dot{q}_d}_u$$

Aplicando la definición de error, obtenemos la ecuación de malla cerrada del sistema:

$$\dot{\tilde{q}} = -\tilde{q}$$

Utilizando también los teoremas de estabilidad de Lyapunov.

Se propone la siguiente función V :

$$V(\tilde{q}) = \frac{1}{2}\tilde{q}^2$$

Su derivada temporal, viene dada por:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = \tilde{q}\dot{\tilde{q}}$$

Y sustituyendo de la ecuación de malla cerrada:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = -\tilde{q}^2$$

De manera que se cumplen las condiciones para decir que el equilibrio en el origen es asintóticamente estable. Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_d(t) - q(t) = 0$$

Cumpléndose el objetivo de control.

Se realizaron simulaciones del controlador propuesto.

Los valores utilizados para definir la órbita en esta simulación fueron: $r(0) = [7000 \quad -12124]^T \text{ km}$, $v(0) = [2.6679 \quad 4.6210]^T \text{ km/seg}$, mientras que la condición inicial para el actuador de apuntamiento/orientación fue $q(0) = 3 \text{ rad}$. El tiempo de simulación corresponde al necesario para que el satélite recorra mínimo una vez la órbita.

En la figura 35 se muestra la evolución de la posición articular $q(t)$, la posición articular deseada $q_d(t)$ y el ángulo anomalía verdadera $\nu(t)$.

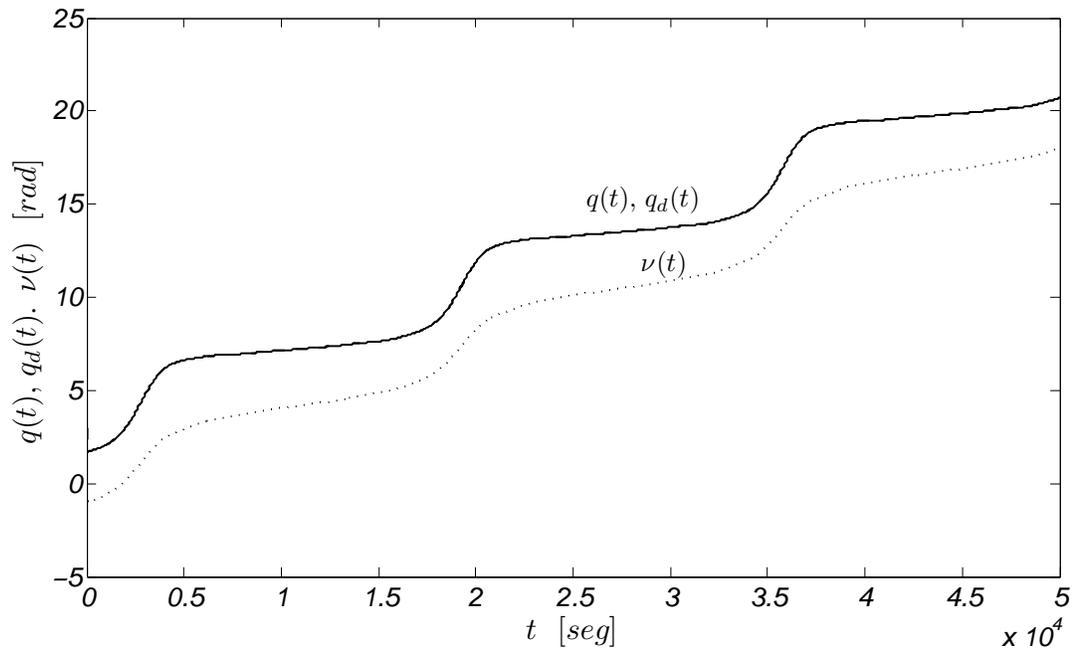


Figura 35. Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos)

En la figura 36 se realiza un acercamiento a los primeros 10 segundos de simulación para apreciar cómo tiende la posición articular $q(t)$ a la posición deseada $q_d(t)$. La función $\nu(t)$ presenta pocas variaciones en ese tiempo, es por ello que, tanto $\nu(t)$ como $q_d(t)$ parecen *constantes*.

Para mostrar cómo el ángulo $q(t)$ tiende al valor deseado $q_d(t)$, se define la variable de error de posición como: $\tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t)$, su gráfica la puede observar en la figura 37.

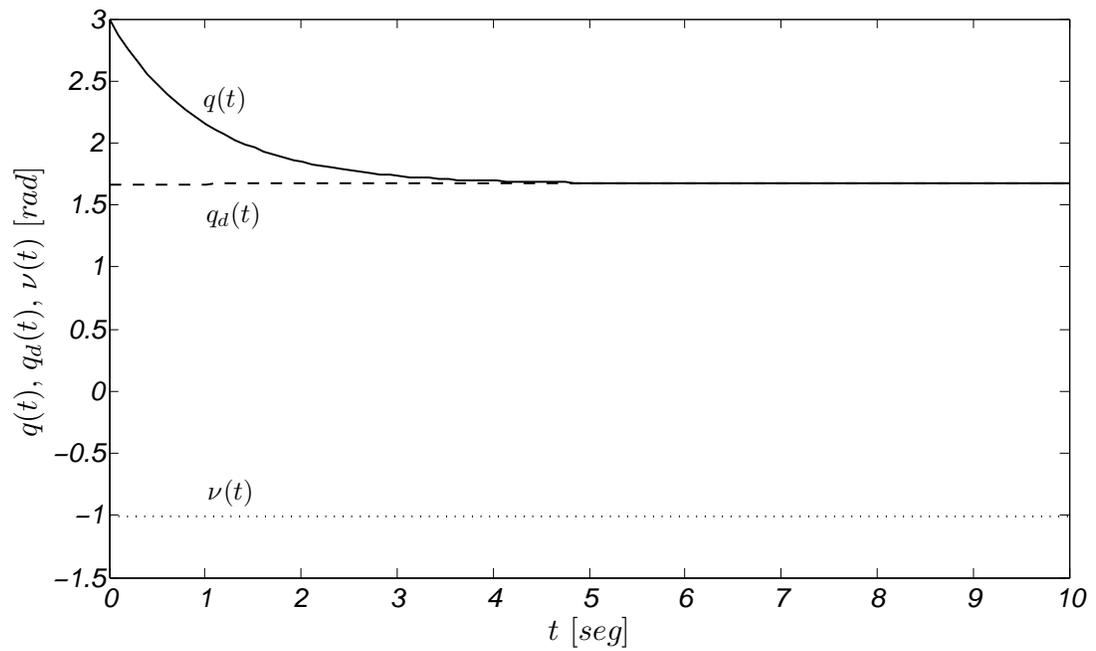


Figura 36. Gráfica de los ángulos $q(t)$ (continua), $q_d(t)$ (discontinua a rayas), $\nu(t)$ (discontinua a puntos)

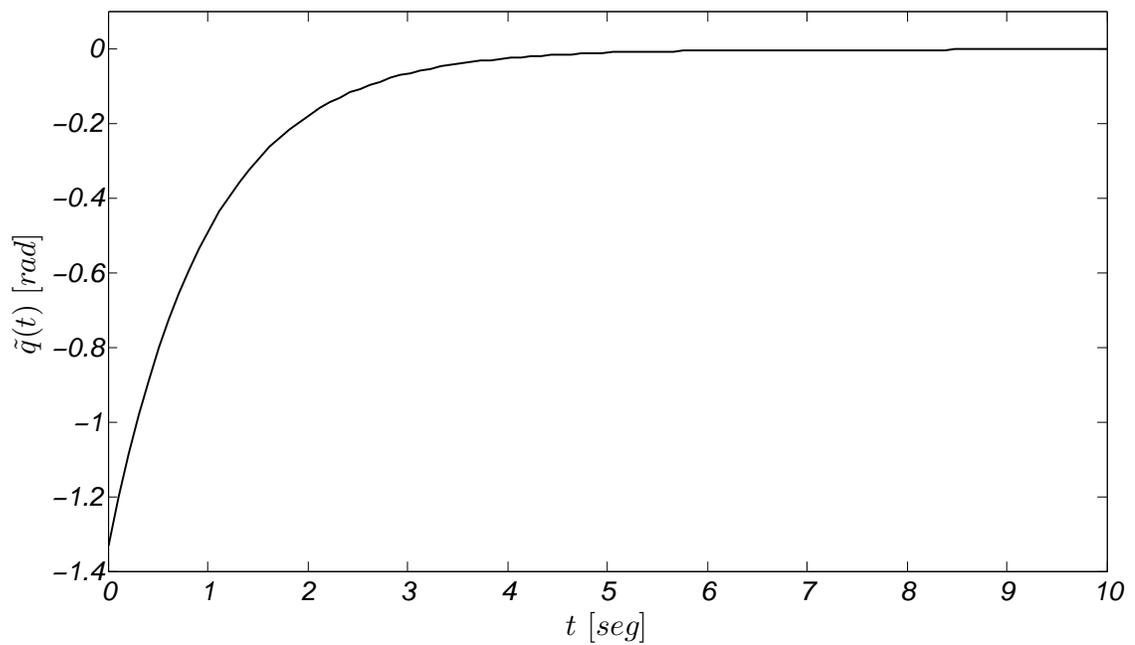


Figura 37. Gráfica del error de posición del apuntamiento $\tilde{q}(t)$

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se presentaron esquemas de control para mecanismos actuados a través de velocidades articulares, cuyo concepto se basa en el trabajo previo de Kelly *et al.* (2004), y referenciado en esta tesis como *Control Cinemático*. Además se ha mostrado que la filosofía tradicional de control de mecanismos en que las entradas son pares o fuerzas *no es la única* y se plantearon objetivos de control de energía potencial y energía cinética deseadas a diferencia de los conceptos anteriores de control de energía en que no se podía especificar un valor deseado como tal.

En primera instancia se desarrollaron controladores de energía potencial y energía cinética para el caso de estudio de un modelo de un péndulo ideal. Para después realizar una aplicación de control cinemático de posición articular con entradas de control acotadas. Se demostró el cumplimiento de los diferentes objetivos de control y se acompañaron estos resultados con simulaciones numéricas para verificarlos.

Asimismo, se trabajó con el segundo caso de estudio llamado modelo ideal de un satélite simplificado; para el cual se presenta un controlador cinemático de energía cinética para cubrir el problema conocido en el área de comunicaciones satelitales como *estabilización axial*. Y se complementa este trabajo con un control cinemático para el apuntamiento/orientación de antenas o cámaras a bordo del satélite en dirección del cuerpo al que esté orbitando. Para esta solución hubo necesidad de obtener una expresión original aproximada de la trayectoria orbital del satélite.

Como trabajo futuro, se propone continuar con los modelos cinemáticos de mecanismos considerando perturbaciones y plantear nuevos objetivos de control o incluso abordar nuevamente los presentados, pero con distintas hipótesis de trabajo. Y en el caso del

modelo de un satélite ideal, ampliar los resultados obtenidos a tres dimensiones y en órbitas correspondientes a otras cónicas.

Además se genera el interés de experimentar físicamente los controladores en mecanismos con actuadores ideales de velocidad para verificar los resultados demostrados en esta tesis.

Referencias bibliográficas

- Bate, R., Mueller, D., y White, J. (1971). *Fundamentals of astrodynamics*. Dover Publications, New York.
- Curtis, H. (2004). *Orbital Mechanics: For Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, London.
- Danby, J.M.A. (1962). *Fundamentals of celestial mechanics*. Macmillan, London.
- Del Puerto, D. (2006). *Análisis de sistemas no lineales y diseño de controladores por el método de moldeo de potencia*. Tesis de maestría, CENIDET, Cuernavaca.
- Fantoni, I. y Lozano, R. (2002). Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit. *International Journal of Control*, **75**(6): 390–398.
- Hale, J. y Koçak, H. (1991). *Dynamics and bifurcations*. Springer, New York.
- Kelly, R., Carelli, R., y Soria, C. (2004). Sobre control cinemático de impedancia en robots industriales. *VI Congreso Mexicano de Robótica, COMRob 2004*. Torreón.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, New Jersey, 3rd Ed.
- Moulton, F. (1914). *An introduction to celestial mechanics*. Macmillan, London.
- NASA-JPL (2003). Explorer 1. *Consultado en*: <http://www.jpl.nasa.gov/explorer/>.
- Neri-Vela, R. (2003). *Comunicaciones Por Satélite*. Thomson. México, D.F.
- Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P., y Sira-Ramirez, H. (1998). *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems*. Springer, Berlin.
- Pacheco, E., Mendieta, F., Vicente-Vivas, E., y Conte, R. (2009). Satellite and Space Communications Research in Mexico: Contributions to a National Program. *AIAA SPACE 2009 Conference and Exposition*. Pasadena.
- RAE (2001). Diccionario de la lengua española. *Consultado en* <http://rae.es>.
- Serway, R. (1986). *Physics for scientists and engineers with modern physics*. Saunders College, New York, 2nd ed.
- Siciliano, B. (1990). Kinematic control of redundant robot manipulators: a tutorial. *Journal of intelligent and robotic systems*, **3**(3): 201–212.
- Tyrell, W. (1961). *Space Dynamics*. Dover Publications, New York.
- Vidyasagar, M. (1978). *Nonlinear systems analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, New Jersey.