

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada



**EFFECTOS DE TAMAÑO FINITO EN REDES
NEURONALES**

TESIS

DOCTORADO EN CIENCIAS

ARNULFO CASTELLANOS MORENO

Ensenada, Baja California, Mexico. Mayo de 1998.

TESIS DEFENDIDA POR
ARNULFO CASTELLANOS MORENO
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE



Dra. Laura Cecilia Viana Castrillón

Director del Comité



Dra. Ana María Cetto Kramis

Miembro del Comité



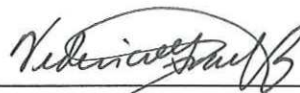
Dr. Ernesto Cota Araiza

Miembro del Comité



Dr. Ignacio Luis Garzón Sosa

Miembro del Comité



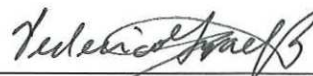
Dr. Federico Graef Ziehl

Miembro del Comité



Dr. Leonel Susano Cota Araiza

*Jefe del Departamento de Física de
Materiales*



Dr. Federico Graef Ziehl

Director de Estudios de Posgrado

8 de mayo de 1998

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE EDUCACION SUPERIOR DE
ENSENADA**

**DIVISION DE FISICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE FISICA DE MATERIALES**

EFFECTOS DE TAMAÑO FINITO EN REDES NEURONALES

TESIS
que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

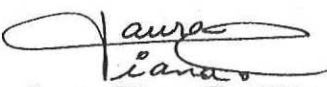
ARNULFO CASTELLANOS MORENO

Ensenada, Baja California, México
Mayo de 1998

RESUMEN de la Tesis de Arnulfo Castellanos Moreno, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en FISICA DE MATERIALES. Ensenada, Baja California. Mayo de 1998.

EFFECTOS DE TAMAÑO FINITO EN
REDES NEURONALES

Resumen aprobado por:


Dra. Laura Viana Castellón
Directora de tesis

Se desarrolla un estudio analítico sistemático de los efectos de tamaño finito en modelos de redes separables, con dinámica secuencial lejos de la saturación. Se encuentran dos tipos de efectos: fluctuaciones térmicas y correcciones congeladas a las leyes de campo promedio. Se parte de que la dinámica microscópica de la red obedece una ecuación maestra conforme a la dinámica de Glauber y se demuestra que la dinámica macroscópica, con los traslapes o parámetros de orden como variables físicas, puede ser descrita en forma aproximada como un fenómeno de difusión. Se propone una descomposición de los traslapes como la suma de dos términos: uno determinista, que son las trayectorias de campo promedio, y otro fluctuante al azar, que es modelado mediante procesos de Ornstein y Uhlenbeck dependientes del tiempo. Estos últimos son procesos gaussianos, de modo que escribimos explícitamente la distribución de probabilidad conjunta de las fluctuaciones. Las ecuaciones diferenciales para describir sus momentos estadísticos forman sistemas no autónomos cuyas soluciones formales obtenemos. Entonces aplicamos la teoría a sistemas que se conducen como memorias asociativas, presentan relajación al equilibrio, cumplen con el balance detallado y con un teorema de fluctuación y disipación. También estudiamos dos sistemas fuera de equilibrio: uno donde existe un punto fijo de la red pero no hay balance detallado y otro donde las fluctuaciones aleatorias modifican cualitativamente su conducta dando lugar a un fenómeno en el cual el traslape se escapa de una cuenca a otra. Las predicciones teóricas son comparadas con simulaciones en computadora.

Palabras clave: "Redes Neuronales", "Tamaño Finito", "Dinámica".

Abstract

An analytical and systematic study of finite size effects on separable neural networks with sequential dynamics is developed far away from saturation regime. Two kinds of effects are found: thermal fluctuations and frozen corrections to mean-field laws. It is considered that separable neural networks follows microscopic Glauber dynamics governed by a master equation and a macroscopic description is obtained by taking overlaps (or order parameters) as physical variables. A Fokker-Planck equation is found, so that diffusion phenomena are useful to describe this macroscopic dynamics. A decomposition in two terms is proposed for the overlaps: one deterministic, given as the solutions to mean-field equations and other as random variables. It is found that these fluctuations can be modeled by time-dependent Ornstein-Uhlenbeck processes. Since these have gaussian behavior, one can write the joint probability distribution function for fluctuations. Differential equations as non-autonomous systems are found to describe the time evolution of the statistical moments of these fluctuations and their formal solutions are found. Then our theory is applied to analyze the dependence of finite size effects on detailed balance, scaling properties of fluctuations close to phase boundaries and escape processes in critical models which are driven by finite size effects. Finally, theoretical predictions are confirmed by numerical simulations in computers.

DEDICATORIA

A la memoria de mi madre. Con su abnegación y sus consejos iluminó mi camino más allá de la historia de sus días.

A mi padre. Hombre de cariño silencioso, su responsabilidad y su templanza son ejemplo del deber ser que me acompaña.

A todos mis hermanos y a todas mis hermanas . Plantas diversas de la misma cepa. Compañeros de tantos lugares y vivencias.

A los especialistas en caos de la Calle Pércimos No. 5. Motivo permanente de mi gusto por la vida

AGRADECIMIENTOS

A la Dra. Laura Viana por su orientación y su respaldo permanente. Al Dr. Anton Coolen por su ayuda en tantos aspectos fundamentales.

A la Dra. Ana María Cetto, Dr. Ernesto Cota, Dr. Ignacio Garzón y Dr. Federico Graef, por su participación en mi Comité de tesis.

Al M. en C. Arturo Rosas por su colaboración en los problemas de programación en la simulación de redes y en el formateo del texto final.

Al M. en C. Antonio Jáuregui por su opiniones sobre la solución formal de las ecuaciones y el teorema de fluctuación-disipación.

Al Centro de Ciencias de la Materia Condensada-UNAM, por su hospitalidad durante tantos años.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

CONTENIDO (Continuación)

V.3	Flujos de rotacional cero	85
V.4	La matriz de convección en los estados de equilibrio	86
V.5	El teorema de fluctuación-disipación	88
V.6	Aplicaciones a memorias asociativas	90
V.7	Estados en equilibrio en redes de Hebb. Dos patrones almacenados	96
VI	APLICACIÓN A MEMORIAS ASOCIATIVAS II. EJEMPLOS DE LA RELAJACIÓN HACIA EL EQUILIBRIO	104
VI.1	Introducción	104
VI.2	Evolución de las fluctuaciones medias a $T=0$	104
VI.3	La dinámica de los estados puros	110
VI.4	Evolución temporal de las fluctuaciones medias. Solución numérica	111
VI.5	Confrontación de teoría y experimento para la evolución temporal de las fluctuaciones medias	112
VI.6	Evolución temporal de las desviaciones estándar para estados puros	121
VI.7	Discusión	125
VII	ESTADOS FUERA DE EQUILIBRIO I. ATRACTOR SIN BALANCE DETALLADO	126
VII.1	Introducción	126
VII.2	Las fluctuaciones en la región de estabilidad del modelo	132
VII.3	Discusión	146
VIII	ESTADOS FUERA DE EQUILIBRIO II. TIEMPO DE ESCAPE CONTROLADO POR EL TAMAÑO DEL SISTEMA	147
VIII.1	Introducción	147
VIII.2	Redes no simétricas con dos patrones almacenados	147
VIII.3	Tiempo de escape para $T=0$	155
VIII.4	Comparación con las simulaciones	163
VIII.5	Discusión	167
	LITERATURA CITADA	168

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1(a)	Existencia de estados atractores. Soluciones para N infinita, $p=2$, red simétrica, $a=0$, $T=0.1$. Solución numérica de la ecuación (10)	24
1(b)	Existencia de estados atractores. Soluciones para N infinita, $p=2$, red simétrica, $a=0$, $T=0.8$. Solución numérica de la ecuación (10)	24
2(a)	Conducta cíclica. Soluciones para N infinita, $p=2$, red antisimétrica, $a=1$, $T=0.1$. Solución numérica de la ecuación (10)	26
2(b)	Conducta cíclica. Soluciones para N infinita, $p=2$, red antisimétrica, $a=1$, $T=0.2$. Solución numérica de la ecuación (10)	26
3(a)	Localización de puntos fijos a $T=0$ con $\lambda_N < 0$, $p=2$, $N < \infty$.	55
3(b)	Localización de puntos fijos a $T=0$ con $\lambda_N > 0$, $p=2$, $N < \infty$.	55
4(a)	Estados puros en equilibrio. $N=5000$, $p=3$, 200 realizaciones. Dependencia respecto a la temperatura de las fluctuaciones medias. Valor asintótico de la expresión (210).	95
4(b)	Estados puros en equilibrio. $N=5000$, $p=3$, 200 realizaciones. Dependencia respecto a la temperatura de las fluctuaciones medias. Valor asintótico de la expresión (210).	95
5(a)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=1000$, $K_0=1.264911$. Ecuación (214)	99
5(b)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=1000$, $K_0=1.264911$. Ecuación (214)	99
6(a)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=1000$, $K_0=1.264911$. Ecuación (214)	100
6(b)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=1000$, $K_0=1.264911$. Ecuación (214)	100
7(a)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=5000$, $K_0=1.583919$. Ecuación (214)	101
7(b)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=5000$, $K_0=1.583919$. Ecuación (214)	101
8(a)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=5000$, $K_0=1.583919$. Ecuación (214-217)	102
8(b)	Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb, $N=5000$, $K_0=1.583919$. Ecuación (214-217)	102
9(a)	Evolución temporal de las fluctuaciones medias a $T=0$. Cuenca de $(m(T), 0)$. $N=1000$, $K_0=1.264911$. Ecuación (227)	108
9(b)	Evolución temporal de las fluctuaciones medias a $T=0$. Cuenca de $(m(T), 0)$. $N=1000$, $K_0=1.264911$. Ecuación (227)	108

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

10	Redes de Hebb operando a $T=0$, $N=1000$, $p=2$, $K_0=1.264911$.	109
11(a)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.1$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	114
11(b)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.1$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	114
12(a)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.2$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	115
12(b)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.2$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	115
13(a)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.3$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	116
13(b)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.3$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	116
14(a)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.4$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	117
14(b)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.5$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	117
15(a)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.5$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	118
15(b)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.5$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	118
16(a)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.6$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	119
16(b)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.6$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	119

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

17(a)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.7$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	120
17(b)	Estados puros. $N=5000$, $T=0.7$, $p=3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230)	120
19(a)	Estados puros. $N=10000$, $T=0.1$, $p=2$, $K_0=0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236)	123
19(b)	Estados puros. $N=10000$, $T=0.2$, $p=2$, $K_0=0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236)	123
20(a)	Estados puros. $N=10000$, $T=0.3$, $p=2$, $K_0=0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236)	124
20(b)	Estados puros. $N=10000$, $T=0.4$, $p=2$, $K_0=0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236)	124
21	Valor crítico de ε en función de la temperatura	131
22	Soluciones numéricas de la ecuación $m=\tanh(\beta m)$	133
23	Diferencia en la conducta entre las redes finitas y las redes infinitas. Para $N=\infty$ la solución a la ecuación (10) indica que la red evoluciona hacia el atractor $(-m(T), 0)$. En cambio, una simulación de una red finita con $N=500$, $\varepsilon=25$, $K_0=0.268$, indica que se puede escapar hacia una región cercana al atractor $(m(T), 0)$.	137
24	En una simulación de una red con $N=500$, $T=0.4$, $\varepsilon=25$, $K_0=0.4472136$, el vector de traslapes oscila al azar dentro de una cuenca siempre que $K_0>0$. En cambio la solución numérica a la ecuación (10), graficada con una línea punteada, indica que el estado de una red infinita evoluciona hacia un estado atractor. La cuenca de oscilación de la red finita se encuentra trasladada hacia arriba	139
25(a)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_l \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=250$, $p=2$, $\varepsilon=1$, $K_0=1.644384$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	141

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

25(b)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=250$, $p=2$, $\mathcal{E}=1$, $K_0=1.644384$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	141
26(a)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_1 \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=500$, $p=2$, $\mathcal{E}=1$, $K_0=1.341641$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	142
26(b)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=500$, $p=2$, $\mathcal{E}=1$, $K_0=1.341641$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	142
27(a)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_1 \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=1000$, $p=2$, $\mathcal{E}=1$, $K_0=1.011929$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	143
27(b)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=1000$, $p=2$, $\mathcal{E}=1$, $K_0=1.011929$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	143
28(a)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_1 \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=5000$, $p=2$, $\mathcal{E}=1$, $K_0=1.583919$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	144

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

28(b)	Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle(\sigma)$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N=\infty$). Las simulaciones con $N=5000$, $p=2$, $\varepsilon=1$, $Ko=1.583919$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.	144
29(a)	Punto fijo sin balance detallado. Desviación estándar del primer traslape. Las simulaciones con $N=5000$, $\varepsilon=1$, $Ko=0.583919$ y 200 realizaciones. Análisis estadístico con confiabilidad de 95%.	145
29(b)	Punto fijo sin balance detallado. Desviación estándar del primer traslape. Las simulaciones con $N=5000$, $\varepsilon=1$, $Ko=0.583919$ y 200 realizaciones. Análisis estadístico con confiabilidad de 95%.	145
30(a)	Las líneas que unen los círculos corresponden a la predicción teórica de la ecuación (315). Las líneas punteadas indican el valor teórico $\pm O(1/\sqrt{N})$. Los resultados experimentales se indican con rectángulos	165
30(b)	Las líneas que unen los círculos corresponden a la predicción teórica de la ecuación (315). Las líneas punteadas indican el valor teórico $\pm O(1/\sqrt{N})$. Los resultados experimentales se indican con rectángulos	165
31	Las líneas que unen los círculos corresponden a la predicción teórica de la ecuación (315). Las líneas punteadas indican el valor teórico $\pm O(1/\sqrt{N})$. Los resultados experimentales se indican con rectángulos	166

I. Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de los efectos de tamaño finito en las redes neuronales recurrentes. Estos son sistemas ideados como abstracciones de las estructuras neurobiológicas (cerebros) encontradas en la naturaleza y tienen la característica de ser sistemas desordenados capaces de guardar información. La forma en que desarrollan su trabajo es esencialmente distinta de la utilizada por las computadoras convencionales. Los procesadores microscópicos del cerebro (neuronas) operan en paralelo y presentan cualitativamente más ruido que los elementos que forman a las computadoras. No ejecutan un programa fijo con base en un conjunto previamente especificado de datos, sino que comunican señales a través de retransmisores que llamamos sinapsis, que llegan a centros de conjunción llamados los cuerpos de las neuronas y desde los cuales surgen señales eléctricas a través de canales conocidos con el nombre de axones.

La importancia de cada sinapsis en el proceso de retransmisión se actualiza continuamente y lo mismo ocurre con algunas propiedades intrínsecas de las neuronas, proporcionando un sistema de autoprogramación y adaptación que sustituye a la programación externa de los sistemas de cómputo comunes. Existe así una dinámica de las sinapsis y de las neuronas en el cual los programas y los datos cambian todo el tiempo.

Los cerebros no tienen una arquitectura o mapa de conexiones específico, por ejemplo, presentan estructuras relativamente ordenadas en centros receptores de información, pero estructuras amorfas, prácticamente aleatorias, en las regiones procesadoras de alto nivel como el neocórtex. Operando en paralelo los cerebros dedican grandes cantidades de neuronas a una

actividad determinada, lo cual da por resultado actividades posibles muy diferentes y complejas. Pueden adaptarse a circunstancias cambiantes, reconocer objetos deformados, borrosos, o parcialmente visibles. En síntesis, las redes neuronales son esencialmente diferentes de los sistemas de cómputo de la vida cotidiana.

Los distintos modelos de redes neuronales han planteado importantes e interesantes retos a los físicos teóricos y a los matemáticos, pues exhiben conductas muy ricas y nada triviales. Se trata de sistemas sumamente complejos de analizar por el gran número de elementos interactuantes, por el carácter no lineal de los elementos individuales que operan en ellas, porque las interacciones entre ellos no son idénticas ni simétricas y porque la magnitud de las interacciones, así como los umbrales internos de cada neurona, pueden cambiar en el tiempo.

Desde el punto de vista biológico el funcionamiento detallado de las neuronas es extremadamente complicado, de hecho, gran cantidad de aspectos fisiológicos y químicos de éstas es aún materia de investigación científica, de modo que para iniciar la búsqueda de un tratamiento formal de grupos de ellas se requiere introducir un conjunto de hipótesis simplificadoras que nos llevan a diferenciar entre una neurona biológica y una neurona formal. Nuestro propósito ahora es aclarar esta diferencia.

En los intentos por sistematizar la comprensión del cerebro pueden distinguirse dos caminos: *i*) el primero es el seguido por los neurofisiólogos, quienes generalmente confrontan una abundancia de datos tan vasta que dificulta el examen sistemático dentro de un marco de trabajo experimental. Los datos están perturbados por una cantidad muy grande de influencias que no pueden ser fácilmente eliminadas por el experimentador. *ii*) El segundo es el que han abierto los constructores de modelos sobre la base de un conjunto también grande de

suposiciones acerca del sistema que se busca explicar, con la esperanza de que el enfoque ayude al surgimiento de nuevas hipótesis, susceptibles de ser verificadas con la diversidad de datos disponibles.

Dentro del segundo de los caminos antes mencionados hay dos opciones para los creadores de modelos: *i)* una consiste en tratar de modelar al sistema real tanto como sea posible. Sin embargo, suele suceder que se introducen tantos parámetros que en realidad no se alcanza ningún entendimiento profundo; de donde se llega al resultado paradójico de que, buscando tanta fidelidad al sistema real, resulta una copia tan mala que la comprensión del fenómeno se desvanece. *ii)* El otro enfoque consiste en descartar, *a priori*, todos aquellos parámetros que a primera vista parecen no ser esenciales, a fin de simplificar el análisis matemático. *Estos no constituyen representaciones realistas del cerebro, sino que su inspiración neuronal puede contribuir a comprender algunas de las propiedades que los caracterizan en el procesamiento de información.*

La combinación de estas dos últimas opciones va acompañada y motivada por la experiencia, la intuición y el deseo de cuantificar el problema. La calidad del enfoque puede respaldarse en los resultados obtenidos en años recientes, que han mostrado progresos en el proceso de incorporación de más detalles biológicos a los modelos analíticamente solubles.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, podemos enumerar las simplicificaciones más importantes que nos llevan de la neurona biológica a la neurona formal:

- No ponemos atención a los detalles de las avalanchas de señales electroquímicas que el cuerpo de la neurona envía a través de su axón. Solamente atendemos la existencia o la ausencia de una señal y le asignamos un 1 o un 0 a cada caso, o equivalentemente 1 y -1 .
- Dejamos de lado los aspectos químicos del proceso de conversión con el cual una sinapsis modifica las señales eléctricas que recibe para liberar sobre la membrana de la neurona los neurotransmisores que aumentan o disminuyen el potencial eléctrico de esta última.

Únicamente atendemos al carácter excitador o inhibidor de la sinápsis y le asignamos un número real J_{ik} que es positivo si la señal recibida excita y negativo si inhibe al potencial de la neurona receptora.

- No consideramos la distribución espacial de las dendritas y las tomamos como si fueran cables pasivos de transmisión.
- El éxito o el fracaso de cada sinápsis para retransmitir una señal lo consideramos azaroso, con una cierta probabilidad, tal que asociamos variables aleatorias independientes a cada dendrita.
- Cada neurona tiene un umbral de respuesta al potencial eléctrico de su cuerpo principal, que al ser rebasado transmite una señal a través del axón. Nosotros lo consideramos como una variable aleatoria que se conduce conforme a una distribución gaussiana en torno a un promedio dado.
- No consideramos diferencias de tiempo entre el envío y la recepción de una señal, y por último, no diferenciamos grados distintos de respuesta de las neuronas, solamente nos importa saber si lanza o no una señal.

Con base en las simplificaciones mencionadas, podemos establecer que **una red neuronal, en su forma más general**, es un sistema de neuronas o nodos, cada uno de los cuales está asociado con un valor numérico real, que es el estado de la neurona. Frecuentemente los valores son restringidos a ± 1 , tal que cada nodo es como un espín de Ising. Hay **conexiones** entre las neuronas, de modo que el estado de una de ellas puede influir en el estado de otras. Cada neurona registra entradas y les aplica una función, que generalmente es de la forma siguiente:

$$F_i \left(\sum_{j=1}^k J_{ij} s_j \right),$$

donde $j = 1, \dots, k$ numera las señales recibidas por la neurona i , s_j son los estados de las neuronas que enviaron su señal y J_{ij} son los pesos de la interacción de la i -ésima neurona con las demás.

Dependiendo del tipo de red, los pesos son variables que serán modificadas durante su evolución, o por el contrario, serán magnitudes fijas como en el modelo de Hopfield. (Hop-

field, 1982)

Las neuronas tienen, y las redes también, entradas y salidas, tales que las salidas son calculadas en función de las entradas. Así surge **el concepto de regla de aprendizaje**, que consiste en la sistematización de la asociación entre una pregunta y una respuesta. Por lo general, la pregunta $\vec{r}$ es un vector de mayor dimensión que la respuesta $\vec{R}$. Un ejemplo típico es el reconocimiento de voces o sonidos, en los cuáles el vector de entrada $\vec{r}$ es un espectro de frecuencias, que tiene que ser transformado en una lista de palabras $\vec{R}$. Formalmente se escribe

$$\vec{R} = \vec{V}(\vec{r}),$$

donde $\vec{V}$ es la regla de aprendizaje.

De lo anterior surgen varios propósitos distintos:

- (1) Conocida una regla, se busca construir una red que la reproduzca.
- (2) Disponiendo de pares de preguntas y respuestas, se trata de diseñar una red que haga las asociaciones correctas. A esto se le llama aprendizaje supervisado.
- (3) Otro propósito esencialmente diferente es el **almacenamiento de memorias**, que son las respuestas, para plantear preguntas, que son los estados iniciales, y dejar que la red evolucione hacia un estado final buscando la respuesta almacenada más adecuada a la pregunta.

Las redes neuronales recurrentes que pensamos estudiar **se ubican dentro de este último concepto** y el modelo matemático correspondiente es descrito en el segundo capítulo.

Los elementos fundamentales para la formalización de las redes neuronales se basa en la propuesta (McCullochs y Pitts, 1943) que consiste en que una neurona dispara una señal eléctrica si la suma de sus entradas excitadoras excede un umbral, siempre y cuando no reciba entradas inhibitorias. Hacia 1957 von Neumann hace ver que las ideas de la física estadística podrían ser de utilidad en los sistemas de tipo cerebral, toda vez que se trata de acumu-

laciones de grandes cantidades de microsistemas aparentemente en desorden. Aunque esta clase de propuestas generan el interés de los diseñadores de computadoras digitales, diversos resultados teóricos tienden a desalentar los estudios formales acerca de estos sistemas almacenadores de información (Minsky y Papert, 1969). Posteriormente (Little, 1974) se trata a los sistemas de neuronas como espines de Ising con una temperatura asociada a su estocasticidad y años después las redes neuronales son estudiadas como sistemas de dos estados análogos a los vidrios de espín (Hopfield, 1982; Hopfield, 1984).

El trabajo de Hopfield constituye un avance fundamental hacia una teoría formal de las redes neuronales porque asocia un hamiltoniano al sistema y establece los caminos para pensar en términos de las herramientas cotidianas de la física. Hay dos respaldos históricos que contribuyen al avance en la investigación de estos sistemas: uno de ellos consiste en tratar a los espines (Glauber, 1963) como sistemas cuyas interacciones ocurren a través de una probabilidad de transición, w_i , que es función de los espines cercanos. Introduce una distribución de probabilidad para el sistema de espines y plantea una ecuación maestra conforme a la cual los estados de espín son procesos de Markov. El otro avance importante es un modelo de vidrio de espín totalmente conectado (Sherrington y Kirkpatrick, 1972) que parte de considerar el caso ideal de interacciones de alcance infinito. Este sistema es tratable analíticamente.

A partir de 1985 se utiliza la física estadística (Amit et al 1985a; Amit et al 1985b; Amit et al 1987a; Amit et al 1987b) para estudiar redes neuronales totalmente conectadas y que sostienen interacciones simétricas. Se encuentran un conjunto de propiedades de estos sistemas en equilibrio y se utiliza una función de Lyapunov, la energía libre del sistema, para estudiar sus mínimos globales y localizar los estados de equilibrio. La red es caracte-

rizada mediante variables macroscópicas intensivas análogas a la magnetización (parámetros de orden), que permiten medir la semejanza del estado de la red con los patrones almacenados en ella. Encuentran que el equilibrio es descrito por un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales que en la actualidad se conocen con el nombre de ecuaciones de campo promedio.

Entre 1987 y 1988 ocurren cambios importantes en el interés de quienes estudian esta clase de redes neuronales. Una vez que las propiedades de los sistemas en equilibrio empiezan a ser entendidas, se plantea el problema de la comprensión del problema dinámico. Son estudiadas las interacciones sinápticas de las neuronas (Crisanti y Sompolinsky, 1988). Se pasa de los modelos totalmente conectados a otros con conexiones diluídas y se estudia el modelo dinámico (Derrida et al 1987; Kree y Zippelius, 1987). También se utiliza la dinámica de Glauber para estudiar una dinámica macroscópica en términos de los parámetros de orden que miden la semejanza entre el estado de la red al tiempo t y los patrones almacenados en ella (Coolen y Ruijgrok, 1988). Se demuestra que para redes simétricas en equilibrio se obtienen las ecuaciones de campo promedio y se hace ver que su enfoque permite estudiar también las redes con interacciones asimétricas.

La gama de enfoques para el estudio de la dinámica de estos sistemas es muy amplia. Uno de ellos (Nishimori y Ozeki, 1993) recurre a las ecuaciones de Ginzburg y Landau para estudiar el problema como un movimiento “colina abajo” de los parámetros de orden. Otro (Ohira y Cowan, 1993) consiste en construir un operador de Liouville a base de operadores de creación y aniquilación para trabajar con una ecuación maestra y analizar la dinámica del estado microscópico de la i -ésima neurona de la red. Una de las líneas de trabajo que ha sido explorada de manera consistente es la originada por Coolen y Ruijgrok, cuya descrip-

ción macroscópica basada en los parámetros de orden ha sido generalizada al caso de redes que almacenan una cantidad muy grande de patrones. En esta línea de trabajo (Coolen y Sherrington 1993; Coolen y Sherrington, 1994; Laughton y Coolen, 1995) ha sido encontrado un sistema de ecuaciones integrodiferenciales acopladas para describir la evolución temporal de los parámetros de orden y de una nueva variable que mide la influencia de los patrones de magnitud microscópica (no condensados) sobre los que alcanzan magnitud macroscópica (condensados). Han demostrado que su formalismo reproduce los resultados de la teoría de réplica para el equilibrio y que la conducta cualitativa de la dinámica predicha por ellos coincide con la simulación numérica. Sin embargo reconocen que la concordancia cuantitativa no es satisfactoria para todo tiempo t .

Basados en los métodos de la física estadística, todos los enfoques mencionados arriba han tomado como válido el llamado límite termodinámico, conforme al cual se consideran las variables descriptoras en el caso en que el número de neuronas $N \rightarrow \infty$. Este procedimiento ha sido aplicado con éxito en el estudio de gases, sólidos cristalinos, diversas clases de líquidos, y en general, a sistemas que pueden ser modelados con base en los conceptos introducidos en el tratamiento de esta clase de estados de agregación. Todos ellos presuponen la existencia de densidades que son extremadamente altas si se les compara con el número de neuronas que pueden ser esperados en una red neurobiológica. Además, las simulaciones numéricas de estas redes reportan, regularmente, efectos de tamaño finito que suelen persistir hasta magnitudes en las cuales $N \sim 10^5$. Lo anterior sugiere que las técnicas utilizadas podrían pasar por alto efectos físicos que están relacionados con el carácter finito del sistema, como es el caso de las fluctuaciones aleatorias que aparecen en las variables descriptoras cuando el número de

eventos considerados es relativamente pequeño. Hasta donde nosotros sabemos, no ha sido desarrollado un estudio sistemático de ellos.

La motivación y los objetivos de esta investigación puede resumirse como sigue: Todos los estudios analíticos desarrollados para modelos de redes neuronales recurrentes se aplican a sistemas infinitamente grandes ($N \rightarrow \infty$) y la mayoría de ellos son de los llamados: *tipo de campo promedio*. Tanto la estática como la dinámica de los mismos pueden ser resueltas en este límite, que también suele llamarse *límite termodinámico*. En este trabajo desarrollamos una teoría que considera redes neuronales recurrentes muy lejos de la saturación. Esto significa que el cociente entre el número de patrones almacenados, p , y el número de neuronas de la red, N , definido como $\alpha = \frac{p}{N}$, es muy cercano a cero. En ella los efectos de tamaño finito toman la forma de fluctuaciones térmicas cuyo orden es $\mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$ y ocurren en torno a las trayectorias de campo promedio de la dinámica de los parámetros de orden. Cabe aclarar que la dinámica en el régimen cercano a la saturación se desconoce aún para el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$), por lo que el estudio de los efectos de tamaño finito en ese régimen está totalmente fuera de nuestro alcance.

Nuestra teoría se basa en un desarrollo de Kramers-Moyal que nos permite separar sistemáticamente la conducta de la red en el límite termodinámico de los efectos de tamaño finito. El ruido estocástico generado como resultado del carácter finito de la red aparece en nuestras expresiones analíticas en potencias del parámetro de ruido $\eta = \frac{1}{\sqrt{N}}$. De éstos retenemos únicamente la primera contribución no trivial, lo cual nos lleva a una ecuación de Fokker-Planck que nos permite modelar las fluctuaciones como procesos de Ornstein-Uhlenbeck dependientes del tiempo, que siempre son gaussianos.

En mayor detalle, el procedimiento que utilizamos es como sigue: tomamos como punto de partida la dinámica para los traslapes (parámetros de orden) desarrollada por Coolen y Ruijgrok para redes en el régimen lejano a la saturación. Distinguiremos dos clases de descripción: una microscópica que considera cada uno de los estados de las neuronas de la red como sus sujetos de descripción; y otra macroscópica que busca comparar, a todo tiempo t , la semejanza del microestado de la red con los patrones almacenados en ella. A partir de la dinámica de Glauber, y de la ecuación maestra correspondiente, obtenemos una descripción que no desprecia el carácter finito de la red, lo cual nos lleva a reconocer que el vector de traslapes es una variable vectorial estocástica, de donde resulta la necesidad de introducir una densidad de probabilidad multivariada que satisface una ecuación diferencial parcial. En una descripción a orden $\frac{1}{N}$ ésta resulta ser una ecuación de Fokker-Planck. Los efectos de tamaño finito se revelan entonces como pequeñas oscilaciones azarosas en torno a la trayectoria determinista que predice la dinámica de traslapes en el límite termodinámico; en consecuencia, es posible hacer una separación sistemática de estas fluctuaciones respecto de las trayectorias de campo promedio. Este procedimiento dará lugar a una segunda ecuación de Fokker-Planck, esta vez asociada a las variables de fluctuación, lo cual nos permitirá describir los efectos de tamaño finito de la red mediante la llamada aproximación de ruido lineal.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, estructuramos este trabajo de la manera siguiente:

i) En el segundo capítulo describimos el modelo de redes recurrentes y presentamos brevemente su dinámica macroscópica para el caso límite en que las redes están formadas por un número infinito de neuronas y con parámetro de carga $\alpha = \frac{p}{N}$ muy cercano a cero, donde

p es el número de patrones almacenados. Dicha dinámica macroscópica se basa en el vector de traslapes $\vec{m}$, que es de dimensión p y cuyas componentes miden, cada una de ellas, la semejanza del estado microscópico $\vec{s}(t)$ de la red, con cada patrón almacenado en ella. Exponemos el desarrollo de Kramers-Moyal en potencias de $\frac{1}{N}$ para obtener las ecuaciones deterministas de campo promedio. Resolvemos algunos ejemplos que consideramos relevantes para estudiar posteriormente los efectos de tamaño finito y mostramos cómo influye sobre la dinámica el carácter simétrico o antisimétrico de la interacción entre neuronas.

ii) El objetivo central del tercer capítulo es demostrar que para redes finitas la dinámica macroscópica se puede modelar, aproximadamente, como un fenómeno de difusión descrito por una ecuación de Fokker-Planck que describe la evolución temporal de la densidad de probabilidad conjunta $P(\vec{m}, t)$ del vector de traslapes $\vec{m}$. También encontramos las ecuaciones que describen la evolución temporal de los momentos estadísticos de la variable aleatoria $\vec{m}$ y la primera de ellas se aplica al problema de redes antisimétricas operando a temperatura cero con dos patrones almacenados. También se encuentran las condiciones bajo las cuales la red puede alcanzar un estado de equilibrio y se obtiene la expresión formal de la distribución de probabilidad correspondiente: $P_{eq}(\vec{m})$. Con estos esfuerzos comprobamos que la complejidad del problema nos obliga a continuar con el desarrollo del formalismo hasta hacerlo más manejable y poderoso. Esto se logra mediante el estudio de las fluctuaciones aleatorias $\vec{q}(t)$ en torno a la trayectoria de campo promedio $\vec{m}_t^*$, que será la versión madura de nuestra teoría.

iii) En el cuarto capítulo se obtiene una descripción de los efectos de tamaño finito mediante las variables de fluctuación, $\vec{q}$. Se encuentran las ecuaciones que describen su

dinámica y se resuelven formalmente. Para lograr este propósito hacemos lo siguiente: 1) primero encontramos la ecuación fundamental de la teoría, que es otra ecuación de Fokker-Planck, ahora para la distribución de probabilidad conjunta, $\tilde{P}_t(\vec{q})$. 2) Enseguida obtenemos las ecuaciones lineales ordinarias y no autónomas que describen la evolución de los momentos estadísticos de las fluctuaciones. 3) Finalmente hallamos la solución formal a estas ecuaciones. Con lo anterior concluimos la formulación de la teoría, de modo que el siguiente objetivo central es su aplicación. Para conocer las implicaciones de la teoría y comparar con el experimento la aplicamos a sistemas fuera de equilibrio y en equilibrio, así como otros que satisfacen y que no satisfacen balance detallado.

iv) Dentro del rubro de los sistemas en equilibrio estudiamos en el quinto capítulo a una clase de redes que presentan estados estacionarios con balance detallado. Discutimos el teorema de fluctuación-disipación y analizamos los estados de equilibrio de redes con memorias asociativas. Para este propósito consideramos el modelo de Hebb generalizado al caso de patrones almacenados con diferentes pesos (Viana, 1988) y presentamos una comparación entre nuestra predicción teórica y los resultados arrojados por las simulaciones en computadora.

v) En el sexto capítulo abordamos el proceso de relajación al equilibrio en la clase de sistemas arriba mencionados. Es decir, estudiamos cómo evolucionan las fluctuaciones cuando la red avanza hacia la recuperación de una memoria almacenada. Los sistemas seleccionados son dos: 1) redes recurrentes operando a temperatura cero, cuya sencillez permite encontrar soluciones analíticas, y 2) redes operando a temperaturas intermedias y partiendo de estados iniciales microscópicos tales que sólo uno de los traslapes iniciales es macroscópico. Es-

tos serán llamados posteriormente estados puros. Sus ecuaciones necesitan ser resueltas por métodos numéricos. Encontramos las soluciones correspondientes y comparamos las curvas teóricas obtenidas con las que resultan de las simulaciones.

vi) En el séptimo capítulo abordamos la clase de sistemas que no satisfacen balance detallado. Estudiamos primero un caso en que teniendo la red infinita un mismo estado macroscópico atractor, los efectos de tamaño finito nos pueden llevar a alguno de dos estados posibles, caracterizados porque sus fluctuaciones tienen propiedades estadísticas distintas: *i)* uno en donde se cumple el balance detallado y *ii)* otro en el cual éste no existe. Primero demostramos que el punto fijo seleccionado es estable y enseguida calculamos los primeros y segundos momentos estadísticos de las fluctuaciones en el estado estacionario. Posteriormente comparamos nuestros resultados teóricos con las simulaciones.

vii) En el octavo capítulo presentamos una aplicación de nuestra teoría cuya importancia radica en que los efectos de tamaño finito de la red modifican cualitativamente su conducta macroscópica como resultado de las fluctuaciones aleatorias. Este consiste en el estudio de un sistema para el cual las redes infinitas tienen cuencas de atracción bien definidas para los traslapes $\vec{m}$, en cambio, cuando se trata de redes finitas encontramos la existencia de un tiempo de escape, t_{esc} , en el cual el estado del sistema puede salir, con probabilidad igual a 1, hacia otra cuenca contigua. Obtenemos teóricamente una expresión analítica para t_{esc} y lo comparamos con los resultados que ofrecen las simulaciones.

II. El modelo de redes recurrentes. Su dinámica para un número infinito de neuronas

II.1 Introducción

En este capítulo estudiamos la dinámica macroscópica de las redes recurrentes para el caso en que se forman con un número infinito, N , de neuronas y con una cantidad tan pequeña de patrones almacenados, p , que el parámetro de carga, $\alpha = \frac{p}{N}$, toma un valor cercano a cero. Es decir, trabajamos en lo que se llama el régimen muy lejano a la saturación. Presentamos los elementos fundamentales que componen la conducta microscópica de la red. Introducimos el vector de traslapes como variable intensiva, lo cual nos permite pasar a una descripción macroscópica y definimos un promedio condicional para toda variable dinámica $f(\vec{\sigma})$. Obtenemos las ecuaciones que describen la evolución temporal del vector de traslapes $\vec{m}(t)$, presentamos una breve discusión que demuestra que la conducta cualitativa del estado macroscópico de la red puede ser clasificada con base en la simetría de las interacciones sinápticas, $\{J_{ij}\}$. Esta característica será trasladada mas adelante a una matriz A que aparecerá al escribir en forma separable el campo que actúa sobre cada neurona. Resolvemos numéricamente algunos ejemplos de interés (Coolen y Ruijgrok, 1988; Coolen, 1997). Discutimos tres casos en los cuales hay soluciones analíticas para $\vec{m}(t)$ y finalmente hacemos ver porqué esta descripción dinámica es válida sólo si $\alpha \simeq 0$. El contenido de este capítulo se encuentra en la literatura publicada, no es de manufactura original del autor y está seleccionado con el propósito de servir de base a los estudios que se presentan más adelante sobre los efectos de

tamaño finito en las redes neuronales recurrentes.

II.2 Descripción del modelo

Consideremos una red recurrente operando a temperatura T , con N neuronas tales que la i -ésima de ellas interacciona con la j -ésima con una magnitud J_{ij} y donde cada una es un sistema de dos estados representado por una variable bivaluada, $\sigma_i(t)$, que toma el valor $+1$ para representar a una neurona que lanza señales y -1 cuando no lo hace. El estado microscópico de la red al tiempo t está dado mediante la especificación de cada uno de los estados $\sigma_i(t)$ de las N neuronas, de modo que el espacio de microestados de la red está formado por vectores N -dimensionales $\vec{\sigma}(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_N(t))$ que toman sus valores en un hipercubo con 2^N esquinas.

De estos 2^N estados posibles de la red hay p de ellos que denotaremos con los símbolos: $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_p$, que constituyen los p patrones almacenados en el sistema y que son utilizados para especificar la interacción neuronal J_{ij} que denota el peso que da la neurona i a la señal proveniente de la j -ésima neurona. La regla algebraica es la siguiente:

$$J_{ij} = [1 - \Delta\delta_{ij}] \frac{1}{N} \sum_{\mu, \nu=1}^p \xi_i^\mu A_{\mu\nu} \xi_j^\nu, \quad (1)$$

donde $A_{\mu\nu}$ es una matriz de dimensión $p \times p$ a ser especificada y la variable Δ nos permite controlar la presencia o ausencia de autointeracción en la i -ésima neurona definiéndola como sigue:

$$\Delta = \begin{cases} 0 & \text{si } J_{ii} \neq 0 \\ 1 & \text{si } J_{ii} = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Como podemos ver, una matriz simétrica A corresponde a interacciones simétricas J_{ij} .

A las redes que almacenan patrones en esta forma se les llama redes separables, (Coolen, 1997).

Para nuestra notación seguiremos una convención que consiste en señalar con letras latinas a las neuronas y con letras griegas a los patrones almacenados.

Cada neurona recibe señales a partir de las $N - 1$ restantes a través de un campo estocástico, $h_i(\vec{\sigma})$, dado por la expresión algebraica siguiente:

$$h_i[\vec{\sigma}(t)] = \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_j(t) + \theta_i, \quad (3)$$

donde J_{ij} es la magnitud de la conexión sináptica y θ_i es el umbral de respuesta de la i -ésima neurona. La variable θ_i es aleatoria con una distribución de probabilidad a ser especificada.

La influencia del campo h_i da lugar a que el estado $\sigma_i(t)$ de la i -ésima neurona se modifique con una probabilidad de transición $w_i[\vec{\sigma}(t)]$ dada como:

$$w_i[\vec{\sigma}(t)] = \frac{1}{2} [1 - \sigma_i \tanh \beta h_i[\vec{\sigma}(t)]] , \quad (4)$$

donde $\beta = \frac{1}{T}$ es el recíproco de la temperatura.

La expresión anterior es tal que la interacción entre las neuronas se introduce a través de una probabilidad de transición entre sistemas (neuronas) de dos estados (Glauber, 1963). Además, (4) es tal que para interacciones $\{J_{ij}\}$ simétricas se garantiza la existencia de un régimen de equilibrio en el cual se cumple el balance detallado entre los pares de estados de

cada una de las neuronas.

La probabilidad de transición, $w_i [\vec{\sigma}(t)]$, establece una regla de actualización del estado de cada neurona a cada instante t . De aquí se desprenden dos dinámicas obvias y distintas para la red: 1) cuando sólo una neurona es actualizada al tiempo t y 2) cuando todos los estados se actualizan al mismo tiempo. La primera de ellas recibe el nombre de dinámica secuencial y será la que estudiaremos aquí, mientras que la segunda se llama dinámica paralela.

Para describir la dinámica microscópica de la red se le asocia a cada estado $\vec{\sigma}(t)$ una probabilidad, $p_t [\vec{\sigma}(t)]$, que satisface una ecuación maestra que establece la pérdida y ganancia de probabilidad a nivel microscópico. Esta es como sigue:

$$\frac{d}{dt} p_t [\vec{\sigma}(t)] = \sum_{i=1}^N \left\{ w_i [\hat{F}_i \vec{\sigma}(t)] p_t [\hat{F}_i \vec{\sigma}(t)] - w_i [\vec{\sigma}(t)] p_t [\vec{\sigma}(t)] \right\}, \quad (5)$$

donde $\hat{F}_i$ es un operador definido como: $\hat{F}_i f(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N) = f(\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$. Cabe aclarar que la introducción de esta ecuación descansa sobre la hipótesis de que $\vec{\sigma}(t)$ es un proceso estocástico de Markov.

Definiendo las variables de estado, o traslapes, m_μ , como sigue:

$$m_\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \sigma_i(t). \quad (6)$$

Se obtiene una descripción macroscópica de la red. La utilidad física de esta variable consiste en que permite medir la semejanza entre el estado $\vec{\sigma}(t)$ y el patrón almacenado $\vec{\xi}^\mu$, ($\mu = 1, \dots, p$), de modo que formando el vector p -dimensional $\vec{m}(t) = (m_1(t), \dots, m_p(t))$ contamos con tal medida para cada uno de los p patrones que la red almacena. Así obten-

emos un espacio de estados de dimensión p en el cual ocurre una dinámica macroscópica cuya descripción nos dice cómo se comporta la red en cuanto a su capacidad para recuperar los patrones almacenados, o acercarse a ellos en el transcurso del tiempo. En términos del parámetro de estados $m_\mu(t)$, el campo estocástico h_i que actúa sobre la neurona i se escribe como sigue:

$$h_i(\vec{\sigma}) = \sum_{\mu, \nu=1}^p \xi_i^\mu A_{\mu\nu} m_\nu(\vec{\sigma}) - \frac{1}{N} \sigma_i \vec{\xi}_i \cdot A \vec{\xi}_i \Delta + \theta_i = \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m} - \frac{\Delta}{N} \sigma_i \vec{\xi}_i \cdot A \vec{\xi}_i + \theta_i. \quad (7)$$

Se dice que una red está en el régimen lejano a la saturación cuando el número de patrones almacenados, p , es muy pequeño comparado con el número de neuronas N . En este caso se dispone de un formalismo para describir la dinámica de las redes recurrentes. Es el siguiente: Se introduce la distribución de probabilidad conjunta para los traslapes:

$$P_t(\vec{m}) = \sum_{\vec{\sigma}} p_t(\vec{\sigma}) \delta[\vec{m} - \vec{m}(\vec{\sigma})], \quad (8)$$

y se demuestra que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} P_t(\vec{m}) = \sum_{\mu=1}^p \frac{\partial}{\partial m_\mu} \{ P_t(\vec{m}) F_\mu^{(1)}(\vec{m}, t) \} + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (9)$$

con $F_\mu^{(1)}(\vec{m}, t)$ dado por la expresión (30).

Tomando el límite $N \rightarrow \infty$, ésta resulta ser la ecuación de Liouville para el flujo en el espacio de estados macroscópicos $\{\vec{m}\}$, que serán denotados como $\vec{m}_t^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \vec{m}(t)$ y son solución de las ecuaciones acopladas y no lineales que siguen:

$$\frac{d}{dt} \vec{m}_t^* = -\vec{m}_t^* + \langle \vec{\xi} \tanh \beta (\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta) \rangle_{\xi, \theta}. \quad (10)$$

La solución a (9) es la distribución de probabilidad dada por la siguiente delta de Dirac:

$$P_t(\vec{m}) = \delta[\vec{m} - \vec{m}_t^*]. \quad (11)$$

II.3 La conducta del vector de traslapes para redes infinitas

La evolución temporal del vector de traslapes $\vec{m}_t^*$ depende de la temperatura T de la red, de la estructura de la matriz A y del estado inicial $\vec{m}_0^*$. Una matriz A del tipo $A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ define redes que almacenan patrones conforme a la regla de almacenamiento de Hebb. En estos casos existen estados de equilibrio que pueden ser estudiados como se expresa enseguida:

II.3.1 Estados de equilibrio

La dinámica de $\vec{m}_t^*$ puede ser vista como un movimiento “colina abajo” sobre una hipersuperficie (Domany et. al. eds. 1992) definida por la función $f(\vec{m}^*, \beta)$ que toma la siguiente forma:

$$f(\vec{m}^*, \beta) = \frac{1}{2} \vec{m}^{*2} - \frac{1}{\beta} \langle \log \left\{ 2 \cosh \left[\beta (\vec{\xi} \cdot \vec{m}^*) + \theta \right] \right\} \rangle_{\vec{\xi}, \theta}. \quad (12)$$

En este caso las ecuaciones (10) se pueden escribir mediante el siguiente gradiente:

$$\frac{d}{dt} \vec{m}_t^* = -\nabla f(\vec{m}_t^*, \beta) \quad (13)$$

de modo que $f(\vec{m}^*, \beta)$ es la función de Lyapunov del sistema. Sus propiedades topológicas nos indican cómo es la dinámica del problema. Esta tendrá puntos fijos si para algún estado

$\vec{m}_{eq}^*$, se cumple que $\nabla f(\vec{m}_{eq}^*, \beta) = 0$ y éstos serán estables si el hessiano

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial m_\mu^* \partial m_\nu^*} f(\vec{m}_{eq}^*, \beta), \quad (14)$$

tiene eigenvalores positivos.

El punto $\vec{m}_i^*$ describe una trayectoria colina abajo y se mueve a través de los valles de la hipersuperficie $f(\vec{m}^*, \beta)$, que presenta n valles separados por barreras para temperaturas $T < 1$. Cuando N es infinito estos valles están separados por paredes infinitas, además se cumple que $n \geq p$, de modo que solamente hay p puntos que minimizan globalmente la energía y constituyen estados atractores que están relacionados con los patrones almacenados. Los $n - p$ restantes son solamente mínimos locales de la energía, se llaman estados espurios y se relacionan con mezclas de los patrones almacenados. Para $T \simeq 1$ ocurre un cambio cualitativo en la topología de $f(\vec{m}^*, \beta)$, entonces aparece solamente un mínimo global en $\vec{m}^* = 0$. Para valores muy pequeños del parámetro de carga ($\alpha \ll 1$), el diagrama de fase T vs. α presenta la existencia de un cambio de fase en $T = 1 + \sqrt{\alpha}$, tal que por debajo de esta temperatura tendremos una fase de recuperación de memorias que puede ser de buena calidad si la temperatura es cercana a cero y muy pobre conforme T se acerca a la unidad. Por encima de $T = 1 + \sqrt{\alpha}$ se presenta la fase de estados paramagnéticos.

II.3.2 Aspectos cualitativos de la dinámica

Existe un tipo de matrices A antisimétricas para las cuales la conducta de la red es bien conocida, es el caso en el que $A = I + S$ con S una matriz antisimétrica cuya diagonal son ceros. Entonces las soluciones de las ecuaciones (10) presentan estados atractores consistentes de

trayectorias periódicas.

En general, la conducta cualitativa de las trayectorias de campo promedio, $\vec{m}_t^*$, para redes separables, puede clasificarse mediante un eigenvalor relevante, λ^* , de la matriz A . Usando técnicas de la teoría de bifurcaciones, (Laughton y Coolen, 1994) ha sido analizado la conducta alrededor del punto trivial fijo $\vec{m} = 0$ y se ha encontrado que, en esencia, hay dos tipos de conducta cuando el parámetro de bifurcaciones β se modifica: *i*) las bifurcaciones de estado estacionario, con propiedades de memoria asociativa si λ^* es un número real y *ii*) las bifurcaciones de Hopf, con propiedades de recuperación secuencial de los patrones si λ^* tiene parte real y parte imaginaria.

II.3.3 Comportamiento en la vecindad de la temperatura crítica

Los mismos autores han demostrado que, en particular, para redes con dos patrones almacenados mediante una matriz A antisimétrica y operando a temperaturas T muy cercanas a la temperatura crítica $T_c \simeq 1$, la solución del sistema de ecuaciones de campo promedio puede ser aproximada mediante una expresión analítica. Para matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

con a parámetro de asimetría y $a > 1$, las trayectorias de campo promedio $\vec{m}_t^*$ describen círculos cuyo radio de Hopf y frecuencia son

$$r_H = \sqrt{\frac{2(\frac{\beta}{\beta_c} - 1)}{\beta^3(a^2 + 1)(a - 1)}} \quad , \quad \omega = -a\beta - \frac{(\frac{\beta}{\beta_c} - 1)(a + 1)}{1 - a} \quad (16)$$

Para redes que almacenan patrones conforme a la regla de Hebb, $A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, se presenta

la siguiente conducta:

- Para $T > 1$ se cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{m}_t^* = 0$,
- y para $T < 1$ se cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{m}_t^* = \vec{m}_{eq}(T)$.

II.3.4 Soluciones numéricas

En general, las soluciones a las ecuaciones (10) sólo pueden obtenerse mediante métodos numéricos. Con estas técnicas puede comprobarse la dinámica que mencionamos páginas atrás y también es posible encontrar las cuencas de los estados atractores. Estas son conjuntos de puntos $\{\vec{m}^*(0)\}_\nu$, $\nu = 1, \dots, p$, tales que si cualquiera de los puntos que forman una cuenca es tomado como condición inicial $\vec{m}_0^*$, la red evoluciona siempre al mismo estado atractor. Resulta entonces que, una vez seleccionado un conjunto de condiciones iniciales, la trayectoria no puede recorrer todo el espacio de estados porque se queda atrapada en una de las cuencas. Por este motivo se dice que el fenómeno no es ergódico, lo cual está relacionado con el carácter selectivo de patrones de la red.

Salvo por la ausencia de estados espurios, el problema de las redes con dos patrones almacenados es muy útil para mostrar las conductas dinámicas que hemos mencionado anteriormente. Por esta razón hemos considerado este caso para resolver numéricamente las ecuaciones (10), el algoritmo utilizado fué un Runge-Kutta de cuarto orden con tamaño de paso $h = 0.05$, 230 iteraciones para obtener la misma cantidad de puntos y graficar las soluciones. Más adelante se presentan éstas para varias temperaturas.

II.3.4.1 Redes infinitas con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb

Tomando al siguiente conjunto como condiciones iniciales: $(m_1^0, m_2^0) = \{(0.2, 0.3), (0.3, 0.2), (-0.2, 0.3), (-0.3, 0.2), (-0.2, -0.3), (-0.3, -0.2), (0.2, -0.3), (0.3, -0.2)\}$, se resolvieron

numéricamente las ecuaciones de campo promedio dadas por (10) para una red simétrica con matriz $A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, con dos patrones almacenados, $p = 2$, y temperatura $T = 0.1$, primero y $T = 0.8$ después. Los resultados se presentan en las figuras 1(a) y 1(b) respectivamente. De la figura 1(a) resulta claro que para una red simétrica a temperatura $T = 0.1$ existen cuatro cuencas en el espacio de estados macroscópicos. Una para cada uno de los siguientes estados atractores: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. En este caso la recuperación de uno de los patrones $\vec{\xi}^\mu$ es completa. De la figura 1(b) resulta que para $T = 0.8$ se obtiene la misma estructura de cuatro cuencas y cuatro estados atractores, sin embargo, la calidad de la recuperación disminuye paulatinamente. En este caso tenemos: $(m(T), 0)$, $(0, m(T))$, $(-m(T), 0)$, $(0, -m(T))$, con $m(T) < 1$.

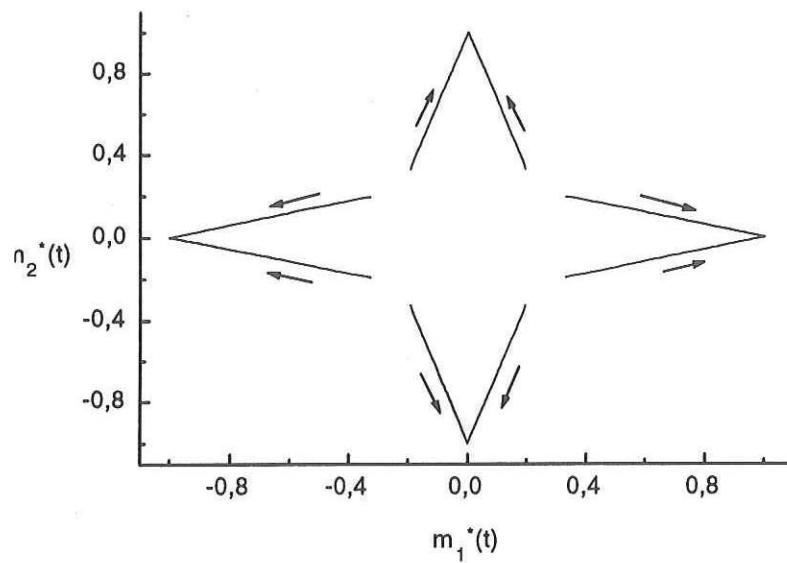


Figura 1(a). Existencia de estados atractores. Soluciones para N infinita, $p = 2$, red simétrica, $a = 0$, $T = 0.1$. Solución numérica de la ecuación (10).

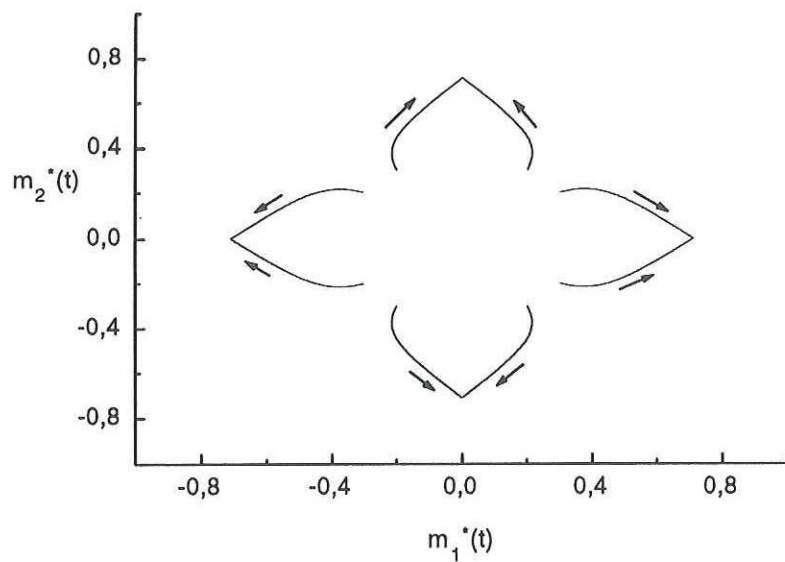


Figura 1(b). Existencia de estados atractores. Soluciones para N infinita, $p = 2$, red simétrica, $a = 0$, $T = 0.8$. Solución numérica de la ecuación (10).

II.3.4.2 Redes antisimétricas

En el caso de redes antisimétricas los estados atractores ya no son puntos sino curvas que se mantienen debido a la presencia de una conducta periódica que es independiente de las condiciones iniciales. Enseguida se presentan las gráficas 2(a) y 2(b) para una red a temperatura $T = 0.1$ y $T = 0.2$ respectivamente, parámetro de antisimetría $a = 1$ y dos patrones (imágenes) almacenados. Podemos apreciar que en lugar de que la trayectoria se dirija hacia un punto atractor, ahora exhibe una conducta periódica consistente en que el vector de traslapes $\vec{m}(t)$ describe una curva cerrada para visitar los dos patrones almacenados y sus simétricos $\xi_\mu^1 = -\xi_\mu^1$. Cuando la temperatura aumenta, la red mantiene esta conducta, pero la trayectoria periódica se cierra paulatinamente, lo cual se traduce en la pérdida de calidad del acercamiento a los patrones. En términos prácticos diremos que la semejanza con la imagen en turno es más mala conforme T crece. Si resolvemos las ecuaciones de campo promedio para una red antisimétrica con $a = 3$ y $T \sim 1$ encontraremos que la curva se acerca paulatinamente a una cuasicircunferencia que viene a ser el estado atractor periódico. En este caso los valores que toma el vector de traslapes $\vec{m}_t^*$ son tan pequeños que ya no tiene sentido hablar de visitas a los puntos de recuperación de memorias.

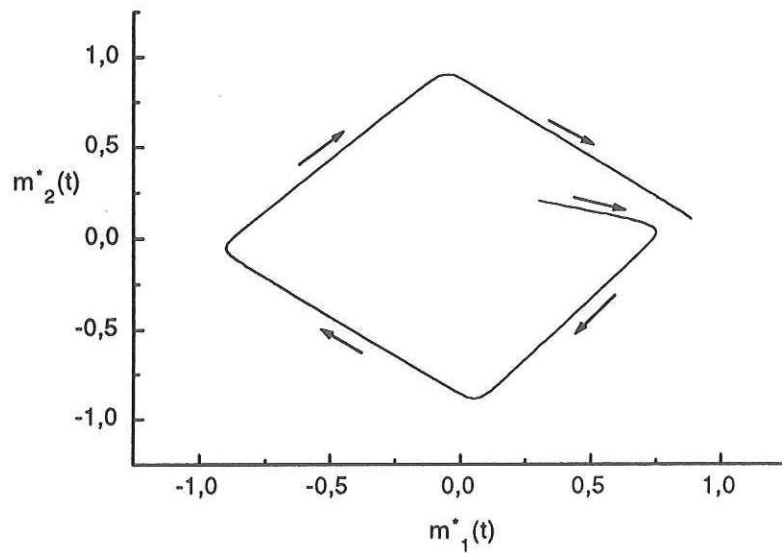


Figura 2(a). Conducta cíclica. Soluciones para N infinita, $p = 2$, red antisimétrica, $a = 1$, $T = 0.1$. Solución numérica de la ecuación (10).

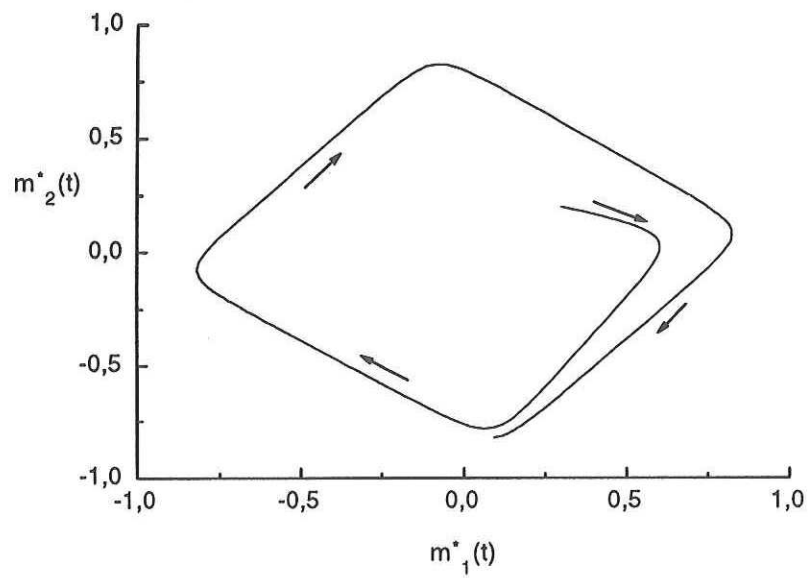


Figura 2(b). Conducta cíclica. Soluciones para N infinita, $p = 2$, red antisimétrica, $a = 1$, $T = 0.2$. Solución numérica de la ecuación (10).

Hay al menos dos casos en los cuales la solución a las ecuaciones de campo promedio

(10) puede obtenerse analíticamente, estos son:

- Redes cuya temperatura es cero.
- Redes con condiciones iniciales macroscópicas tales que $\vec{m}_t^*(0) \simeq 0$ y a temperaturas $T > 1 + \sqrt{\alpha}$. Sin embargo este caso no es de interés debido a que no se recupera información almacenada.

Enseguida revisaremos brevemente cada uno de ellos:

Para redes a $T = 0$ se cumple que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh \beta \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right) = \text{sign} \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right), \quad (17)$$

de modo que las ecuaciones (10) se simplifican a la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} m_1^*(t) + m_1^*(t) = \langle \text{sign} \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right) \rangle_{\xi, \theta}, \quad (18)$$

con

$$\langle \text{sign} \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right) \rangle_{\xi, \theta} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{P\mu} \text{sign} \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right), \quad (19)$$

donde $P\mu$ indica las diferentes combinaciones de signos. Además

$$\frac{d}{dt} m_\nu^*(t) + m_\nu^*(t) = 0, \quad (20)$$

para $\nu > 1$. En este caso las soluciones son:

$$m_\nu^*(t) = \begin{cases} m_1^*(0) \exp(-t) + \int_0^t ds \exp(s-t) \text{sign} \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_s^* + \theta \right) & \text{si } \nu = 1 \\ m_\nu^*(0) \exp(-t) & \text{si } \nu > 1 \end{cases} \quad (21)$$

A temperaturas muy altas se cumple que $\beta \ll 1$, de tal forma que la potencia β^3 es extremadamente pequeña. Entonces podemos considerar el siguiente desarrollo en serie de

Taylor:

$$\tanh \beta \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right) = \beta \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right) + \mathcal{O}(\beta^3),$$

de donde resulta que la ecuación diferencial para $\vec{m}_t^*$ puede aproximarse como sigue:

$$\frac{d}{dt} \vec{m}_t^* + \vec{m}_t^* = \langle \vec{\xi} \beta \left(\vec{\xi} \cdot \vec{m}_t^* + \theta \right) \rangle_{\vec{\xi}, \theta} + \dots \quad (22)$$

En estos casos la solución es directa, como discutimos enseguida. Suponiendo que $\theta = 0$ y que los patrones son generados conforme a la siguiente distribución de probabilidad: $P(\xi_i^\mu) = \frac{1}{2} [\delta(\xi_i^\mu - 1) + \delta(\xi_i^\mu + 1)]$, las ecuaciones de campo promedio toman la forma que sigue:

$$\frac{d}{dt} m_\nu^*(t) + (1 - \beta) m_\nu^*(t) = 0, \quad (23)$$

y la solución es:

$$m_\nu^*(t) = m_\nu^*(0) \exp[-(1 - \beta)t]. \quad (24)$$

Las simulaciones con redes neuronales recurrentes han dejado claro que aparece un ruido estocástico conforme aumenta el número p de patrones almacenados. Este ruido tiene su origen en la influencia de los patrones almacenados $\vec{\xi}^\mu$ cuyo traslape con el estado microscópico $\vec{\sigma}(t)$ de la red no alcanza un valor macroscópico. Estos casos no son contemplados adecuadamente por la dinámica que venimos estudiando, pues en ésta no ha sido considerada la existencia de los traslapes con magnitud microscópica.

III. La dinámica de los traslapes como un fenómeno de difusión

III.1 Introducción

El objetivo central de este tercer capítulo es describir la dinámica macroscópica de las redes neuronales finitas en términos de los traslapes $\vec{m}(t)$. Encontraremos que para redes recurrentes con un número N de neuronas suficientemente grande, pero finito, la conducta estadística de dichos traslapes puede ser modelada, en forma aproximada, mediante procesos de difusión. Obtendremos una ecuación de Fokker-Planck para describir la evolución temporal de la densidad de probabilidad conjunta $P(\vec{m}, t)$ del vector de traslapes $\vec{m}$. Nos apoyaremos en el teorema de (Pawula, 1967) para concluir cuáles son las opciones prácticas que se nos presentan para desarrollar una teoría probabilista consistente a partir del desarrollo de Kramers-Moyal (Risken, 1989). Veremos que éstas involucran el corte de términos a primero o a segundo orden, lo cual es posible siempre que se cumplan ciertas condiciones físicas que habremos de determinar. También encontraremos las ecuaciones que describen la evolución temporal de los momentos estadísticos de la variable aleatoria $\vec{m}$ y la primera de ellas será aplicada, en la última sección de este capítulo, al problema de redes antisimétricas operando a temperatura cero con dos patrones almacenados. Estudiaremos las condiciones bajo las cuales la red puede alcanzar un estado de equilibrio y escribiremos la expresión formal de la densidad de probabilidad, $P_{eq}(\vec{m})$. Dada su complejidad, sólo la utilizaremos para estudiar los casos de fluctuaciones pequeñas en torno al estado de equilibrio.

Veremos que resulta impráctico dejar el desarrollo de la teoría hasta este nivel, de modo

que la principal utilidad de las aplicaciones abordadas consistirá en motivar el estudio de las fluctuaciones aleatorias $\vec{q}(t)$ en torno a la trayectoria de campo promedio $\vec{m}_t^*$. Este último será el objetivo del cuarto capítulo de este trabajo y constituirá la versión madura de nuestra teoría.

III.2 La ecuación de Fokker-Planck

Partimos de la ecuación maestra (5) para la distribución de probabilidad, $p_t[\vec{\sigma}(t)]$. Tomamos los traslapes (6) como variables de estado y (8) como su densidad de probabilidad. Derivamos respecto al tiempo en (8) e insertamos en el lado derecho (5). Aprovechamos que cada actualización al tiempo t del estado microscópico $\vec{\sigma}(t)$ da lugar a que el traslape m_μ cambie como sigue:

$$m_\mu(\hat{F}_k \vec{\sigma}(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i \neq k} \xi_i^\mu \sigma_i(t) - \frac{1}{N} \xi_k^\mu \sigma_k(t) = m_\mu(\vec{\sigma}(t)) - \frac{2}{N} \xi_k^\mu \sigma_k(t),$$

de modo que en general tenemos $\vec{m}(\hat{F}_k \vec{\sigma}) = \vec{m}(\vec{\sigma}) - \frac{2}{N} \vec{\xi}^k \sigma_k$ y desarrollamos en serie de Taylor en potencias de $\frac{2}{N} \sigma_i \xi_i$ de modo que se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_t(\vec{m}) &= \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} \sum_{\mu_1=1}^p \cdots \sum_{\mu_l=1}^p \frac{\partial^l}{\partial m_{\mu_1} \cdots \partial m_{\mu_l}} \left\{ \sum_{\vec{\sigma}} p_t(\vec{\sigma}) \sum_{i=1}^N w_i(\vec{\sigma}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{2}{N} \sigma_i \xi_i^{\mu_1} \right) \cdots \left(\frac{2}{N} \sigma_i \xi_i^{\mu_l} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Definimos el promedio condicional, $\langle f(\vec{\sigma}) \rangle_{\vec{m}, t}$, de cualquier variable dinámica $f(\vec{\sigma})$

como sigue:

$$\langle f(\vec{\sigma}) \rangle_{\vec{m}, t} = \frac{\sum_{\vec{\sigma}} p_t(\vec{\sigma}) f(\vec{\sigma}) \delta[\vec{m} - \vec{m}(\vec{\sigma})]}{\sum_{\vec{\sigma}} p_t(\vec{\sigma}) \delta[\vec{m} - \vec{m}(\vec{\sigma})]}, \quad (26)$$

que mide las contribuciones a la función $\langle f(\vec{\sigma}) \rangle_{\vec{m},t}$ de parte de todos los estados microscópicos $\vec{\sigma}$ que están condicionados a producir el vector de traslapes macroscópico $\vec{m}$ al tiempo t . Reacomodamos factores y usamos (26). Podemos escribir el término entre llaves como $P_t(\vec{m}) F_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l)}(\vec{m}, t)$ con

$$F_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l)}(\vec{m}, t) = \left\langle \sum_{i=1}^N w_i(\vec{\sigma}) \left(\frac{2}{N} \sigma_i \xi_i^{\mu_1} \right) \cdots \left(\frac{2}{N} \sigma_i \xi_i^{\mu_l} \right) \right\rangle_{\vec{m},t}, \quad (27)$$

de modo que (25) se reescribe como:

$$\frac{d}{dt} P_t(\vec{m}) = \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} \sum_{\mu_1=1}^p \cdots \sum_{\mu_l=1}^p \frac{\partial^l}{\partial m_{\mu_1} \cdots \partial m_{\mu_l}} \{ P_t(\vec{m}) F_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l)}(\vec{m}, t) \}. \quad (28)$$

Esto es lo que se llama un desarrollo de Kramers-Moyal y es nuestro punto de partida para el estudio de la conducta estocástica del vector de traslapes $\vec{m}(t)$.

El teorema de Pawula establece que la función $P(\vec{m}, t)$ puede mantenerse positiva, para cualquier tiempo t , solamente en los tres casos siguientes:

- i) cuando se corta la serie después del primer término, lo cual es posible si se toma el límite termodinámico, es decir, cuando se estudian las redes infinitas,
- ii) cuando se cumplen las condiciones físicas para cortar la serie después del segundo término, que es la primera corrección a orden N^{-1} , y se obtiene una ecuación de Fokker-Planck. Entonces pueden considerarse las redes finitas,
- y iii) si se conserva todo el desarrollo.

Existen tratamientos, para casos específicos, en los cuales se utilizan cortes más allá del segundo término, pero aunque mejoran la precisión, se trata únicamente de herramientas matemáticas que no pueden ser consideradas como una teoría probabilista completa (Risken, 1989).

La condición física necesaria para efectuar el corte a segundo orden se obtiene como

sigue: Partimos de la hipótesis de que las funciones promediadas

$$\langle w_i(\vec{\sigma}) (\sigma_i \xi_i^{\mu_1}) \cdots (\sigma_i \xi_i^{\mu_l}) \rangle_{\vec{m}, t},$$

mantienen una conducta suave respecto a m_μ , de tal modo que sus derivadas parciales no modifican el orden de magnitud de las funciones originales. Entonces se puede estimar el orden de magnitud del p -ésimo término como sigue: Primero reacomodamos en (27) para escribir el coeficiente como

$$F_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l)}(\vec{m}, t) = \left(\frac{2}{N} \right)^l \sum_{i=1}^N \langle w_i(\vec{\sigma}) (\sigma_i \xi_i^{\mu_1}) \cdots (\sigma_i \xi_i^{\mu_l}) \rangle_{\vec{m}, t},$$

de donde resulta claro que la suma sobre i nos lleva a que

$$F_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l)}(\vec{m}, t) \sim \mathcal{O} \left(\frac{2^l}{N^{l-1}} \right).$$

Enseguida consideramos las sumas sobre μ_l , de donde encontramos que el p -ésimo término del desarrollo de Kramers-Moyal será tal que

$$\begin{aligned} \sum_{l>1} \frac{1}{l!} \sum_{\mu_1=1}^p \cdots \sum_{\mu_l=1}^p \frac{\partial^l}{\partial m_{\mu_1} \cdots \partial m_{\mu_l}} \{ P(\vec{m}, t) F_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l)}(\vec{m}, t) \} &\sim \mathcal{O} \left(\frac{p^l}{l!} \frac{2^l}{N^{l-1}} \right) \\ &\sim \mathcal{O} \left(\frac{2^l}{l!} N \alpha^l \right), \end{aligned}$$

donde $\alpha = \frac{p}{N}$ es el parámetro de carga. Finalmente tomamos el cociente del orden de magnitud del tercer término respecto del orden de magnitud del segundo término, obtenemos $\frac{2}{3}\alpha$, de donde resulta que el desarrollo de Kramers-Moyal se puede cortar después del segundo término, siempre y cuando el número p de patrones almacenados en la red sea muy pequeño comparado con el número N de neuronas que la forman. Esto es lo que llamamos el régimen lejano a la saturación.

Por lo tanto, cuando se parte del desarrollo de Kramers-Moyal, podemos obtener una

teoría probabilista consistente, que describa a una red recurrente de tamaño finito, en el mismo régimen donde la dinámica de las redes infinitas es totalmente conocida. El resultado del corte nos proporciona la siguiente ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{m}, t) = \sum_{\mu=1}^p \frac{\partial}{\partial m_{\mu}} \{P(\vec{m}, t) F_{\mu}(\vec{m}, t)\} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p \frac{\partial^2}{\partial m_{\mu} \partial m_{\nu}} \{P(\vec{m}, t) D_{\mu\nu}(\vec{m}, t)\}, \quad (29)$$

con el término de flujo dado por

$$F_{\mu}^{(1)}(\vec{m}, t) = m_{\mu} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \tanh \beta \left[\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m} - \frac{1}{N} \Delta \sigma_i \vec{\xi}_i \cdot A \vec{\xi}_i + \theta_i \right], \quad (30)$$

y la matriz de difusión de la siguiente forma

$$F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t) = \frac{2}{N} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_i^{\nu} \tanh \beta \left[\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m} - \frac{1}{N} \Delta \sigma_i \vec{\xi}_i \cdot A \vec{\xi}_i + \theta_i \right] \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t} \right\}. \quad (31)$$

El orden de magnitud de $F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)$ nos dice que el proceso estocástico, $\vec{m}(t)$, presentará fluctuaciones del orden de $N^{-\frac{1}{2}}$ (Gardiner, 1985) en torno a su media $\langle \vec{m} \rangle$.

En la difusión aparece la función $\langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t}$, que recibe el nombre de “actividad de la i -ésima neurona”. Para encontrar su ley dinámica consideramos el promedio:

$$\langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t} = \sum_{\vec{\sigma}} p_t(\vec{\sigma}) \sigma_i,$$

derivamos respecto al tiempo y utilizamos la ecuación maestra en el lado derecho, resulta:

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t} = \sum_{\vec{\sigma}} \sum_{k=1}^N \left\{ w_k \left[\hat{F}_k \vec{\sigma}(t) \right] p_t \left[\hat{F}_k \vec{\sigma}(t) \right] - w_k \left[\vec{\sigma}(t) \right] p_t \left[\vec{\sigma}(t) \right] \right\} \sigma_i,$$

de donde se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m},t} = \sum_{\vec{\sigma}} \sum_{k=1}^N p_t [\vec{\sigma}(t)] w_k [\vec{\sigma}(t)] \{ \sigma_i (1 - 2\delta_{ik}) - \sigma_i \} = -2 \langle \sigma_i(t) w_i [\vec{\sigma}(t)] \rangle_{\vec{m},t}$$

y sustituyendo la expresión para $w_k [\vec{\sigma}(t)]$ llegamos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m},t} = - \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m},t} + \langle \tanh \{ \beta h_i [\vec{\sigma}(t)] \} \rangle_{\vec{m},t}, \quad (32)$$

cuya solución es

$$\langle \sigma_i \rangle_{\vec{m},t} = \langle \sigma_i(0) \rangle_{\vec{m},t} e^{-t} + \int_0^t ds \langle \tanh \{ \beta h_i [\vec{\sigma}(t)] \} \rangle_{\vec{m},t} e^{-(t-s)}. \quad (33)$$

Ahora procede preguntarnos cuál es la información física que podemos extraer de la ecuación de Fokker-Planck que hemos encontrado. Este será nuestro objetivo en el resto del presente capítulo.

III.3 Evolución temporal de las variables dinámicas definidas en el espacio de estados

La evolución temporal de los momentos estadísticos de la variable aleatoria m_μ , ($\mu = 1, 2, \dots, p$), puede ser estudiada mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen como sigue (de la Peña L., 1980): Sea una función $f(\vec{m})$ doblemente diferenciable respecto a m_μ , y tal que su primera derivada temporal también existe. Sea Ω el espacio donde el vector de traslapes $\vec{m}$ toma sus valores. El promedio de f se define como sigue:

$$\langle f(\vec{m}) \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{m}) P(\vec{m}, t) d\Omega, \quad (34)$$

tal que multiplicando por $f(\vec{m})$ en la ecuación de Fokker-Planck (29) e integrando sobre $d\Omega$

resulta:

$$\int_{\Omega} f(\vec{m}) \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{m}, t) = \sum_{\mu=1}^p \int_{\Omega} f(\vec{m}) \frac{\partial}{\partial m_{\mu}} \{P(\vec{m}, t) F_{\mu}(\vec{m}, t)\} \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p \int_{\Omega} f(\vec{m}) \frac{\partial}{\partial m_{\mu} \partial m_{\nu}} \{P(\vec{m}, t) D_{\mu\nu}(\vec{m}, t)\}.$$

Nótese que el término del lado izquierdo es simplemente $\frac{d}{dt} \langle f(\vec{m}) \rangle$ y que integrando una vez por partes en el primer término del lado derecho, y dos veces por partes en el segundo término de lado derecho, resulta la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dt} \langle f(\vec{m}) \rangle = - \sum_{\mu=1}^p \langle F_{\mu}^{(1)} \frac{\partial}{\partial m_{\mu}} f(\vec{m}) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p \langle F_{\mu\nu}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial m_{\mu} \partial m_{\nu}} f(\vec{m}) \rangle, \quad (35)$$

siempre que se cumpla que $P(\vec{m}, t)$ se anula en la frontera de Ω .

A partir de esta expresión es posible encontrar las ecuaciones para la evolución temporal de los momentos estadísticos de la variable estocástica $\vec{m}$ haciendo $f(\vec{m}) = m_{\mu} m_{\nu} m_{\gamma} \dots$ en (35). En general las ecuaciones que resultan son no lineales y sus soluciones pueden encontrarse sólo mediante métodos numéricos.

De acuerdo a la teoría de los procesos de difusión, puede garantizarse la existencia de estados estacionarios siempre que el término de flujo sea irrotacional (Gardiner, 1985). Esto nos permite encontrar las condiciones que debe cumplir una red neuronal recurrente para alcanzar el estado de equilibrio. Sabemos que un campo irrotacional $\vec{F}$ debe ser tal que su Jacobiano, $H_{\nu\mu} = \frac{\partial F_{\nu}}{\partial m_{\mu}}$ es una matriz simétrica, de modo que evaluando las derivadas correspondientes encontramos que la matriz

$$R_{\nu\mu} = -\frac{2\beta}{N} \sum_{i=1}^N g_i \left(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}(\vec{\sigma}) - \frac{\beta}{N} \Delta \sigma_i \vec{\xi}_i \cdot A \vec{\xi}_i + \beta \theta_i \right) \xi_i^{\nu} \sum_{r=1}^p \xi_i^r A_{\mu r},$$

debe ser simétrica, de donde resulta lo que sigue:

$$A_{\mu r} = A_{r\mu}. \quad (36)$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad $P(\vec{m}, t)$ puede evolucionar hacia una estacionaria, $P_{eq}(\vec{m})$, siempre que la red recurrente sea simétrica. Este es un resultado bien conocido en el límite termodinámico, que aquí generalizamos para redes finitas que se encuentran en el régimen lejano a la saturación.

La distribución de probabilidad en equilibrio satisface la siguiente ecuación: Haciendo

$\frac{\partial}{\partial t} P_{eq}(\vec{m}) = 0$ en (29) tenemos

$$0 = \sum_{\mu=1}^p \frac{\partial}{\partial m_{\mu}} \{P_{eq}(\vec{m}) F_{\mu}(\vec{m})\} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p \frac{\partial}{\partial m_{\mu} \partial m_{\nu}} \{P_{eq}(\vec{m}) D_{\mu\nu}(\vec{m})\}, \quad (37)$$

con

$$F_{\mu}(\vec{m}) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_{\mu}(\vec{m}, t), \quad D_{\mu\nu}(\vec{m}) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{\mu\nu}(\vec{m}, t).$$

Puesto que el flujo $\vec{F}$ es irrotacional, existe una función escalar $\Phi(\vec{m})$ tal que $\vec{F}[\vec{m}] = -\nabla \Phi[\vec{m}]$, de modo que, sin normalizar, tenemos que la distribución de probabilidad en equilibrio tiene la forma que sigue (Gardiner, 1985):

$$P_{eq}(\vec{m}) = \exp(-\Phi[\vec{m}]), \quad \Phi[\vec{m}] = - \int^{\vec{m}} \vec{Z}[\vec{m}'] \cdot d\vec{m}' \quad (38)$$

y

$$Z_{\mu}[\vec{m}] = \sum_{\nu=1}^p D_{\mu\nu}^{-1}[\vec{m}] \left[2F_{\nu}[\vec{m}] - \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial}{\partial m_{\gamma}} D_{\nu\gamma}[\vec{m}] \right]. \quad (39)$$

En términos de la teoría estocástica estándar, la función $\Phi(\vec{m})$ es un potencial ter-

modinámico para el sistema, cuyo mínimo $\vec{m}_{\min}$ nos da el punto de máxima probabilidad de la distribución en equilibrio, $P_{eq}(\vec{m})$. En las redes finitas este es el concepto análogo al tratamiento fisicoestadístico desarrollado para redes infinitas (Amit et. al. 1985a).

Aunque las expresiones anteriores contienen los elementos necesarios para estudiar la conducta de las redes recurrentes finitas en equilibrio en el régimen lejano a la saturación, su complejidad las hace imprácticas, de modo que desarrollaremos una aproximación de ruido lineal en la siguiente sección.

III.4 Aproximación gaussiana en el estado de equilibrio

III.4.1 Redes con un patrón almacenado

Para facilitar la comprensión del problema estudiaremos primero una red que opera a temperatura T con un patrón almacenado, $p = 1$, en este caso la ecuación de Fokker-Planck toma la forma que sigue:

$$\frac{d}{dt} P_t(m) = -\frac{\partial}{\partial m} \{F_1(m, t) P_t(m)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} \{F_2(m, t) P_t(m)\}, \quad (40)$$

con los términos de flujo y de difusión dados de la siguiente forma:

$$F_1(m, t) = -m + \tanh(\beta m) \quad , \quad F_2(m, t) = \frac{2}{N} [1 - m \tanh(\beta m)] \quad (41)$$

La solución en equilibrio está dado en términos del potencial termodinámico $\Phi(m)$:

$$P_s(m) = \frac{K}{F_2(m)} \exp \{-\Phi(m)\} \quad , \quad \Phi(m) = -2 \int^m dm' \frac{F_1(m')}{F_2(m')} \quad (42)$$

y K una constante de normalización cuya forma es

$$\frac{1}{2K} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{F_2(m')} \exp[-\Phi(m')] dm'. \quad (43)$$

Supongamos que los efectos de tamaño finito actúan como pequeñas perturbaciones aleatorias a la conducta que sigue una red infinita. Entonces el punto atractor, m_{eq}^* , dado por la teoría en el límite termodinámico, puede determinarse mediante la solución a la ecuación siguiente: $m_{eq}^* = \tanh(\beta m_{eq}^*)$, mientras que las fluctuaciones, x , en torno a éste pueden ser consideradas como ligeras desviaciones. Entonces el potencial termodinámico es $\Phi(m) = \Phi(m_{eq}^* + x)$, con $x \ll m_{eq}^*$, lo cual nos sugiere el siguiente desarrollo en serie de Taylor:

$$-2 \frac{F_1(x)}{F_2(x)} \simeq N \frac{1 - \beta + \beta (m_{eq}^*)^2}{[m_{eq}^* \sinh(\beta m_{eq}^*) - \cosh(\beta m_{eq}^*)]^2} (x - m_{eq}^*).$$

Integrando para encontrar Φ y normalizando, se obtiene la siguiente distribución gaussiana:

$$P_{eq}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi S_{eq}^2}} \exp \left[-\frac{(x - m_{eq}^*)^2}{2S_{eq}^2} \right], \quad (44)$$

con

$$S_{eq}(\beta, m_{eq}^*) \simeq \sqrt{\frac{2}{N} \frac{(m_{eq}^* \sinh(\beta m_{eq}^*) - \cosh(\beta m_{eq}^*))}{\sqrt{1 - \beta + \beta (m_{eq}^*)^2}}}. \quad (45)$$

Encontramos que el parámetro de orden m oscila aleatoriamente en torno a m_{eq}^* con desviación estándar $S_{eq}(\beta, m_{eq}^*)$.

III.4.2 Redes de Hebb con varios patrones almacenados

Para estudiar las redes con más de un patrón almacenado partiremos de las ecuaciones (30) y (31) y llevar a cabo su desarrollo en serie de Taylor en torno a un punto atractor $\vec{m}_{eq}^*$. Enseguida realizamos este trabajo para redes de Hebb ($A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$). Este nuevo enfoque nos

habrá de sugerir cómo proceder para el estudio de la dinámica en el próximo capítulo.

Definimos el vector de fluctuaciones, $\vec{x}$, en torno al estado atractor $\vec{m}_{eq}^*$ tal que podemos escribir: $\vec{m} = \vec{m}_{eq}^* + \vec{x}$ con $|\vec{x}| \ll |\vec{m}_{eq}^*|$, de modo que el desarrollo del término de flujo toma la siguiente forma:

$$F_{\mu}^{eq}(\beta, \vec{m}_{eq}^*, \vec{x}) \simeq \sum_{\nu=1}^p \mathcal{L}_{\mu\nu}^{eq}(\beta, \vec{m}_{eq}^*) x_{\nu} + \Lambda_{\mu}^{eq}(\beta, \vec{m}_{eq}^*) + O(x^2), \quad (46)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{eq}(\beta, \vec{m}_{eq}^*) = \delta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_i^{\nu} \tanh^2(\beta \vec{\xi}_i \cdot \vec{m}_{eq}^*), \quad (47)$$

y

$$\Lambda_{\mu}^{eq}(\beta, \vec{m}_{eq}^*) = m_{\mu}^0 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \tanh(\beta \vec{\xi}_i \cdot \vec{m}_{eq}^*) \sim O(N^{-\frac{1}{2}}). \quad (48)$$

Esta última expresión refleja la diferencia entre la suma finita: $N^{-1} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} [\dots]$ y el auto-promedio: $\langle \dots \rangle_{\xi}$ utilizado en el límite termodinámico.

El término lineal del desarrollo en serie de Taylor de la matriz de difusión agregaría una contribución de orden $N^{-\frac{3}{2}}$, que no resulta relevante en el orden de aproximación que estamos considerando pues nuestra ecuación de Fokker-Planck surge de un corte a orden N^{-1} . Entonces tomamos la aproximación a orden cero que sigue:

$$D_{\mu\nu}^{eq}(\vec{m}_{eq}^* + \vec{x}) \simeq D_{\mu\nu}^{eq}(\beta, \vec{m}_{eq}^*). \quad (49)$$

De modo que en lugar de la ecuación (37) podemos considerar el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (van Kampen, 1992) que es descrito por la siguiente ecuación:

analíticamente con las herramientas de la teoría que hemos desarrollado hasta ahora.

III.5 La dinámica de una red antisimétrica con dos patrones almacenados a $T = 0$

Consideraremos una red finita operando a temperatura cero con dos patrones almacenados ($p = 2$) mediante la regla de interacción neuronal siguiente:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu, \nu=1}^2 \xi_i^\mu A_{\mu\nu} \xi_j^\nu, \quad (53)$$

con la matriz A dada como:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

y tal que las condiciones iniciales $\vec{m}(0) = (m_1^0, m_2^0)$ están situadas en el primer cuadrante del espacio de estados, esto es cuando $m_1^0 > 0$ y $m_2^0 > 0$.

Las ecuaciones de evolución para los parámetros de orden de redes con un número infinito de neuronas son

$$\frac{d}{dt} m_\mu^*(t) = -m_\mu^*(t) + \langle \xi_\mu \tanh \beta [\vec{\xi} \cdot A \vec{m}^*(t)] \rangle_\xi, \quad (55)$$

con $\mu = 1, \dots, p$.

Para redes con dos patrones almacenados y matrices de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

las ecuaciones toman la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt}m_1^*(t) + m_1^*(t) = \frac{1}{2} \{ \tanh \beta S_1(t) + \tanh \beta S_2(t) \}, \quad (56)$$

$$\frac{d}{dt}m_2^*(t) + m_2^*(t) = \frac{1}{2} \{ \tanh \beta S_1(t) - \tanh \beta S_2(t) \}, \quad (57)$$

con

$$S_1(t) = (A_{11} + A_{21}) m_1(t) + (A_{12} + A_{22}) m_2(t), \quad (58)$$

y

$$S_2(t) = (A_{11} - A_{21}) m_1(t) + (A_{12} - A_{22}) m_2(t). \quad (59)$$

Cuando $T = 0$ resulta:

$$\tanh [\beta S_2(t)] = \text{sign} [m_1(t)] \quad , \quad \tanh [\beta S_1(t)] = \text{sign} [m_2(t)] \quad , \quad (60)$$

de tal modo que las ecuaciones a resolver cambian según el cuadrante del espacio de estados en que se encuentra el vector de traslapes $\vec{m}(t)$. Los cuatro casos posibles se enumeran enseguida:

La primera cuenca es el primer cuadrante: $m_1(t) > 0$ y $m_2(t) > 0$, y en ella las ecuaciones toman la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt}m_1^*(t) + m_1^*(t) = 1 \quad , \quad \frac{d}{dt}m_2^*(t) + m_2^*(t) = 0 \quad , \quad (61)$$

cuyas soluciones son:

$$m_1^*(t) = m_1^*(0) e^{-t} + (1 - e^{-t}) \quad , \quad m_2^*(t) = m_2^*(0) e^{-t} \quad , \quad (62)$$

de modo que existe el siguiente estado atractor:

$$\vec{m}_{eq}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

La segunda cuenca es el segundo cuadrante, definido con las desigualdades: $m_1(t) > 0$ y $m_2(t) < 0$, entonces las ecuaciones son:

$$\frac{d}{dt}m_1^*(t) + m_1^*(t) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}m_2^*(t) + m_2^*(t) = -1 \quad , \quad (64)$$

y sus soluciones quedan como sigue:

$$m_1^*(t) = m_1^*(0) e^{-t} \quad , \quad m_2^*(t) = m_2^*(0) e^{-t} - (1 - e^{-t}) \quad , \quad (65)$$

tal que el estado atractor es:

$$\vec{m}_{eq}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

El tercer cuadrante, que es el que cumplen con las condiciones: $m_1(t) < 0$ y $m_2(t) < 0$, es la tercera cuenca. Allí las ecuaciones toman la forma que sigue:

$$\frac{d}{dt}m_1^*(t) + m_1^*(t) = -1 \quad , \quad \frac{d}{dt}m_2^*(t) + m_2^*(t) = 0 \quad , \quad (67)$$

y sus soluciones son:

$$m_1^*(t) = m_1^*(0) e^{-t} - (1 - e^{-t}) \quad , \quad m_2^*(t) = m_2^*(0) e^{-t} \quad , \quad (68)$$

de donde resulta que el estado atractor es:

$$\vec{m}_{eq}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Finalmente, la cuarta cuenca es el cuarto cuadrante, que cumple con las desigualdades siguientes: $m_1(t) < 0$ y $m_2(t) > 0$. Ahora las ecuaciones quedan como sigue:

$$\frac{d}{dt}m_1^*(t) + m_1^*(t) = 0, \quad \frac{d}{dt}m_2^*(t) + m_2^*(t) = 1, \quad (70)$$

las soluciones son:

$$m_1^*(t) = m_1^*(0) e^{-t}, \quad m_2^*(t) = m_2^*(0) e^{-t} + (1 - e^{-t}), \quad (71)$$

de modo que existe el siguiente estado atractor:

$$\vec{m}_{eq}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

En todos los casos enumerados se requiere un tiempo infinito para que la red alcance el estado de equilibrio $\vec{m}_{eq}^*$.

En síntesis, la red antisimétrica bajo consideración guarda dos patrones y sus negativos $\vec{\xi}^\mu = -\vec{\xi}^\mu$. Cada una tiene asociado un conjunto de estados iniciales que llamamos cuencas y cada una contiene un punto atractor que constituye el estado de equilibrio. El estado macroscópico inicial de la red establece en cuál de las cuatro cuencas se encuentra el sistema, y en consecuencia, determina también a cuál punto de equilibrio evolucionará la red. Si la red antisimétrica infinita opera a temperatura cero se comporta como si fuera una red de Hebb.

III.5.1 La dinámica para redes finitas

Enseguida estudiaremos la misma red antisimétrica pero bajo el supuesto de que N es finito.

Necesitamos calcular el término de flujo y la matriz de difusión de la ecuación de Fokker-Planck (29).

III.5.1.1 Cálculo del término de flujo

Nuestro primer objetivo es calcular la forma del término de flujo:

$$F_{\mu}^{(1)}(\vec{m}, t) = m_{\mu} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \tanh \beta \left[\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m} \right] + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad (73)$$

lo cual nos lleva a considerar la siguiente suma finita:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \tanh \beta \left\{ \xi_i^1 [A_{11}m_1(t) + A_{12}m_2(t)] + \xi_i^2 [A_{21}m_1(t) + A_{22}m_2(t)] \right\}. \quad (74)$$

Para $\mu = 1$ resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \tanh \beta \left\{ \xi_i^1 [A_{11}m_1(t) + A_{12}m_2(t)] + \xi_i^2 [A_{21}m_1(t) + A_{22}m_2(t)] \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh \beta \left\{ [A_{11}m_1(t) + A_{12}m_2(t)] + \xi_i^1 \xi_i^2 [A_{21}m_1(t) + A_{22}m_2(t)] \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, \xi_i^2} \tanh \beta [A_{11}m_1(t) + A_{12}m_2(t) + A_{21}m_1(t) + A_{22}m_2(t)] \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, -\xi_i^2} \tanh \beta [A_{11}m_1(t) + A_{12}m_2(t) - A_{21}m_1(t) - A_{22}m_2(t)] \\ &= \tanh \beta S_1(t) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, \xi_i^2} + \tanh \beta S_2(t) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, -\xi_i^2}. \end{aligned}$$

Enseguida aprovechamos que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, \xi_i^2} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i^1 \xi_i^2) \quad (75)$$

y

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, -\xi_i^2} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (1 - \xi_i^1 \xi_i^2), \quad (76)$$

de modo que definiendo

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \xi_i^2, \quad (77)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \tanh \beta \{ \xi_i^1 [A_{11}m_1(t) + A_{12}m_2(t)] + \xi_i^2 [A_{21}m_1(t) + A_{22}m_2(t)] \} \\ &= \tanh \beta S_1(t) \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i^1 \xi_i^2) + \tanh \beta S_2(t) \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (1 - \xi_i^1 \xi_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \tanh \beta S_1(t) \{1 + \lambda_N\} + \frac{1}{2} \tanh \beta S_2(t) \{1 - \lambda_N\}. \end{aligned} \quad (78)$$

El parámetro λ_N es una medida normalizada del grado de semejanza entre los dos patrones almacenados en la red y juega un papel fundamental en la diferencia que existe entre la conducta de una red infinita y una red con un número finito de neuronas.

Realizando el mismo procedimiento para $\mu = 2$ resulta lo que sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \tanh \beta \{ \xi_i^1 [A_{11}m_1(t) + A_{12}m_2(t)] + \xi_i^2 [A_{21}m_1(t) + A_{22}m_2(t)] \} \\ &= \frac{1}{2} \tanh \beta S_1(t) \{1 + \lambda_N\} - \frac{1}{2} \tanh \beta S_2(t) \{1 - \lambda_N\}, \end{aligned} \quad (79)$$

de modo que ambos se pueden escribir en forma sintética como:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{(1,2)} \tanh \beta \{ \xi_i^1 [A_{11} m_1(t) + A_{12} m_2(t)] + \xi_i^2 [A_{21} m_1(t) + A_{22} m_2(t)] \} \\
&= \frac{1}{2} \tanh \beta S_1(t) \{1 + \lambda_N\} \pm \frac{1}{2} \tanh \beta S_2(t) \{1 - \lambda_N\}, \quad (80)
\end{aligned}$$

donde el signo $+$ corresponde a $\mu = 1$ y el signo $-$ a $\mu = 2$.

El término de flujo queda entonces dado como sigue:

$$\begin{aligned}
\vec{F}^{(1)} &= \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tanh \beta S_1(t) \{1 + \lambda_N\} + \tanh \beta S_2(t) \{1 - \lambda_N\} \\ \tanh \beta S_1(t) \{1 + \lambda_N\} - \tanh \beta S_2(t) \{1 - \lambda_N\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tanh \beta S_1(t) + \tanh \beta S_2(t) \\ \tanh \beta S_1(t) - \tanh \beta S_2(t) \end{pmatrix} - \frac{\lambda_N}{2} \begin{pmatrix} \tanh \beta S_1(t) - \tanh \beta S_2(t) \\ \tanh \beta S_1(t) + \tanh \beta S_2(t) \end{pmatrix}. \quad (81)
\end{aligned}$$

Nótese que este término de flujo coincide con el de la dinámica de redes infinitas cuando $\lambda_N \rightarrow 0$, lo cual puede suceder en el caso poco probable en que $\vec{\xi}^1 \cdot \vec{\xi}^2 = 0$, o bien cuando $N \rightarrow \infty$.

III.5.1.2 Cálculo de la matriz de difusión

Nuestro segundo objetivo es obtener la matriz de difusión, $\frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}$, dada como

$$\frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t} \tanh \beta \left[\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}(t) \right] + \mathcal{O}(N^{-2}). \quad (82)$$

donde

$$\langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t} = \langle \sigma_i(0) \rangle_{\vec{m}} \exp(-t) + \int_0^t e^{s-t} \tanh \left[\beta \vec{\xi}_i \cdot A \cdot \vec{m}(s) \right] ds + \dots \quad (83)$$

Sustituyendo (83) en (82) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\} &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu - \frac{\exp(-t)}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \langle \sigma_i(0) \rangle_{\vec{m}} \tanh \beta [\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}(t)] \\ &\quad - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta [\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}(t)] \tanh [\beta \vec{\xi}_i \cdot A \cdot \vec{m}(s)] ds, \end{aligned} \quad (84)$$

que puede ser analizado término a término con facilidad para obtener las expresiones que se presentan a continuación.

Simbolizaremos los términos de (84) como sigue, al primero:

$$\frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}^{(I)} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu, \quad (85)$$

al segundo:

$$\frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}^{(II)} = -\frac{\exp(-t)}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \langle \sigma_i(0) \rangle_{\vec{m}} \tanh \beta [\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}(t)] \quad (86)$$

y al tercero:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}^{(III)} &= \\ &= -\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta [\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}(t)] \tanh [\beta \vec{\xi}_i \cdot A \cdot \vec{m}(s)] ds. \end{aligned} \quad (87)$$

El primero de ellos tiene la siguiente forma simple:

$$\frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}^{(I)} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_N \\ \lambda_N & 1 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

En el caso en que el estado microscópico inicial $\langle \sigma_i(0) \rangle_{\vec{m}}$ se distribuye conforme a la siguiente distribución de probabilidad: $P_0(\vec{\sigma}) = \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (1 + m_1^0) \delta_{\sigma_i, \xi_i^1} + \frac{1}{2} (1 - m_1^0) \delta_{\sigma_i, -\xi_i^1} \right\}$, el

segundo término resulta ser¹:

$$\frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}^{(II)} = -\frac{m_1^0 e^{-t}}{2N} \begin{pmatrix} (1 + \lambda_N) \tanh \beta S_1(t) + (1 - \lambda_N) \tanh \beta S_2(t), \\ (1 + \lambda_N) \tanh \beta S_1(t) - (1 - \lambda_N) \tanh \beta S_2(t) \end{pmatrix}. \quad (89)$$

El tercer término tiene una forma tan complicada que no es fácil escribirlo en la notación matricial de los anteriores, de modo que escribiremos cada una de sus componentes. Las diagonales son como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}_{\mu\mu}^{(III)} = & -\frac{1}{4N} \left\{ (1 + \lambda_N)^2 \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_1(t) \tanh \beta S_1(s) ds \right. \\ & + (1 - \lambda_N)^2 \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_2(t) \tanh \beta S_2(s) ds \\ & + (1 - \lambda_N^2) \left[\int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_1(t) \tanh \beta S_2(s) ds \right. \\ & \left. \left. + \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_2(t) \tanh \beta S_1(s) ds \right] \right\}, \quad (90) \end{aligned}$$

con $\mu = 1, 2$. Las componentes no diagonales toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t)\}_{\mu\nu}^{(III)} = & -\frac{1}{4N} \left\{ (1 + \lambda_N)^2 \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_1(t) \tanh \beta S_1(s) ds \right. \\ & - (1 - \lambda_N)^2 \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_2(t) \tanh \beta S_2(s) ds \\ & \left. + (1 - \lambda_N^2) \left[\int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_1(s) \tanh \beta S_2(t) ds \right. \right. \end{aligned}$$

¹ Su cálculo es igual al que se detalla posteriormente en este trabajo para la matriz de difusión de los procesos de Ornstein-Uhlenbeck dependientes del tiempo.

$$- \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta S_1(t) \tanh \beta S_2(s) ds \Big] \Big\}. \quad (91)$$

III.5.1.3 Un efecto de tamaño finito en los estados atractores

El problema que analizaremos a continuación permite detectar un fenómeno que se debe esencialmente al carácter finito de la red, toda vez que en el caso $N \rightarrow \infty$ desaparece. Este consiste en que, bajo determinadas circunstancias, las condiciones iniciales ya no seleccionan la cuenca en la cual se mueve el vector de traslapes puesto que este estado macroscópico puede cambiar a otra cuenca contigua. En esta sección habremos de visualizar que hay dos casos interesantes para redes antisimétricas que almacenan dos patrones (o imágenes) a $T = 0$:

- Uno de ellos es cuando los patrones almacenados son tales que $\vec{\xi}^{(1)} \cdot \vec{\xi}^{(2)} < 0$, en cuyo caso los estados $(1, \lambda_N)$ y $(-1, -\lambda_N)$ pueden actuar como atractores que permiten el escape del vector de traslapes $\vec{m}$ hacia una cuenca distinta de aquella donde se sitúan sus condiciones iniciales,
- el segundo caso de interés se presenta cuando los patrones almacenados cumplen con la relación: $\vec{\xi}^{(1)} \cdot \vec{\xi}^{(2)} > 0$. En este régimen los estados $(-\lambda_N, -1)$ y $(\lambda_N, 1)$ cumplen la misma función mencionada.

La complejidad del problema es tal que no permite su estudio completo en este nivel de la descripción, por lo que será necesario retomar su análisis una vez que hallamos desarrollado la teoría de las fluctuaciones $\vec{q}$. Sin embargo, la descripción que hacemos ahora es muy motivante para abordar el estudio del tiempo de escape en el octavo capítulo de este trabajo.

Además de (60), para $\beta \rightarrow \infty$ se cumple que

$$\left[\text{sech} \left(\beta \vec{\xi}_i A \cdot \vec{m} \right) \right]^2 \rightarrow 0,$$

lo cual da lugar a que el término de flujo tome la forma que sigue:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{sign}[m_2(t)] + \text{sign}[m_1(t)] \\ \text{sign}[m_2(t)] - \text{sign}[m_1(t)] \end{pmatrix} - \frac{\lambda_N}{2} \begin{pmatrix} \text{sign}[m_2(t)] - \text{sign}[m_1(t)] \\ \text{sign}[m_2(t)] + \text{sign}[m_1(t)] \end{pmatrix}. \quad (92)$$

En el primer cuadrante ($m_1(0) > m_2(0) > 0$) tenemos el siguiente vector de flujo:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} m_1 - 1 \\ m_2 - \lambda_N \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Haciendo $f(\vec{m}) = m_\mu$, $\mu = 1, 2$, en (35) resulta la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_N \end{pmatrix}, \quad (94)$$

cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(0) \\ \langle m_2 \rangle(0) \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ \lambda_N (1 - e^{-t}) \end{pmatrix}, \quad (95)$$

tal que para $t \rightarrow \infty$ el vector de traslapes tiende al siguiente estado:

$$\vec{m}_\infty = (1, \lambda_N). \quad (96)$$

Realizando el mismo trabajo en el cuarto cuadrante ($m_1(0) > m_2(0) < 0$) tenemos:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} m_1 + \lambda_N \\ m_2 + 1 \end{pmatrix} \quad (97)$$

y la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_N \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (98)$$

con la solución dada como sigue:

$$\begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(0) \\ \langle m_2 \rangle(0) \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -\lambda_N(1 - e^{-t}) \\ -(1 - e^{-t}) \end{pmatrix}, \quad (99)$$

tal que para $t \rightarrow \infty$ resulta:

$$\vec{m}_\infty = (-\lambda_N, -1). \quad (100)$$

En el tercer cuadrante ($m_1(0) < m_2(0) < 0$) se obtiene:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} m_1 + 1 \\ m_2 + \lambda_N \end{pmatrix} \quad (101)$$

y la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda_N \end{pmatrix}, \quad (102)$$

con la solución dada como sigue:

$$\begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(0) \\ \langle m_2 \rangle(0) \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -(1 - e^{-t}) \\ -\lambda_N(1 - e^{-t}) \end{pmatrix}, \quad (103)$$

tal que para $t \rightarrow \infty$ resulta:

$$\vec{m}_\infty = (-1, -\lambda_N). \quad (104)$$

Por último, en el segundo cuadrante ($m_1(0) < m_2(0) > 0$) el término de flujo es:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} m_1 - \lambda_N \\ m_2 - 1 \end{pmatrix} \quad (105)$$

y da lugar a la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_N \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (106)$$

con la solución que sigue:

$$\begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(0) \\ \langle m_2 \rangle(0) \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} \lambda_N (1 - e^{-t}) \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}, \quad (107)$$

y el estado final:

$$\vec{m}_\infty = (\lambda_N, 1). \quad (108)$$

Del resultado anterior obtenemos que el carácter finito de la red, presente a través de la ausencia de ortogonalidad de los patrones almacenados, da lugar a que el estado atractor se recorra en el traslape m_2 , de tal forma que cuando el producto interior de los patrones $(\vec{\xi}^1 \cdot \vec{\xi}^2)$ es positivo el corrimiento es hacia el interior del primer cuadrante; en cambio, cuando es negativo se recorre hacia el cuarto cuadrante. Las mismas ecuaciones (55) permiten comprender que, si hay un corrimiento hacia la cuarta cuenca, la red se encuentra en un régimen esencialmente distinto porque ahora $\text{sign}[m_1(t)] = 1$ y $\text{sign}[m_2(t)] = -1$, de donde resulta que las soluciones ya no son (68), sino:

$$\begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(t) \\ \langle m_2 \rangle(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m_1 \rangle(0) \\ \langle m_2 \rangle(0) \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} |\lambda_N| (1 - e^{-t}) \\ -(1 - e^{-t}) \end{pmatrix}, \quad (109)$$

donde $\lambda_N = -|\lambda_N|$. Ahora el estado estacionario es

$$\vec{m}_{est} = (|\lambda_N|, -1), \quad (110)$$

lo cual sugiere que cuando $\vec{m}(t)$ se acerca a $\vec{m}_\infty = (1, -|\lambda_N|)$ puede ocurrir una transición

de la primera a la cuarta cuenca e iniciar un proceso en el que el estado a recuperar es $\vec{m}_\infty = (|\lambda_N|, -1)$.

Cuando $\vec{\xi}^1 \cdot \vec{\xi}^2 < 0$ se presenta la siguiente distribución de puntos finales:

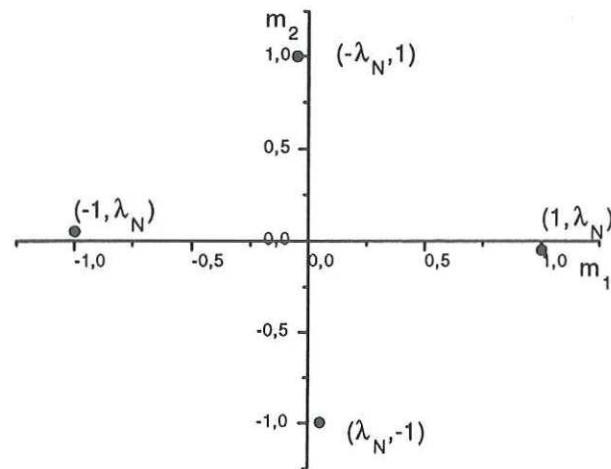


Figura 3(a). Localización de puntos fijos a $T = 0$ con $\lambda_N < 0$, $p = 2$, $N < \infty$.

Cuando $\vec{\xi}^1 \cdot \vec{\xi}^2 > 0$ la distribución es como sigue:

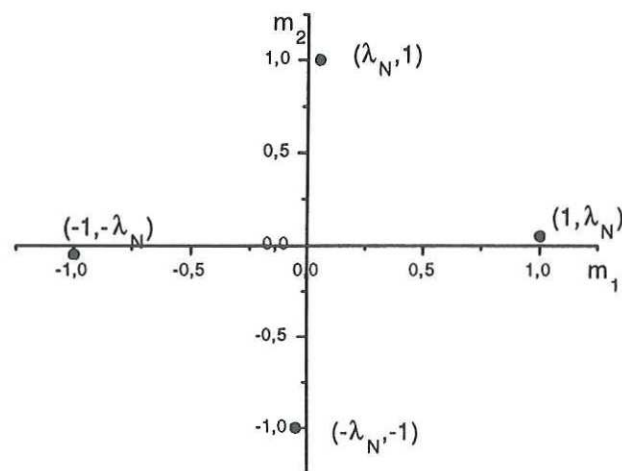


Figura 3(b). Localización de puntos fijos a $T = 0$ con $\lambda_N > 0$, $p = 2$, $N < \infty$.

La primera gráfica sugiere dos fenómenos que ameritan atención:

- Si el vector de traslapes inicial, $\vec{m}(0)$, se localiza en la primera cuenca, $\vec{m}(t)$ evolucionará hacia el punto $(1, -|\lambda_N|)$, que se ubica en el cuadrante inferior cuando $\vec{\xi}^1 \cdot \vec{\xi}^2 < 0$. En un tiempo teóricamente infinito la red pasaría del cuadrante I al cuadrante IV, sin embargo, la existencia de fluctuaciones permite prever que la red finita no tiene las limitaciones de tiempo que ya mencionamos para la red infinita. En consecuencia, existe la posibilidad de que en alguna de sus fluctuaciones el vector $\vec{m}(t)$ pase al cuadrante IV e inicie una evolución hacia el estado atractor $(|\lambda_N|, -1)$, donde quedaría atrapado.
- El otro efecto consiste en que si la red inicia su evolución en el tercer cuadrante; avanzando hacia el estado $(-1, |\lambda_N|)$, que se encuentra en el segundo; podrá pasar a este último para evolucionar hacia el estado $(-|\lambda_N|, 1)$.

En el primer caso tenemos que la vecindad del estado $(1, -|\lambda_N|)$ es una presunta región de escape del primero al cuarto cuadrante. En el segundo caso la vecindad de $(-1, |\lambda_N|)$ es el conjunto de posibles estados de transición del tercero al segundo cuadrante.

La segunda figura nos indica que un fenómeno análogo puede ocurrir para $\vec{\xi}^1 \cdot \vec{\xi}^2 > 0$, con transiciones de la segunda a la primera cuenca a través de la vecindad del punto $(1, |\lambda_N|)$ y de la cuarta a la tercera cuenca a través de la vecindad de $(-|\lambda_N|, -1)$.

Puesto que $\vec{m}(t)$ ejecuta un movimiento irregular en el espacio de estados, es de esperarse que el cambio de cuenca sea un fenómeno aleatorio, de modo que el tiempo de salida será una variable aleatoria que amerita ser estudiada. Este tema será abordado de nuevo en el octavo capítulo de este trabajo. Por ahora sólo podemos adelantar que tenemos elementos para conjeturar que la red antisimétrica finita con dos patrones (o imágenes almacenados) operando a temperatura cero ya no se comportará en forma similar a una red de Hebb con cuencas de atracción definidas.

III.6 Conclusión

La enseñanza más importante que extraemos de este capítulo es la siguiente: la descomposi-

ción $\vec{m} = \vec{m}_{eq} + \vec{x}$, con $x_\mu \sim \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$, sugiere la posibilidad de separar al vector de traslapes como sigue:

$$\vec{m}(t) = \vec{m}_t^* + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{q}(t),$$

donde $\vec{m}_t^*$ describe la conducta de las redes infinitas y $\vec{q}(t)$ son las fluctuaciones aleatorias.

Este es el objetivo del próximo capítulo, en este nuevo planteamiento la ecuación de Fokker-Planck (29) pasará a ser sólo un puente técnicamente útil para desarrollar una descripción más poderosa de los efectos de tamaño finito que nos ocupan.

IV. Descripción mediante las variables de fluctuación

IV.1 Introducción

El objetivo central de este capítulo es la obtención de la descripción de los efectos de tamaño finito en términos de las variables de fluctuación. Para lograrlo nos proponemos abordar tres puntos:

- El primero será encontrar la segunda ecuación fundamental de la teoría, que es otra ecuación de Fokker-Planck. Esta vez para la distribución de probabilidad conjunta de las fluctuaciones $\vec{q}$.
- El segundo será obtener las ecuaciones lineales ordinarias y no autónomas que describen la evolución de los momentos estadísticos de las fluctuaciones
- y el tercer punto será hallar la solución formal a estas ecuaciones.

La estrategia para enfrentar el problema se basa en la observación hecha en el capítulo anterior; cuyas aproximaciones gaussianas en torno al estado de equilibrio sugieren que es posible una descripción de las redes neuronales finitas mediante la técnica de separar la conducta determinista que sigue una red infinita, respecto de las fluctuaciones aleatorias que aparecen como resultado de su carácter finito.

El trabajo desarrollado hasta ahora indica la presencia de tres fuentes de azar:

- (1) El ruido intrínseco de la red, que se introduce por medio de la temperatura.
- (2) La aleatoriedad que resulta al mantener N finito. Es decir, la que aparece como consecuencia del carácter finito de la red.
- (3) La estocasticidad proveniente de los patrones almacenados en la red y que se mantiene aún a temperatura cero.

La teoría que estamos desarrollando integra todas las fuentes de azar enumeradas en el conjunto de ecuaciones mencionadas arriba. La idea esencial consiste en definir las fluctua-

ciones escaladas $\vec{q}(t)$ y en realizar una transformación a dichas variables. La descripción que se obtenga nos proporcionará una nueva ecuación de Fokker-Planck, pero con la ventaja de que se tratará de procesos gaussianos que nos garantizan que el estudio de los primeros y segundos momentos estadísticos son suficientes para la caracterización completa del proceso. En consecuencia, nuestro objetivo se reducirá al análisis de ellos.

IV.2 Los términos relevantes en el tamaño del sistema

En el capítulo anterior hemos obtenido la ecuación de Fokker-Planck (29) con el término de flujo dado por

$$F_{\mu}^{(1)}(\vec{m}, t) = m_{\mu} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \tanh \beta \left[\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m} - \frac{1}{N} \Delta \sigma_i \vec{\xi}_i \cdot A \vec{\xi}_i + \theta_i \right], \quad (111)$$

y la matriz de difusión de la siguiente forma

$$F_{\mu\nu}^{(2)}(\vec{m}, t) = \frac{2}{N} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_i^{\nu} \tanh \beta \left[\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m} - \frac{1}{N} \Delta \sigma_i \vec{\xi}_i \cdot A \vec{\xi}_i + \theta_i \right] \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t} \right\}. \quad (112)$$

Este corte introduce limitaciones en el tamaño del sistema, toda vez que la eliminación de las contribuciones de orden $\mathcal{O}(N^{-n})$ con $n > 1$ nos obliga a cuidar una cota inferior para el número de neuronas N por debajo del cual el ruido estocástico crecería demasiado. Este punto estará presente al comparar las predicciones de nuestra teoría con las simulaciones. El corte mencionado nos lleva además a observar la consistencia de las aproximaciones que estamos realizando.

Un procedimiento usual para estudiar esta clase de procesos estocásticos es descompo-

nerlos en una parte determinista y una fluctuante. La primera estaría dada por las trayectorias de campo promedio, $\vec{m}_t^*$, y la segunda por un vector estocástico, $\vec{q}(t)$. La experiencia de la física estadística indica que las diferencias en órdenes de magnitud entre ambos términos serían tales que el segundo es $\sqrt{N}$ veces más pequeño, de modo que un escalamiento dado por el inverso correspondiente, $1/\sqrt{N}$, produciría funciones $q_\mu(t)$ reescaladas conforme al tamaño de la red y adecuadas para nuestra descripción. Entonces proponemos una descomposición de la forma siguiente:

$$\vec{m}(t) = \vec{m}_t^* + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{q}(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad (113)$$

tal que ignoramos el tercero de los términos en el lado derecho de (113).

IV.3 Transformación a las variables de fluctuación

En esta sección obtendremos la ecuación diferencial parcial que describe la evolución de la densidad de probabilidad conjunta de las fluctuaciones $q_\mu(t)$. Con ese fin definimos las variables de fluctuación escaladas como:

$$\vec{q}(t) = \sqrt{N} (\vec{m}(t) - \vec{m}_t^*), \quad (114)$$

lo cual refleja la descomposición mencionada anteriormente.

Definimos la distribución de probabilidad conjunta, $\tilde{P}_t(\vec{q})$, de las fluctuaciones como sigue:

$$\tilde{P}_t(\vec{q}) \equiv \int_{\mathbf{r}} d\vec{m} P(\vec{m}, t) \delta \left[\vec{q} - \sqrt{N} (\vec{m} - \vec{m}_t^*) \right]. \quad (115)$$

Evaluable la derivada temporal en la expresión anterior, utilizando la ecuación de Fokker-Planck (29) para $P(\vec{m}, t)$ e integrando por partes apropiadamente, se obtiene lo que sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{P}_t(\vec{q}) &= \sqrt{N} \nabla_q \tilde{P}_t(\vec{q}) \left[\langle \vec{\xi} \tanh \beta (\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* + \theta) \rangle_{\xi, \theta} - \vec{m}_t^* \right] + \\ &\quad \sqrt{N} \sum_{\mu=1}^p \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left\{ \tilde{P}_t(\vec{q}) \langle F_\mu(\vec{m}, t) \rangle_{q,t} \right\} + \\ &\quad \frac{N}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p \frac{\partial^2}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \left\{ \tilde{P}_t(\vec{q}) \langle D_{\mu\nu}(\vec{m}, t) \rangle_{q,t} \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^2} \right), \end{aligned} \quad (116)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{m}, t) \rangle_{q,t} &\equiv \frac{\int_{\mathbf{r}} d\vec{m} P_t(\vec{m}) \delta \left[\vec{q} - \sqrt{N} (\vec{m} - \vec{m}_t^*) \right] f(\vec{m}, t)}{\int_{\mathbf{r}} d\vec{m} P_t(\vec{m}) \delta \left[\vec{q} - \sqrt{N} (\vec{m} - \vec{m}_t^*) \right]} \\ &= \frac{P_t \left(\vec{m}_t^* + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{q} \right) f \left(\vec{m}_t^* + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{q} \right)}{P_t \left(\vec{m}_t^* + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{q} \right)} = f \left(\vec{m}_t^* + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{q} \right) \\ &= f(\vec{m}_t^*) + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{q} \cdot \nabla_m f(\vec{m}_t^*) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N} \right), \end{aligned} \quad (117)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \langle F_\mu(\vec{m}, t) \rangle_{q,t} &= m_\mu^* - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \tanh \beta \left(\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i \right) + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=1}^p q_\nu \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \left(1 - \tanh^2 \beta \left(\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (118)$$

Utilizando (118) y las ecuaciones deterministas para $\vec{m}_t^*$, en la expresión (116), se obtiene lo que sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{P}_t(\vec{q}) = & \sqrt{N} \left\{ \nabla_{\vec{q}} \tilde{P}_t(\vec{q}) \cdot \left[\langle \vec{\xi} \tanh \beta (\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* + \theta) \rangle_{\xi, \theta} - \vec{m}_t^* \right] \right. \\
& + \sum_{\mu=1}^p \frac{\partial}{\partial q_{\mu}} \left[\tilde{P}_t(\vec{q}) \left\{ m_{\mu}^*(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \tanh \beta (\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=1}^p q_{\nu} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_i^{\nu} \left(1 - \tanh^2 \beta (\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i) \right) \right] \right\} \right] \left. \right\} \\
& + \sum_{\mu, \nu=1}^p \frac{\partial^2}{\partial q_{\mu} \partial q_{\nu}} \tilde{P}_t(\vec{q}) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_i^{\nu} \tanh \beta (\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i) \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m}, t} \right]. \quad (119)
\end{aligned}$$

La forma final de la ecuación fundamental que satisface $\tilde{P}_t(\vec{q})$ se obtiene tomando el límite en que $N \rightarrow \infty$. Resulta la siguiente ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{d}{dt} \tilde{P}_t(\vec{q}) = \sum_{\mu=1}^p \frac{\partial}{\partial q_{\mu}} \left(F_{\mu}[\vec{q}, \vec{m}_t^*] \tilde{P}_t(\vec{q}) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^p D_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*) \frac{\partial^2}{\partial q_{\mu} \partial q_{\nu}} \left(\tilde{P}_t(\vec{q}) \right), \quad (120)$$

donde:

$$F_{\mu}[\vec{q}, \vec{m}_t^*] = \sum_{\nu=1}^p L_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*) q_{\nu} + K_{\mu}(t), \quad (121)$$

con la matriz de convección del flujo dada por la expresión:

$$L_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*) \simeq \delta_{\mu\nu} - \beta \sum_{\lambda=1}^p \langle \xi_{\mu} \xi_{\lambda} [1 - \tanh^2 (\beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* + \theta)] \rangle_{\xi, \theta} A_{\lambda\nu}. \quad (122)$$

y

$$K_\mu(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left[\langle \xi_\mu \tanh \left(\left(\beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* + \theta \right) \right) \rangle_\xi - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \tanh \left(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i \right) \right], \quad (123)$$

Esta expresión es una corrección al término de flujo, depende de los patrones específicos que son almacenados en la red y mide la diferencia entre el autopromedio y la realización de la suma finita. Este término es de la misma naturaleza que la expresión para λ_N obtenida en el capítulo anterior y le llamaremos *corrección finita congelada*.

La matriz de difusión es como sigue:

$$D_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*) = \delta_{\mu\nu} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \tanh \left(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i \right) \langle \sigma_i \rangle_{\vec{m},t},$$

tal que si insertamos la expresión para $\langle \sigma_i \rangle_{\vec{m},t}$ dada en (33) y aprovechamos (117) a orden cero, resulta:

$$D_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*) = \delta_{\mu\nu} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \langle \sigma_i(0) \rangle \tanh \left(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* + \theta_i \right) \exp(-t) - \int_0^t ds \exp(s-t) \langle \xi_\mu \xi_\nu \tanh \left(\beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* + \theta \right) \tanh \left(\beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_s^* + \theta \right) \rangle_{\xi,\theta}. \quad (124)$$

El carácter lineal en $q\mu$ del término de flujo de la ecuación (120), la independencia de la matriz de difusión respecto a las variables de fluctuación, y la dependencia implícita respecto al tiempo de $F\mu$ y de $D_{\mu\nu}$, nos lleva a establecer que los efectos de tamaño finito de la red pueden ser vistos ahora como fluctuaciones térmicas descritas mediante procesos estocásticos de Ornstein-Uhlenbeck dependientes del tiempo. (Uhlenbeck G. E. and Ornstein L. S., 1930; Wang M. C. and Uhlenbeck G. E., 1945; Chandrasekar S., 1943; Lax M. 1966a; Lax M., 1966b). Usaremos las siglas POUDT para referirnos a ellos.

La estructura de la ecuación de Fokker-Planck (120) muestra que se trata de un proceso estocástico gobernado por las trayectorias de campo promedio $\vec{m}_t^*$, en consecuencia, para la descripción del fenómeno será necesario el conocimiento de ellas. Estas satisfacen las ecuaciones no lineales (10), que resultan ser nuestro primer sistema fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias.

IV.3.1 Patrones aleatorios y umbrales

Antes de analizar la ecuación de Fokker-Planck (120) para las fluctuaciones $q_\mu(t)$ es necesario especificar la estadística de los patrones $\vec{\xi}^\mu$ y de los umbrales θ_i . Tomaremos patrones cuyas componentes ξ_i^μ son generados al azar con probabilidades iguales para los valores $\{-1, 1\}$. Supondremos que los umbrales son estadísticamente independientes de los patrones $\vec{\xi}^\mu$ y que obedecen a una distribución de probabilidad $W(\theta)$, tal que se puede definir el promedio de una función $g[\xi, \theta]$ como sigue:

$$\langle g[\xi, \theta] \rangle_{\xi, \theta} = \frac{1}{2^p} \sum_{\xi \in \{-1, 1\}^p} \int d\theta W(\theta) g[\xi, \theta]. \quad (125)$$

Con estas hipótesis obtenemos relaciones convenientes como las siguientes:

$$\langle f(\xi) g(\theta) \rangle_{\xi, \theta} = \left[\frac{1}{2^p} \sum_{\xi \in \{-1, 1\}^p} f(\xi) \right] \left[\int d\theta W(\theta) g(\theta) \right]$$

$$\langle \xi_\mu \rangle_{\xi, \theta} = 0 \quad , \quad \langle \xi_\mu \xi_\nu \rangle_{\xi, \theta} = \delta_{\mu\nu} . \quad (126)$$

IV.4 Las fluctuaciones como un proceso de Ornstein-Uhlenbeck

IV.4.1 La solución formal a la ecuación de Fokker-Planck

Como veremos enseguida, el carácter gaussiano de los procesos de Ornstein-Uhlenbeck nos permiten describir totalmente las propiedades estadísticas de las fluctuaciones mediante los primeros y segundos momentos estadísticos. Es decir, utilizando las fluctuaciones medias y las correlaciones.

La solución a la ecuación de Fokker-Planck (120) para las fluctuaciones tiene la siguiente forma (van Kampen, 1992):

$$\tilde{P}_t(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{\det \Xi(t)}} \exp \left(-\frac{1}{2} [\vec{q} - \langle \vec{q} \rangle]^T \Xi^{-1}(t) [\vec{q} - \langle \vec{q} \rangle] \right), \quad (127)$$

donde

$$\langle \vec{q} \rangle(t) = \int \tilde{P}_t(\vec{q}) \vec{q} d\vec{q} \quad (128)$$

son las fluctuaciones medias,

$$\Xi_{\mu\nu}(t) = \int \tilde{P}_t(\vec{q}) (q_\mu q_\nu - \langle q_\mu \rangle \langle q_\nu \rangle) d\vec{q}, \quad (129)$$

son las correlaciones no centradas y $\det \Xi(t)$ es el determinante de la matriz Ξ .

Aunque la solución está dada en términos de Ξ , resulta más conveniente trabajar con la matriz de correlaciones no centradas, $C_{\mu\nu}(t)$, definida de la siguiente forma:

$$C_{\mu\nu}(t) \equiv \langle q_\mu q_\nu \rangle(t). \quad (130)$$

Nuestro esfuerzo se concentrará ahora en obtener las ecuaciones de evolución de $\langle q_\mu \rangle (t)$ y $C_{\mu\nu} (t)$, así como las soluciones formales correspondientes.

IV.4.2 Los momentos estadísticos de las fluctuaciones

Las ecuaciones correspondientes se puede obtener siguiendo el procedimiento utilizado en el tercer capítulo para obtener (35).

Consideramos una función $f(\vec{q})$, doblemente diferenciable respecto a q_μ y con primera derivada temporal. Multiplicamos por ésta en (120), integramos una vez por partes en el primer término del lado derecho y dos veces en el segundo, imponemos la condición a la frontera que sigue:

$$\tilde{P}_t(\vec{q})|_{\text{frontera}} = 0,$$

y resulta la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dt}\langle f(\vec{q}) \rangle = - \sum_{\mu=1}^p \langle F_\mu^{(1)}(\vec{q}, \vec{m}_t^*) \frac{\partial}{\partial q_\mu} f(\vec{q}) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^p \langle D_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*) \frac{\partial^2}{\partial q_\mu \partial q_\nu} f(\vec{q}) \rangle, \quad (131)$$

donde

$$\langle f(\vec{q}) \rangle = \int_{\mathbf{r}} f(\vec{q}) \tilde{P}_t(\vec{q}) d\vec{q}. \quad (132)$$

Tomando $f(\vec{q}) = q_\mu$, $q_\mu q_\nu$, se obtienen las ecuaciones para la evolución temporal de los momentos estadísticos de interés.

IV.4.3 Evolución temporal de los momentos estadísticos

Haciendo $f(\vec{q}) = q_\gamma$, tengo $\frac{\partial}{\partial q_\gamma} f(\vec{q}) = \delta_{\mu\gamma}$, tal que sustituyendo en 131 se obtiene la

ecuación para las fluctuaciones medias $\langle q_\gamma \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle q_\gamma \rangle (t) = - \sum_{\nu=1}^p L_{\gamma\nu} (t) \langle q_\nu \rangle (t) + K_\gamma (t). \quad (133)$$

Este conjunto de p ecuaciones lineales acopladas y no autónomas constituyen el segundo sistema fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para obtener la ecuación de evolución temporal de las correlaciones cruzadas hacemos $f(\vec{q}) = q_\kappa q_\lambda$ y resulta

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu} f(\vec{q}) = \delta_{\mu\kappa} q_\lambda + \delta_{\mu\lambda} q_\kappa, \quad \frac{\partial^2}{\partial q_\mu \partial q_\nu} f(\vec{q}) = \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa}, \quad (134)$$

pero $F_\mu(\vec{x}(t), \vec{q}) = \sum_\gamma L_{\mu\gamma}(t) q_\gamma(t) + K_\mu(t)$, luego

$$\begin{aligned} & \sum_\mu \langle F_\mu(\vec{x}(t), \vec{q}) \frac{\partial}{\partial q_\mu} f(\vec{q}) \rangle = \\ & \sum_\mu \langle \left(\sum_\gamma L_{\mu\gamma}(t) q_\gamma(t) + K_\mu(t) \right) (\delta_{\mu\kappa} q_\lambda + \delta_{\mu\lambda} q_\kappa) \rangle = \\ & = \sum_\mu \sum_\gamma \langle L_{\mu\gamma}(t) q_\gamma \delta_{\mu\kappa} q_\lambda + L_{\mu\gamma}(t) q_\gamma \delta_{\mu\lambda} q_\kappa \rangle + \sum_\mu \langle K_\mu(t) \delta_{\mu\kappa} q_\lambda + K_\mu(t) \delta_{\mu\lambda} q_\kappa \rangle = \\ & = \sum_\gamma L_{\kappa\gamma}(t) \langle q_\gamma q_\lambda \rangle + \sum_\gamma L_{\lambda\gamma}(t) \langle q_\gamma q_\kappa \rangle + K_\kappa(t) \langle q_\lambda \rangle + K_\lambda(t) \langle q_\kappa \rangle, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu,\nu} \langle D_{\mu\nu}(\vec{x}(t)) \frac{\partial^2}{\partial q_\mu \partial q_\nu} f(\vec{q}) \rangle = \\ & \sum_{\mu,\nu} D_{\mu\nu}(\vec{x}(t)) (\delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa}) = D_{\kappa\lambda}(\vec{x}(t)) + D_{\lambda\kappa}(\vec{x}(t)). \end{aligned}$$

Denotando $C_{\kappa\lambda}(t) = \langle q_\kappa q_\lambda \rangle$, resulta

$$\frac{d}{dt}C_{\kappa\lambda}(t) =$$

$$-\sum_{\gamma} L_{\kappa\gamma}(t) C_{\gamma\lambda}(t) - \sum_{\gamma} L_{\lambda\gamma}(t) C_{\gamma\kappa}(t) - R'_{\kappa\lambda}(t) - R'_{\lambda\kappa}(t) + D_{\kappa\lambda}(t) + D_{\lambda\kappa}(t), \quad (135)$$

con

$$R'_{\kappa\lambda}(t) = K_{\kappa}(t) \langle q_{\lambda} \rangle (t). \quad (136)$$

Atendiendo al primero y segundo término del lado derecho:

$$V_{\kappa\lambda}(t) = \sum_{\gamma} L_{\kappa\gamma}(t) C_{\gamma\lambda}(t) \quad , \quad V_{\lambda\kappa}(t) = \sum_{\gamma} L_{\lambda\gamma}(t) C_{\gamma\kappa}(t), \quad (137)$$

y tengo que

$$\sum_{\gamma} \gamma L_{\kappa\gamma}(t) C_{\gamma\lambda}(t) + \sum_{\gamma} \gamma L_{\lambda\gamma}(t) C_{\gamma\kappa}(t) = V_{\kappa\lambda}(t) + V_{\lambda\kappa}(t), \quad (138)$$

es tal que la suma de ambas da una matriz simétrica sin importar como son $L(t)$ y $C(t)$.

La matriz de difusión es simétrica de modo que en lo sucesivo haremos

$$2D_{\mu\nu}(t) = D_{\mu\nu}(t) + D_{\nu\mu}(t) \quad (139)$$

enseguida definimos el siguiente tensor simétrico

$$2R_{\mu\nu}(t) = R'_{\mu\nu}(t) + R'_{\nu\mu}(t), \quad (140)$$

de modo tal que tanto $D(t)$ como $R(t)$ son matrices simétricas.

Así la ecuación de evolución temporal de la matriz centrada es

$$\frac{d}{dt}C(t) = -V(t) + 2D(t) - 2R(t). \quad (141)$$

Nótese que el lado derecho de (141) es una suma de matrices simétricas, de modo que la matriz $\frac{d}{dt}C(t)$ es simétrica, por lo tanto, $C(t)$ será simétrica.

Haciendo $B_{\kappa\lambda}(t) = 2D_{\kappa\lambda}(t) - 2R_{\kappa\lambda}(t)$ para simplificar la escritura, reescribimos la ecuación (135) como sigue:

$$\frac{d}{dt}C_{\kappa\lambda}(t) = - \sum_{\gamma} L_{\kappa\gamma}(t) C_{\gamma\lambda}(t) - \sum_{\gamma} L_{\lambda\gamma}(t) C_{\gamma\kappa}(t) + B_{\kappa\lambda}(t),$$

además podemos usar el hecho de que $C(t)$ es simétrica para darle una forma ligeramente distinta al segundo término del lado derecho:

$$\sum_{\gamma} L_{\lambda\gamma}(t) C_{\gamma\kappa}(t) = \sum_{\gamma} (L_{\gamma\lambda}(t))^T C_{\kappa\gamma}(t) = \sum_{\gamma} C_{\kappa\gamma}(t) (L_{\gamma\lambda}(t))^T, \quad (142)$$

donde $(L_{\gamma\lambda}(t))^T$ es la traspuesta. Entonces resulta la siguiente ecuación matricial:

$$\frac{d}{dt}C(t) = -L(t)C(t) - C(t)L(t)^T + B(t), \quad (143)$$

que constituye un conjunto de $\frac{p(p+1)}{2}$ ecuaciones lineales acopladas y no autónomas.

Enseguida obtendremos las ecuaciones de evolución para las correlaciones centradas $\Xi_{\mu\nu}$. Escribiendo componente por componente (143) e introduciendo explícitamente la forma de $B_{\mu\nu}(t)$ tenemos:

$$\frac{d}{dt}C_{\mu\nu}(t) = - \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t) C_{\gamma\nu}(t)$$

$$- \sum_{\gamma=1}^p C_{\mu\gamma}(t) L_{\gamma\nu}(t)^T + 2D_{\mu\nu}(t) - [K_{\mu}(t) \langle q_{\nu} \rangle(t) + K_{\nu}(t) \langle q_{\mu} \rangle(t)].$$

Sumando cero dos veces en esta expresión tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_{\mu\nu}(t) = & - \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t) C_{\gamma\nu}(t) \\ & - \sum_{\gamma=1}^p C_{\mu\gamma}(t) L_{\gamma\nu}(t)^T + 2D_{\mu\nu}(t) - [K_{\mu}(t) \langle q_{\nu} \rangle(t) + K_{\nu}(t) \langle q_{\mu} \rangle(t)] + \\ & \sum_{\lambda=1}^p \langle q_{\nu} \rangle(t) L_{\mu\lambda}(t) \langle q_{\lambda} \rangle(t) - \sum_{\gamma=1}^p \langle q_{\nu} \rangle(t) L_{\mu\gamma}(t) \langle q_{\gamma} \rangle(t) \\ & + \sum_{\lambda=1}^p \langle q_{\mu} \rangle(t) L_{\nu\lambda}(t) \langle q_{\lambda} \rangle(t) - \sum_{\gamma=1}^p \langle q_{\mu} \rangle(t) \langle q_{\gamma} \rangle(t) L_{\gamma\nu}^T(t), \end{aligned}$$

tal que reacomodando tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} C_{\mu\nu}(t) - \\ & \langle q_{\nu} \rangle(t) \left\{ - \sum_{\lambda=1}^p L_{\mu\lambda}(t) \langle q_{\lambda} \rangle(t) - K_{\mu}(t) \right\} - \langle q_{\mu} \rangle(t) \left\{ - \sum_{\lambda=1}^p L_{\nu\lambda}(t) \langle q_{\lambda} \rangle(t) - K_{\nu}(t) \right\} \\ & + \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t) C_{\gamma\nu}(t) - \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t) \langle q_{\gamma} \rangle(t) \langle q_{\nu} \rangle(t) \\ & + \sum_{\gamma=1}^p C_{\mu\gamma}(t) L_{\gamma\nu}^T(t) - \sum_{\gamma=1}^p \langle q_{\mu} \rangle(t) \langle q_{\gamma} \rangle(t) L_{\gamma\nu}^T(t) = 2D_{\mu\nu}(t). \end{aligned}$$

Identificando los términos entre paréntesis como: $\frac{d}{dt} \langle q_{\mu} \rangle(t)$ y $\frac{d}{dt} \langle q_{\nu} \rangle(t)$ resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} C_{\mu\nu}(t) - \langle q_{\nu} \rangle(t) \frac{d}{dt} \langle q_{\mu} \rangle(t) - \langle q_{\mu} \rangle(t) \frac{d}{dt} \langle q_{\nu} \rangle(t) + \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t) C_{\gamma\nu}(t) \\ & - \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t) \langle q_{\gamma} \rangle(t) \langle q_{\nu} \rangle(t) + \sum_{\gamma=1}^p C_{\mu\gamma}(t) L_{\gamma\nu}^T(t) - \sum_{\gamma=1}^p \langle q_{\mu} \rangle(t) \langle q_{\gamma} \rangle(t) L_{\gamma\nu}^T(t) = 2D_{\mu\nu}(t), \end{aligned}$$

de donde resulta la expresión siguiente:

$$\frac{d}{dt}\Xi_{\mu\nu}(t) + \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t)\Xi_{\gamma\nu}(t) + \sum_{\gamma=1}^p \Xi_{\mu\gamma}(t)L_{\gamma\nu}^T(t) = 2D_{\mu\nu}(t). \quad (144)$$

Finalmente tenemos la ecuación para el $\det(\Xi(t))$. Escribiendo la ecuación anterior en forma matricial y multiplicando por la inversa Ξ^{-1} :

$$\Xi^{-1}\frac{d}{dt}\Xi(t) + \Xi^{-1}L(t)\Xi(t) + \Xi^{-1}\Xi(t)L^T(t) = 2\Xi^{-1}(t)D(t).$$

Tomando la traza y aprovechando la identidad siguiente: $Tr\left[\Xi^{-1}\frac{d}{dt}\Xi(t)\right] = \frac{d}{dt}\{\ln[\det \Xi(t)]\}$, resulta luego de un reacomodo:

$$\frac{d}{dt}\{\ln[\det \Xi(t)]\} = 2Tr[\Xi^{-1}(t)D(t) - L(t)]. \quad (145)$$

Las ecuaciones (133), (144) y (145) constituyen el tercer sistema fundamental de ecuaciones diferenciales.

El carácter gaussiano de las fluctuaciones nos permite establecer que ya no necesitamos más elementos para describir el fenómeno. En cuanto a ecuaciones básicas, nuestra teoría está completa. El siguiente problema que nos atañe es la solución formal de las ecuaciones anteriores.

IV.5 Solución formal para las fluctuaciones medias y las correlaciones cruzadas

Nuestro objetivo final será la obtención de la solución formal a la ecuación (143) y durante el proceso encontraremos la de (133). Para lograrlo se aprovecha un teorema de las ecuaciones diferenciales ordinarias (Imaz C. y Vorel Z., 1968) que establece la equivalencia de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A(t) \vec{x}(t), \quad (146)$$

donde $\vec{x}(t)$ es un vector, con la ecuación

$$\frac{d}{dt} Y(t) = N(t) Y(t), \quad (147)$$

donde $Y(t)$ es una matriz cuadrada.

La estrategia que se sigue consta de los siguientes pasos:

- (1) Puesto que el teorema se establece para ecuaciones diferenciales homogéneas, se hace necesario transformar la siguiente ecuación para las fluctuaciones promedio:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{q} \rangle(t) = -L(t) \langle \vec{q} \rangle(t) - \vec{K}(t), \quad (148)$$

que no es homogénea, a otra que sí lo sea.

- (2) Una vez hecho ésto, tendremos la ecuación siguiente:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{Q} \rangle(t) = -L(t) \langle \vec{Q} \rangle(t), \quad (149)$$

que no incluye la corrección finita congelada.

- (3) Al realizar este cambio se obtiene la ventaja de que la solución a la ecuación (149) está dada por una transformación lineal $G(t)$ aplicada sobre las condiciones iniciales, $\langle \vec{Q} \rangle(0)$, es decir:

$$\langle \vec{Q} \rangle(t) = G(t) \langle \vec{Q} \rangle(0). \quad (150)$$

- (4) Una vez establecido que $\langle \vec{Q} \rangle(t)$ tiene la forma (150), se aborda el problema de obtener la solución formal para la ecuación matricial:

$$\frac{d}{dt} \Pi(t) + L(t) \Pi(t) + \Pi(t) L^T(t) = 2D(t), \quad (151)$$

donde $\Pi(t) = \{Q_\mu(t) Q_\nu(t)\}$ es la matriz de correlaciones cruzadas de la variable $\langle \vec{Q} \rangle(t)$.

- (5) A partir de $\Pi(t)$ se determina $C(t)$.

IV.5.1 Transformación a las variables sin corrección finita congelada

Sea $\vec{u}(t)$ un vector cuyas componentes son p funciones que satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = -L(t) \vec{u}(t) + \vec{K}(t), \quad (152)$$

con condiciones iniciales $\vec{u}(0) = 0$. Definimos la transformación de variable:

$$\vec{Q}(t) = \vec{q}(t) + \vec{u}(t), \quad (153)$$

enseguida derivamos respecto al tiempo y promediamos sobre $P(\vec{q}, t)$, de lo cual resulta:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{Q} \rangle(t) = \frac{d}{dt} \langle \vec{q} \rangle(t) + \frac{d}{dt} \vec{u}(t). \quad (154)$$

Enseguida sustituimos (148) y (152) en el lado derecho de esta ecuación y se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{Q} \rangle(t) = -L(t) \langle \vec{q} \rangle(t) - \vec{K}(t) - L(t) \vec{u}(t) + \vec{K}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{Q} \rangle(t) = -L(t) \{ \langle \vec{q} \rangle(t) + \vec{u}(t) \},$$

de modo que encontramos la ecuación (149):

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{Q} \rangle(t) = -L(t) \langle \vec{Q} \rangle(t).$$

El papel que cumple el vector $\vec{u}(t)$ es trasladar, a cada instante t , al vector $\langle \vec{q} \rangle(t)$ para obtener $\langle \vec{Q} \rangle(t)$. Nótese también que para disponer de una ecuación homogénea para los promedios de las variables trasladadas se paga el precio de tener un sistema más de ecuaciones diferenciales.

IV.5.2 Solución a la ecuación homogénea

A las ecuaciones de la forma de (149) se les asocia un propagador (Imaz y Vorel, 1968) $G(t)$ que obedece la ecuación:

$$\frac{d}{dt}G(t) = -L(t)G(t), \quad (155)$$

con condiciones iniciales $G(0) = I$. Entonces el vector $\langle \vec{Q} \rangle(t)$ está dado por la expresión:

$$\langle \vec{Q} \rangle(t) = G(t) \langle \vec{Q} \rangle(0). \quad (156)$$

Podemos comprobar que efectivamente éste es el caso: Integrando en (155) resulta:

$$G(t) - G(0) = - \int_0^t L(s) G(s) ds,$$

pero usando las condiciones iniciales tenemos que:

$$G(t) = I - \int_0^t L(s) G(s) ds. \quad (157)$$

Sustituyendo en (156) resulta

$$\langle \vec{Q} \rangle(t) = \left\{ I - \int_0^t L(s) G(s) ds \right\} \langle \vec{Q} \rangle(0),$$

que se reacomoda como sigue:

$$\langle \vec{Q} \rangle(t) - \langle \vec{Q} \rangle(0) = - \int_0^t L(s) G(s) ds \langle \vec{Q} \rangle(0). \quad (158)$$

Derivando en (158) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{Q} \rangle(t) = -L(t) G(t) \langle \vec{Q} \rangle(0),$$

de modo que usando (156) tenemos:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{Q} \rangle(t) = -L(t) \langle \vec{Q} \rangle(t),$$

de donde resulta que el lado izquierdo produce el lado derecho de la ecuación a comprobar.

Si se conoce el propagador $G(t)$, la fluctuación media puede escribirse en la siguiente

forma:

$$\langle \vec{q} \rangle(t) = G(t) \langle \vec{q} \rangle_0 - G(t) \int_0^t ds G^{-1}(s) \vec{K}(s). \quad (159)$$

IV.5.3 La ecuación de Fokker-Planck para las variables sin corrección finita congelada

La transformación definida en (153) introduce las nuevas variables aleatorias $Q_\mu(t)$, que obedecen una ecuación de Fokker-Planck ligeramente modificada. Esta es la que vamos a obtener a continuación:

Sea

$$Q_\mu(t) = q_\mu(t) + u_\mu(t),$$

es claro que se cumple

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu} P(\vec{Q}, t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial Q_\mu} P(\vec{Q}, t) \right\} \frac{\partial Q_\mu}{\partial q_\mu} = \frac{\partial}{\partial Q_\mu} P(\vec{Q}, t),$$

de modo que el problema se reduce a estudiar el lado izquierdo de la ecuación de Fokker-Planck.

Definimos

$$\tilde{P}(\vec{Q}, t) = P(\vec{Q} - \vec{u}, t), \quad (160)$$

con

$$P(\vec{q}, t) = \tilde{P}(\vec{Q} - \vec{u}, t),$$

entonces la derivada temporal es como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P} = \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{q}, t) + \sum_{\mu=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \tilde{P} \right) \left(-\frac{d}{dt} u_{\mu} \right),$$

de donde resulta que

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{q}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P} + \sum_{\mu=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \tilde{P} \right) \left(\frac{d}{dt} u_{\mu} \right),$$

tal que usando (152) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{q}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P} + \sum_{\mu=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \tilde{P} \right) \left(-\sum_{\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) u_{\nu}(t) + K_{\mu}(t) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P} - \sum_{\mu,\nu=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \tilde{P} \right) L_{\mu\nu}(t) u_{\nu}(t) + \sum_{\mu=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \tilde{P} \right) K_{\mu}(t). \end{aligned} \quad (161)$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \frac{\partial}{\partial q_{\mu}} \{q_{\nu} P(\vec{q}, t)\} &= \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \frac{\partial}{\partial q_{\mu}} \{[Q_{\nu} - u_{\nu}(t)] P(\vec{q}, t)\} \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \{Q_{\nu} \tilde{P}(\vec{Q}, t)\} - \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \{u_{\nu} \tilde{P}(\vec{Q}, t)\}. \end{aligned} \quad (162)$$

Ahora usamos (161) en el lado izquierdo de (120) y (162) en el lado derecho de (120),

resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\vec{Q}, t) &- \sum_{\mu,\nu=1}^p \left(\frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \tilde{P}(\vec{Q}, t) \right) L_{\mu\nu}(t) u_{\nu}(t) + \sum_{\mu=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \tilde{P}(\vec{Q}, t) \right] K_{\mu}(t) \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \{Q_{\nu} \tilde{P}(\vec{Q}, t)\} - \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \frac{\partial}{\partial Q_{\mu}} \{u_{\nu} \tilde{P}(\vec{Q}, t)\} \\ &\quad + \sum_{\mu,\nu=1}^p \frac{\partial}{\partial Q_{\mu} \partial Q_{\nu}} \{D_{\mu\nu}(\vec{x}(t)) \tilde{P}(\vec{Q}, t)\}, \end{aligned}$$

y eliminando términos se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\vec{Q}, t) =$$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \frac{\partial}{\partial Q_\mu} \{Q_\nu \tilde{P}(\vec{Q}, t)\} + \sum_{\mu,\nu=1}^p \frac{\partial}{\partial Q_\mu \partial Q_\nu} \{D_{\mu\nu}(\vec{x}(t)) \tilde{P}(\vec{Q}, t)\}. \quad (163)$$

Que es la ecuación de Fokker-Planck modificada. Como era de esperarse, la transformación (153) solamente elimina el término de corrección finita congelada, $\vec{K}(t)$, que ahora aparece en la ecuación de evolución de $\vec{u}(t)$.

IV.5.4 La ecuación de evolución de la matriz de correlaciones cruzadas

Para encontrar la ecuación para las correlaciones $\Pi_{\gamma\kappa}(t) = \langle Q_\gamma Q_\kappa \rangle(t)$ procedemos en la forma que ya es usual. Sea una función $f(\vec{Q})$ doblemente diferenciable respecto a Q_μ y con primera derivada temporal. A partir de (163) resulta

$$\frac{d}{dt} \langle f(\vec{Q}) \rangle = - \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \langle Q_\nu \frac{\partial}{\partial Q_\mu} f(\vec{Q}) \rangle + \sum_{\mu,\nu=1}^p D_{\mu\nu}(\vec{x}(t)) \langle \frac{\partial}{\partial Q_\mu \partial Q_\nu} f(\vec{Q}) \rangle. \quad (164)$$

Haciendo $f = Q_\gamma$, tengo $\frac{\partial}{\partial Q_\mu} f = \delta_{\mu\gamma}$ y queda la ecuación

$$\frac{d}{dt} \langle Q_\gamma \rangle(t) = - \sum_{\mu,\nu=1}^p L_{\mu\nu}(t) \langle Q_\nu \rangle(t), \quad (165)$$

que coincide con la ecuación (149), lo cual confirma que (163) es la ecuación de Fokker-Planck correcta.

Haciendo $f = Q_\kappa Q_\lambda$ tengo

$$\frac{\partial}{\partial Q_\mu} f = Q_\lambda \delta_{\mu\kappa} + Q_\kappa \delta_{\mu\lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial Q_\mu \partial Q_\nu} f = \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa}$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación de evolución:

$$\frac{d}{dt} \langle Q_\kappa Q_\lambda \rangle (t) = - \sum_{\gamma=1}^p L_{\kappa\gamma} (t) \langle Q_\gamma Q_\lambda \rangle (t) - \sum_{\gamma=1}^p L_{\lambda\gamma} (t) \langle Q_\gamma Q_\kappa \rangle (t) + D_{\kappa\lambda} (t) + D_{\lambda\kappa} (t). \quad (166)$$

El primero y el segundo término del lado derecho pueden verse como un solo elemento de matriz simetrizado, a su vez, el tercero y el cuarto término del mismo lado forman un elemento de matriz simetrizado. En consecuencia, el lado izquierdo da lugar a una matriz simétrica, de modo que su integral respecto al tiempo, $\langle Q_\kappa Q_\lambda \rangle (t)$, es simétrica. Entonces el segundo término del lado derecho se puede escribir como sigue:

$$\sum_{\gamma=1}^p L_{\lambda\gamma} (t) \langle Q_\gamma Q_\kappa \rangle (t) = \sum_{\gamma=1}^p [L_{\gamma\lambda} (t)]^T \langle Q_\gamma Q_\kappa \rangle (t) = \sum_{\gamma=1}^p \langle Q_\gamma Q_\kappa \rangle (t) [L_{\gamma\lambda} (t)]^T.$$

Denotando $\Pi (t) = \{ \langle Q_\gamma Q_\kappa \rangle (t) \}$, reescribimos la ecuación (166) como sigue:

$$\frac{d}{dt} \Pi (t) = -L (t) \Pi (t) - \Pi (t) L^T (t) + 2D (t), \quad (167)$$

que es la ecuación (151).

IV.5.5 Solución formal a la ecuación para las correlaciones cruzadas

Para resolver la ecuación (167) proponemos la siguiente transformación:

$$\Pi (t) = G (t) \tilde{\Pi} (t) G^T (t). \quad (168)$$

Sustituimos en (167) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} G (t) \right) \tilde{\Pi} (t) G^T (t) + G (t) \left(\frac{d}{dt} \tilde{\Pi} (t) \right) G^T (t) + G (t) \tilde{\Pi} (t) \left(\frac{d}{dt} G^T (t) \right) = \\ = -L (t) G (t) \tilde{\Pi} (t) G^T (t) - G (t) \tilde{\Pi} (t) G^T (t) L^T (t) + D (t), \end{aligned}$$

de modo que usando (155), y su traspuesta: $\frac{d}{dt}G^T(t) = -G^T(t)L^T(t)$, en el lado derecho de la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt}G(t)\right)\tilde{\Pi}(t)G^T(t) + G(t)\left(\frac{d}{dt}\tilde{\Pi}(t)\right)G^T(t) + G(t)\tilde{\Pi}(t)\left(\frac{d}{dt}G^T(t)\right) = \\ & = \left(\frac{d}{dt}G(t)\right)\tilde{\Pi}(t)G^T(t) + G(t)\tilde{\Pi}(t)G^T(t)L^T(t) + 2D(t), \end{aligned}$$

tal que eliminando términos se obtiene lo que sigue:

$$G(t)\left(\frac{d}{dt}\tilde{\Pi}(t)\right)G^T(t) = 2D(t).$$

Esto nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\Pi}(t) = G^{-1}(t)2D(t)[G^T(t)]^{-1}, \quad (169)$$

cuya solución formal es

$$\tilde{\Pi}(t) = \int_0^t G^{-1}(t_1)2D(t_1)[G^T(t_1)]^{-1}dt_1 + C(0). \quad (170)$$

Ahora utilizamos esta expresión en (168) para obtener:

$$\Pi(t) = G(t)\left\{\int_0^t G^{-1}(t_1)2D(t_1)[G^T(t_1)]^{-1}dt_1\right\}G^T(t) + G(t)C(0)G^T(t), \quad (171)$$

que es la solución buscada.

IV.5.6 Procedimiento formal

Una vez que hemos obtenido la matriz $\Pi(t) = \{\langle Q_\gamma Q_\kappa \rangle(t)\}$, necesitamos resolver el sistema de ecuaciones (152) para obtener $\vec{u}(t)$, de tal modo que podamos encontrar $C_{\mu\nu}(t)$ mediante la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu}(t) &= \langle q_\mu(t) q_\nu(t) \rangle = \langle [Q_\mu(t) - u_\mu(t)] [Q_\nu(t) - u_\nu(t)] \rangle = \\
&= \langle Q_\mu(t) Q_\nu(t) \rangle - \langle Q_\mu(t) \rangle u_\nu(t) - \langle Q_\nu(t) \rangle u_\mu(t) + u_\mu(t) u_\nu(t). \quad (172)
\end{aligned}$$

Para resolver la ecuación (144) se desarrolla un procedimiento semejante al que hemos descrito. El resultado es el siguiente:

$$\Xi(t) = G(t) \Xi(0) G^T(t) + G(t) \int_0^t ds G^{-1}(s) 2D(s) [G^T(s)]^{-1} G^T(t). \quad (173)$$

IV.5.7 Las correlaciones cruzadas cuando L es independiente del tiempo

La matriz L depende del tiempo a través de las funciones $\vec{m}_t^*$, pero existen ejemplos en los cuales L es constante. Este es el caso de estados a temperatura cero y el de aquellos en los que el estado inicial de la red es $\vec{\sigma}(0) = \vec{\xi}^1$. Entonces las soluciones se simplifican mucho, como veremos enseguida:

Sea la matriz $\tilde{C}(t)$ tal que se cumple lo siguiente:

$$C(t) = \exp(-tL) \tilde{C}(t) \exp(-tL^T), \quad (174)$$

de modo que podemos determinar $\tilde{C}(t)$ enseguida:

Sustituyendo (174) en (151) tenemos:

$$\begin{aligned}
&-t \exp(-tL) \tilde{C}(t) \exp(-tL^T) + \exp(-tL) \left\{ \frac{d}{dt} \tilde{C}(t) \right\} \exp(-tL^T) \\
&- \exp(-tL) \tilde{C}(t) L^T \exp(-tL^T) = -L \exp(-tL) \tilde{C}(t) \exp(-tL^T)
\end{aligned}$$

$$- \exp(-tL) \tilde{C}(t) \exp(-tL^T) L^T + B(t)$$

y queda solamente

$$\exp(-tL) \left\{ \frac{d}{dt} \tilde{C}(t) \right\} \exp(-tL^T) = B(t), \quad (175)$$

de donde tenemos la ley dinámica que sigue para la matriz $\tilde{C}(t)$:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \tilde{C}(t) \right\} = \exp(tL) B(t) \exp(tL^T), \quad (176)$$

cuya integral formal es:

$$\tilde{C}(t) = \tilde{C}(0) + \int_0^t \exp(t'L) B(t') \exp(t'L^T) dt', \quad (177)$$

con lo cual resulta

$$\begin{aligned} C(t) &= \exp(-tL) \tilde{C}(0) \exp(-tL^T) \\ &+ \int_0^t \exp[(t' - t)L] B(t') \exp[(t' - t)L^T] dt', \end{aligned} \quad (178)$$

y si tomamos en cuenta que $\tilde{C}(0) = C(0)$, resulta que (178) es la solución formal que buscamos.

IV.6 Conclusión

Hemos concluido la formulación de la teoría y hemos encontrado las soluciones formales de las ecuaciones fundamentales, por consiguiente estamos ahora en condiciones de aplicarla a diversos sistemas concretos para conocer las implicaciones de nuestro tratamiento teórico. Este es el objetivo de los siguientes capítulos.

V. Aplicación a memorias asociativas I. Estados estacionarios.

V.1 Introducción

En este capítulo aplicaremos nuestra teoría a estados estacionarios con balance detallado. Encontraremos que la condición a cumplir para la existencia de esta clase de estados es la simetría de la matriz A . Haremos ver que entonces las fluctuaciones corresponden a flujos, $F_\mu(\vec{m}_\infty^*)$, de rotacional cero y revisaremos cómo deben ser los eigenvalores de la matriz de convección, $L_{\mu\nu}(\vec{m}_\infty^*)$, en este régimen. Discutiremos el teorema de fluctuación-disipación y analizaremos en detalle los estados de equilibrio de redes con memorias asociativas. Para este último fin consideraremos el modelo de Hebb generalizado al caso de patrones almacenados con diferentes pesos y presentaremos una comparación entre nuestra predicción teórica y los resultados arrojados por las simulaciones en computadora.

V.2 La estacionariedad y el balance detallado

Para tiempos grandes $t \rightarrow \infty$ la dependencia de la matriz de difusión $D(t)$ respecto de las condiciones iniciales se anula. Además, para estados macroscópicos estacionarios, en los cuales se cumple que $\vec{m}_t^* = \vec{m}^*$ tenemos que $\vec{m}^*$ está dado por la solución a las ecuaciones macroscópicas de punto fijo:

$$\vec{m}^* = \langle \vec{\xi} \tanh \beta [\vec{\xi} \cdot A \vec{m}^* + \theta] \rangle_{\xi, \theta}. \quad (179)$$

Entonces podemos llevar a cabo la integración temporal que aparece en la expresión (124) para

$D(t)$. En este caso, los términos de flujo y de difusión resultan independientes del tiempo.

Comparando las expresiones (122) y (124) para el caso que nos ocupa ahora, encontramos que se cumple la siguiente relación entre la matriz de convección y la de difusión:

$$L = I - \beta D A, \quad (180)$$

de modo que tenemos un proceso de Ornstein-Uhlenbeck independiente del tiempo caracterizado por las siguientes expresiones:

$$\vec{F}(\vec{q}) = \vec{K} + [I - \beta D A] \vec{q}, \quad D_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \langle \xi_\mu \xi_\nu \tanh^2 \beta [\vec{\xi} \cdot A \vec{m}^* + \theta] \rangle_{\xi, \theta}, \quad (181)$$

$$\vec{K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left\{ \langle \vec{\xi} \tanh \beta [\vec{\xi} \cdot A \vec{m}^* + \theta] \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \tanh \beta [\vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}^* + \theta_i] \right\}. \quad (182)$$

Debido a que la matriz L es estacionaria, el propagador toma la forma que sigue: $G = \exp(-tL)$. Si el sistema alcanza un estado estacionario macroscópico, o no, depende de la selección que se haga de la matriz A .

Una condición suficiente para obtener la estacionariedad asintótica que buscamos es el balance detallado microscópico, el cual establece que, además de la estacionariedad de la distribución de probabilidad $p_t(\vec{\sigma})$, se cumple que no hay flujo neto de probabilidad entre cualquier par de configuraciones $\vec{\sigma}$ y $\vec{\sigma}'$. Encontraremos que para los modelos estudiados en este trabajo, esta condición se traduce en la exigencia de simetría de la matriz A y en

la ausencia de autointeracciones en las neuronas. Esta última condición equivale a tomar $\Delta = 1$ en la formulación que ya desarrollamos en términos de los traslapes $\vec{m}$. Sin embargo, las ecuaciones (122) y (124) indican que la presencia o ausencia de las autointeracciones no juega papel alguno en la descripción que estamos haciendo de los efectos de tamaño finito.

Nuestro propósito ahora es encontrar las condiciones bajo las cuales la ecuación de Fokker-Planck tiene soluciones estacionarias. Definiendo

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_p} \right) \quad , \quad \vec{J}_t(\vec{q}) = P_t(\vec{q}) \left\{ D\Xi^{-1}(\vec{q} - \langle \vec{q} \rangle(t)) - \vec{K} + L^{-1}\vec{q} \right\} \quad , \quad (183)$$

reescribimos la ecuación de Fokker-Planck (120) como una ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(\vec{q}) + \nabla \cdot \vec{J}_t(\vec{q}) = 0. \quad (184)$$

De las ecuaciones (133) y (144) resulta que $\langle \vec{q} \rangle(t)$ dada por (159) es estacionaria si se cumple que

$$\langle \vec{q} \rangle = -L^{-1}\vec{K} \quad , \quad \frac{1}{2} \left\{ L\Xi + (L\Xi)^T \right\} = D \quad . \quad (185)$$

En este estado estacionario la corriente de probabilidad dada en (183) puede escribirse como sigue:

$$\vec{J}(\vec{q}) = P(\vec{q}) (D\Xi^{-1} - L) (\vec{q} + L^{-1}\vec{K}) \quad ,$$

de donde resulta claro que la corriente neta de probabilidad será cero si se cumple que

$$D = L\Xi. \quad (186)$$

Combinando la segunda ecuación de (185) con (186) encontramos que la condición a cumplir para obtener el balance detallado es la siguiente:

$$DL^T = LD,$$

que utilizada en la identidad (180) lleva a la expresión que sigue:

$$DA^TD = DAD. \quad (187)$$

De que la matriz de difusión es simétrica y no negativa resulta que se cumple la relación siguiente: $\vec{x} \cdot D \vec{x} \geq 0$, de modo que si $\{|n\rangle\}$ es la base ortonormalizada de eigenvectores de la matriz D , con $\{d_n\}$ el conjunto de eigenvectores correspondiente, entonces los elementos de matriz $\langle m | \dots | n \rangle$ de (187) llevan a la siguiente condición:

$$d_n d_m \langle m | A^T - A | n \rangle, \quad (188)$$

de donde resulta que el balance detallado se cumple si $A^T = A$.

V.3 Flujos de rotacional cero

Otra forma de arribar a la misma conclusión es imponer la condición de que el flujo en la ecuación de Fokker-Planck tenga rotacional cero, esto es cuando se cumple que

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial q_\gamma} = \frac{\partial F_\gamma}{\partial q_\mu}, \quad (189)$$

para todo par $\mu, \gamma = 1, \dots, p$. Calculando en detalle resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_\mu}{\partial q_\gamma} &= (1 - \beta) \delta_{\mu\gamma} + \beta \sum_{\lambda=1}^p \langle \xi_\mu \xi_\lambda \tanh^2 \beta [\vec{\xi} \cdot Am_t^*] \rangle_\xi A_{\lambda\gamma} \\ &= \frac{\partial F_\mu}{\partial q_\gamma} = (1 - \beta) \delta_{\gamma\mu} + \beta \sum_{\lambda=1}^p \langle \xi_\mu \xi_\lambda \tanh^2 \beta [\vec{\xi} \cdot Am_t^*] \rangle_\xi A_{\lambda\mu}.\end{aligned}$$

Haciendo

$$P = \sum_{\lambda=1}^p \langle \xi_\gamma \xi_\lambda \tanh^2 \beta [\vec{\xi} \cdot Am_t^*] \rangle_\xi,$$

la condición para tener rotacional cero toma la siguiente forma:

$$PA = (PA)^T,$$

que se cumple solamente si A es simétrica. En este caso es posible definir una función de Lyapunov (o función energía) cuyos mínimos son atractores de la dinámica del sistema. Si las soluciones a las ecuaciones de campo promedio llegan a un punto fijo, los parámetros de orden satisfacen la relación $d\vec{m}_t^*/dt = 0$ y los eigenvalores del Hessiano de la energía libre tienen eigenvalores positivos, entonces el sistema está en un estado de equilibrio.

Cuando las interacciones sinápticas son asimétricas no se puede garantizar la existencia de puntos fijos en la conducta de $\vec{m}_t^*$, en cuyo caso pueden aparecer i) ciclos estacionarios en las fluctuaciones o ii) estados estacionarios sin balance detallado.

V.4 La matriz de convección en los estados de equilibrio

En la vecindad de un punto fijo es posible escribir las trayectorias de campo promedio en la siguiente forma:

$$\vec{m}_t^* = \vec{m}_\infty^* + \vec{x}(t),$$

donde $\vec{m}_\infty^*$ es el punto fijo y $|\vec{x}(t)| \ll |\vec{m}_s^*|$, para cada t . Desarrollando en serie de

Taylor podemos escribir como sigue la matriz de convección $L_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*)$:

$$L_{\mu\nu}(\vec{m}_t^*) = L_{\mu\nu}^{eq}(\vec{m}_\infty^*) + B_{\mu\nu}(t), \quad (190)$$

donde

$$L_{\mu\nu}^{eq}(\vec{m}_\infty^*) = (1 - \beta) \delta_{\mu\nu} + \langle \xi_\mu \xi_\nu \tanh^2(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{m}_\infty^*) \rangle_\xi \quad (191)$$

y

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{n>1} \frac{1}{n!} \sum_{\kappa_1=1}^p \cdots \sum_{\kappa_n=1}^p \frac{\partial^n}{\partial m_{\kappa_1} \cdots \partial m_{\kappa_n}} \times$$

$$\left\{ \langle \xi_\mu \xi_\nu \tanh^2(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{m}_\infty^*) \rangle_\xi x_{\kappa_1}(t) x_{\kappa_1}(t) \cdots x_{\kappa_n}(t) \right\}. \quad (192)$$

En el modelo bajo análisis la selección de un estado inicial $\vec{m}(0)$ determina una cuenca del espacio de estados de la red y en consecuencia un punto fijo $\vec{m}_\infty^*$. Por otra parte, en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias (Verhulst F, 1990) se establece que se presentará la siguiente conducta asintótica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = 0 \quad (193)$$

si se cumplen las condiciones enumeradas a continuación:

(1) La matriz $B_{\mu\nu}(t)$ es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_{\mu\nu}(t) = 0, \quad (194)$$

(2) los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matriz $L_{\mu\nu}^{eq}(\vec{m}_\infty^*)$, cumplen con que $Re(\lambda_k) \geq 0$ y

(3) $\int_0^t \overline{B}(t') dt'$ es una integral acotada.

entonces las soluciones a la ecuación para los primeros momentos, $\langle \vec{q} \rangle(t)$, están acotadas.

El valor asintótico, $L_{\mu\nu}^{eq}(\vec{m}_\infty^*)$, de la matriz de convección coincide con la matriz jacobiana o Hessiano

$$\frac{\partial^2}{\partial m_\mu \partial m_\nu} f, \quad (195)$$

de la energía libre, f , obtenida para las redes neuronales infinitas mediante la física estadística en equilibrio, por lo tanto, en el régimen lineal podemos recurrir a los análisis de atractores y puntos de silla conocidos en la literatura. El Hessiano para el modelo de Hebb es un problema resuelto (Amit D. et. al., 1985a), así como la generalización a patrones almacenados con distintos pesos (Viana L., 1988).

V.5 El teorema de fluctuación-disipación

Hemos establecido que un sistema finito estará en un estado estacionario si el flujo de campo promedio llega a un punto fijo tal que $\vec{m}_t^* = \vec{m}_{t+t_0}^*$ para toda $t_0 > 0$. Entonces la matriz de convección L , la matriz de difusión D , la corrección finita congelada $\vec{K}$, y por consiguiente la densidad de probabilidad $P_t(\vec{q})$, resultan independientes del tiempo. De las ecuaciones fundamentales tenemos que para esta clase de procesos debe cumplirse que

$$L_\infty \langle \vec{q} \rangle_\infty + \vec{K}_\infty = 0 \quad , \quad L_\infty C_\infty + C_\infty L_\infty^T = 2(D_\infty - R_\infty). \quad (196)$$

El papel de los elementos de L_∞ consiste en disipar las fluctuaciones promedio $\langle \vec{q} \rangle_\infty$, del sistema finito. En cambio, la corrección finita congelada $\vec{K}_\infty$ y la difusión D_∞ representan la fuente de ruido en la conducta macroscópica de la red. Esto es consecuencia de que existen dos tipos de efectos de tamaño finito:

- las fluctuaciones térmicas, presentes a través de D_∞ y
- las correcciones congeladas introducidas mediante $\vec{K}_\infty$.

La relación de la derecha en (196) es un teorema de fluctuación-disipación que establece la forma en que se compensan la parte disipante y de ruido para que el sistema finito se mantenga en un estado estacionario. Una expresión formal para la matriz de correlaciones en equilibrio, C_∞ , que mide la magnitud de las fluctuaciones, puede encontrarse como sigue:

Sea $|\lambda_n\rangle$ los eigenvectores de la matriz $L_\infty^T L_\infty$, con λ_n sus eigenvalores. Como la matriz $L_\infty^T L_\infty$ es simétrica se cumple que

$$\langle \lambda_n | L_\infty^T L_\infty = \lambda_n \langle \lambda_n | . \quad (197)$$

Multiplicando por L_∞^T por la izquierda, y por L_∞ por la derecha, resulta:

$$L_\infty^T L_\infty C_\infty L_\infty + L_\infty^T C_\infty L_\infty^T L_\infty = L_\infty^T 2 (D_\infty - R_\infty) L_\infty.$$

Enseguida multiplicamos por $\langle \lambda_n |$ por la izquierda y por $|\lambda_m\rangle$ por la derecha, se obtiene:

$$\langle \lambda_n | L_\infty^T L_\infty C_\infty L_\infty | \lambda_m \rangle + \langle \lambda_n | L_\infty^T C_\infty L_\infty^T L_\infty | \lambda_m \rangle = \langle \lambda_n | L_\infty^T 2 (D_\infty - R_\infty) L_\infty | \lambda_m \rangle,$$

de donde tenemos:

$$\lambda_n \langle \lambda_n | C_\infty L_\infty | \lambda_m \rangle + \lambda_m \langle \lambda_n | L_\infty^T C_\infty | \lambda_m \rangle = \langle \lambda_n | L_\infty^T 2 (D_\infty - R_\infty) L_\infty | \lambda_m \rangle.$$

Considerando que $C_\infty L_\infty = L_\infty^T C_\infty$, podemos factorizar como sigue:

$$(\lambda_n + \lambda_m) \langle \lambda_n | C_\infty L_\infty | \lambda_m \rangle = \langle \lambda_n | L_\infty^T 2 (D_\infty - R_\infty) L_\infty | \lambda_m \rangle,$$

de modo que introduciendo el desarrollo espectral de la unidad $\sum_{\rho=1}^p |\lambda_\rho\rangle\langle\lambda_\rho| = 1$ en el lado izquierdo resulta:

$$\langle \lambda_n | C_\infty \sum_{\rho=1}^p |\lambda_\rho\rangle\langle\lambda_\rho| L_\infty | \lambda_m \rangle = 2 \frac{1}{(\lambda_n + \lambda_m)} \langle \lambda_n | L_\infty^T (D_\infty - R_\infty) L_\infty | \lambda_m \rangle,$$

y nos quedan las matrices de C_∞ y L_∞ en la representación de los eigenvectores $|\lambda_n\rangle$:

$$\sum_{\rho=1}^p (C^\infty)_{n,\rho} (L^\infty)_{\rho,m} = 2 \frac{1}{(\lambda_n + \lambda_m)} \langle \lambda_n | L_\infty^T (D_\infty - R_\infty) L_\infty | \lambda_m \rangle.$$

Multiplicamos por el inverso de la matriz L^∞ para tener

$$(C^\infty)_{n,n'} = \sum_{m=1}^p 2 \frac{1}{(\lambda_n + \lambda_m)} \langle \lambda_n | L_\infty^T (D_\infty - R_\infty) L_\infty | \lambda_m \rangle (L^\infty)_{\rho,n'},$$

sustituyendo $(L^\infty)_{mn'}^{-1} = \langle \lambda_m | L_\infty^{-1} | \lambda_{n'} \rangle$ queda finalmente

$$(C^\infty)_{n,n'} = \langle \lambda_n | L_\infty^T (D_\infty - R_\infty) L_\infty G_n L_\infty^{-1} | \lambda_{n'} \rangle, \quad (198)$$

donde

$$G_n = 2 \sum_{m=1}^p \frac{|\lambda_m\rangle \langle \lambda_m|}{\lambda_n + \lambda_m}. \quad (199)$$

V.6 Aplicaciones a memorias asociativas

Aplicaremos nuestra teoría a un modelo de memoria asociativa que generaliza el modelo estándar de Hebb y permite el almacenamiento de patrones con diferentes pesos. La matriz de interacción sináptica es

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p w_\mu \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad (200)$$

con $0 \leq w_\mu \leq 1$ para todo μ . Este modelo corresponde a la siguiente selección de la matriz

A

$$A = w_\mu \delta_{\mu\nu}, \quad (201)$$

de modo que cumple con el balance detallado. En lo sucesivo tomaremos umbrales iguales a cero por simplicidad ($\theta = 0$), lo cual corresponde a una distribución de la forma $W(\theta) = \delta(\theta)$.

Estudiaremos las correcciones finitas de los llamados estados puros, donde

$$m_{\mu}^{*}(t) = m^{*}(t) \delta_{\lambda\mu}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos escoger $m(0) > 0$ y $\lambda = 1$ (lo cual se logra ordenando los patrones a almacenar conforme a la magnitud de sus traslapes iniciales). Entonces tenemos que la conducta de campo promedio está gobernada por las siguientes ecuaciones:

$$m_{\mu}^{*}(t) = m^{*}(t) \delta_{\mu 1} \quad , \quad \frac{d}{dt} m^{*}(t) = -m^{*}(t) + \tanh \beta [w_1 m^{*}(t)] \quad , \quad (202)$$

que para tiempos muy grandes tienden a un punto fijo dado por la solución a la ecuación que sigue:

$$m_{\infty}^{*} = \tanh \beta [w_1 m_{\infty}^{*}] \quad . \quad (203)$$

Por arriba de la temperatura crítica, $T_c = w_1$, el punto fijo macroscópico es paramagnético, es decir, resulta $m^{*} = 0$. Por debajo de T_c se encuentra un estado ordenado: $m^{*} > 0$.

Es necesario definir condiciones iniciales que generen un estado macroscópico puro, con ese fin seleccionamos la siguiente distribución de probabilidad inicial:

$$p_0(\vec{\sigma}) = \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} [1 + m(0)] \delta_{\sigma_i, \xi_i^1} + \frac{1}{2} [1 - m(0)] \delta_{\sigma_i, -\xi_i^1} \right\} \quad , \quad (204)$$

que nos da la siguiente condición inicial macroscópica: $m_{\mu}^{*}(0) = m(0) \delta_{\mu 1}$.

V.6.1 La estadística de los efectos de tamaño finito

La restricción a estados macroscópicos puros nos permite simplificar considerablemente nuestro análisis de los efectos de tamaño finito. En este caso los coeficientes de la ecuación de Fokker-Planck toman la forma que sigue:

$$\vec{K}(t) = \mathcal{K}(t) \vec{K} \quad , \quad L_{\mu\nu}(t) = l_{\mu}(t) \delta_{\mu\nu} \quad , \quad D(t) = d(t) I \quad , \quad (205)$$

con las siguientes funciones escalares:

$$\mathcal{K}(t) = -\tanh \beta [w_1 m^*(t)] \quad , \quad l_{\mu}(t) = 1 - \beta w_{\mu} [1 - \tanh^2 \beta [w_1 m^*(t)]] \quad , \quad (206)$$

$$d(t) = 1 - \tanh \beta [w_1 m^*(t)] \left\{ m(0) e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta [w_1 m^*(s)] ds \right\} \quad (207)$$

y el siguiente vector estacionario

$$K_1 = 0 \quad , \quad K_{\mu>1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_i^1 \quad . \quad (208)$$

En este caso el propagador toma la siguiente forma simple:

$$G_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} \exp \left[- \int_0^t ds l_{\mu}(s) \right] \quad (209)$$

de modo que los momentos estadísticos de la densidad de probabilidad $P_t(\vec{q})$ pueden ser calculados para obtener la siguiente relación cerrada para la fluctuación media:

$$\langle q_\mu \rangle (t) = K_\mu \left\{ m(0) \exp \left[- \int_0^t ds l_\mu(s) \right] + \int_0^t ds \tanh \beta [w_1 m^*(s)] \exp \left[- \int_s^t du l_\mu(u) \right] \right\} \quad (210)$$

y para las correlaciones centradas:

$$\Xi_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} \Xi_\mu(t), \quad (211)$$

con

$$\Xi_\mu(t) = [1 - m^2(0)]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-2 \int_0^t ds l_\mu(s) \right] + 2 \int_0^t ds D(s) \exp \left[-2 \int_s^t du l_\mu(u) \right]. \quad (212)$$

De estos resultados se obtiene que la distribución de probabilidad de las fluctuaciones toma la siguiente forma:

$$P_t(\vec{q}) = \frac{1}{[(2\pi)^p \prod_{\mu=1}^p \Xi_\mu(t)]} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^p \frac{[q_\mu - \langle q_\mu \rangle(t)]^2}{\Xi_\mu(t)} \right\}. \quad (213)$$

Esta expresión indica que las fluctuaciones están desacopladas y que las fluctuaciones medias tienden a un valor asintótico distinto de cero para todo $\mu > 1$.

Con el propósito de comparar con las simulaciones en el próximo capítulo estudiaremos la evolución temporal de estos sistemas para el caso de tres patrones almacenados, $p = 3$, y resolveremos las ecuaciones correspondientes por métodos numéricos. En esta sección presentamos los resultados obtenidos en equilibrio para redes con $N = 5\,000$ neuronas, operando a temperaturas, $0.1 \leq T \leq 0.7$ y tres patrones almacenados con pesos iguales: $w_\mu = 1$,

$\mu = 1, 2, 3$. Para comparar la predicción teórica con el experimento computacional se simulon redes con tres patrones almacenados $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3$, con condiciones iniciales $m_1^0 = 0.9$, $m_{\mu>1}^0 = 0$ y grabando resultados al tiempo $t = 10$. Las simulaciones fueron realizadas mediante programas escritos en fortran 77 en una computadora ALPHA STATION. Se llevaron a cabo $n = 200$ realizaciones sobre la base de que el error de muestreo disminuye como $\frac{1}{n}$ y de que una revisión de la gráfica de la función $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ indica que después del valor seleccionado el mejoramiento de la precisión es muy poco si se compara con el esfuerzo de cómputo. Una vez obtenidas las realizaciones se aplicó un análisis estadístico que fué llevado a cabo en una computadora personal con procesador 486 de 100 megahertz y utilizando el software MATHEMATICA. Los resultados se presentan enseguida en las gráficas 4(a) y 4(b):

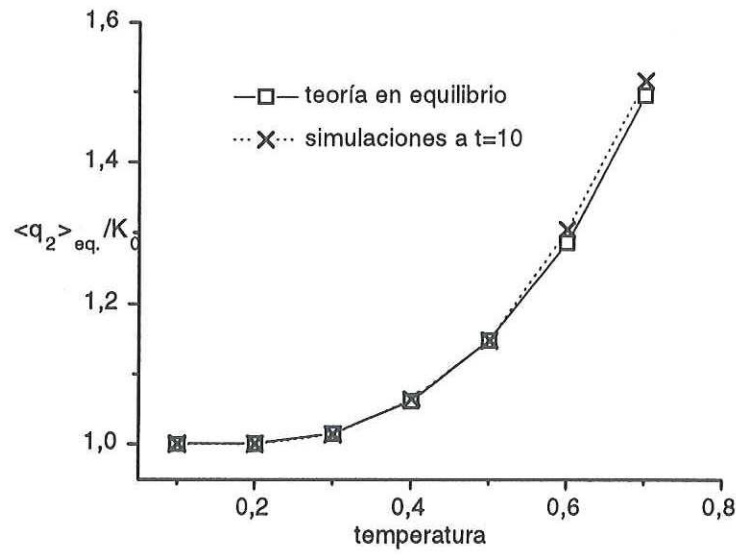


Figura 4(a). Estados puros en equilibrio, $N = 5\,000$, $p = 3$, 200 realizaciones. Dependencia respecto a la temperatura de las fluctuaciones medias. Valor asintótico de la expresión (210).

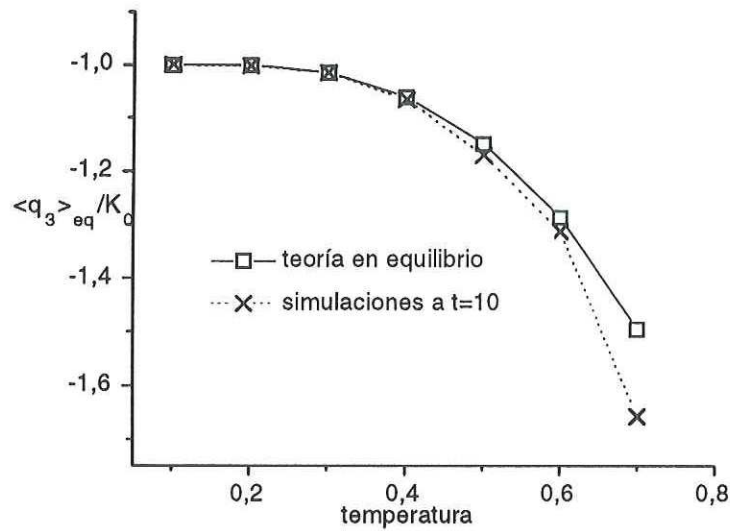


Figura 4(b). Estados puros en equilibrio, $N = 5\,000$, $p = 3$, 200 realizaciones. Dependencia respecto a la temperatura de las fluctuaciones medias. Valor asintótico de la expresión (210).

V.7 Estados de equilibrio en redes de Hebb. Dos patrones almacenados

V.7.1 Solución de las ecuaciones algebraicas

Este sistema ya fué estudiado de manera general en este capítulo. Ahora consideraremos el caso particular de una red operando a temperatura T , con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. Escribiendo y resolviendo en detalle las ecuaciones (196) tenemos la siguiente expresión matricial para las fluctuaciones medias:

$$\langle \vec{q} \rangle_{eq} = \begin{pmatrix} \langle q_1 \rangle_{\infty} \\ \langle q_2 \rangle_{\infty} \end{pmatrix} = \frac{1}{L_{12}^2 - L_{11}^2} \begin{pmatrix} L_{11}K_1 - L_{12}K_2 \\ L_{11}K_2 - L_{12}K_1 \end{pmatrix}, \quad (214)$$

con

$$L_{11} = L_{22} = 1 - \beta + \frac{\beta}{2} \{ \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} + (m_2^*)_{\infty}] + \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} - (m_2^*)_{\infty}] \}, \quad (215)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\beta}{2} \{ \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} + (m_2^*)_{\infty}] - \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} - (m_2^*)_{\infty}] \}. \quad (216)$$

Para las fluctuaciones cuadráticas encontramos:

$$\langle q_1^2 \rangle_{\infty} = \frac{R_{11} - D_{11}}{L_{11}} + \frac{L_{12} \{ L_{11} [L_{12} (R_{11} - D_{11}) + 2L_{11} (R_{12} - D_{12}) - L_{11}L_{12} (R_{22} - D_{11})] \}}{2L_{11} (L_{11}^3 - L_{11}L_{12}^2)}, \quad (217)$$

$$\langle q_2^2 \rangle_{\infty} = \frac{R_{22} - D_{11}}{L_{11}} + \frac{L_{12} \{ L_{11} [L_{12} (R_{11} - D_{11}) + 2L_{11} (R_{12} - D_{12}) - L_{11}L_{12} (R_{22} - D_{11})] \}}{2L_{11} (L_{11}^3 - L_{11}L_{12}^2)}, \quad (218)$$

donde

$$D_{11} = 1 - \{ \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} + (m_2^*)_{\infty}] + \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} - (m_2^*)_{\infty}] \}, \quad (219)$$

$$D_{12} = - \{ \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} + (m_2^*)_{\infty}] - \tanh^2 \beta [(m_1^*)_{\infty} - (m_2^*)_{\infty}] \}, \quad (220)$$

$$K_{11} = K_1 \langle q_1 \rangle_{\infty} \quad , \quad K_{12} = \frac{1}{2} (K_1 \langle q_2 \rangle_{\infty} + K_2 \langle q_1 \rangle_{\infty}) \quad , \quad K_{22} = K_2 \langle q_2 \rangle_{\infty} \quad (221)$$

y

$$K_{1,2}^{eq} = \tanh \beta [(m_1^*)_{\infty} + (m_2^*)_{\infty}] \mp \tanh \beta [(m_1^*)_{\infty} - (m_2^*)_{\infty}]. \quad (222)$$

V.7.2 Comparación de la predicción teórica para estados de equilibrio con las simulaciones

El procedimiento utilizado consistió en simular redes con $N = 1\,000$ y $5\,000$ neuronas, con dos patrones $\vec{\xi}_1$ y $\vec{\xi}_2$ generados al azar conforme a las siguientes condiciones iniciales: $m_1^0 = 0.9$ y $m_2^0 = 0.1$. La constante congelada resultó ser $K_0 = 1.264911$ en el primer caso y $K_0 = 1.583919$ en el segundo. Se hicieron evolucionar las redes conforme al algoritmo directo y grabando resultados a $t = 10$ para las temperaturas: $T = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$. La selección de este tiempo se debe a que las soluciones numéricas de las ecuaciones de campo promedio para $\vec{m}_t^*$ ya han alcanzado un punto fijo para ese valor de t . En cambio, para las temperaturas: $T = 0.7, 0.8, 0.9$, resultó necesario extender la simulación hasta $t = 20$ para garantizar el equilibrio.

Estas simulaciones también fueron realizadas mediante programas escritos en fortran

77 en una computadora ALPHA STATION. Por las razones expuestas con anterioridad, se llevaron a cabo $n = 200$ realizaciones. El análisis estadístico del muestreo realizado dió por consecuencia los resultados que se presentan en las gráficas 5(a)-8(b):

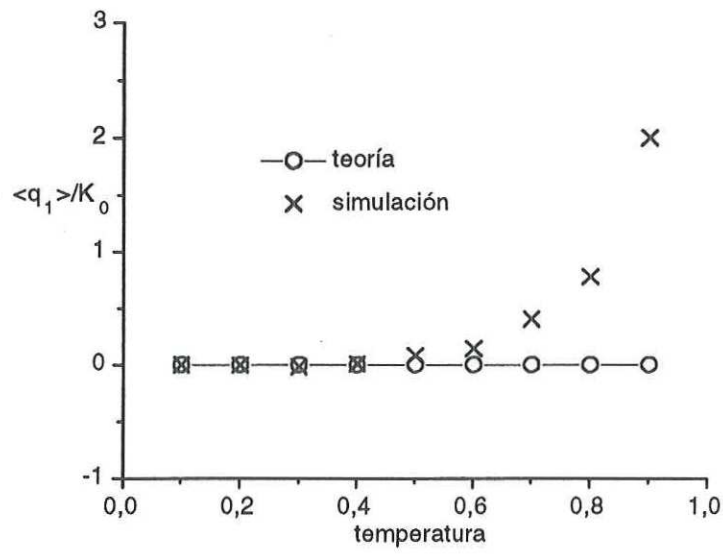


Figura 5(a). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 1\,000$, $K_0 = 1.264911$. Ecuación (214).

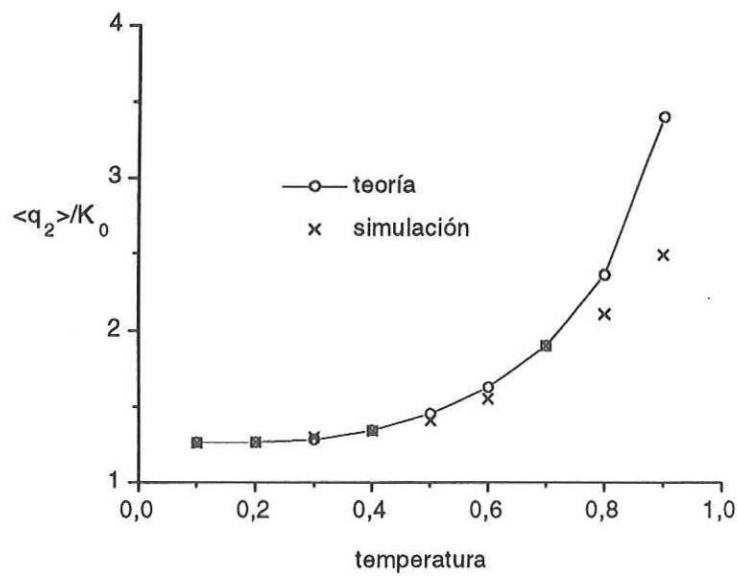


Figura 5(b). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 1\,000$, $K_0 = 1.264911$. Ecuación (214).

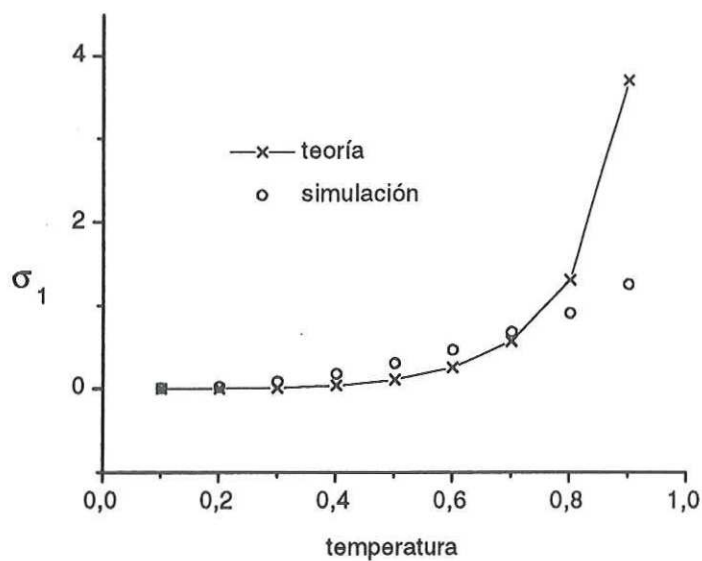


Figura 6(a). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 1\,000$, $K_0 = 1.264911$. Ecuación (214-217).

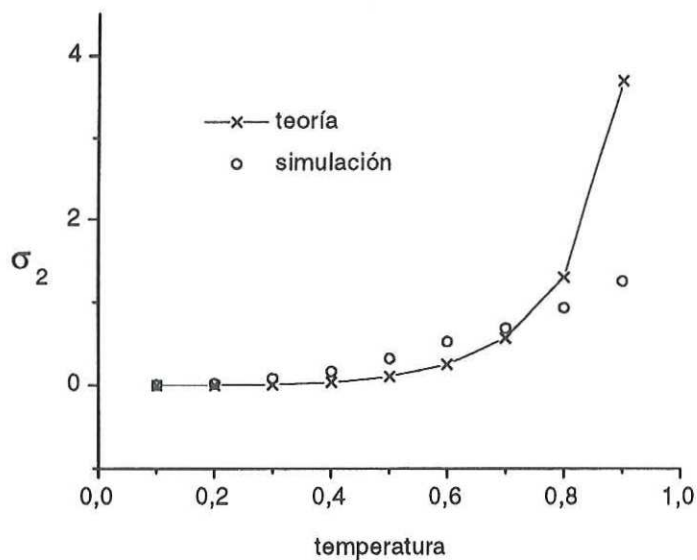


Figura 6(b). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 1\,000$, $K_0 = 1.264911$. Ecuación (214-217).

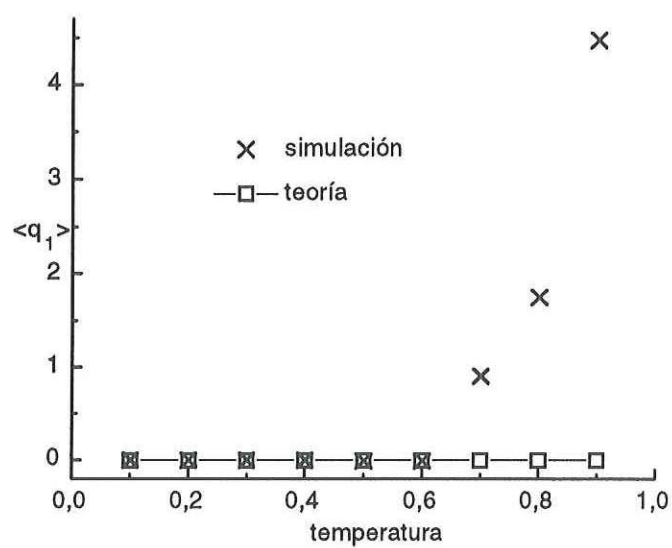


Figura 7(a). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 5\,000$, $K_0 = 1.583919$. Ecuación (214).

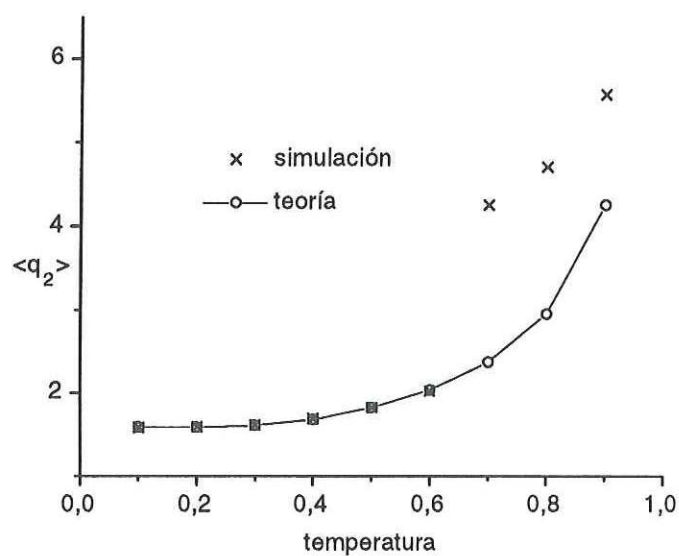


Figura 7(b). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 5\,000$, $K_0 = 1.583919$. Ecuación (214).

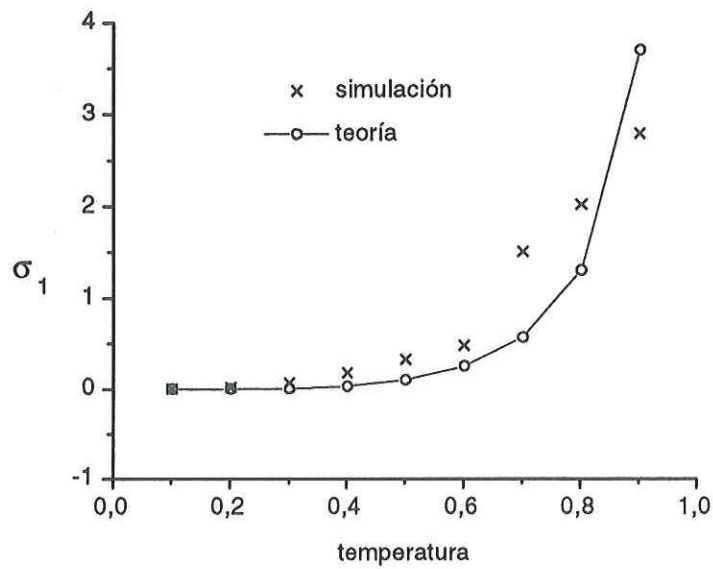


Figura 8(a). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 5\,000$, $K_0 = 1.583919$. Ecuación (214-217).

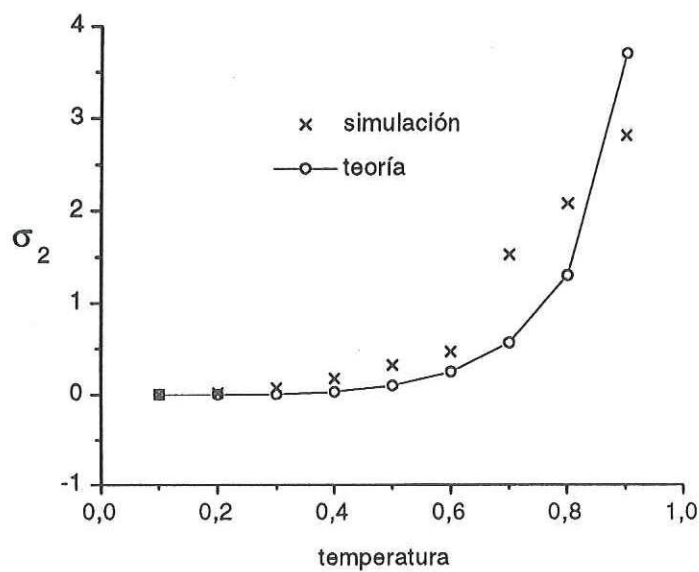


Figura 8(b). Estados en equilibrio de redes con dos patrones almacenados mediante la regla de Hebb. $N = 5\,000$, $K_0 = 1.583919$. Ecuación (214-218).

V.7.3 Discusión de resultados

Los resultados para $N = 1\,000$ neuronas muestran que la predicción teórica para las fluctuaciones medias, $\langle q_\mu \rangle(t)$, $\mu = 1, 2$, y las simulaciones correspondientes, coinciden en forma excelente en el intervalo $0.1 \leq T \leq 0.4$. En el caso de las desviaciones estándar el acuerdo es muy bueno en el intervalo $0.1 \leq T \leq 0.3$.

Para redes con $N = 5\,000$ neuronas la concordancia es superior, pues la teoría y el experimento computacional coinciden en el intervalo $0.1 \leq T \leq 0.6$ para las fluctuaciones medias. Sin embargo la mejoría en las desviaciones estándar no es muy significativa.

Hay dos aspectos que afectan la precisión de nuestra teoría: 1) la disminución del número de neuronas en la red, y 2) el aumento de la temperatura. Estos resultados son de esperarse debido a que en ambos casos la magnitud del ruido se incrementa y entonces la descripción a base de procesos de Ornstein-Uhlenbeck adolece de fallas porque descansa sobre la hipótesis de que el ruido es relativamente pequeño. Entonces la descomposición (113) empieza a ser insuficiente.

VI. Aplicación a memorias asociativas II. Ejemplos de la relajación hacia el equilibrio.

VI.1 Introducción

En este capítulo consideramos nuevamente las redes finitas que evolucionan hacia estados de equilibrio. Ahora nuestro propósito es ejemplificar cómo evolucionan las fluctuaciones en el proceso de relajación hacia la recuperación de una memoria almacenada. Los sistemas seleccionados son dos: 1) redes de Hebb operando a temperatura cero, cuya sencillez permite encontrar soluciones analíticas, y 2) estados puros funcionando a temperaturas intermedias, cuyas ecuaciones necesitan ser resueltas por métodos numéricos. Describiremos la estrategia que fué utilizada para resolverlas y obtener tanto las fluctuaciones medias, $\langle q_\mu \rangle(t)$, como las desviaciones estándar, $\sigma_\mu(t)$. Entonces compararemos las curvas teóricas obtenidas con las que resultan de las simulaciones.

VI.2 Evolución de las fluctuaciones medias a $T = 0$.

Consideraremos una red con dos patrones almacenados utilizando la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en la regla de almacenamiento y estudiaremos el caso simple en que el estado macroscópico de ésta toma sus condiciones iniciales en la cuenca del punto fijo $(m_\beta, 0)$. Entonces se cumple que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh \beta \vec{\xi} \cdot Am_t^* = \text{sign} \left(\vec{\xi} \cdot Am_t^* \right), \quad (223)$$

y los parámetros de orden del sistema finito toman la siguiente expresión:

$$m_{\mu}(t) = \delta_{\mu 1} \text{sign}(m_1^0) \{1 - (|m_1^0| e^{-t})\} + \frac{q_{\mu}(t)}{\sqrt{N}}. \quad (224)$$

La matriz de convección es simplemente $L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ y la matriz exponencial es:

$$\{\exp(-Lt)\}_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-L)^k = \delta_{\mu\nu} \exp(-t). \quad (225)$$

Párrafos más adelante explicaremos cuáles cuidados debemos tener para evitar transiciones entre cuencas contiguas de los patrones almacenados, por el momento sólo supondremos que existe un patrón condensado (digamos el primero) y que el estado de la red evoluciona solamente dentro de su cuenca. Cuando las condiciones iniciales son de la forma $\vec{m}(0) = (m_1^0, m_2^0)$, los elementos de matriz son de la forma siguiente. Entonces la matriz de difusión toma la siguiente forma:

$$D_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} (1 - |m_1^0|) \exp(-t) - (1 - \delta_{\mu\nu}) |m_2^0| \exp(-t). \quad (226)$$

El término de corrección finita congelada es $\vec{K}(t) = -\frac{K_0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Las soluciones a las ecuaciones de los momentos estadísticos son:

$$\langle q_1 \rangle(t) = \langle q_1 \rangle(0) \exp(-t) \quad , \quad \langle q_2 \rangle(t) = \langle q_2 \rangle(0) \exp(-t) + K_0 (1 - \exp(-t)) \quad (227)$$

Las expresiones para los segundos momentos estadísticos son más extensas, de modo que solamente incluiremos las que corresponden a las varianzas:

$$\Xi_{11}(t) = \Xi_{22}(t) = \Xi_{11}(0) \exp(-2t) + 2(m_1^0 - 1)(\exp(-2t) - \exp(-t)). \quad (228)$$

Estas redes las estudiaremos de nuevo al tocar el fenómeno de escape de una cuenca a otra contigua. Ahora nos interesa analizar la situación en que el estado macroscópico de la red se mantiene atrapado en una de ellas, pero para discriminar entre ambos tipos de fenómenos es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- La expresión que será obtenida en el octavo capítulo, (314), indica que para constante congelada $K_0 > 0$ la probabilidad de escape de un atractor a otro es cero, mientras que para $K_0 < 0$ la red puede escapar de su atractor con probabilidad igual a 1 en un tiempo dado por la fórmula (315).
- La experiencia con las simulaciones demuestra que, aún cuando K_0 es positivo pero muy cercano a cero, al realizar hasta 200 realizaciones en la cuenca del atractor $(m_\beta, 0)$, ocurre una cantidad pequeña de escapes a la cuenca del atractor $(0, -m_\beta)$. Este fenómeno se presenta, por ejemplo, si $K_0 \sim 0.16$.

La teoría que se desarrolla en el octavo capítulo para el tiempo de escape permite obtener una fórmula para escapes que ocurren con probabilidad 1, pero no incluye los escapes que ocurren con probabilidad menor a la unidad. En consecuencia, si queremos estudiar la evolución temporal de las fluctuaciones desde determinadas condiciones iniciales hasta que la red alcanza un estado de equilibrio, es necesario trabajar con redes cuyos patrones almacenados den lugar a constantes congeladas suficientemente grandes. En el caso que nos ocupa fue suficiente imponer la condición de que la constante congelada sea superior a la unidad.

VI.2.1 Comparación con las simulaciones. Evolución temporal a $T = 0$.

Para confrontar la predicción teórica con el experimento se realizaron 200 realizaciones en la cuenca del atractor $(m_\beta, 0)$ con el algoritmo directo y grabando desde $t = 0$ hasta $t = 8$, cada $\Delta t = 0.1$. Los resultados indicaron que en ese tiempo la red alcanzaba el equilibrio. Se utilizó una red con $N = 1\,000$ neuronas. Se llevaron a cabo estudios con $N = 5\,000$ y $N = 10\,000$ neuronas. Sin embargo los resultados fueron esencialmente los mismos, por

cuyo motivo solamente presentamos los primeros de ellos.

Enseguida se llevó a cabo un análisis estadístico para cada uno de los instantes en los cuales se registraron los valores de las traslapes. Los resultados para las fluctuaciones medias se presentan en las figuras 9(a) y 9(b). Para las desviaciones estándar se encuentran en la figura 10:

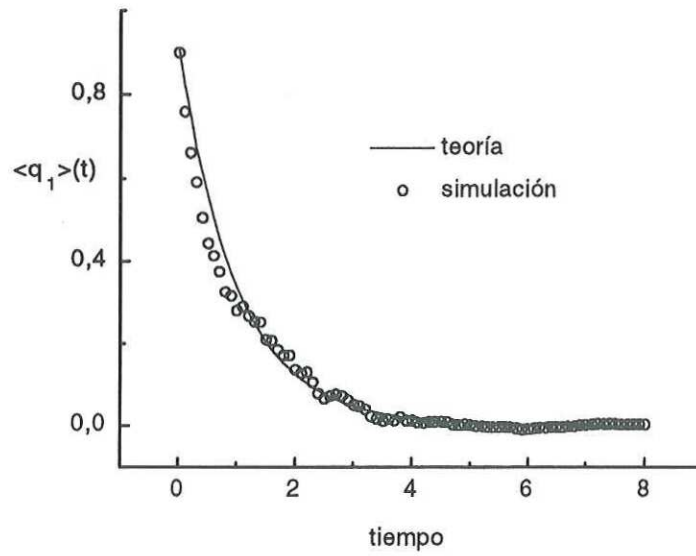


Figura 9(a). Evolución temporal de las fluctuaciones medias a $T = 0$. Cuenca de $(m(T), 0)$. $N = 1\,000$, $K_0 = 1.264911$. Ecuación (227).

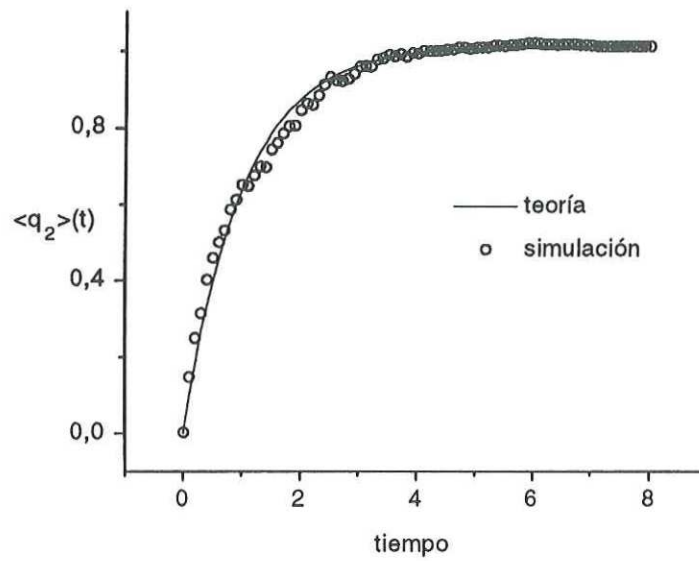


Figura 9(b). Evolución temporal de las fluctuaciones medias a $T = 0$. Cuenca de $(m(T), 0)$. $N = 1\,000$, $K_0 = 1.264911$. Ecuación (227).

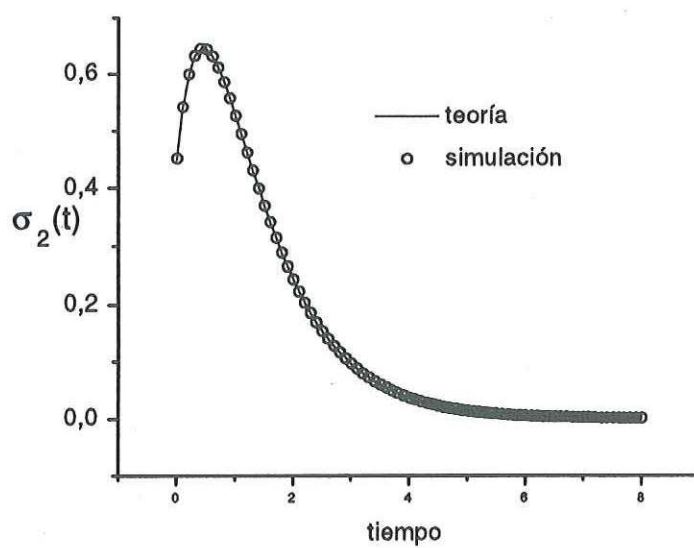


Figura 10. Redes de Hebb operando a $T = 0$, $N = 1000$, $p = 2$, $K_0 = 1.264911$.

VI.2.2 Conclusión

Las gráficas indican que la evolución temporal predicha por la teoría para las fluctuaciones medias y para las varianzas se encuentra en buen acuerdo con las simulaciones.

VI.3 La dinámica de los estados puros

En este capítulo consideraremos de nuevo los estados puros para poner atención a la dinámica de las redes. La matriz de interacción que define esta clase de sistemas es $A_{\mu\nu} = w_{\mu}\delta_{\mu\nu}$ con $0 < w_{\mu} < 1$. El estado inicial de la red se genera conforme a la distribución de probabilidad escrita en (204), tal que se obtiene la siguiente condición inicial macroscópica: $m_{\mu}^{*}(0) = m_1^0\delta_{\mu 1}$, en tanto que el resto de los patrones almacenados tienen traslapes microscópicos con el estado $\vec{\sigma}(t)$ de la red. Las ecuaciones de campo promedio que describen la evolución temporal del patrón condensado están dadas por (202) y el punto fijo es solución de (203).

Las condiciones iniciales $q_{\mu}(0)$ se distribuyen al azar como resultado de la regla de generación del estado microscópico dada en (204) y su media se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \langle q_{\mu}(0) \rangle_{\sigma} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} [m_{\mu}(0) - m_{\mu}^{*}(0)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \sigma_i(0) - m_{\mu}^{*}(0) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} [\sigma_i(0) - \sigma_i^0] P[\sigma_i(0)] \right\} = m_1^0 K_{\mu}^0 (1 - \delta_{\mu 1}). \end{aligned} \quad (229)$$

Los coeficientes de la ecuación de Fokker-Planck toman la forma dada en (205-207).

En el capítulo anterior presentamos la solución formal a las ecuaciones diferenciales que satisfacen $\langle q_{\mu} \rangle(t)$ y $\Xi_{\mu\nu}(t)$. Ahora abordaremos la solución numérica directa a la ecuación diferencial para el primer momento estadístico:

$$\frac{d}{dt}y(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad (230)$$

tal que para $y(t) = \frac{\langle q_{\mu} \rangle(t)}{K_{1\mu}}$ tenemos

$$a(t) = 1 - \beta w_\mu \{1 - \tanh^2 [\beta w_1 m_1^*(t)]\} \quad , \quad b(t) = -(1 - \delta_{\mu 1}) \tanh [\beta w_1 m_1^*(t)] \quad (231)$$

Nótese que $a(t)$ es definida positiva y que para $t \rightarrow \infty$ alcanzan un valor fijo, de donde resulta que las fluctuaciones medias tienden a un límite finito, dado por

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t b(s) \exp \left[\int_0^s a(s') ds' - \int_0^t a(s) ds \right] ds. \quad (232)$$

Esto es lo que llamamos amortiguamiento de las fluctuaciones. Significa que cuando se recupera un patrón almacenado, permanece un número de caracteres de la misma que no son totalmente recuperados, dando lugar a una fluctuación aleatoria cuyo promedio no cambia con el tiempo. Es decir, la recuperación no se mejora más, pero tampoco empeora.

VI.4 Evolución temporal de las fluctuaciones medias. Solución numérica.

Para resolver las ecuaciones (230) se hizo uso de la siguiente estrategia:

- (1) Se resolvió numéricamente la ecuación

$$\frac{d}{dt} m_1^*(t) = -m_1^*(t) + \tanh [\beta w_1 m_1^*(t)], \quad (233)$$

con la condición inicial $m_1^0 = 0.9$, en el intervalo $t \in [0, 10]$, para las temperaturas $0.1 \leq T \leq 0.7$. El algoritmo utilizado fué un Runge-Kutta de cuarto orden. El tamaño de paso para desarrollar la iteración fué $h = 0.05$ de modo que se obtuvo una lista de 201 números.

- (2) A esta lista numérica que aproxima a la función $m_1^*(t)$ le fueron calculadas las funciones $\tanh [\beta w_1 m_1^*(t)]$ y $\tanh^2 [\beta w_1 m_1^*(t)]$.
- (3) Se obtuvo una representación analítica para estas listas numéricas. El procedimiento consistió en tomar sus valores para $t = 0, 1, \dots, 10$ y ajustarles la siguiente función mediante una aproximación con la técnica de mínimos cuadrados:

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + c_6 t^6 + c_7 e^t. \quad (234)$$

- (4) Usando estas representaciones analíticas se calculó la integral $\int_0^t e^s \tanh [\beta w_1 m_1^*(s)] ds$ para los tiempos $t = kh$, con $k = 0, 1, \dots, 201$ y se calculó la función $D(t)$ como una lista numérica.
- (5) Enseguida se utilizó la misma técnica y la misma representación funcional para obtener una representación analítica para $D(t)$.
- (6) La ecuación diferencial para $\langle q_1 \rangle(t)$ no tiene término perturbador y además la condición inicial $\langle q_1 \rangle(0)$ es cero, de donde resulta que esta función es idénticamente cero para toda t . En cambio las ecuaciones para $\langle q_2 \rangle(t)$ y $\langle q_3 \rangle(t)$ necesitan ser resueltas, lo cual fué llevado a cabo con las condiciones iniciales mencionadas arriba y con los siguientes valores de las constantes de corrección congelada:

$$K_{1\nu} = \begin{cases} 1.583919 & \text{si } \nu = 2 \\ -1.301077 & \text{si } \nu = 3 \end{cases}.$$

VI.5 Confrontación de teoría y experimento para la evolución temporal de las fluctuaciones medias.

Para confrontar teoría y experimento en la evolución temporal de las fluctuaciones medias desde un estado inicial hasta alcanzar el equilibrio se siguió el mismo procedimiento descrito en la sección anterior. El intervalo de tiempo utilizado fué $0 \leq t \leq 10$ y se simularon redes con $N = 5\,000$ neuronas.

Con el propósito de comparar con las simulaciones en el próximo capítulo estudiaremos la evolución temporal de estos sistemas para el caso de tres patrones almacenados, $p = 3$, y resolveremos las ecuaciones correspondientes por métodos numéricos. En esta sección presentamos los resultados obtenidos en equilibrio para redes con $N = 5\,000$ neuronas, operando a temperaturas, $0.1 \leq T \leq 0.7$ y tres patrones almacenados con pesos iguales: $w_\mu = 1$, $\mu = 1, 2, 3$. Para comparar la predicción teórica con el experimento computacional se simulon redes con tres patrones almacenados $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3$, con condiciones iniciales $m_1^0 = 0.9$, $m_{\mu>1}^0 = 0$ y grabando resultados al tiempo $t = 10$. Las simulaciones fueron realizadas me-

diente programas escritos en fortran 77 en una computadora ALPHA STATION. Se llevaron a cabo $n = 200$ realizaciones sobre la base de que el error de muestreo disminuye como $\frac{1}{n}$ y de que una revisión de la gráfica de la función $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ indica que después del valor seleccionado el mejoramiento de la precisión es muy poco si se compara con el esfuerzo de cómputo.

Una vez obtenidas las realizaciones se aplicó un análisis estadístico que fué llevado a cabo en una computadora personal con procesador 486 de 100 megahertz y utilizando el software MATHEMATICA. Una variante de utilidad en este problema fué que al trabajar con la variable $\frac{(q\mu)(t)}{K_0}$, fué posible aislar el efecto de la temperatura sobre las fluctuaciones medias. Los resultados se presentan en las gráficas 11(a)-17(b):

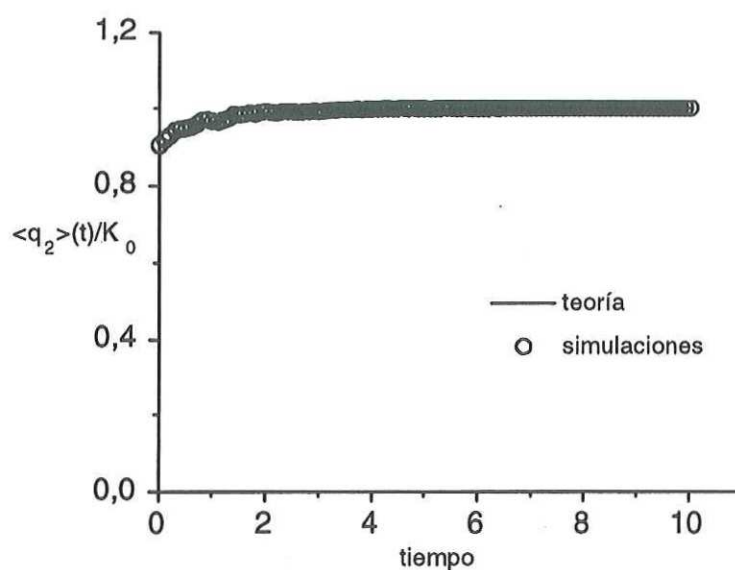


Figura 11(a). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.1$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

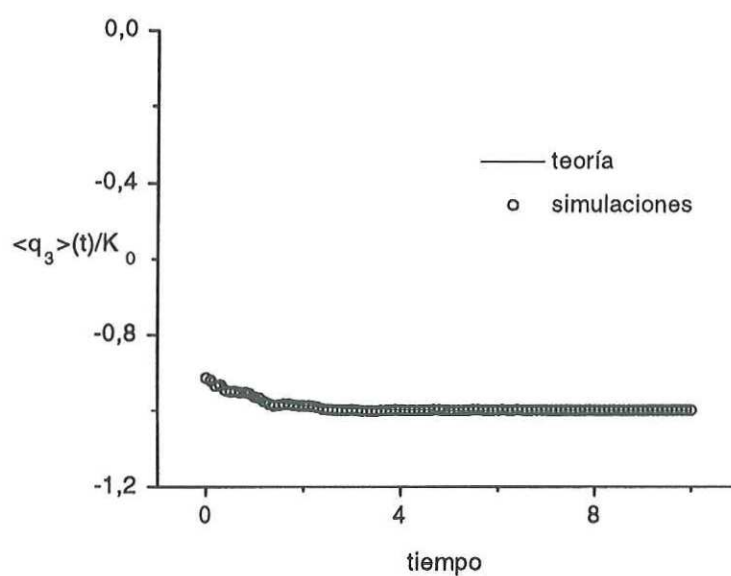


Figura 11(b). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.1$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

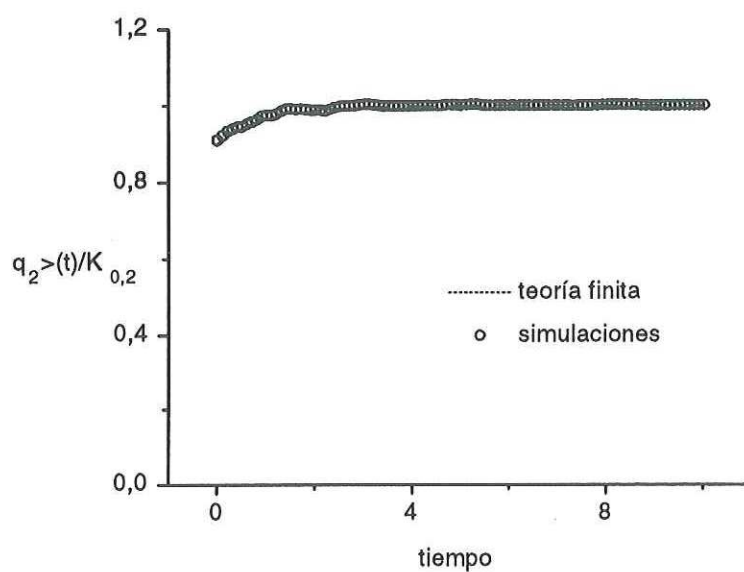


Figura 12(a). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.2$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

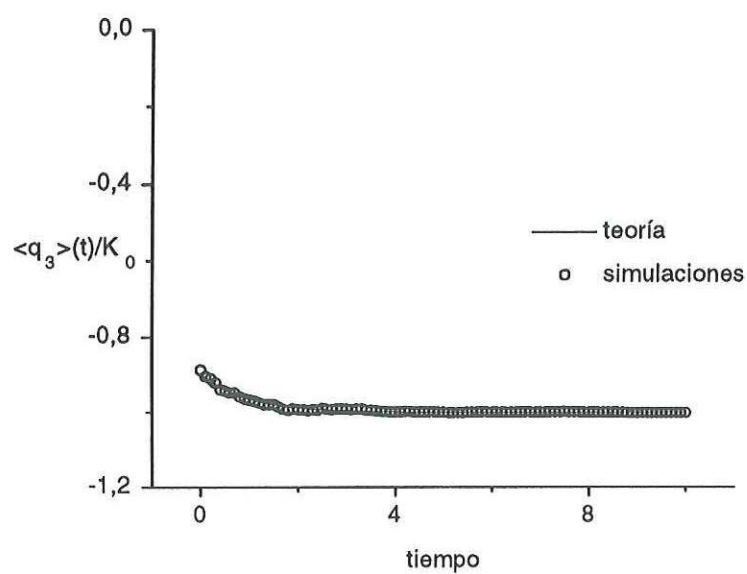


Figura 12(b). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.2$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

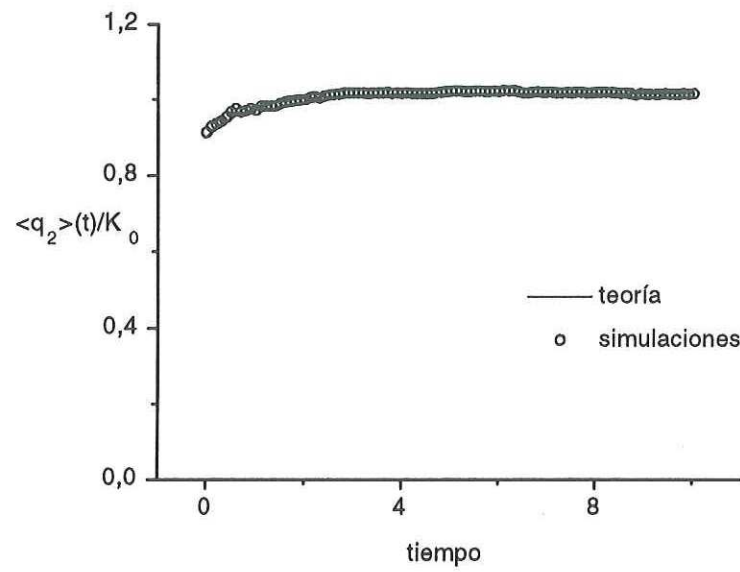


Figura 13(a). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.3$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

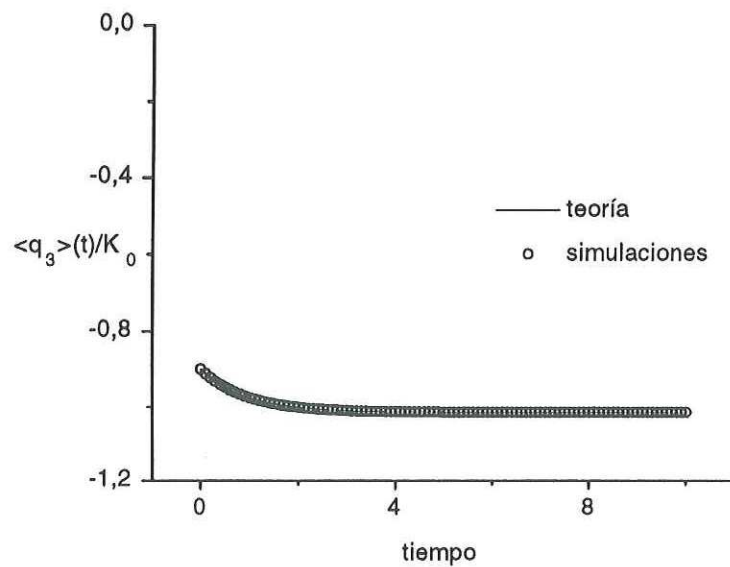


Figura 13(b). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.3$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

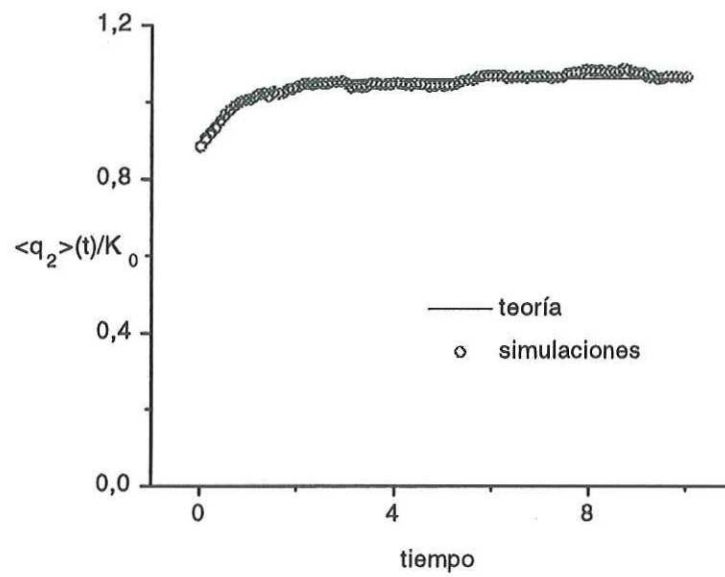


Figura 14(a). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.4$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

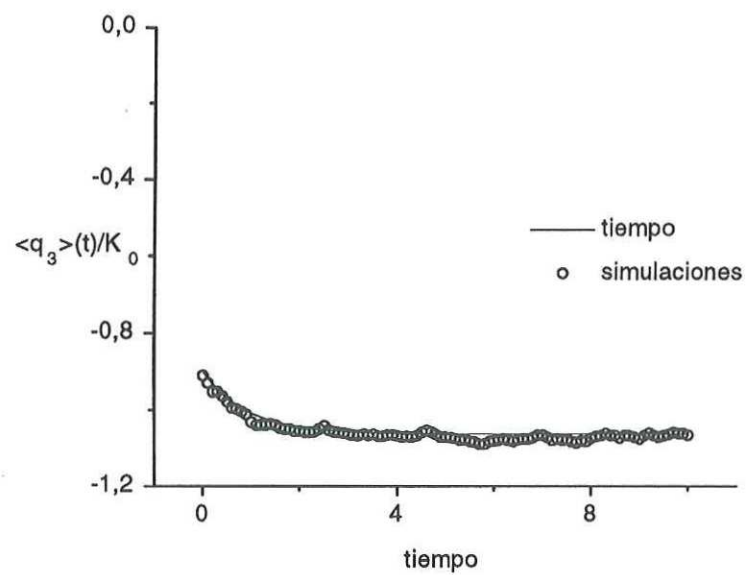


Figura 14(b). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.4$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

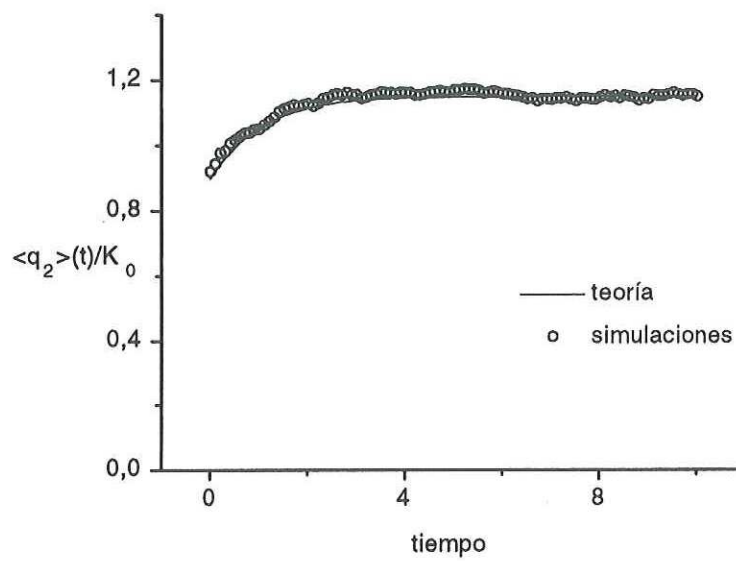


Figura 15(a). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.5$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

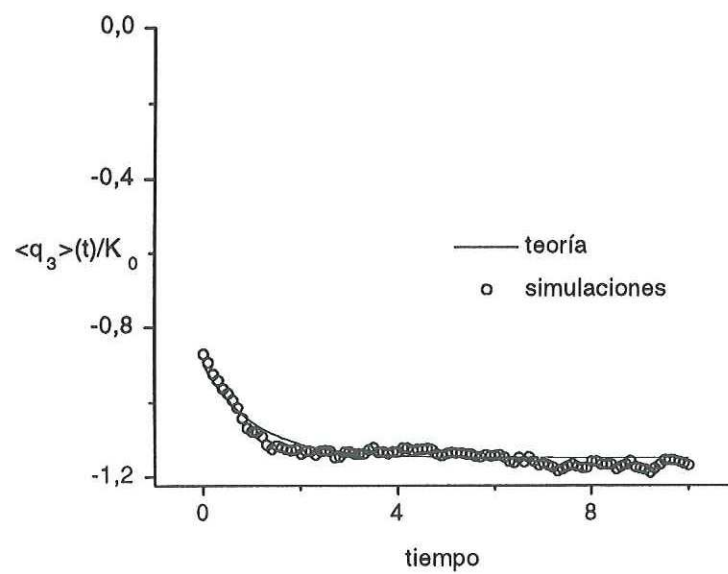


Figura 15(b). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.5$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

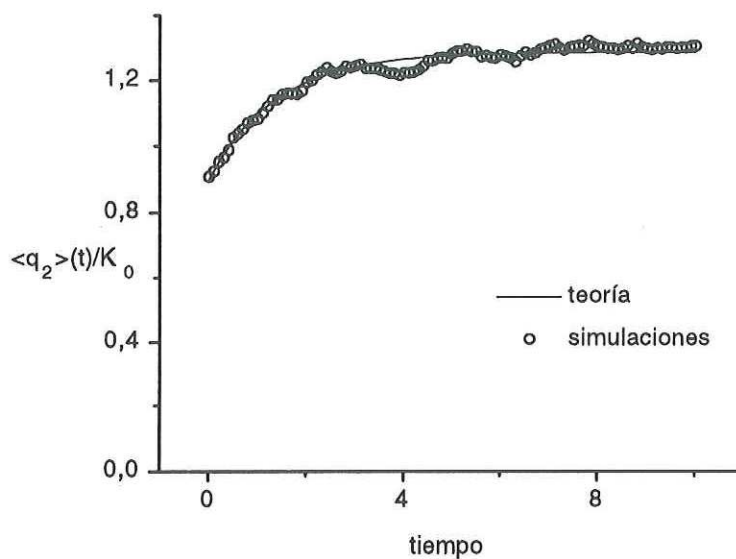


Figura 16(a). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.6$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

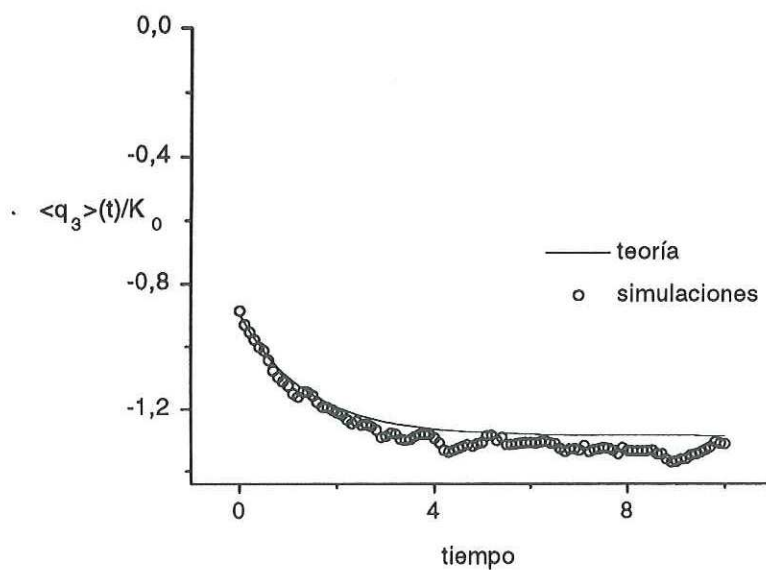


Figura 16(b). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.6$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

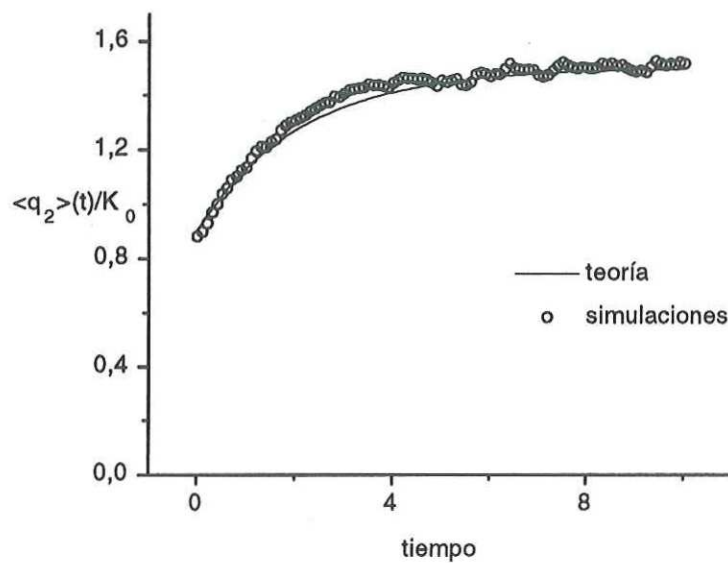


Figura 17(a). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.7$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

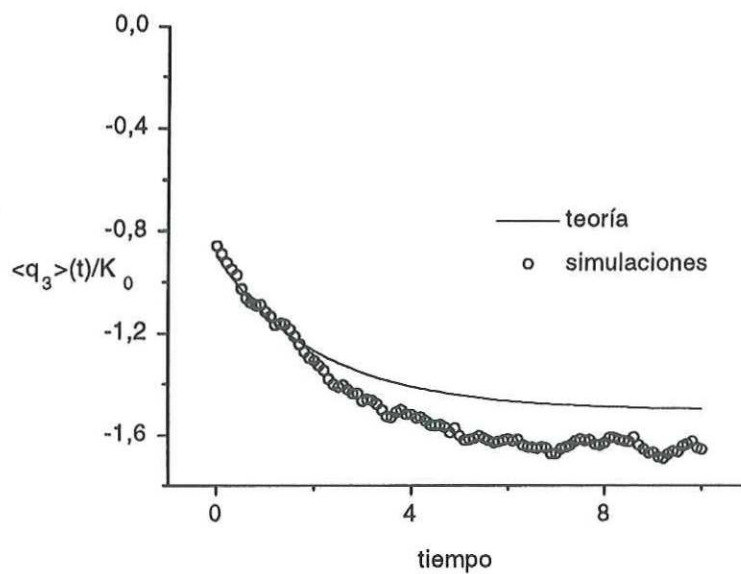


Figura 17(b). Estados puros. $N = 5\,000$, $T = 0.7$, $p = 3$, 200 realizaciones. Evolución temporal de los primeros momentos estadísticos. Solución numérica de la ecuación (230).

VI.6 Evolución temporal de las desviaciones estándar para estados puros

Las ecuaciones para las correlaciones centradas que fueron obtenidas en el cuarto capítulo son las siguientes:

$$\frac{d}{dt}\Xi_{\mu\nu}(t) + \sum_{\gamma=1}^p L_{\mu\gamma}(t)\Xi_{\gamma\nu}(t) + \sum_{\gamma=1}^p \Xi_{\mu\gamma}(t)L_{\gamma\nu}^T(t) = 2D_{\mu\nu}(t). \quad (235)$$

Utilizando las expresiones (205), (206) y (207) introducidas en el quinto capítulo para estados puros se simplifica la ecuación anterior para quedar como sigue:

$$\frac{d}{dt}\Xi_{\mu\nu}(t) + (l_{\mu}(t) + l_{\nu}(t))\Xi_{\mu\nu}(t) = 2d(t)\delta_{\mu\nu}, \quad (236)$$

con

$$l_{\mu}(t) = 1 - \beta w_{\mu} [1 - \tanh^2 \beta [w_1 m^*(t)]]$$

$$d(t) = 1 - \tanh \beta [w_1 m^*(t)] \left\{ m(0) e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} \tanh \beta [w_1 m^*(s)] ds \right\}$$

Las ecuaciones específicas que nos interesa resolver se obtienen haciendo $\mu = \nu = 1, 2, \dots$, cuando todos los pesos son iguales tenemos redes de Hebb. Entonces se trata de la misma ecuación diferencial para todas las desviaciones estándar. Nuestro propósito es resolver (236)

numéricamente utilizando la misma estrategia que fué trazada al iniciar este capítulo, con el trabajo adicional que consiste en calcular la integral que aparece en la función $d(t)$. En este caso se parametrizó el integrando $e^{s-t} \tanh \beta [w_1 m^*(s)]$ para integrar numéricamente una expresión analítica. Los coeficientes $l_{\mu}(t)$ y $d(t)$ fueron representados analíticamente también y la ecuación diferencial fué resuelta mediante un algoritmo Runge-Kutta de cuarto

para integrar numéricamente una expresión analítica. Los coeficientes $l_{\mu}(t)$ y $d(t)$ fueron representados analíticamente también y la ecuación diferencial fué resuelta mediante un algoritmo Runge-Kutta de cuarto orden con 200 iteraciones y parámetro de paso $h = 0.05$. Los resultados se grafican enseguida junto con las desviaciones estándar de las simulaciones que se indican:

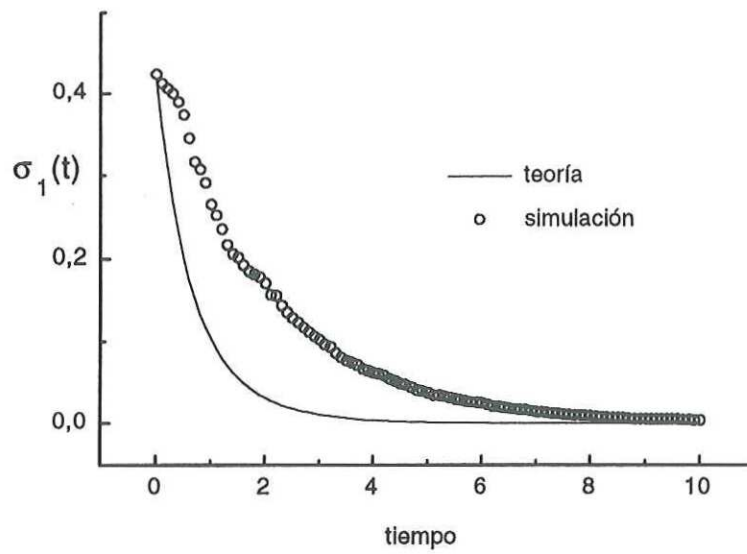


Figura 19 (a). Estados puros, $N = 10\,000$, $T = 0.1$, $p = 2$, $K_0 = 0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236).

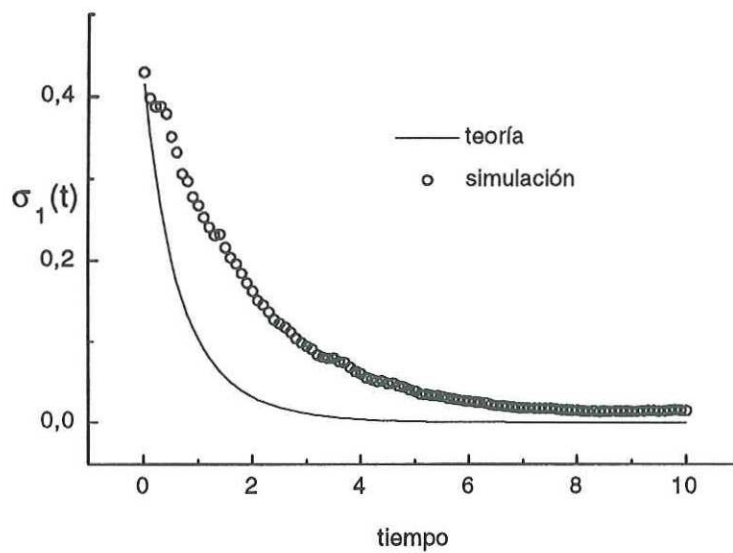


Figura 19 (b). Estados puros, $N = 10\,000$, $T = 0.2$, $p = 2$, $K_0 = 0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236).

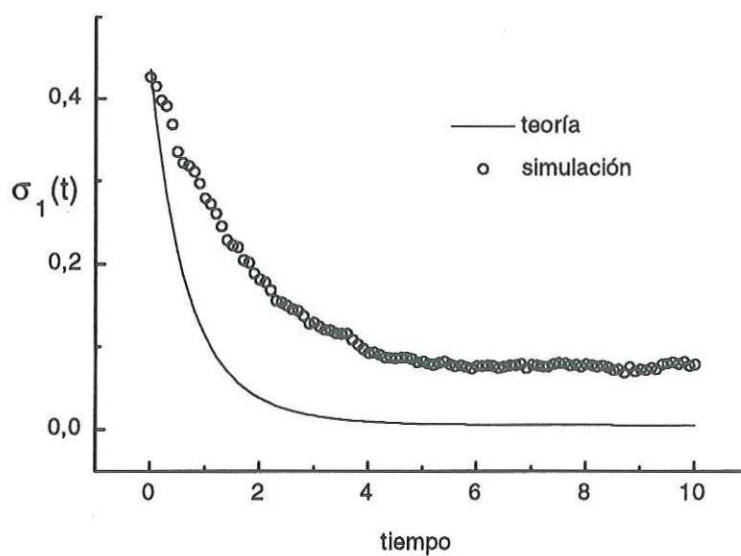


Figura 20 (a). Estados puros, $N = 10\,000$, $T = 0.3$, $p = 2$, $K_0 = 0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236).

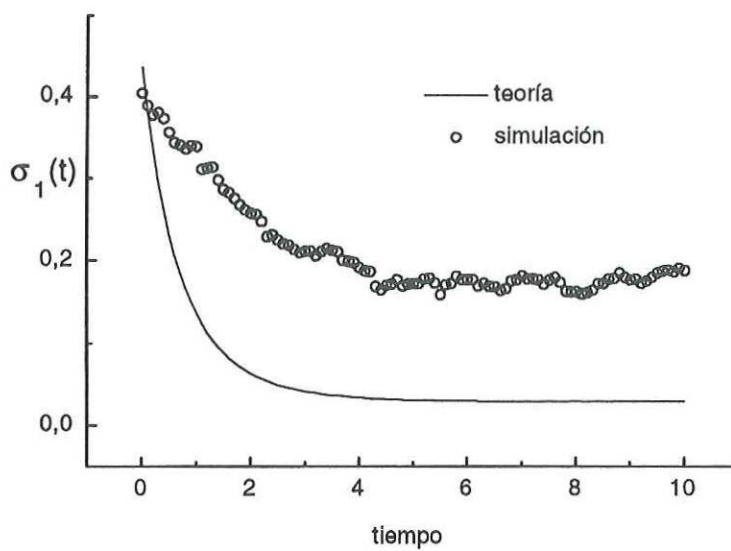


Figura 20(b). Estados puros, $N = 10\,000$, $T = 0.4$, $p = 2$, $K_0 = 0.16$, 200 realizaciones. Evolución temporal de las desviaciones estándar. Solución numérica de la ecuación (236).

VI.7 Discusión

En este capítulo hemos discutido la estrategia utilizada para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de las fluctuaciones medias, $\langle q_\mu \rangle(t)$, y de las desviaciones estándar, $\sigma_\mu(t)$, para un sistema consistente en redes almacenando patrones conforme a la regla de Hebb y evolucionando en el tiempo en el régimen de un patrón condensado. Las gráficas que hemos presentado en este capítulo permiten comparar nuestra teoría con las simulaciones de redes almacenando tres y dos patrones. Los resultados indican que el acuerdo entre la predicción teórica y la simulación en computadora es excelente para las fluctuaciones medias, $\langle q_\mu \rangle(t)$, en el intervalo de temperaturas $0 \leq T \leq 0.3$ para redes con $N = 5\,000$ neuronas. La calidad de la predicción teórica se mantiene hasta temperaturas del orden de $T \sim 0.6$. Aunque para los segundos momentos estadísticos se desarrollaron simulaciones en redes con $N = 10^4$ neuronas, encontramos que en el caso de las desviaciones estándar la predicción teórica no alcanza la misma calidad que en las fluctuaciones medias, pues este descriptor estadístico es siempre mayor en la simulación. El acuerdo no es perfecto cuantitativamente pero la conducta cualitativa y los órdenes de magnitud predichos son correctos.

VII. Estados fuera de equilibrio I. Atractor sin balance detallado.

VII.1 Introducción

Ahora analizaremos un problema esencialmente distinto de los tratados en los dos capítulos anteriores. Consiste en que teniendo la red infinita un mismo estado macroscópico atractor, los efectos de tamaño finito nos presentan dos estados cuyas fluctuaciones tienen propiedades estadísticas distintas: *i*) una en la cual se cumple el balance detallado y *ii*) otra en la que éste no existe.

En el caso en el que se cumple el balance detallado tenemos un punto fijo del tipo de los estados de equilibrio de las redes de Hebb, con un flujo medio $\langle \vec{F} \rangle$ cuyo rotacional es cero. En cambio, en el caso en el cual no se cumple el balance detallado tenemos el mismo punto fijo pero con rotacional del flujo medio diferente de cero.

El sistema a considerar es una red neuronal finita con dos patrones almacenados mediante una matriz de interacción $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en la vecindad del estado $\vec{m}_{est} = (m(T), 0)$, que actúa como estado atractor cuando $\varepsilon = 0$.

El flujo medio es

$$\langle \vec{F} \rangle = \begin{pmatrix} \langle F_1 \rangle \\ \langle F_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}\langle q_1 \rangle + L_{12}\langle q_2 \rangle \\ L_{21}\langle q_1 \rangle + L_{22}\langle q_2 \rangle - K_2 \end{pmatrix}$$

y la magnitud de su rotacional es

$$|rot\langle \vec{F} \rangle| = \frac{\partial \langle F_2 \rangle}{\partial \langle q_1 \rangle} - \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial \langle q_2 \rangle} = L_{21} - L_{12}, \quad (237)$$

pero la matriz de convección en este caso tiene la forma que sigue:

$$L = \begin{pmatrix} 1 - \beta + \beta \tanh^2(\beta m(T)) & -\beta \varepsilon (1 - \tanh^2(\beta m(T))) \\ 0 & 1 - \beta + \beta \tanh^2(\beta m(T)) \end{pmatrix}, \quad (238)$$

de donde resulta que $|\text{rot}(\vec{F})|$ es lineal en ε . En consecuencia, cuando el parámetro ε toma valores distintos de cero se rompe la simetría de la matriz A y aparece el flujo medio rotacional, así como el rompimiento del balance detallado, con propiedades estadísticas distintas que habremos de calcular.

Primero demostraremos que el estado $(m(T), 0)$ es efectivamente un punto fijo estable de las ecuaciones de campo promedio, enseguida calcularemos los primeros y segundos momentos estadísticos de las fluctuaciones en este estado estacionario y posteriormente compararemos nuestros resultados teóricos con las simulaciones.

VII.1.1 La región de estabilidad del modelo

A continuación veremos cuál es la condición que debe cumplir el parámetro de asimetría ε para que el estado $\vec{m}_\infty = (m(T), 0)$ sea un punto estable de las ecuaciones de campo promedio. Consideraremos las ecuaciones que describen la conducta del vector de traslapes, $\vec{m}_t^*$:

$$\frac{d}{dt}m_1^*(t) = -m_1^*(t) + \langle \xi_1 \tanh \beta [\xi_1 (m_1^*(t) + \varepsilon m_2^*(t)) + \xi_2 m_2^*(t)] \rangle \xi, \quad (239)$$

$$\frac{d}{dt}m_2^*(t) = -m_2^*(t) + \langle \xi_2 \tanh \beta [\xi_1 (m_1^*(t) + \varepsilon m_2^*(t)) + \xi_2 m_2^*(t)] \rangle \xi. \quad (240)$$

Desarrollando los autopromedios resulta:

$$\frac{d}{dt}m_1^*(t) = -m_1^*(t) + \frac{1}{2} \{ \tanh \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon + 1) m_2^*(t)] + \tanh \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon - 1) m_2^*(t)] \}, \quad (241)$$

$$\frac{d}{dt}m_2^*(t) = -m_2^*(t) + \frac{1}{2} \{ \tanh \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon + 1) m_2^*(t)]$$

$$- \tanh \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon - 1) m_2^*(t)] \}. \quad (242)$$

Para encontrar las ecuaciones que describen la conducta de la red en la vecindad $(m(T), 0) + (\delta m_1^*(t), \delta m_2^*(t))$ basta hacer una variación de las ecuaciones anteriores respecto a ambas variables, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta m_1^*(t) &= -\delta m_1^*(t) \\ &+ \frac{\beta}{2} \{ 1 - \tanh^2 \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon + 1) m_2^*(t)] \} |_{\vec{m}_{est}} [\delta m_1^*(t) + (\varepsilon + 1) \delta m_2^*(t)] \\ &+ \frac{\beta}{2} \{ 1 - \tanh^2 \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon - 1) m_2^*(t)] \} |_{\vec{m}_{est}} [\delta m_1^*(t) + (\varepsilon - 1) \delta m_2^*(t)], \end{aligned} \quad (243)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta m_2^*(t) &= -\delta m_2^*(t) \\ &+ \frac{\beta}{2} \{ 1 - \tanh^2 \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon + 1) m_2^*(t)] \} |_{\vec{m}_{est}} [\delta m_1^*(t) + (\varepsilon + 1) \delta m_2^*(t)] \\ &- \frac{\beta}{2} \{ 1 - \tanh^2 \beta [m_1^*(t) + (\varepsilon - 1) m_2^*(t)] \} |_{\vec{m}_{est}} [\delta m_1^*(t) + (\varepsilon - 1) \delta m_2^*(t)], \end{aligned} \quad (244)$$

en la vecindad de $\vec{m}_{est}$ resulta lo que sigue:

$$\frac{d}{dt}\delta m_1^*(t) = -\delta m_1^*(t) + \beta B_0 [\delta m_1^*(t) + \varepsilon \delta m_2^*(t)] \quad , \quad \frac{d}{dt}\delta m_2^*(t) = -\delta m_2^*(t) + \beta B_0 \delta m_2^*(t) \quad , \quad (245)$$

donde $B_0 = 1 - \tanh^2 \beta m(T)$. En notación matricial resulta

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta m_1^*(t) \\ \delta m_2^*(t) \end{pmatrix} = \beta B_0 \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta m_1^*(t) \\ \delta m_2^*(t) \end{pmatrix}. \quad (246)$$

Para buscar la estabilidad local en $\vec{m}_{est}$ se impone la condición $\frac{d}{dt} |\delta \vec{m}_t^*|^2 < 0$ para toda $\delta \vec{m}_t^* = (\delta m_1^*(t), \delta m_2^*(t))$, que equivale a $\delta \vec{m}_t^* \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{m}_t^* < 0$ de modo que desarrollando el producto interior con base en la ecuación (246) resulta, luego de un reacomodo sencillo:

$$\frac{\beta B_0 [(\delta m_1^*(t))^2 + (\delta m_2^*(t))^2 + \varepsilon \delta m_1^*(t) \delta m_2^*(t)]}{(\delta m_1^*(t))^2 + (\delta m_2^*(t))^2} < 1. \quad (247)$$

Pero la expresión entre corchetes en el numerador se puede escribir como una forma cuadrática,

sea la matriz $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & 1 \end{pmatrix}$, entonces (247) se reescribe como

$$\beta B_0 \frac{\delta \vec{m}_t^* \cdot \Omega \delta \vec{m}_t^*}{|\delta \vec{m}_t^*|^2} < 1. \quad (248)$$

La expresión $\delta \vec{m}_t^* \cdot \Omega \delta \vec{m}_t^*$ suele llamarse un polinomio cuadrático que denotaremos $Q(\vec{y})$ y tiene la propiedad de que siempre existe una base ortonormal tal que el polinomio cuadrático se puede escribir como sigue (R. Williamson, 1973):

$$Q(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

donde las λ -s son eigenvalores de la matriz de la forma bilineal, en este caso de Ω . Buscando entonces los eigenvalores de Ω se obtiene:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \lambda_2 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad (249)$$

Desarrollando ahora la relación en la nueva base tenemos: $\delta \vec{m}_t^* \cdot \Omega_{diag} \delta \vec{m}_t^* = \lambda_1 [\delta m_1^*(t)]^2 + \lambda_2 [\delta m_2^*(t)]^2 < \lambda_{\max} ([\delta m_1^*(t)]^2 + [\delta m_2^*(t)]^2)$, de modo que regresando a la condición de estabilidad tenemos que de la relación:

$$\beta B_0 \frac{\delta \vec{m}_t^* \cdot \Omega_{diag} \delta \vec{m}_t^*}{|\delta \vec{m}_t^*|^2} < 1$$

se puede obtener la siguiente:

$$\beta B_0 \frac{\lambda_{\max} |\delta \vec{m}_t^*|^2}{|\delta \vec{m}_t^*|^2} = \beta B_0 \lambda_{\max} < 1,$$

tal que definiendo $\varepsilon_c(\beta)$ como aquel valor de ε para el cual se cumple que $\beta B_0 \lambda_{\max} = 1$, obtenemos :

$$\varepsilon_c(\beta) = 2 \left(\frac{1}{\beta (1 - \tanh^2 \beta m(T))} - 1 \right), \quad (250)$$

de donde resulta que para todo $\varepsilon < \varepsilon_c(\beta)$ se obtiene estabilidad de las ecuaciones macroscópicas en la vecindad de $\vec{m}_{est} = (m(T), 0)$. La gráfica del valor crítico de epsilon es la que sigue:

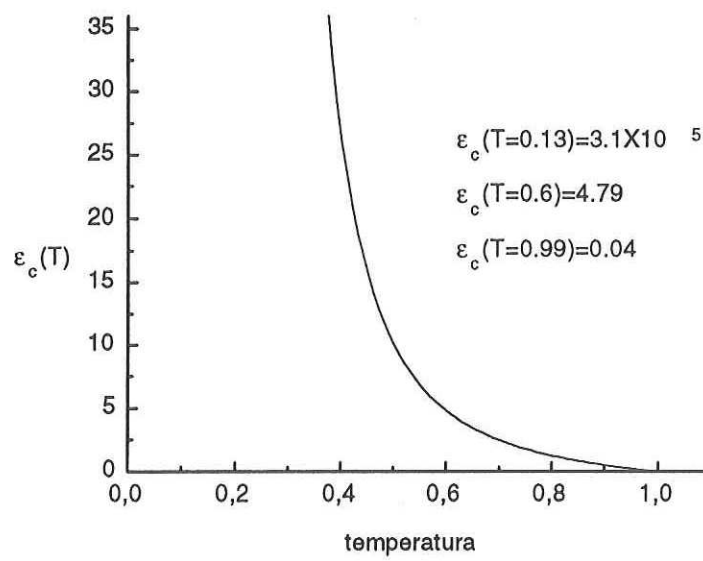


Figura 21. Valor crítico de ε en función de la temperatura.

VII.2 Las fluctuaciones en la región de estabilidad del modelo

La matriz L_{est} valuada en $\vec{m}_{est}$ está dada por (238). El término de corrección congelada es:

$$\vec{K}_{\infty} = (0, -K_0 \tanh(\beta m(T))) . \quad (251)$$

Muy cerca del punto $(m(T), 0)$ debe cumplirse que $\frac{d}{dt} \vec{m}_{est} = 0$, por consiguiente, se cumple que $m(T) = \tanh(\beta m(T))$, lo cual nos permite escribir los elementos de la matriz de convección como sigue:

$$L_{11} = 1 - \beta + \beta m^2(T) \quad , \quad L_{12} = -\beta \varepsilon (1 - m^2(T)) \quad , \quad L_{21} = 0 \quad , \quad L_{22} = 1 - \beta + \beta m^2(T) . \quad (252)$$

Resolviendo las siguientes ecuaciones algebraicas para la fluctuación promedio en el estado estacionario:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle q_1 \rangle_{\infty} \\ \langle q_2 \rangle_{\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K_0 m(T) \end{pmatrix} ,$$

encontramos las fluctuaciones promedio en equilibrio:

$$\langle q_1 \rangle_{\infty}(\beta, \varepsilon) = -\frac{L_{12}}{(L_{11})^2} K_0 m(T) = \frac{\beta \varepsilon (1 - m^2(T)) K_0 m(T)}{(1 - \beta + \beta m^2(T))^2} \quad , \quad \langle q_2 \rangle_{\infty}(\beta) = \frac{K_0 m(T)}{1 - \beta + \beta m^2(T)} . \quad (253)$$

La asimetría introducida en la interacción neuronal por el parámetro ε da como resultado la aparición de una fluctuación media distinta de cero en el traslape $m_1^{\infty}(\beta)$, mientras que la fluctuación media correspondiente al traslape $m_2^{\infty}(\beta)$, no resulta afectada.

La dependencia funcional respecto a la temperatura, y paramétrica respecto a ε , se anali-

za como sigue:

- Primero se calcula $m(T)$ mediante la solución de la ecuación $m = \tanh \beta m$, para los siguientes valores discretos de la temperatura $T = 0.01 * k, k = 1, \dots, 100$. La grafica que se obtiene aparece en la figura siguiente:

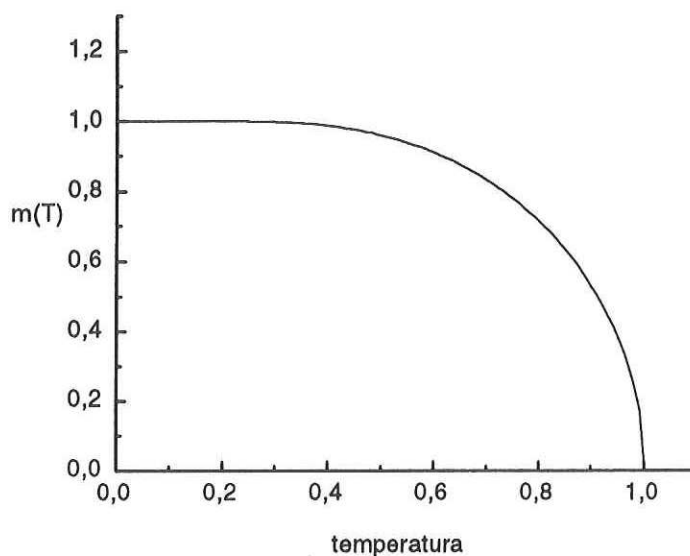


Figura 22. Soluciones numéricas de la ecuación $m = \tanh(\beta m)$.

- Con base en los valores discretos encontrados para $m(T)$ se calcula y grafica $\varepsilon_{crit}(T)$. Los resultados se presentaron en la gráfica 21.
- De esta gráfica resulta que la estabilidad en la vecindad del estado $(m(T), 0)$ se mantiene para temperaturas hasta del orden de $T \simeq 1$, siempre y cuando los valores de ε estén situados en el intervalo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{crit}(T) \sim 0.04$. Sin embargo, una recuperación razonable del patrón almacenado $\vec{\xi}_1$, digamos superior al 97% de los caracteres (bits) que lo conforman, se obtiene solamente para temperaturas $T \leq 0.45$; en cuyo caso podemos tener hasta $\varepsilon \sim 15$, sin poner en peligro la estabilidad predicha macroscópicamente en la vecindad de $(m(T), 0)$.

VII.2.1 La matriz de correlación en la región de estabilidad del modelo

La matriz de correlación C_∞ en el estado estacionario bajo consideración obedece la siguiente ecuación algebraica:

$$L_{\infty} C_{\infty} + C_{\infty} L_{\infty}^T = 2(D_{\infty} - K_{\infty}), \quad (254)$$

donde $B_{\infty} = 2(D_{\infty} - K_{\infty})$ con

$$D_{\infty} = (1 - m^2(T)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} K_2^{\infty} \langle q_1 \rangle_{\infty}(\beta, \varepsilon) \\ \frac{1}{2} K_2^{\infty} \langle q_1 \rangle_{\infty}(\beta, \varepsilon) & K_2^{\infty} \langle q_2 \rangle_{\infty}(\beta) \end{pmatrix} \quad (255)$$

donde $K_2^{\infty} = -K_0 m(T)$.

Las ecuaciones algebraicas a resolver son

$$L_{11}^{\infty} C_{11}^{\infty} + L_{12}^{\infty} C_{12}^{\infty} = \frac{1}{2} B_{11}^{\infty}, \quad 2L_{11}^{\infty} C_{12}^{\infty} + L_{12}^{\infty} C_{22}^{\infty} = B_{12}^{\infty}, \quad 2L_{11}^{\infty} C_{22}^{\infty} = B_{22}^{\infty}. \quad (256)$$

En todas las soluciones aparecen los elementos de la matriz de convección como el siguiente cociente: $\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} = -\frac{\beta\varepsilon(1-m^2(T))}{1-\beta+\beta m^2(T)}$. Los resultados son los que siguen:

$$C_{11}^{\infty} = -\frac{1}{\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right) - \frac{1}{2\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right)^3 + [\langle q_1 \rangle_{\infty}(\beta, \varepsilon)]^2, \quad (257)$$

$$C_{12}^{\infty} = \frac{1}{2\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right)^2 + [\langle q_1 \rangle_{\infty}(\beta, \varepsilon)] [\langle q_2 \rangle_{\infty}(\beta)], \quad (258)$$

$$C_{22}^{\infty} = -\frac{1}{\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right) + [\langle q_2 \rangle_{\infty}(\beta)]^2. \quad (259)$$

De lo anterior resultan las siguientes correlaciones no centradas:

$$\Xi_{11}^{\infty} = -\frac{1}{\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right) - \frac{1}{2\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right)^3, \quad \Xi_{12}^{\infty} = \frac{1}{2\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right)^2, \quad \Xi_{22}^{\infty} = -\frac{1}{\beta\varepsilon} \left(\frac{L_{12}^{\infty}}{L_{11}^{\infty}} \right). \quad (260)$$

Encontramos entonces las siguientes conclusiones:

- La corrección finita congelada desplaza el punto fijo pero no afecta la forma de la distribución de probabilidad de las fluctuaciones.
- La asimetría de la matriz A produce traslación del punto fijo en la dirección de uno de los traslapes, m_1 , pero no afecta a m_2 . En promedio, dicha traslación es lineal en ε .
- Al romperse el balance detallado aparece correlación entre las fluctuaciones.
- El promedio de los traslapes puede escribirse como sigue:

$$\langle m_1 \rangle_{\infty}(\vec{\sigma}) = m(T) \left\{ 1 + \frac{K_0 \varepsilon}{\sqrt{N}} \frac{(1 - m^2(T))}{[1 - \beta(1 - m^2(T))]^2} \right\}, \quad \langle m_2 \rangle_{\infty}(\vec{\sigma}) = \frac{K_0}{\sqrt{N}} \frac{m(T)}{[1 - \beta(1 - m^2(T))]} \quad (261)$$

- Es la asimetría la que causa rotacional distinto de cero. Existe un flujo estacionario de tipo rotacional en la vecindad del atractor.

Si llamamos como red número 1 a la que trabaja con el parámetro $\varepsilon = 0$ y con el número 2 a la red que trabaja con $\varepsilon \neq 0$, podemos establecer lo siguiente: desde el punto de vista macroscópico, ambas redes pueden almacenar la misma imagen y recuperarla. Sin embargo, el hecho de que el ruido sea mayor en la segunda red llevará a que la nitidez de las imágenes recuperadas sea superior en la primera.

VII.2.2 Comparación con las simulaciones. Punto fijo sin balance detallado.

Para confrontar teoría y experimento para el estado estacionario que hemos venido estudiando en esta sección se tomaron temperaturas en el intervalo $0.3 \leq T \leq 0.6$. Las razones para esta selección son las siguientes:

- Los efectos de tamaño finito son muy pequeños por debajo de $T = 0.3$, mientras que la agitación térmica por arriba de $T = 0.6$ lleva a la pérdida de precisión de la teoría. Como en el caso de otros sistemas, las predicciones teóricas podrán tener más precisión si se incrementa el número de neuronas de la red.

VII.2.2.1 Procedimiento

Este sistema presenta diversas dificultades. Una de ellas es que el valor de la constante de

forma de las cuencas de los estados atractores. Por ejemplo, para $\varepsilon = 1$ prevalecen dos estados atractores y la frontera de las dos cuencas es una línea inclinada que corre por debajo del eje de las $m_1 > 0$ y por arriba del eje de las $m_1 < 0$. Esto da lugar a que las trayectorias de campo promedio evolucionen dentro de una cuenca, como es de esperarse. En cambio, las simulaciones pueden saltar a la cuenca contigua. La gráfica siguiente muestra este fenómeno.

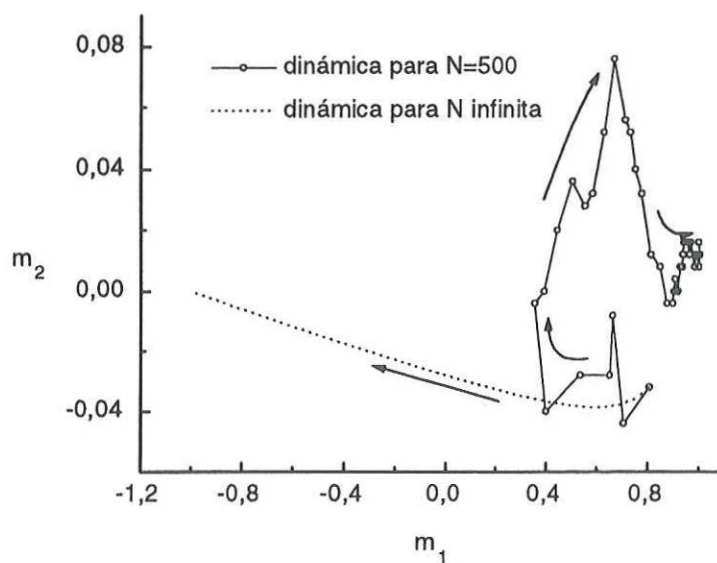


Figura 23. Diferencia en la conducta entre las redes finitas y las redes infinitas. Para $N = \infty$ la solución a la ecuación (10) indica que la red evoluciona hacia el atractor $(-m(T), 0)$. En cambio, una simulación de una red finita con $N = 500$, $\varepsilon = 25$, $K_0 = 0.268$, indica que se puede escapar hacia una región cercana al atractor $(m(T), 0)$.

Hay dos detalles a considerar al llevar a cabo las simulaciones. Uno de ellos es que en el problema que estamos estudiando, la forma de las cuencas de las redes infinitas cambia con el valor del parámetro ε . Todas las modificaciones importantes ocurren en el intervalo $0 < \varepsilon < 1$, de modo que si tomamos $\varepsilon = 1$ garantizamos modificaciones muy pequeñas al variar la temperatura.

Otro punto a considerar es el fenómeno que muestra la figura 23, donde encontramos que el sistema presenta un fenómeno de escape a otra cuenca contigua. Es similar al que estudiaremos para $T = 0$ en el octavo capítulo, aunque más complejo de analizar formalmente.

El tipo de conducta que deseamos analizar se refiere a realizaciones que se comportan de tal forma que el estado de la red avanza hacia el atractor $(m(T), 0)$ y se mantiene oscilando en su vecindad. La siguiente gráfica así lo ilustra:

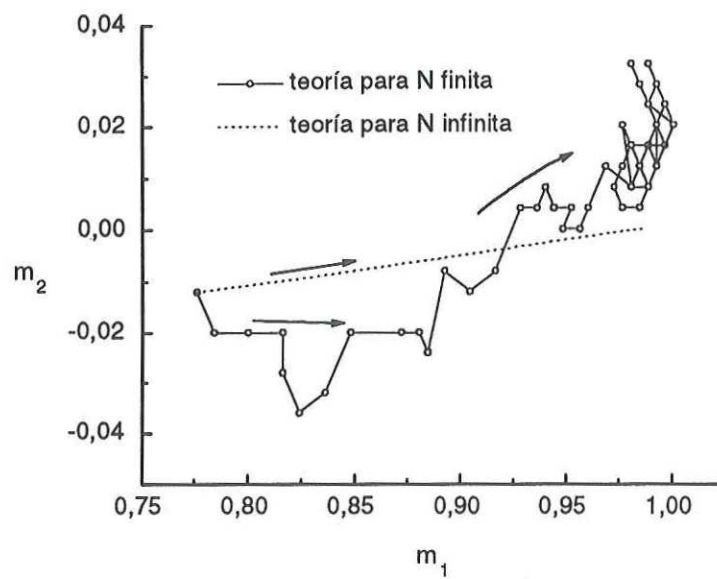


Figura 24. En una simulación de una red con $N = 500$, $T = 0.4$, $\varepsilon = 25$, $K_0 = 0.4472136$, el vector de traslapes oscila al azar dentro de una cuenca siempre que $K_0 > 0$. En cambio la solución numérica a la ecuación (10), graficada con una línea punteada, indica que el estado de una red infinita evoluciona hacia un estado atractor. La cuenca de oscilación de la red finita se encuentra trasladada hacia arriba.

La forma de lograr que el estado de la red tome la conducta señalada en la última gráfica consiste en trabajar únicamente con valores positivos de K_0 y que sean suficientemente grandes. La experiencia demostró que con valores mayores a la unidad es suficiente.

La técnica utilizada fué la misma que ha sido expuesta para los sistemas anteriores. Los datos fueron grabados al tiempo $t = 10$, lo cual fué suficiente para garantizar el estado estacionario en las temperaturas analizadas. Los resultados se presentan enseguida para las fluctuaciones medias de los traslapes m_1 y m_2 en redes con número de neuronas dados por $N = 250, 500, 1\,000$ y $5\,000$. Como era de esperarse, los resultados mejoraron conforme se incrementó el número de neuronas. En el caso de las desviaciones estándar, donde la predicción teórica pierde calidad más rápidamente con la elevación de la temperatura, se presentan los resultados para redes con $N = 5\,000$ neuronas.

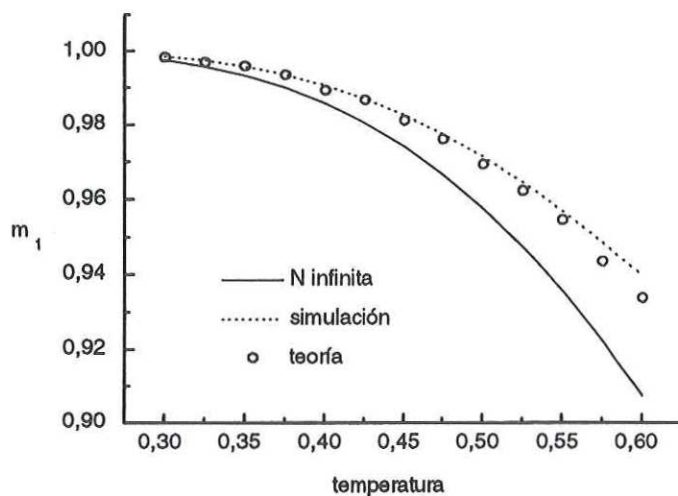


Figura 25(a). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_1 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 250$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.644384$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

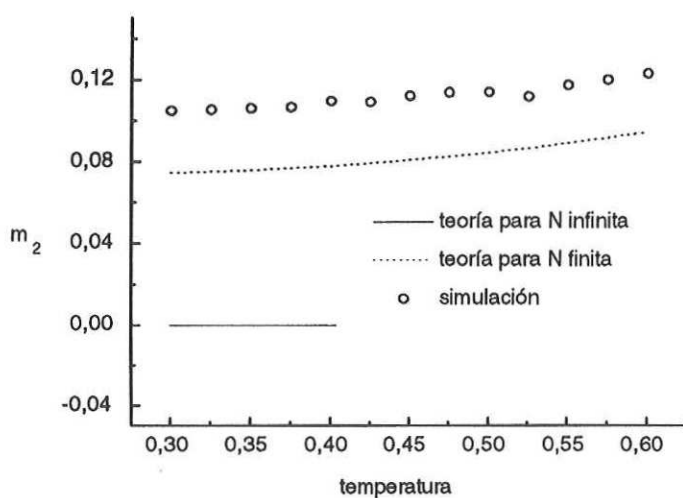


Figura 25(b). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 250$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.644384$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

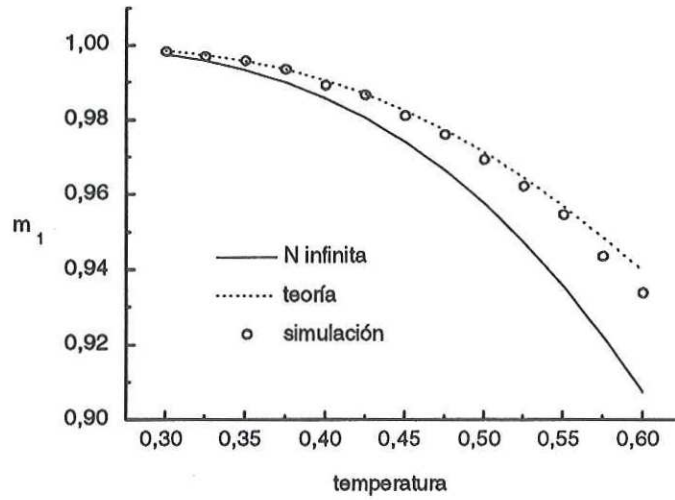


Figura 26(a). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_1 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 500$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.341641$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

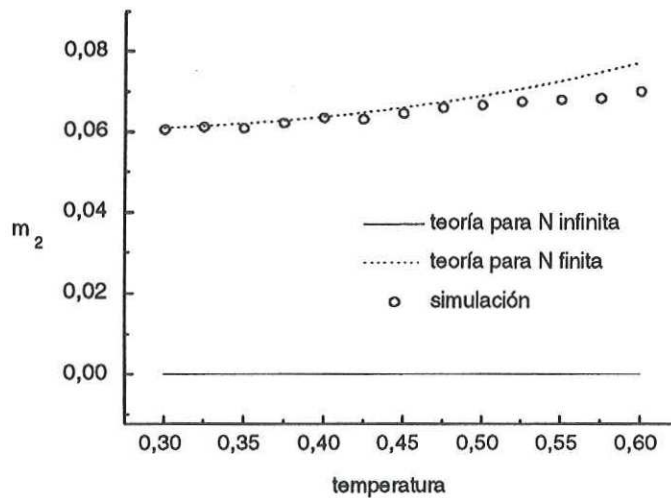


Figura 26(b). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 500$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.341641$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

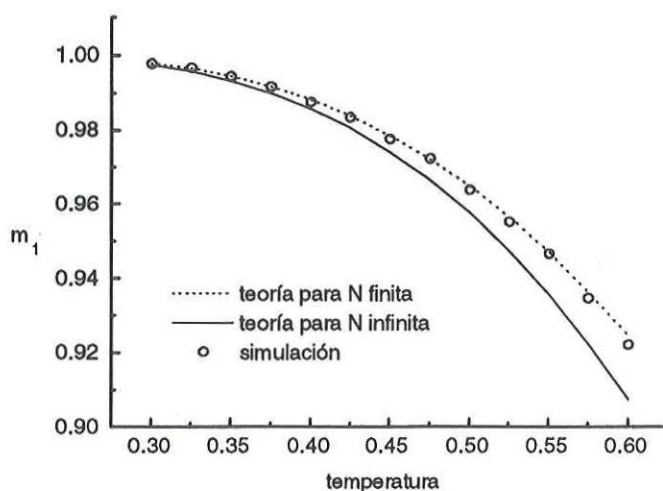


Figura 27(a). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_1 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 1000$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.011929$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

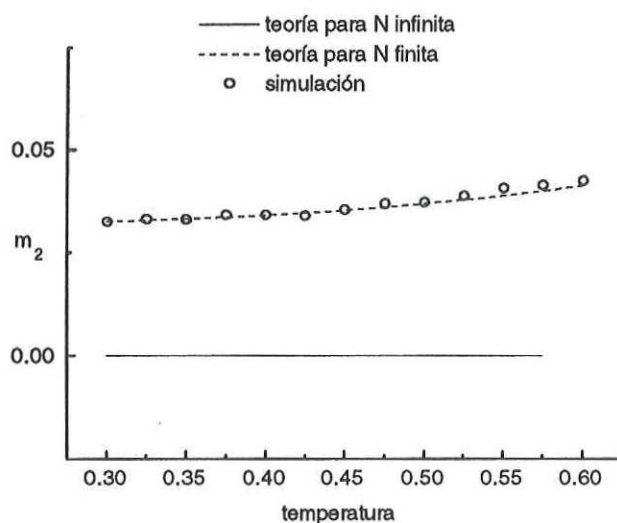


Figura 27(b). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 1000$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.011929$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

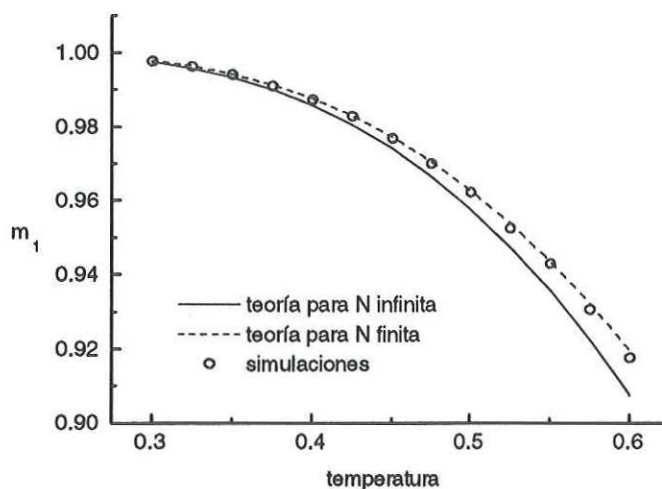


Figura 28(a). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_1 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 5000$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.583919$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

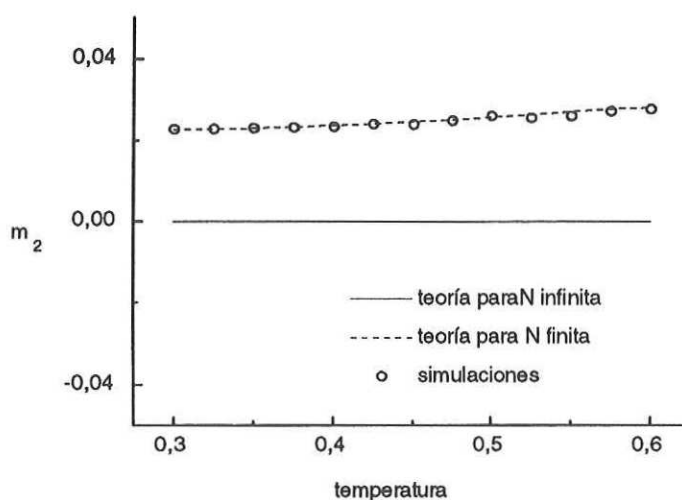


Figura 28(b). Punto fijo sin balance detallado. $\langle m_2 \rangle (\vec{\sigma})$ se encuentra trasladado respecto de la predicción de la teoría de campo promedio ($N = \infty$). Las simulaciones con $N = 5000$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.583919$ y 200 realizaciones indican que la predicción de nuestra ecuación (261) es más precisa. Nótese que la corrección es de mejor calidad para temperaturas bajas.

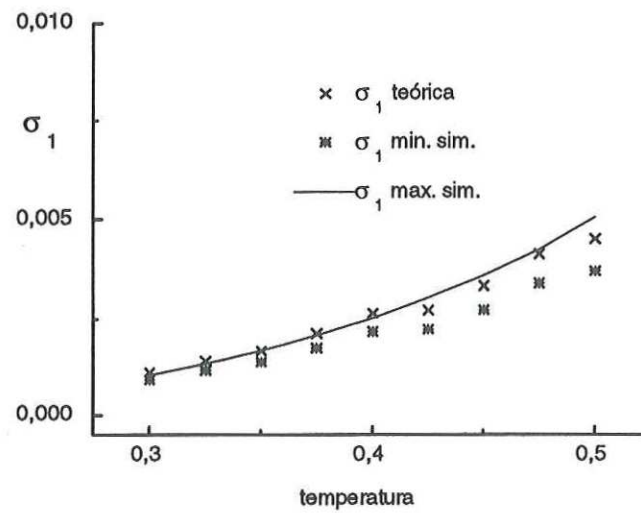


Figura 29(a). Punto fijo sin balance detallado. Desviación estándar del primer traslape. Las simulaciones con $N = 5\,000$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.583919$ y 200 realizaciones. Análisis estadístico con confiabilidad de 95%.

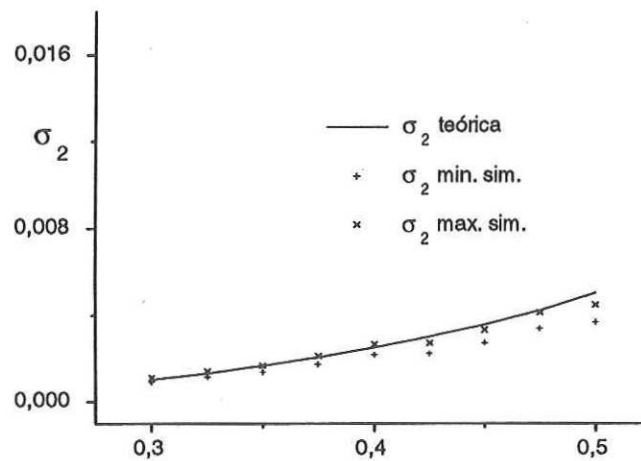


Figura 29(b). Punto fijo sin balance detallado. Desviación estándar del primer traslape. Las simulaciones con $N = 5\,000$, $p = 2$, $\varepsilon = 1$, $K_0 = 1.583919$ y 200 realizaciones. Análisis estadístico con confiabilidad de 95%.

VII.3 Discusión

En este capítulo analizamos un sistema con punto fijo sin balance detallado. Hemos calculado la predicción teórica para el traslape promedio, $\langle m_\mu \rangle_\infty (\vec{\sigma})$, y para la desviación estándar, $(\Xi_{\mu\mu}^\infty)^{\frac{1}{2}}$, como resultado del carácter finito de la red. Además presentamos la comparación de la predicción teórica con las simulaciones en computadora. Los resultados demuestran que, en el caso del traslape promedio, $\langle m_\mu \rangle (\vec{\sigma})$, el acuerdo entre la predicción teórica y la simulación es excelente en el intervalo de temperaturas $0 \leq T \leq 0.6$, siempre que se trate de redes con $N \geq 10^3$ neuronas. La calidad de la predicción teórica no es tan buena para el caso de las desviaciones estándar, pues en este caso fué necesario avanzar hasta redes con $N = 10^4$ neuronas para encontrar buenos resultados en el intervalo $0 \leq T \leq 0.5$.

VIII. Estados fuera de equilibrio II. Tiempo de escape controlado por el tamaño del sistema.

VIII.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar una aplicación de nuestra teoría cuya importancia radica en que los efectos de tamaño finito de la red modifican cualitativamente su conducta macroscópica como resultado de las fluctuaciones aleatorias. Para ilustrar este fenómeno regresamos al sistema de redes operando a temperatura cero con una matriz de interacción dada como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (262)$$

Este efecto ya fué esbozado en el tercer capítulo de este trabajo, pero el estado de la teoría hasta ese punto aún no nos permitía un estudio cuantitativo del mismo. En este caso, las ecuaciones de campo promedio predicen un valor en equilibrio $\vec{m}_{\infty}^*$ para el vector de traslapes y existe una cuenca muy definida para el atractor correspondiente. Esta conducta cambia totalmente para las redes finitas. Con base en nuestra teoría demostraremos que el estado macroscópico de la red, $\vec{m}(t)$, puede escapar de dicha cuenca con probabilidad igual a uno, bajo circunstancias que habremos de determinar. Encontraremos que el tiempo en el cual el estado $\vec{m}(t)$ puede escapar hacia otra cuenca está dictado por el tamaño N de la red.

Este capítulo está ordenado como sigue: primero obtenemos las ecuaciones generales para redes no simétricas con dos patrones almacenados. Después analizamos el fenómeno de

tiempo de escape para el sistema arriba mencionado y finalmente presentamos una comparación con las simulaciones.

VIII.2 Redes no simétricas con dos patrones almacenados

En esta sección calculamos las matrices de convección y de difusión, así como el vector de corrección finita congelada, para redes con dos patrones almacenados mediante una matriz de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (263)$$

VIII.2.1 Cálculo de la corrección finita congelada para redes con dos patrones almacenados

Encontramos las ecuaciones para las fluctuaciones promedio, $\langle \vec{q} \rangle(t)$, especificando la matriz A como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (264)$$

con el campo local $h_i(\vec{\sigma}(t))$ dado por la siguiente forma bilineal: $h_i(\vec{\sigma}(t)) = \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_i^* + \theta_i$. Aunque en lo sucesivo haremos $\theta_i = 0$ para simplificar la escritura.

Nuestro primer propósito es calcular la suma finita siguiente:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \mu \tanh \beta \{ \xi_i^1 [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_i^2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \}, \quad (265)$$

tal que para $\mu = 1$ resulta

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \tanh \beta \{ \xi_i^1 [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_i^2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh \beta \{ [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_i^1 \xi_i^2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, \xi_i^2} \tanh \beta [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t) + A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, -\xi_i^2} \tanh \beta [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t) - A_{21} m_1^*(t) - A_{22} m_2^*(t)] \\
&= \tanh \beta S_+(t) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, \xi_i^2} + \tanh \beta S_-(t) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, -\xi_i^2}
\end{aligned}$$

donde

$$S_+(t) = (A_{11} + A_{21}) m_1^*(t) + (A_{12} + A_{22}) m_2^*(t), \quad (266)$$

y

$$S_-(t) = (A_{11} - A_{21}) m_1^*(t) + (A_{12} - A_{22}) m_2^*(t). \quad (267)$$

Enseguida aprovechamos que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, \xi_i^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i^1 \xi_i^2) \quad , \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i^1, -\xi_i^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - \xi_i^1 \xi_i^2) . \quad (268)$$

de modo que obtenemos

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \tanh \beta \{ \xi_i^1 [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_i^2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \}$$

$$\begin{aligned}
&= \tanh \beta S_+(t) \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i^1 \xi_i^2) + \tanh \beta S_-(t) \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (1 - \xi_i^1 \xi_i^2) \\
&= \frac{1}{2} \tanh \beta S_+(t) \left\{ 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \xi_i^2 \right\} + \frac{1}{2} \tanh \beta S_-(t) \left\{ 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \xi_i^2 \right\}. \quad (269)
\end{aligned}$$

Enseguida podemos calcular la expresión para el término de corrección congelada. La expresión para el autopromedio es, cuando $\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
&\langle \xi_1 \tanh \beta \{ \xi_1 [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \rangle \xi \\
&= \langle \tanh \beta \{ [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_1 \xi_2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \rangle \xi \\
&= \frac{1}{2} \{ \tanh \beta S_+(t) + \tanh \beta S_-(t) \}, \quad (270)
\end{aligned}$$

de modo que restando (270) menos (269), multiplicando por $\sqrt{N}$ y tomando el límite $N \rightarrow \infty$, resulta

$$K_1(t) = -\frac{K_0}{2} [\tanh \beta S_+(t) - \tanh \beta S_-(t)], \quad (271)$$

donde

$$K_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \xi_i^2. \quad (272)$$

Análogamente se calcula el segundo término y se encuentra;

$$K_1(t) = -\frac{K_0}{2} [\tanh \beta S_+(t) + \tanh \beta S_-(t)], \quad (273)$$

de modo que el término de corrección congelada toma la forma siguiente:

$$\vec{K}(t) = -\frac{K_0}{2} \begin{pmatrix} \tanh \beta S_+(t) - \tanh \beta S_-(t) \\ [\tanh \beta S_+(t) + \tanh \beta S_-(t)] \end{pmatrix}. \quad (274)$$

VIII.2.2 Cálculo de la matriz de convección para redes con dos patrones almacenados

La expresión para la matriz de convección, $L_{\mu\nu}$, es más fácil de calcular porque en ella solamente aparece el autopromedio, se necesita conocer:

$$\langle \xi_\mu \xi_\lambda [1 - \tanh^2 \beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^*] \rangle_\xi = \delta_{\mu\lambda} - \langle \xi_\mu \xi_\lambda \tanh^2 \beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* \rangle_\xi.$$

Para el modelo bajo consideración se distinguen dos casos, uno es $\mu = \nu$:

$$\begin{aligned} & \langle \tanh^2 \beta \{ \xi_1 [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \rangle_\xi \\ &= \langle \tanh^2 \beta \{ [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_1 \xi_2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \rangle_\xi \\ &= \frac{1}{2} [\tanh^2 \beta S_+(t) + \tanh^2 \beta S_-(t)] \end{aligned} \quad (275)$$

y el otro caso es $\mu \neq \nu$:

$$\begin{aligned} & \langle \xi_1 \xi_2 \tanh^2 \beta \{ \xi_1 [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \rangle_\xi \\ &= \langle \xi_1 \xi_2 \tanh^2 \beta \{ [A_{11} m_1^*(t) + A_{12} m_2^*(t)] + \xi_1 \xi_2 [A_{21} m_1^*(t) + A_{22} m_2^*(t)] \} \rangle_\xi \\ &= \frac{1}{2} [\tanh^2 \beta S_+(t) - \tanh^2 \beta S_-(t)]. \end{aligned} \quad (276)$$

De tal modo que si escribimos la matriz $\{L_{\mu\nu}\}$ como

$$L(t) = I - \beta P(t) A, \quad (277)$$

con I la matriz identidad y

$$P(t) = \left\{ \delta_{\mu\lambda} - \langle \xi_\mu \xi_\lambda \tanh^2 \beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* \rangle_\xi \right\}, \quad (278)$$

resulta:

$$P_{11}(t) = P_{22}(t) = 1 - \frac{1}{2} [\tanh^2 \beta S_+(t) + \tanh^2 \beta S_-(t)], \quad (279)$$

$$P_{12}(t) = P_{21}(t) = -\frac{1}{2} [\tanh^2 \beta S_+(t) - \tanh^2 \beta S_-(t)]. \quad (280)$$

En forma explícita, los elementos de matriz tienen la siguiente forma:

$$L_{11}(t) = 1 - \beta \left\{ A_{11} - \frac{1}{2} [A_{11} + A_{21}] \tanh^2 \beta S_+(t) - \frac{1}{2} [A_{11} - A_{21}] \tanh^2 \beta S_-(t) \right\}, \quad (281)$$

$$L_{12}(t) = -\beta \left\{ A_{12} - \frac{1}{2} [A_{12} + A_{22}] \tanh^2 \beta S_+(t) - \frac{1}{2} [A_{12} - A_{22}] \tanh^2 \beta S_-(t) \right\}, \quad (282)$$

$$L_{21}(t) = -\beta \left\{ A_{21} - \frac{1}{2} [A_{11} + A_{21}] \tanh^2 \beta S_+(t) + \frac{1}{2} [A_{11} - A_{21}] \tanh^2 \beta S_-(t) \right\}, \quad (283)$$

$$L_{22}(t) = 1 - \beta \left\{ A_{22} - \frac{1}{2} [A_{12} + A_{22}] \tanh^2 \beta S_+(t) + \frac{1}{2} [A_{12} - A_{22}] \tanh^2 \beta S_-(t) \right\}. \quad (284)$$

VIII.2.3 Cálculo de la matriz de difusión para redes con dos patrones almacenados

Para obtener la matriz de difusión necesitamos conocer la distribución de probabilidad P_{σ_i} con la cual se genera el estado microscópico inicial $\sigma_i(0)$ de la red. Para lograr que la red parta del estado macroscópico $\vec{m}(0) = (m_1^0, m_2^0)$ podemos generar $\sigma_i(0)$ conforme a la siguiente relación:

$$P_{\sigma_i} = |m_1^0| \delta[\sigma_i - \xi_i^1 \text{sign}(m_1^0)] + |m_2^0| \delta[\sigma_i - \xi_i^2 \text{sign}(m_2^0)] + \frac{1}{2} (1 - |m_1^0| - |m_2^0|) [\delta(\sigma_i - 1) + \delta(\sigma_i + 1)], \quad (285)$$

donde $|m_1^0| + |m_2^0| \leq 1$.

La expresión general para la difusión es

$$D_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} - e^{-t} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \sigma_i(0) \tanh(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^*) - \int_0^t e^{s-t} \langle \xi_\mu \xi_\nu \tanh(\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_s^*) \tanh(\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^*) \rangle_\xi ds, \quad (286)$$

y nuestro primer objetivo es calcular el segundo término. Para ese fin tomamos en cuenta que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \sigma_i(0) \tanh(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^*) = \int P_\eta(\eta) \eta d\eta,$$

donde $\eta_i = \xi_i^\mu \xi_i^\nu \sigma_i(0) \tanh(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^*)$ y $P_\eta(\eta)$ es la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria. Tomando en cuenta que ξ_i^μ y $\sigma_i(0)$ son variables aleatorias independientes podemos calcular la integral $\int P_{\sigma_i}(\sigma_i) \sigma_i(0) d\sigma_i$ y dejar pendiente el promedio sobre ξ_i^μ , que no es otra cosa que el autopromedio. Entonces se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \sigma_i(0) \tanh(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^*) =$$

$$\langle \xi_\mu \xi_\nu [|m_1^0| \xi_1 \text{sign}(m_1^0) - |m_2^0| \xi_2 \text{sign}(m_2^0)] \rangle_\xi.$$

Enseguida calculamos el autpromedio y resulta:

$$\begin{aligned} & e^{-t} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \sigma_i(0) \tanh \left(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* \right) \right\}_{\mu\mu} = \\ & = \frac{1}{2} e^{-t} [|m_1^0| \xi_1 \text{sign}(m_1^0) - |m_2^0| \xi_2 \text{sign}(m_2^0)] \tanh [\beta S_+(t)] \\ & + \frac{1}{2} e^{-t} [|m_1^0| \xi_1 \text{sign}(m_1^0) + |m_2^0| \xi_2 \text{sign}(m_2^0)] \tanh [\beta S_-(t)] \end{aligned} \quad (287)$$

con $\mu = 1, 2$. Para los elementos fuera de la diagonal encontramos

$$\begin{aligned} & e^{-t} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \sigma_i(0) \tanh \left(\beta \vec{\xi}_i \cdot A \vec{m}_t^* \right) \right\}_{\mu\nu} = \\ & = \frac{1}{2} e^{-t} [|m_1^0| \xi_1 \text{sign}(m_1^0) - |m_2^0| \xi_2 \text{sign}(m_2^0)] \tanh [\beta S_+(t)] \\ & - \frac{1}{2} e^{-t} [|m_1^0| \xi_1 \text{sign}(m_1^0) + |m_2^0| \xi_2 \text{sign}(m_2^0)] \tanh [\beta S_-(t)], \end{aligned} \quad (288)$$

con $\mu \neq \nu$.

Nuestro siguiente objetivo es calcular el tercer término de (286), que contiene sólo un autpromedio y no implica mayor dificultad, resulta lo que sigue:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{s-t} \langle \xi_\mu \xi_\mu \tanh \left(\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^* \right) \tanh \left(\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_s^* \right) \rangle_\xi ds = \\ & \frac{1}{2} \{ \tanh [\beta S_+(s)] \tanh [\beta S_+(t)] + \tanh [\beta S_-(s)] \tanh [\beta S_-(t)] \}, \end{aligned} \quad (289)$$

con $\mu = 1, 2$. Los elementos fuera de la diagonal son:

$$\int_0^t e^{s-t} \langle \xi_\mu \xi_\mu \tanh(\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^*) \tanh(\vec{\xi} \cdot A \vec{m}_s^*) \rangle_\xi ds =$$

$$\frac{1}{2} \{ \tanh[\beta S_+(s)] \tanh[\beta S_+(t)] - \tanh[\beta S_-(s)] \tanh[\beta S_-(t)] \}. \quad (290)$$

Colectando todos los términos se encuentra que las expresiones anteriores se pueden compactar si definimos las siguientes funciones:

$$C_+(t) = \frac{1}{2} \tanh[\beta S_+(t)] \left[|m_1^0| \operatorname{sign}(m_1^0) + |m_2^0| \operatorname{sign}(m_2^0) + \int_0^t e^s \tanh[\beta S_+(s)] ds \right] e^{-t} \quad (291)$$

y

$$C_-(t) = \frac{1}{2} \tanh[\beta S_-(t)] \left[|m_1^0| \operatorname{sign}(m_1^0) - |m_2^0| \operatorname{sign}(m_2^0) + \int_0^t e^s \tanh[\beta S_-(s)] ds \right] e^{-t}. \quad (292)$$

Entonces se puede reescribir

$$D_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} [1 - C_+(t) - C_-(t)] + (1 - \delta_{\mu\nu}) [-C_+(t) + C_-(t)]. \quad (293)$$

VIII.3 Tiempo de escape para $T = 0$.

En el tercer capítulo de este trabajo estudiamos un caso particular de redes antisimétricas con dos patrones almacenados y encontramos que los puntos atractores de la red a temperatura cero presentan un corrimiento cuya magnitud es proporcional al producto interior de los patrones almacenados. Hicimos ver que esto abría la posibilidad de que ocurriera una trasfe-

rencia de una cuenca a otra, dando lugar a un cambio cualitativo en la conducta macroscópica de la red. Sin embargo, el estado de nuestra teoría hasta ese punto nos impedía calcular el tiempo de escape. Ahora retomaremos el mismo modelo, que consiste en una red cuya interacción J_{ij} contiene una matriz antisimétrica dada como sigue: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cuando la temperatura es distinta de cero, la conducta macroscópica de una red infinita con esta regla de almacenamiento es tal que el vector de traslapes $\vec{m}_t^*$ describe ciclos en la forma que ya ha sido descrita en otro apartado de este trabajo. En cambio, es fácil ver que cuando la temperatura es cero el vector de traslapes queda atrapado en un estado atractor. Este último fenómeno se modifica cuando la red es finita. Haremos ver que, cuando se trata de redes finitas, la presencia de las fluctuaciones puede producir transferencias entre cuencas contiguas en un tiempo de escape cuya expresión analítica vamos a calcular, lo cual constituye la modificación cualitativa que venimos mencionando de la conducta macroscópica de la red.

Las ecuaciones macroscópicas son:

$$\frac{d}{dt} \vec{m}_t^* + \vec{m}_t^* = \langle \vec{\xi} \operatorname{sign}(\beta \vec{\xi} \cdot A \vec{m}_t^*) \rangle_{\xi}, \quad (294)$$

con condiciones iniciales $\vec{m}_0^* = (m_1^0, m_2^0)$, con $m_1^0 > 0$ y $m_2^0 > 0$, de modo que la solución analítica es:

$$\vec{m}_t^* = \vec{m}_0^* e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (295)$$

de donde resulta que $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{m}_t^* = (1, 0)$.

Cuando se trata de una red con un número finito de neuronas el acercamiento asintótico del vector $\vec{m}(t)$ al estado atractor va acompañado de las fluctuaciones $\vec{q}(t)$, que pueden

hacer saltar al vector de traslapes del primer cuadrante, donde $m_1(t) > 0$ y $m_2(t) > 0$, al cuarto cuadrante, donde $m_1(t) > 0$ y $m_2(t) < 0$. Una vez que esto sucede, $\vec{m}(t)$ puede escapar del estado atractor. Para analizar las condiciones bajo las cuales puede ocurrir este fenómeno procedemos como sigue:

- Partimos de la ecuación maestra que satisface $p_t(\vec{\sigma})$ y calculamos la probabilidad, $\Pi_t^\mu(M)$, de que el traslape, $m_\mu(\vec{\sigma})$, tome un valor inferior a una cota determinada M .
- Enseguida estudiamos las fluctuaciones del traslape $m_2(t)$, para encontrar una ecuación para la probabilidad $\Pi_t^{(2)}(M)$, en torno a $M = 0$.
- Posteriormente introducimos un parámetro γ cuyo papel será el de determinar los valores del tiempo t para los cuales puede ocurrir una transición de M extremadamente pequeño, pero positivo, a $M < 0$. La función de probabilidad $\Pi_t^{(2)}(M)$ se escribirá entonces en términos de una función $P_\gamma(M)$ cuya ecuación diferencial queda dada en términos de la media de la fluctuación $q_2(t)$ y de su desviación estándar.
- Lo anterior nos lleva a calcular la media $\langle q_2 \rangle(t)$ y la fluctuación cuadrática media $C_{22}(t) = \langle q_2^2 \rangle(t)$, para determinar su conducta para tiempos suficientemente largos.
- Entonces se dispondrá de un conjunto de expresiones que nos permiten determinar para cuales valores de γ puede ocurrir que el traslape $\vec{m}(t)$ escape de la vecindad del estado atractor, y como una consecuencia, cual es el tiempo mínimo de salida.

VIII.3.1 Ecuación general para $\Pi_t^\mu(M)$

Sea $M > 0$ tal que $m_\mu(\vec{\sigma}) < M$ y sea $\Pi_t^\mu(M)$ la probabilidad de que $m_\mu(\vec{\sigma})$ tome valores menores que M . Esta puede definirse como sigue:

$$\Pi_t^\mu(M) = \sum_{\vec{\sigma}} p_t(\vec{\sigma}) \Theta [M - m_\mu(\vec{\sigma})], \quad (296)$$

tal que su ecuación de evolución puede obtenerse derivando e insertando la ecuación maestra en el lado derecho:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi_t^\mu(M) &= \sum_{\vec{\sigma}} \left\{ \frac{d}{dt} p_t(\vec{\sigma}) \right\} \Theta [M - m_\mu(\vec{\sigma})] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}} \sum_{i=1}^N \left\{ w_i [\hat{F}_i \vec{\sigma}(t)] p_t[\hat{F}_i \vec{\sigma}(t)] - w_i [\vec{\sigma}(t)] p_t[\vec{\sigma}(t)] \right\} \times \Theta [M - m_\mu(\vec{\sigma})], \end{aligned}$$

tal que luego de un poco de álgebra se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\Pi_t^\mu(M) = \langle \delta [M - m_\mu(\vec{\sigma})] \left\{ M - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \tanh \beta h_i(\vec{\sigma}) + \mathcal{O}(N^{-1}) \right\} \rangle_t. \quad (297)$$

VIII.3.2 El modelo con dos patrones almacenados a temperatura cero

Aplicando la ecuación (297) a una red con N neuronas y dos patrones almacenados mediante

una interacción asimétrica que utiliza la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, la forma del campo es

$$h_i(\vec{\sigma}) = (\xi_i^1, \xi_i^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(\vec{\sigma}) \\ m_2(\vec{\sigma}) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(N^{-1}),$$

que utilizada en (297) con $m_\mu(\vec{\sigma}) = m_2(\vec{\sigma})$ lleva a la expresión que sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Pi_t^{(2)}(M) &= \langle \delta [M - m_2(\vec{\sigma})] \times \\ &\times \left\{ M - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh \beta [\xi_i^1 \xi_i^2 (m_1(\vec{\sigma}) + m_2(\vec{\sigma})) + (m_2(\vec{\sigma}) - m_1(\vec{\sigma}))] + \mathcal{O}(N^{-1}) \right\} \rangle_t. \end{aligned}$$

Luego de un trabajo algebraico razonable obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Pi_t^{(2)}(M) &= \langle \delta [M - m_2(\vec{\sigma})] \left\{ M - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}} K_0 \right) \tanh \beta [2M] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}} K_0 \right) \tanh \beta [2m_1(\vec{\sigma})] + \mathcal{O}(N^{-1}) \right\} \rangle_t. \end{aligned}$$

Cuando la temperatura de la red es cero tenemos que $\tanh \beta [2m_1(\vec{\sigma})] = \text{sign}(m_1(\vec{\sigma})) =$

1, siempre que $m_1(\vec{\sigma}) > 0$. A su vez $\tanh \beta [2M] = \text{sign}(M)$. Por consiguiente resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Pi_t^{(2)}(M) &= \langle \delta [M - m_2(\vec{\sigma})] \times \\ &\times \left\{ M - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}} K_0 \right) \text{sign}(M) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}} K_0 \right) + \mathcal{O}(N^{-1}) \right\} \rangle_t. \quad (298) \end{aligned}$$

VIII.3.2.1 La conducta en la vecindad de $M = 0$

Si M tiende a cero por la izquierda tenemos $\text{sign}(M) = -1$, de modo que de la ecuación anterior obtenemos la siguiente:

$$\lim_{M \rightarrow 0^-} \frac{d}{dt} \Pi_t^{(2)}(M) = \langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t [1 + \mathcal{O}(N^{-1})]. \quad (299)$$

Si M tiende a cero por la derecha tenemos que $\text{sign}(M) = 1$, de modo que de (298) resulta la ecuación que sigue:

$$\lim_{M \rightarrow 0^+} \frac{d}{dt} \Pi_t^{(2)}(M) = \langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t \left[-\frac{1}{\sqrt{N}} K_0 + \mathcal{O}(N^{-1}) \right]. \quad (300)$$

En cambio, si $M = 0$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \Pi_t^{(2)}(0) = \langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{N}} K_0 + \mathcal{O}(N^{-1}) \right]. \quad (301)$$

Para determinar completamente nuestras ecuaciones para $\Pi_t^{(2)}(M)$ necesitamos evaluar la expresión $\langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t$ que aparece en (299-301):

Aprovechando la propiedad $\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$, escribimos:

$$\begin{aligned} \langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t &= \langle \delta \left[m_2^*(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} q_2(t) \right] \rangle_t = \\ \langle \delta \left[\frac{\sqrt{N} m_2^*(t) + q_2(t)}{\sqrt{N}} \right] \rangle_t &= \sqrt{N} \langle \delta [\sqrt{N} m_2^*(t) + q_2(t)] \rangle_t, \end{aligned}$$

de modo que el promedio sobre los estados microscópicos puede ser reemplazado por el promedio sobre las fluctuaciones de q_2 , resulta:

$$\sqrt{N} \langle \delta [\sqrt{N} m_2^*(t) + q_2(t)] \rangle_t = \sqrt{N} \int dq_2 \frac{1}{s(t) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[q_2 - \bar{q}_2(t)]^2}{2s^2(t)}} \delta [\sqrt{N} m_2^*(t) + q_2(t)],$$

tal que q_2 sigue una distribución gaussiana de media $\overline{q_2}(t)$ y desviación estándar $s(t)$. Realizando la integral se obtiene:

$$\langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t = \sqrt{N} \frac{1}{s(t) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\sqrt{N}m_2^*(t) + \overline{q_2}(t)]^2}{2s^2(t)}}. \quad (302)$$

Las fluctuaciones escaladas q_2 y la desviación estándar $s(t)$ son de orden N^0 , de donde resulta que si $N \rightarrow \infty$ tendremos $\langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t = 0$, lo cual da por consecuencia que $\frac{d}{dt} \Pi_t^{(2)}(M)$ se anule. ¿Cómo puede ser diferente de cero esta expresión? Para responder esta pregunta debemos tener en cuenta que la conducta macroscópica de la red se acerca al estado atractor $(1, 0)$ de acuerdo a la siguiente dependencia funcional: e^{-t} . Esto indica que existen valores de t para los cuales $m_2^*(t)$ es del orden de sus fluctuaciones no escaladas $x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} q_2(t)$, tal que en ese régimen puede existir una constante $\gamma \neq 0$ que cumpla con la siguiente relación:

$$e^{-t} = \frac{1}{\gamma \sqrt{N}}, \quad (303)$$

lo cual nos permite proponer

$$\langle \delta [m_2(\vec{\sigma})] \rangle_t = \sqrt{N} \frac{1}{s(t) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[\frac{m_2^0}{\gamma} + \overline{q_2}(t)\right]^2}{2s^2(t)}}. \quad (304)$$

Si además diferenciamos en (303) resulta $d\gamma = \frac{e^t}{\sqrt{N}} dt = \gamma dt$, de tal forma que utilizando este cambio de variable y (304) en (299), (300) y (301) resultan las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{d\gamma} P_\gamma(0^+) = -\frac{K_0}{\gamma \sqrt{2\pi} s(t)} e^{-\frac{\left[\frac{m_2^0}{\gamma} + \overline{q_2}(t)\right]^2}{2s^2(t)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad (305)$$

$$\frac{d}{d\gamma} P_\gamma(0) = \frac{\sqrt{N} - K_0}{2\gamma\sqrt{2\pi}s(t)} e^{-\frac{\left[\frac{m_0^2}{\gamma} + q_2(t)\right]^2}{2s^2(t)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad (306)$$

$$\frac{d}{d\gamma} P_\gamma(0^-) = \frac{\sqrt{N}}{\gamma\sqrt{2\pi}s(t)} e^{-\frac{\left[\frac{m_0^2}{\gamma} + q_2(t)\right]^2}{2s^2(t)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (307)$$

El vector de traslapes $\vec{m}(t)$ se acerca al estado atractor por arriba, de modo que el tiempo de escape, si existe, deberá estar determinado por la función $P_\gamma(0^+)$, que puede ser determinada totalmente si calculamos los momentos de la fluctuación escalada $q_2(t)$ en el modelo bajo consideración. En el límite $T \rightarrow 0$ se obtiene la siguiente corrección finita congelada: $\vec{K}(t) = (0, -K_0)$. La matriz de convección es $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La forma más simple de la matriz de difusión, $D_{\mu\nu}(t)$, se presenta cuando el estado microscópico inicial, $\sigma_i(0)$, es generado conforme a la siguiente distribución de probabilidad:

$$P_0(\vec{\sigma}) = \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (1 + m_1^0) \delta_{\sigma_i, \xi_i^1} + \frac{1}{2} (1 - m_1^0) \delta_{\sigma_i, -\xi_i^1} \right\}. \quad (308)$$

Si $T \rightarrow 0$ resulta

$$D_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} (1 - m_1^0) e^{-t}. \quad (309)$$

Usando estas expresiones en las ecuaciones para los momentos estadísticos se puede demostrar que

$$s^2(t) = C_{22}(t) - \langle q_2 \rangle^2(t) = s^2(0) e^{-2t} + 2(e^{-t} - e^{-2t}) (1 - m_1^0), \quad (310)$$

tal que para tiempos suficientemente grandes, tales que $e^{-t} \simeq \frac{1}{\gamma\sqrt{N}}$, resulta que $\langle q_2 \rangle(t) \rightarrow K_0$ y $s^2(t) \rightarrow 0$, por lo tanto la distribución gaussiana tiene la conducta asintótica que sigue:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s(t)}} e^{-\frac{\left[\frac{m_2^0}{\gamma} + \frac{q_2(t)}{2s^2(t)}\right]^2}{2s^2(t)}} \rightarrow \delta\left(\frac{m_2^0}{\gamma} + K_0\right). \quad (311)$$

Sustituyendo (311) en (305) y (307) se obtiene:

$$\frac{d}{d\gamma} P_\gamma(0^+) = -\frac{K_0}{\gamma} \delta\left(\frac{m_2^0}{\gamma} + K_0\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad \frac{d}{d\gamma} P_\gamma(0^-) = \frac{\sqrt{N}}{\gamma} \delta\left(\frac{m_2^0}{\gamma} + K_0\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (312)$$

Si $K_0 > 0$ la expresión (312) produce un resultado negativo, lo cual indica que en este caso no puede haber tiempo de escape. Por consiguiente, la única posibilidad es que se cumpla que $K_0 < 0$, en cuyo caso tenemos

$$P_\gamma(0^+) = |K_0| \int_0^\gamma dz \frac{1}{z} \delta\left(\frac{m_2^0}{z} - |K_0|\right). \quad (313)$$

Este resultado es de esperarse debido a que la predicción teórica para $\langle m_2 \rangle(t)$ tiende a $\frac{1}{\sqrt{N}} K_0$ para tiempos grandes, de lo cual tenemos que un término de corrección congelada positivo aleja al patrón de la línea de cruce, mientras que uno negativo lo recorre hacia ella para situarse en el cuadrante en que $m_2(t)$ es menor que cero.

VIII.3.3 El tiempo de escape

Para calcular el tiempo de escape necesitamos evaluar la integral (313), con este propósito hacemos el siguiente cambio de variable: $u = \frac{m_2^0}{z}$, $du = -\frac{m_2^0}{z^2} dz$, de modo que $dz = -\frac{m_2^0}{u^2} du$, con lo cual tenemos

$$P_\gamma(0^+) = |K_0| \int_{\frac{m_2^0}{\gamma}}^\infty du \frac{1}{u} \delta(u - |K_0|).$$

Esta integral se puede extender de $-\infty$ a ∞ insertando la función de paso $\Theta\left(u - \frac{m_2^0}{\gamma}\right)$:

$$P_{\gamma}(0^+) = |K_0| \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u} \delta(u - |K_0|) \Theta\left(u - \frac{m_2^0}{\gamma}\right),$$

de donde resulta que

$$P_{\gamma}(0^+) = \Theta\left(|K_0| - \frac{m_2^0}{\gamma}\right). \quad (314)$$

Esta expresión demuestra que la probabilidad de alcanzar la frontera es uno si $\gamma \geq \frac{m_2^0}{|K_0|}$, por consiguiente, el tiempo de escape lo determinamos con base en la igualdad, tal que insertando este valor de γ en (303) tenemos

$$\frac{e^t}{\sqrt{N}} = \frac{m_2^0}{|K_0|},$$

de donde encontramos que el tiempo de escape deberá estar dado por la siguiente expresión:

$$t_{esc} = \frac{1}{2} \log(N) + \log\left(\frac{m_2^0}{|K_0|}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (315)$$

Una vez que el vector de traslapes cruza del primero al cuarto cuadrante, la dinámica de $\vec{m}_t^*$ está dada por las siguientes expresiones: $m_1^*(t) = m_1^*(0) e^{-t}$ y $m_2^*(t) = m_2^*(0) e^{-t} - (1 - e^{-t})$, de donde tenemos que el vector de traslapes avanza hacia el estado $(0, -1)$, alejándose definitivamente del estado $(1, 0)$.

El efecto de tamaño finito consiste en que al recuperar una imagen (digamos la número 1 de las dos almacenadas), la red se escapa para avanzar hacia la recuperación de otro patrón, que en este caso es el negativo fotográfico de la imagen número 2.

VIII.4 Comparación con las simulaciones

Para comparar la fórmula (315) con las simulaciones en computadora se procedió a simular redes con condición inicial $m_2^0 = 0.5$ y variando la constante congelada K_0 de modo que

se obtuvieron diversos valores para la variable $y = m_2^0/K_0$. Tomando como eje X el valor $\log\left(\frac{m_2^0}{K_0}\right)$ se graficaron en el eje Y tanto los resultados experimentales como la predicción teórica ya mencionada.

Consideramos que el tiempo de escape, t_{esc} , quedaba dado por el momento en el que la segunda componente del vector de traslapes $\vec{m}(t) = (m_1(t), m_2(t))$ empezaba a tomar valores negativos. Los resultados para redes con $N = 500$, $N = 1\,000$ y $N = 10^4$, se presentan en las gráficas que siguen:

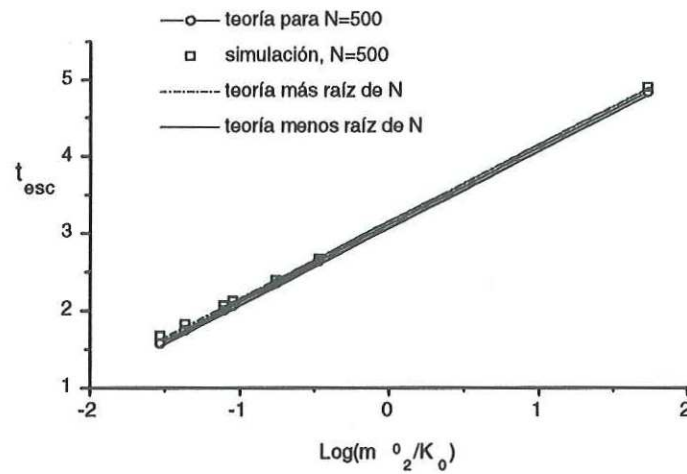


Figura 30(a). Las líneas que unen los círculos corresponden a la predicción teórica de la ecuación (315). Las líneas punteadas indican el valor teórico $\pm \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$. Los resultados experimentales se indican con rectángulos.

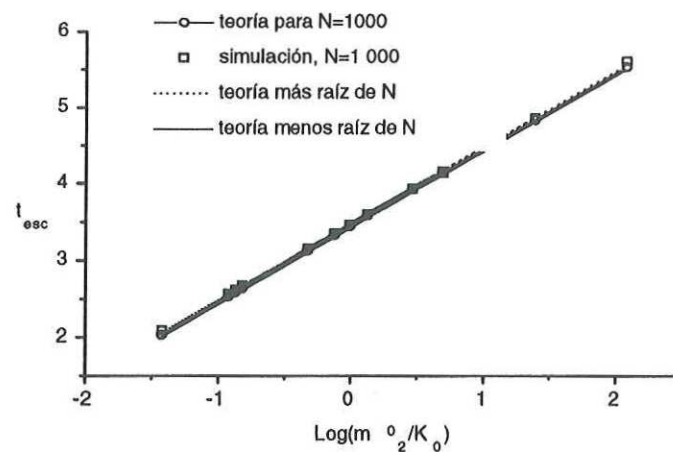


Figura 30(b). Las líneas que unen los círculos corresponden a la predicción teórica de la ecuación (315). Las líneas punteadas indican el valor teórico $\pm \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$. Los resultados experimentales se indican con rectángulos.

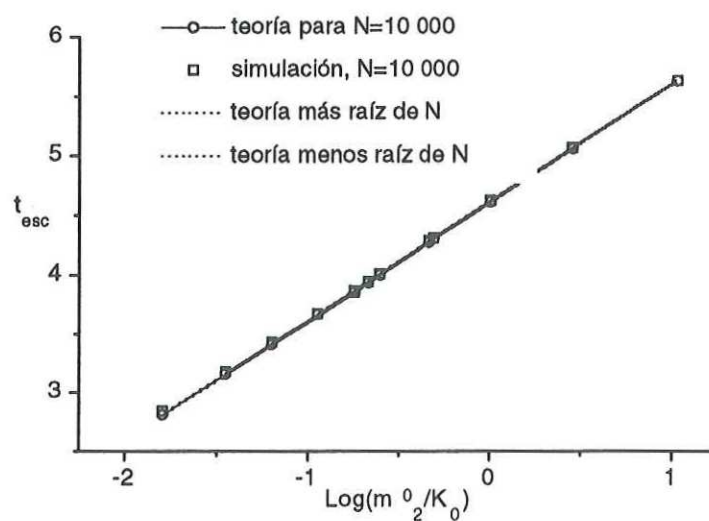


Figura 31. Las líneas que unen los círculos corresponden a la predicción teórica de la ecuación (315). Las líneas punteadas indican el valor teórico $\pm \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$. Los resultados experimentales se indican con rectángulos.

VIII.5 Discusión

En este capítulo hemos analizado un sistema en el cual el estado macroscópico de la red, $\vec{m}(t)$, puede escapar, con probabilidad igual a uno, de la cuenca de atracción en que se encuentra. Este fenómeno es consecuencia de la existencia de las fluctuaciones aleatorias, que modifican radicalmente la conducta macroscópica de la red. Encontramos la expresión para el tiempo de escape, t_{esc} , y confrontamos nuestra predicción teórica con las simulaciones en computadora. La calidad de los resultados es excelente.

REFERENCIAS CITADAS

- Amit D. J., Gutfreund H. and Sompolinsky H., 1985a. *Phys. Rev A* **32**: 1007.
- Amit D. J. , Gutfreund H. and Sompolinsky H. 1985b. *Phys. Rev Lett.* **55**: 1530.
- Amit D. J., Gutfreund H. and Sompolinsky H. 1987a. *Ann. of Phys.* **173**: 30.
- Amit D. J., Gutfreund H. and Sompolinsky H., 1987b. *Phys. Rev A* **35**: 2293.
- Chandrasekar S. 1943, *Rev Mod. Phys.* **15**: 1.
- Coolen A. C. C. and Ruijgrok Th. W., 1988. *Phys. Rev A* **38**: 4253.
- Coolen A. C. C. and Sherrington D., 1993. *Phys. Rev Lett.* **71**: 3886.
- Coolen A. C. C. and Sherrington D., 1994. *Phys. Rev E* **49**: 1921.
- Coolen A. C. C. 1997. *Statistical Mechanics of Neural Networks, Lectures Notes of Course G32/NN13*, King's College London.
- Crisanti A. and Sompolinsky H., 1988. *Phys. Rev A* **36**: 4922.
- Derrida B., Gardner E. and Zippelius A., 1987. *Europhys. Lett.* **4**: 167.
- Gardiner C. W. 1985, *Handbook of Stochastic Models*, Springer-Verlag, Berlin.
- Glauber R. J., 1963. *J. of Math. Phys.* **4**: 294.
- Hopfield J. J., 1982. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **79**: 2554.
- Hopfield J. J., 1984., *Proc. of the Nat. Ac. of Sc. of the U. S. A.* **81**: 3088.
- Imaz C. y Vorel Z. 1968. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, LIMUSA.
- Kree R. and Zippelius A., 1987. *Phys. Rev A* **36**: 4421.
- Laughton S. N. and Coolen A. C. C., 1995. *Phys. Rev E* **51**: 2581.
- Lax M. 1966a, *Rev Mod. Phys.* **38**: 359.
- Lax M. 1966b, *Rev Mod. Phys.* **38**: 541.

- Lax M. 1966b, *Rev. Mod. Phys.* **38**: 541.
- Little W. A., 1974. *Math. Biosci.*, **19**: 101.
- McCulloch W. S. and Pitts W. A., 1943. *Bull. Math. Biophys.*, **5**: 115.
- Minsky M. y Papert S., 1969. "*Perceptrons*", Cambridge, MA.
- Pawula R. F. 1967. *Phys. Rev.* **162**: 186.
- Risken H. 1989, *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin.
- Sherrington D. and Kirkpatrick S. 1972. *Phys. Rev. Lett.* **35**: 1792.
- Uhlenbeck G. E. and Ornstein L. S. 1930. *Phys. Rev.* **36**: 823.
- van Kampen N. G. 1992, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam.
- Verhulst F. 1990. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- Viana L. 1988. *J. Phys. A. Math. Gen.* **21**: 803.
- Wang M. C. and Uhlenbeck G. E., 1945. *Rev. Mod. Phys.* **17**: 323.
- Williamson R. et. al., 1973. *Cálculo de Funciones Vectoriales*, Prentice-Hall, New Jersey.

