

Centro de Investigacion Cientifica y de
Educacion Superior de Ensenada

INVERSION BIDIMENSIONAL DE
ANOMALIAS DE RESISTIVIDAD
INCLUYENDO EL RELIEVE
TOPOGRAFICO

TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS

OSCAR AUGUSTO BARRIOS LOPEZ

Ensenada Baja California, Mexico. Abril de 1995



Resumen de la tesis que presenta Oscar Augusto Barrios López como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS en GEOFISICA APLICADA. Ensenada, Baja California, México. Abril de 1995.

INVERSION BIDIMENSIONAL DE ANOMALIAS DE RESISTIVIDAD INCLUYENDO EL RELIEVE TOPOGRAFICO

Resumen aprobado por: _____



Dr. Enrique Gómez-Treviño

Director de Tesis

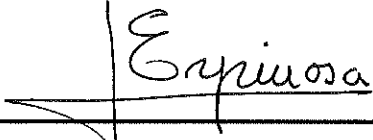
En este trabajo se desarrolla una técnica basada en la transformación conforme de Schwarz-Christoffel en conjunción con un método de inversión, a fin de realizar el modelado inverso de resistividad incluyendo el relieve topográfico. El modelo utilizado supone fuentes lineales de corriente en medios bidimensionales en los que hay bajos contrastes de resistividad. Consecuentemente con el esquema de modelado inverso, se desarrolla un algoritmo de modelado directo de resistividad para fuentes lineales.

La técnica de inversión se aplicó a respuestas obtenidas mediante simulación numérica y modelado físico a escala, así como a datos de campo tomados sobre una zona geotérmica y a mediciones realizadas sobre cavidades subterráneas. Los resultados demuestran que la topografía puede llegar a enmascarar o a multiplicar las respuestas de los cuerpos objeto de estudio. La inclusión de la técnica de mapeo conforme en el esquema de inversión permite recuperar la imagen de los cuerpos subterráneos aún en condiciones de topografía abrupta. Aunque la aproximación supone contrastes pequeños de la resistividad, los resultados son satisfactorios para altos contrastes, como es el caso de cavidades en el subsuelo. Los resultados de la interpretación suponiendo potenciales logarítmicos, demostraron que aún siendo una aproximación, los modelos obtenidos son semejantes a los encontrados suponiendo fuentes puntuales.

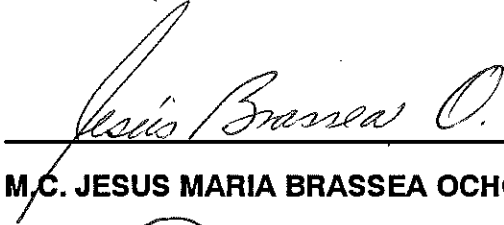
TESIS DEFENDIDA POR: OSCAR AUGUSTO BARRIOS LOPEZ
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



DR. ENRIQUE GOMEZ TREVIÑO.- Director del Comité



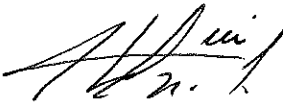
M.C. JUAN MANUEL ESPINOZA CARDEÑA.- Miembro del Comité



M.C. JESUS MARIA BRASSEA OCHOA.- Miembro del Comité



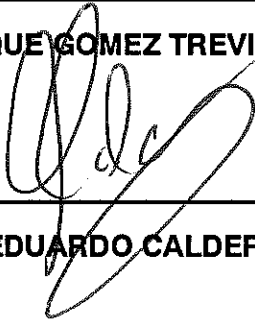
DR. JUAN GARCIA ABDESLEM.- Miembro del Comité



M.C. JOSE LUIS BRISEÑO CERVANTES.- Miembro del Comité



DR. ENRIQUE GOMEZ TREVIÑO.- Jefe del Depto. de Geofísica Aplicada



DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director de Estudios de Posgrado

7 DE ABRIL DE 1995

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**DIVISION CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE GEOFISICA APLICADA**

**INVERSION BIDIMENSIONAL DE ANOMALIAS DE RESISTIVIDAD
INCLUYENDO EL RELIEVE TOPOGRAFICO**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

OSCAR AUGUSTO BARRIOS LOPEZ

Ensenada, Baja California, Abril de 1995

DEDICATORIA

A mis padres:

Oscar y Andina

A mis tíos:

José, Alicia y Carmen

A mis hermanos:

Mario, Claudia, Alicia y Arnoldo

A:

Mario y Daniel, de ellos es el futuro

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Enrique Gómez Treviño, su apoyo total durante mi estancia en CICESE permitió llevar a feliz termino este trabajo.

Al Ministerio de Energía y Minas de Guatemala, por su confianza al brindarme la beca de estudios.

A Lupita por su paciencia y comprensión.

A mis compañeros y amigos mexicanos, su cariño y amistad los llevaré por siempre.

CONTENIDO

	Página
I. INTRODUCCION	1
II. MODELADO DIRECTO BIDIMENSIONAL DE FUENTE LINEAL	
II.1 Introducción	4
II.2 Relaciones básicas	5
II.3 Condiciones de frontera	10
II.4 Solución para el potencial en el dominio del número de onda	11
II.5 Aplicaciones numéricas	15
II.6 Resumen	16
III. INVERSION DE ANOMALIAS RESISTIVAS BIDIMENSIONALES	
III.1 Introduccion	19
III.2 Inversión de datos dipolo-dipolo	19
III.2.1 Planteamiento del problema inverso	20
III.2.2 Resolución del problema inverso	29
III.3 Comparación entre los algoritmos de inversión de fuente lineal y fuente puntual	33
III.4 Resumen	37
IV. MODELADO INVERSO DE ANOMALIAS DE RESISTIVIDAD INCLUYENDO TOPOGRAFIA	
IV.1 Introducción	38
IV.2 El efecto topográfico	39
IV.3 La transformación de Schwarz-Christoffel	41
IV.4 Resultados numéricos	49
IV.5 Resumen	63

CONTENIDO (Continuación)

	página
V. SOBRE LA DETECCION DE CAVIDADES SUBTERRANEAS	
V.1 Introducción	65
V.2 Metodos geofísicos aplicados a la detección de Cavernas	66
V.3 Conclusiones	72
V.4 Resumen	72
VI. APLICACIONES	
VI.1 Introducción	73
VI.2 Modelado físico de cavidades	73
VI.3 Modelado inverso de datos de campo	82
VI.4 Modelado inverso incluyendo topografía	83
VI.5 Resumen	92
VII. CONCLUSIONES	100
BIBLIOGRAFIA	102
APENDICE 1	107
APENDICE 2	111
APENDICE 3	118

LISTA DE FIGURAS

FIGURA		PAGINA
1	Fuente lineal de corriente en una tierra homogénea.	7
2	Variación del potencial en función de la distancia a la fuente de corriente.	9
3	El arreglo electródico dipolo-dipolo.	17
4	Resultados de la simulación numéricas de cavidades. a) Modelo. b) Pseudosección para fuente puntual (contornos cada 2 Ω -m). c) Pseudosección para fuente lineal (contornos cada 2 Ω -m).	18
5	Relaciones geométricas para el campo eléctrico debido a la perturbación en la resistividad de un medio homogéneo.	22
6	Rejilla de discretización	30
7	Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la figura 4.b (contornos cada 5 Ω -m) para diferentes parámetros de suavizamiento (β) y grados de ajuste (rms).	34
8	Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la figura 4.c (contornos cada 5 Ω -m) para diferentes parámetros de suavizamiento (β) y grados de ajuste (rms).	35
9	Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la figura 4.b (contornos cada 5 Ω -m) para diferentes parámetros de suavizamiento (β) y grados de ajuste (rms).	36
10	Efecto topográfico. a) Distribución de las líneas de corriente y superficies equipotenciales en una tierra plana. b) Deformación de las líneas de corriente y equipotenciales debida a una topografía irregular.	40

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

FIGURA		PAGINA
11	El mapeo de un polígono abierto por medio de la transformación de Schwarz-Christoffel.	43
12	Sistema lineal de 3 segmentos.	45
13	Anomalía debida a una colina. a) Modelo topográfico. b) Pseudosección (contornos cada 30 Ω -m).	51
14	Modelo de inversión de los datos de la figura 13.b para $\beta=0.001$ (contornos cada 50 Ω -m).	52
15	Anomalía debida a un valle. a) modelo topográfico. B) Pseudosección (contornos cada 40 Ω -m).	54
16	Efecto de la topografía sobre las superficies equipotenciales y líneas de corriente. Los puntos representan las intersecciones entre las líneas de corriente y equipotenciales.	55
17	Pseudosecciones en el plano W y Z para el modelo de un dique en un valle a) Modelo. b) Plano W (contornos cada 10 Ω -m). c) Plano Z (contornos cada 5 Ω -m).	56
18	Secciones de resistividad en el plano Z de la inversión para fuente lineal de los datos de la figura 17.c. a) Contornos cada 10 Ω -m. b) Contornos cada 10 Ω -m. c) Contornos cada 5 Ω -m.	57
19	Pseudosecciones en el plano W y Z para el modelo de un dique en una colina. a) Modelo. b) Plano W (contornos cada 20 Ω -m). c) Plano Z (contornos cada 5 Ω -m).	59
20	Secciones de resistividad en el plano Z de la inversión para fuente lineal de los datos de la figura 19.C. a) Contornos 40 Ω -m. b) Contornos cada 20 Ω -m. c) Contornos cada 20 Ω -m.	60

FIGURA	LISTA DE FIGURAS (Continuación)	PAGINA
21	Pseudosecciones en el plano W y Z para el modelo de un dique en una pendiente. a) Modelo. b) Plano W (contornos cada $10 \Omega\text{-m}$). c) Plano Z (contornos cada $5 \Omega\text{-m}$).	61
22	Secciones de resistividad en el plano Z de la inversión para fuente lineal de los datos de la figura 21.c. a) Contornos cada $10 \Omega\text{-m}$. b) Contornos cada $10 \Omega\text{-m}$. c) Contornos cada $5 \Omega\text{ m}$.	62
23	Secciones de resistividad en el plano W para $\beta=0.01$ aplicando inversión para fuente lineal del efecto de un dique en una tierra no plana.	64
24	Vistas de la cuba electrolítica utilizada en los ensayos.	74
25	Secciones de resistividad del experimento A para inversión con fuente lineal. Para los tres modelos: contornos cada $5 \Omega\text{-m}$.	76
26	Pseudosecciones para el experimento A (contornos cada $1 \Omega\text{-m}$).	77
27	Secciones de resistividad del experimento B para inversión con fuente lineal. a) Contornos cada $1 \Omega\text{-m}$. b) Contornos cada $2 \Omega\text{-m}$. c) Contornos cada $2 \Omega\text{-m}$. d) Contornos cada $5 \Omega\text{-m}$.	78
28	Pseudosecciones para el experimento B (contornos cada $0.5 \Omega\text{-m}$).	79
29	Secciones de restitividad del experimento C para inversión con fuente lineal. a) Contornos cada $0.4 \Omega\text{-m}$. b) Contornos cada $0.4 \Omega\text{-m}$. c) Contornos cada $1 \Omega\text{-m}$. d) Contornos cada $1 \Omega\text{-m}$.	80
30	Pseudosecciones de resistividad para el experimento C (contornos cada $0.5 \Omega\text{-m}$).	81

FIGURA	LISTA DE FIGURAS (Continuación)	PAGINA
31	Localización de los perfiles dipolo-dipolo en relación a la caverna. Denuncio Sandra, Mina, Nuevo León.	84
32	Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la línea 1, a=3 m. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada 100 Ω -m).	85
33	Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la línea 1, a=3 m. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada 100 Ω -m).	86
34	Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la línea 2, a=3 m. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada 100 Ω -m).	87
35	Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la línea 2, a=3 m. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada 110 Ω -m).	88
36	Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la línea 3, a=3 m. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada 100 Ω -m).	89
37	Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la línea 3, a=3 m. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada 100 Ω -m).	90
38	Detalle de la interpretación de las tres líneas dipolo-dipolo para fuente lineal y $\beta=0.01$. a) Línea 1. b) Línea 2. C) Línea 3. (contornos 100 Ω -m).	91
39	Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano Z). Línea 1, a=500 m Ahuachapán-Chipilapa. Valores de contornos en log 10 de resistividad. (contornos cada 0.1).	94
40	Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente lineal (plano W). Línea 1, a=500 m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en log 10 de resistividad. (contornos cada 0.1).	95

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

FIGURA		PAGINA
41	Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano Z). Línea 1, a=1000 m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en log 10 de resistividad. (contornos cada 0.1).	96
42	Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente lineal (plano W). Línea 1, a=1000 m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa. El Salvador. Valores de contornos en log 10 de resistividad. (contornos cada 0.1).	97
43	Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano W). Línea 1, a=500 m Ahuachapán-Chipilapa. Valores de contornos en log 10 de resistividad. (contornos cada 0.1).	98
44	Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano W). Línea 1, a=1000m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en log 10 de resistividad. (contornos cada 0.1).	99

LISTA DE TABLAS

TABLA		PAGINA
I	Valores de propiedades físicas de cavidades.	66

INVERSION BIDIMENSIONAL DE ANOMALIAS DE RESISTIVIDAD INCLUYENDO EL RELIEVE TOPOGRAFICO

I. INTRODUCCION

El método de resistividad en corriente directa es una técnica ampliamente utilizada en la prospección minera, geohidrológica y geotérmica, y en problemas relacionados con geotecnia y arqueología. El método está basado en la medición de la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie de la tierra debido a la inyección de corriente (directa o de baja frecuencia) por medio de un par de electrodos. La medición de la diferencia de potencial depende de las posiciones relativas entre los electrodos y de la distribución de la resistividad en el subsuelo, la que a su vez es función de la mineralogía y porosidad de las rocas, y de la cantidad y características de los fluidos contenidos en ellas.

En la práctica de campo, la interpretación de las mediciones eléctricas se realiza en términos de la resistividad aparente (ρ_a) definida como:

$$\rho_a = G \frac{\Delta V}{I},$$

donde G es un factor geométrico que depende del dispositivo eléctrico, I es la corriente inyectada y ΔV es la diferencia de potencial medida.

Existe una gran variedad de dispositivos de medición que se clasifican de acuerdo al arreglo geométrico de los electrodos y como se mueven en el campo. Así tenemos los dispositivos simétricos, como el Schlumberger, Wenner, Lee; y arreglos dipolares, como el dipolo-dipolo, el radial, el azimutal, el ecuatorial y el paralelo (Orellana, 1982).

Las mediciones de resistividad se pueden llevar a cabo en dos modalidades: sondeos o perfiles. Los sondeos se emplean en la estimación de la distribución vertical de la resistividad, generalmente bajo el punto central del arreglo electródico; se emplean en ambientes geológicos tales como: cuencas sedimentarias; básicamente, los electrodos se mueven simétricamente respecto al centro del arreglo. En la segunda modalidad, el arreglo electródico se mueve a lo largo de una línea o perfil, detectando así los cambios laterales de la resistividad, esto incluye tanto variaciones verticales como horizontales, por lo que los métodos de interpretación basados en prueba y error, resultan por lo general tediosos y requieren de amplia experiencia para su correcta aplicación. El algoritmo de diferencias finitas de Dey (1976) es el más utilizado para generar respuestas de modelos y compararlas con las mediciones correspondientes. Aunque el algoritmo es bastante eficiente y versátil, se requiere por lo general de varios días de trabajo para generar modelos satisfactorios de una sola línea o perfil de medición. Existen programas automáticos de inversión como el de Tripp *et al.* (1984), pero requieren de grandes sistemas de cómputo por lo que no se utilizan en interpretaciones de rutina. Los métodos asintóticos de inversión de Cavazos-Garza y Gómez-Treviño (1989) y Pérez-Flores (1995) son más eficientes que los anteriores, pero no contemplan los efectos topográficos que en muchos casos distorsionan severamente los modelos obtenidos. Considerando lo anterior, se planteó como objetivo general de la tesis **el estudio de aproximaciones eficientes de ajuste automático que permitieran incluir el efecto de topografía irregular.** Particularmente se planteó:

- a) La adaptación del algoritmo de diferencias finitas propuesto por Dey (1976) para el modelado directo de anomalías de resistividad, a fin de modelar respuestas correspondientes a fuentes lineales, con especial énfasis en el modelado numérico de cavidades.
- b) La solución del problema inverso de resistividad para una fuente lineal en un medio bidimensional, comprobando sus resultados en datos sintéticos y de campo.
- c) El modelado físico de cavidades mediante ensayos en modelos a escala.
- d) La solución al problema de la eliminación del efecto topográfico en mediciones de resistividad eléctrica y su aplicación a datos sintéticos y de campo.

Las tesis está estructurada de forma que se presentan sucesivamente los desarrollos necesarios para alcanzar los objetivos propuestos. En el capítulo II se presentan las bases para el modelado de una fuente lineal de corriente, interpretando la fuente lineal como una aproximación de una fuente puntual cuando se consideran números de onda pequeños.

En el capítulo III se presentan los desarrollos para llegar a la expresión que relaciona la resistividad aparente con la función de resistividad verdadera, su discretización e inversión. Además se presentan pruebas de la aplicación del algoritmo. En el capítulo IV se presenta un estudio de los efectos topográficos en mediciones de resistividad, así como la técnica para su eliminación. El capítulo V presenta una breve revisión de la aplicación de los métodos geofísicos en la detección de cavidades. Finalmente, el capítulo VI muestra los resultados de la aplicación de los conceptos y algoritmos desarrollados en datos sintéticos y de campo.

II. MODELADO DIRECTO BIDIMENSIONAL DE FUENTE LINEAL

II.1 Introducción

Los métodos actuales para el modelado de anomalías de resistividad, generalmente se fundamentan en soluciones numéricas complejas que necesitan del auxilio de equipo de cómputo poderoso y no son ampliamente usadas. Por otra parte, es deseable el desarrollo de técnicas de interpretación cuantitativa que aunque se basen en aproximaciones matemáticas proporcionen resultados cercanos a las soluciones exactas.

Una de estas aproximaciones considera que la resistividad del subsuelo varía bidimensionalmente (la resistividad no varía en la dirección del rumbo de las estructuras), y que en sustitución de electrodos puntuales, se utilizan fuentes lineales de corriente (alambre de gran longitud); convirtiendo un problema de dos y media dimensiones $2\frac{1}{2}D$ (estructura bidimensional pero fuente tridimensional), en un problema completamente bidimensional.

Las fuentes lineales de corriente no son tan ideales como puede pensarse, se han utilizado en la práctica con alguna frecuencia. Más aún, existe una transformación integral que permite convertir datos obtenidos de fuentes convencionales puntuales a datos que se obtendrían de fuentes lineales (Roy y Jain, 1961; Niwas y Upadhyay, 1975) y que ayudan a la reducción de problemas tridimensionales a bidimensionales, facilitando los análisis teóricos.

En este capítulo se presentan modificaciones hechas al plantamiento de Dey y Morrison (1979), a fin de encontrar la distribución del potencial producido por una fuente lineal infinita de corriente sobre una distribución bidimensional de resistividad.

II.2 Relaciones básicas

Considérese un subsuelo isotrópico de resistividad ρ ($\Omega\text{-m}$) en cuya superficie se establece un campo eléctrico estacionario E (V/m), a través de un electrodo lineal de extensión infinita (figura 1). El campo puede expresarse por la relación:

$$\mathbf{E} = -\nabla U, \quad (1)$$

siendo U el potencial eléctrico y debe cumplirse la ley de Ohm para medios isotrópicos:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}, \quad (2)$$

donde \mathbf{J} representa el vector de densidad superficial de corriente (A/m^2) en la tierra.

Ahora bien, el flujo de corriente a través de un elemento de área del alambre, es siempre radial (ver figura 1), y por lo tanto, la corriente (i) que fluye al subsuelo a través de la superficie del alambre es:

$$i = \int_s J \cdot ds, \quad (3)$$

$$i = \pi r J \int_l dl$$

$$i = \pi J l r,$$

sustuyendo (2) en (3) se obtiene

$$E = \frac{\rho I}{\pi r}, \quad (4)$$

donde I representa la densidad lineal de corriente (A/m). La ecuación (4) es la expresión para el campo eléctrico de una fuente lineal.

Por superposición, la diferencia de potencial entre dos puntos (M,N) cualesquiera, localizados a distancias r_1, r_2 respecto de la fuente (figura 1) viene dada por:

$$U_N^M = - \int_N^M E \cdot dr \quad (5)$$

$$U_N^M = \frac{\rho I}{\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right), \quad (6)$$

si en vez de considerar diferencias de potencial, se consideran potenciales absolutos, y por convención, dar el valor cero al potencial en el punto $r_2=1$, se obtiene:

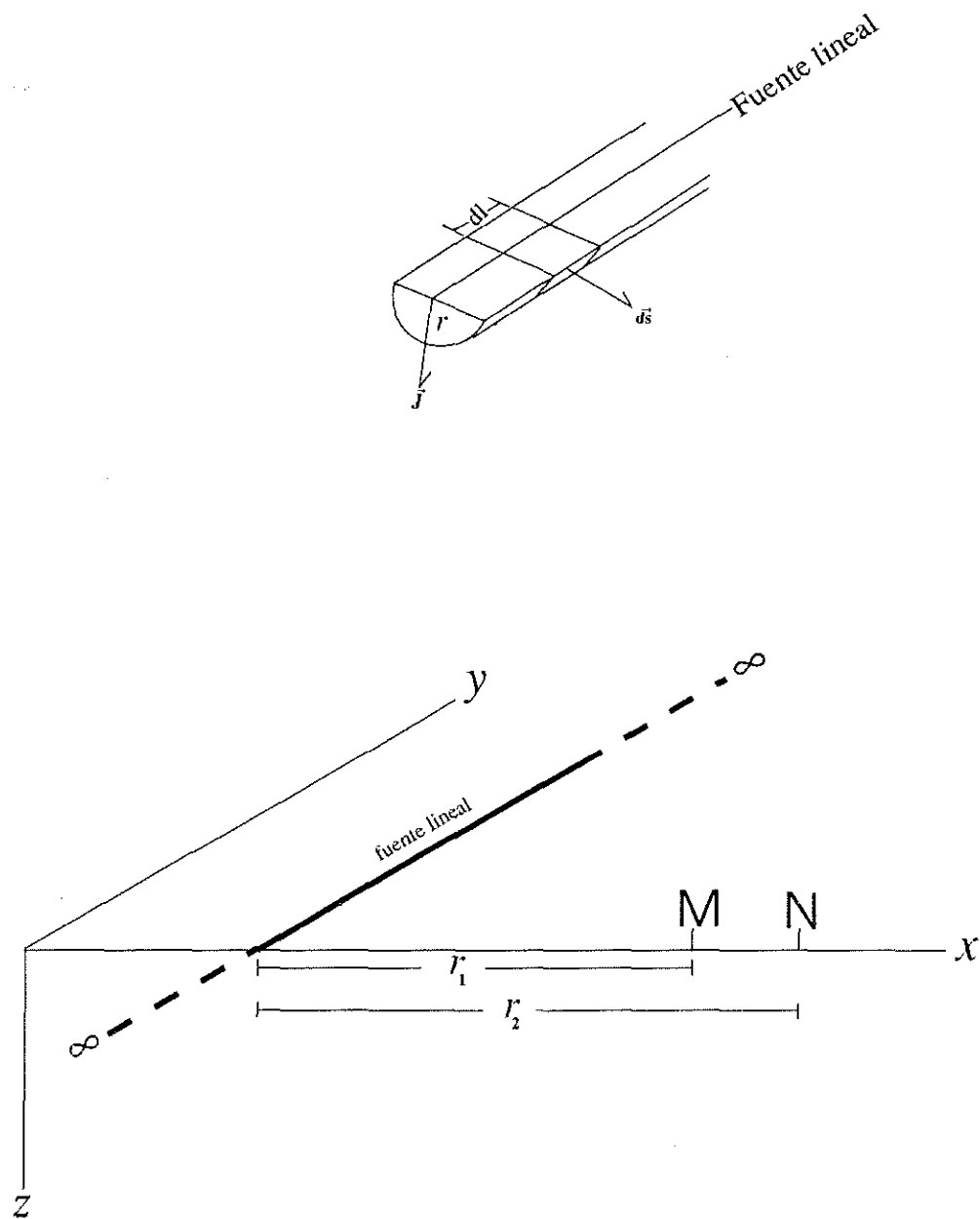


Figura 1. Fuente lineal de corriente en una tierra homogénea.

$$U(r) = \frac{\rho I}{\pi} \text{Ln}\left(\frac{I}{r}\right). \quad (7)$$

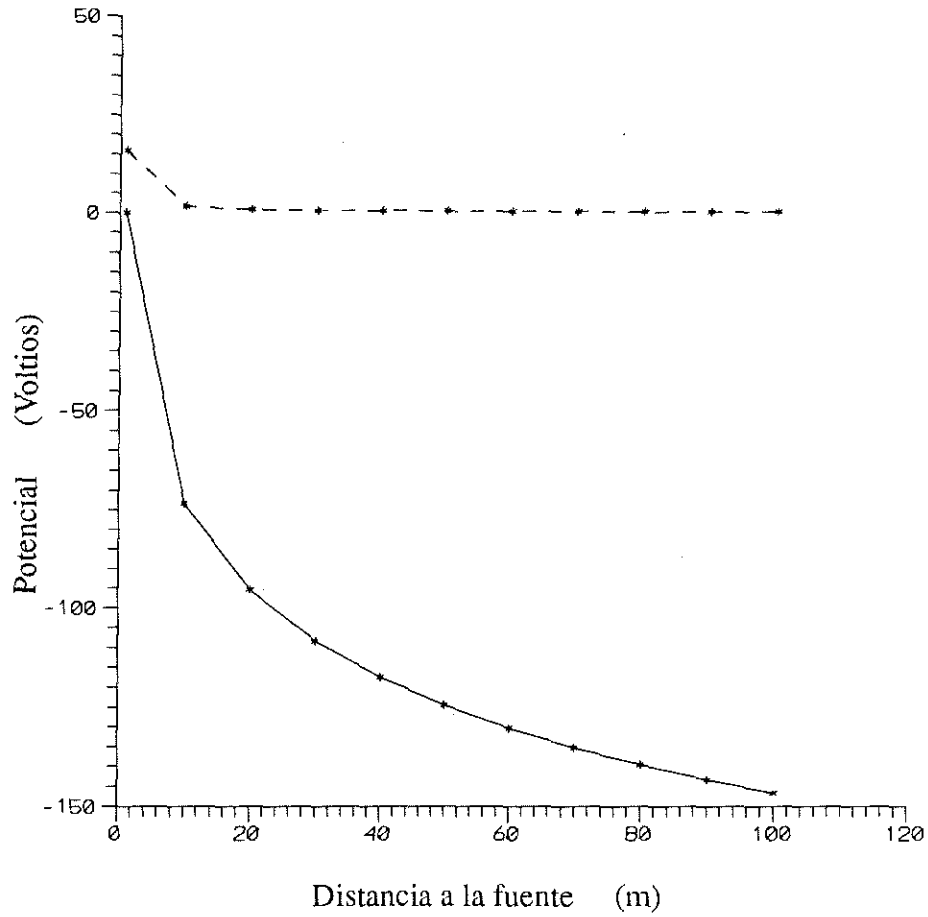
Si de la ecuación (7) se despeja la resistividad y se considera un semi-espacio no homogéneo en resistividad, nos queda:

$$\rho_a = \frac{\pi}{\text{Ln}(I/r)} \frac{U}{I}. \quad (8)$$

En este punto es importante comparar el comportamiento del potencial de una fuente lineal con respecto a una fuente puntual. La figura 2 muestra esta relación, conforme la distancia a la fuente va aumentando, el potencial para la fuente puntual decae a cero, mientras que para el caso lineal, el potencial se va haciendo cada vez más negativo. Esta diferencia entre los dos tipos de fuente se debe en gran parte a los puntos de asignación para el valor nulo del potencial. Como veremos más adelante, los valores de resistividad aparente son bastante parecidos en ambos casos para modelos simples o complejos.

Aplicando el principio de conservación de la carga, la ecuación de continuidad para una fuente lineal de corriente en el origen y paralela al eje y:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial q}{\partial t} \delta(x_0) \delta(z_0), \quad (9)$$



--- Fuente puntual.

— Fuente lineal.

Figura 2. Variación del potencial en función de la distancia a la fuente de corriente.

donde q es la densidad de carga y δ es la función delta de Dirac y (x_0, z_0) es el punto de inyección de la corriente. Considerando un medio en el que no hay variaciones de la conductividad y potencial a lo largo del eje y :

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial \sigma(x, y, z)}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

y sustituyendo (1) y (2) en (9) obtenemos:

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla U(x, z)] = \frac{\partial q}{\partial t} \delta(x_0) \delta(z_0), \quad (11)$$

donde σ es la conductividad eléctrica (inverso de la resistividad).

II.3 Condiciones de frontera

La solución numérica de la ecuación (11) se sujeta a las siguientes condiciones de frontera (Dey y Morrison, 1979)

- i) $U(x, z)$ debe ser continua a través de cada frontera de $\sigma(x, z)$.
- ii) La componente normal de $J \left(\equiv \sigma \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)$ debe ser continua a través de cada frontera.

II.4 Solución para el potencial en el dominio del número de onda

En el trabajo de Dey y Morrison (1979) se resuelve la ecuación (11) para el potencial en tres dimensiones $U(x, y, z)$ debido a una fuente puntual en $(0, 0, 0)$ sobre una distribución bidimensional de conductividad $\sigma(x, z)$, transformando el potencial al dominio del número de onda del espacio de Fourier $\tilde{U}(x, K_y, z)$, a partir de las ecuaciones de transformación:

$$\tilde{f}(x, K_y, z) = \int_0^{\infty} f(x, y, z) \cos(K_y y) dy \quad (12)$$

y

$$f(x, K_y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}(x, y, z) \cos(K_y y) dK_y, \quad (13)$$

siendo la ecuación transformada, la expresión:

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \tilde{U}(x, K_y, z)] + K_y^2 \sigma(x, z) \nabla \tilde{U}(x, K_y, z) = \tilde{Q} \delta(x_s) \delta(z_s) \quad (14)$$

para un valor fijo de K_y . El parámetro \tilde{Q} es la densidad de corriente en el espacio (x, K_y, z)

dado por:

$$\tilde{Q} \delta(x_s) \delta(z_s) = \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial t} \delta(x_s) \delta(z_s). \quad (15)$$

La densidad de corriente se relaciona con corriente inyectada en (x_s, y_s) por:

$$\tilde{Q} = \frac{I}{2\Delta A} \quad (16)$$

donde ΔA representa el área alrededor del punto de inyección. La solución para $\tilde{U}(x, K_y, z)$ se encuentra derivando las ecuaciones de diferencias, discretizando apropiadamente el espacio (x, K_y, z) . En este espacio, la variación $1/r$ del potencial puntual se expresa como:

$$\tilde{U}(x, K_y, z) = A K_0(K_y r), \quad (17)$$

donde K_0 es la función de Bessel de orden cero, A es una constante y r la distancia a la fuente. Para K_y muy pequeños la expansión de la serie para la función Bessel tiende al logaritmo natural del argumento (Arfken, 1985), es decir a la respuesta del potencial para una fuente lineal.

Para el caso de fuente lineal, la ecuación transformada para el potencial se convierte en:

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \tilde{U}(x, 0, z)] = -\tilde{Q} \delta(x_s) \delta(z_s). \quad (18)$$

Ya que la simulación del medio se restringe al semiespacio inferior conductivo, es necesario especificar las condiciones de frontera en todos los puntos (x, z) a lo largo del límite de la región que cumple con la solución para el potencial.

Para $z=0$, se utiliza la condición tipo Neumann

$$\sigma \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} = 0. \quad (19)$$

La extensión del semiespacio inferior hasta $x = \pm\infty$ y $z = \infty$ se hace extendiendo la malla tan lejos de las fuentes e inhomogeneidades, como sea posible, de tal forma que el potencial se aproxime a un comportamiento asintótico. Dey y Morrison (1979) utilizan una condición mixta de frontera de la forma

$$\frac{\partial \tilde{U}(x, K_y, z)}{\partial \eta} + \alpha \tilde{U}(x, K_y, z) \cos\theta = 0 \quad (20)$$

con

$$\alpha = \frac{K_y K_1(K_y r)}{K_0(K_y r)},$$

donde θ es el ángulo entre el radio-vector y η la normal hacia afuera, r es la distancia radial a la fuente, α es una constante, y K_0 y K_1 las funciones modificadas de Bessel de orden cero y orden uno, respectivamente. La constante α depende del número de onda K_y y corresponde al caso de fuente puntual.

Para nuestro caso de fuente lineal el potencial $\tilde{\phi}$ tiene la forma:

$$\tilde{U}(x, K_y, z) = -A \ln(r) \quad (21)$$

o sea;

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} = -A \frac{I}{r} \cos(\theta) \quad (22)$$

con:

$$\alpha = -\frac{I}{r \ln(r)} .$$

La ecuación (22), es la condición de frontera aplicada en los lados derecho, izquierdo y base de la malla, tal condición aprovecha el comportamiento físico del potencial a distancias grandes y no requiere una suposición previa de la forma de la solución. En este trabajo se utiliza la misma ecuación (20), pero adaptada para fuentes lineales.

En el programa de Dey y Morrison (1979), una vez obtenidos los potenciales transformados para varios K_y , estos son transformados de nuevo al dominio (x,y,z) por medio de la ecuación (13). Para fuentes lineales, no se realiza la transformada inversa de Fourier dado que estamos considerando un solo número de onda.

Una situación que debe tomarse en cuenta en los cálculos es el efecto de los factores de escala en los parámetros: En el caso de una fuente puntual se requiere escalar los números de onda pues el factor de escala de las distancias afecta proporcionalmente la medición de voltaje, así para un factor de normalización de dimensiones λ :

$$\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \sum \frac{I}{r / \lambda}$$

o bien,

$$\Delta V = \frac{\rho I x}{2\pi} \sum \frac{l}{r} \quad (23)$$

mientras que para una fuente lineal:

$$\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \sum L_n \frac{l}{r / x}$$

o bien,

$$\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \sum L_n \frac{l}{r}. \quad (24)$$

En la ecuación (24) el voltaje no es afectado, ya que $L_n(x)$ se elimina en cada punto de medición y por lo tanto, pueden eliminarse los factores de escala que se han usado para el modelado de fuente puntual.

Con el fin de utilizar el programa original de Dey (1976), se procedió a modificarlo para obtener el modelado directo para fuentes lineales en medios bidimensionales, adaptando las condiciones de frontera de la manera ya descrita.

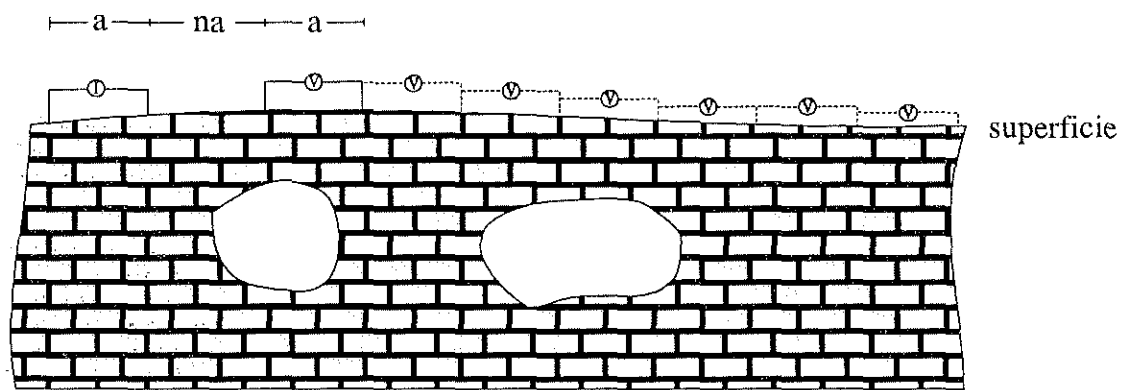
II.5 Aplicaciones numéricas

Se realizaron algunas pruebas para comprobar el funcionamiento del algoritmo para el modelado directo de fuente lineal. En todas se modelaron cavidades y los resultados fueron comparados con los de fuente puntual. Contrastes de resistividad del orden de 10^4 fueron

suficientes para simular cavidades vacías dentro de un semi-espacio de resistividad uniforme de $6 \Omega\text{-m}$. En el ejemplo que se presenta, simularon 5 cavernas de diferentes tamaños usando un arreglo electródico tipo dipolo-dipolo (figura 3); la solución para una malla de 115×34 nodos (=3910 nodos) es obtenida para 20 fuentes lineales y 20 fuentes puntuales. Los resultados se muestran en forma de pseudosecciones de resistividad aparente. La característica más importante de la figura 4 es la semejanza entre las pseudosecciones de fuente lineal y puntual, misma que se observó en todos los casos. Es decir, la respuesta en resistividad es casi la misma para ambos tipos de fuente.

II.6 Resumen

Se presentaron los desarrollos necesarios para la adaptación de un algoritmo de modelado directo de fuentes puntuales de corriente al modelado de fuentes lineales, así como un ejemplo que muestra la gran similitud en las respuestas de un modelo de cavidades para ambos tipos de fuentes de corriente. Utilizando el mismo modelo de resistividad, el algoritmo de fuente lineal es 5 veces más rápido que el original para fuente puntual.



$$\rho_s = \pi a n(n+1)(n+2) \frac{\Delta V}{I} \quad [\Omega \cdot m]$$

donde:

I =corriente inyectada (A).

ΔV =diferencia de potencial medida (V).

a =separación entre los electrodos de corriente y potencial (m).

n =separación entre los dipolos de corriente y potencial
medida en fracción de a .

Figura 3. El arreglo electródico dipolo-dipolo.

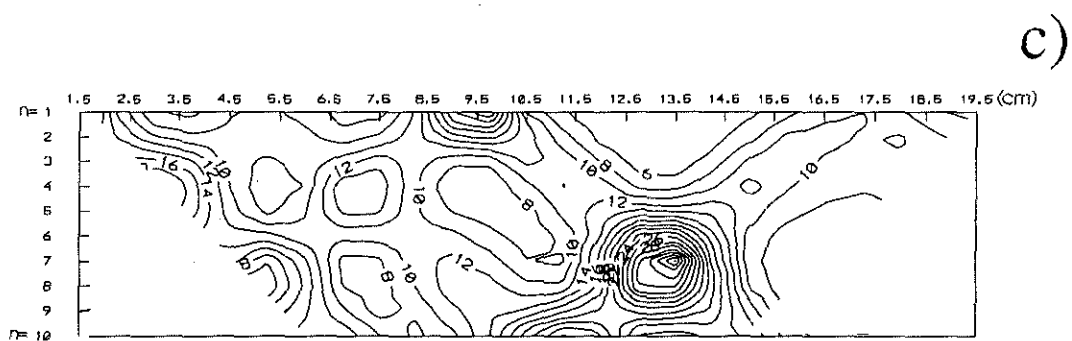
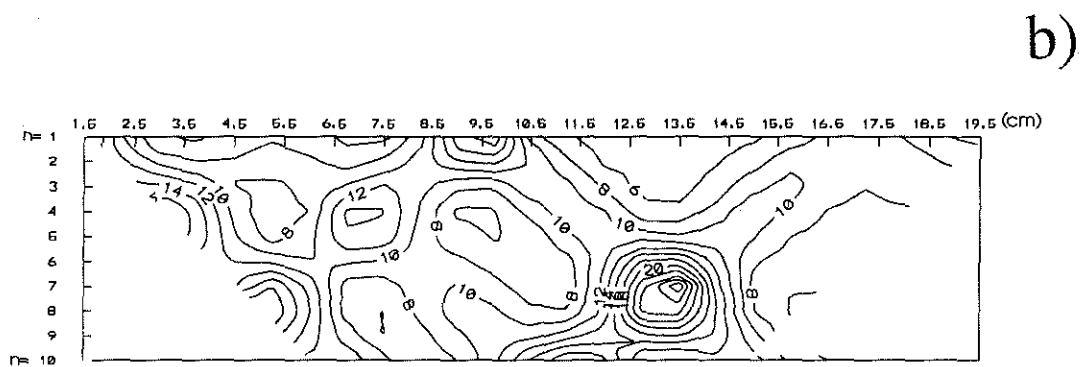
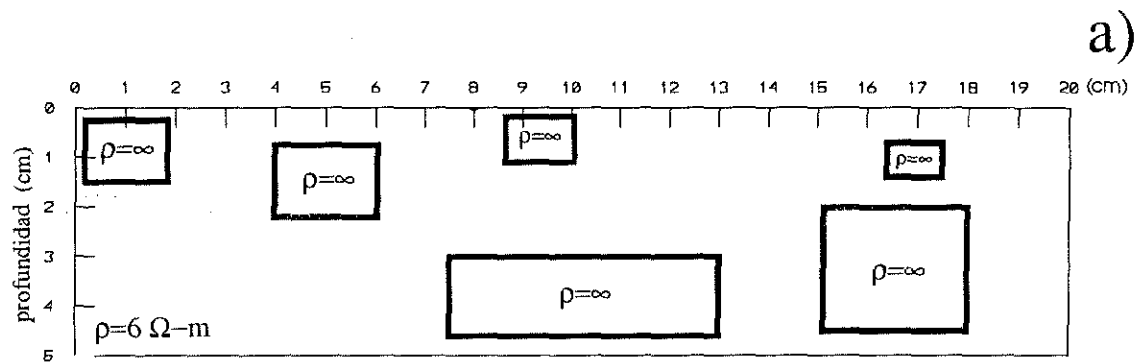


Figura 4. Resultados de la simulación numérica de cavidades. a) Modelo. b) Pseudosección para fuente puntual (contornos cada 2 Ω -m). c) Pseudosección para fuente lineal (contornos cada 2 Ω -m).

III. INVERSION DE ANOMALIAS RESISTIVAS BIDIMENSIONALES

III.1 Introducción

Suponiendo una fuente lineal de corriente, se desarrolla una relación que permite obtener la resistividad aparente como un promedio ponderado de la distribución de resistividad en el subsuelo. A partir de esta, se propone un algoritmo de inversión para la obtención de la distribución de resistividades. Finalmente, dicho algoritmo es aplicado a la inversión de datos sintéticos, y sus resultados son comparados con los obtenidos para la inversión de los mismos modelos sintéticos, pero simulando fuentes puntuales.

III.2 Inversión de datos dipolo-dipolo

Estimar la distribución espacial de la resistividad eléctrica, a través de mediciones hechas sobre la superficie de la tierra, involucra el desarrollo de modelos del subsuelo que de alguna manera reproduzcan las observaciones. La determinación de dichos modelos puede realizarse de dos maneras: en la primera, se propone un modelo de distribución de la resistividad, se calcula su respuesta en superficie, y se compara con los datos, si las observaciones no se ajustan, se modifican a voluntad los parámetros del modelo (resistividades, espesores) hasta encontrar el mejor ajuste; en la segunda, se parte de los datos de campo hasta llegar al modelo que mejor los reproduzca, bajo ciertos criterios automáticos de ajuste y estabilidad; a esto generalmente se le conoce como la solución al problema inverso.

III.2.1 Planteamiento del problema inverso

Después de realizar las mediciones, y una vez calculadas las resistividades aparentes, el siguiente paso es encontrar la distribución de resistividades del subsuelo. Los aspectos teóricos pueden tratarse a partir de la ecuación de continuidad, hasta desarrollar una expresión que relacione la resistividad aparente y la resistividad verdadera, y luego usarla en la resolución del problema directo o el inverso (Gómez-Treviño, 1986; Pérez-Flores, 1995; Cavazos-Garza, 1986):

$$\delta E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = - \int_{V'} \mathbf{E}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\delta \rho(\mathbf{r}')}{\rho^2(\mathbf{r}')} dv', \quad (25)$$

donde:

\mathbf{r} , ubicación del electrodo emisor.

\mathbf{r}_0 , ubicación del electrodo receptor.

\mathbf{r}' , vector de posición para un punto dentro de la tierra (ver figura 5).

$\delta \rho$, es el contraste o perturbación en la resistividad eléctrica, o sea la diferencia entre la resistividad del medio y la resistividad anómala $\delta \rho = \rho_0 - \rho(\mathbf{r}')$.

$\delta E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, es el campo eléctrico medido menos el campo eléctrico del medio sin la presencia del cuerpo perturbador.

$E(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)$, es el campo eléctrico dentro del cuerpo perturbador.

$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, es la función de Green para el campo eléctrico sin la presencia del cuerpo. Este es un tensor de 2do. orden que representa el campo eléctrico en cada dirección x, y, z , debido a un dipolo orientado en cada eje.

Debido a que el campo eléctrico es conservativo, es posible expresar el campo eléctrico en función del potencial $\phi(\mathbf{r}', r_0)$, y reducir las componentes de $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para expresarlo como el potencial $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Además tomando en cuenta una fuente lineal de corriente en un medio bidimensional obtenemos:

$$\delta \phi(\mathbf{r}, r_0) = \frac{1}{I} \int_{S'} \nabla \phi(\mathbf{r}', r_0) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\delta \rho(\mathbf{r}')}{\rho^2(\mathbf{r}')} ds', \quad (26)$$

donde ϕ representa el potencial medido dentro del cuerpo y debido a un polo eléctrico como fuente, y ψ , el potencial medido en el receptor por un polo y debido a los tres dipolos de la función de Green.

El potencial debido a un polo eléctrico lineal sobre un semi-espacio homogéneo es:

$$\phi(\mathbf{r}, r_0) = \frac{\rho I}{\pi} \text{Ln} \frac{1}{|\mathbf{r} - r_0|}, \quad (27)$$

y para un semi-espacio no homogéneo, la resistividad aparente se expresa como:

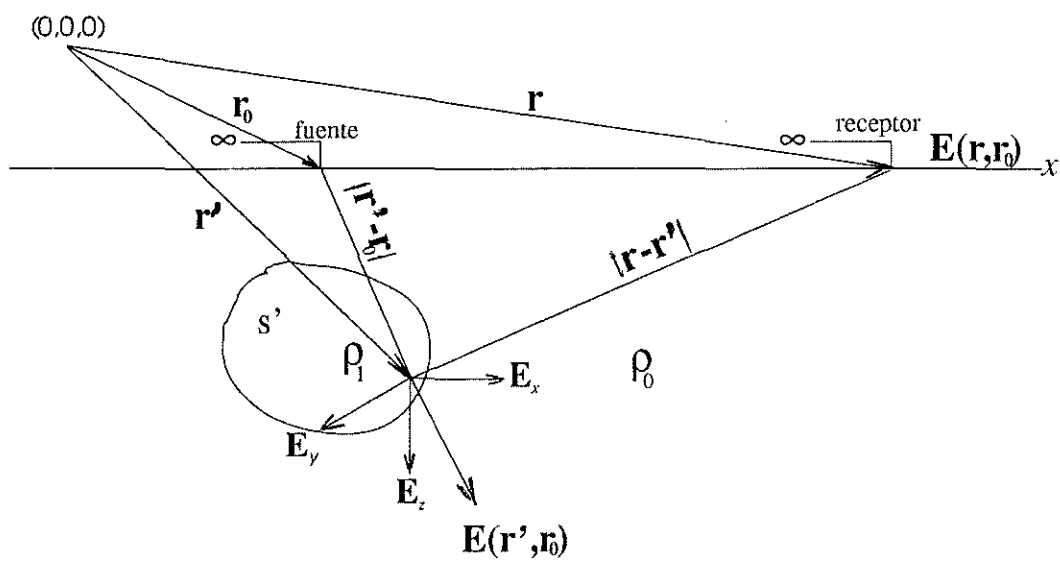


Figura 5. Relaciones geométricas para el campo eléctrico debido a la perturbación en la resistividad de un medio homogéneo.

$$\rho_a = \left(Ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right)^{-1} \frac{\pi}{I} \phi, \quad (28)$$

considerando perturbaciones en ϕ , y sustituyendo la ecuación (27) en (26) se obtiene:

$$\delta\rho_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\pi}{I^2} \left(Ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right)' \int_{s'} \nabla\phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\delta\rho(\mathbf{r}')}{\rho^2(\mathbf{r}')} ds'. \quad (29)$$

Esta es una ecuación integral de Fredholm de segunda especie, misma que puede usarse para el modelado directo de cualquier tipo de distribución de resistividades en el subsuelo. La resolución del problema inverso en términos de la ecuación (29) exige un esfuerzo computacional muy grande, puesto que es necesario resolver numéricamente para ϕ y para ψ . Sin embargo, si suponemos que la resistividad del semi-espacio sobre el que se realizan las mediciones, no varía mucho con respecto al semi-espacio homogéneo (ρ_0), entonces ϕ , que es el potencial dentro del cuerpo en el medio perturbado, se convierte en el potencial medido en el espacio ocupado por el cuerpo (s'), pero sin la presencia del cuerpo. Es decir, es el potencial en un semi-espacio homogéneo medido en s' . De esta forma, se conocen ambos potenciales (ψ se obtiene del problema directo), y se puede calcular $\rho(\mathbf{r}')$ en s' por algún método de inversión.

Desarrollando las expresiones para los gradientes del potencial ϕ debido a una fuente lineal en \mathbf{r}_0 , y del potencial ψ debido a un polo en \mathbf{r} , y medidos ambos en \mathbf{r}' :

$$\nabla\phi(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') = -\frac{\rho I}{\pi} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^2} \quad (30)$$

$$\nabla\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\rho I}{\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (31)$$

sustituyendo (30) y (31) en (29) se obtiene:

$$\delta\rho_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \pi \left[\ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right]^{-1} \int_{s'} \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \delta\rho(\mathbf{r}') ds', \quad (32)$$

La ecuación (32) relaciona linealmente los cambios en la resistividad aparente con las perturbaciones en la resistividad verdadera y puede utilizarse en un algoritmo de inversión. Sin embargo, en este trabajo se propone la utilización de otra ecuación muy parecida que se describe a continuación y que tiene la ventaja de que relaciona directamente los valores de resistividad con las mediciones, en lugar de perturbaciones en las mismas.

Considérese la ecuación desarrollada por Gómez-Treviño (1987) para el campo eléctrico:

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\int_v E(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \cdot G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{d\mathbf{y}'}{\rho(\mathbf{r}')}. \quad (33)$$

$E(r', r_0)$ es el campo dentro de la tierra, y $G'(r, r')$ es la función de Green considerando toda la estructura (semi-espacio y heterogeneidades de resistividad). Nótese que la ecuación (33) relaciona la resistividad con el campo medido, a diferencia de la ecuación (25), que relaciona perturbaciones en los campos medidos con perturbaciones en la resistividad.

Aún cuando la ecuación (33) podría parecer de más ventaja que la ecuación (25), el no conocer la función de Green de toda la estructura, la hace impráctica. Sin embargo, si se linealiza, es decir, si se consideran bajos contrastes de resistividad, $E(r', r_0)$ representaría el campo dentro de un semi-espacio homogéneo y $G'(r, r')$, el campo eléctrico debido a tres dipolos dentro de este semi-espacio.

Aplicando el desarrollo usado en la deducción de la ecuación (26) a la ecuación (29), obtenemos la siguiente expresión:

$$\phi(r, r_0) = \frac{I}{I_s} \int \nabla \phi(r', r_0) \cdot \nabla \psi(r, r') \frac{ds'}{\rho(r')} \quad (34)$$

Sustituyendo las ecuaciones (30) y (31) en la ecuación (34) y considerando un medio no homogéneo, la ecuación queda:

$$\rho_a(r, r_0) = \frac{1}{\pi} L \mu \left[\frac{1}{r - r_0} \right]^L \int_s \frac{(r_0 - r') \cdot (r - r')}{|r' - r_0|^2 |r - r'|^2} \rho(r') ds' \quad (35)$$

La diferencia entre las ecuaciones (35) y (32), es que en la primera, la integración es sobre todo el área (s), mientras que en la ecuación (32), la integral se calcula sobre el área s' del cuerpo. Así, ambas ecuaciones pueden usarse, tanto para modelado directo, como para modelado inverso.

Una característica de la ecuación (35) es que si se aplica a un medio homogéneo:

$$\rho(r, r_0) = \rho(r') = \rho_0$$

y por lo tanto, se cumple que:

$$\frac{1}{\pi} L \eta \left[\frac{1}{r - r_0} \right]^{-1} \int_s \frac{(r_0 - r') \cdot (r - r')}{|r' - r_0|^2 |r - r'|^2} \rho(r') ds' = 1. \quad (36)$$

De esta observación obtenemos la ecuación (32) haciendo

$$\rho(r') = \rho_0 + \delta \rho(r').$$

La expresión (35) puede ser simplificada, si se considera la geometría de los arreglos dipolares colineales, corrientemente usados en el método de corriente continua.

Para llegar a esta expresión se toman en cuenta primero, dos electrodos o polos; un emisor y un receptor, y enseguida se sustituye en la expresión (34), las ecuaciones (30) y (31) para obtener:

$$\phi(r, r_0) = \frac{I}{\pi^2} L\eta \left[\frac{1}{|r - r_0|} \right]^{-1} \int_S \frac{(r_0 - r') \cdot (r - r')}{|r' - r_0|^2 |r - r'|^2} \rho(r') ds', \quad (37)$$

La diferencia de potencial entre 2 electrodos (M, N), producida por dos electrodos lineales de corriente (A, B) situados sobre la superficie de la tierra es:

$$\Delta V = \phi(x_A, x_M) - \phi(x_B, x_M) - \phi(x_A, x_N) + \phi(x_B, x_N),$$

donde x_i ($i = A, B, M, N$) representa las posiciones de los electrodos de corriente y potencial.

Para el caso particular del arreglo colineal dipolo-dipolo sobre un semi-espacio homogéneo:

$$\Delta V = \frac{\rho I}{\pi} \left[L\eta \frac{I}{|x_A - x_M|} - L\eta \frac{I}{|x_B - x_M|} - L\eta \frac{I}{|x_A - x_N|} + L\eta \frac{I}{|x_B - x_N|} \right] \quad (38)$$

o bien:

$$\Delta V = K \rho I$$

con:

$$K = \frac{I}{\pi} L\eta \left[\frac{|x_A - x_M| |x_B - x_N|}{|x_A - x_N| |x_B - x_M|} \right].$$

Si ahora se aplica la ecuación (38) a un medio no homogéneo, como en casos anteriores, tendremos la expresión para la resistividad aparente.

Sustituyendo la ecuación (37) en la ecuación (38):

$$\rho_a(x_A, x_B, x_M, x_N) = K^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x_A, x_B, x_M, x_N, r') \rho(x, z) dx dz, \quad (39)$$

donde:

$$M(x_A, x_B, x_M, x_N, r') = M(x_A, x_M, r') - M(x_A, x_N, r') - M(x_B, x_M, r') + M(x_B, x_N, r')$$

y

$$M(x_i, x_j, r') = \frac{(r_i - r') \cdot (r_j - r')}{|r' - r_i|^2 |r_j - r'|^2}.$$

Dado que en el método de resistividad, la sensibilidad es aproximadamente la misma para conductores y resistivos, es necesario que la ecuación usada para invertir tome en cuenta los logaritmos de las resistividades, o sea:

$$\text{Log } \rho_a(x_A, x_B, x_M, x_N, r') = K^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x_A, x_B, x_M, x_N, r') \text{Log } \rho(x', z') dx' dz'. \quad (40)$$

$$M(x_A, x_B, x_M, x_N, r') = \frac{(r_0 - r') \cdot (r - r')}{|r' - r_0|^2 |r - r'|^2}.$$

La ecuación (40) es la expresión final en la que se basa la inversión de datos dipolo-dipolo considerando que en el subsuelo no existen cambios bruscos de resistividad.

Para llevar a cabo la implementación numérica de la ecuación (40) el semiplano $X-Z$ se discretiza en una malla rectangular uniforme (figura 6), los espesores para cada capa son determinados siguiendo un criterio logarítmico de resolución. Es decir, se puede resolver mejor, anomalías pequeñas en superficie y a profundidad solo se resolverán las anomalías más grandes. Se considera que la resistividad es uniforme en cada prisma. La ecuación (40) es resuelta para cada medición, integrando sobre subdivisiones hechas en cada prisma (para lograr un mejor ajuste), ya que la resistividad es uniforme en cada prisma; la propiedad de la ecuación (36), permite un control efectivo sobre la forma como debe realizarse la discretización, un resultado que varíe en $\pm 2\%$ del valor de 1, se considera adecuado.

III.2.2 RESOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO

La ecuación (40) puede reescribirse en forma discreta para un número Q de mediciones y un número P de prismas como:

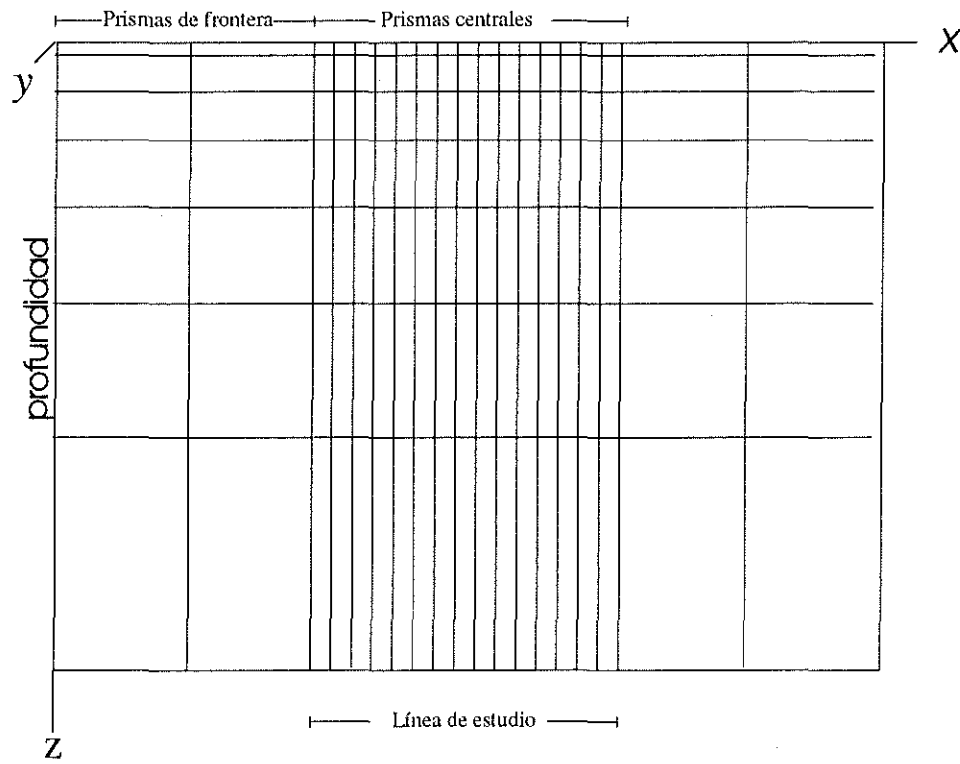


Figura 6. Rejilla de discretización.

$$\rho_a(r_i) = K_i \sum_{j=1}^p M(r_0, r_i, r'_j) \rho_j \Delta s_j, \quad i=1,2,3\dots Q \quad (41)$$

que reducida a su forma matricial se expresa como

$$\rho_a = A \rho_v \quad \text{con } P > Q. \quad (42)$$

Obtener el modelo de resistividades verdaderas (ρ_v) a partir de ciertas mediciones (ρ_a), cuando el número de incógnitas es mayor que el número de datos, es un problema de estimación de parámetros. En el mejor de los casos, cuando no existe error en los datos, un sistema de ecuaciones con mayor número de incógnitas que de ecuaciones, no tiene solución única. Por lo tanto, del número infinito de posibles soluciones, es necesario escoger aquella que cumpla con ciertos requisitos de ajuste y estabilidad.

En este trabajo la distribución de resistividades se encuentra usando programación cuadrática (Gill *et al.*, 1986), la cual permite minimizar la norma cuadrática de los residuales junto con las derivadas espaciales de los parámetros, según desarrollos de Pérez-Flores (1995), presentados en el Apéndice 1. Es decir, se busca una distribución de resistividades tal que, ajuste los datos y cuyos valores estén dentro de un rango establecido, y además que sea suave, en el sentido de que no hallan cambios bruscos en la resistividad entre prismas adyacentes.

La función objetivo a minimizar es:

$$F = \|Y - AX\|^2 + \beta \|DX\| \quad (43)$$

sujeta a

$$a_i < X_i < b_i ,$$

donde:

Y = Mediciones de resistividad aparente.

X = Incognitas (resistividad verdadera).

A = Matriz de sensibilidad.

D = Matriz de suavizamiento.

β = Parámetro de suavizado.

El parámetro β es el factor que controla el peso que el algoritmo otorga a la minimización de las derivadas espaciales de la resistividad. Es decir, conforme el factor de suavizamiento aumenta, la solución será cada vez más suave, permitiendo así obtener modelos o imágenes de resistividad con diferentes grados de ajuste y suavizamiento. Obsérvese que para $\beta=0$, la función objetivo se reduce a mínimos cuadrados estándar. Pérez-Flores y Gómez-Treviño (1995) describen la aplicación de este método, para el caso de fuentes puntuales, a una serie de datos de dipolo-dipolo tomados en el área geotérmica de Ahuachapán-Chipilapa en la república de El Salvador.

III.3 Comparacion entre los algoritmos de inversion de fuente lineal y fuente puntual

El algoritmo para la inversión de mediciones de resistividad de fuente lineal discutido en el apartado III.2 se implementó numéricamente, realizándose algunas pruebas para comprobar su funcionamiento y grado de resolución. Consecuentemente con el capítulo anterior, se presentan los resultados de la inversión de los datos de la pseudosección que de la figura 4.c. De igual manera, las resistividades de la figura 4.b fueron invertidas usando un algoritmo para la inversión de datos de fuentes puntuales (Pérez-Flores,1995). En las figuras 7 y 8 se incluyen los resultados de ambos tipos de inversiones con diferentes grados de suavizamiento. La semejanza entre las figuras 7 y 8 es palpable, ambas recuperan aceptablemente el modelo sintético, y muestran un mejoramiento paulatino en la definición de las anomalías conforme disminuye el parámetro de suavizamiento β . El algoritmo de fuente lineal también fue aplicado en la inversión de los datos de la pseudosección 4.b; las secciones se muestran en la figura 9. El grado de definición de las anomalías en esta figura, es similar a la alcanzada en la figura 6, aunque los datos son puntuales, la interpretación basada en el algoritmo de fuente lineal define las cavidades en el mismo orden que el algoritmo de fuente puntual. En general, en los casos de modelado numérico de cavidades, el algoritmo basado en contrastes pequeños de resistividad ha dado muy buenos resultados.

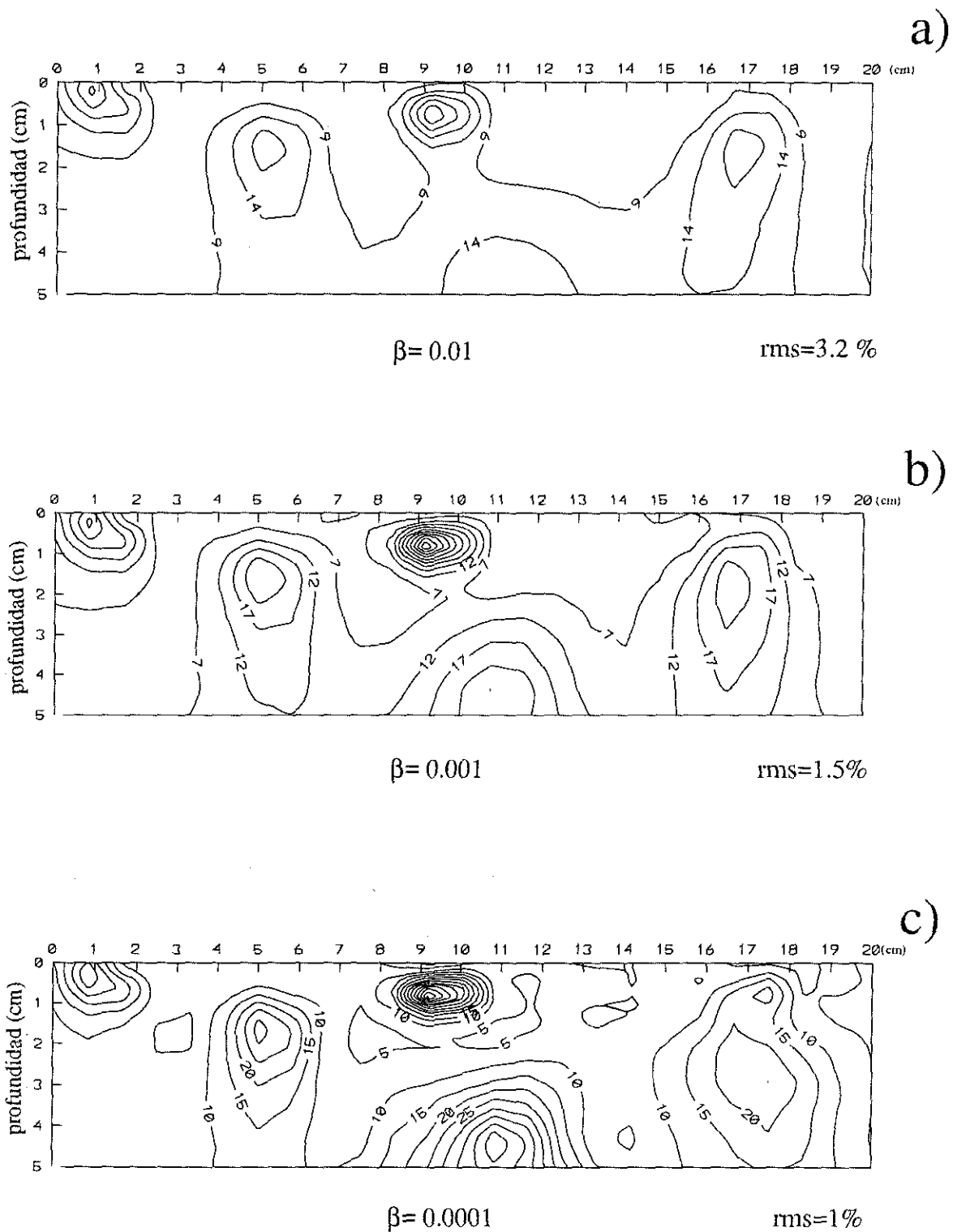


Figura 7. Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la figura 4.b (contornos cada 5 Ω -m) para diferentes parámetros de suavizamiento (β) y grados de ajuste (rms).

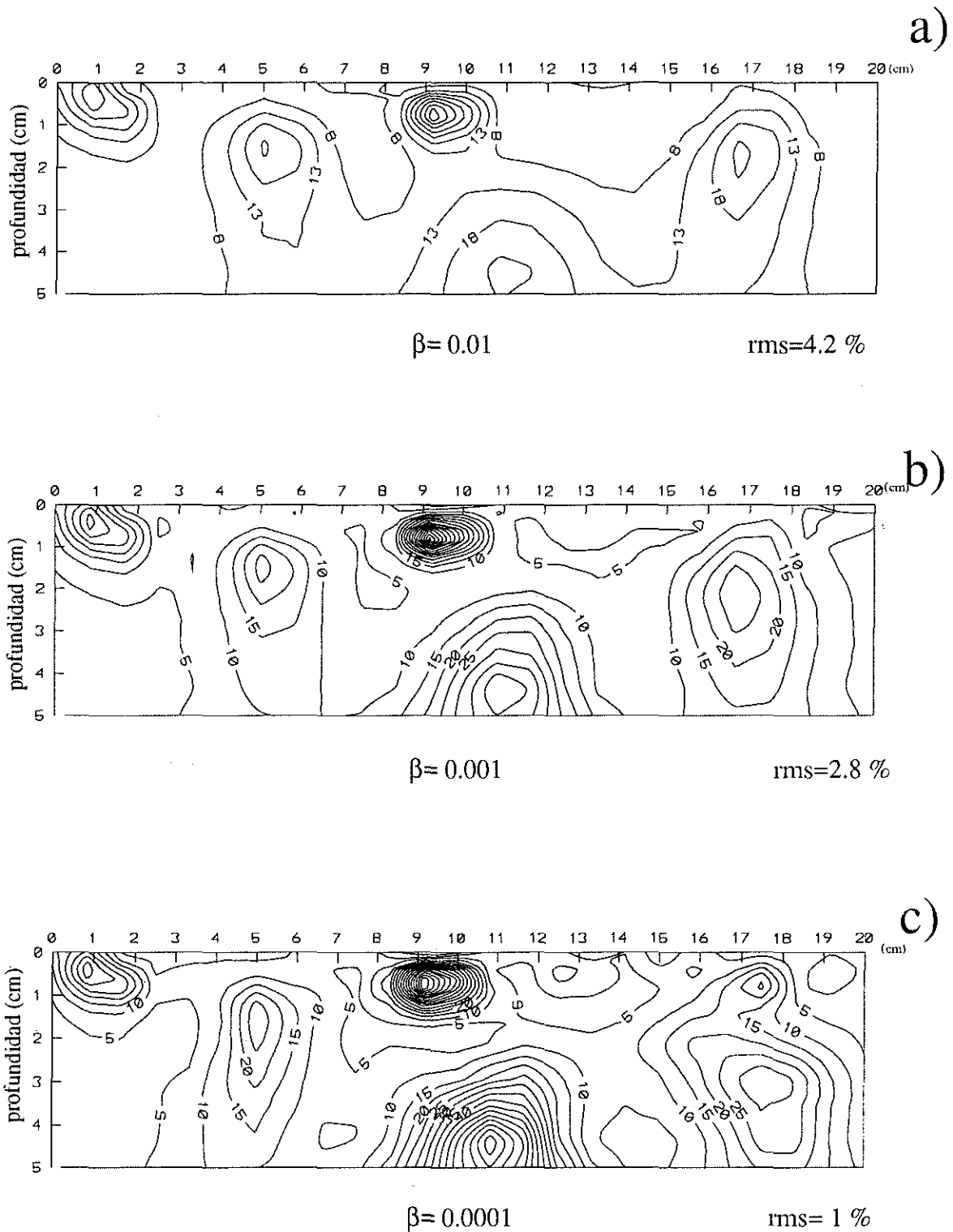


Figura 8. Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la figura 4.c (contornos cada 5 Ω -m) para diferentes parámetros de suavizamiento (β) y grados de ajuste (rms).

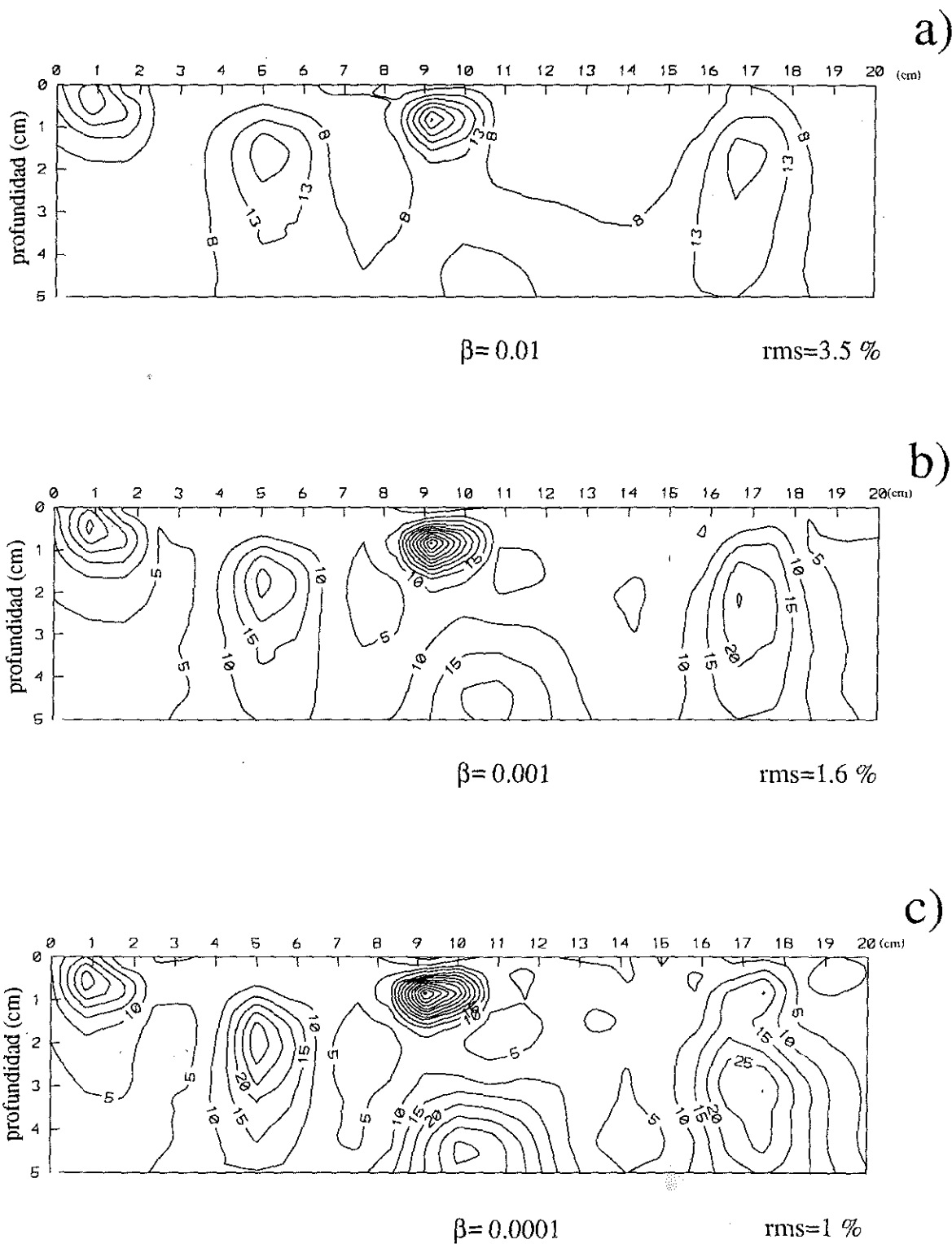


Figura 9. Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la figura 4.b (contornos cada 5 Ω -m) para diferentes parámetros de suavizamiento (β) y grados de ajuste (rms).

III.4 Resumen

Se presentó un algoritmo de inversión de datos de resistividad para fuentes lineales basado en una aproximación para bajos contrastes de resistividad; el cual permite obtener resultados satisfactorios aún para contrastes altos en resistividad, como el caso de cavernas subterráneas. Las pruebas usando este algoritmo, demostraron una aceptable recuperación de modelos sintéticos. En los casos en que se utilizó para la inversión de datos de fuentes puntuales, también se obtuvieron resultados aceptables.

IV. MODELADO INVERSO DE ANOMALIAS DE RESISTIVIDAD INCLUYENDO TOPOGRAFIA

IV.1 Introducción

Cuando la superficie del terreno donde se realizan estudios geoelectricos no es plana, la distribución del potencial se perturba, apareciendo anomalías que pueden atribuirse erróneamente a estructuras del subsuelo, o bien deformar u ocultar las que tengan realmente este origen. Por esta razón, es importante entender estos efectos e incluirlos en la interpretación de las mediciones. La importancia de tales estudios es señalada por Grant y West (1965), con el siguiente enunciado: “Probablemente no hay otro grupo de métodos geofísicos que sean tan adversamente afectados por la topografía y las condiciones superficiales como los métodos de resistividad en corriente continua ...la forma del terreno tiene gran influencia sobre la forma de las superficies equipotenciales aún bajo condiciones uniformes, introduciendo gradientes locales que pueden simular o distorsionar anomalías reales.”

En este capítulo se presenta un método para eliminar el efecto debido a las variaciones topográficas en las mediciones de resistividad aparente. Dicho método está basado en la Transformación Conforme de Schwarz-Christoffel, técnica de la teoría de las funciones analíticas (soluciones a la ecuación de Laplace) utilizada en la resolución de problemas que involucran geometrías, estrictamente bidimensionales.

IV.2 El efecto topográfico

Los efectos topográficos en los estudios de resistividad se deben, básicamente, al uso de factores geométricos propios de un modelo de tierra plana en el cálculo de las resistividades aparentes; cuando en realidad, las mediciones se realizan en terrenos irregulares. La figura 10 muestra los efectos de la topografía sobre las líneas de corriente y superficies equipotenciales en una tierra homogénea para una fuente lejana de corriente. Las líneas de corriente divergen bajo un cerro y convergen bajo un valle. Por lo tanto, las superficies equipotenciales asociadas, ortogonales a las líneas de corriente, también divergen bajo un cerro, produciendo diferencias de potencial más pequeños que los producidos en una tierra plana; resultado: resistividades aparentes bajas. En un valle, la convergencia de las líneas de corriente y superficies equipotenciales resultan en resistividades aparentes altas. Para un arreglo dipolo-dipolo las líneas de corriente y potencial son más complejas. Cuando hay una colina entre el transmisor y el receptor, la concentración de la corriente causa resistividades altas. Cuando hay un valle entre transmisor y receptor, la dispersión de la corriente produce resistividades bajas. Entonces, la clave para eliminar los efectos topográficos está en la determinación de los factores geométricos correctos.

Se han hecho intentos para eliminar el efecto topográfico, Fox *et al.* (1980) encuentran los factores de corrección para modelos 2-D de topografía y los aplican directamente a las resistividades aparentes; Holcombe y Jiracek (1984) generalizan el procedimiento a 3-D sugiriendo que los datos corregidos pueden ser interpretados como la respuesta de un modelo de tierra plana. Tong y Yang (1990) han desarrollado un algoritmo de elemento finito para inversión bidimensional que incorpora la topografía al modelo. La técnica

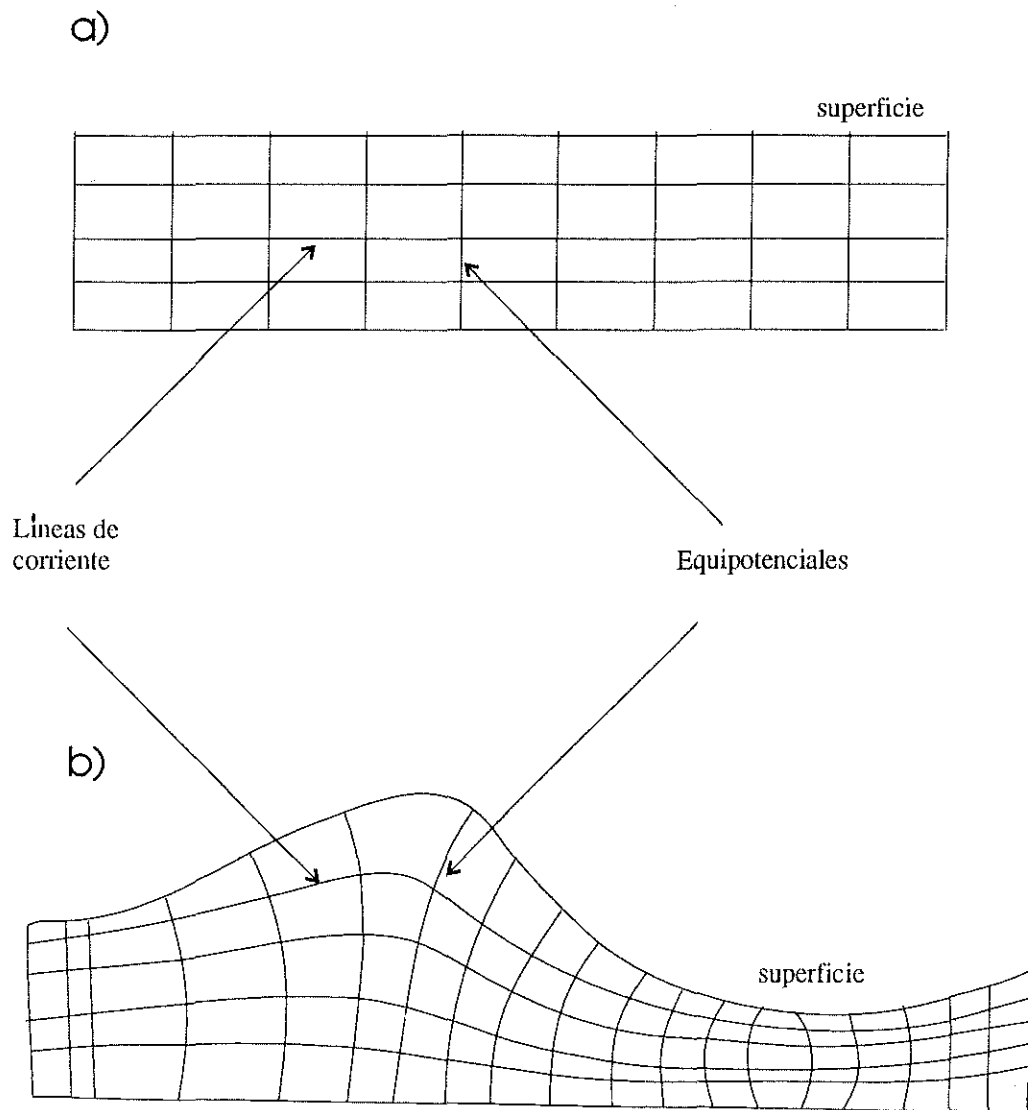


Figura 10. Efecto topográfico. a) Distribución de las líneas de corriente y superficies equipotenciales en una tierra plana. b) Deformación de las líneas de corriente y equipotenciales debida a una topografía irregular.

propuesta en este trabajo consiste en aplicar la Transformación de Schwarz-Christoffel. Esta transformación se ha utilizado para tratar algunos problemas en geofísica, por ejemplo, Spiegel *et al.* (1980), Parker y Klitgord (1972), Roy y Naidu (1970), Roy *et al.* (1982). Sin embargo, no se ha aplicado en conjunción con un esquema de inversión. En este trabajo, la transformación de Schwarz-Christoffel se utiliza para mapear las posiciones de los electrodos de un arreglo dipolo-dipolo en una tierra irregular (plano W), a los puntos equivalentes en una tierra plana (plano Z). El término "equivalente" se refiere a que el mapeo al plano Z sea tal que se obtengan las mismas mediciones de $\frac{\Delta V}{I}$. Obviamente las nuevas posiciones de los electrodos no serán las correspondientes a un arreglo dipolo-dipolo, sino que dependerán del grado de deformación de la superficie, y serán más acordes a un arreglo general cuadripolar. Las nuevas posiciones de los electrodos en el semi-espacio "plano" se utilizan para calcular las resistividades aparentes usando el factor geométrico de un arreglo cuadripolar general. En este punto, se tienen mediciones sin efecto de la topografía, pudiéndose emplear el algoritmo de inversión descrito en el capítulo anterior para obtener la distribución de resistividades verdaderas.

IV.3 La transformación de Schwarz-Christoffel

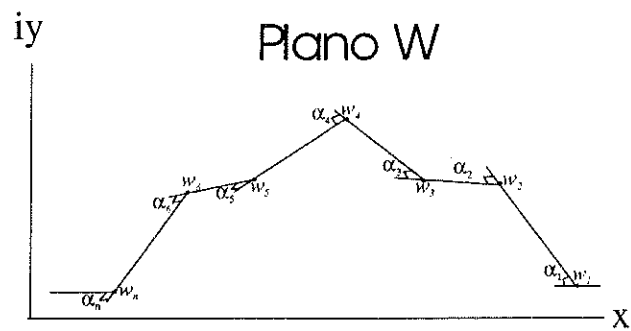
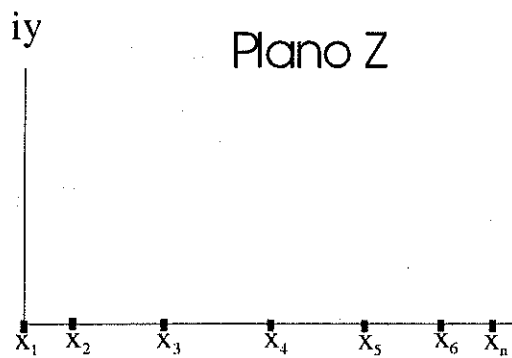
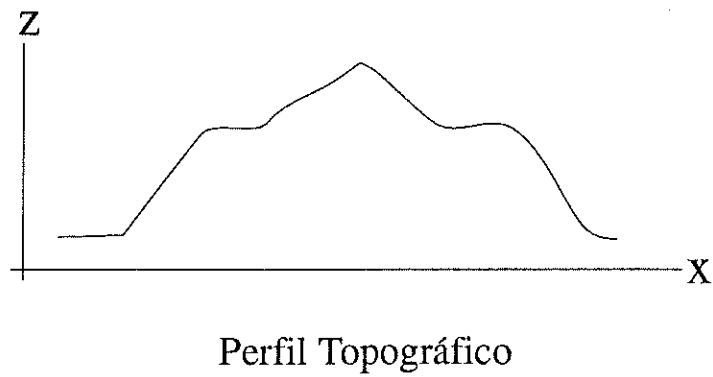
Grant y West (1965), proponen el empleo del principio de relajación para la eliminación del efecto topográfico. Si se puede encontrar una solución a la ecuación de Laplace, tal que

cumpla $\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$ en la superficie y que además, satisfaga $U = -Ex$ a una distancia dada debajo de la superficie, los valores de dicha función podrían dar el efecto topográfico.

Sin embargo, el problema puede plantearse de forma más simple utilizando la teoría de variable compleja. Sea un perfil topográfico invariante en la dirección transversal, y una fuente lineal colocada también en la misma dirección. A fin de usar la transformación de Schwarz-Christoffel en el presente problema, el perfil topográfico se representa por medio de segmentos lineales rectos en el plano complejo $W (u+iv)$, con vértices en w_1, w_2, \dots, w_n . Esta transformación tiene la propiedad de mapear un polígono bidimensional simplemente conectado (en el plano W) a un semiplano complejo $Z (x+iy)$. Así, dados los puntos reales x_1, x_2, \dots, x_n con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, la transformación de Schwarz-Christoffel queda definida por (Spiegel *et al.*, 1980):

$$g(z) = W = A \int_0^z (z - x_1)^{-\alpha_1} (z - x_2)^{-\alpha_2} \dots (z - x_n)^{-\alpha_n} dz + B, \quad (44)$$

donde W es la variable compleja que describe el sistema coordenado para una tierra no plana, Z es la variable compleja que describe el sistema coordenado para la tierra plana, A y B son constantes complejas, x_1 a x_n son los puntos imagen de los vértices del polígono en el eje real del sistema coordenado para la tierra planal. Finalmente, α_1 a α_n son los ángulos exteriores de los vertices en fracciones de semi-círculo, tal como lo indica la figura 11. En este caso, el uso de la transformación de Schwarz-Christoffel difiere de la normal en que



$$W = A \int_0^z (Z - x_1)^{-\alpha_1/\pi} (Z - x_2)^{-\alpha_2/\pi} (Z - x_3)^{-\alpha_3/\pi} \dots (Z - x_n)^{-\alpha_n/\pi} dz + B$$

Figura 11. El mapeo de un polígono abierto por medio de la transformación de Schwarz-Cristoffel.

$w_j \neq w_n$, y por tanto, no se está mapeando un polígono cerrado a una región cerrada, sino más bien, un polígono con un vértice al infinito a un semi-plano infinito.

Desafortunadamente, la transformación no está formulada en términos de la información disponible. Es decir, se conocen los puntos vértices w_1 a w_n y los ángulos α_1 a α_n , pero no se conocen los puntos imagen x_1 a x_n necesarios para definir la transformación. Sin embargo, hay suficientes grados de libertad para escoger las posiciones de dos de estos puntos. También, la integral de contorno de la ecuación (44) puede hacerse real, si la trayectoria de integración se restringe al eje x del plano Z y si $(x-x_i) > 0$. Considerando lo anterior, (44) puede expresarse como:

$$w_j = A \prod_{i=1}^n (-1)^{-\alpha_i} \int_0^{x_j} \prod_{i=1}^n |x - x_i|^{-\alpha_i} dx + B, \quad (45)$$

y la ecuación para la distancia entre dos vértices es:

$$\Delta l_j = |w_{j+1} - w_j| = |A| \int_{w_j}^{w_{j+1}} \prod_{i=1}^n |x - x_i|^{-\alpha_i} dx \quad (46)$$

con $j=1,2,3,\dots$ y $|A|=1$.

Esta ecuación se usa para obtener los valores de los puntos imagen de los vértices del polígono en el plano Z . Por conveniencia hacemos $x_1=0$, y para encontrar los restantes valores x_2 a x_n se emplea un esquema iterativo (Parker y Klitgord, 1972). A partir de una aproximación inicial para el vector \tilde{x} ($\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$) y usando la ecuación (46), se calculan las

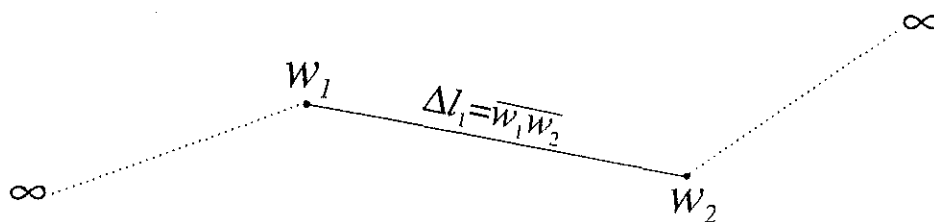


Figura 12. Sistema lineal de tres segmentos.

longitudes $\Delta \tilde{l}$ para cada segmento del polígono. La siguiente aproximación se encuentra ajustando cada valor \tilde{x}_i una cierta cantidad, de tal forma que el error entre Δl_j y $\Delta \tilde{l}_j$ sea más pequeño. El proceso se repite hasta que se obtienen longitudes comparables.

El principio del esquema de iteración es el tratamiento de cada segmento lineal como si estuviera conectado a un segmento de longitud infinita (figura 12) asignando a $x_1 = 0$, la longitud exacta del segmento es:

$$\Delta l_1 = \int_0^{x_2} u^{-\alpha_1} |u - x_2|^{-\alpha_2} du , \quad (47)$$

y la longitud aproximada nos queda:

$$\Delta \tilde{l}_1 = \int_0^{\tilde{x}_2} u^{-\alpha_1} |u - \tilde{x}_2|^{-\alpha_2} du . \quad (48)$$

Suponiendo que $x_i = \beta \tilde{x}_i$, donde β es una constante desconocida, nos da el valor de escala. Sustituyendo en la ecuación (47), haciendo el cambio de variable $u = \beta v$ y tomando en cuenta la ecuación (48) se obtiene:

$$\Delta l_i = \int_0^{\beta \tilde{x}_2} \beta^{-\alpha_1} u^{-\alpha_1} |\beta v - \beta \tilde{x}_2|^{-\alpha_2} \beta dv, \quad (49)$$

$$\Delta l_i = \beta^{(1-\alpha_1-\alpha_2)} \int_0^{\beta \tilde{x}_2} u^{-\alpha_1} |v - \tilde{x}_2|^{-\alpha_2} dv,$$

$$\Delta l_i = \beta^{(1-\alpha_1-\alpha_2)} \Delta \tilde{l}_i.$$

por lo que

$$\beta = \left(\frac{\Delta \tilde{l}_i}{\Delta l_i} \right)^{1/(\alpha_1+\alpha_2-1)}. \quad (50)$$

Desde luego, este valor de ajuste β es exacto sólo para el caso de un segmento. En el caso general, partiendo de la primera aproximación, se calculan independientemente los ajustes para todos los segmentos del polígono, aplicándose hasta el final la corrección y encontrar el nuevo vector x'

$$x'_j = \beta (\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}) + x'_{j-1}. \quad (51)$$

Como ya se mencionó, el proceso se mantiene hasta que $|\Delta l - \Delta \tilde{l}| < tol$.

Para todos los casos presentados en este trabajo se usó como primera aproximación para el vector de puntos imagen en el plano Z , la proyección de los segmentos del polígono en el

eje real del plano W , la cual resultó más conveniente que inicializar los valores x_i haciendo $x_i = i - 1$.

Una vez que se ha encontrado el vector x , la constante A puede calcularse de (46)

$$A = \frac{w_{j+1} - w_j}{\int_{w_j}^{w_{j+1}} \prod_{i=1}^n |x - x_i|^{-\alpha_i} dx}, \quad (52)$$

para cualquier valor de j . La constante B puede despejarse usando la ecuación (45) para w_l

$$B = w_l - \prod_{i=1}^n (-1)^{-\alpha_i} A \int_0^{x_l} \prod_{i=1}^n |x - x_i|^{-\alpha_i} dx \quad (53)$$

como hemos escogido $x_l=0$, la integral desaparece y $B=w_l$.

Una vez que se han encontrado los parámetros necesarios en la transformación, es posible mapear puntos situados en el plano Z al plano W , resolviendo numéricamente la ecuación (44).

Para mapear un punto del plano Z (digamos Z_r) al correspondiente punto w_r , el contorno de integración es dividido en dos segmentos, separando la parte real e imaginaria e integrando independientemente, es decir:

$$z_r = \Delta z_j$$

$$w_r = B + A \sum_j |z - x_j|^{-\alpha_j} \Delta_j x_r + A \sum_k |z - x_k|^{-\alpha_k} \Delta_k y_r. \quad (54)$$

IV.4 resultados numéricos

Utilizando la técnica anteriormente descrita, se realizaron experimentos numéricos en que se analizaron los efectos debidos a dos rasgos topográficos básicos: una colina y un valle. El arreglo electródico usado fue dipolo-dipolo con longitudes unitarias para los dipolos de corriente y potencial, y distancias interdipolares de $n=1,2,3,4,5,6$. Los electrodos fueron colocados en sus posiciones correctas sobre la superficie, con las distancias medidas a lo largo de las pendientes, según el procedimiento de campo usual. En ambos casos, los electrodos ocuparon posiciones simétricas con respecto al vértice del rasgo topográfico. Las pseudosecciones fueron generadas suponiendo que las mediciones se realizaron sobre un semi-espacio de $250 \Omega\text{-m}$ usando fuentes lineales de corriente.

La figura 13 muestra la pseudosección de resistividad aparente obtenida para mediciones sobre una colina. El efecto de la colina produce una anomalía máxima virtual, simétrica con respecto al ápice del cerro y flanqueada por resistividades bajas, el efecto llega a ser hasta del doble con respecto al valor de la resistividad del semi-espacio. Este caso es particularmente crítico en estudios de detección de cavidades, ya que pueden interpretarse cavidades donde no existen o hacer consideraciones de tamaño y profundidades erróneas. La figura 14 muestra una imagen de resistividad, obtenida a partir de la inversión de los datos de la figura 13, como se observa, el efecto neto de la colina es el de un cuerpo resistivo.

El efecto del valle es opuesto al efecto de la colina (figura 15), consiste en un mínimo de resistividad aparente bajo su vértice flanqueado a los lados por resistividades altas. En este caso, el valor mínimo es casi la mitad del valor correspondiente al semi-espacio ($250 \Omega\text{-m}$). La anomalía conductora puede dar lugar a interpretar un cuerpo de baja resistividad que en realidad no existe.

En ambas situaciones, puede observarse que el ancho de la anomalía virtual es mayor conforme los dipolos de corriente y potencial están a mayor distancia del centro del rasgo topográfico. De esta manera se demuestra gráficamente, el inconveniente de la interpretación cualitativa basada en las pseudosecciones de resistividad aparente y en una interpretación cuantitativa que no toma en cuenta el efecto topográfico.

Pruebas de inversión con topografía fueron realizadas utilizando las anomalías asociadas con un conductor ($25 \Omega\text{-m}$) en un semi-espacio de $100 \Omega\text{-m}$, para un cerro, un valle y una

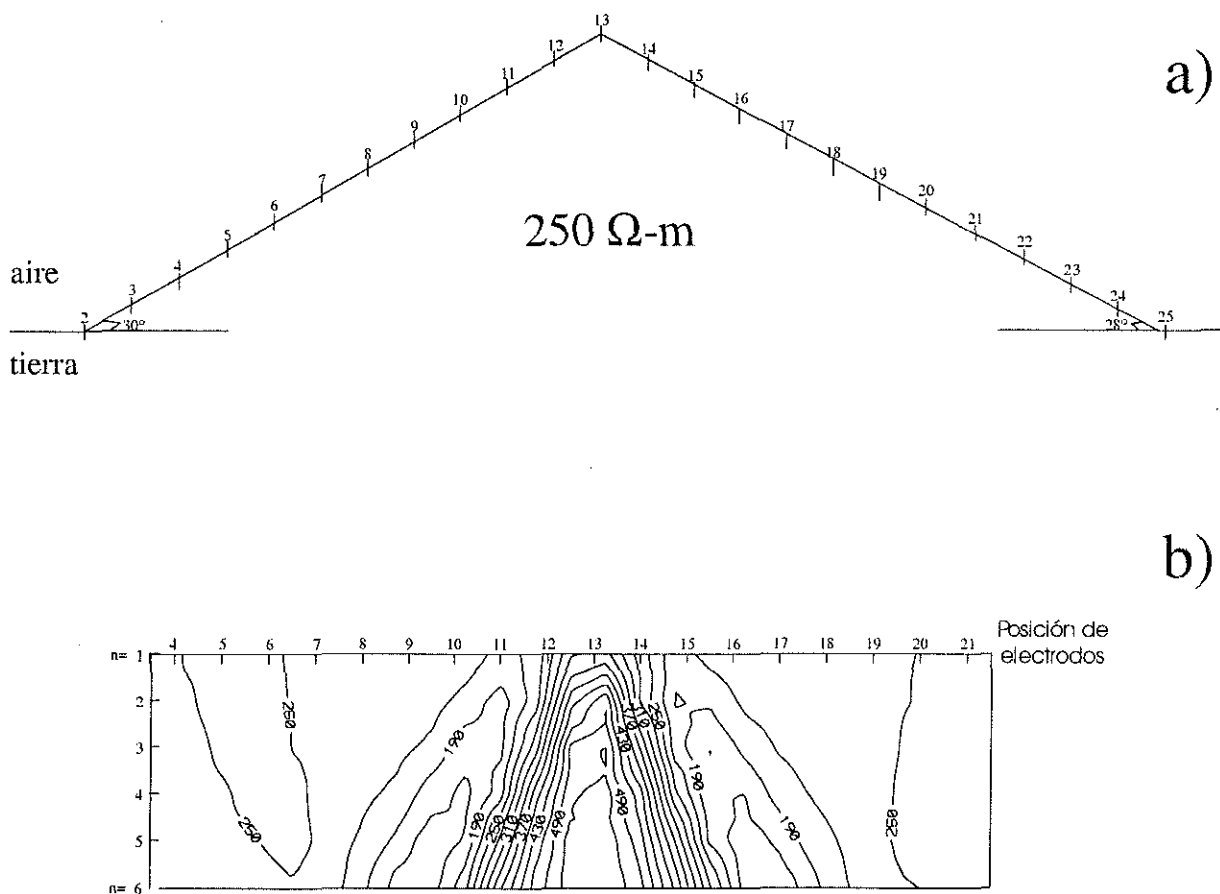


Figura 13. Anomalía debida a una colina. a) Modelo topográfico. b) Pseudosección (contornos cada $30 \Omega\text{-m}$).

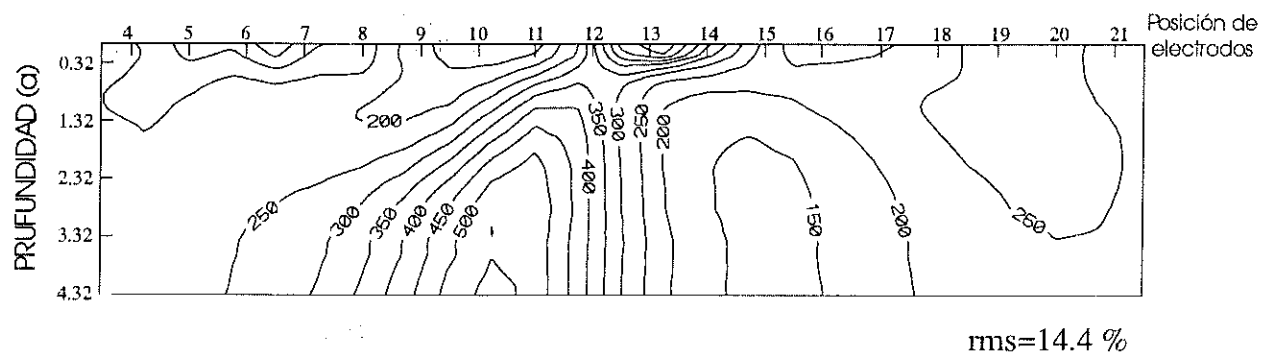


Figura 14. Modelo de inversión de los datos de la figura 13.b para $\beta=0.001$ (contornos cada $50 \Omega\text{-m}$).

pendiente (Fox *et al.*, 1980). La idea fue evaluar la técnica de inversión incluyendo topografía, comparando las pseudosecciones no corregidas (plano *W*) con las pseudosecciones corregidas (plano *Z*); así como, comparar el grado de recuperación de las anomalías para diferentes grados de suavizamiento. En el proceso de inversión se utilizó el algoritmo desarrollado en el capítulo anterior.

La figura 16 presenta la ubicación de puntos en el plano *W*, correspondientes a los nodos de una malla rectangular horizontal en el plano *Z*, estos puntos pueden interpretarse como la deformación que sufre cada intersección de las líneas de corriente y potencial para los tres rasgos topográficos considerados. Claramente se observa que el efecto de la superficie disminuye con la profundidad.

Los resultados para el valle se muestran en las figuras 17 y 18. La figura 17.a muestra el modelo utilizado, la figura 17.b muestra la pseudosección de los datos sin corregir por topografía, es decir, graficados en el plano *W*, y la figura 17.c muestra la pseudosección incluyendo la topografía (plano *Z*). Características comunes a ambas figuras son: la anomalía de baja resistividad localizada en el centro del perfil flanqueada simétricamente por resistividades altas, relativamente mayores para la figura 17.b, es importante notar que la anomalía del dique está enfatizada por el efecto del valle. Los resultados de la inversión de los datos de la figura 17.c para diferentes grados de suavizamiento se muestran en la figura 18, en los tres modelos se observa el bajo resistivo en el centro del perfil asociado al dique conductor.

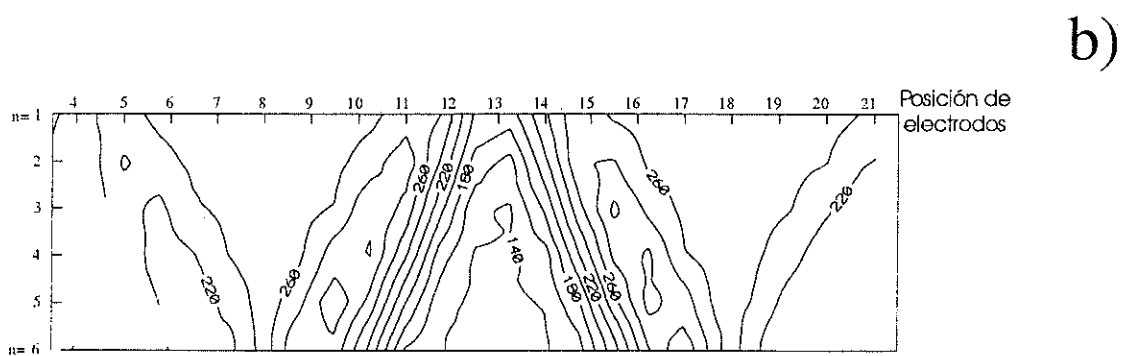
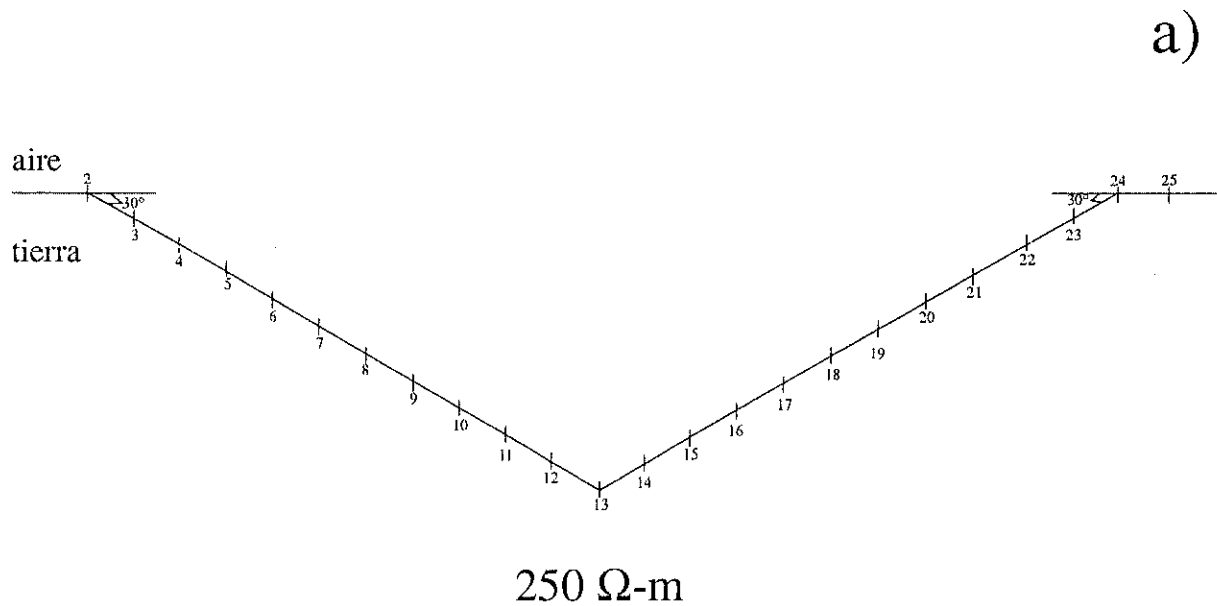


Figura 15. Anomalia debida a un valle. a) Modelo topográfico. b) Pseudosección (contornos cada 40 Ω -m).

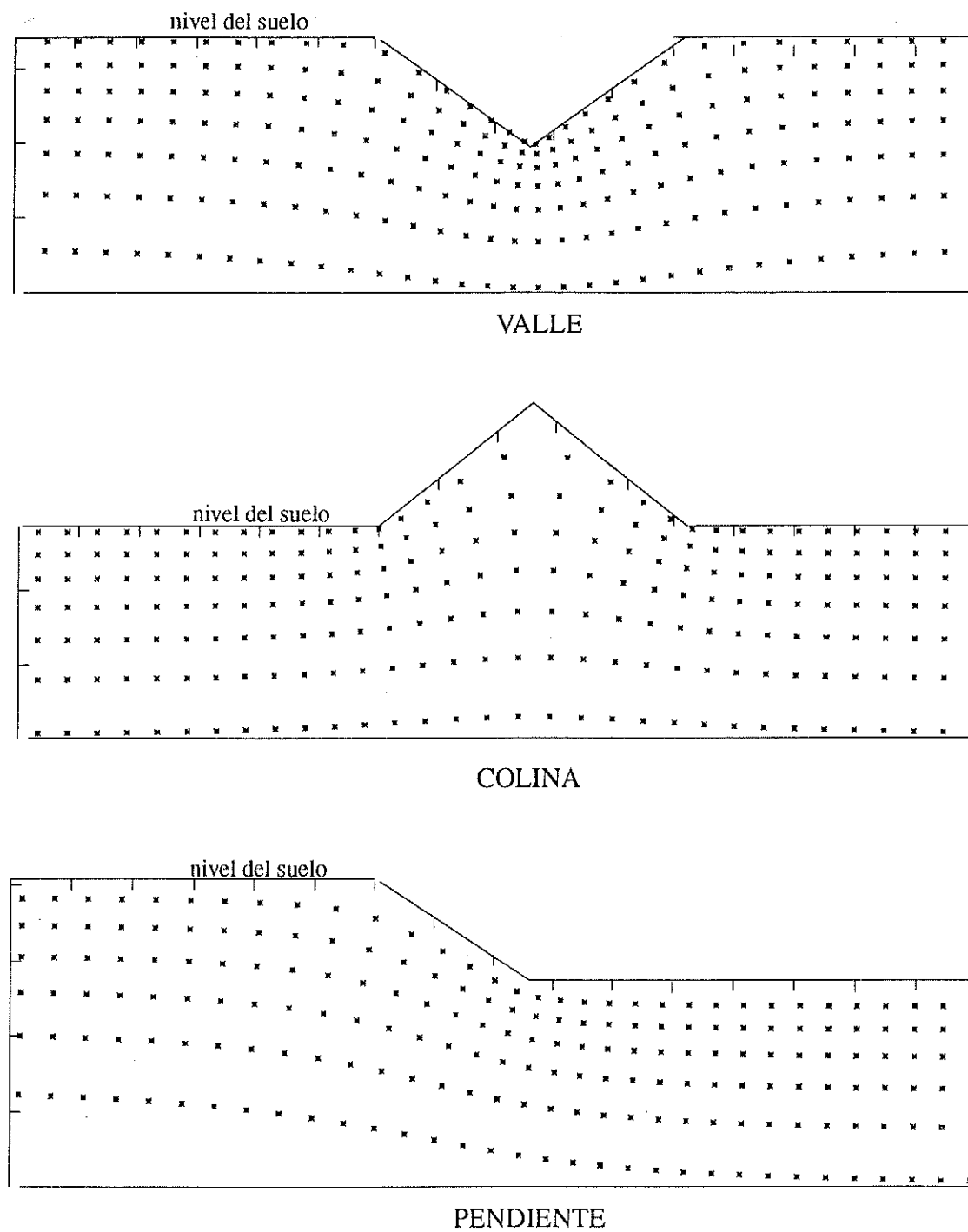


Figura 16. Efecto de la topografía sobre las superficies equipotenciales y líneas de corriente. Los puntos representan las intersecciones entre las líneas de corriente y equipotenciales.

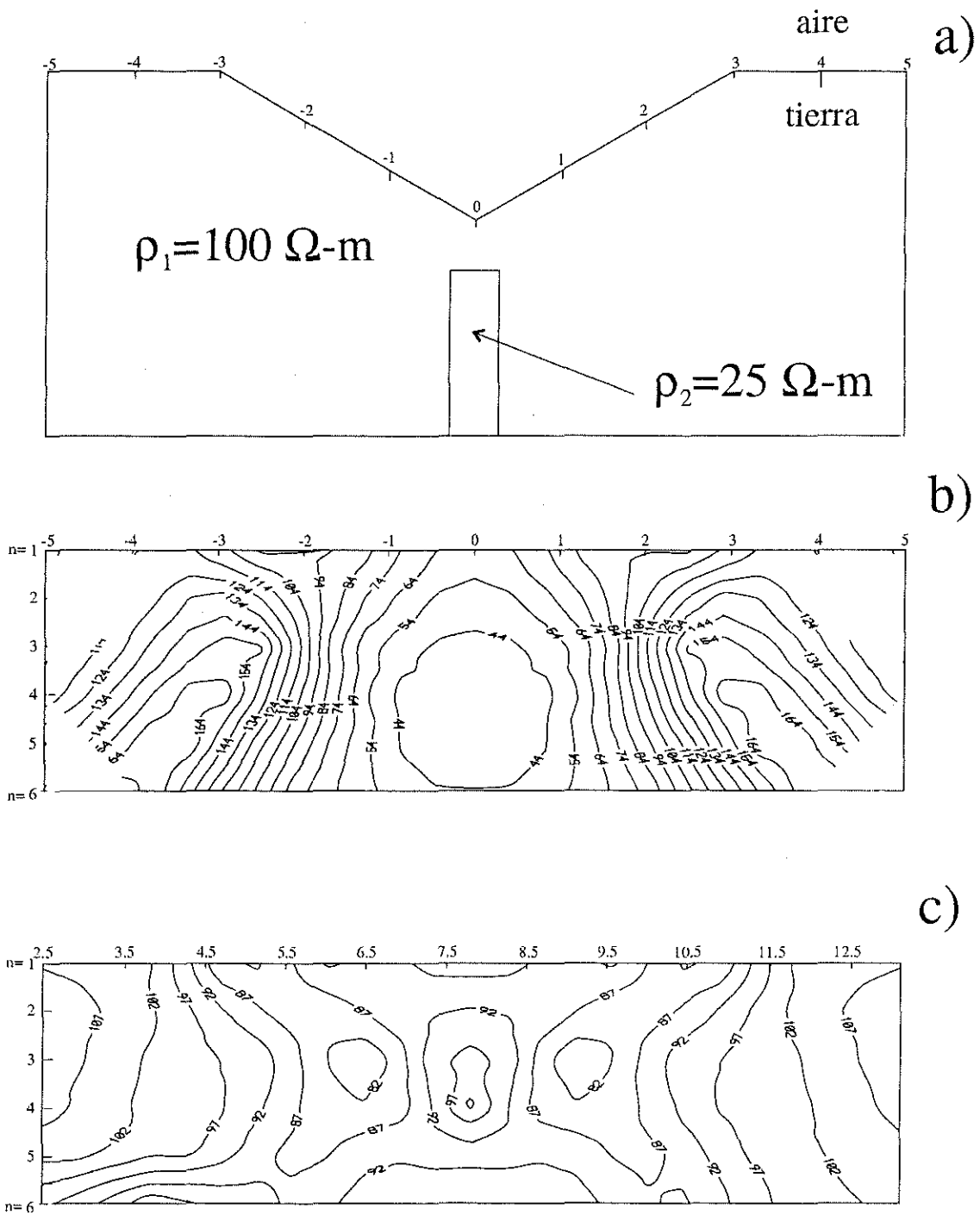


Figura 17. Pseudosección en el plano W y Z para el modelo de un dique en un valle. a) Modelo. b) Plano W (contornos cada $10 \Omega\text{-m}$). c) Plano Z (contornos cada $5 \Omega\text{-m}$).

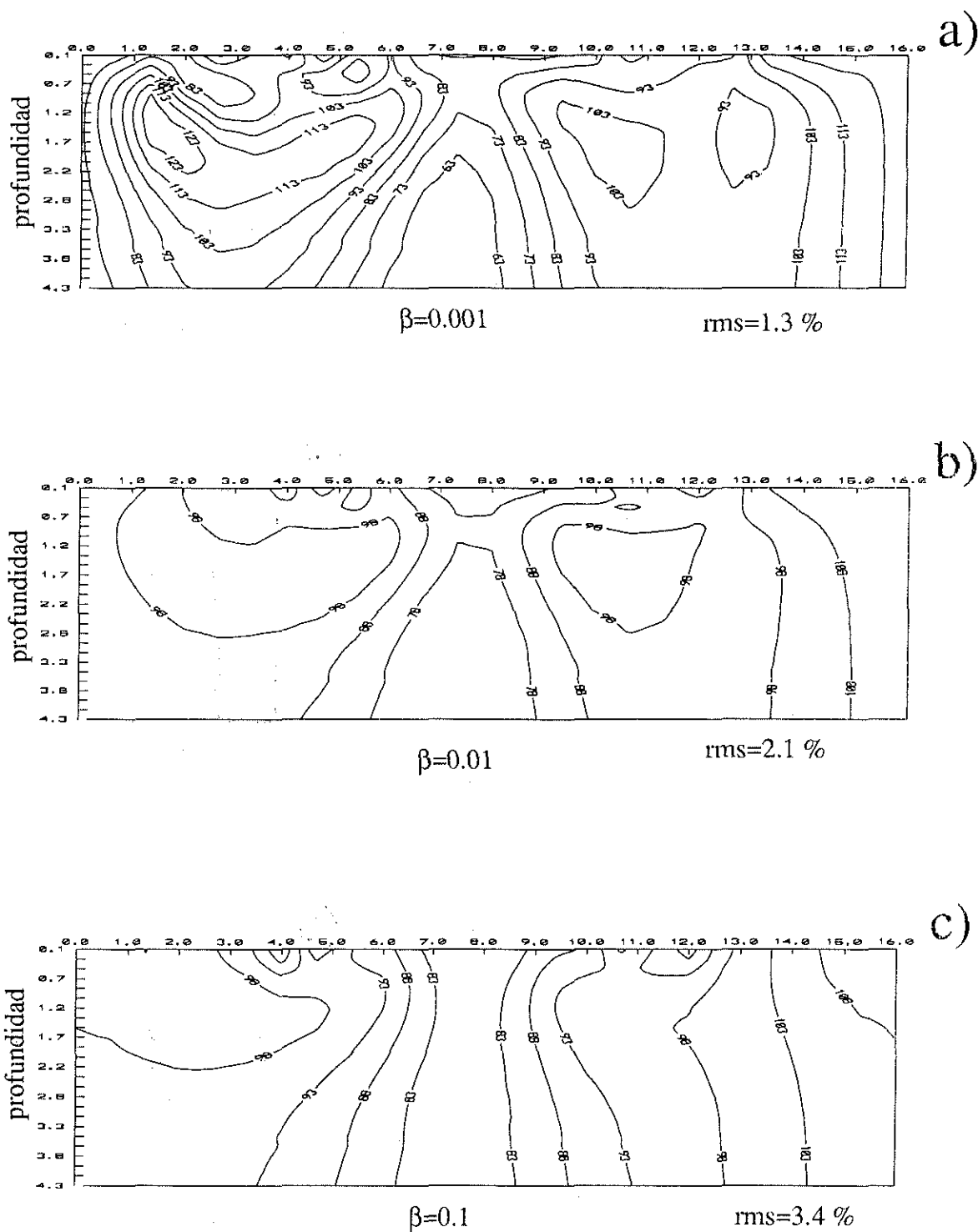


Figura 18. Secciones de resistividad en el plano Z de la inversión para fuente lineal de los datos de la figura 17.c. a) Contornos cada 10 Ω -m. b) Contornos cada 10 Ω -m. c) Contornos cada 5 Ω -m.

Las figuras 19.b y 19.c presentan las pseudosecciones de las mediciones hechas sobre la colina, tanto para los datos sin corregir (figura 19.b), como para los corregidos (figura 19.c). Los datos en el plano W , muestran el efecto de la colina enmascarando completamente la anomalía del dique: un alto resistivo en el centro del perfil flanqueado por bajas resistivas a los lados, en sí, una estructura simétrica. Los datos corregidos (figura 19.c) muestran una estructura simétrica con respecto al centro del perfil: una anomalía de baja resistividad en el centro del perfil, flanqueado por altas resistividades. La técnica de mapeo conforme ha eliminado el efecto topográfico de manera satisfactoria. A partir de la pseudosección de la figura 19.c se generaron las secciones de resistividad verdadera para tres parámetros de suavizamiento (β), mismas que se muestran en la figura 20, la anomalía es recuperada solo parcialmente, observándose, que los valores de resistividad tienden a aumentar hacia los extremos del perfil.

Las pseudosecciones para el modelo de pendiente o salto se muestran en la figura 21. En el plano W (figura 21.b) la estructura no es simétrica como en los casos anteriores, aparece una región de baja resistividad inclinada hacia el lado derecho del perfil, flanqueada por zonas de resistividad alta, siendo mayor la resistividad alcanzada en el lado izquierdo. La figura 21.c no muestra mucha variación de la resistividad con respecto al valor del semi-espacio (hasta un 25 %), hacia el lado derecho del perfil se nota una pequeña región de baja resistividad, mientras del lado izquierdo es muy uniforme y casi del valor correspondiente al semi-espacio. Las secciones de resistividad de la figura 22 muestran una recuperación muy aceptable para la anomalía correspondiente al dique: una pequeña zona de resistividad baja flanqueada por regiones de resistividad casi uniforme y con el valor propio del semi-espacio.

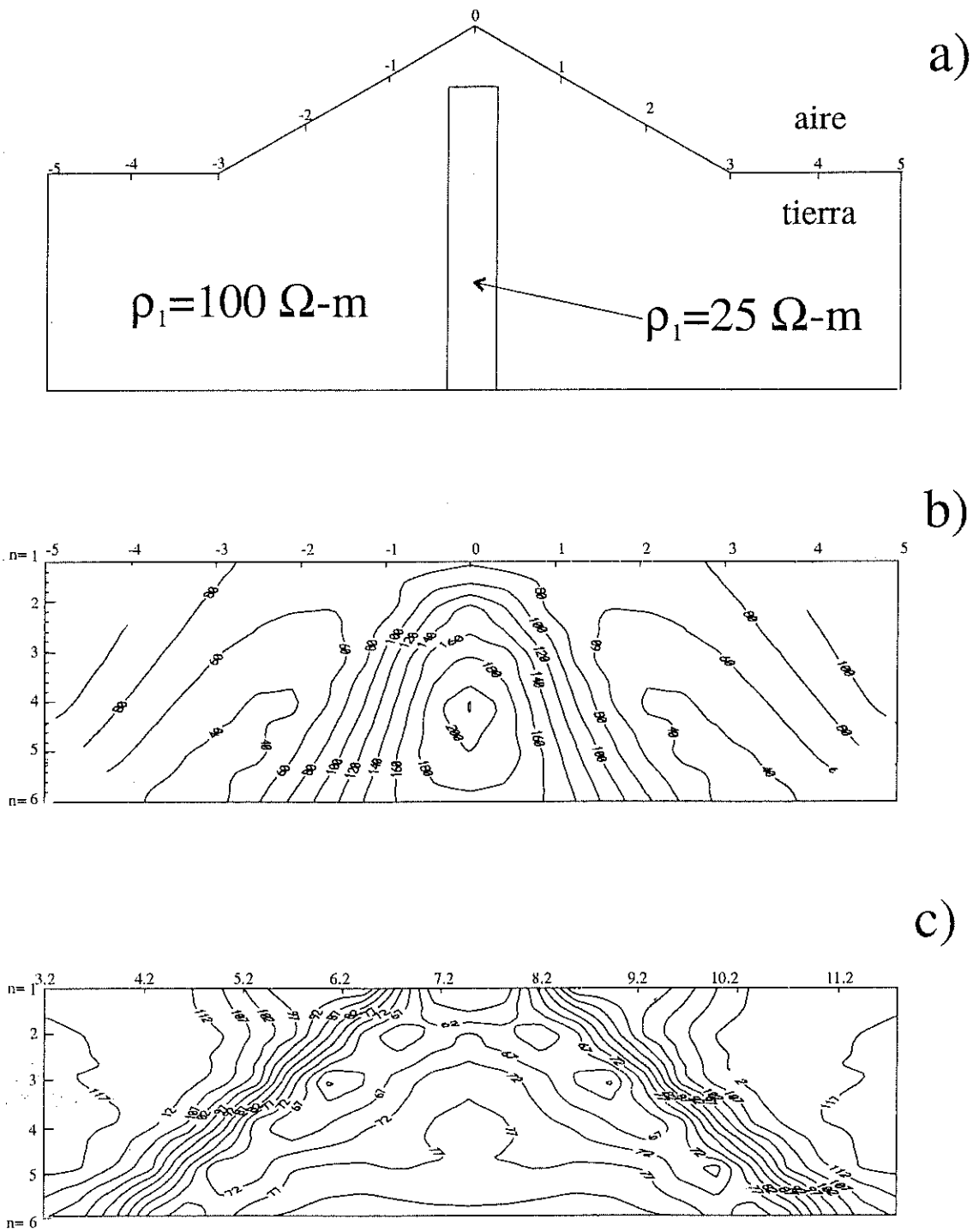


Figura 19. Pseudosección en el plano W y Z para el modelo de un dique en una colina. a) Modelo. b) Plano W (contornos cada $20 \Omega\text{-m}$). c) Plano Z (contornos cada $5 \Omega\text{-m}$).

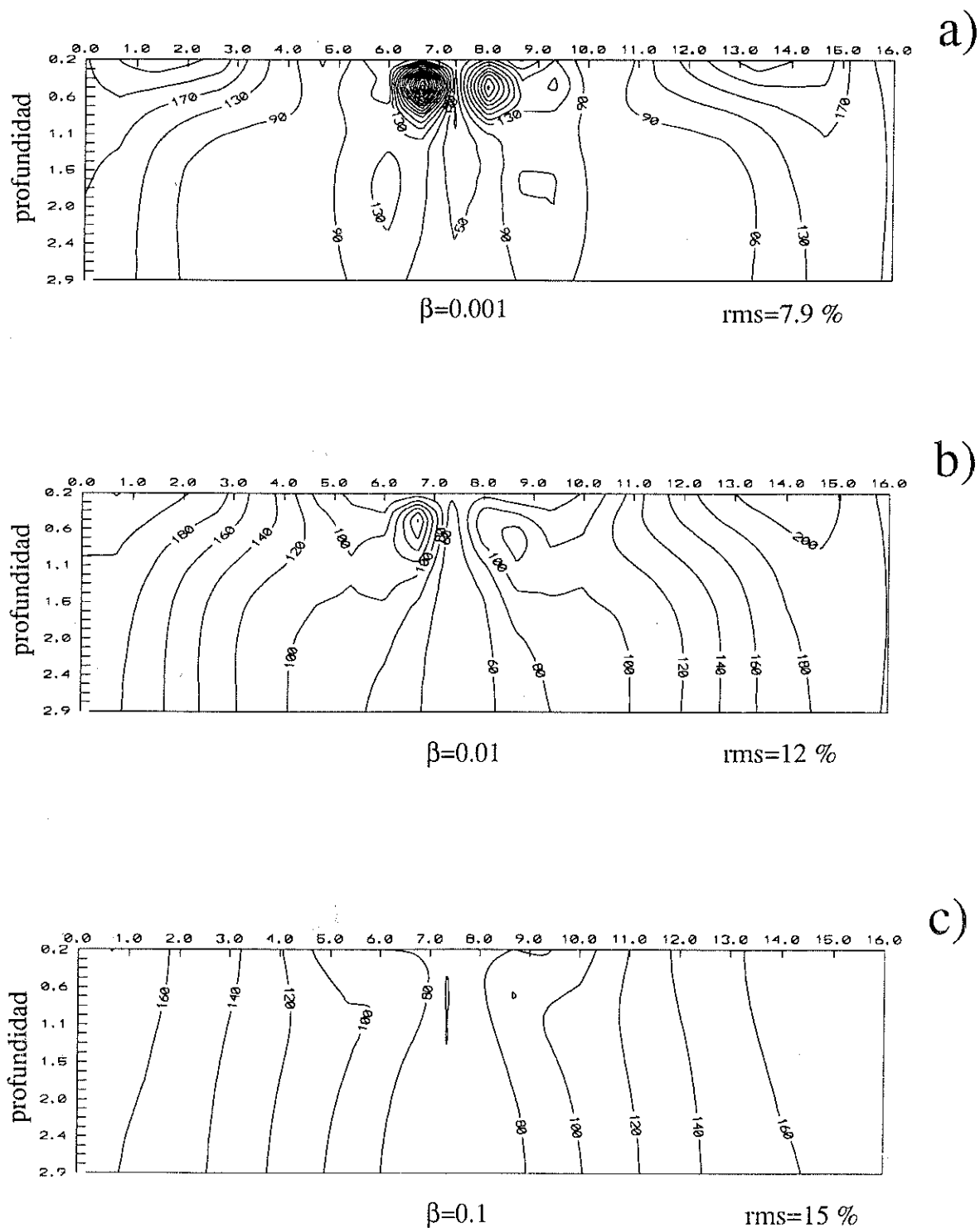


Figura 20. Secciones de resistividad en el plano Z de la inversión para fuente lineal de los datos de la figura 19.c. a) Contornos cada 40 Ω -m. b) Contornos cada 20 Ω -m. c) Contornos cada 20 Ω -m.

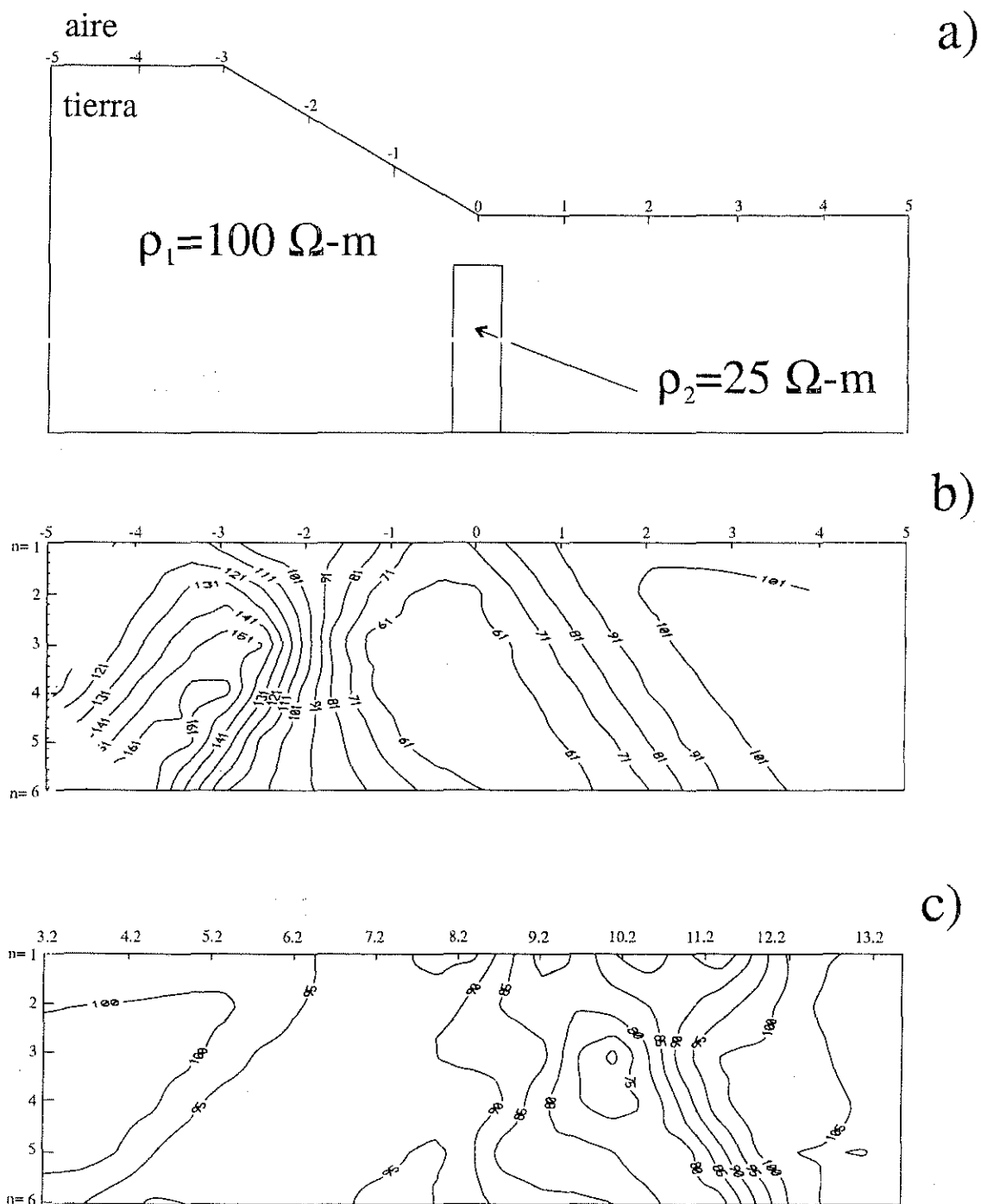


Figura 21. Pseudosección en el plano W y Z para el modelo de un dique en una pendiente.
 a) Modelo. b) Plano W (contornos cada $10 \Omega\text{-m}$). c) Plano Z (contornos cada $5 \Omega\text{-m}$).

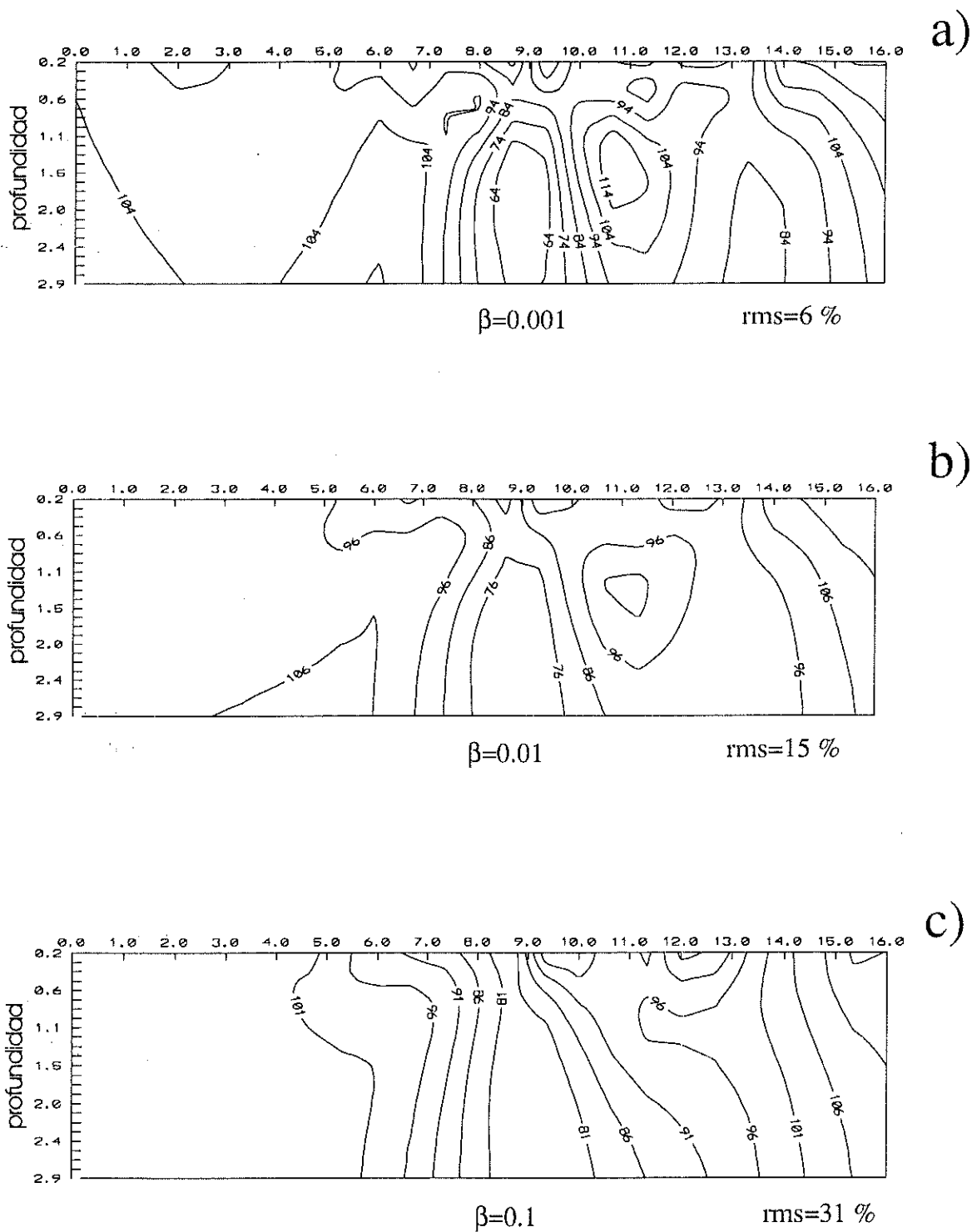


Figura 22. Secciones de resistividad en el plano Z de la: inversión para fuente lineal de los datos de la figura 21.c. a) Contornos cada 10 Ω -m. b) Contornos cada 10 Ω -m. c) Contornos cada 5 Ω -m.

Finalmente, y para tener un mejor punto de vista de las imágenes de resistividad obtenidas para los casos analizados, se muestran los modelos con un factor de suavizamiento de 0.01, en el espacio donde las mediciones se realizaron. Así, cada punto del plano Z fue mapeado al plano W , de acuerdo a la figura 16 y aplicando la ecuación (54). Para los tres casos, según muestra la figura 23, la región de baja resistividad no alcanza los valores asociados al dique. Sin embargo, dada la geometría y profundidad del dique y tomando en cuenta la forma como se discretiza el semi-espacio en la inversión, los resultados se consideran satisfactorios.

En el Apéndice 2 se incluye el programa para el mapeo de las posiciones de electrodos y los vértices de un polígono topográfico, el programa para la realización de la transformada directa se incluye en el Apéndice 3.

IV.5 Resumen

Se desarrolló un método para la eliminación del efecto topográfico en mediciones de resistividad, las mediciones se corrigen mediante un mapeo conforme, de tal forma que la superficie ahora es plana. Pruebas sobre diferentes tipos de rasgos topográficos demuestran la importancia de hacer esta corrección, más aún cuando se trata de detectar cavidades, ya que sus efectos pueden eliminarse o multiplicarse. Al proceso de inversión se ha agregado este filtrado, lo que permite la inversión tomando en cuenta la topografía.

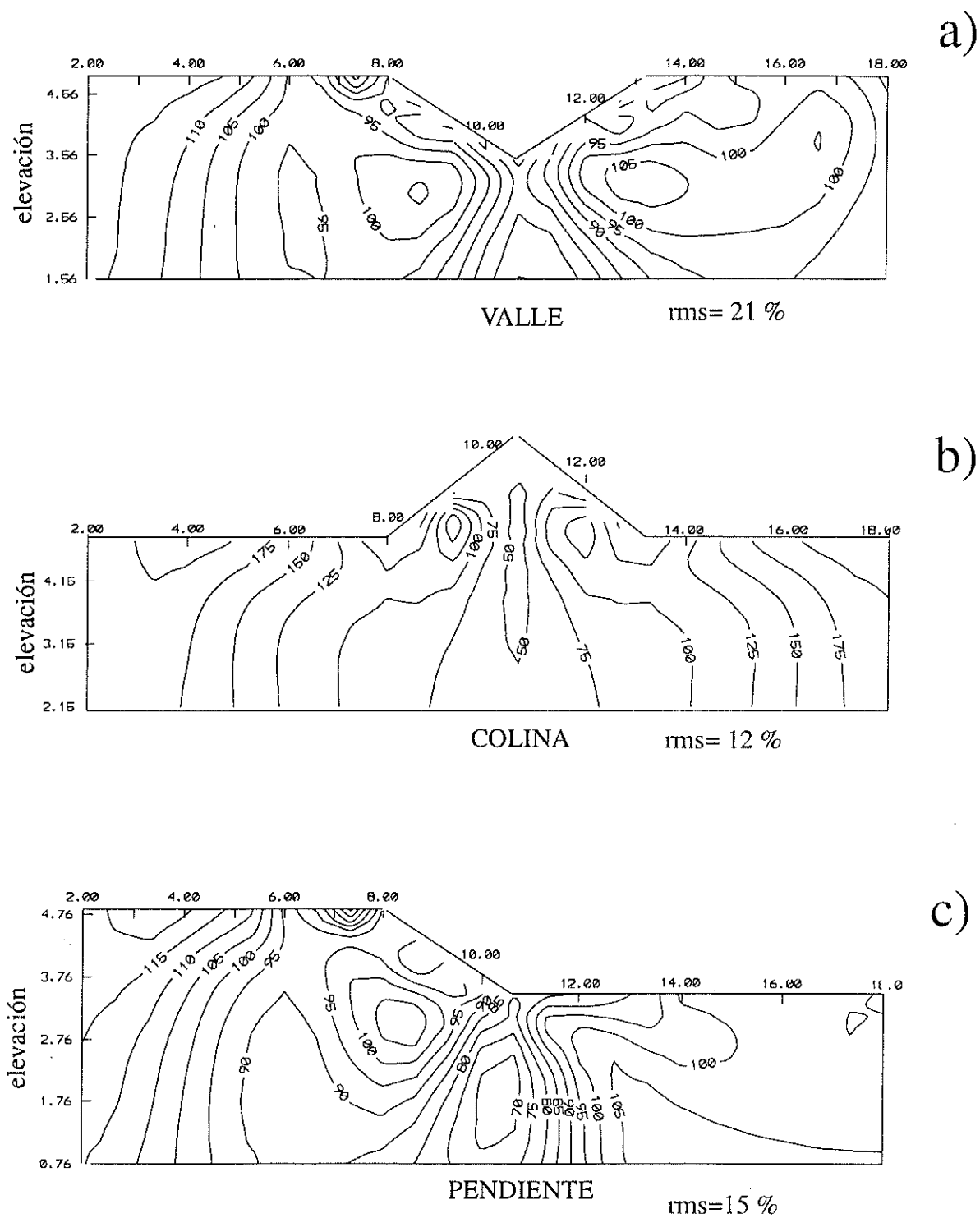


Figura 23. Secciones de resistividad en el plano W para $\beta=0.01$ aplicando inversión para fuente lineal del efecto de un dique en una tierra de superficies irregular.

V. SOBRE LA DETECCIÓN DE CAVIDADES SUBTERRANEAS

V.1 Introducción

El desarrollo de técnicas confiables para la detección y delineación de cavidades subterráneas es de capital importancia en proyectos de ingeniería civil sobre zonas propensas a colapso y subsidencia. Tal situación pone en peligro la estabilidad de las estructuras, con grave riesgo para las personas y la economía. El interés en estas técnicas también se extiende al campo de la hidrogeología, geomorfología cárstica, arqueología, espeleología y usos militares. Las cavidades pueden ser naturales, como estructuras de disolución en calizas y dolomitas, y tubos de lava; o hechas por el hombre, como minas y túneles; y pueden estar vacías, o llenas de agua o algún material geológico secundario.

Surgen las preguntas: ¿Las cavidades son fácilmente detectables?, ¿qué métodos geofísicos son recomendables para su detección?

La detectabilidad de una cavidad depende tanto del método geofísico utilizado (según el principio físico en que se base), como de su tamaño efectivo. El tamaño efectivo depende del tamaño real de la cavidad y de sus efectos secundarios en la roca encajonante (Daniels, 1988). Estos pueden ser fracturamientos, recristalizaciones y otros procesos secundarios, que pueden provocar el realce o enmascaramiento de la anomalía. Por ejemplo: el fracturamiento inducido por tuneles y minas puede extenderse dos o más diámetros fuera de la cavidad. El tamaño efectivo incluye el espacio ocupado por la cavidad y el

fracturamiento inducido, vacío o lleno de agua, y varía con el ambiente geológico, pero usualmente es mayor que la cavidad. Este realce del objetivo se llama efecto halo. Un halo cerca de una cavidad puede enmascarar la respuesta esperada, o causar una anomalía que sea opuesta a la esperada por la cavidad.

Intuitivamente, se espera que una cavidad arriba o abajo del nivel freático tenga excelentes contrastes de propiedades físicas con la roca encajonante. A continuación se da una tabla de valores de propiedades físicas para cavidades (Daniels, 1988):

Tabla I. Valores de propiedades físicas de cavidades.

Propiedad Física	Cavidad vacía	Cavidad llena de agua
densidad	0.0 gr/cc	1 gr/cc
resistividad	∞	baja *
velocidad acústica	330 m/s	1500 m/s
constante dieléctrica relativa	1	80

*agua dulce 25-75 Ω -m y agua salada 0.2-1 Ω -m.

Ya que la densidad y la velocidad acústica del agua y aire son menores que los valores de las rocas encajonantes, las señales acústicas y gravimétricas de una cavidad tienen el mismo signo en cavidades vacías y llenas de agua. Sin embargo, las respuestas eléctricas para ambos tipos es contraria. Cavidades vacías: alta resistividad y baja constante dieléctrica; cavidades llenas de agua: baja resistividad con alta constante dieléctrica.

Desafortunadamente, hay rasgos superficiales y subterráneos que producen efectos que pueden contrarrestar la anomalía de una cavidad no permitiendo caracterizar el entorno geológico. Es decir, la cavidad debe buscarse directamente y no a la luz de su ambiente geológico. Claro está, en una prospección de cavidades deben tomarse en cuenta muchos factores: génesis, tipo de roca encajonante, tamaño esperado, etcétera.

El método geofísico a usar en la exploración de cavidades debe ofrecer imágenes de alta resolución del subsuelo, ser poco influenciado por rasgos culturales y topográficos, y ser capaz de distinguir entre la respuesta de la cavidad y su zona de influencia, así como del ruido geológico.

V.2 Métodos geofísicos aplicados a la detección de cavernas

Desde mediados de los 50's se han venido desarrollando metodologías para la detección y delineación de cavidades subterráneas, en este empeño se han aplicado muchos métodos

geofísicos, incluyendo técnicas de sensores remotos (fotografía aérea y de satélite, termometría y radar), métodos de superficie (potenciales, eléctricos, sísmicos y electromagnéticos) y métodos de contacto directo (perforaciones y sensores de pozos).

Los sensores remotos, mas que detectar directamente las cavidades, miden algún efecto asociado a las mismas. Estos métodos ofrecen la gran ventaja del cubrimiento rápido de grandes áreas. Sin embargo, solamente han servido como herramientas de reconocimiento que sugieren la ocurrencia de cavidades (principalmente en zonas cársticas), mas no específicamente la localización de las mismas.

Los métodos de superficie miden propiedades reales de las cavidades, pero de una manera indirecta. Los que más se usan, aunque no en este orden son: microgravimetría, magnetometría, métodos eléctricos, electromagnéticos y sísmicos, todos son potencialmente capaces de detectar una cavidad si esta es suficientemente grande o somera. Así, cuando los métodos son aplicados de manera convencional, las cavidades pueden detectarse a profundidades que oscilan entre 1 a 3 veces sus diámetros, dependiendo de la técnica (Parra y Owen, 1990). En estudios geotécnicos, el rango de detectabilidad es complementario de los requerimientos del estudio. Por ejemplo, una cavidad de un metro de diametro a 100 m de profundidad bajo el nivel requerido no concierne, y probablemente no sería detectada por ningún método de superficie. Sin embargo, una cavidad de un metro de diametro a cinco metros de profundidad probablemente sería detectable con microgravimetría y no con sísmica (Butler y Lakshmanan, 1989).

La detección y delimitación de zonas cársticas y localización de túneles, se citan frecuentemente como aplicaciones para la microgravimetría (Butler, 1984; Lakshmanan y Montlucon, 1987; Wenjin y Jianjian, 1990; Camacho *et al.*, 1994). Los estudios tradicionales de gravimetría se convirtieron en microgravimetría con la aparición de gravímetros de alta precisión (1 a 5 μ Gales) en 1968. Varios procedimientos de campo, técnicas de procesamiento y métodos de interpretación fueron desarrollados para utilizar la gran sensibilidad de los estudios microgravimétricos (Arzi, 1975). Por ejemplo: las estaciones están distanciadas entre 2 a 40 m, regresando a las bases cada 30 minutos, la curva de deriva debe tomar en cuenta múltiples estaciones a fin de minimizar la dependencia temporal de las mediciones, las correcciones incluyen mareas y el efecto gravitacional de las variaciones de la presión atmosférica. En general, el rango de anomalías para microgravimetría, es de 15 a 300 μ Gales. Para una anomalía de 100 μ Gales, una cavidad vacía a 30 m de profundidad debe tener un diámetro de 10 m; para una cavidad llena de agua, el diámetro debe ser de 13 m, (Bates, 1973). Butler (1984), concluye que para investigaciones que requieren la delineación de cavidades someras (entre 4 y 6 m) la microgravimetría ofrece muy buenos resultados.

En situaciones donde las cavidades representan un contraste de susceptibilidad magnética con el medio encajonante, como en ambientes volcánicos, es posible utilizar el método magnético (Arzate *et al.*, 1991). En ambientes cársticos, el método magnético no ofrece posibilidades.

Los métodos sísmicos, incluyendo refracción y reflexión se han utilizado en la detección de cavernas, aunque no con tanto éxito como los métodos eléctricos y microgravimetría. Sin embargo, recientes desarrollos en sísmica somera han vencido muchas de las barreras técnicas para lograr la detección de cavidades por reflexión sísmica. A pesar de esto, en general los métodos sísmicos no han tenido tanto éxito como los métodos eléctricos y la microgravimetría.

El desarrollo de equipo y metodologías para el uso del georadar (GPR) ha agregado una técnica más al mapeo de cavidades. Excepto en condiciones ideales (hielo, arena y sal), el georadar se considera como una técnica de investigación somera. En condiciones muy arcillosas, la profundidad de exploración es menor a un metro; usualmente se considera en menos de 15 m. Sin embargo, en condiciones apropiadas puede tener la resolución de cualquier otra técnica. El georadar tiene la ventaja de poder hacerse rápidamente, cubriendo un área con perfiles de poca separación, y aunque es posible utilizar mucho del procesamiento de sísmica, las interpretaciones se hacen directamente en el campo.

La considerable diferencia entre la resistividad del medio rocoso y el vacío, es uno de los rasgos más sobresalientes de una cavidad, y por esta razón el método de resistividad ha sido, desde el inicio, uno de los más utilizados en la búsqueda de cavernas (Cooper y Bieganousky, 1978; Butler y Llopis, 1991; Ballard, 1982; Butler y Murphy, 1980). Las técnicas más utilizadas son: sondeos eléctricos verticales (Schlumberger y Wenner), perfiles Wenner, perfiles dipolo-dipolo, el método de equipotenciales y el método tripotencial (Jabberjam, 1969). Una de las técnicas más empleada y que merece especial atención es el

método de Bristow-Bates (Bristow, 1966; Bates,1973), este consiste en una modificación del arreglo polo-dipolo descrito por Lögn (1954) en conjunción con una técnica de interpretación gráfica (método de intersección de arcos). Muchos experimentos de campo han comprobado su efectividad en la delineación de cavernas (Smith, 1986), aunque sigue siendo motivo de polémica los principios en que se fundamenta (Lowry y Shive, 1990). Recientes innovaciones en equipo y técnicas de tomografía eléctrica ERT (Noel y Xu, 1991; Noel y Xu, 1992), permiten mayor rapidez en la adquisición de un volumen mayor de datos independientes, prometiendo mejoras sustanciales en la resolución espacial del método.

Los métodos directos intentan localizar cavidades a través de barrenos o excavaciones. Esto incluye la perforación de pozos exploratorios separados por distancias cortas y técnicas de monitoreo de piezometría y filtraciones. El uso en la detección de cavidades de técnicas de tomografía sísmica y electromagnética en pozos, es técnicamente posible y justificable para ciertas aplicaciones, tal como investigaciones de cimentación para estructuras críticas donde un gran número de perforaciones sean disponibles. Sin embargo el costo de perforación, combinado con la geofísica de pozos, hacen que tales sean imprácticas como metodologías generales de exploración .

V.3 Conclusiones

Es imposible determinar qué método geofísico es el más adecuado en la localización de cavernas. Evidentemente el éxito relativo de un método depende en alto grado de las condiciones geológicas y el tamaño de la cavidad. Debe tomarse en cuenta el criterio de superioridad de cualquiera de los métodos comparado con los otros basado en el principio físico de operación, es menos importante que su habilidad para producir una respuesta medible en presencia de ruido geológico. Sin embargo, la literatura muestra que la microgravimetría y resistividad eléctrica, son las técnicas que se usan con más frecuencia usadas en la detección y mapeo de cavidades, aunque en condiciones especiales el georadar y las técnicas de sondeos de pozos también han reportado éxitos.

V.4 Resumen

Se han revisado algunos aspectos sobre detección de cavidades subterráneas mediante métodos geofísicos. Primero: aspectos geológicos importantes que deben tomarse en cuenta, y segundo: la aplicación de los métodos de sensores remotos, métodos superficiales y métodos de pozo, con mayor énfasis en métodos de resistividad eléctrica y microgravimetría. En conclusión, la técnica geofísica más adecuada en un trabajo de detección de cavidades dependerá de las situación geológica y de la escala del estudio.

VI. APLICACIONES

VI.1 Introducción

En este capítulo se presentan algunas aplicaciones de los conceptos y algoritmos tratados en los capítulos anteriores. La primera se refiere a la inversión de anomalías de cavidades a partir de mediciones de laboratorio. La segunda es la interpretación de perfiles dipolo-dipolo sobre una zona de cavernas, y la comparación de las imágenes obtenidas por inversión lineal e inversión puntual. La tercera es una inversión incluyendo topografía para un conjunto de datos de un campo geotérmico.

VI.2 modelado físico de cavidades

En el laboratorio se llevaron a cabo una serie de experimentos con el objetivo de estudiar la respuesta eléctrica de cavidades vacías en un medio bidimensional. Para tal efecto, se utilizó una cuba electrolítica (figura 24) donde se simuló un semi-espacio bidimensional con agua salada ($3 \Omega\text{-m}$), y plastilina para representar las cavidades. Se utilizó un arreglo dipolo-dipolo con electrodos lineales distanciados un centímetro y los perfiles se realizaron para $n=1,2,3$, hasta 10, siguiéndose la metodología usual para el levantamiento de campo. Es decir, para cada estación de inyección de corriente, el dipolo de potencial fue moviéndose hasta barrer el perfil. Las mediciones fueron realizadas con el equipo de resistividad BISON modelo 2390 del CICESE. Finalmente, las observaciones fueron invertidas para comprobar el funcionamiento del algoritmo de

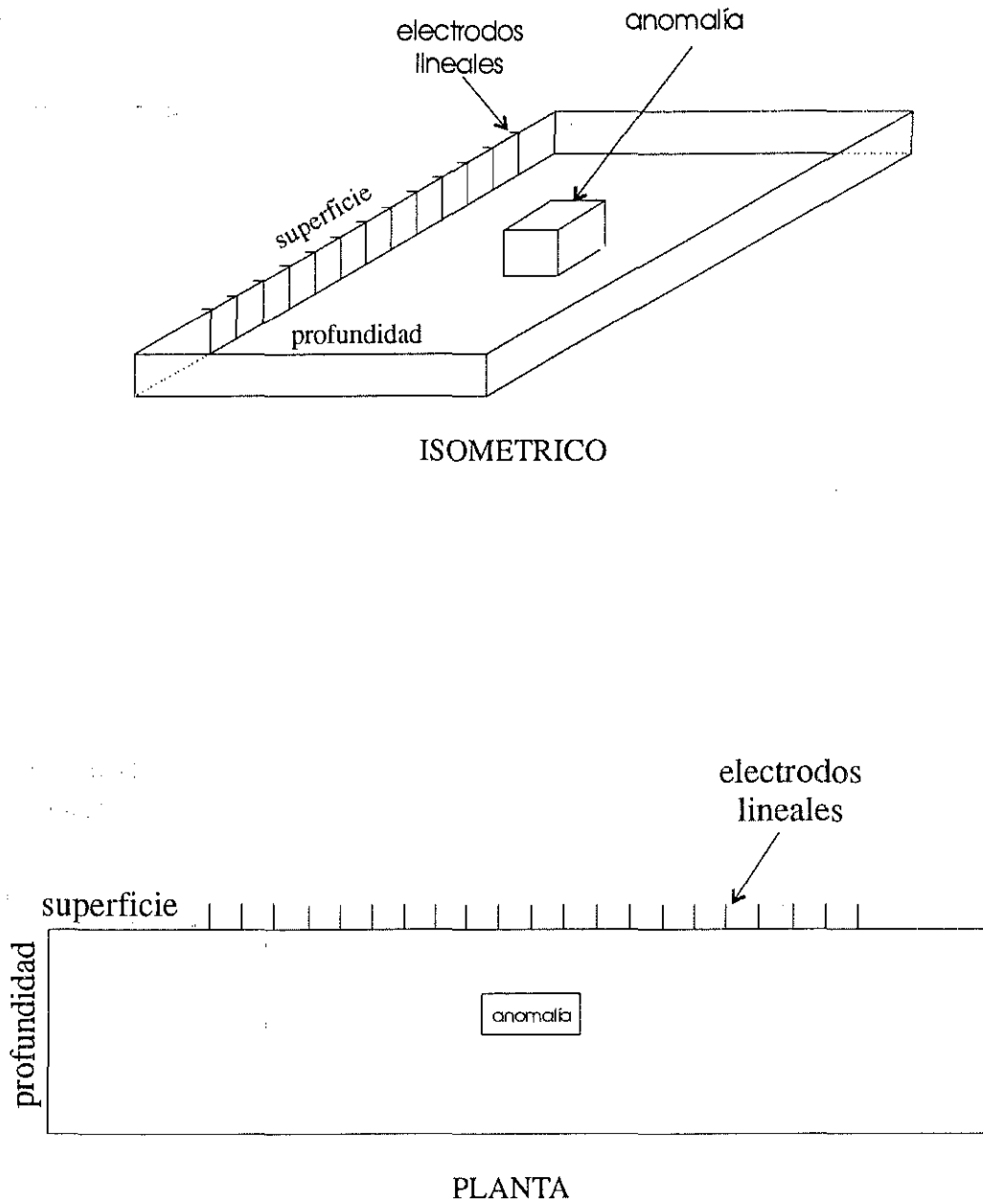


Figura 24. Vistas de la cuba electrolítica utilizada en los ensayos.

inversión de fuente lineal. Los resultados para los cuatro experimentos se muestran y discuten a continuación:

EXPERIMENTO A: los resultados de la simulación de una sola caverna se muestran en las figuras 25 y 26. Las secciones para diferentes grados de suavizamiento muestran una adecuada resolución de la anomalía y las pseudosecciones correspondientes, presentan la forma característica de una anomalía resistiva en un semi-espacio homogéneo.

EXPERIMENTO B: cuatro cavernas se simularon en esta prueba y los resultados se muestran en las figuras 27 y 28. En la figura 27 puede observarse una adecuada resolución de los cuerpos resistivos, aunque dado el tamaño del cuerpo mayor, su límite inferior no alcanza a ser bien definido.

EXPERIMENTO C: en este ensayo se quiso observar el grado de apantallamiento de cavidades somera y pequeñas sobre otras de mayor tamaño y más profundas. La definición de las cavidades someras es adecuada para suavizamientos pequeños, aunque no se alcanzan a separar los efectos de las anomalías del extremo derecho de la cuba (figuras 29 y 30). Nuevamente, los límites inferiores de las anomalías profundas no quedan definidos.

En general, el método eléctrico dió buenos resultados en la detección de las anomalías; las aberturas electródicas (a) ideales fueron aquellas de un tercio a un medio del diámetro de la cavidad; cavidades con diámetros comparables a las aberturas electródicas no fueron

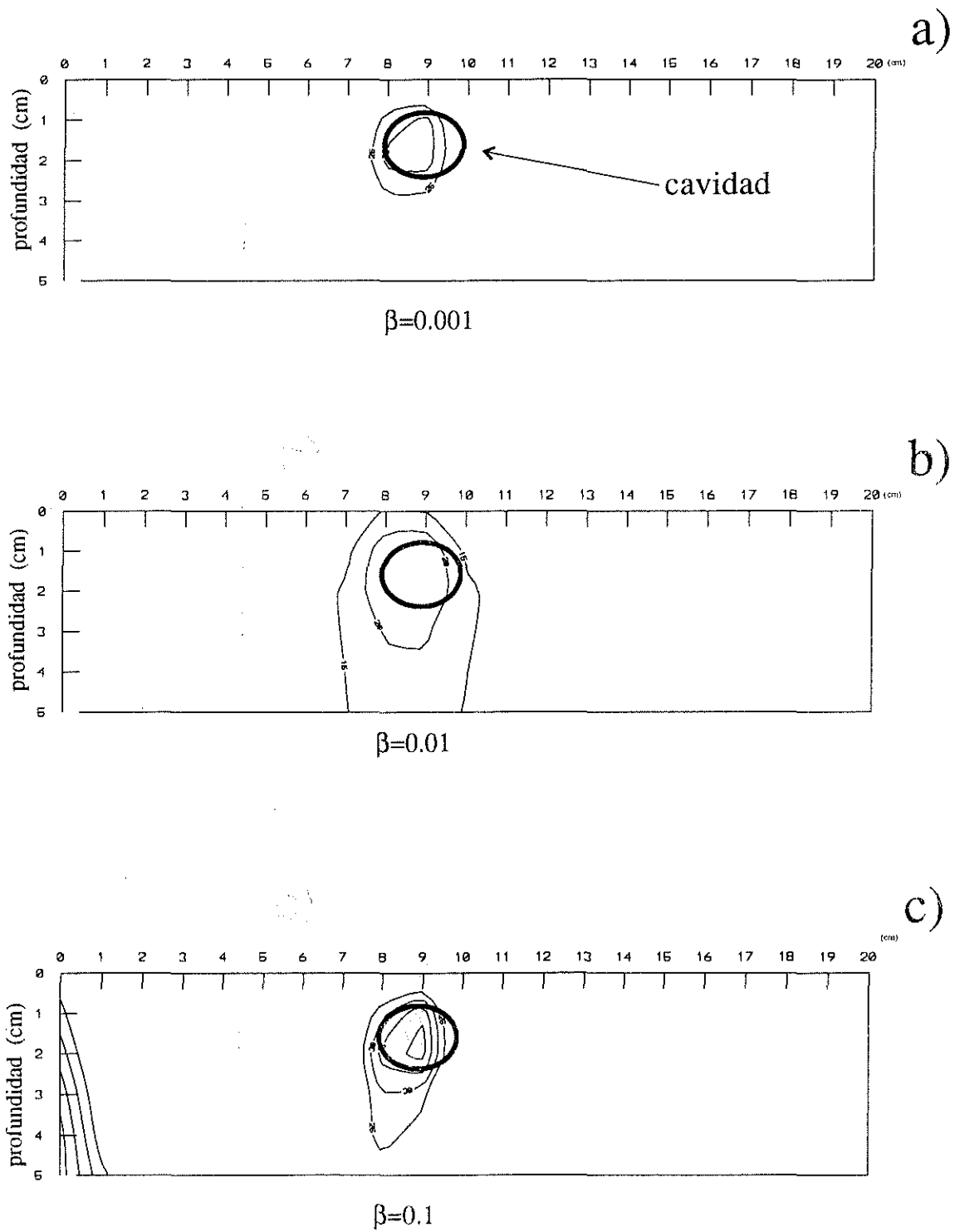


Figura 25. Secciones de resistividad del experimento A para inversión con fuente lineal. Para los tres modelos: contornos cada $5 \Omega\text{-m}$.

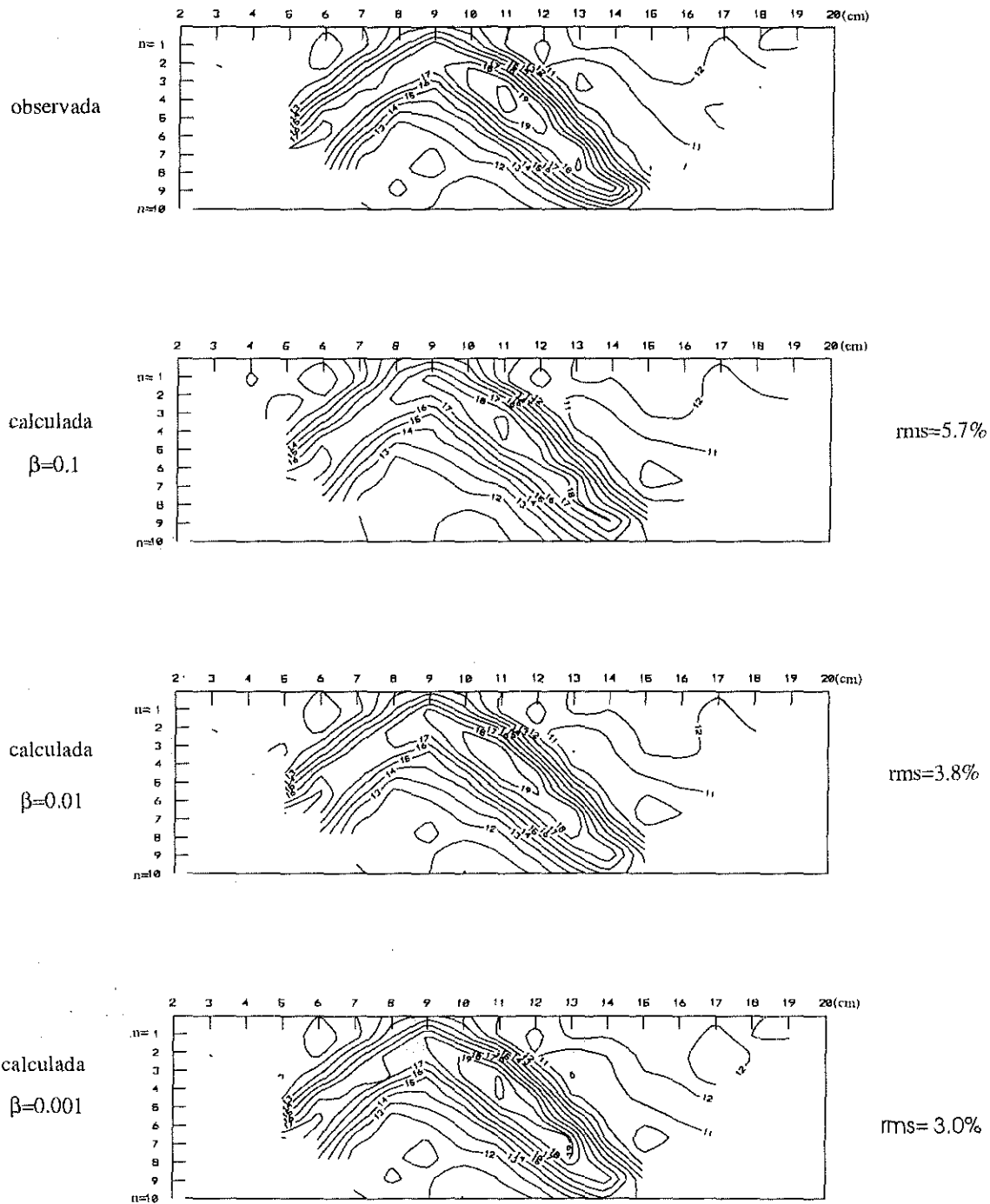


Figura 26. Pseudosecciones de resistividad para el experimento A (contornos cada 1 Ω -m).

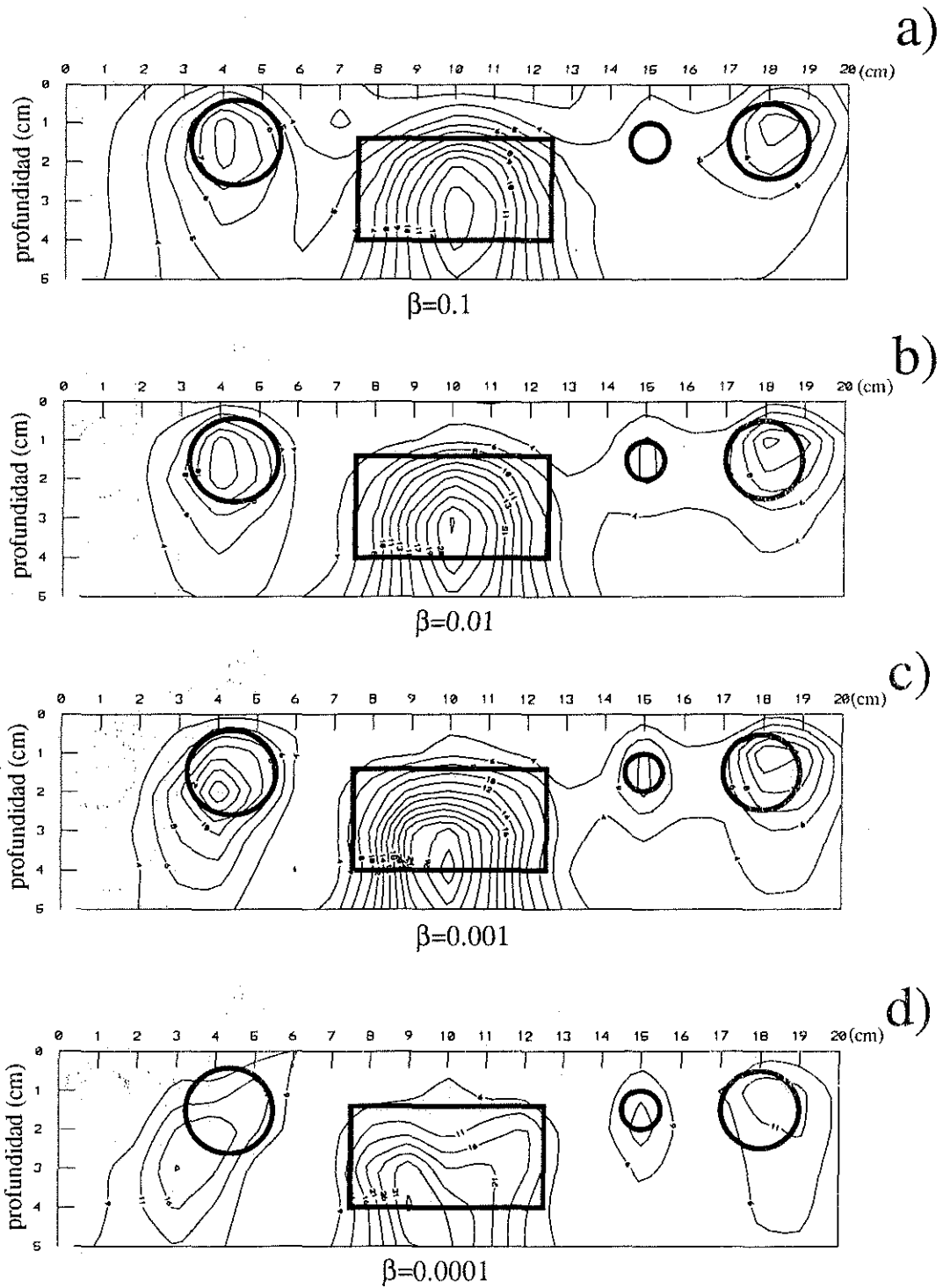


Figura 27. Secciones de resistividad del experimento B para inversión con fuente lineal. a) Contornos cada 1 Ω -m. b) Contornos cada 2 Ω -m. c) Contornos cada 2 Ω -m. d) Contornos cada 5 Ω -m.

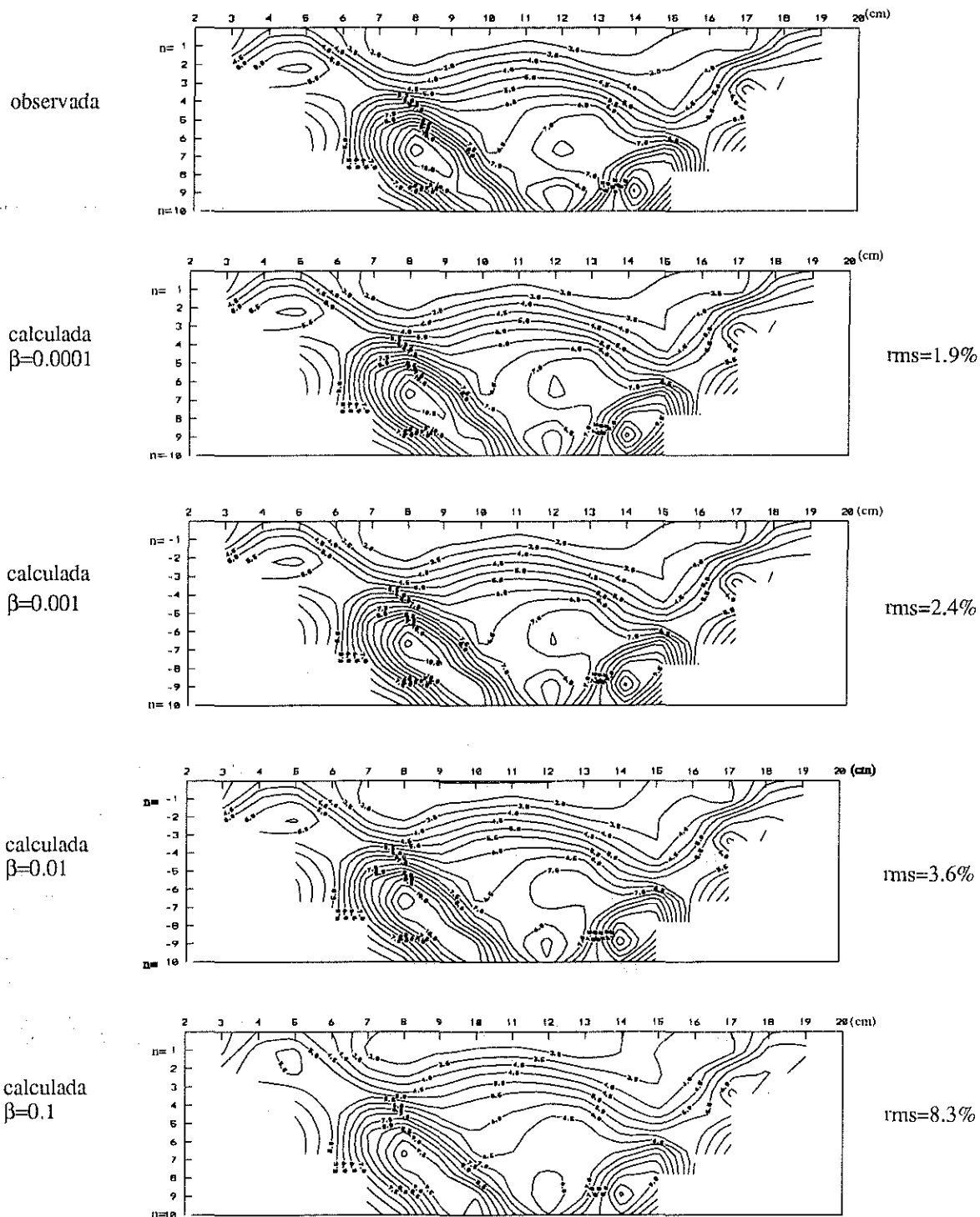


Figura 28. Pseudosecciones de resistividad para el experimento B (contornos cada $0.5 \Omega\text{-m}$).

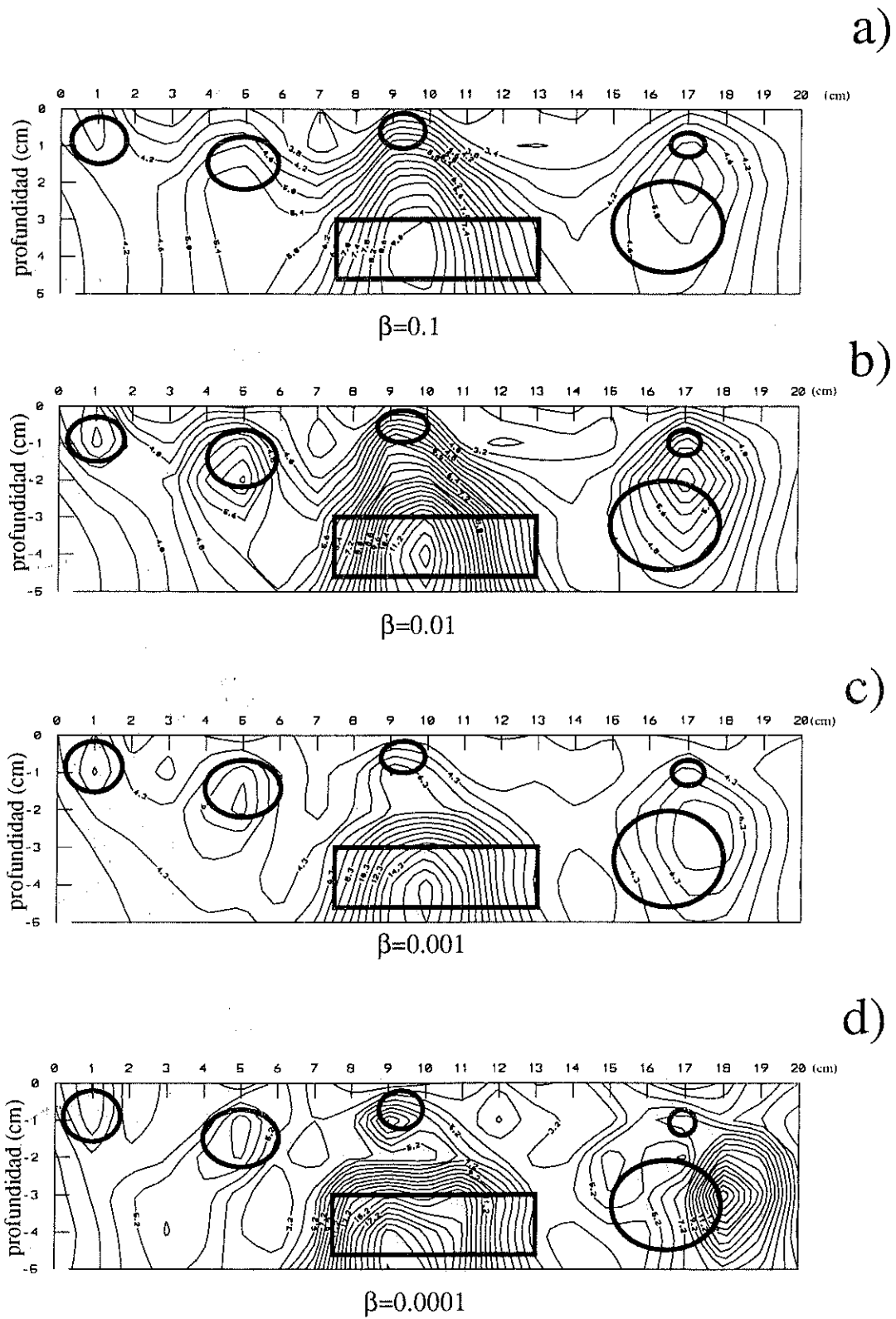


Figura 29. Secciones de resistividad del experimento C para inversión con fuente lineal. a) Contornos cada $0.4 \Omega\text{-m}$. b) Contornos cada $0.4 \Omega\text{-m}$. c) Contornos cada $1 \Omega\text{-m}$. d) Contornos cada $1 \Omega\text{-m}$.

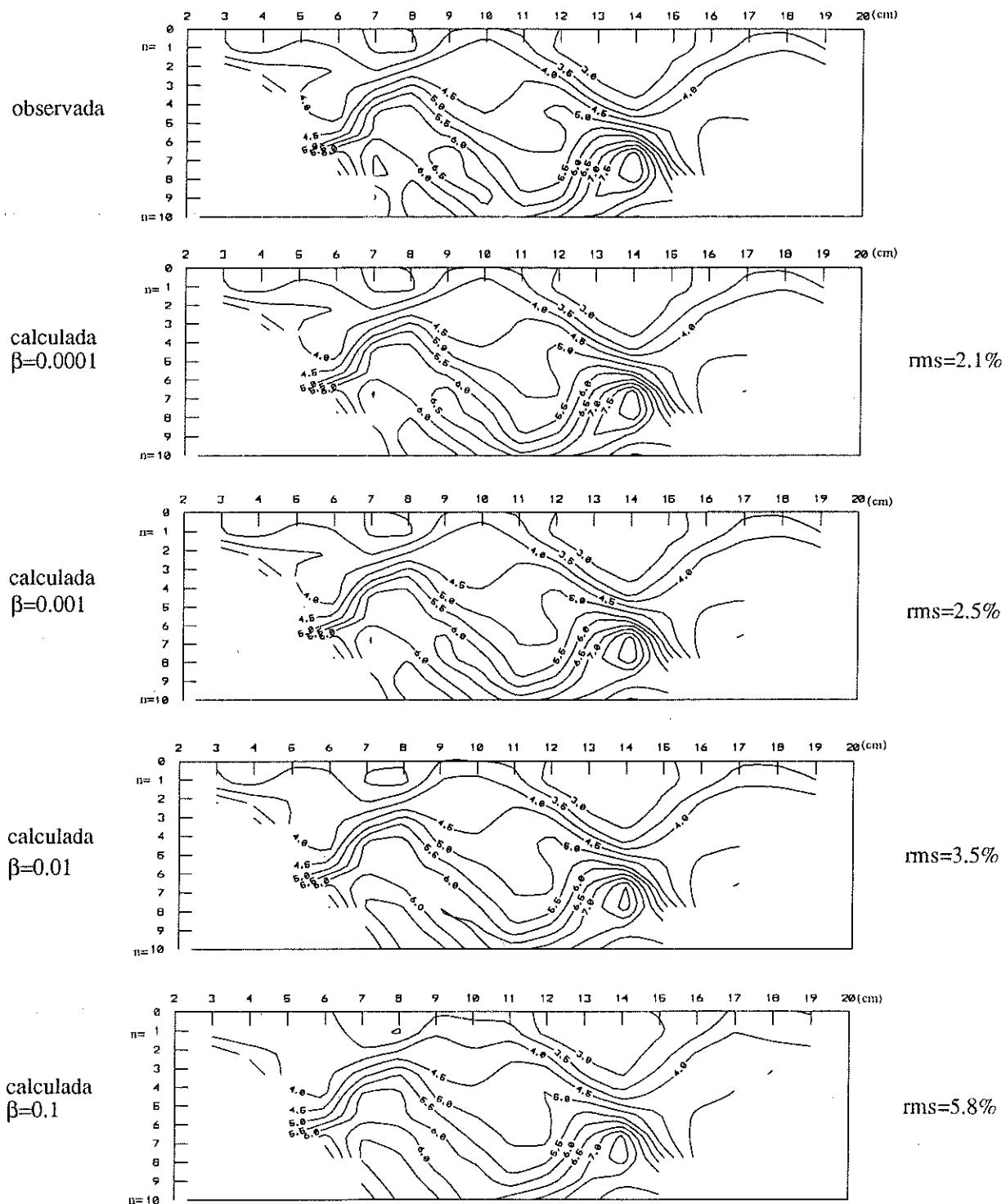


Figura 30. Pseudosecciones de resistividad para el experimento C (contornos cada 0.5 $\Omega\text{-m}$).

detectadas. El límite en profundidad para la detección fue de 4 veces la abertura electródica, aunque este varía dependiendo de las condiciones superficiales y de la distancia máxima interdipolar usada (n). Es importante tomar en cuenta que el arreglo dipolo-dipolo es muy afectado por las heterogeneidades someras (estática), debido a que el área con mayor peso en las mediciones, se concentra en los alrededores de los electrodos, dicha área aumenta conforme es mayor la separación interdipolar.

Por otro lado, de las pseudosecciones no es posible obtener información suficiente para hacer predicciones de la posición y geometría de las cavidades. Realmente, la pseudosección no es más que una representación del promediado espacial de la distribución de resistividad en el suelo. Una cavidad aislada es claramente caracterizable, pero no cuando hay efectos de otras cavidades, que tienden a combinarse. La inversión, entonces juega el papel de “separador” de efectos, cuando las condiciones de resolución lo permiten.

VI.3 Modelado inverso de datos de campo

Fueron interpretados perfiles dipolo-dipolo levantados sobre una zona de cavernas (Gómez-Treviño *et al.* 1991) utilizando el algoritmo de inversión de fuentes lineales ya discutido, y un algoritmo de inversión para fuente puntal (Pérez-Flores, 1992). En este levantamiento se hicieron 3 perfiles con aberturas electródicas de $a= 1.5$ y 3 m sobre una caverna conectada hasta el exterior, la ubicación de las líneas y su relación con la caverna se muestran en figura 31. La comparación entre los resultados para los perfiles de $a=3$ m se muestra en las figuras 32 a 38.

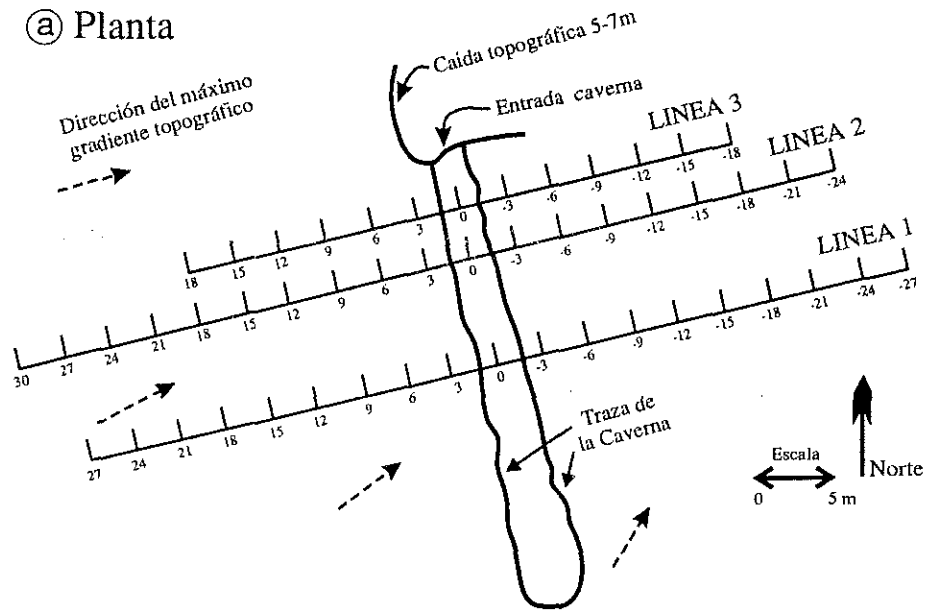
La caverna no se detecta en el perfil 1, aunque sí existe un aumento en la resistividad entre las posiciones -6 y -4, a 7 m de profundidad; las altas resistividades someras observadas se deben a efectos superficiales y se presentan en los tres perfiles. La delineación de la caverna (posiciones -8 a 0) en los perfiles 2 y 3 no corresponde exactamente a su traza en superficie (figura 31.a), ésto seguramente se debe a efectos de halo en las proximidades de la caverna; lo mismo puede decirse del emplazamiento vertical resistivo que se observa en el perfil 2, y que parece conectar la caverna con la superficie (figura 38). En general, los modelos de inversión explican satisfactoriamente las observaciones, aún cuando no se han tomado en cuenta factores como la topografía. En otro aspecto, los modelos arrojados por la inversión lineal, muestran gran semejanza con los reportados por la inversión de fuente puntual; al menos en los rasgos mayores, que son los aspectos importantes en este caso.

VI.4 Modelado inverso incluyendo topografía

Se ha re-interpretado una línea dipolo-dipolo levantada en el campo geotérmico de Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador (Pérez-Flores y Gómez-Treviño, 1992; Barrios-López, 1993). Aunque este ejemplo no está dirigido a detección de cavidades, es muy valioso al demostrar varios aspectos del efecto topográfico sobre las mediciones de resistividad.

Como se ha mencionado anteriormente (capítulo IV), la metodología a seguir en la inversión con topografía es: mapear al plano Z la posición de los electrodos y vértices del polígono topográfico, obtener las resistividades aparentes en función de la constante

(a) Planta



(b) Sección N-S

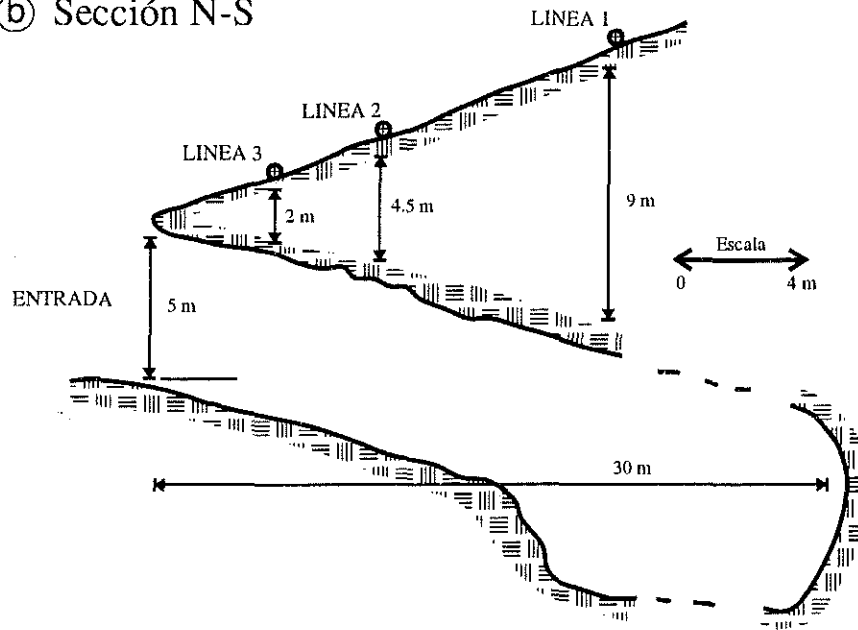


Figura 31. Localización de los perfiles dipolo-dipolo en relación a la caverna. Denuncio Sandra, Mina, Nuevo León.

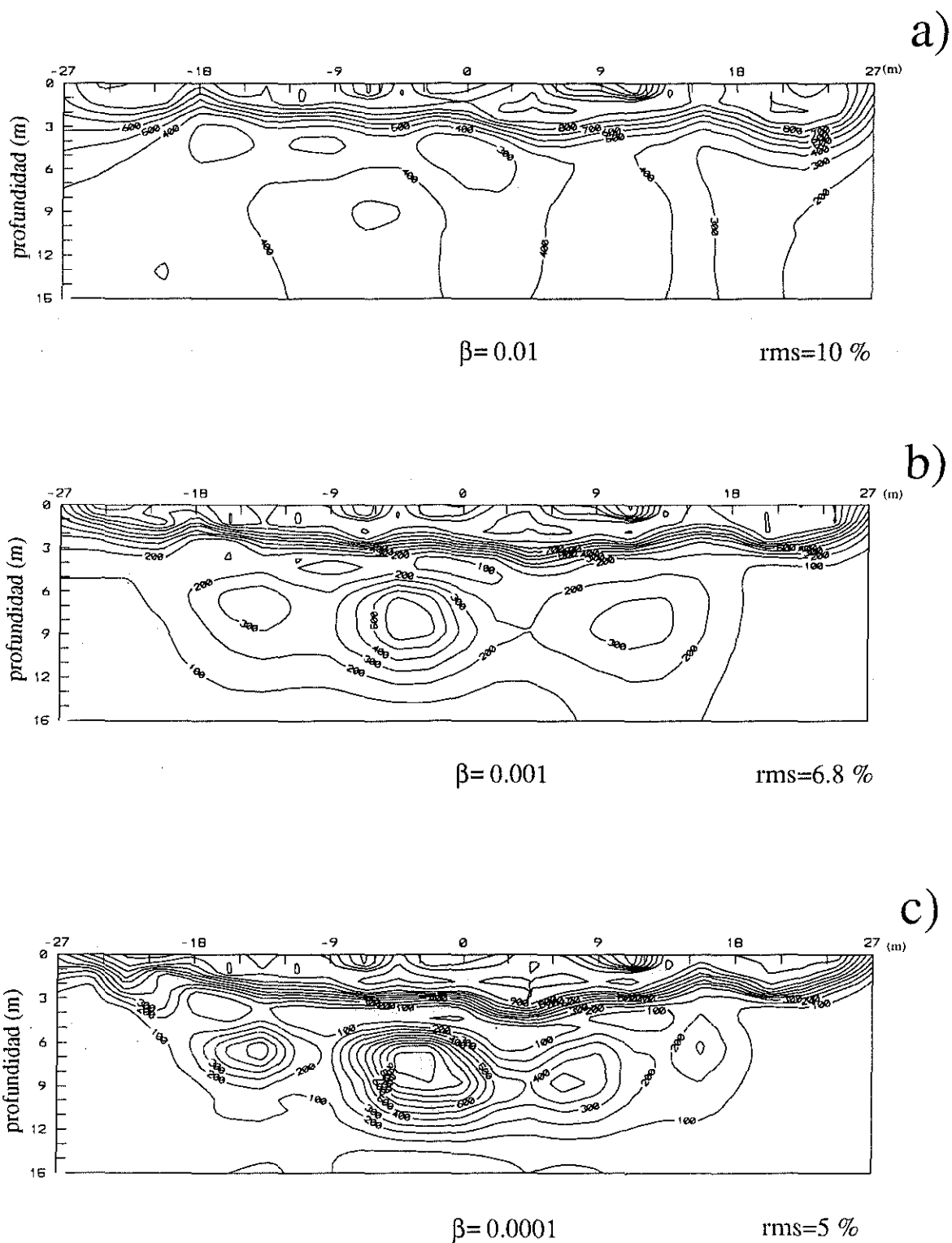


Figura 32. Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la línea 1, $a=3\text{m}$. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada $100 \Omega\text{-m}$).

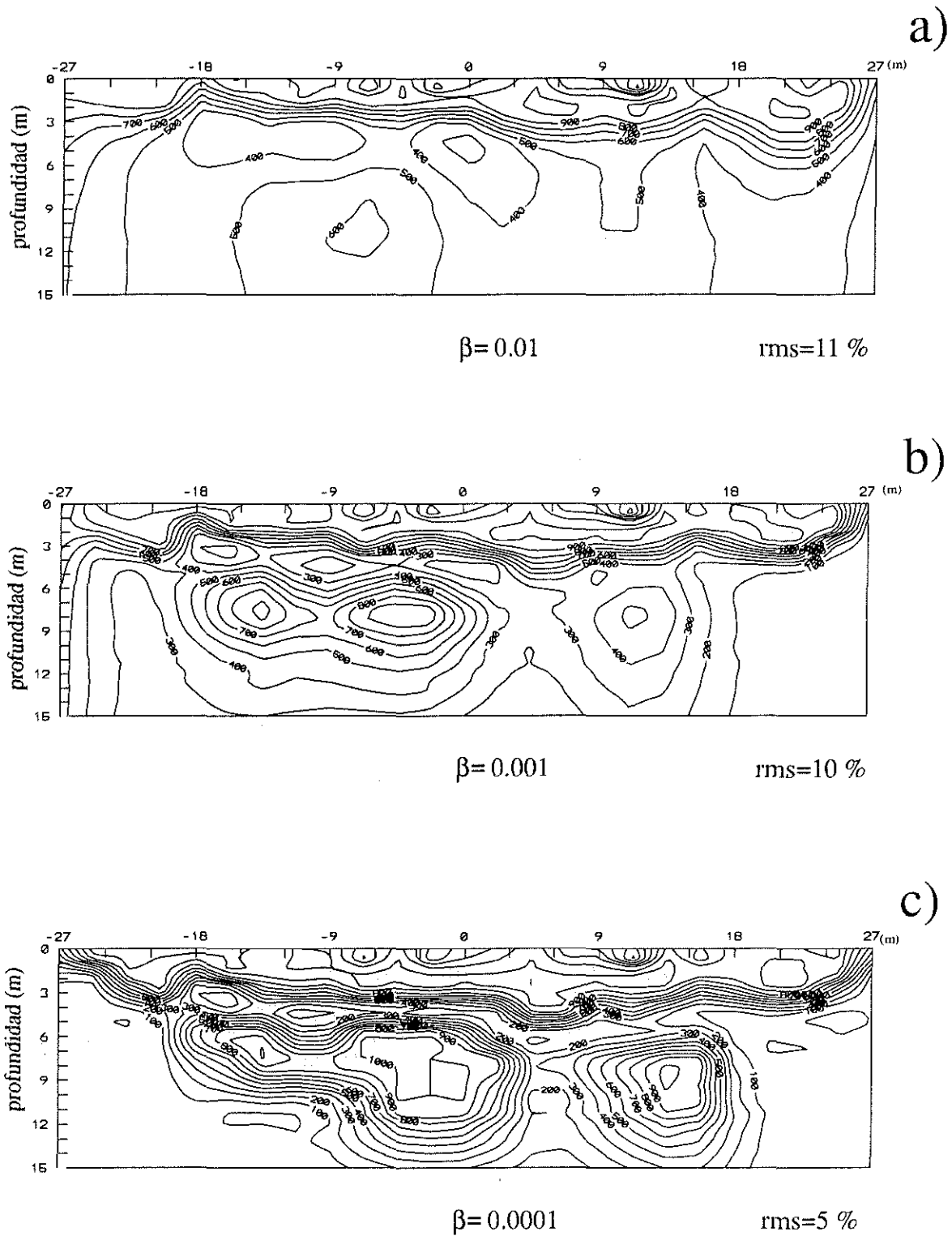


Figura 33. Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la línea 1, $a=3\text{m}$. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada $100 \Omega\text{-m}$).

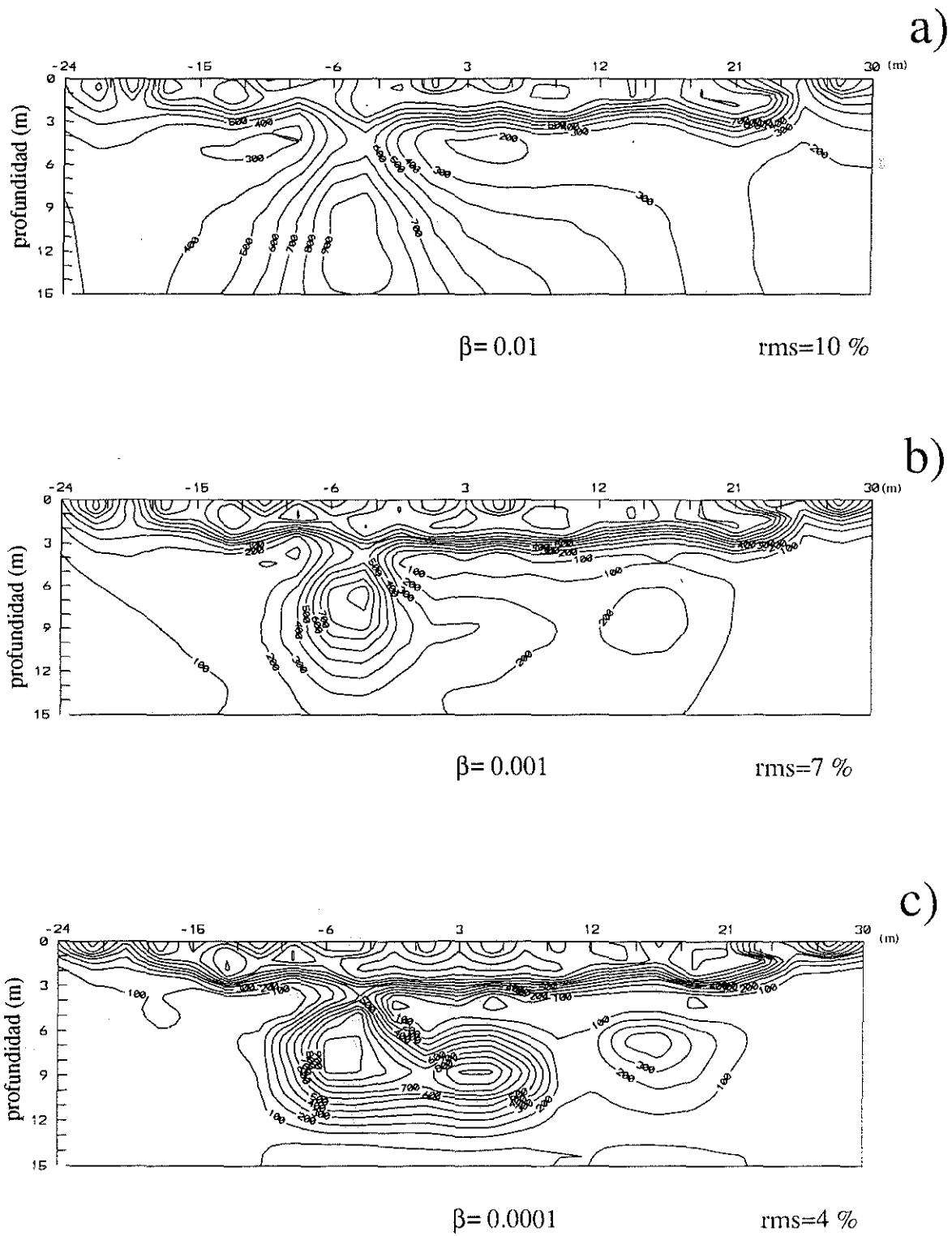


Figura 34. Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la línea 2. $a=3\text{m}$. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada 100 $\Omega\text{-m}$).

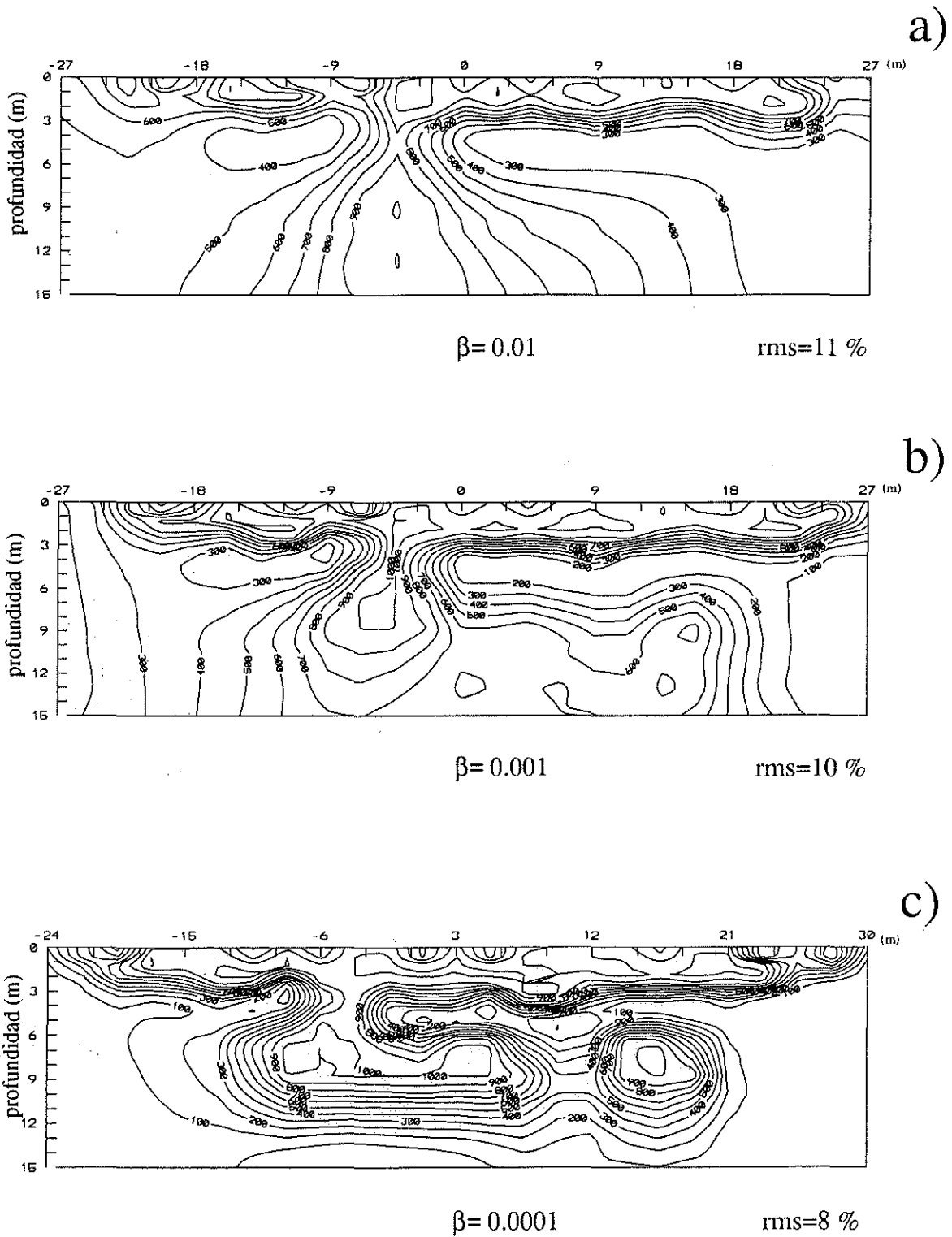


Figura 35. Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la línea 2, $a=3\text{m}$. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada $100 \Omega\text{-m}$).

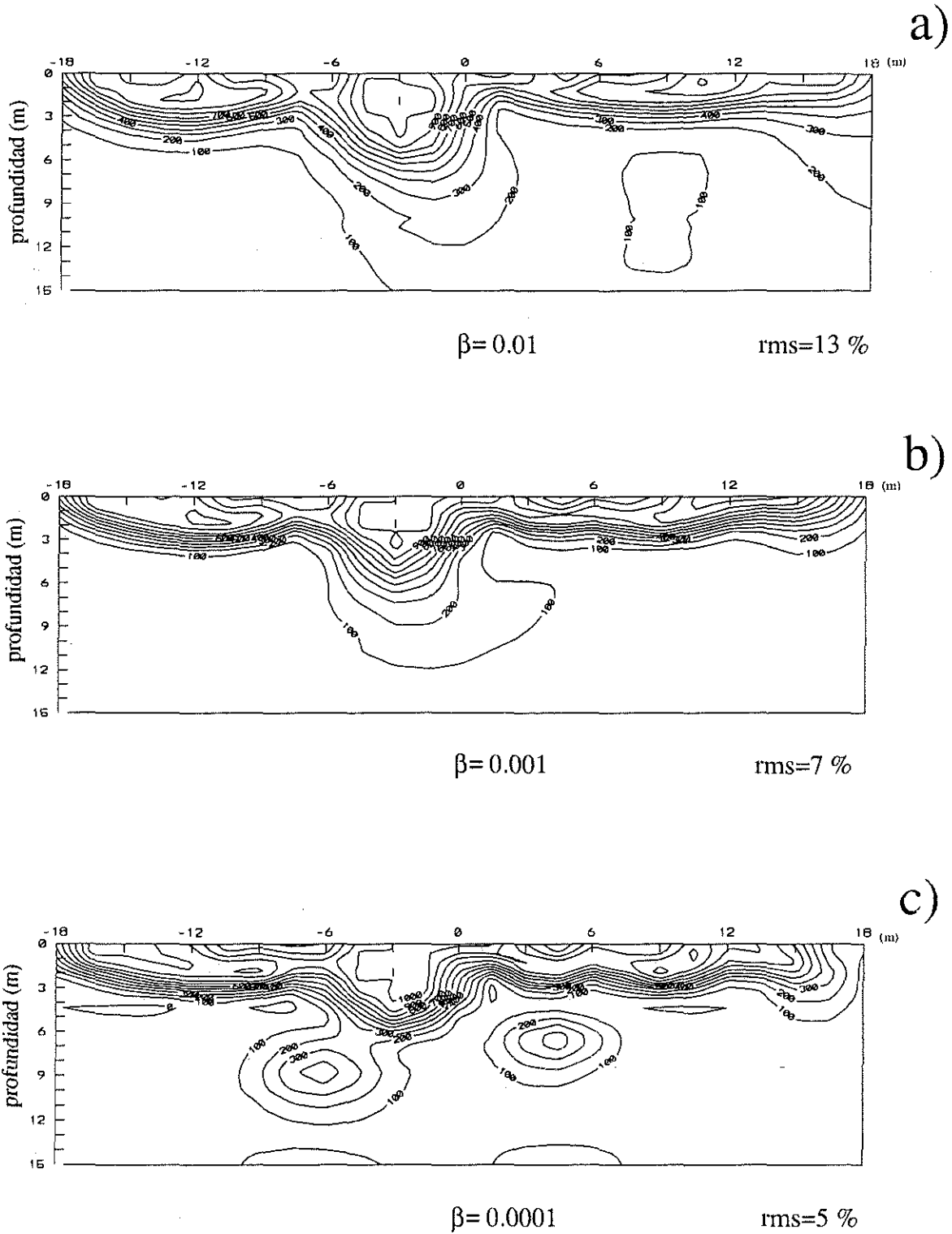


Figura 36. Modelos obtenidos por inversión para fuente lineal de los datos de la línea 3 $a=3\text{m}$. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada $100 \Omega\text{-m}$).

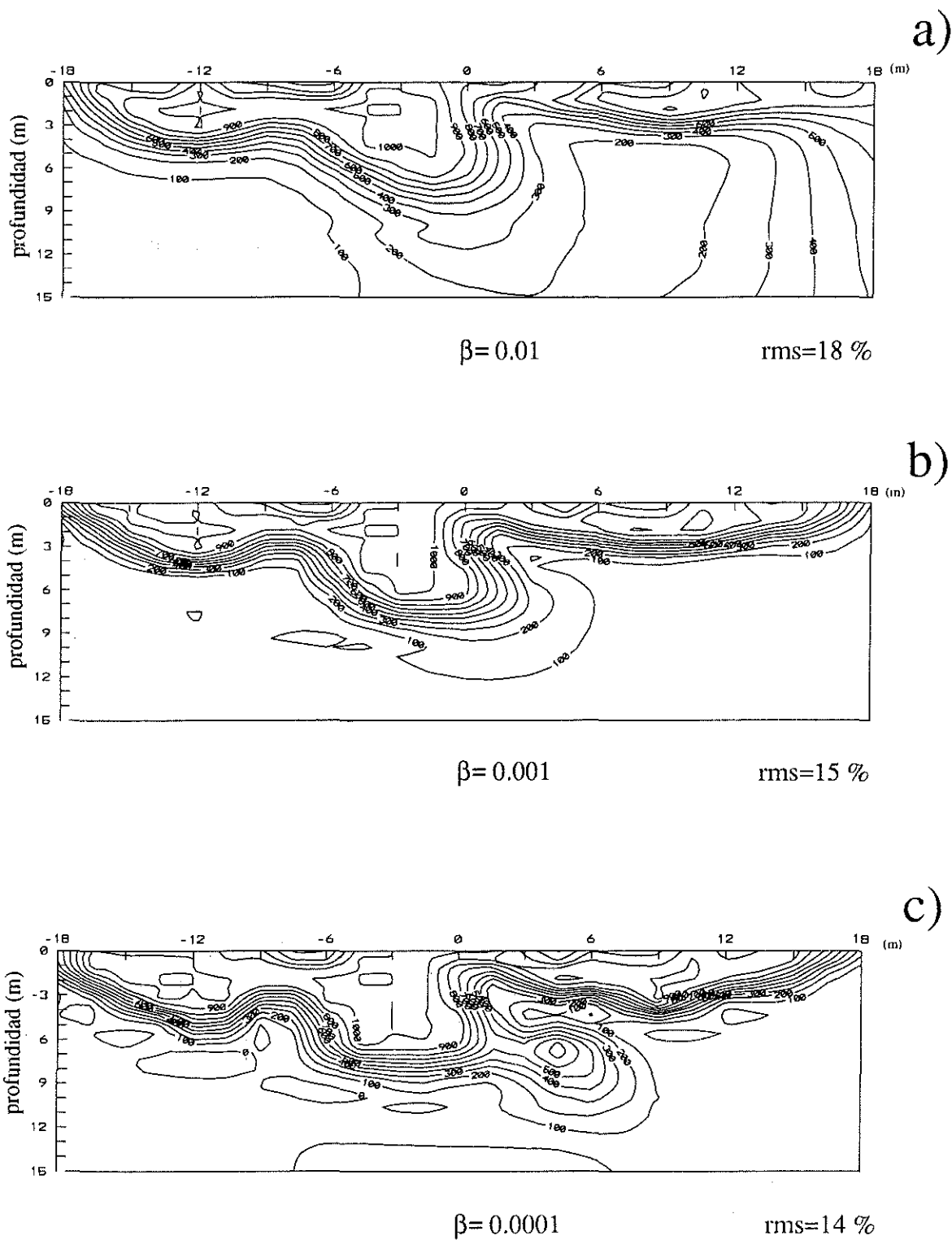


Figura 37. Modelos obtenidos por inversión para fuente puntual de los datos de la línea 3, $a=3\text{m}$. Denuncio Sandra, Mina, N.L. (contornos cada $100 \Omega\text{-m}$).

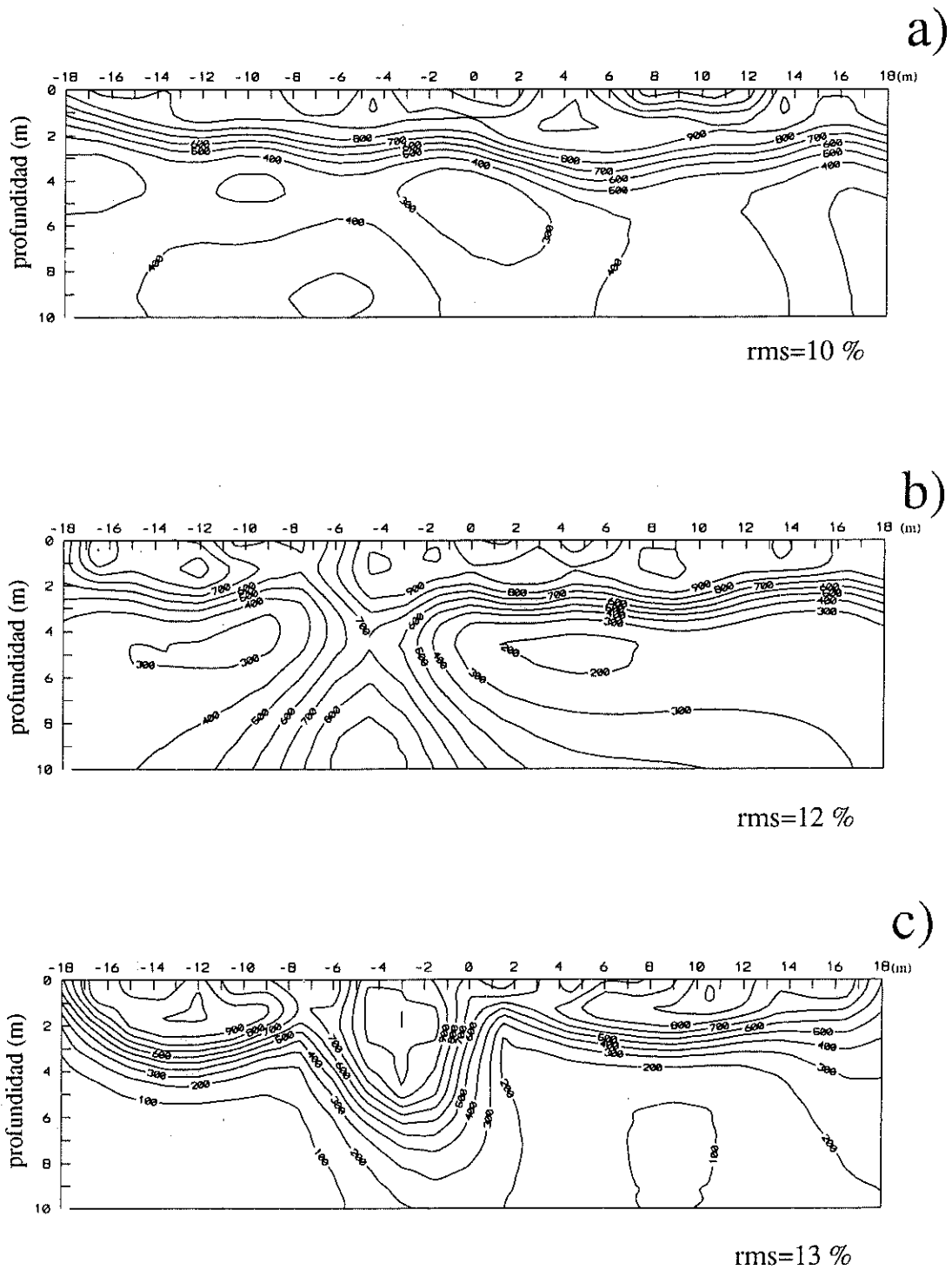


Figura 38. Detalle de la interpretación de las tres líneas dipolo-dipolo para $\beta=0.001$. Denuncio Sandra, Mina N.L. (contornos cada 100 Ω -m).

geométrica para un arreglo general-lineal (factores logarítmicos), aplicar el algoritmo de inversión para fuente lineal o puntual a los datos en el plano Z , y mapear los valores de resistividad verdadera al plano W .

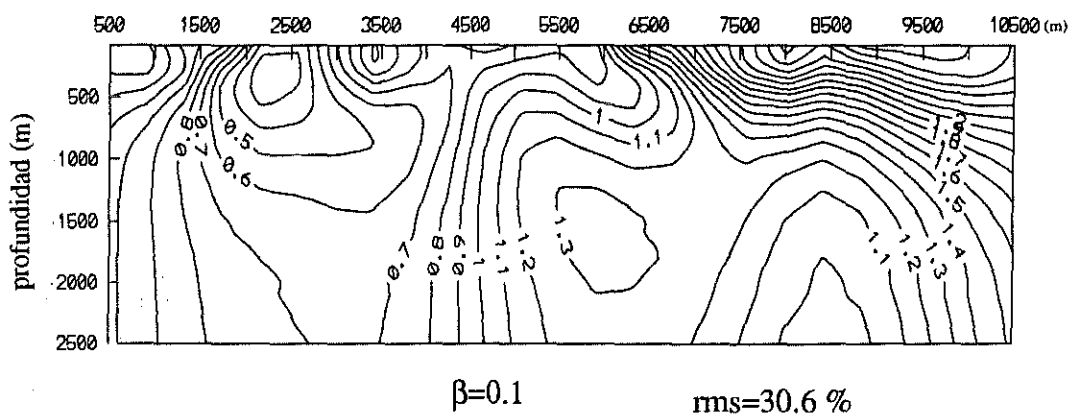
La figura 39 muestra los modelos de inversión para la línea 1 con $a=500$ m, aplicando inversión puntual y sin tomar en cuenta la topografía (los datos están representados en el plano W , suponiendo una topografía totalmente horizontal). Compárese con los modelos de la figura 40, donde se presenta la inversión lineal con topografía; prácticamente no hay diferencias entre ambas. Las figuras 41 y 42, muestran los resultados para la línea 1 con $a=1000$ m. Nuevamente, los resultados de la inversión considerando una topografía plana se muestran en la figura 41, mientras que en la figura 42 se muestran los modelos encontrados considerando topografía irregular; las diferencias más notorias están en el lado derecho de los modelos; por ejemplo, los resistivos en las posiciones 6500 y 7500 de la figura 41, tienden a desaparecer en la figura 42, evidenciándose una zona altamente conductora bajo la posición 9500. Finalmente, se aplicó el algoritmo de inversión para fuente puntual a los datos de la línea 1 (figuras 43 y 44) obteniéndose modelos muy semejantes a los obtenidos en las figuras 41 y 42. En general, los resultados muestran un mayor efecto topográfico en las mediciones con $a=1000$ m, que con $a=500$ m, acentuándose más en la zona de mayor altura topográfica.

V.5 Resumen

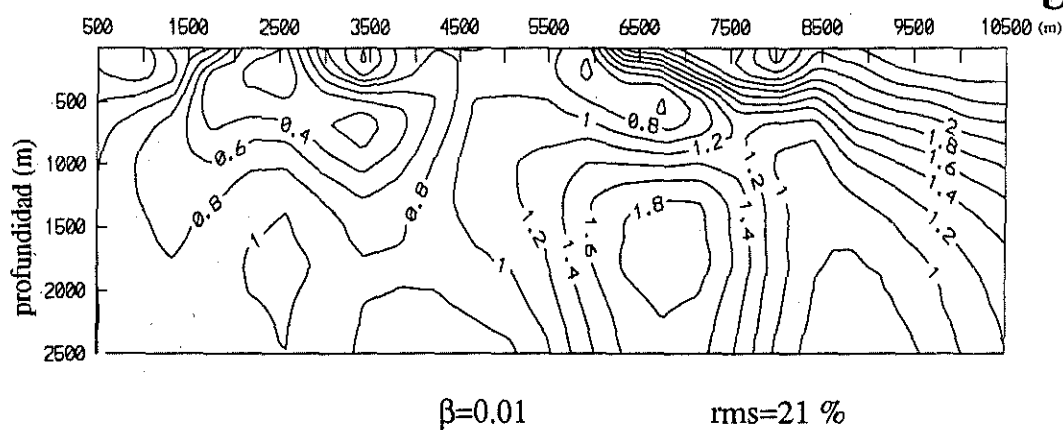
En este capítulo se presentaron aplicaciones de datos obtenidos mediante modelado físico de cavidades. También se consideraron aplicaciones a datos de campo tomando en cuenta el esquema de inversión con topografía. Considerando las condiciones

superficiales, aberturas dipolares de un medio a un tercio del diámetro esperado para las cavidades son adecuadas para la detección. En cuanto al límite de detección en profundidad, se han encontrado valores de 2 a 4 veces la abertura electrónica para distancias interdipolares de $n= 6$ a 10.

a)



b)



c)

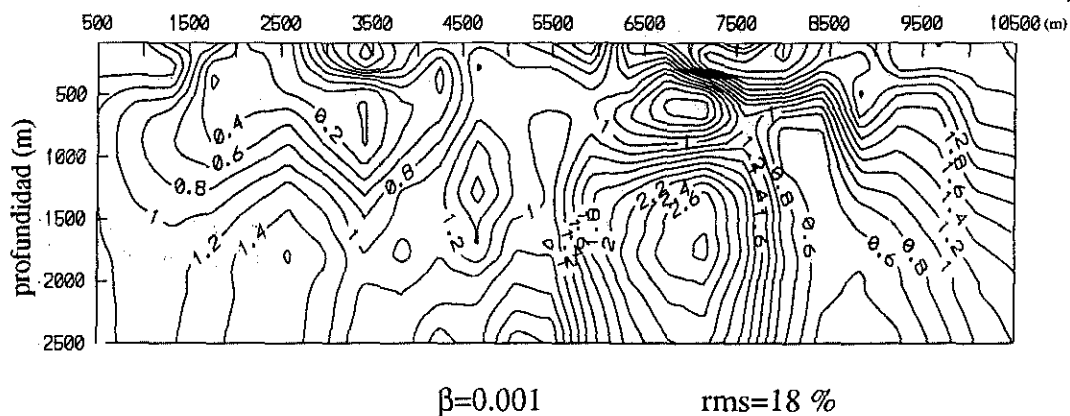


Figura 39. Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano Z). Línea 1, $a=500$ m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en log. 10 de resistividad (contornos cada 0.1).

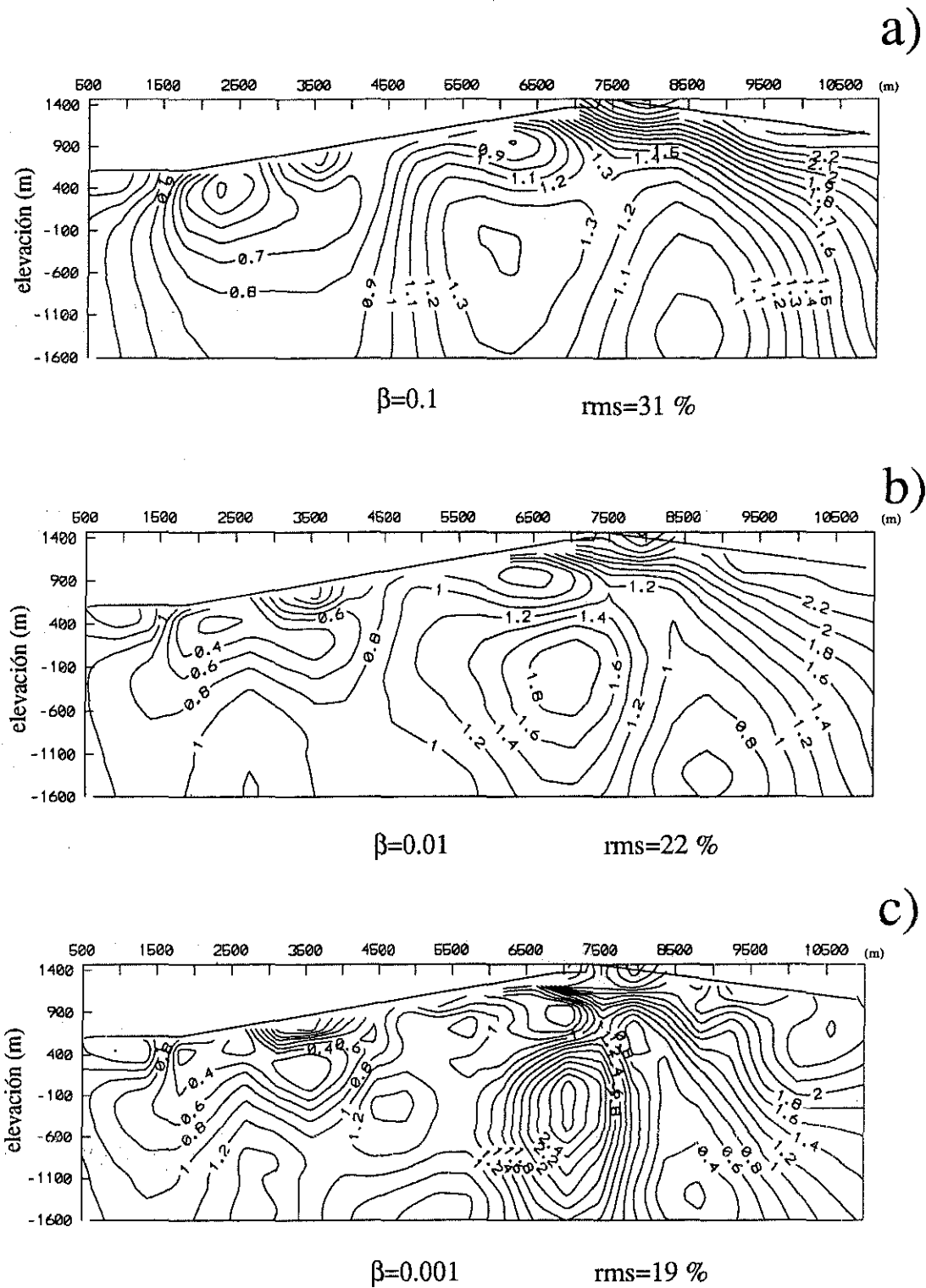
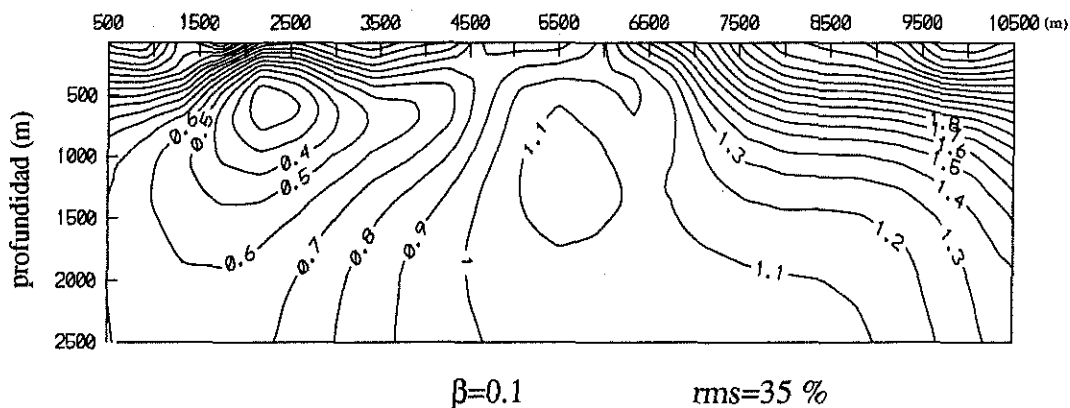
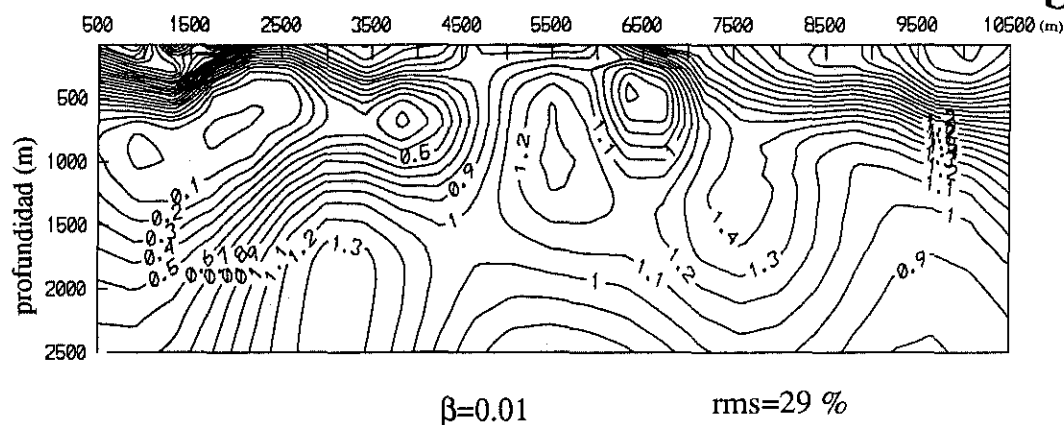


Figura 40. Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente lineal (plano Z). Línea 1, $a=500$ m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en \log_{10} de resistividad (contornos cada 0.1).

a)



b)



c)

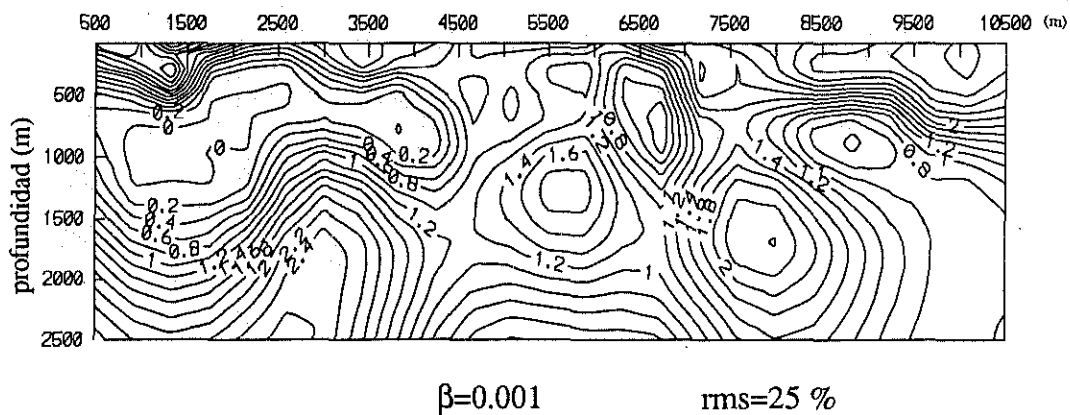


Figura 41. Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano Z). Línea 1, $a=1000$ m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en log₁₀ de resistividad (contornos cada 0.1).

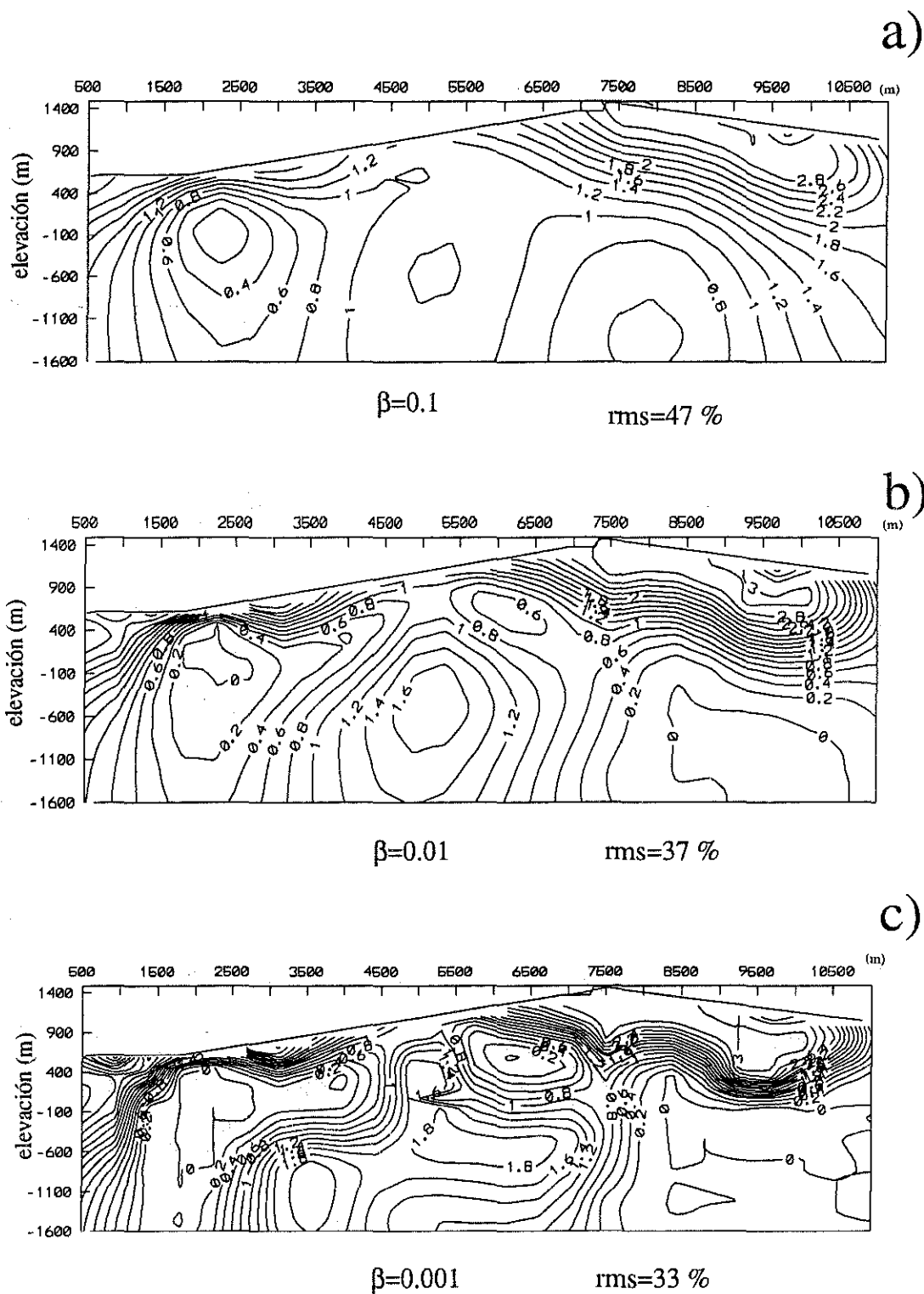


Figura 42. Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente lineal (plano W). Línea 1, $a=1000$ m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en log. 10 de resistividad (contornos cada 0.1).

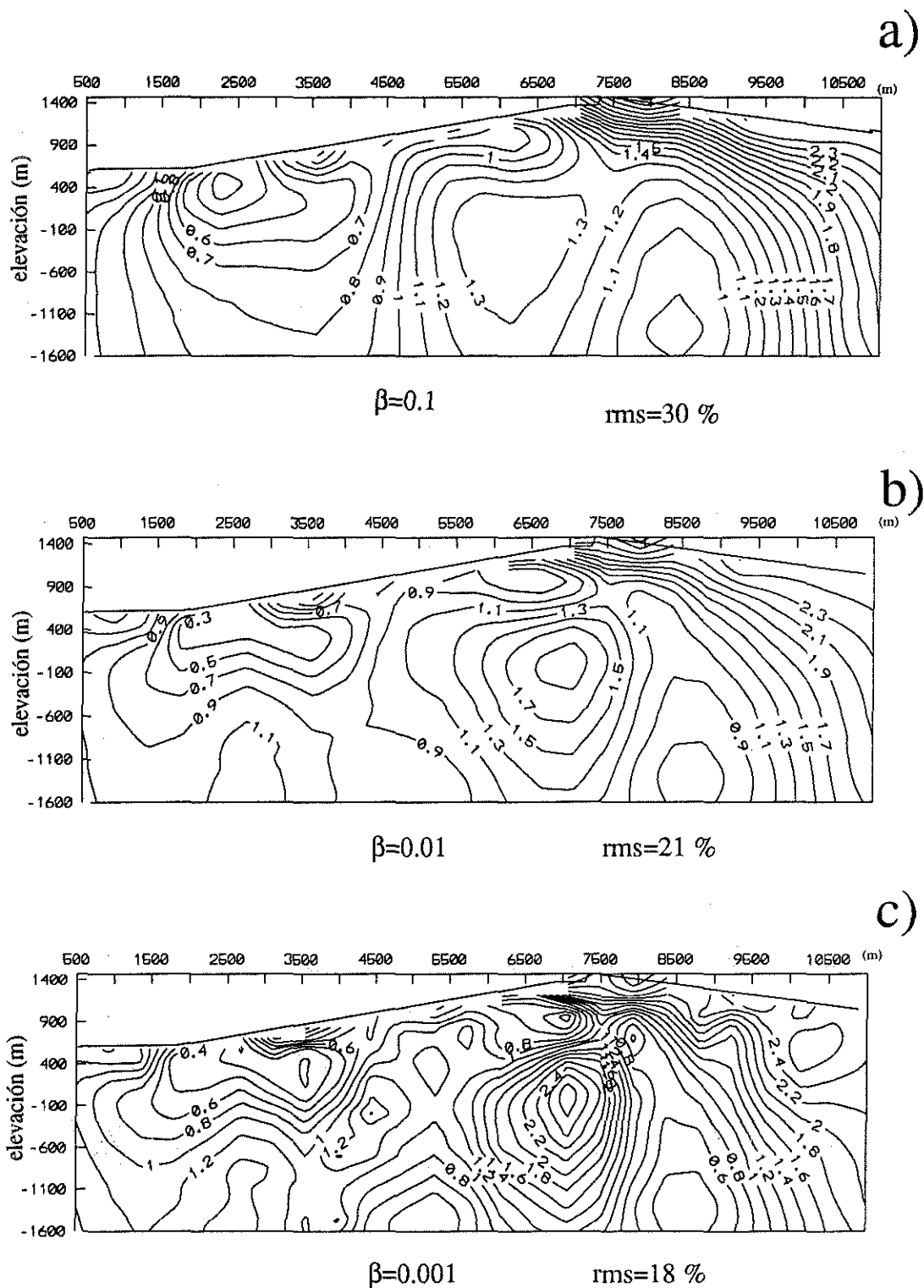


Figura 43. Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano W). Línea 1, $a=500$ m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en log. 10 de resistividad (contornos cada 0.1).

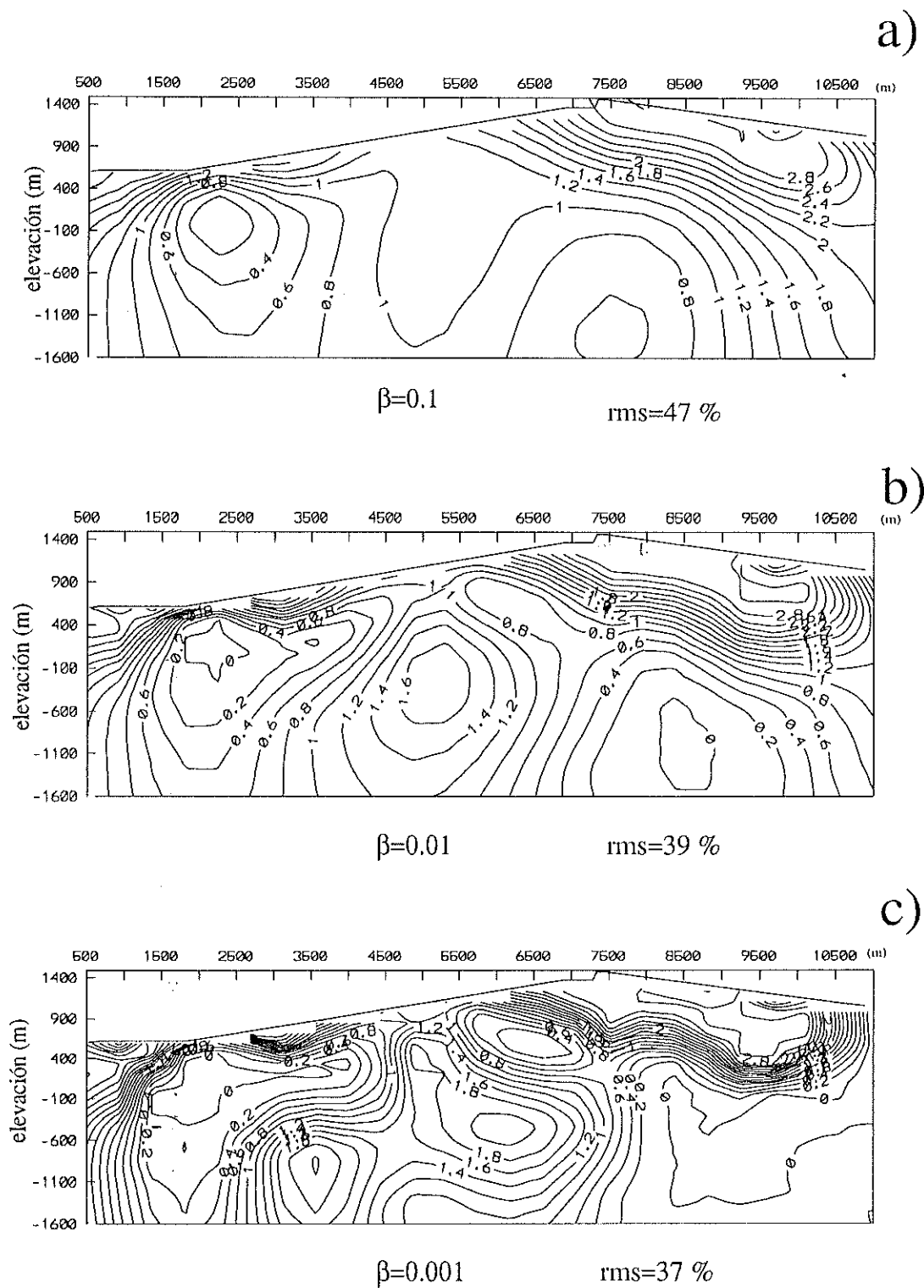


Figura 44. Secciones de resistividad aplicando inversión para fuente puntual (plano W). Línea 1, $a=1000$ m. Campo geotérmico Ahuachapán-Chipilapa, El Salvador. Valores de contornos en \log_{10} de resistividad (contornos cada 0.1).

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado soluciones al problema directo e inverso de modelado de resistividad bidimensional mediante potenciales logarítmicos. Estos algoritmos fueron aplicados al estudio de la respuesta eléctrica de cavidades subterráneas, tanto en datos sintéticos, como en datos de campo. De los resultados se desprenden las siguientes conclusiones:

El uso del método geoelectrico en estudios de detección de cavernas demuestra ser muy efectivo; su rapidez y bajo costo, junto con el uso de técnicas de inversión, mejoran sus resultados y lo colocan en posición ventajosa con respecto a otros métodos. Aunque el grado de resolución depende del método en sí, y de las condiciones geológicas (tipo de roca encajonante, condiciones superficiales), aberturas electródicas de $1/3$ a $1/2$ del diámetro esperado para las cavidades fueron suficiente para definir las anomalías.

El arreglo dipolo-dipolo es muy afectado por la estática. Es decir, las mediciones son más influenciadas por los puntos del subsuelo más cercanos a los electrodos que por los puntos situados a mayores distancias. Sin embargo, al aumentar la distancia entre los dipolos de transmisión y recepción, aumenta la zona de mayor influencia.

La topografía demostró ser un factor muy importante en el modelado de resistividad debido a que las anomalías pueden ser multiplicadas o enmascaradas. Este efecto depende

de la geometría del rasgo topográfico siendo proporcional a la pendiente. El algoritmo para la corrección topográfica basado en el mapeo conforme es más flexible, rápido y funcional que los basados en esquemas de elemento finito y puede utilizarse junto al esquema de inversión general. Es mucho más fácil aplicar las correcciones topográficas a las mediciones directamente, que calcular los factores de corrección a partir del modelado numérico de la topografía.

El algoritmo de inversión basado en contrastes pequeños de resistividad ha proporcionado buenos resultados, aún en las condiciones físicas presentes en los estudios de detección de cavidades; es rápido, encuentra soluciones en una sola iteración y no necesita suponer modelos iniciales.

Los resultados de la interpretación de datos de fuentes puntuales a partir de potenciales logarítmicos, demostraron que aún siendo una aproximación, los modelos obtenidos son semejantes a los obtenidos usando el algoritmo para fuente puntual.

BIBLIOGRAFIA

- Arfken, G., 1985, *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, Boston, 985 p.
- Arzate, J., L. Flores, R. Chávez, L. Barba, and L. Manzanilla, 1990, p. 155-162. In *Geotechnical and environmental geophysics-Geotechnical*. V. III (S. Ward, Ed.). Soc. Expl. Geophys., Tulsa. 300 p.
- Arzi, A., 1975, Microgravimetry for engineering applications. *Geophysical Prospecting*, v. 23, p. 408-425.
- Ballard, R., 1982, Tunnel detection. U. S. Army Eng. Waterways Exp. Stat., technical report GL-82-9, 94 p.
- Bates, E., 1973, Detection of subsurface cavities. U. S. Army Eng. Waterways Exp. Stat., Misc. Paper S-73-40, 83 p.
- Barrios-López, O., 1993, Ejemplos prácticos de inversión bidimensional en estudios geofísicos de resistividad. Tesis de licenciatura, FCT., UANL.
- Bristow, C., 1966, A new graphical resistivity technique for detecting air-filled cavities. *Studies in Speleology*, v. 1, p. 204-227.
- Butler, D., and W. Murphy, 1980, Evaluation of geophysical methods for cavity detection at the Wes Cavity Test Facility. U. S. Army Eng. Waterways Exp. Stat., technical report, GL-80-4, 120 p.
- Butler D., 1984, Microgravimetric and gravity gradient techniques for detection of subsurface cavities. *Geophysics*, v. 49, p. 1084-1096.
- Butler, D., and J. Lakshmanan, 1989. *Signals, The leading edge of exploration*, v. 8, p. 6-8.

- Butler, D., and J. Lakshmanan, 1989. Signals, The leading edge of exploration, v. 8, p. 6-8.
- Butler, D., and J. Llopis, 1990, Assessment of anomalous seepage conditions p. 155-162. In *Geotechnical and environmental geophysics-Environmental and Groundwater*. V. II (S. Ward, Ed.). Soc. Expl. Geophys., Tulsa. 300 p.
- Camacho, A., R. Vieira, F. Montesinos, and V. Cuéllar, 1994, A gravimetric 3D inversion for cavity detection. *Geophysical Prospecting*, v. 42, p. 113-130.
- Cavazos-Garza, R. y E. Gómez-Treviño, 1989, Hacia la inversión tridimensional de anomalías de resistividad y polarización inducida. *Geof. Int.*, v. 28-3, p. 481-505.
- Cooper, S., and W. Bieganousky, 1978, Geophysical survey of cavernous areas, Patoka Dam, Indiana. U. S. Army Eng. Waterways Exp. Stat., Misc. Paper S-78-1, 62 p.
- Daniels, Jeffrey, 1988, Locating caves, tunnels and mines. The leading edge of exploration, v. 7, p. 32-38.
- Dey, A., 1976, Resistivity modelling for arbitrarily shaped two dimensional structures, part II. Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, 56 p.
- Dey, A, and H. Morrison, 1979, Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting*, v. 27, p. 106-136.
- Fox R., G. Hohmann, T. Killpack, and L. Rijo, 1980, Topographic effects in resistivity and induced-polarization surveys. *Geophysics*, v. 45, p, 75-93.
- Gill, P., S. Hammarling, W. Murray, M. Saunders, and M. Wright, 1986, User's guide for LSSOL (v. 1.0): A fortran package for constrained least-squares and convex quadratic programming, technical report SOL 86-1. Department of operations research, Stanford University.

- Gómez-Treviño, E., 1987, Non linear integral equations for electromagnetic inverse problems. *Geophysics*, v. 52, p. 1297-1302.
- Grant, F., and G. West, 1965, *Interpretation theory in applied geophysics*. McGraw-Hill, New York, 584 p.
- Habberjam, G., 1969, The location of spherical cavities using a tripotential resistivity technique. *Geophysics*, v. 34, p. 780-784.
- Holcombe H., and G. Jiracek, 1984, Three-dimensional terrain corrections in resistivity surveys. *Geophysics*, v. 49, p. 439-452.
- Lakshmanan J., and J. Montlucon, 1987, Microgravity probes the Great Pyramid. *The leading edge of exploration* v. 6, p 10-17.
- Lögn, O., 1954, mapping vertical discontinuities by earth resistivities. *Geophysics*, v. 19, p. 736-760.
- Lowry T., and P. Shive, 1990, An evaluation of Bristow's method for the detection of subsurface cavities. *Geophysics*, v. 55, p. 514-520.
- Noel, M., and B. Xu, 1991, Archaeological investigation by electrical resistivity tomography: a preliminary study. *Geophys. J. Int.*, v. 107, p. 95-102.
- Noel, M., and B. Xu, 1992, Cave detection using electrical resistivity tomography. *Cave Science*, v. 19, p. 91-94.
- Orellana, E., 1982, *Prospección geoelectrica en corriente continua*. Paraninfo, Madrid, 578 p.
- Parker R., and K. Klitgord, 1972, *Magnetic upward continuation from an uneven track*. *Geophysics*, v. 37, p. 662-668.

Parra, J., and T. Owen, 1990, *Syntetically focused resistivity for detecting deep targets*, p. 37-50. In *Geotechnical and environmental geophysics-Geotechnical*. V. III (S. Ward, Ed.). Soc. Expl. Geophys., Tulsa. 300 p.

Pérez-Flores, M., and E. Gómez-Treviño, 1992, *Resistivity imaging of the Ahuachapán-Chipilapa geothermal field (El Salvador) from long-offset dipole-dipole resistivity data and its correlation with magnetotelluric results*. Proceeding 11 th. workshop on electromagnetic induction in the Earth, Wellington, New Zeland, p. 6.

Pérez-Flores M., and E. Gómez-Treviño,(1995), *Dipole-dipole resistivity imaging of the Ahuachapán-Chipilapa geothermal field, El Salvador*. *Geothermics*, número especial (en prensa).

Roy, A., and S. Jain, 1961, *A simple integral transform and its applications to some problems in geophysical interpretation*. *Geophysics*, v. 26, p. 229-241.

Roy, K., and P. Naidu, 1970, *Computation of telluric field and apparent resistivity over an anticline*. *Pageoph*, v.80, p. 205-217.

Roy, K., O. Rathi, and K. Rao, 1982, *Telluric fields and their gradients over a step fault*. *Geophysics*, v 47, p. 1078-1090.

Smith, D., 1986, *Application of the pole-dipole resistivity technique to the detection of solution cavities beneath highways*. *Geophysics*, v. 51, p. 833-837.

Spiegel, R., V. Sturdivant, and T. Owen, 1980 *Modeling resistivity anomalies from localized voids under irregular terrain*. *Geophysics*, v. 45, p. 1164-1183.

Sri, N., and K. Upadhyay, 1975, *Apparent resistivity curves for an infinite line source parallel to an inclined contact*. *Geophysics*, v. 40, p. 689-693.

- Tong Lun-Tao, and Chieh-Hou Yang, 1990, Incorporation of topography into two-dimensional resistivity inversion. *Geophysics*, v. 55, p. 354-361.
- Tripp, A., G. Hohmann, G., and C. Swift, 1984, Two-dimensional resistivity inversion *Geophysics*, v. 46, p. 1708-1707.
- Wenjin, L., and Xi Jianjian, 1990, Effectiveness of the high-precision gravity method in detecting sinkholes in Taian railway station of Shangdong province, p. 169-174. In *Geotechnical and environmental geophysics-Geotechnical. V. III* (S. Ward, Ed.). Soc. Expl. Geophys., Tulsa. 300 p.

APENDICE 1

METODO DE INVERSION

Para resolver el problema inverso de dipolo-dipolo con la aproximación de bajos contrastes de resistividad, se utilizó programación cuadrática. El método consiste básicamente en minimizar una función objetivo sujeta a límites en los valores de las incógnitas, en este caso, la resistividad verdadera. Como se mencionó anteriormente, la adaptación del programa de minimización está basada en el trabajo de tesis de Pérez-Flores (1995). Lo que sigue se basa en su trabajo.

Minimizar:

$$F(X) = \frac{1}{2} \|Y - AX\|^2 \quad (1.1)$$

sujeta a

$$X_l \leq X \leq X_u.$$

Esto es, el algoritmo busca una solución tal que, el cuadrado de los residuales sea mínimo, pero que a la vez, los valores de las incógnitas se mantengan dentro de un rango pre establecido (X_l, X_u).

La minimización de la ecuación (1.1) equivale a:

Minimizar:

$$F(X) = C^T X + \frac{1}{2} X^T S X \quad (2.2)$$

con $C^T = -(A^T Y)^T$ y $S = A^T A$, la Matriz Hessiana.

El sistema de ecuaciones planteado por la expresión (42) es del tipo $Y=Ax$, siendo entonces la función objetivo:

$$F(X) = -(A^T Y)^T X + \frac{1}{2} X^T A^T A X \quad (2.3)$$

el proceso se estabiliza sumandole a la Hessiana un término de suavizamiento β , el cual es totalmente arbitrario. Para reducir la variación se hace:

$$Y' = A' V V^{-1} X.$$

Ahora se expresa:

$$A'' = A' V \quad \text{y} \quad X' = V^{-1} X,$$

y en lugar de estabilizar sumando βI , es decir minimizando:

$$F(X) = \frac{1}{2} \|Y' - A''X\|^2 + \frac{1}{2} \beta \|X\|^2 \quad (2.4)$$

se realiza mediante la minimización de la expresión:

$$F(X) = \frac{1}{2} \|Y' - A''X\|^2 + \frac{1}{2} \beta \|DX\|^2 \quad (2.5)$$

que equivale a

$$F(X) = C^T X' + \frac{1}{2} X'^T S X' \quad (2.6)$$

donde $C^T = -(A''^T Y')^T$ y $S = A''^T A'' + \beta D^T D$.

D es la matriz que contiene las derivadas espaciales de las resistividades (parámetros), con respecto a las variables espaciales (x, z):

$$\frac{\partial \rho(r)}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial \rho(r)}{\partial z}.$$

Estas derivadas, son calculadas de acuerdo a un esquema de diferencias finitas según el criterio de mínima estructura, es decir, minimizando la variación de resistividad con respecto a la horizontal y vertical.

Al minimizar la función objetivo (2.6), el algoritmo busca una solución X' tal que, minimiza la suma cuadrática de los residuales y las variaciones laterales y verticales de la resistividad. Sin el término correspondiente a la matriz de derivadas espaciales (D), la

solución tendría los valores de resistividad dentro de los límites impuestos, pero con variaciones relativamente fuertes entre prismas contiguos.

Una vez planteado el problema de esta manera, la ecuación (2.6) se resuelve empleando el algoritmo de GILL (1986), para obtener X' y de este vector, encontrar la solución al sistema de ecuaciones original X , haciendo:

$$X = VX'.$$

APENDICE 2

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C  PROGRAMA PARA EL CALCULO DE CORRECCION TOPOGRAFICA PARA MEDICIONES
C  REALIZADAS CON EL ARREGLO DIPOLO-DIPOLO. EL ALGORITMO ESTA BASADO EN
C  LA TRANSFORMACION CONFORME DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL. EL PROGRAMA
C  ENCUENTRA LOS PARAMETROS DE LA TRANSFORMACION DIRECTA Y LAS
C  RESISTIVIDADES APARENTES EN EL PLANO Z, A PARTIR DE LOS VOLTAJES MEDIDOS
C  EN EL PLANO W Y LAS POSICIONES DE LOS ELECTRODOS .
C
C  MVER=TOTAL DE PUNTOS DEL POLIGONO INCLUYENDO LOS LIMITES Y
C  ELECTRODOS.
C  NVER=TOTAL VERTICES DEL POLIGONO Y ELECTRODOS A MAPEAR
C  NSEG=NUMERO DE SEGMENTOS LINEALES
C  NELEC=NUMERO DE ELECTRODOS
C  NDAT=NUMERO MAXIMO DE MEDICIONES
C
C  EL ARCHIVO DE ENTRADA DEBE CONTENER LA SIGUIENTE INFORMACION:
C  1. NUMERO TOTAL DE PUNTOS A MAPEAR, INCLUYENDO VERTICES, POSICIONES
C  ELECTRODICAS Y UN PUNTO LIMITE EXTRA EN CADA EXTREMO DEL PREFIL, PARA
C  EXTENDER EL PERFIL HASTA EL INFINITO.
C
C  2. COORDENADAS (x,y) DE LOS VERTICES, PUNTOS AL INFINTO , ELECTRODOS , Y
C  BANDERA PARA INDICAR SI EL PUNTO ES ELECTRODO NCL=0 O SI ES UN VERTICE ,
C  NCL=1,2,3,...
C  LOS PUNTOS DEBES ESTAR ORDENADOS DE ACUERDO AL PERFIL TOPOGRAFICO.
C
C  3. NUMERO DE MEDICIONES, NUMERO DE ABERTURAS INTERELECTRODICAS (n)
C  USADAS, Y ABERTURA ELECTRODICA (a).
C
C  4. ORDEN DE ELECTRODOS DE TRANSMISION Y RECEPCION, ASI COMO LA MEDICION
C  EN FORMA DE (DV/I).
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (mver=65,nver=mver-2,nseg=mver-3,nelec=55,ndat=500)
complex*16 ver(nver),anum,acte,den0,den1,den2,den3
character*30 arch1,salida,tinver
dimension xver(mver),zver(mver),ajus(nver),er(nseg),ncl(mver),
$ncla(nver),elec(nver),elect(ndat),elecndat,iad(ndat),ibd(ndat),
$icd(ndat),idd(ndat),volt(ndat),cte(ndat),nnn(20),resap(ndat),
$xob(ndat)
common/aa/alfa(nver),sol(nver)
external fun,gauss,plineal
pi=4.0d0*datan(1.0d0)

```

* LEE LOS DATOS

```

*-----
write(*,*)'entrada(*.mod), salida (*.out) y trans. directa(*.dir)'
read(*,*)arch1,salida,tinver

```

```

open(unit=11,file=tinver)
open(unit=12,file=arch1)
open(unit=13,file=salida)
write(13,*)'vertices y limites del poligono'
read(12,*)maver
do i=1,mver
ncal=mver-float(i)+1
read(12,*)xver(ncal),zver(ncal),ncl(ncal)
end do
11 format(2(f8.4),i2)
write(13,10)(ncl(i),xver(i),zver(i),i=1,mver)
10 format(i3,2x,f10.0,2x,f10.0)
read(12,*)nres,nn,aaa
read(12,*)(nnn(i),i=1,nn)
read(12,*)(iad(i),ibd(i),icd(i),idd(i),volt(i),i=1,nres)

* CALCULA LOS ANGULOS EXTERNOS, MEDIDOS COMO FRACCION DE
* SEMICIRCULO
* EN FUNCION DEL PRODUCTO CRUZ ENTRE LOS VECTORES QUE
* FORMAN LOS LADOS DEL POLIGONO TOPOGRAFICO
*-----
* write(13,*)'angulos externos'
do i=1,nver
ax=xver(i+1)-xver(i)
az=zver(i+1)-zver(i)
bx=xver(i+2)-xver(i+1)
bz=zver(i+2)-zver(i+1)
acruzb=ax*bz-az*bx
omaga=dsqrt(ax*ax+az*az)
omagb=dsqrt(bx*bx+bz*bz)
phi=acruzb/(omaga*omagb)
alfa(i)=dasin(phi)/pi
end do
write(11,*)'vector de angulos alfa(i)'
write(11,*)alfa

*
* ENCUENTRA LAS IMAGENES DE LOS VERTICES(Wi) EN EL PLANO Z
* COMPARANDO LAS DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS CONTIGUOS DEL
* POLIGONO, CON LA DISTANCIA OBTENIDA USANDO LA INTEGRAL
* CON VALORES APROXIMADOS DE XI

* SOLUCION INICIAL A LOS PUNTOS IMAGEN EN Z (X1=0, Xi=proyeccion en x del plano W)
*-----
* write(13,*)'solucion inicial puntos imagen en Z'
sol(1)=0.0
do 20 kl=2,nver
difs=xver(kl)-xver(kl+1)
sol(kl)=difs+sol(kl-1)
* sol(kl)=dble(kl-1)
20 continue
write(13,*)

```

* CONVIERTE LOS VERTICES DEL POLIGONO EN COMPLEJOS WI

```

*-----
write(13,21)
21 format(/,4x,' vert',4x,'Wi',5x,'angulo',5x,'sol(1)'2x,'clave')
do i=2,mver-1
  km=i-1
  ver(km)=cplx(xver(i),zver(i))
  write(13,38)km,ver(km),alfa(km),sol(km),ncl(i)
  ncla(km)=ncl(i)
end do

```

* CALCULA MEDIANTE ITERACIONES LOS VALORES PARA EL VECTOR XI

```

*-----
iter=0
ajus(1)=0.0d0
tol=1.0d-5

25 iter=1+iter
sum2=0.0d0
write(13,36)
do j=1,nseg

*          error
difw=cdabs(ver(j+1)-ver(j))
a=sol(j)
b=sol(j+1)
dif=sol(j+1)-sol(j)
quad=gauss(a,b,10,fun)
error=difw-quad
er(j)=dabs(error)
sum11=error/difw
sum12=sum11*sum11
sum13=sum12*100.0
sum2=sum2+sum12
write(13,41)iter,difw,quad,error,sum13

*          ajuste
pot=1.0d0/(alfa(j+1)+alfa(j)-1.0d0)
coc=quad/difw
beta=coc**pot
ajus(j+1)=beta*dif
end do
rms=100.0d0*dsqrt(sum2/float(nver))

```

* APLICA LAS CORRECCIONES ENCONTRADAS A CADA XI

```

*-----
do 30 j=2,nver
30 sol(j)=sol(j-1)+ajus(j)
write(13,40)sol
write(13,44)rms
write(13,*)

```

* APLICA LA CONDICION DE AJUSTE PARA EL ERROR EN CADA SEGMENTO

```

*-----
do 35 k=1,nseg
35 if(er(k).gt.tol) goto 25
write(13,*)'solucion final'
do i=1,nver
write(13,90)ncla(i),sol(i)

end do
write(11,*)'vector X(i)'
write(11,*)sol

* LA CONSTANTE B=VER1(X,Z), YA QUE, Z1=0 CUANDO W1
*
* CALCULA LA CONSTANTE A
*-----
do j=2,nver
end=0.0d0
anum=ver(j)-ver(j-1)
do 50 kl=j,nver
50 end=-alfa(kl)+end
den0=cplx(-1.0d0,0.0d0)
den1=den0**end
a1=sol(j-1)
b1=sol(j)
den2=cplx(gauss(a1,b1,10,fun),0.0d0)
den3=den1*den2
acte=anum/den3
end do
write(11,*)'constantes A y B'
write(11,92)acte,ver(1)

* SEPARA LOS ELECTRODOS Y VERTICES
*-----
write(13,94)
in=0
do i=1,nver
ij=nver+1-i
if(ncla(ij).eq.0) then
in=in+1
elec(in)=sol(ij)
end if
end do

* SEPARA TRANSMISORES DE RECEPTORES
*-----
do mm=1,nelec-2
elect(mm)=elec(mm)
elecrr(mm)=elec(mm+2)
end do

* CALCULA LAS CONTANTES CORESPONDIENTES A CADA ARREGLO DE
* ELECTRODOS COLINEALES EN EL PLANO Z
*-----
do k=1,nres

```

```

ela=elect(iad(k))
elb=elect(ibd(k))
elm=elec(icd(k))
eln=elec(idd(k))
xob(k)=(ela+eln)/2
cte(k)=pi*plineal(ela,elb,elm,eln)
end do

```

- * CALCULA LAS RESISTIVIDADES APARENTES MEDIDAS EN EL PLANO Z
- * CON UN ARREGLO GENERAL DE ELECTRODOS

```

*-----
write(13,95)
mk=0
do i=1,nn
  lll=0
  do j=1,nnn(i)
    mk=mk+1
    lll=lll+1
    resap(mk)=cte(mk)*volt(mk)
    xmi=xmi+aaa
    write(13,93)iad(mk),ibd(mk),icd(mk),idd(mk),resap(mk)
    write(*,*) xmi,i,resap(mk) !parametros para dibujar la presudoseccion
  end do
end do
close(11)
close(12)
close(13)

```

```

36 format(/,'iter',3x,'long ver.',3x,'long aprox.',2x,'error',4x,
$'res. cuad. (%)')
37 format(i3,f10.3)
38 format(i3,2x,'(',2(f7.0),')',2x,f10.6,2x,f7.0,3x,i3)
39 format(i3,4(f10.3))
40 format(5(f8.0))
41 format(i2,3x,f8.3,6x,f8.3,2x,f8.3,3x,f10.3)
42 format(2(f10.3),1x,i3)
44 format(40x,'error medio',2x,f10.5,1x,'%')
90 format(1x,i2,1x,f12.1)
91 format(i3,2x,'(',2(f11.7),')')
92 format('(',2(f6.2),')',2x,'(',2(f7.0),')')
94 format(/,4x,'ARREGLO DE MEDICION EN EL PLANO Z',/)
95 format(2x,'A',2x,'B',2x,'M',2x,'N',7x,'rho ap')
96 format(f8.4,2x,'0.000')
97 format(f10.4,2x,i3,2x,f10.3)
stop
end

```

```
function plineal(a,b,am,an)
```

*-----

```

implicit real*8 (a-h,o-z)
pi=4.0d0*datan(1.0d0)
rbm=abs(am-b)

```

```

ran=abs(an-a)
rbn=abs(an-b)
ram=abs(am-a)
coc1=rbm*ran
coc2=rbn*ram
plineal=1.0d0/dlog(coc2/coc1) !cte. geometrica general
return
end

```

```

*****

```

```

* CALCULA EL INTEGRANDO DE LA TRANSFORMACION DE SCHWARZ-
* CHRISTOFFEL
function fun(x)

```

```

*-----
implicit real*8(a-h,o-z)
parameter (mver=65,nver=mver-2,nseg=mver-3)
common/aa/alfa(nver),sol(nver)
prod=1.0d0
do k=1,nver
arg=x-sol(k)
prod=prod*abs(arg)**(-1.0d0*alfa(k))
end do
fun=prod
return
end

```

```

c

```

```

*****

```

```

* FUNCION PARA INTEGRAR
function gauss( a, b, m, functn )

```

```

*-----
implicit real*8(a-h,o-z)
parameter (mver=65,nver=mver-2,nseg=mver-3)
common/aa/alfa(nver),sol(nver)

dimension npoint(7), key(8), z(24), weight(24)
c
c ..... preset npoint, key, z, and weight arrays .....
c data npoint / 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15 /
c
c data key / 1, 2, 4, 6, 9, 12, 17, 25 /
c
c data z      / 0.577350269,0.0 ,0.774596669,
1  0.339981044,0.861136312,0.0 ,0.538469310,
2  0.906179846,0.238619186,0.661209387,0.932469514,
3  0.148874339,0.433395394,0.679409568,0.865063367,
4  0.973906529,0.0 ,0.201194094,0.394151347,
5  0.570972173,0.724417731,0.848206583,0.937273392,
6  0.987992518 /
c
c data weight / 1.0 ,0.888888889,0.555555556,

```

```

1      0.652145155,0.347854845,0.568888889,0.478628671,
2      0.236926885,0.467913935,0.360761573,0.171324493,
3      0.295524225,0.269266719,0.219086363,0.149451349,
4      0.066671344,0.202578242,0.198431485,0.186161000,
5      0.166269206,0.139570678,0.107159221,0.070366047,
6      0.030753242 /

c
c ..... find subscript of first z and weight value
  do 1 i=1,7
    if (m.eq.npoint(i)) go to 2
  1 continue
c ..... invalid m used .....
  gauss = 0.0
  return

c
c ..... set up initial parameters
  2 jfirst = key(i)
    jlast = key(i+1) - 1
    c = (b-a)/2.0
    d = (b+a)/2.0

c
c ..... accumulate the sum in the m-point formula .....
  sum = 0.0
  do 5 j=jfirst,jlast
    if ( z(j).eq.0.0 ) sum = sum + weight(j)*functn(d)
  5 if ( z(j).ne.0.0 ) sum = sum + weight(j)*(functn(z(j)*c + d)
    1 + functn(-z(j)*c + d))

c
c ..... make interval correction and return .....
  gauss = c*sum
  return

c
  end

```


APENDICE 3

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C PROGRAMA QUE EFECTUA LA TRANSFORMACION DIRECTA DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL
C LA TRANSFORMACION MAPEA CUALQUIER PUNTO DEL EJE REAL Y DEL SEMI-ESPACIO
C SUPERIOR, A PUNTOS DENTRO DE UN POLIGONO Y SOBRE SUS LIMITES. EN ESTE CASO
C SE HA IMPLEMENTADO PARA EL MAPEO DE LOS CENTROS DE LOS PRISMAS DE LA
C MALLA DE DISCRETIZACION UTILIZADA EN LA INVERSION DE RESISTIVIDADES.
C
C MVER=TOTAL DE PUNTOS DEL POLIGONO INCLUYENDO LOS LIMITES Y ELECTRODOS
C NVER=TOTAL VERTICES DEL POLIGONO Y ELECTRODOS A MAPEAR
C NSEG=NUMERO DE SEGMENTOS LINEALES
C NELEC=NUMERO DE ELECTRODOS
C NPRIS=NUMERO DE PRISMAS DEL MODELO
C
C EL ARCHIVO DE ENTRADA DEBE CONTENER LOS SIGUIENTES DATOS:
C
C 1. LOS ANGULOS EXTERNOS DEL POLIGONO
C
C 2. LOS PUNTOS IMAGEN DE LOS VERTICES EN EL PLANO Z
C
C 3. LAS CONSTANTES COMPLEJAS A y B
C
C 4. LOS PASOS DE INTEGRACION EN LOS EJES REAL E IMAGINARIO
C
C 5. NUMERO DE PRISMAS/CAPA DE LA MALLA Y LA ULTIMA CAPA A TRANSFORMAR
C
C 6. PRIMERO Y ULTIMO PRISMA A TRANSFORMAR EN EL EJE X.
C
C ESTE PROGRAMA RESUELVE LA INTEGRAL DE LINEA , INTEGRANDO PRIMERO
C SOBRE EL EJE IMAGINARIO, HASTA LA ORDENADA DEL PUNTO Y, LUEGO SOBRE
C EL EJE HORIZONTAL, HASTA LA ABCISA DEL PUNTO
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (mver=33,nver=mver-2,nseg=mver-3,npris=432)
complex*16 ctea,cteb,wre,wim,tot,pint,
$wpp(npris),wpp(npris),quad,a1,b1,c1,bb1,aa1
dimension xp(npris),zp(npris),rho(npris),rhoz(npris)
character*50 title1,title2,title3,arch1,arch2
common/par/alfa(nver),xi(nver)
external pint,quad
* LEE LOS DATOS
*-----
write(*,*)'file entrada (*.dat) y salida...(*.tr)'
read(*,*)arch1,arch2
open(unit=12,file=arch1)
open(unit=13,file=arch2)
read(12,*)title1

```

```

read(12,*)(alfa(i),i=1,nver)
read(12,*)title2
read(12,*)(xi(i),i=1,nver)
read(12,*)title3
read(12,*)ctea,cteb
read(12,*)tol1,tol2
read(12,*)ncp,nplast
read(12,*)npp,npu
do kk=1,npris
read(12,*)xp(kk),zp(kk),rho(kk)
wpp(kk)=cplx(xp(kk),zp(kk))
end do

*-----
nno=0
do io=1,nplast
ncpp=(ncp*io)-ncp
do ia=npp,npu
nno=nno+1
jll=ncpp+ia
wp(nno)=wpp(jll)
rhoz(nno)=rho(jll)
end do
end do

* EMPIEZA LA TRANSFORMACION DE CADA PUNTO
*-----
icon=npu-npp+1

* CALCULA LA INTEGRAL PARA LA PARTE IMAGINARIA (0,Yp-1) a (0,Yp)
*-----
wim=(0.0d0,0.0d0)
a1=(0.0d0,0.0d0)
do 100 ii=1,nplast
write(*,*)'calculando para la capa',ii
ic=ii*icon
b1=cplx(0.0d0,dimag(wp(ic)))
wim=quad(a1,b1,tol2)+wim

* CALCULA LA INTEGRAL PARA LA PARTE REAL
* SOBRE LA LINEA HORIZONTAL y=Yp
*-----
wre=(0.0d0,0.0d0)
aa1=(0.0d0,0.0d0)
do 50 ikk1=1,icon
ikl=ic-icon+ikk1
bb1=cplx(dble(aa1),dimag(b1))
c1=cplx(dble(wp(ikl)),dimag(b1))
wre=quad(bb1,c1,tol1)+wre

c CALCULA LA TRANSFORMACION
*-----
tot=ctea*(wre+wim)+cteb
write(13,32)tot,rhoz(ikl)

```

```

30 format(2(f8.3),2(f10.5))
32 format(2(f14.3),4x,f8.2)
  aa1=wp(ikl)
50 continue
  a1=b1
100 continue
  close(11)
  close(12)
  stop
  end

```

```
*****
```

```
function quad(a,b,step)
```

```
*-----
```

```

implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (mver=33,nver=mver-2,nseg=mver-3)
complex*16 quad.z,dz,a,b,dif,suma,re,im,pint
common/par/alfa(nver),xi(nver)
external pint
suma=cplx(0.0d0,0.0d0)
dif=b-a
nxn=dabs(dble(dif)/step)
nzn=dabs(dimag(dif)/step)
pm=step/2.0d0

```

```

if (nzn .eq. 0) then
do jkk=1,nxn-1
xv0=(jkk-1)*step
xv1=pm+xv0
xv=dble(a)+xv1
z=cplx(xv,dimag(b))
dz=cplx(step,0.0d0)
re=pint(z,dz)
suma=re+suma
quad=suma
end do
else

```

```

do jkk=1,nzn-1
xv0=(jkk-1)*step
xv1=pm+xv0
xv=dimag(a)+xv1
z=cplx(dble(b),xv)
dz=cplx(0.0d0,step)
im=pint(z,dz)
suma=im+suma
quad=suma
end do
end if
if (a .eq. b)quad=0.0
return
end

```

```
*****
```

```
function pint(z,dz)
```

```
*
```

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```
parameter (mver=33,nver=mver-2,nseg=mver-3)
```

```
complex*16 z,dz,arg,prod,x(nver),pint
```

```
common/par/alfa(nver),xi(nver)
```

```
do 5 i=1,nver
```

```
5 x(i)=cplx(xi(i),0.0d0)
```

```
* EVALUA EL INTEGRANDO
```

```
prod=cplx(1.0d0,0.0d0)
```

```
do k=1,nver
```

```
arg=(z-x(k))
```

```
prod=prod*arg**(-alfa(k))
```

```
end do
```

```
pint=prod*dz
```

```
return
```

```
end
```

