

Tesis defendida por

Raúl Rascón Carmona

y aprobada por el siguiente comité

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

*Codirector del Comité*

---

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

*Codirector del Comité*

---

Dr. Yuri Orlov Kuchina

*Miembro del Comité*

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

*Miembro del Comité*

---

Dr. Arturo Zavala Río

*Miembro del Comité*

---

Dr. César Cruz Hernández

*Coordinador del Programa de  
Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*

---

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

*Director de Estudios de Posgrado*

23 de noviembre de 2012

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

---

**Control robusto de sistemas mecánicos con restricciones unilaterales**

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

Presenta:

**Raúl Rascón Carmona**

Ensenada, Baja California, México, 2012

Resumen de la tesis de Raúl Rascón Carmona, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control. Ensenada, Baja California, Noviembre de 2012.

## Control robusto de sistemas mecánicos con restricciones unilaterales

Resumen aprobado por:

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Codirector de Tesis

---

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Codirector de Tesis

El presente trabajo de tesis aborda el problema de regulación de posición o fuerza en sistemas mecánicos con restricciones en la posición, asegurando un desempeño eficiente aún cuando existan perturbaciones externas, variaciones paramétricas, fricción o mediciones incompletas de los estados. Los sistemas considerados se describen por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan la dinámica suave, una condición algebraica dependiente de la posición, más perturbaciones externas y fricción. Dadas estas consideraciones, para resolver el problema se diseñan controladores que sean capaces de alcanzar el objetivo de regulación de posición o fuerza a pesar de perturbaciones externas, variación de parámetros, fricción y medición incompleta de los estados, viéndose los efectos de estos elementos absorbidos o minimizados por el controlador. El objetivo general es el diseño de controladores robustos para estos mecanismos. Se resuelve el problema mediante la aplicación de tres técnicas específicas: la primera consiste en la solución del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  extendido a sistemas lineales y no lineales invariantes en el tiempo con restricciones en la posición. La segunda es la teoría de control por modos deslizantes para resolver el problema de regulación en mecanismos con restricciones en la posición. Como tercera opción se diseña un controlador combinando las dos metodologías mencionadas anteriormente. Se complementará el trabajo con simulaciones numéricas y experimentos con circuitos electrónicos y sistemas mecánicos.

**Palabras Clave:** Sistemas mecánicos, restricciones, retroalimentación de salida, control de fuerza, control por modos deslizantes, control H-infinito.

ABSTRACT of the thesis presented by Raúl Rascón Carmona, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Doctor in Sciences in Electronics and telecommunications with orientation in Instrumentation and Control. Ensenada, Baja California, Noviembre 2012.

Control of mechanical systems with unilateral constraints

Abstract approved by:

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Thesis Codirector

---

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Thesis Codirector

This thesis deals with the position/force regulation problem for mechanical systems under constraints in the position assuming external disturbances, parameter variations, friction, and incomplete and imperfect state measurements. These class of systems are described by a set of ordinary differential equations (ODE) that represents a smooth dynamics, an algebraic condition depending on position, as well as other terms as external disturbances and friction. Given these considerations, to solve the problem some controllers capable of dealing with the regulation objective are designed, in spite of external disturbances, parameter variations, friction, and incomplete state measurements, all these mentioned factors are absorbed or minimized by the control. The general objective in this thesis is to design robust controllers for these mechanisms. The problem is solved through the application of three techniques. The first technique, uses the  $\mathcal{H}_\infty$  control methodology extended to invariant-time linear systems and invariant-time non linear systems, both of them with position constraints. The second one is the sliding mode control theory, used to solve the regulation problem in mechanical systems with constraints in the position. As a third option it is proposed a controller which combines the two techniques mentioned above. Performance issues of the above mentioned controllers are presented with numerical simulations, and experiments through electronic circuits and mechanical platforms.

**Keywords:** Mechanical systems, constraints, output feedback, force control, sliding mode control, H-infinity control

*A la gente que se va a  
dormir cada noche con  
la sensación de haberse  
ganado el pan de cada  
día*

# Agradecimientos

Al CONACyT por su apoyo económico a lo largo de estos años, al CICESE por recibirme como alumno, y al CITEDI por abrirme las puertas para la realización de mis experimentos.

Al Dr. Joaquín Álvarez por la guía, formación, apoyo y enseñanzas recibidas a lo largo de mi estancia doctoral.

Al Dr. Luis Aguilar, por la confianza y apoyo recibidos en el desarrollo de este trabajo.

Al Dr. Yuri Orlov Kuchina por el apoyo recibido y enseñanzas durante el doctorado.

Al Dr. Luis Alejandro Márquez por sus comentarios, enseñanzas y detallada revisión de la versión final de tesis.

Al Dr. Arturo Zavala por sus buenos comentarios acerca de como mejorar el trabajo de tesis.

A mis padres Raúl y Anita, y a mis hermanos Hugo y Ana, porque sin ellos nada sería posible.

A mi novia Iveth por el apoyo, confianza y comprensión recibida de su parte.

# Contenido

	Página
<b>Resumen en español</b>	<b>1</b>
<b>Resumen en inglés</b>	<b>2</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>4</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>13</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Formulación del problema . . . . .	1
1.1.1 Sistemas mecánicos con restricciones en la posición . . . . .	4
1.1.2 Estrategias de control . . . . .	6
1.1.3 Problema de control por modos deslizantes . . . . .	6
1.1.4 Problema de control por $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	11
1.1.5 Problema de control por modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	12
1.2 Objetivos . . . . .	14
1.2.1 Objetivo principal . . . . .	14
1.2.2 Objetivos específicos . . . . .	14
1.3 Metodología . . . . .	15
1.4 Organización del trabajo . . . . .	15
<b>2. Introducción a modos deslizantes</b>	<b>17</b>
2.1 Método de control equivalente . . . . .	18
<b>3. Síntesis de control <math>\mathcal{H}_\infty</math> no lineal</b>	<b>20</b>
3.1 Formulación del problema . . . . .	20
3.2 Solución global en el espacio de estados . . . . .	23
3.3 Solución local en espacio de estados . . . . .	27
3.4 Control $\mathcal{H}_\infty$ para regulación de manipuladores mecánicos con fricción y sujetos a restricciones . . . . .	29
<b>4. Aplicación a sistemas mecánicos de 1 g.d.l.</b>	<b>35</b>
4.1 Sistema masa-resorte de 1 g.d.l. (usando un controlador por etapa de movimiento) . . . . .	35
4.1.1 Modelo dinámico . . . . .	35

4.1.2	Regulación de posición/fuerza mediante un controlador por modos deslizantes . . . . .	37
4.1.3	Análisis de estabilidad . . . . .	41
4.1.4	Simulación numérica . . . . .	42
4.1.5	Comentarios . . . . .	43
4.2	Sistema masa-resorte de 1 g.d.l. (usando un controlador para las tres etapas) . . . . .	45
4.2.1	Modelo dinámico . . . . .	45
4.2.2	Diseño del controlador por modos deslizantes . . . . .	47
4.2.3	Análisis de estabilidad . . . . .	49
4.2.4	Etapas de movimiento libre, restringido y transición . . . . .	52
4.2.5	Estudio experimental . . . . .	54
4.2.6	Comentarios . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>Aplicaciones a sistemas mecánicos de 2 g.d.l. completamente actuados</b>	<b>66</b>
5.1	Robot manipulador de 2 g.d.l. con un círculo como restricción . . . . .	66
5.1.1	Diseño del control por modos deslizantes . . . . .	69
5.1.2	Análisis de estabilidad . . . . .	70
5.1.3	Simulación numérica . . . . .	72
5.1.4	Comentarios . . . . .	76
5.2	Robot manipulador de 2 g.d.l. con una pared como restricción . . . . .	77
5.2.1	Diseño del controlador por modos deslizantes . . . . .	77
5.2.2	Análisis de estabilidad . . . . .	79
5.2.3	Simulación numérica . . . . .	81
5.2.4	Diseño del controlador $H_\infty$ . . . . .	87
5.2.5	Solución local al problema $H_\infty$ . . . . .	92
5.2.6	Simulación numérica . . . . .	94
5.2.7	Diseño del control por modos deslizantes con atenuador $H_\infty$ . . . . .	97
5.2.8	Síntesis $H_\infty$ . . . . .	102
5.2.9	Solución local al problema $H_\infty$ . . . . .	103
5.2.10	Simulación numérica . . . . .	104
5.2.11	Comentarios . . . . .	110
<b>6.</b>	<b>Aplicación a sistemas mecánicos sub-actuados de 2 g.d.l.</b>	<b>111</b>
6.1	Sistema mecánico bajo contacto con un sistema masa-resorte . . . . .	111
6.1.1	Modelo dinámico . . . . .	112
6.1.2	Diseño del control por modos deslizantes . . . . .	113
6.1.3	Análisis de estabilidad . . . . .	115
6.1.4	Simulación numérica . . . . .	117
6.2	Sistema masa-resorte de 2 g.d.l. con holgura como restricción, donde sus eslabones están unidos a través de cuñas . . . . .	122

6.2.1	Modelo dinámico . . . . .	122
6.2.2	Simulación numérica . . . . .	123
6.2.3	Comentarios . . . . .	126
6.3	Sistema masa-resorte de 2 g.d.l. con holgura como restricción . . . . .	128
6.3.1	Objetivo de control . . . . .	130
6.3.2	Diseño del control $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	132
6.3.3	Estudio experimental . . . . .	134
6.3.4	Comentarios . . . . .	136
6.3.5	Diseño de control modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	139
6.3.6	Análisis de estabilidad . . . . .	142
6.3.7	Síntesis $H_\infty$ . . . . .	147
6.3.8	Resultados experimentales . . . . .	150
6.3.9	Comentarios . . . . .	152
6.4	Sistema manipulador-masa-resorte . . . . .	155
6.4.1	Diseño del control $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	157
6.4.2	Simulación numérica . . . . .	159
6.4.3	Comentarios . . . . .	160
<b>7.</b>	<b>Aplicación en robot manipulador Pegasus de 3 g.d.l. con un muro como restricción</b>	<b>164</b>
7.1	Controlador por modos deslizantes . . . . .	164
7.1.1	Diseño del control . . . . .	166
7.1.2	Análisis de estabilidad . . . . .	167
7.2	Simulación numérica . . . . .	169
7.3	Experimentos en el robot Pegasus . . . . .	176
7.4	Controlador $H_\infty$ . . . . .	183
7.4.1	Diseño del control . . . . .	185
7.4.2	Solución local al problema $H_\infty$ . . . . .	188
7.5	Simulación numérica . . . . .	188
7.6	Experimentos en el robot Pegasus . . . . .	192
7.7	Comentarios . . . . .	195
7.8	Trabajo a futuro . . . . .	197
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>198</b>
<b>A.</b>	<b>Modelo dinámico de un robot manipulador de 2 g.d.l. con un muro como restricción</b>	<b>204</b>
<b>B.</b>	<b>Modelo dinámico del robot manipulador Pegasus de 3 g.d.l. con un muro como restricción</b>	<b>211</b>

## Lista de Figuras

Figura		Página
1	Esquemático de robot manipulador de dos grados de libertad (a) sin restricciones y (b) con restricciones. . . . .	6
2	Superficie deslizante $s = kx + \dot{x}$ en un sistema de segundo orden. . . . .	19
3	Interpretación geométrica del supergradiente próximo. . . . .	22
4	Sistema mecánico y restricción. . . . .	36
5	a) error de posición, b) derivada del error de fuerza, c) acción de control, d) fuerza en el resorte y e) plano de fase. . . . .	44
6	Características de la restricción del sistema mostrado en la Figura 4. El intervalo denota los posibles puntos de equilibrio. . . . .	47
7	Circuito electrónico emulando al sistema mecánico con una restricción unilateral de la Figura 4. . . . .	59
8	Error de posición vs. fuerza. Estas características fueron extraídas del circuito mostrado en la Figura 7, donde se puede notar la similitud con la Figura 6. . . . .	59
9	(a) Error de posición, (b) velocidad, (c) señal de control y (d) regulación de la fuerza deseada, obtenidos del sistema simulado (101) y el circuito electrónico de la Figura 7, con la ley de control (99)-(100). . . . .	60
10	Evolución de la variable deslizante $s(t)$ , obtenidos del sistema simulado (101) y el circuito electrónico de la Figura 7, con la ley de control (99)-(100). . . . .	61
11	Plataforma masa-resorte de la compañía Educational Control Products (ECP-210) configurada para tener una restricción unilateral. . . . .	62
12	Error de posición vs. fuerza. Similar al de la Figura 6, obtenidos de la plataforma (ECP-210) de la Figura 11, con la ley de control (99)-(100). . . . .	63
13	(a) Error de posición, (b) velocidad, (c) ley de control y (d) regulación de la fuerza deseada, obtenidos de la plataforma (ECP-210) de la Figura 11, con la ley de control (99)-(100). . . . .	64
14	Variable deslizante $s(t)$ , obtenida de la plataforma (ECP-210) de la Figura 11, con la ley de control (99)-(100). . . . .	65

Figura	Página	
15	Sistema mecánico de dos eslabones con una circunferencia como restricción. . . . .	68
16	a) Posición y velocidad del primer eslabón, b) posición y velocidad del segundo eslabón, c) movimiento deslizante ( $s$ ) y d) fuerza generada en el resorte. . . . .	74
17	Señal de control. . . . .	75
18	Fuerza vs. posición $q_1$ . . . . .	75
19	Robot manipulador de 2 g.d.l. y restricción en la posición. . . . .	77
20	Valores para el esbalón 1. . . . .	83
21	Valores para el esbalón 2. . . . .	84
22	Fuerza en el resorte $F_c$ . . . . .	85
23	Fuerza en el resorte $F_c$ vs. posición euclidiana del efector final $x_{r1}$ . . . . .	85
24	Errores de posición, velocidades, señales de control y fuerza ejercida en el resorte en el robot Pegasus. . . . .	95
25	Valores para el esbalón 1. . . . .	105
26	Valores para el esbalón 2. . . . .	106
27	Fuerza en el resorte $F_c$ . . . . .	107
28	Fuerza en el resorte $F_c$ vs. posición euclidiana del efector final $x_{r1}$ . . . . .	107
29	Ejemplo académico de un impacto entre dos sistemas dinámicos. . . . .	113
30	Error de posición y velocidad de masa $m_1$ . . . . .	119
31	Error de posición y velocidad de masa $m_2$ . . . . .	119
32	Movimiento deslizante ( $s$ ). . . . .	120
33	Fuerza generada en el resorte. . . . .	120
34	Señal de control. . . . .	121
35	Ejemplo académico de un impacto entre dos sistemas dinámicos. . . . .	122
36	Error de posición y velocidad de masa $m_1$ , error de posición y velocidad de masa $m_2$ , movimiento deslizante ( $s$ ), fuerza generada en el resorte, señal de control y fuerza vs. error de posición $x_1 - x^*$ . . . . .	125

Figura	Página	
37	Error de posición y velocidad de masa $m_1$ , error de posición y velocidad de masa $m_2$ , movimiento deslizante ( $s$ ), fuerza generada en el resorte, señal de control y fuerza vs. error de posición $x_1 - x^*$ . . . . .	127
38	Sistema mecánico restringido. . . . .	128
39	(a) Modelo de fuerza de contacto y (b) Aproximación monótona del modelo de fuerza de contacto. . . . .	130
40	Plataforma experimental ECP-210 modificada para tener una restricción de fuerza. . . . .	135
41	Resultados experimentales del controlador $\mathcal{H}_\infty$ considerando solo medición de la posición de las masas. . . . .	137
42	Resultados experimentales del controlador $\mathcal{H}_\infty$ considerando solo medición de la posición de las masas: caso perturbado. . . . .	138
43	Sistema mecánico restringido. . . . .	139
44	Plataforma experimental ECP-210 modificada para tener una restricción de posición. . . . .	151
45	Sistema en lazo cerrado usando el filtro $H_\infty$ para la retroalimentación de salida (caso no perturbado). . . . .	152
46	Sistema en lazo cerrado usando el filtro $H_\infty$ para la retroalimentación de salida (caso no perturbado). . . . .	152
47	Sistema en lazo cerrado usando el filtro $H_\infty$ para la retroalimentación de salida (caso no perturbado). . . . .	153
48	Sistema en lazo cerrado usando el filtro $H_\infty$ para la retroalimentación de salida (caso perturbado). . . . .	153
49	Sistema en lazo cerrado usando el filtro $H_\infty$ para la retroalimentación de salida (caso perturbado). . . . .	154
50	Sistema en lazo cerrado usando el filtro $H_\infty$ para la retroalimentación de salida (caso perturbado). . . . .	154
51	El sistema manipulador-masa-resorte es un ejemplo académico donde se presentan impactos entre dos sistemas dinámicos. . . . .	155

Figura	Página	
52	a) Posición del eslabón 1 $q_1$ y su estimación, b) posición del eslabón 2 $q_2$ y su estimación, c) Velocidad del eslabón 1 $q_3$ y su estimación, d) velocidad del eslabón 2 $q_4$ y su estimación. . . . .	161
53	a) Posición de la masa 3, b) velocidad de la masa 3, c) posición horizontal del efector final en el eslabón 2, d) regulación de la fuerza deseada (Newtons). . . . .	162
54	a) control $H_\infty$ (Newtons), b) compensador (Newtons), c) compensador + control $H_\infty$ (Newtons). . . . .	163
55	Robot PEGASUS con 3 g.d.l. y restricción en la posición . . . . .	165
56	Valores para la articulación $q_1$ . . . . .	170
57	Valores para la articulación $q_2$ . . . . .	171
58	Valores para la articulación $q_3$ . . . . .	172
59	Fuerza en el resorte $F_c$ . . . . .	173
60	Fuerza en el resorte $F_c$ vs. posición euclidiana del efector final $x_r$ . . . . .	173
61	Plataforma experimental desarrollada con el Robot pegasus. . . . .	176
62	Valores para la articulación $q_1$ (experimento). . . . .	177
63	Valores para la articulación $q_2$ (experimento). . . . .	178
64	Valores para la articulación $q_3$ (experimento). . . . .	179
65	Fuerza medida por el sensor (experimento). . . . .	180
66	Errores de posición, velocidades, señales de control y fuerza ejercida en el resorte en el robot Pegasus. . . . .	190
67	Valores para la articulación $q_1$ (experimento). . . . .	193
68	Valores para la articulación $q_2$ (experimento). . . . .	193
69	Valores para la articulación $q_3$ (experimento). . . . .	194
70	Fuerza medida por el sensor (experimento). . . . .	194
71	Robot manipulador de 2 g.d.l. . . . .	204
72	Robot manipulador de 2 g.d.l. y restricción en la posición. . . . .	209
73	Robot PEGASUS con 3 g.d.l. . . . .	212

74	Robot PEGASUS con 3 g.d.l. y restricción en la posición. . . . .	224
----	--	-----

## Lista de Tablas

Tabla		Página
1	Parámetros del manipulador de 2 g.d.l. . . . .	82
2	Ganancias del controlador y perturbaciones externas de la planta, control por modos deslizantes . . . . .	86
3	Condiciones iniciales, ganancias del controlador y perturbaciones externas de la planta, controlador $H_\infty$ . . . . .	96
4	Condiciones iniciales y ganancias del controlador por modos deslizantes con atenuador $H_\infty$ . . . . .	108
5	Parámetros de la planta y ganancias del controlador por modos deslizantes con atenuador $H_\infty$ . . . . .	109
6	Condiciones iniciales y ganancias del controlador (314) por modos deslizantes (simulación) . . . . .	174
7	Ganancias del controlador (314), perturbaciones externas y parámetros de la planta, control por modos deslizantes (simulación) . . . . .	175
8	Condiciones iniciales y ganancias del controlador (314) por modos deslizantes (experimentos) . . . . .	181
9	Ganancias del controlador (314) y perturbaciones externas de la planta, control por modos deslizantes (experimentos) . . . . .	182
10	Condiciones iniciales, ganancias del controlador (341) y perturbaciones externas de la planta, control $H_\infty$ (simulación) . . . . .	191
11	Condiciones iniciales, ganancias del controlador (341) y perturbaciones externas de la planta, control $H_\infty$ (experimentos) . . . . .	192

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Formulación del problema

Muchas aplicaciones en la industria involucran sistemas mecánicos que interactúan con el ambiente. Ejemplos de ellos se pueden encontrar en aplicaciones de manufactura automatizada, materiales manejados por robots y aplicaciones espaciales. En estas aplicaciones, un factor importante es poder lograr modelar completamente el sistema y las restricciones.

En la mayoría de los sistemas mecánicos con restricciones, la naturaleza de la restricción es descrita por un comportamiento unilateral. La restricción, casi siempre, divide el espacio de trabajo del sistema mecánico en dos regiones, una región donde la restricción es estrictamente satisfecha y el sistema mecánico evoluciona libremente y otra región definida por la violación de la restricción. El tipo de restricciones consideradas en este trabajo son de posición, donde los sistemas tienen impactos, es decir que un dispositivo mecánico colisiona con otro dispositivo. Algunas aplicaciones de sistemas mecánicos con restricciones son operaciones de desbarbado, molienda, perfilado, esmerilado.

El problema que se aborda en la tesis es regulación de fuerza y posición en sistemas mecánicos con restricciones y fricción seca, donde la fricción se modela como fricción viscosa más fricción de Coulomb o fricción de Dahl, a su vez se supone que los sistemas están sujetos a perturbaciones externas. Existe la posibilidad de que se presenten im-

pactos debido a la restricción en el espacio de trabajo (unilateral o bilateral), esto ocurre debido a la interacción del sistemas mecánico con el ambiente. Esto significa que los sistemas mecánicos colisionan con una restricción que se representa físicamente como una superficie u otro sistema mecánico. Algunos trabajos anteriores de sistemas mecánicos con restricciones se pueden encontrar en Mansard y Khatib (2008) donde proponen un controlador continuo para sistemas con restricciones unilaterales con aplicación a tareas de control visual y Indri y Tornambé (2001) donde diseñan un controlador para regulación de posición para un sistema mecánico sujeto a impactos suaves.

En el presente trabajo de tesis los sistema mecánicos y restricciones se modelan como un solo sistema. Este modelo nos permite desarrollar un solo controlador cuyo propósito es alcanzar el contacto con la restricción y mantener ese contacto y una vez logrado esto, el control deberá regular la posición del efector final o fuerza ejercida en el efector final contra una restricción física.

Anteriormente se han realizado investigaciones en el área de control de robots con restricciones en la posición. Muchos de estos trabajos son basados en la suposición de que el sistema mecánico ya se encuentra en contacto con la restricción. Sin embargo, en muchas aplicaciones el sistema mecánico evoluciona en movimiento libre antes de estar en movimiento restringido Mansard *et al.* (2009). La conmutación de movimiento restringido a movimiento libre no presenta dificultades, comparado con la conmutación de movimiento libre a movimiento restringido Tornambé (1996); Potini *et al.* (2006). Esto se debe a que cuando se presentan impactos entre dos sistemas mecánicos se produce un cambio repentino en el sentido de la velocidad de ambos sistemas. La transición de movimiento libre a movimiento restringido puede generar cambios repentinos en forma de fuerzas impulsivas que afectan a los sistemas mecánicos, para mas detalles consultar Brogliato (1999) y sus referencias. Dupree *et al.* (2006) presentan un problema de un

robot de dos grados de libertad (2-g.d.l.) que colisiona con un sistema masa-resorte, pero no considera fricción ni perturbaciones, facilitándose de esta manera que se logre demostrar estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Perez *et al.* (2010) utilizan funciones de transferencia discretas para el problema de regulación de posición. Además, el control utiliza una técnica de modos deslizantes predictivos y se diseña para restringir la señal de control y ser robusto con respecto a perturbaciones en la salida y errores del modelo. Por lo tanto ese trabajo aborda el control de sistemas modelados en tiempo discreto.

Nowacka-Leverton y Bartoszewicz (2008) consideran un sistema variante en el tiempo de segundo orden donde se diseña un controlador por modos deslizantes para hacer frente a restricciones de la señal de entrada y de velocidad, además de perturbaciones externas e incertidumbre paramétrica.

Por otra parte en Haghshenas-Jaryani y Vossoughi (2009) proponen un controlador continuo por modos deslizantes para un sistema mecánico con restricciones holonómicas, donde se considera fricción de Coulomb. Rubagotti y Ferrara (2010) consideran restricciones en el control y en los estados, a su vez se propone un controlador por modos deslizantes de segundo orden para sistemas no lineales. El controlador es robusto con respecto a perturbaciones externas.

Pekarek y Murphey (2011) diseñan un control óptimo para hacer frente a impactos elásticos en sistemas lagrangianos con restricciones unilaterales. De igual manera Or y Ames (2011) desarrollan un control óptimo para sistemas híbridos lagrangianos con restricciones unilaterales.

Morarescu y Brogliato (2010) desarrollan un controlador conmutado para una clase de sistemas lagrangianos no suaves completamente actuados sujeto a restricciones unilaterales, donde no se considera fricción. A su vez desarrollan un controlador específico

para cada etapa de movimiento correspondiente. Rengifo *et al.* (2009) proponen un controlador PD para controlar un sistema mecánico con restricciones unilaterales con fricción de Coulomb.

Finalmente, Bourgeot y Delaleau (2007) propone un estimador para detectar impactos durante la evolución de las trayectorias en sistemas lineales sujetos a restricciones unilaterales, donde solamente se tienen mediciones de la posición, las cuales pueden estar corrompidas por ruido.

### 1.1.1 Sistemas mecánicos con restricciones en la posición

Debido a que existe un gran interés en el problema de control de sistemas mecánicos, el caso de control de posición/fuerza ha recibido atención de la comunidad científica. En el problema de control de sistemas mecánicos se supone que el sistema evoluciona sobre un espacio con obstáculos y se describe por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias dadas por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F(\dot{q}) = \tau + f(q) + w(t) \quad (1)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia la cual es positiva-definida,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  contiene los términos de Coriolis y fuerzas centrífugas,  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitacionales generalizados,  $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas de fricción que actúan independientes en cada eslabón,  $\tau \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas de control y  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de perturbaciones desconocidas. A su vez definimos el término  $f(q) \in \mathbb{R}^m$  que representa el conjunto de fuerzas de restricción ya sean unilaterales o bilaterales, es decir, el subespacio  $\Phi \subset \mathbb{R}^n$  donde el sistema evoluciona cuando se encuentra restringido; cabe mencionar que se utilizan restricciones del tipo flexibles a lo largo de éste trabajo de tesis. Consideramos una

restricción unilateral flexible como en la Definición 1 y una restricción bilateral flexible como en la Definición 2 definidas a continuación

**Definición 1.** *Sea un sistema lagrangiano descrito por un conjunto de coordenadas generalizadas  $q \in \mathbb{R}^n$  y  $f_i(q)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , un conjunto de funciones no lineales de codimensión 1 en la configuración de espacio del sistema. La desigualdad  $f(q) \geq 0$  define un subespacio del espacio de configuración, llamado  $\Phi = \{q : f(q) \geq 0\} = \bigcap_{i=1}^m \{q : f_i(q) \geq 0\}$ , donde el sistema se encuentra restringido en su evolución.*

**Definición 2.** *Sea un sistema lagrangiano descrito por un conjunto de coordenadas generalizadas  $q \in \mathbb{R}^n$  y  $f_i(\Delta q)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , un conjunto de funciones no lineales de codimensión 1 en la configuración de espacio del sistema. Cuando  $0 \geq f(\Delta q) \geq c$  donde  $c \in \mathbb{R}^+$  define un subespacio del espacio de configuración, llamado  $\Phi = \{q : 0 \geq \Delta q \geq c\} = \bigcap_{i=1}^m \{q : 0 \geq \Delta q \geq c\}$ , donde el sistema se encuentra restringido en su evolución.*

Las Definiciones 1 y 2 se obtuvieron a partir de la definición de restricción unilateral rígida encontrada en Brogliato (1999), página 19. Se supone que el sistema evoluciona alrededor de un subconjunto limitado, donde las fuerzas de interacción entre la extremidad del manipulador y el obstáculo se deben considerar en el análisis, véase Brogliato *et al.* (2006). Cabe recalcar que se utilizan restricciones flexibles, es decir que no hay cambios instantáneos en la velocidad del efector final al hacer contacto con la restricción. Algunos trabajos previos sobre restricciones flexibles se pueden encontrar en Goldsmith (1996); Brogliato y Orhant (1998); Dupree *et al.* (2006). Para la clase de sistemas como en (1), que son linealizables completamente, se han propuesto algunos tipos de controladores anteriormente (véase e.g., Mansard y Khatib (2008); Indri y Tornambé (2001) y las citas dentro de ellas).

En la Figura 1 se muestra una representación esquemática de un sistema en movimiento

libre y otro restringido.

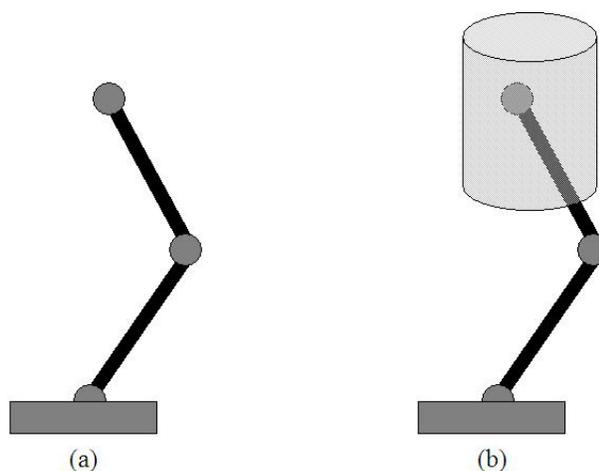


Figura 1. Esquemático de robot manipulador de dos grados de libertad (a) sin restricciones y (b) con restricciones.

### 1.1.2 Estrategias de control

Se aborda el problema de control de sistemas mecánicos con restricciones en la posición a través de la aplicación de técnicas de control por modos deslizantes: Utkin (1992); Emelyanov *et al.* (1986), control  $\mathcal{H}_\infty$ : Doyle *et al.* (1989); Van der Schaft (1992); Isidori y Astolfi (1992); Aguilar *et al.* (2003) y de control modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$ : Xiaoqiu y DeCarlo (2001); Lian y Zhao (2010); Ghafari-Kashani *et al.* (2010); Castaños y Fridman (2011).

### 1.1.3 Problema de control por modos deslizantes

El control por modos deslizantes es reconocido por ser una herramienta eficiente para diseñar controladores robustos para plantas dinámicas no lineales de alto orden las cuales operan bajo condiciones de incertidumbre. La investigación en esta área fue ini-

ciada en la antigua Unión Soviética hace alrededor de 60 años y ha recibido mucha más atención de la comunidad de control internacional dentro de las dos últimas décadas véase Bartolini *et al.* (2008); Fridman *et al.* (2011). La mayor ventaja de los modos deslizantes es la baja sensibilidad respecto a variaciones de los parámetros de la planta y perturbaciones, las cuales eliminan la necesidad de un modelo exacto. El control por modos deslizantes supone que las acciones de control son funciones de estados discontinuos los cuales pueden ser fácilmente implementados por convertidores de energía convencionales con ‘encendido-apagado’ como el único modo de operación. Por ello la investigación ha ido creciendo ya que ha demostrado ser aplicable para un amplio rango de problemas como en robótica, accionadores eléctricos y generadores, control de procesos, vehículos y control de movimiento, entre otros. Detalles sobre la solución de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo se puede encontrar en Filippov (1988).

Muchos sistemas físicos naturalmente requieren el uso de términos discontinuos en sus modelos dinámicos. Este es, por ejemplo, el caso de sistemas mecánicos con fricción véase Orlov *et al.* (2003); Orlov (2009). Este hecho fue reconocido y aprovechado ventajosamente desde el comienzo mismo del siglo XX para la regulación de una gran variedad de sistemas dinámicos. La clave de este nuevo enfoque era la teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo utilizada por primera vez por grupos académicos de la antigua Unión Soviética.

Sobre esta base, las estrategias de control discontinuo aparecieron a mediados del siglo XX bajo el nombre de teoría de sistemas de estructura variable. Dentro de este punto de vista, las entradas de control toman valores de un conjunto discreto, como los límites extremos de un relevador. Basados en estos principios, una de las técnicas más populares fue creada y desarrollada desde los 1950’s y popularizado por el artículo

seminal de Utkin (1977). La característica esencial de esta técnica es la elección de una superficie deslizante en función del espacio de estados acorde con las especificaciones de la dinámica deseada del sistema en lazo cerrado. La lógica de conmutación, y así la ley de control, son diseñadas tal que las trayectorias de estados alcancen la superficie y permanezcan en ella. Las principales ventajas de este método son:

Es robusto contra una amplia clase de perturbaciones o incertidumbres del modelo.

La posibilidad de estabilización de algunos sistemas no lineales los cuales no son estabilizables por leyes continuas de retroalimentación de estados.

Los modos deslizantes de alto orden han demostrado tener una alta exactitud y robustez con respecto a perturbaciones internas y externas, también se revela su principal inconveniente: el llamado efecto “chattering”, es decir, peligrosas vibraciones de alta frecuencia del sistema controlado, véase Stassinopoulos y Vinter (1977); Noh y Smith (1980). Este fenómeno se refiere a la aparición de oscilaciones, de amplitud y frecuencia finita, en el estado de la planta debido a la excitación por parte del control discontinuo de dinámicas no modeladas en sensores y actuadores. Como dinámicas no modeladas se tienen, por ejemplo, zonas muertas, saturaciones, histéresis y el ancho de banda limitado de los actuadores.

Es importante recalcar que el término “chattering” no se refiere a la conmutación del controlador, que idealmente debe ser de frecuencia infinita, sino a las oscilaciones en el estado del sistema.

Para evitar “chattering”, se propusieron algunas soluciones en Slotine (1984); Levantovsky (1985); más recientemente algunos trabajos de supresión de “chattering” se pueden encontrar en Bartolini (1989); Bartolini *et al.* (2000). La idea principal era cambiar las dinámicas en una pequeña vecindad de la superficie discontinua con el fin de evitar discontinuidad real y al mismo tiempo conservar las propiedades principales

del sistema entero. Sin embargo, la gran exactitud y robustez de los modos deslizantes se perdió de manera parcial. Recientemente se desarrollaron los modos deslizantes de orden superior (por sus siglas en inglés HOSM, *High Order Sliding Modes*) los cuales remueven totalmente el efecto de “chattering” y proporcionan una alta exactitud en alcanzar el objetivo de control. Este tipo de controladores fueron descritos en la literatura Bartolini *et al.* (1997, 1998); Emelyanov *et al.* (1986); Levantovsky (1985); Levant (1993, 1998).

Algunas aplicaciones más recientes de modos deslizantes de orden superior se pueden encontrar en Orlov *et al.* (2008) donde se presentan resultados referentes a la estabilización orbital de sistemas subactuados: síntesis del algoritmo, verificación experimental y la aplicación de control para balanceo. Así mismo en Loukianov *et al.* (2008) se presenta un bloque de control por modos deslizantes de alto orden para sistemas no lineales sin modelado de actuadores, aplicado a sistemas de energía eléctrica y servomotores electrohidráulicos. En Kaveh y Shtessel (2008) otra aplicación es la regulación de glucosa en la sangre a través de control de doble lazo por modos deslizantes de alto orden y tasa de muestreo múltiple. En Pisano y Usai (2008) se presenta la regulación de fuerza de contacto en pantógrafos actuados por cables. En Patel *et al.* (2006) podemos encontrar un esquema de modos deslizantes para frenado óptimo y estimación del camino con un neumático con fricción. En Sabanovic *et al.* (2006) se encuentra la aplicación de control por modos deslizantes para nano-posicionadores. En Bartolini *et al.* (2006) la aproximación por modos deslizantes de alto orden para el control y estimación de unidades de arranque eléctricas. En Zinober *et al.* (2006) se encuentra el control de seguimiento por retroalimentación de salida de fase no mínima para convertidores de energía de corriente directa a corriente directa (CD a CD). En Punta (2006) encontramos la aplicación de control multivariable por modos deslizantes de segundo orden

para sistemas mecánicos. Defoort *et al.* (2006) también aplican control por modos deslizantes de alto orden para un motor a pasos.

Se utiliza la metodología de control por modos deslizantes para resolver el problema de regulación de fuerza o posición cuando se tiene contacto con la restricción. La principal característica de esta clase de controladores es que nos permite que el modo deslizante ocurra sobre una superficie de conmutación predeterminada, de tal forma que el sistema es gobernado por una sola ecuación deslizante y permanece insensible a cierta clase de perturbaciones y variaciones paramétricas, consultar Utkin (1978, 1992). Este tipo de controladores ha sido utilizado exitosamente en control de movimiento de robots manipuladores, véase Sabanovic *et al.* (2008) y sus referencias. Por otra parte un trabajo de control por modos deslizantes aplicado a robots con restricciones fue presentado en Lian y Lin (1998). En nuestro caso, se propone un algoritmo de control por modos deslizantes utilizando una superficie deslizante dinámica, la cual es diseñada para regulación de posición. El controlador utiliza mediciones de los errores de posición y velocidades, cuyo propósito, en el caso de regulación de fuerza es comprimir el resorte sin exceder la fuerza deseada en él. Esto es debido a que un sobretiro en la fuerza del resorte puede generar una pérdida de contacto entre los sistemas mecánicos. Un detalle importante a considerar es que el controlador no necesita mediciones exactas de las fricciones de Coulomb ni de la amplitud de las perturbaciones, solamente sus cotas superiores. Para probar estabilidad del sistema mecánico controlado se utilizan herramientas de funciones cuadráticas, algunas referencias pueden encontrarse en Paden y Sastry (1987); Shevitz y Paden (1994); Kazerooni (1990); Branicky (1998). Estas herramientas nos permiten que la fuerza en el resorte converja asintóticamente a la referencia deseada una vez que se llega a la superficie deslizante, además de probar convergencia en tiempo finito hacia la superficie deslizante.

### 1.1.4 Problema de control por $\mathcal{H}_\infty$

En 1981, Zames plantea el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para el caso escalar basado en la respuesta entrada-salida. La solución del problema la obtienen Zames y Francis en 1984 y posteriormente los mismos autores extienden los resultados para el caso multivariable. Es a partir de Doyle *et al.* (1989) cuando se impulsa la solución algorítmica de los problemas de control  $\mathcal{H}_\infty$  en el espacio de estados, obteniéndose un controlador de la misma dimensión que la planta ampliada o también denominada planta generalizada (constituida por el modelo del proceso junto con las matrices de ponderación que constituyen las especificaciones de diseño). Los algoritmos desarrollados en el espacio de estados se caracterizan por basarse en la solución de un par de ecuaciones algebraicas de Riccati desacopladas, partiendo de las matrices de estado de la planta generalizada. Otro enfoque de la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  se relaciona con la teoría de juegos Basar (1990); esto es, se debe pensar en el diseñador por un lado y en el medio ambiente por otro lado, y el objetivo del diseñador es elegir un controlador que estabilice el sistema y sea óptimo con respecto a un criterio dado mientras que el medio exterior tiene como objetivo hacer fracasar la estrategia del diseñador por medio de la elección de la peor perturbación posible que actúe sobre la planta a controlar. A partir de estas ideas Ravi *et al.* (1991) extiende la teoría  $\mathcal{H}_\infty$  hacia sistemas lineales variantes en el tiempo basados en la solución de un par de ecuaciones diferenciales de Riccati. Van der Schaft (1992) e Isidori y Astolfi (1992) presentan la solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para el caso global y local de sistemas no lineales invariantes en el tiempo con retroalimentación de estados y salida respectivamente. La solución del problema consiste en resolver dos ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs (caso global) o ecuaciones de Riccati (caso local). Recientemente, Aguilar *et al.* (2003) extienden la solución hacia sistemas no lineales

variantes en el tiempo con retroalimentación de salida. Finalmente, en Aguilar *et al.* (2003) se resolvió el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas no suaves variantes en el tiempo

Estas estrategias para encontrar controladores  $\mathcal{H}_\infty$  se utilizan hasta la fecha, y ellas tienen en común que las dinámicas suaves no se encuentran restringidas. En el presente trabajo se muestra que la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal se puede extender a sistemas lineales y no lineales invariantes en el tiempo con restricciones unilaterales y bilaterales.

El diseño de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  que se presenta en esta tesis se basa en la teoría de juegos de Basar (1990) y el análisis de la ganancia  $\mathcal{L}_2$  de Isidori y Astolfi (1992) y Van der Schaft (1992). En el análisis se presentan las condiciones suficientes para la existencia de una solución global del problema en función de la solución de dos desigualdades de Hamilton-Jacobi e Isaacs. Así mismo, se sigue la línea de razonamiento propuesta por Orlov (2009) donde la correspondiente expresión de Hamilton-Jacobi-Isaacs requiere que sea semidefinida negativa en lugar de definida negativa. Esto permite desarrollar un procedimiento de diseño que no obliga al sistema de control a tener las condiciones de estabilidad y detectabilidad de Doyle *et al.* (1989). Aquí el problema es encontrar la correspondiente solución de las ecuaciones diferenciales de Riccati cuando el sistema está bajo restricciones.

### 1.1.5 Problema de control por modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$

Es una manera relativamente novedosa de abordar problemas de regulación de posición en sistemas mecánicos. En este trabajo de tesis extendemos la aplicación de este tipo

de controladores para regulación de fuerza en sistemas mecánicos con restricciones. Algunas referencias recientes de este tipo de trabajos las podemos encontrar en Lian y Zhao (2010); Ghafari-Kashani *et al.* (2010); Castaños y Fridman (2011). Básicamente es un controlador por modos deslizantes que involucra un diseño de control  $H_\infty$  en su superficie deslizante. El motivo de este diseño es que el control por modos deslizantes elimine ciertas incertidumbres paramétricas y perturbaciones acopladas al sistema, por otra lado, la parte correspondiente a  $H_\infty$  atenuará incertidumbres y perturbaciones no acopladas al sistema, logrando de esta manera que las trayectorias del sistema permanezcan acotadas alrededor del punto de referencia.

La metodología para resolver el problema de regulación en sistemas mecánicos con restricciones unilaterales en la posición fue abordada por Brogliato *et al.* (1997) anteriormente. En Xiaoqiu y DeCarlo (2001) se desarrolla un control por modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$  para una clase de sistemas con retardos en el tiempo.

Por otra parte en Loukianov *et al.* (2009) se diseña un bloque de control por modos deslizantes combinado con un bloque de  $\mathcal{H}_\infty$  para resolver localmente el problema de seguimiento de trayectoria caótica en un sistema electrohidráulico sujeto a entradas de control acotadas.

En Tseng (2005) se construye un controlador tipo PID para robots con restricciones donde se mezcla un control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para atenuar la influencia de perturbaciones e incertidumbre.

En Ghafari-Kashani *et al.* (2010) se diseña un controlador integral utilizando control no lineal  $\mathcal{H}_\infty$  y modos deslizantes para un motor síncrono de imán permanente. Otro ejemplo de este tipo de controladores está en Castaños y Fridman (2011) donde se utiliza un controlador por modos deslizantes con un enfoque  $\mathcal{H}_\infty$  para control de salida. A su vez Shen (2002) presenta un control que mezcla las metodologías de  $\mathcal{H}_\infty$  y modos

deslizantes para controlar un sistema magnético de levitación.

Por otro lado en Vidal-Idiarte *et al.* (2006) se utiliza una estrategia de  $\mathcal{H}_\infty$  y modos deslizantes para control de corriente en un convertidor conmutado. Finalmente en Castaños y Fridman (2006) se analiza y diseña un control integral por modos deslizantes combinado con  $\mathcal{H}_\infty$  para controlar sistemas con perturbaciones desacopladas.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo principal

El objetivo de esta tesis es resolver el problema de regulación de posición o fuerza en sistemas mecánicos con restricciones en la posición, considerando que en el modelo existe incertidumbre paramétrica, fricción de Coulomb o dinámica y perturbaciones externas. Debido a las ventajas anteriormente mencionadas, se decide resolver el problema a través de las técnicas de control de: modos deslizantes integrales,  $\mathcal{H}_\infty$  y una técnica novedosa de modos deslizantes integrales que involucra en su diseño la metodología de  $\mathcal{H}_\infty$ ; estas tres técnicas se utilizan para sistemas no lineales invariantes en el tiempo.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Los objetivos particulares del problema de regulación para sistemas mecánicos con restricciones en la posición

Diseño de control por modos deslizantes y su verificación experimental para regulación de posición y fuerza considerando fricción de Coulomb, perturbaciones externas e incertidumbre paramétrica.

Control  $\mathcal{H}_\infty$  para regulación de posición y fuerza considerando fricción dinámica de

Dahl, perturbaciones externas y error en las mediciones de las posiciones.

Control por modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$  para regulación de posición y fuerza considerando fricción dinámica de Dahl, perturbaciones externas, incertidumbre paramétrica y error en las mediciones de las posiciones.

### 1.3 Metodología

Para resolver el problema de control se propone primeramente encontrar en forma analítica el modelo dinámico que describe el comportamiento de los sistemas mecánicos con restricciones en la posición a través de los métodos de Lagrange, véase Barrientos *et al.* (1997) o aplicando sumatoria de fuerzas. Después se aplica la técnica de controladores por modos deslizantes,  $\mathcal{H}_\infty$  y modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$  para resolver el problema de regulación de posición y/o fuerza asumiendo retroalimentación de estados y retroalimentación de salida, donde solamente las posiciones están disponibles para medición, a su vez se consideran incertidumbres paramétrica, fricción seca y perturbaciones externas. Para demostrar estabilidad del sistema en lazo cerrado utilizando los controladores por modos deslizantes y modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$  se utilizan herramientas de Lyapunov, consultar Shevitz y Paden (1994); Branicky (1998).

### 1.4 Organización del trabajo

El trabajo está organizado de la siguiente manera: el Capítulo II es una reseña de las metodologías de control  $\mathcal{H}_\infty$  y modos deslizantes aplicadas a sistemas mecánicos con restricciones en la posición. En el Capítulo III se aplican algunos de los controladores antes mencionados a sistemas mecánicos de 1 g.d.l. con restricciones en la posición. En

el Capítulo IV se aplican los tres tipos de controladores propuestos para mecánicos de 2 g.d.l. completamente actuados, utilizando retroalimentación de estados y de salida. En el Capítulo V se aplican las mismas técnicas de control en sistemas mecánicos de 2 g.d.l. sub-actuados con restricciones en la posición. En el Capítulo VI se controla el robot Pegasus de 3 g.d.l. con un muro como restricción en la posición, utilizando las técnicas de los capítulos anteriores: modos deslizantes,  $\mathcal{H}_\infty$  y modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$ . En el Capítulo VII se ofrecen conclusiones de este trabajo.

## Capítulo 2

### Introducción a modos deslizantes

Según lo presentado en Filippov (1988), algunos sistemas dinámicos contienen términos discontinuos, sea por naturaleza propia o por diseño, que al conmutar a frecuencias teóricamente infinitas confinan las trayectorias del estado a una superficie de deslizamiento. A la dinámica del sistema dentro de esta superficie se le denomina modo deslizante.

Considérense los sistemas descritos por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (2)$$

donde  $t \in \mathbb{R}^+$  representa el tiempo,  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  son las entradas y  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  denota el campo vectorial que describen las trayectorias del sistema. Se definen  $k$  superficies de deslizamiento como el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^n$  que satisfacen

$$s_i(x) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (3)$$

donde  $s_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es suficientemente suave.

Para la existencia de modos deslizantes debe cumplirse que, dada cualquier condición inicial, el estado (2) converja a la intersección de las superficies (3) en tiempo finito.

En el proceso de diseño, la condición de alcanzabilidad se satisface asegurando que se cumple la siguiente desigualdad, véase Utkin (1977)

$$s\dot{s} < 0, \quad (4)$$

lo cual deriva de las nociones de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Una vez alcanzada la superficie de deslizamiento en un tiempo finito  $t_r$ , el sistema no la abandona, lo cual implica el cumplimiento de la igualdad

$$\dot{s} = 0, \quad \forall t > t_r, \quad (5)$$

además, el sistema experimenta una reducción de orden dada por  $n - k$ , lo cual se denomina desacoplamiento.

De mayor relevancia en términos de control es la propiedad de invariancia, según la cual las trayectorias del sistema, una vez en (3), no dependen de la planta, incertidumbres paramétricas o perturbaciones externas. Con esto, el problema de control por modos deslizantes implica el diseño de una superficie en la cual el sistema tenga un comportamiento deseado.

La Figura 2 muestra la trayectoria del plano de fase siendo estabilizada por un controlador por modos deslizantes. Después de la etapa de alcance, los estados del sistema se deslizan a través de la línea  $s = 0$ . Se selecciona la superficie particular  $s = 0$  debido a que reduce el orden de la dinámicas del sistema cuando se encuentran restringidas a ésta. En este caso, la superficie  $s = cx + \dot{x}$  corresponde al sistema de segundo orden  $\ddot{x} = -c\dot{x} + u$ .

## 2.1 Método de control equivalente

Este procedimiento se emplea para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema una vez que ha llegado a la superficie de deslizamiento, véase Utkin (1977). Se aplica a sistemas lineales con respecto a la entrada,

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (6)$$

con  $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $x, f, u$  como ya se definieron en (2).

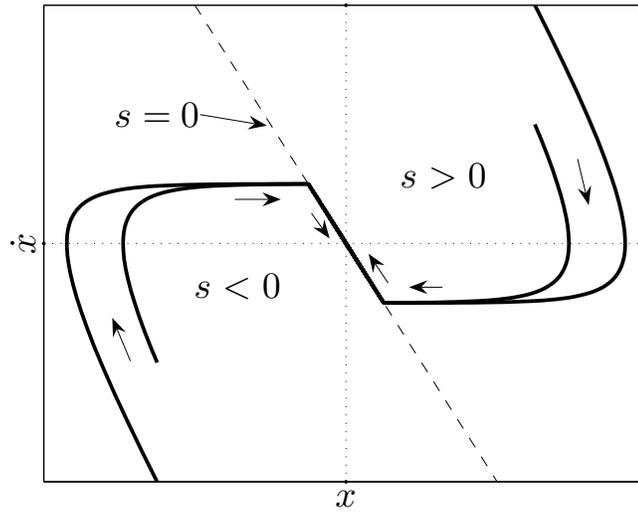


Figura 2. Superficie deslizante  $s = kx + \dot{x}$  en un sistema de segundo orden.

Dado que al llegar a la superficie el sistema no lo abandona, al considerar (5) y (6) se tiene que

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0, \quad (7)$$

donde

$$G = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (8)$$

y el control equivalente  $u_{eq}$  corresponde a la sustitución de la entrada discontinua por un control continuo que mantiene al sistema en la superficie  $s = 0$ , es decir,

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}Gf, \quad (9)$$

cuidando que la matriz  $GB$  sea no singular.

## Capítulo 3

### Síntesis de control $\mathcal{H}_\infty$ no lineal

#### 3.1 Formulación del problema

Considérese un sistema no lineal con la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^3 f_i(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w \end{aligned} \tag{10}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  son las perturbaciones desconocidas,  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  es la salida virtual y  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es la variable disponible para medición en el sistema.

Las siguientes suposiciones son tomadas de Doyle *et al.* (1989); Isidori y Astolfi (1992); Aguilar *et al.* (2003).

**(A1)**  $f_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $h_1(0) = 0$  y  $h_2(0) = 0$ .

**(A2)** Las funciones  $f_1(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$ ,  $k_{12}(x)$  y  $k_{21}(x)$  son al menos dos veces continuamente diferenciables en  $x$  alrededor del origen  $x = 0$ .

**(A3)** La función  $f_2(x)$  es localmente Lipschitz en  $x$  alrededor del origen  $x = 0$ .

**(A4)** El vector  $\zeta = 0$  es un supergradiente próximo uniforme en tiempo de los componentes  $f_{2i}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de la función  $f_2(x)$  en  $x = 0$ .

(A5)

$$\begin{aligned} h_1^T(x)k_{12}(x) &= 0, & k_{12}^T(x)k_{12}(x) &= I, \\ k_{21}(x)g_1^T(x) &= 0, & k_{21}(x)k_{21}^T(x) &= I. \end{aligned}$$

Estas suposiciones son hechas por razones técnicas. La suposición (A1) asegura que el origen sea un punto de equilibrio del sistema dinámico (10) considerando que no existe una entrada aplicada ( $u = 0$ ) y perturbaciones ( $w = 0$ ). Las suposiciones (A2) y (A3), garantizan que el sistema está planteado en forma adecuada. La suposición (A3) admite no linealidades no suaves. En el subsecuente análisis local de la planta, las no linealidades no suaves serán incluidas en el término  $f_2(x)$ , los términos suaves serán incluidos en  $f_1(x)$ , mientras que los términos restrictivos serán incluidos en  $f_3(x)$  el cual se supone suave. Aunque  $f_1(x)$  y  $f_3(x)$  pueden ser contenidos en una sola expresión, se mantendrán de esta manera para enfatizar la presencia de la restricción en el sistema.

La suposición (A4) implica que la función no suave  $f_2(x)$  es cóncava en el origen (ver Clarke (1983) para detalles). Un vector  $\zeta(\hat{x}) \in \mathbb{R}^n$  se dice que es el supergradiente próximo de la función escalar  $f(x)$  en  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$  si existe algún número  $\sigma(\hat{x}) > 0$  tal que

$$f(x) \leq f(\hat{x}) + \zeta^T(\hat{x})(x - \hat{x}) + \sigma(\hat{x})\|x - \hat{x}\|^2 \quad (11)$$

para todo  $x$  en una vecindad  $U(\hat{x})$  alrededor de  $\hat{x}$ . El conjunto  $\partial^P f(\hat{x})$  de supergradientes próximos de  $f$  en  $\hat{x}$  será nombrado como el superdiferencial próximo de  $f$  en  $\hat{x}$ , tal que los componentes  $f_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  de la función  $f_2(x)$  son cóncavos debido a que

$$0 \in \partial^P f_{2i}(0) \quad (12)$$

o de manera equivalente

$$f_{2i}(x) \leq \sigma\|x\|^2 \quad (13)$$

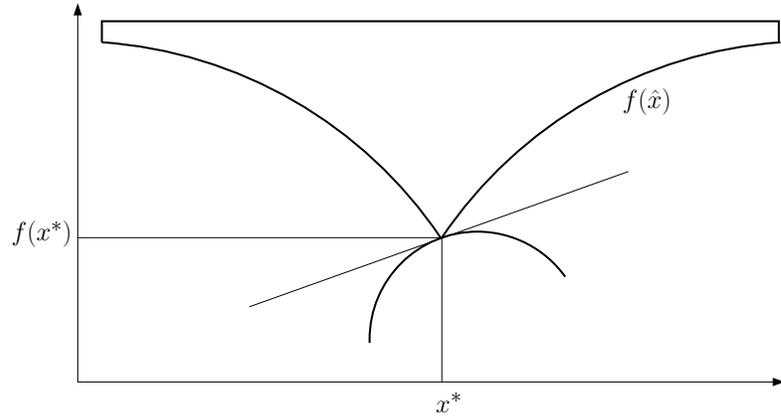


Figura 3. Interpretación geométrica del supergradiente próximo.

para un  $\sigma > 0$  y todo  $x \in U(0)$ .

La existencia de un supergradiente próximo  $\zeta$  en un punto de  $\hat{x}$  corresponde a la posibilidad de aproximar la función  $f$  por abajo por una función cuya gráfica es una parábola. El punto  $(\hat{x}, f(\hat{x}))$  es un punto de contacto entre la gráfica de  $f$  y la parábola y  $\zeta$  es la pendiente de la parábola en ese punto (ver figura 3).

La suposición (A5) simplifica el desarrollo del problema de control, y es una simplificación heredada del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  (ver Doyle *et al.* (1989)).

Las suposiciones (A1)-(A5), juntas, permiten linealizar las desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs correspondientes, las cuales a su vez permiten obtener una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

Un compensador dinámico causal

$$u = \mathcal{K}(\xi), \quad \dot{\xi} = \eta(\xi, y) \quad (14)$$

con estados internos  $\xi \in \mathbb{R}^s$ , se dice ser un controlador admisible si el sistema en lazo cerrado (10), (14) es asintóticamente estable en forma global cuando  $w = 0$ .

Dado un número real  $\gamma > 0$ , se dice que el sistema (10), (14) tiene una ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor a  $\gamma$  si la respuesta  $z$ , resultante de  $w$  para el estado inicial  $x(0) = 0$ ,  $\xi(0) = 0$ ,

satisface

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (15)$$

para todo  $T > 0$  y todas las funciones continuas  $w(t)$ .

El problema de control no suave  $\mathcal{H}_\infty$  consiste en encontrar un controlador (14) tal que la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema en lazo cerrado (10), (14) sea menor que  $\gamma$ . A su vez tenemos que un controlador local admisible (14) se dice ser local si en la solución del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  existe una vecindad  $U$  alrededor del equilibrio tal que la desigualdad (15) se satisfaga para todo  $T > 0$  y las funciones continuas  $w(t)$  para las cuales las trayectorias de los estados del sistema en lazo cerrado del punto inicial  $(x(0), \xi(0)) = (0, 0)$  permanezcan en  $U$  para todo  $t \in [0, T]$ .

## 3.2 Solución global en el espacio de estados

A continuación se enlistarán las hipótesis para derivar una solución global al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

**(H1)** Existe una función definida positiva  $F(x)$  y una función suave, definida positiva  $V(x)$ , tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs

$$\frac{\partial V}{\partial x} \sum_{i=1}^3 f_i(x) + \gamma^2 \alpha_1^T(x) \alpha_1(x) - \alpha_2^T(x) \alpha_2(x) + h_1^T(x) h_1(x) + F(x) \leq 0 \quad (16)$$

con

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (17)$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{1}{2} g_2^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T. \quad (18)$$

**(H2)** Existe una función continua  $G(t)$  y una función semidefinida positiva  $Q(x, \xi)$  sujeta a que  $Q(0, \xi)$  es definida positiva y la función semidefinida positiva  $W(x, \xi)$  sujeta a que  $W(0, \xi)$  la cual es definida positiva, tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs

$$\left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_e(x, \xi) + h_e^T(x, \xi) h_e(x, \xi) + \gamma^2 \phi^T(x, \xi) \phi(x, \xi) + Q(x, \xi) \leq 0 \quad (19)$$

y

$$f_e^T(x, \xi) = ((f_e^1)^T, (f_e^2)^T), \quad (20)$$

$$f_e^1 = \sum_{i=1}^3 f_i(x) + g_1(x) \alpha_1(x) + g_2(x) \alpha_2(x),$$

$$f_e^2 = \sum_{i=1}^3 f_i(\xi) + g_1(\xi) \alpha_1(\xi) + g_2(\xi) \alpha_2(\xi) + G(h_2(x) - h_2(\xi)), \quad (21)$$

$$h_e(x, \xi) = \alpha_2(\xi) - \alpha_2(x), \quad (22)$$

$$\phi(x, \xi) = \frac{1}{2\gamma^2} g_e^T(x) \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^T \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^T \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$g_e(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ Gk_{21}(x) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Bajo las hipótesis (H1) y (H2) la solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  declarado anteriormente es de la siguiente manera.

**Teorema 1.** *Considérese que (H1) y (H2) se satisfacen. Entonces el control*

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^3 f_i(\xi) + g_1(\xi) \alpha_1(\xi) + g_2(\xi) \alpha_2(\xi) + G[y - h_2(\xi)],$$

$$u = \alpha_2(\xi), \quad (25)$$

*estabiliza en forma global al sistema sin perturbaciones (10) y hace a la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema en lazo cerrado menor que  $\gamma$ .*

*Prueba:* para empezar considérese la siguiente función

$$H(x, w, u) = \frac{\partial V}{\partial x} \left[ \sum_{i=1}^3 f_i(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \right] + h_1^T(x)h_1(x) + u^T u - \gamma^2 w^T w \quad (26)$$

la cual es cuadrática en  $(w, u)$ . Las relaciones (17) y (18) resultan en

$$\left( \frac{\partial H}{\partial w} \right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x) - 2\gamma^2 \alpha_1^T = 0, \quad (27)$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\partial V}{\partial x} g_2(x) + 2\alpha_2^T = 0, \quad (28)$$

y expandiendo la función cuadrática  $H(x, w, u)$  en series de Taylor se tiene que

$$H(x, w, u) = H(x, \alpha_1(x), \alpha_2(x)) - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x)\|^2 + \|u - \alpha_2(x)\|^2 \quad (29)$$

donde  $H(x, \alpha_1(x), \alpha_2(x)) \leq -F(x)$  acorde con la hipótesis (H1). Así,

$$H(x, w, u) \leq \|u - \alpha_2(x)\|^2 - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x)\|^2 - F(x) \quad (30)$$

y utilizando (26), (30), se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 f_i(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \right) \leq \\ \|u - \alpha_2(x)\|^2 - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x)\|^2 - \|h_1(x)\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Ahora introduciendo la siguiente función

$$H_e(x, \xi, r) = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_e(x, \xi) + g_e(x)r] + h_e^T(x, \xi)h_e(x, \xi) - \gamma^2 r^T r \quad (32)$$

la cual es cuadrática en  $r$ . Entonces tenemos

$$\left( \frac{\partial H_e}{\partial r} \right)_{r=\phi(x,\xi)} = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) g_e(x) - 2\gamma^2 \phi^T(x, \xi) = 0$$

mientras la suposición (H2) asegure que  $H_e(x, \xi, \phi(x, \xi)) \leq -Q(x, \xi)$ . Así, la función

cuadrática  $H_e(x, \xi, r)$  se expande en series de Taylor de la siguiente manera

$$\begin{aligned} H_e(x, \xi, r) &= H_e(x, \xi, \phi(x, \xi)) - \gamma^2 \|r - \phi(x, \xi)\|^2 \\ &\leq -\gamma^2 \|r - \phi(x, \xi)\|^2 - Q(x, \xi) \end{aligned} \quad (33)$$

y por virtud de (32), se puede establecer que

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_e(x, \xi) + g_e(x)(w - \alpha_1(x))] \\
& \leq -\gamma^2 \|w - \alpha_1(x) - \phi(x, \xi)\|^2 - \|\alpha_2(\xi) - \alpha_2(x)\|^2 \\
& \quad + \gamma^2 \|w - \alpha_1(x)\|^2 - Q(x, \xi).
\end{aligned} \tag{34}$$

Ahora se demostrará que la función

$$U(x, \xi) = V(x) + W(x, \xi) \tag{35}$$

la cual es acotada y definida positiva por construcción, tiene derivada negativa a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (10), (14), (25) con  $w = 0$ . De hecho al juntar (31) y (34) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \left[ \sum_{i=1}^3 f_i(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \right] \\
& \quad + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) [f_e(x, \xi) + g_e(x)(w - \alpha_1(x))] \\
& \leq \|u - \alpha_2(x)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x)\|^2 - \|h_1(x)\|^2 \\
& \quad - \gamma^2 \|\alpha_1(x) + \phi(x, \xi)\|^2 - \|\alpha_2(\xi) - \alpha_2(x)\|^2 \\
& \quad + \gamma^2 \|\alpha_1(x)\|^2 - \|u\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) \\
& \leq -\|h_1(x)\|^2 - \gamma^2 \|\alpha_1(x) + \phi(x, \xi)\|^2 - \|\alpha_2(x)\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) \\
& \leq -F(x) - Q(x, \xi).
\end{aligned} \tag{36}$$

Así, el sistema en lazo cerrado (10), (14), (25) es internamente globalmente asintóticamente estable.

Finalmente, para demostrar (15) se deriva (35) a lo largo de las trayectorias del sistema (10), (14), (25) con  $w \neq 0$  y usando (31), (34) entonces se tiene que

$$\frac{dU}{dt} \leq \|z(t)\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - F(x) - Q(x, \xi) - \gamma^2 \|w - \alpha_1(x) - \phi(x, \xi)\|^2. \tag{37}$$

por lo que (37) asegura que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\gamma^2 \|w(t)\|^2 - \|z(t)\|^2) dt &\geq \int_0^T [F(x(t)) + Q(x(t), \xi(t))] dt \\ &+ U(x(T), \xi(T)) - U(x(0), \xi(0)) + \gamma^2 \int_0^T \|w(t) - \alpha_1(x(t)) - \phi(x(t), \xi(t))\|^2 dt > 0 \end{aligned} \quad (38)$$

para cualquier trayectoria de (10), (14), (25) comenzando en  $x(0) = 0$ ,  $\xi(0) = 0$ . Así, el compensador dinámico (14) se prueba que es una solución del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ . ■

Debemos notar que el Teorema 1 asegura la existencia de un control retroalimentado que estabiliza las trayectorias del sistema y no es necesario verificar condiciones de estabilidad y detectabilidad, lo cual nos ahorra trabajo en la verificación de estas condiciones. En lo subsecuente, el Teorema 1 va a ser instrumental en el análisis local del problema en cuestión.

### 3.3 Solución local en espacio de estados

Las suposiciones (A1)–(A5), permiten linealizar la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs y así tener una solución local al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no suave. Nótese que la estimación (13) es unilateral y eso no implica que el término no suave  $f_2(x)$  sea despreciable en el subsecuente análisis local. Por ejemplo, la ecuación (13) se mantiene con la función escalar  $f_2(x) = -|x|$  cuya influencia debe ser tomada en consideración mientras se analiza el comportamiento del sistema alrededor del punto de equilibrio.

El subsecuente análisis local involucra el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  lineal para el

sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w, \end{aligned} \tag{39}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(0) + \frac{\partial f_3}{\partial x}(0), \quad B_1 = g_1(0), \quad B_2 = g_2(0), \\ C_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad C_2 = \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\ D_{12} &= k_{12}(0), \quad D_{21} = k_{21}(0). \end{aligned} \tag{40}$$

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema lineal (39) ha sido bien estudiado si es estable y detectable de  $u$  y  $y$ , respectivamente. Bajo estas suposiciones, las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que exista una solución al problema.

**(C1)** Existe una solución simétrica semidefinida positiva para la ecuación

$$0 = PA_1 + A_1^T P + C_1^T C_1 + P \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P, \tag{41}$$

tal que la matriz  $[A_1 - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)P]$  tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa;

**(C2)** existe una solución simétrica semidefinida positiva para la ecuación

$$0 = AZ + ZA^T + B_1 B_1^T + Z \left[ \frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2^T C_2 \right] Z, \tag{42}$$

donde  $A = A_1 + (1/\gamma^2)B_1 B_1^T P$ , tal que la matriz  $[A - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)]$  tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa.

Las condiciones (C1) and (C2) son tomadas de Doyle *et al.* (1989) por ser necesarias y suficientes para que exista una solución al problema de control lineal  $\mathcal{H}_\infty$  para el sistema (39)-(40). Acorde con el lema real acotado (ver, e.g., Anderson y Vreugdenhil (1973)), las condiciones (C1) y (C2) aseguran que existe una constante positiva  $\varepsilon_0$  tal que el sistema de las ecuaciones perturbadas de Riccati

$$0 = P_\varepsilon A_1 + A_1^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P_\varepsilon + \varepsilon I, \quad (43)$$

$$0 = A_\varepsilon Z_\varepsilon + Z_\varepsilon A_\varepsilon^T + B_1 B_1^T + Z_\varepsilon \left[ \frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2 \right] Z_\varepsilon + \varepsilon I, \quad (44)$$

tiene una única solución definida positiva  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  donde  $A_\varepsilon = A_1 + (1/\gamma^2)B_1 B_1^T P_\varepsilon$ . Basándonos en esta solución se construye un control no suave  $\mathcal{H}_\infty$  de la siguiente manera.

**Teorema 2.** *Sean las condiciones (C1) y (C2) satisfechas para el sistema (10) y sea  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  una solución definida positiva de (43), (44) sujeto a  $\varepsilon > 0$ . Entonces el control*

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^3 f_i(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)], \quad (45)$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi \quad (46)$$

es una solución local al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

*Prueba:* La prueba del Teorema 2 es similar a la del Teorema 1 por lo tanto se omite la prueba. ■

### 3.4 Control $\mathcal{H}_\infty$ para regulación de manipuladores mecánicos con fricción y sujetos a restricciones

Se abordará el problema de regulación de posición para sistemas mecánicos ante presencia de fricción y restricciones, donde las uniones entre cada eslabón o articulación

del sistema puede ser prismática o de revolución. Un modelo matemático para este tipo de manipuladores está dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + w_1 + f(q) \quad (47)$$

donde  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  es la posición,  $\tau(t) \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w_1(t) \in \mathbb{R}^s$  es una perturbación externa,  $f(q) \in \mathbb{R}^l$  es el vector de fuerzas restrictivas en coordenadas de espacio,  $F(\dot{q})$ ,  $G(q)$ ,  $M(q)$  y  $C(q, \dot{q})$  son matrices de dimensiones apropiadas. Desde el punto de vista físico,  $q$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\tau$  es el vector de pares o fuerzas de control,  $M(q)$  es la matriz de inercia, que es simétrica y definida positiva para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $G(q)$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales, las componentes  $F_i(\dot{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de  $F(\dot{q})$  son fuerzas de fricción que actúan independientes en cada eslabón.

Todas las funciones  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $G(q)$  son dos veces continuamente diferenciables. Las fuerzas de fricción se representan como una combinación de fricción viscosa  $\sigma_{0i}\dot{q}_i$  y fricción de Dahl  $F_{di}$

$$F_i = \sigma_{0i}\dot{q}_i + F_{di}, \quad i = 1, \dots, n \quad (48)$$

donde

$$\dot{F}_{di} = \sigma_{1i}\dot{q}_i - \sigma_{1i}|\dot{q}_i|\frac{F_{di}}{F_{ci}} + w_{2i}, \quad (49)$$

donde  $\sigma_{0i} > 0$ ,  $\sigma_{1i} > 0$  y  $F_{ci} > 0$  son coeficientes de fricción viscosa, la rigidez y el nivel de fricción de Coulomb, respectivamente, correspondientes al  $i$ -ésimo eslabón del manipulador y  $w_{2i}$  es una perturbación externa la cual involucra discrepancias en el modelo de fricción.

El modelo de Dahl (49) describe el comportamiento de un resorte durante la adherencia estática y puede verse como fricción de Coulomb con un desplazamiento en el cambio de la fuerza de fricción cuando la dirección de esta cambia. Como la fricción de

Coulomb es una función del desplazamiento y el signo de la velocidad, este modelo es no suave.

La relación de los componentes anteriores puede reescribirse en su forma vectorial de la siguiente manera

$$F = \sigma_0 \dot{q} + F_d, \quad (50)$$

$$\dot{F}_d = \sigma_1 \dot{q} - \sigma_1 \text{diag}\{|\dot{q}_i|\} F_c^{-1} F_d + w_2, \quad (51)$$

donde  $F = \text{col}\{F_i\}$ ,  $F_d = \text{col}\{F_{di}\}$ ,  $x = \text{col}\{q_i\}$ ,  $\sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0i}\}$ ,  $\sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_{1i}\}$ ,  $F_c = \text{diag}\{F_{ci}\}$ ,  $w_2 = \text{col}\{w_{2i}\}$ , La notación  $\text{diag}$  y  $\text{col}$  se utiliza para denotar una matriz diagonal y un vector columna, respectivamente.

Sea  $q_d = \text{col}\{q_{di}\}$  la posición deseada. Entonces si no hay perturbaciones iniciales y externas la posición deseada, será un punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado actuado por  $\tau_d$ , el cual está dado por la siguiente expresión

$$\tau_d = G(q) - \theta \left( \int_{t_0}^t (q(t) - q_d) dt, q - q_d, \dot{q}, F(\dot{q}) \right), \quad (52)$$

donde  $\theta \left( \int_{t_0}^t (q(t) - q_d) dt, q - q_d, \dot{q}, F(\dot{q}) \right)$  es una entrada de control, sujeto a la condición inicial  $t_0 = 0 \in \mathbb{R}$  (la ausencia de perturbaciones iniciales y externas significa que  $q(0) = 0$ ,  $\dot{q}(0) = 0$ ,  $F_d(0) = 0$  y  $w_1 = w_2 = 0$ ). El compensador  $\theta \left( \int_{t_0}^t (q(t) - q_d) dt, q - q_d, \dot{q}, F(\dot{q}) \right)$  juega un rol importante en el diseño del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  debido a que asegura que el sistema (47) sea asintóticamente estable y nos ayuda a darle al sistema la estructura adecuada para poder diseñar el control  $\mathcal{H}_\infty$  que funciona como atenuador de perturbaciones.

Nuestro objetivo es diseñar un controlador de la forma

$$\tau = \tau_d + u \quad (53)$$

el cual impone en el manipulador las propiedades de estabilidad deseadas alrededor del punto de referencia, a la vez que atenúa en forma local los efectos de perturbaciones. Así, el controlador a diseñar consiste en un compensador como (52) y un atenuador de perturbaciones  $u(t)$ , los cuales estabilizan el sistema en lazo cerrado alrededor de la posición deseada.

Confinaremos nuestra investigación al problema de regulación donde (i) la salida a ser controlada está dada por

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q - q_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (54)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$  y (ii) se tienen disponibles las mediciones de posición

$$y = q + w_0, \quad (55)$$

contaminadas por un vector de error  $w_0(t) \in \mathbb{R}^n$ .

El problema de regulación de posición utilizando control  $\mathcal{H}_\infty$  en un manipulador con fricción y restricciones puede definirse de la siguiente manera. Dado un sistema mecánico (47)–(55) y un número real  $\gamma > 0$ , se requiere encontrar (si existe) un controlador retroalimentado causal (14) con estados internos  $\xi \in \mathbb{R}^s$  tal que el sistema en lazo cerrado sin perturbaciones sea asintóticamente estable alrededor de la posición deseada y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  sea localmente menor a  $\gamma$ , es decir, la desigualdad (15) se satisface para cualquier  $T > 0$  y toda función continua  $w(t) = (w_0(t), w_1(t), w_2(t))^T$  para la cual la trayectoria de los estados comienza de la condición inicial  $(q(0), \dot{q}(0), F_d(0), \xi(0))$ .

Ahora, definamos los vectores  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  donde  $x_1 = q - q_d$  es el error de posición donde  $q_d$  es la posición deseada,  $x_2 = \dot{q}$  es la velocidad y  $x_3 = F_d$  es la fricción

de Dahl. Ahora reescribiremos las ecuaciones de estado (47)–(55) en términos  $x$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= M^{-1}(x_1 + q_d)[-C(x_1 + q_d, x_2)x_2 - \sigma_0 x_2 - x_3 + f(x_1 + q_d) - \theta + u + w_1] \\ \dot{x}_3 &= \sigma_1 x_2 - \sigma_1 \text{diag}\{|x_{2i}|\} F_c^{-1} x_3 + w_2.\end{aligned}\quad (56)$$

Cabe señalar, que el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para regulación en sistemas mecánicos con restricciones es el mismo problema que el de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal para sistemas no suaves (10), especificado de la siguiente manera

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1 + q_d)[-C(x_1 + q_d, x_2)x_2 - \sigma_0 x_2 - x_3 - \theta] \\ \sigma_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} 0^n \\ 0^n \\ -\sigma_1 \text{diag}\{|x_2|\} F_c^{-1} x_3 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$f_3(x) = \begin{bmatrix} 0^n \\ M^{-1}(x_1 + q_d)f(x_1 + q_d) \\ 0^n \end{bmatrix}, \quad (59)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0^{n \times n} & 0^{n \times n} & 0^{n \times n} \\ 0^{n \times n} & M^{-1}(x_1 + q_d) & 0^{n \times n} \\ 0^{n \times n} & 0^{n \times n} & I^{n \times n} \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0^{n \times n} \\ M^{-1}(x_1 + q_d) \\ 0^{n \times n} \end{bmatrix},$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0^m \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1 + q_d,$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} I^{m \times m} \\ 0^{n \times m} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = \begin{bmatrix} I^{r \times r-s} & 0^{r \times s} \end{bmatrix} \quad (60)$$

la función  $f_2(x)$  satisface (13) para  $\sigma = 0.5 \max_i \sigma_{1i} F_{ci}^{-1}$  y toda  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ahora aplicando el Teorema 2 al sistema (56), se puede obtener una solución local al problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$ . Por lo tanto la solución local  $\mathcal{H}_\infty$  para el problema de regulación de posición sujeto a (57)–(60) tiene la siguiente entrada de control a ser retroalimentada

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^3 f_i(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)], \quad (61)$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi. \quad (62)$$

En los próximos capítulos se abordarán algunos ejemplos utilizando esta metodología.

## Capítulo 4

### Aplicación a sistemas mecánicos de 1 g.d.l.

#### 4.1 Sistema masa-resorte de 1 g.d.l. (usando un controlador por etapa de movimiento)

En este capítulo se utiliza como plataforma experimental un sistema mecánico de un grado de libertad sujeto a una restricción unilateral rígida. En dicho sistema analizamos la regulación de fuerza ejercida sobre un resorte, que puede estar o no estar en contacto con la restricción. A su vez se analiza la estabilidad en lazo cerrado de dicho sistema mecánico. El sistema mecánico utiliza un sensor de fuerza, el cual es modelado por un resorte rígido. Se diseñan tres algoritmos de control utilizando la metodología de modos deslizantes, con el fin de alcanzar la fuerza deseada en el resorte. Los controladores diseñados son: control para la etapa de movimiento libre (sin contacto con la restricción), etapa de movimiento restringido (contacto con la restricción) y control para la etapa de sobretiro (transitorio). Se prueba que el sistema no-lineal es asintóticamente estable y alcanza un error de fuerza cero.

##### 4.1.1 Modelo dinámico

Unos de los motivos del presente ejemplo es el análisis de estabilidad y control de fuerza del sistema mecánico que se muestra en la Figura 4. Las ecuaciones de movimiento en

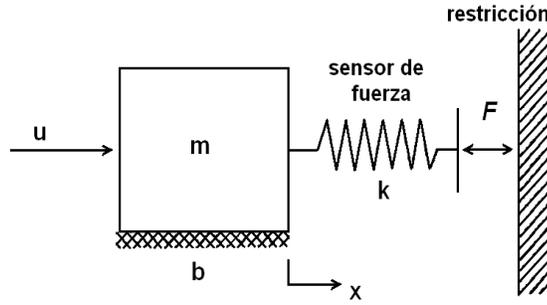


Figura 4. Sistema mecánico y restricción.

lazo abierto pueden ser expresadas en coordenadas de espacio de estado como

$$u = m\ddot{x} + b\dot{x} + F \quad (63)$$

$$F = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ kx & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (64)$$

donde  $m \in \mathbb{R}^+$  es la masa,  $b \in \mathbb{R}^+$  denota el coeficiente de fricción viscosa, un sensor de fuerza montado en la extremidad del sistema mecánico se modela como un resorte con rigidez  $k \in \mathbb{R}^+$ , la masa es impulsada por la fuerza del actuador  $u \in \mathbb{R}$ . La posición  $x \in \mathbb{R}$  de la masa es cero cuando el sensor entra en contacto con la pared y esté aplicando una fuerza cero sobre el resorte. Sustituyendo (64) en (63) se tiene que

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + g(x) = 0, \quad (65)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} -u & \text{si } x < 0 \\ kx - u & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (66)$$

La función  $g(x)$  representa el control combinado y la fuerza de contacto actuando sobre la masa. Como esta cantidad es cero cuando  $x = u/k$ , el sistema (65) tiene un punto de

equilibrio en  $(x = u/k, \dot{x} = 0)$ . Debido a que en el sistema (65) la retroalimentación de la posición se utiliza en lugar de la retroalimentación de fuerza, la posición de la pared y la rigidez del sensor debe ser conocida de manera exacta con el fin de alcanzar la fuerza de contacto deseada. Por esta razón, la retroalimentación de fuerza es preferible a la retroalimentación de posición.

#### 4.1.2 Regulación de posición/fuerza mediante un controlador por modos deslizantes

Se puede desplazar el punto de equilibrio de (65) al origen introduciendo la transformación de estado basada en el error de fuerza:

$$e_1 = kx - F_d \quad (67)$$

donde  $F_d > 0$  es la fuerza de contacto deseada, entonces

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= k\dot{x} = e_2 \\ \dot{e}_2 &= k\ddot{x} = -\frac{b}{m}e_2 - \frac{k}{m}g(e_1) \end{aligned} \quad (68)$$

y

$$g(e_1) = \begin{cases} -u_1 & \text{si } e_1 < -F_d \\ e_1 - u_2 + F_d & \text{si } -F_d \leq e_1 \leq 0 \\ e_1 - u_3 + F_d & \text{si } e_1 > 0. \end{cases} \quad (69)$$

Reordenando la ecuación (68) en su forma matricial se tiene que

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} e - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix} g(e_1). \quad (70)$$

Se analizará el sistema en cada uno de los casos Brogliato (1999): *etapa de movimiento libre*  $e_1 < -F_d$ , *etapa de movimiento restringido*  $-F_d \leq e_1 \leq 0$  y *etapa de transición*

$e_1 > 0$ . En el sistema mecánico la conmutación entre el movimiento libre y el restringido presenta una transición suave debido a la acción del resorte que amortigua el impacto con la restricción (véase Figura 4).

Dado estos antecedentes se proponen controladores por modos deslizantes para cada caso donde la transición entre un controlador y otro se da en base al valor de error de fuerza  $e_1$ .

**1) Etapa de movimiento libre  $e_1 < -F_d$ :** El objetivo del controlador es llevar las trayectorias del sistema hacia la región  $e_1 \geq -F_d$  con una velocidad relativamente alta sin que la entrada de control presente amplitudes altas o cambios abruptos para evitar daños en el actuador.

La superficie de deslizamiento que se propone con base a lo anterior es

$$s_1 = e_2 - \alpha \quad (71)$$

donde  $\alpha > 0$  es un parámetro sintonizable que está relacionado con la velocidad del sistema e indica la velocidad de conmutación hacia la etapa de movimiento restringido. Se diseña una ley de control tal que  $\dot{s}_1 = -\lambda_1 s_1 - \text{sign}(s_1)$ . Una ley de control que asegura esto es

$$u_1 = \frac{b}{k} e_2 - \frac{m}{k} [\lambda_1 s_1 + \text{sign}(s_1)]. \quad (72)$$

Sustituyendo (72) y (69) en (70)

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} e_2 \\ -\lambda_1 s_1 - \text{sign}(s_1) \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Para verificar la existencia de modos deslizantes se debe probar que  $s_1\dot{s}_1 < 0$ . De (71)

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= \dot{e}_2 \\ &= -\frac{b}{m}e_2 + \frac{k}{m} \left[ \frac{b}{k}e_2 - \lambda_1 s_1 - \text{sign}(s_1) \right] - \lambda_1 s_1 - \text{sign}(s_1)\end{aligned}\quad (74)$$

entonces

$$s_1\dot{s}_1 = -\lambda_1 s_1^2 - |s_1| < 0 \quad (75)$$

lo cual garantiza que la superficie de deslizamiento  $s_1$  es atractora para las trayectorias de los estados del sistema (70) en esta etapa.

**2) Etapa de movimiento restringido  $-F_d \leq e_1 \leq 0$ :** Para este caso, el objetivo del controlador es llevar los errores  $e_i$  donde  $i = 1, 2$  a cero. Dado que las trayectorias del sistema se conmutan hacia esta región con una velocidad relativamente alta se pretende disminuir esta velocidad rápidamente, pero además se buscará que la señal de control no presente sobresaltos o cambios abruptos.

La superficie de deslizamiento que se propone con base en este argumento es

$$s_2 = \alpha \exp\{\beta e_1\} - \alpha + e_2 \quad (76)$$

donde  $\beta > 0$  es la velocidad de convergencia de la superficie deslizante. Se diseñará una ley de control tal que  $\dot{s}_2 = -\lambda_2 s_2 - \text{sign}(s_2)$ . La ley de control que asegura esto es

$$u_2 = F_d + e_1 + \frac{b}{k}e_2 - \frac{m}{k} [\alpha\beta \exp\{\beta e_1\} + \lambda_2 s_2 + \text{sign}(s_2)]. \quad (77)$$

Sustituyendo (77) y (69) en (70) tenemos

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} e_2 \\ -\lambda_2 s_2 - \text{sign}(s_2) \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Analizamos la existencia de modos deslizantes verificando si  $s_2\dot{s}_2 < 0$ . De (76)

$$\begin{aligned}\dot{s}_2 &= \alpha\beta \exp\{\beta e_1\}\dot{e}_1 + \dot{e}_2 \\ &= \alpha\beta \exp\{\beta e_1\}e_2 - \frac{b}{m}e_2 - \frac{k}{m} [e_1 + F_d - u_2] - \lambda_2(s_2) - \text{sign}(s_2)\end{aligned}\quad (79)$$

entonces

$$s_2 \dot{s}_2 = -\lambda_2 s_2^2 - |s_2| < 0 \quad (80)$$

lo cual garantiza que la superficie de deslizamiento  $s_2$  es atractora para las trayectorias de los estados del sistema (70) en esta etapa.

**3) Etapa de sobre tiro  $e_1 > 0$ :** El objetivo del controlador en este caso es evitar que se generen sobreimpulsos en la etapa de transitorio tanto en  $e_1$  como en  $e_2$ . Dado que las trayectorias del sistema se conmutan hacia esta región con una velocidad relativamente alta se pretende disminuir esta velocidad rápidamente, de igual forma se busca que la señal de control no presente sobresaltos o cambios abruptos.

La superficie de deslizamiento que se propone es

$$s_3 = \gamma e_1 + e_2 \quad (81)$$

donde  $\gamma$  es una constante positiva usada para modificar la pendiente de la superficie deslizante. Se diseñará una ley de control tal que  $\dot{s}_3 = -\lambda_3 s_3 - \text{sign}(s_3)$ . La ley de control que asegura esto es

$$u_3 = F_d + e_1 + \frac{b}{k} e_2 + \frac{m}{k} [-\gamma e_2 - \lambda_3 s_2 - \text{sign}(s_2)] \quad (82)$$

sustituyendo (82) y (69) en (70)

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} e_2 \\ -\lambda_3 s_3 - \text{sign}(s_3) \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Analizando la existencia de modos deslizantes

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 &= \gamma \dot{e}_1 + \dot{e}_2 \\ &= \gamma e_2 - \frac{b}{m} e_2 - \frac{k}{m} [e_1 + F_d - u_3] - \lambda_3 s_3 - \text{sign}(s_3) \end{aligned} \quad (84)$$

dado esto, es fácil verificar que

$$s_3 \dot{s}_3 = -\lambda_3 s_3^2 - |s_3| < 0 \quad (85)$$

lo cual garantiza que la superficie de deslizamiento  $s_3$  es atractora para las trayectorias de los estados del sistema (70) en esta etapa.

### 4.1.3 Análisis de estabilidad

Dadas las configuraciones anteriores, se puede demostrar estabilidad asintótica del origen en forma local para el sistema (70) en cada uno de los tres casos anteriores bajo las leyes de control (72), (77) y (82) utilizando las siguientes funciones de Lyapunov:

1. Etapa de movimiento libre

$$V(e) = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (86)$$

2. Etapa de movimiento restringido

$$V(e) = \frac{1}{2} s_2^2 \quad (87)$$

3. Etapa de transición

$$V(e) = \frac{1}{2} s_3^2. \quad (88)$$

La función candidata se pueden resumir en la siguiente expresión

$$V_n(e) = \frac{1}{2} s_n^2. \quad (89)$$

Nótese que las tres funciones candidatas de Lyapunov son positivas definidas, radialmente desacotadas y continuamente diferenciables. La derivada temporal de  $V(e)$  es

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_n(e) &= s_n \dot{s}_n \\
 &= s_n (-\lambda_n s_n - \text{sign}(s_n)) \\
 &= -\lambda_n s_n^2 - |s_n| \\
 &< 0.
 \end{aligned} \tag{90}$$

La derivada temporal de  $V(e)$  a lo largo de las trayectorias es definida negativa, se concluye que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable en forma local.

#### 4.1.4 Simulación numérica

Las propiedades de rendimiento y robustez de los algoritmos de control por modos deslizantes propuestos son ilustrados con experimentos numéricos. En las simulaciones, que se realizan en MATLAB, el modelo mecánico cuyas coordenadas están en términos del error de fuerza, como se aprecia en (69), (70) bajo las leyes de control (72), (77) y (82) según sea la región de operación. Se consideran los siguientes valores  $\mathbf{F}_d = \mathbf{3.7542}$  N que es la fuerza de contacto deseada  $F_d > 0$ ,  $b = 15$  kg/s,  $k = 375.42$  N/m,  $m = 2.06238$  kg. Las ganancias del controlador son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 30$  N/m,  $\lambda_3 = 7000$  N/m, los valores de sintonización para las superficies deslizantes son seleccionados como  $\alpha = 20$  kg/m·s,  $\beta = 2$  y  $\gamma = 800$  kg/(m·s). Las condiciones iniciales  $e_1(0) = -5.5084$  N y  $e_2(0) = 200$  N/s se eligieron de tal forma que los tres controladores actúen en algún momento sobre el sistema.

Los valores de masa, fricción y rigidez del resorte fueron tomados de mediciones de los dispositivos reales en el laboratorio de control de CICESE. La medición de la fuerza en la plataforma se realiza aplicando la ley de Hooke  $F = kx$ . Dado que solo

se tiene la variable de posición del sistema mecánico  $x$  para ser retroalimentada fue necesario identificar el parámetro de rigidez del resorte  $k$ , el cual se obtuvo a través de las pruebas de identificación de parámetros indicadas por el manual para el sistema de control rectilíneo ECP 210, el cual emula al sistema de la Figura 4.

Una comparación del desempeño de los controladores locales por modos deslizantes (72), (77) y (82) se hace contra un algoritmo de control proporcional con retroalimentación de fuerza de la forma  $u = F_d - k_f e_1$  (Goldsmith (1996)), donde  $k_f = 1$  kg/s<sup>2</sup> es la ganancia de retroalimentación de fuerza que debe satisfacer la condición  $k_f > 0$ . Buen desempeño y robustez del sistema (70) bajo las leyes de control por modos deslizantes se concluye, de la Figura 5.

#### 4.1.5 Comentarios

Un problema de retroalimentación de fuerza calculada a través de medir la posición es estudiado con un prototipo mecánico de un grado de libertad, el cual opera bajo condiciones restrictivas. Se propone un marco general para la solución de dicho problema. El marco consiste en la descomposición del problema en tres etapas, las cuales involucran el diseño de controladores por modos deslizantes de primer orden. La verificación experimental hecha para un prototipo de laboratorio, muestra la efectividad de los controladores desarrollados. Aunque se aborda un sistema mecánico sencillo, la importancia del problema radica en que sirve como base para resolver problemas más complejos tales como la sincronización y coordinación de dos brazos robóticos para desempeñar tareas de agarre y transporte de objetos al presionar estos objetos con los dos extremos de los efectores.

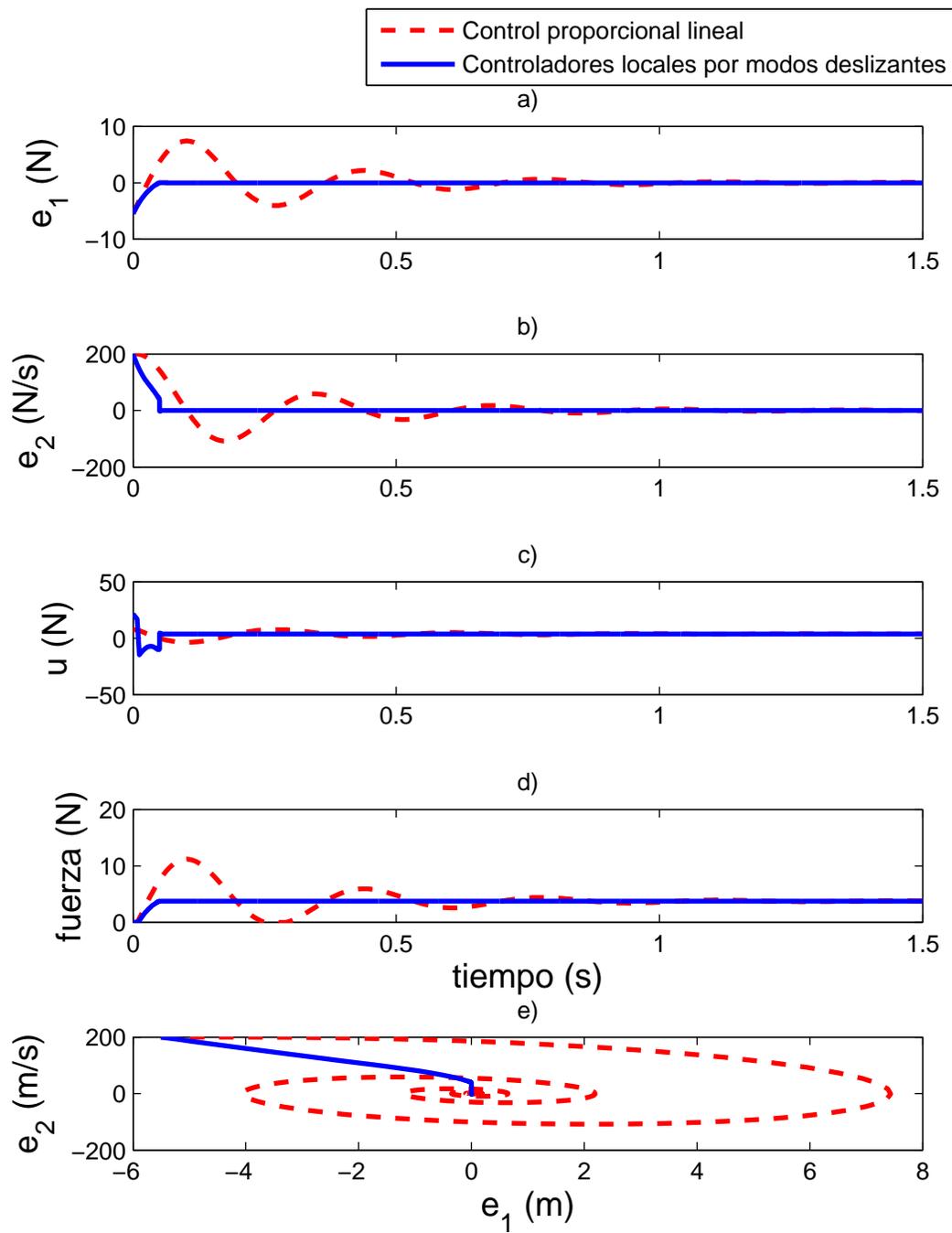


Figura 5. a) error de posición, b) derivada del error de fuerza, c) acción de control, d) fuerza en el resorte y e) plano de fase.

## 4.2 Sistema masa-resorte de 1 g.d.l. (usando un controlador para las tres etapas)

### 4.2.1 Modelo dinámico

Se desarrolla un modelo dinámico para el sistema mecánico de la Figura 4. A diferencia del modelo dinámico (65) este modelo es aumentado con fricción seca tipo Coulomb, por lo que se reescribirán las ecuaciones de movimiento en lazo abierto para el sistema mecánico restringido de la siguiente manera:

$$u = m\ddot{x} + b\dot{x} + \alpha\text{sign}(\dot{x}) + F - w, \quad (91)$$

donde  $x \in \mathbb{R}$  es la posición de la masa, la masa es  $m \in \mathbb{R}^+$ , la fricción viscosa es proporcional a la velocidad  $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}$ , con el coeficiente de fricción denotado por  $b > 0$ . Por otra parte  $F$  es la fuerza actuando en el resorte, la cual se calcula a partir de

$$F = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ kx, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (92)$$

El parámetro  $k$  es el coeficiente de rigidez del resorte, el cual suponemos que es conocido. La masa es actuada por  $u \in \mathbb{R}$ . Consideramos la restricción como una pared rígida. También, se considera un nivel de fricción de Coulomb denotado por  $\alpha > 0$ . La expresión  $\text{sign}(\dot{x})$  denota la función signo, la cual es definida como

$$\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{x} > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } \dot{x} = 0. \\ -1 & \text{si } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (93)$$

Para tomar en cuenta las discrepancias en el modelo, añadimos una perturbación externa desconocida  $w(t) \in \mathbb{R}$ , la cual satisface

$$\sup_t |w(t)| \leq M, \quad (94)$$

para todo  $t$  y una constante conocida  $M > 0$ . La posición  $x(t)$  en el sistema mecánico es cero cuando el sensor de fuerza (resorte) está en contacto con la pared sin ejercer ninguna fuerza sobre ésta; esto es cuando el resorte está en contacto con la restricción ejerciendo una fuerza cero.

Ahora se denotará como  $x_1$  a la posición  $x$  y a la velocidad  $\dot{x}$  como  $x_2$ , de tal forma que, para una entrada de fuerza constante al sistema  $u = \bar{u}$  y una perturbación cero ( $w = 0$ ), el sistema (91) tiene los siguientes puntos de equilibrio:

1. Si  $\bar{u} = \alpha$ , entonces  $\bar{x}_2 = 0$  y  $\bar{x}_1 \in (-\infty, 2\alpha/k]$ .
2. Si  $\bar{u} \neq \alpha$ , entonces
  - (a) Si  $\bar{u} > \alpha$ , entonces  $\bar{x}_2 = 0$  y  $\bar{x}_1 \in [(\bar{u} - \alpha)/k, (\bar{u} + \alpha)/k]$ .
  - (b) Si  $|\bar{u}| < \alpha$ , entonces  $\bar{x}_2 = 0$  and  $\bar{x}_1 \in (-\infty, (\bar{u} + \alpha)/k]$ .
  - (c) Si  $\bar{u} < -\alpha$ , entonces no hay equilibrios.

Si se desea que la punta del efector se sitúe sobre la restricción en estado estacionario, debido a que se desea regular la fuerza que ejerce el resorte contra la restricción, entonces se debe elegir  $\bar{u} = F^* > \alpha$ , donde  $F^*$  es la fuerza deseada en el resorte. La fuerza  $F$  debe sobrepasar a la fricción de Coulomb  $\alpha$ . Por lo tanto, la región de equilibrios puede ser considerada como  $(\bar{x}_1 \in [(-\alpha + F^*)/k, (\alpha + F^*)/k], \bar{x}_2 = 0)$ , como se muestra en la Figura 6. Dado que se utiliza retroalimentación de posición en el sistema (91) en lugar de retroalimentación de fuerza, la posición de la pared y la rigidez del resorte deben

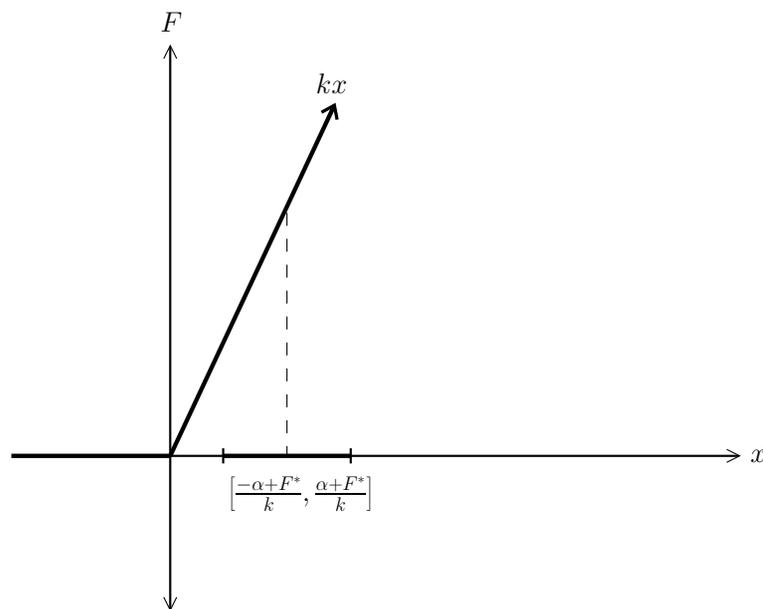


Figura 6. Características de la restricción del sistema mostrado en la Figura 4. El intervalo denota los posibles puntos de equilibrio.

de ser conocidas con precisión con el fin de alcanzar la fuerza de contacto deseada en el resorte. Un rebote ocurre cuando existe una transición de movimiento restringido ( $x_1 \geq 0$ ) a movimiento libre ( $x_1 < 0$ ).

#### 4.2.2 Diseño del controlador por modos deslizantes

Debido a que anteriormente se diseñaron tres controladores, los cuales actúan en diferentes etapas para regular la fuerza ejercida en el resorte del mecanismo de la Figura 4, ahora se pretende diseñar un solo controlador que tenga el mismo propósito de regulación de los tres controladores anteriores, este diseño de control actuará para todo tiempo y se pretende que absorba algunos tipos de perturbaciones externas.

Supóngase que la perturbación  $w(t)$  está afectando al sistema (91) y que satisface (94), el coeficiente de fricción de Coulomb es tal que  $0 < \alpha \leq \alpha_c$ , para una cota conocida  $\alpha_c$ . El objetivo de control es diseñar un controlador  $u$ , que dependa de la fuerza deseada

$F^*(x^*)$  (a través de la posición deseada  $x^*$ ), el desplazamiento  $x$  y la velocidad  $\dot{x}$ , de tal manera que la respuesta del sistema en lazo cerrado como en (91)-(92) debe satisfacer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0. \quad (95)$$

Para satisfacer (95) se diseñará un controlador por modos deslizantes, el cual se basa en una superficie deslizante dinámica, donde el controlador se diseña para el sistema (91)-(92). Para este fin, recorremos los puntos de equilibrio de (91) a cero, a través de

$$\begin{aligned} y_1 &= x - x^*, \\ y_2 &= \dot{x}. \end{aligned} \quad (96)$$

El sistema (91), (92) ahora está dado por

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{b}{m}y_2 - \frac{F(y_1, x^*)}{m} - \frac{\alpha}{m}\text{sign}(y_2) + \frac{w}{m} + \frac{u}{m}, \end{aligned} \quad (97)$$

donde  $F(y_1, x^*)$  se puede reescribir como

$$F(y_1, x^*) = \frac{k}{2}(y_1 + x^* + |y_1 + x^*|) \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}. \quad (98)$$

Ahora se propone una ley de control por modos deslizantes para el sistema (97), basado en el controlador propuesto por Koshkouei *et al.* (2005). Considérese la siguiente superficie deslizante:

$$s = \mu y_1 + y_2 + \gamma \int_0^T [F(y_1, x^*) - F^*] dt. \quad (99)$$

La ley de control que fuerza a  $s = \dot{s} = 0$  es

$$u = (b - m\mu)y_2 - m\lambda s - \beta\text{sign}(s) + F(y_1, x^*) - m\gamma [F(y_1, x^*) - F^*], \quad (100)$$

donde  $F^*$  es la fuerza deseada en el resorte. La ley de control (100) actuará en todo tiempo  $t \geq 0$ , esto es, cuando el sistema está en movimiento libre o movimiento restringido (contacto con la restricción). Los parámetros  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son positivos; los

cuales serán sintonizados para asegurar que el movimiento de las trayectorias se dirija hacia la superficie deslizante.

Debido a que la superficie deslizante (99) es una variable dinámica, podemos agregar la variable  $s$  como otro estado en (97). Esto nos conduce al sistema extendido

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{b}{m}y_2 - \frac{F(y_1, x^*)}{m} - \frac{\alpha}{m}\text{sign}(y_2) + \frac{w}{m} + \frac{u}{m}, \\ \dot{s} &= \mu y_2 - \frac{b}{m}y_2 - \frac{F(y_1, x^*)}{m} - \frac{\alpha}{m}\text{sign}(y_2) + \frac{w}{m} + \frac{u}{m} + \gamma [F(y_1, x^*) - F^*].\end{aligned}\tag{101}$$

Notar que, para el sistema (101), la superficie deslizante será el plano  $(y_1, y_2)$ , caracterizado por  $s = 0$ .

### 4.2.3 Análisis de estabilidad

En esta sección se analizará la estabilidad del sistema en lazo cerrado (101). Para este fin se sustituye (100) en (101):

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\mu y_2 - \lambda s - \frac{\beta}{m}\text{sign}(s) - \frac{\alpha}{m}\text{sign}(y_2) + \frac{w}{m} - \gamma \tilde{F}, \\ \dot{s} &= -\lambda s - \frac{\beta}{m}\text{sign}(s) - \frac{\alpha}{m}\text{sign}(y_2) + \frac{w}{m},\end{aligned}\tag{102}$$

donde  $\tilde{F} = F(y_1, x^*) - F^*$ . Ahora, se asegurará la existencia de modos deslizantes al verificar que  $s\dot{s} < 0$ . Con este fin, nótese que de (96) y dado que  $\alpha \leq \alpha_c$ , se tiene

$$\begin{aligned}s\dot{s} &= s \left( -\lambda s - \frac{\beta}{m}\text{sign}(s) + \frac{w}{m} - \frac{\alpha}{m}\text{sign}(y_2) \right) \\ &\leq -\lambda s^2 - \frac{\beta}{m}|s| + \frac{M+\alpha_c}{m}|s| \\ &\leq -\lambda s^2 - \left( \frac{\beta - (M+\alpha_c)}{m} \right) |s|.\end{aligned}$$

Así se concluye la existencia de modos deslizantes en la superficie (99) mientras la condición  $\beta > M + \alpha_c$  permanezca válida. Esto nos da una idea para sintonizar el

parámetro  $\beta$  del controlador (100). De hecho, podemos demostrar que las trayectorias alcanzan la superficie  $s = 0$ , en tiempo finito, a través de la siguiente función cuadrática

$$V(s) = s^2. \quad (103)$$

La derivada temporal de  $V(s)$  a lo largo de las soluciones de (102) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t)) &\leq -2\lambda s^2 - 2\left(\frac{\beta-(M+\alpha_c)}{m}\right)|s| \leq -2\left(\frac{\beta-(M+\alpha_c)}{m}\right)|s| \\ &= -2\left(\frac{\beta-(M+\alpha_c)}{m}\right)\sqrt{V(s(t))}. \end{aligned} \quad (104)$$

De (104) se tiene que

$$V(t) = 0 \quad \text{para} \quad t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\left(\frac{\beta-(M+\alpha_c)}{m}\right)} = t_f. \quad (105)$$

Así,  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito y en consecuencia, el movimiento de las trayectorias a lo largo del conjunto  $s = 0$  ocurre en el sistema con lado derecho discontinuo (102). Notemos que el tiempo de llegada a la superficie se puede reducir al incrementar  $\beta$ . De tal manera, en los siguientes desarrollos, se supondrá que (102) está en la superficie deslizante; esto es,  $s = \dot{s} = 0$  para  $t \geq t_f$ .

Ahora mostraremos que mientras el sistema permanece en  $s = \dot{s} = 0$ , las trayectorias  $(y_1, y_2)$  convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . De (98), (99) y dado que  $F^* = kx^* > 0$ , tenemos que la dinámica del sistema (102), una vez que se está en modo deslizante se puede reducir a

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{k\gamma}{2}(y_1 - x^* + |y_1 + x^*|) - \mu y_2. \end{aligned} \quad (106)$$

Nótese que el sistema (106) tiene solamente un punto de equilibrio situado en el origen, el cual es asintóticamente estable, dado que  $x^* > 0$ . Ahora vamos a encontrar las condiciones suficientes para probar estabilidad asintótica de (106), utilizaremos la técnica clásica de Lyapunov. El sistema (106) puede tomar la siguiente forma

$$\dot{y} = Ay + g(y) \quad (107)$$

donde  $y = [y_1, y_2]^T$  y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k\gamma}{2} & -\mu \end{bmatrix}, \quad g(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k\gamma}{2} (x^* - |y_1 + x^*|) \end{bmatrix}.$$

Una función candidata de Lyapunov para el sistema no lineal está dada por

$$V(y) = y^T P y, \quad (108)$$

donde  $P$  es la solución de la ecuación de Lyapunov  $A^T P + P A = -Q$ ,  $Q$  es una matriz definida positiva. La matriz  $P$  es definida positiva debido a que la matriz  $A$  es estrictamente Hurwitz (los parámetros  $k$ ,  $\gamma$  y  $\mu$  son positivos). Por otra parte, la derivada temporal de  $V(y)$  a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= y^T P \dot{y} + \dot{y}^T P y \\ &= y^T P [A y + g(y)] + [y^T A^T + g^T(y)] P y \\ &= y^T (P A + A^T P) y + 2 y^T P g(y) \\ &= -y^T Q y + 2 y^T P g(y). \end{aligned} \quad (109)$$

El primer término del lado derecho es definido negativo, mientras que el segundo es indefinido. Sin embargo la función  $g(y)$  satisface

$$\|g(y)\|_2 \leq \frac{k\gamma}{2} \|y\|_2. \quad (110)$$

Así

$$\dot{V} \leq -(\|Q\|_2 - k\gamma \|P\|_2) \|y\|_2^2, \quad (111)$$

donde  $\dot{V}$  será negativa si  $k\gamma$  es lo suficientemente pequeña para hacer  $\|Q\|_2 - k\gamma \|P\|_2$  positivo. Bajo estas circunstancias, podemos concluir que el origen es asintóticamente estable.

Un factor adicional es que la condición sobre el término  $k\gamma$  es restrictiva. De hecho, el campo vectorial correspondiente a este sistema es no suave en  $y_1 = -x^*$ , pero es Lipschitz para todo  $y \in \mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, se satisfacen las condiciones establecidas por el Teorema 3.2 en Hou (2003) y el Teorema 1 en Melin (2005), acerca de la no existencia de órbitas cerradas en sistemas no suaves. De tal manera el sistema (106) no tiene orbitas cerradas en  $\mathbb{R}^2$  y tiene solamente un punto de equilibrio en el origen, el cual es localmente asintóticamente estable. Así como no hay ningún ciclo limite, este punto de equilibrio debe de ser global y asintóticamente estable. Esta condición es garantizada una vez que el sistema alcanza la superficie deslizante, lo cual ocurre en tiempo finito.

#### 4.2.4 Etapa de movimiento libre, restringido y transición

Hemos mostrado que para cada condición inicial en el espacio de estados, el sistema converge a la superficie deslizante  $s = 0$  (el plano  $(y_1, y_2)$ ) en un tiempo finito y que una vez que se tiene el modo deslizante, las trayectorias convergen asintóticamente al origen. Desde un punto de vista físico, el movimiento del sistema controlado puede ser dividido en tres etapas. Podemos observar más de cerca las diferentes etapas de movimiento del sistema en lazo cerrado para formarnos una idea sobre como sintonizar los parámetros del control, de tal forma que se puedan reducir el número de rebotes y que el sistema mantenga un buen comportamiento dinámico.

La restricción, caracterizada por la ecuación (95), impone una dinámica diferente en el espacio de estados que se puede dividir en dos zonas  $S_f$  y  $S_r$ , esto es dependiendo si el sistema está en movimiento libre ( $S_f = \{y \in \mathbb{R}^2 | y_1 \leq -x^*\}$ ), o movimiento restringido ( $S_r = \mathbb{R}^2 \setminus S_f$ ).

**Etapa de movimiento libre** ( $y \in S_f$ ): en este caso la dinámica del sistema está dada por (ver las ecuaciones (98) y (106))

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma F^* \end{bmatrix}. \quad (112)$$

Dado que  $F^*$  es una constante positiva se tiene que

$$y_2(t) = \left( y_2(t_0) - \frac{\gamma F^*}{\mu} \right) e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\gamma F^*}{\mu},$$

por lo que  $y_2$  tiende a  $\gamma F^*/\mu$  para cualquier condición inicial  $y_2(t_0)$ . Así  $y_1$ , el cual en esta etapa es menor a  $-x^* < 0$ , alcanza este valor en tiempo finito, forzando de esta manera al resorte a tener contacto con la restricción y a que comience por lo tanto la etapa de movimiento restringido. Así, no importa si el sistema inicia o reinicia a la etapa de movimiento libre, siempre se dirigirán las trayectorias hacia la etapa de movimiento restringido.

**Etapa de movimiento restringido** ( $y \in S_r$ ): para la etapa de movimiento restringido el sistema es descrito por (ver ecuación (98) y (106))

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma k & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (113)$$

Previendo que el sistema se mantenga en esta etapa, sus trayectorias convergen al origen debido a que los parámetros  $\mu$ ,  $\gamma$  y  $k$  son todos positivos. La convergencia puede ser sintonizada con los parámetros del controlador  $\gamma$  y  $\mu$ .

**Etapa de transición:** el sistema presenta esta etapa cuando el resorte pierde contacto con la restricción. Dependiendo de las condiciones iniciales, esta situación puede tener lugar en cualquier momento, particularmente antes que el sistema alcance la superficie

deslizante. Sin embargo, una vez que el sistema está en modo deslizante, es posible reducir en gran medida el número de transiciones movimiento restringido-movimiento libre (“rebotes”) con una adecuada sintonización de los parámetros del controlador, en particular de  $\gamma$  y  $\mu$ . Esto se obtiene desplazando los dos polos del sistema (113) a valores negativos, lo que significa que el factor de amortiguamiento es mayor o igual a uno, de esta forma se pueden prevenir oscilaciones que pudieran conducir a rebotes. Esto se satisface si

$$\mu \geq 2\sqrt{k\gamma}. \quad (114)$$

#### 4.2.5 Estudio experimental

Se ponen a prueba el desempeño y robustez del controlador por modos deslizantes a través de simulación numérica, experimentos en circuitos electrónicos y experimentos en un sistema mecánico de laboratorio.

1. Algunos experimentos fueron llevados a cabo utilizando la tarjeta de adquisición de datos DSPACE<sup>®</sup>, montada en una computadora AMD<sup>®</sup> Dual-Core 4800 y utilizando el circuito electrónico mostrado en la Figura 7; la tasa de muestreo para la adquisición de datos se fijó en  $5 \times 10^{-5}$  s. Este circuito emula muy de cerca el comportamiento dinámico del sistema mecánico mostrado en la Figura 4. En particular, las características no lineales de la restricción, como se muestran en la Figura 6, son bien representadas por el circuito, ver Figura 8. Dada la flexibilidad de los circuitos electrónicos para emular diversas situaciones, estos pueden ser muy útiles para evaluar el desempeño del controlador propuesto en un ambiente experimental.

Se estudia el modelo dinámico basado en el error de posición de la masa, su veloci-

dad y la dinámica de la variable deslizante  $s$  (como en (101)), con los siguientes parámetros: fuerza deseada  $F^* = 2$  N, coeficiente de fricción  $b = 1$  kg/s, rigidez del resorte  $k = 2$  N/m, y masa:  $m = 1$  kg. La ganancia de retroalimentación del controlador se ajusta en  $\lambda = 2$  N/m, el parámetro de la superficie deslizante  $\mu = 2$  kg/m·s, el parámetro de ganancia de la función signo  $\beta = 1$  N y la ganancia de la fuerza  $\gamma = 0.5$  m<sup>-1</sup>. La posición deseada se fija en  $x^* = 1$  m. La amplitud de la fricción de Coulomb se establece como  $\alpha = 0.5$  N y la perturbación en  $w = 0.25 \sin(t)$  N. Las condiciones iniciales de error de posición, velocidad y superficie deslizante  $s$  se fijaron en  $y_1(0) = -5.781$  m,  $y_2(0) = -0.4687$  m/s y  $s(0) = -10$ , respectivamente.

La Figura 9 muestra las respuestas experimentales y de simulación en el sistema. Las Figuras 9(a) y 9(b) muestran el error de posición ( $y_1$ ) y velocidad, respectivamente. Las Figuras 9(c) y 9(d) muestran la señal de control y la fuerza en el efector. Podemos notar la particular similitud entre los datos experimentales y numéricos, a su vez la suave aproximación de la posición a su valor deseado. Por otra parte, aunque se exhibe una componente de alta frecuencia en la señal de control en la simulación numérica, en el experimento físico se muestra una señal muy similar en amplitud pero con una componente menor en frecuencia. Es también de notarse que a pesar de la existencia de fricción de Coulomb y perturbaciones externas en el sistema controlado, éste exhibe cierta robustez ante estos elementos, ya que se ve reflejado un error en estado estacionario en la señal de fuerza de 0.135% con respecto a la referencia (ver Figuras 9). Finalmente, la Figura 6 muestra como la variable deslizante  $s$  alcanza la superficie deslizante en tiempo finito aproximadamente en  $t_f = 1.0$  s.

2. Otros experimentos fueron llevados a cabo utilizando la plataforma masa-resorte-amortiguador de Educational Control Products (ECP-210), la cual fue configurada para tener una restricción unilateral (ver la Figura 11), la plataforma está conectada a una computadora AMD<sup>®</sup> Dual-Core 4800 y se utiliza como interfaz Simulink<sup>®</sup>, la tasa de muestreo para la adquisición de datos fue fijada en 0.001 s. Esta plataforma está configurada para tener el comportamiento dinámico del sistema mecánico mostrado en la Figura 4. En particular, las características no lineales de la restricción, representadas en la Figura 6 son bien reproducidas al considerar la modificación hecha por la restricción en el sistema mecánico, ver Figura 11. La modificación en el sistema consiste en utilizar un perno con rosca solamente en su extremo para unir el resorte a la masa fija, de tal forma que existe una holgura entre el resorte y la masa fija. De esta manera, pueden presentarse rebotes del resorte con respecto a la masa fija. Algunas tuercas y rondanas también fueron utilizadas, ver la Figura 11.

El sistema mecánico se controló utilizando los siguientes parámetros: fuerza deseada  $F^* = 1.5$  N, coeficiente de fricción  $b = 7.7$  kg/s, rigidez del resorte  $k = 375$  N/m, y masa  $m = 1.062$  kg. La ganancia del controlador se fijó en  $\lambda = 2$  N/m, el parámetro de la superficie deslizante  $\mu = 30$  kg/m·s, el parámetro de ganancia de la función signo  $\beta = 1$  N y la ganancia de la fuerza  $\gamma = 30$  m<sup>-1</sup>. La posición deseada se estableció en  $x^* = 0.004$  m. La perturbación se fijó como  $w = 0.25\text{sen}(2\pi t)$  N. Las condiciones iniciales para el error de posición, velocidad y movimiento deslizante  $s$  fueron establecidas como  $y_1(0) = -0.014$  m,  $y_2(0) = 0$  m/s y  $s(0) = 0$ , respectivamente. Basándonos en Rosas *et al.* (2007), un observador por modos deslizantes se utilizó para estimar la velocidad del sistema

mecánico.

La Figura 8 muestra la fuerza vs posición experimentales que son características de la restricción y exhibidas por el sistema mecánico. La Figura 9(a) muestra el error de posición ( $y_1$ ), la Figura 9(b) la velocidad. Las Figuras 5(c) y 5(d) muestran la señal de control y la fuerza en el efector, respectivamente. Podemos notar que incluso cuando una perturbación externa está presente, el sistema controlado exhibe robustez contra perturbaciones y fricción de Coulomb, con un error en la señal de fuerza en estado estacionario del 1.333% con respecto a la referencia, este error es debido a la incertidumbre natural en el valor  $k$  para la rigidez del resorte, el cual suponemos conocido. La Figura 10 muestra la variable deslizante  $s$  alcanzando la superficie deslizante en tiempo finito.

#### 4.2.6 Comentarios

Se estudia un problema de regulación de posición y fuerza para un prototipo mecánico de un grado de libertad, el cual opera en condiciones restrictivas. El sistema mecánico y su modelo son bastantes simples; sin embargo constituye una representación de sistemas de estructura variable de donde se puede partir para desarrollar dispositivos más complejos. Por otro lado se incorporan al sistema algunos elementos reales que no son completamente conocidos como fricción de Coulomb y perturbaciones externas.

El controlador sintetizado utilizando la técnica de control por modos deslizantes dinámico, hizo que el sistema en lazo cerrado fuera robusto. Se probó que la convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado ocurre en tiempo finito hacia la superficie deslizante y asintóticamente hacia el punto de equilibrio. A su vez se dio una idea para reducir los posibles rebotes en el sistema, debido a que pueden causar efectos

no deseados en éste. Se llevaron a cabo experimentos y simulaciones numéricas que mostraron concordancia con la robustez y desempeño esperados.

Las componentes de alta frecuencia en la señal de control son típicas de controladores discontinuos. Sin embargo, la amplitud de estas oscilaciones de alta frecuencia se puede ajustar al fijar un valor adecuado para el coeficiente  $\beta$  del controlador, siempre teniendo en cuenta que el parámetro  $\beta$  se debe elegir satisfaciendo la desigualdad  $\beta > M + \alpha_c$ . Debemos también decir que se eligieron heurísticamente los parámetros de ganancia del controlador  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\gamma$ ; por lo tanto, es posible que otros valores en los parámetros del controlador arrojen mejores resultados. Una guía en la elección de los valores de los parámetros  $\mu$  y  $\gamma$  es dada en (114). El parámetro  $\mu$  es una ganancia proporcional que reduce el error de posición;  $\gamma$  es una ganancia integral la cual mejora la convergencia al origen del error en estado estacionario y  $\lambda$  posiciona el polo de la variable dinámica  $s$ , incrementando la razón de convergencia hacia la superficie deslizante.

Algunas técnicas para reducir el chattering pudieran ser la implementación de modos deslizantes de alto orden. Por otro lado, se pudiera reemplazar la función signo por otra función más adecuada en la práctica, como una histéresis, saturación o tangente hiperbólica. Este tipo de técnicas valdría la pena analizarlas en un futuro.

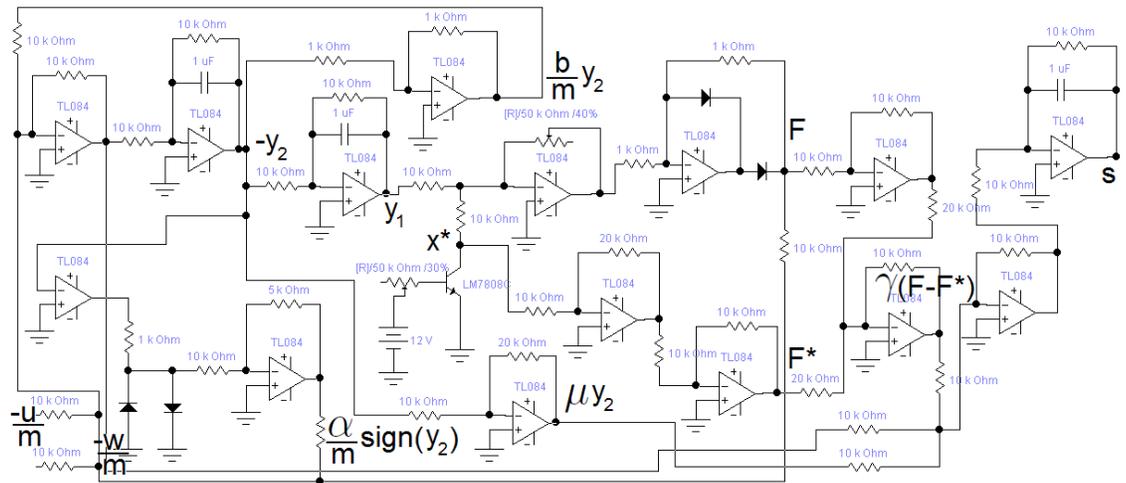


Figura 7. Circuito electrónico emulando al sistema mecánico con una restricción unilateral de la Figura 4.

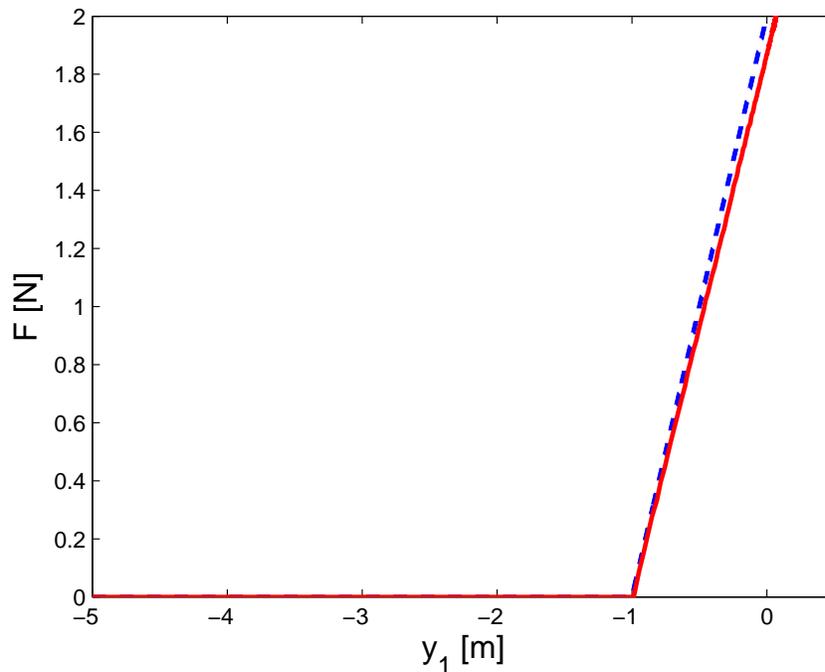


Figura 8. Error de posición vs. fuerza. Estas características fueron extraídas del circuito mostrado en la Figura 7, donde se puede notar la similitud con la Figura 6.

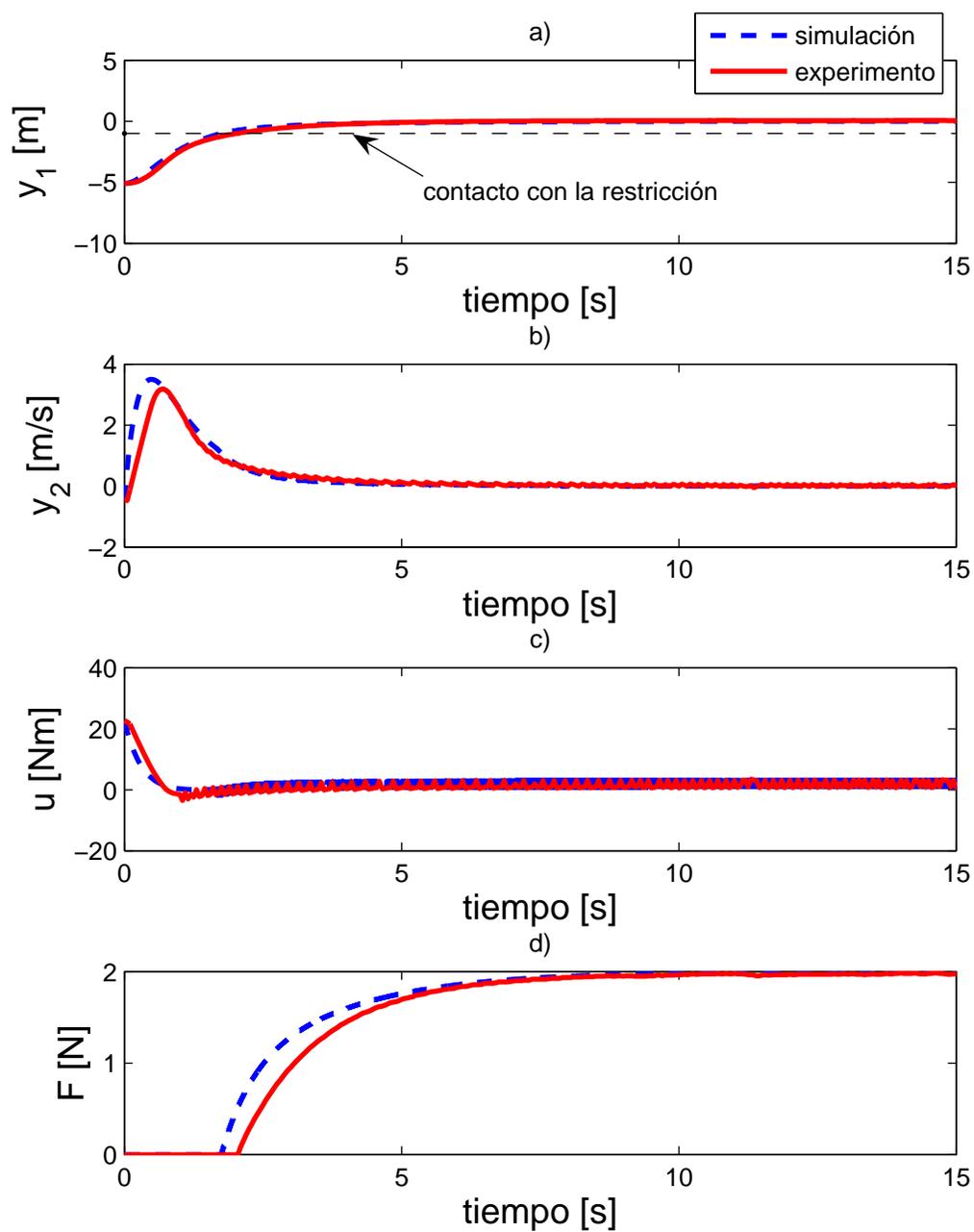


Figura 9. (a) Error de posición, (b) velocidad, (c) señal de control y (d) regulación de la fuerza deseada, obtenidos del sistema simulado (101) y el circuito electrónico de la Figura 7, con la ley de control (99)-(100).

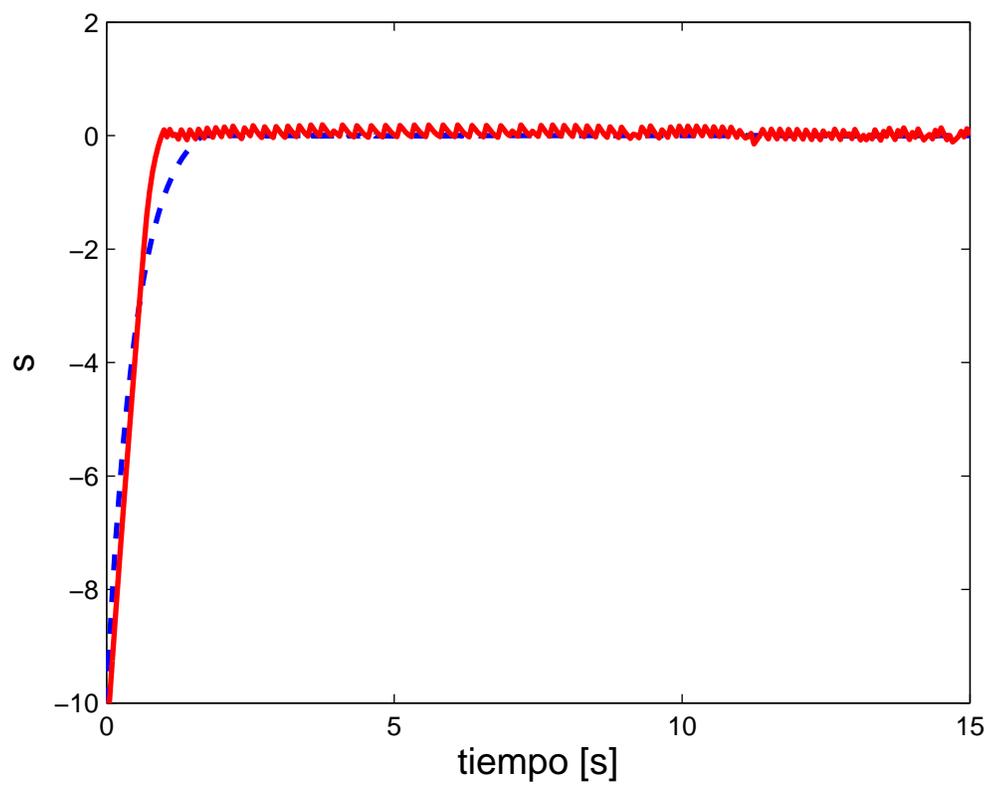


Figura 10. Evolución de la variable deslizante  $s(t)$ , obtenidos del sistema simulado (101) y el circuito electrónico de la Figura 7, con la ley de control (99)-(100).



Figura 11. Plataforma masa-resorte de la compañía Educational Control Products (ECP-210) configurada para tener una restricción unilateral.

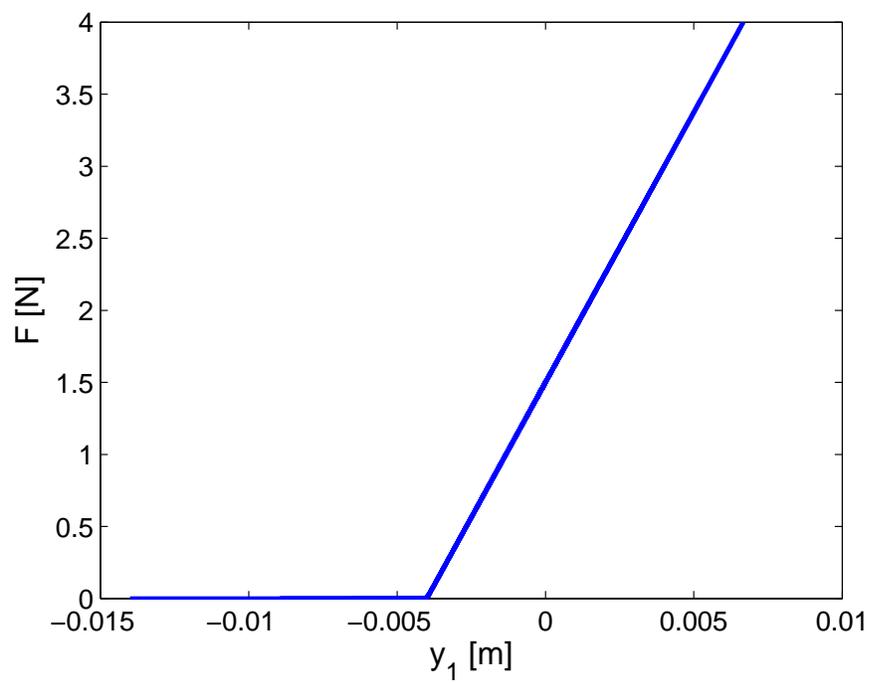


Figura 12. Error de posición vs. fuerza. Similar al de la Figura 6, obtenidos de la plataforma (ECP-210) de la Figura 11, con la ley de control (99)-(100).

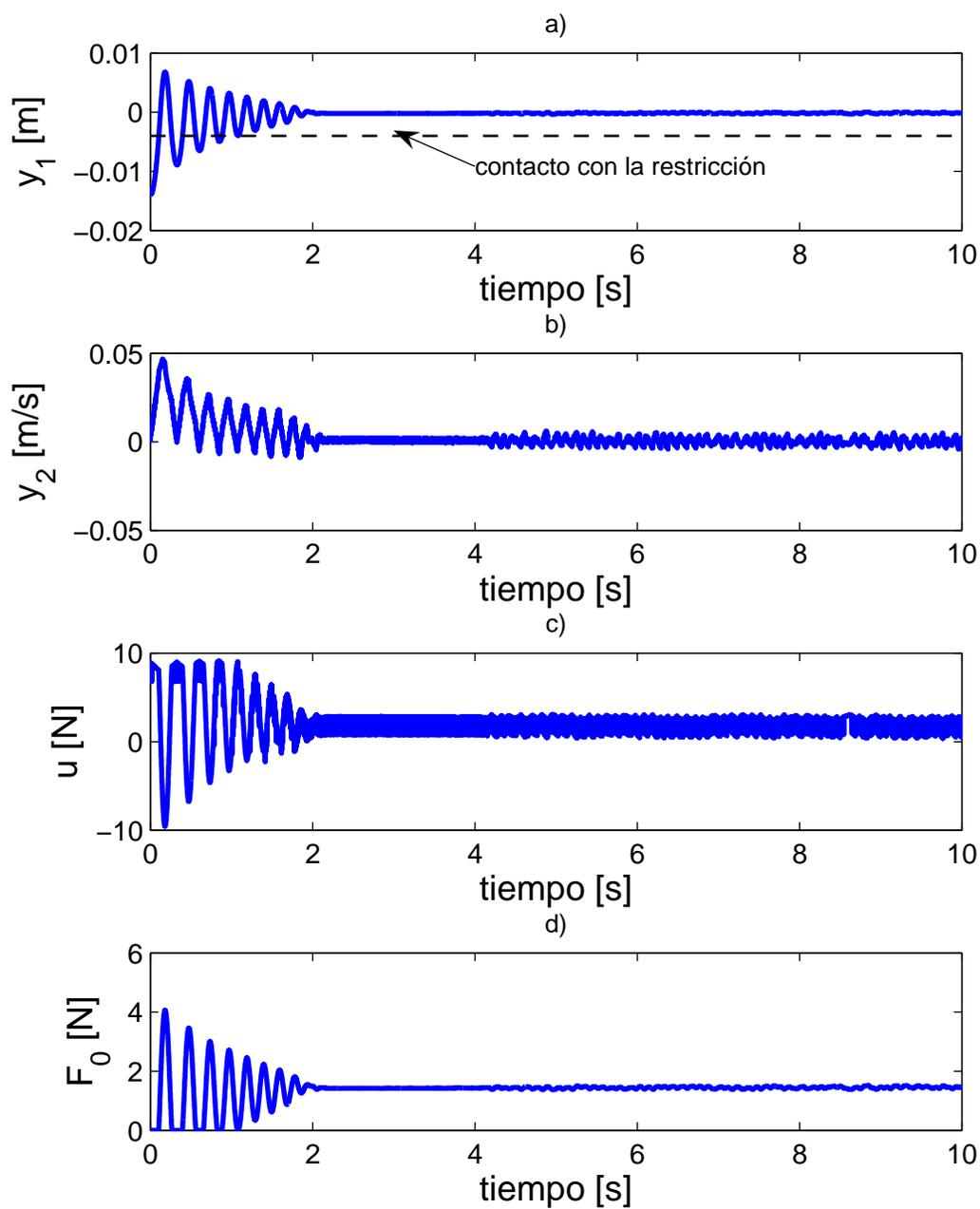


Figura 13. (a) Error de posición, (b) velocidad, (c) ley de control y (d) regulación de la fuerza deseada, obtenidos de la plataforma (ECP-210) de la Figura 11, con la ley de control (99)-(100).

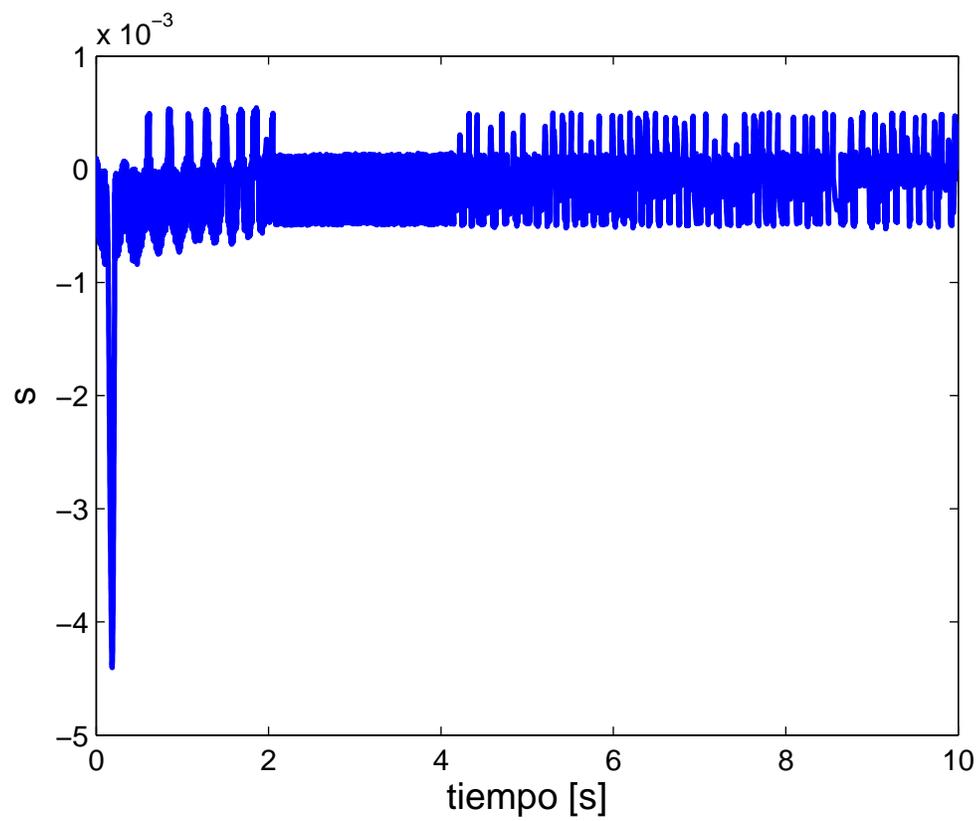


Figura 14. Variable deslizante  $s(t)$ , obtenida de la plataforma (ECP-210) de la Figura 11, con la ley de control (99)-(100).

## Capítulo 5

# Aplicaciones a sistemas mecánicos de 2 g.d.l. completamente actuados

El control de un sistema dinámico con condiciones restrictivas es un problema interesante con aplicaciones prácticas. Una dificultad en controlar sistemas sujetos a restricciones en la posición es que las ecuaciones de movimiento son diferentes cuando la condición del sistema cambia de movimiento libre a movimiento restringido. En este capítulo se ofrece una alternativa de modelado donde las ecuaciones de movimiento son únicas sin importar la zona de movimiento donde se sitúe el sistema. En este capítulo se proponen algoritmos de control por modos deslizantes,  $\mathcal{H}_\infty$ , y modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$  para regular la fuerza ejercida en un resorte, considerándose que la fricción seca, tipo Coulomb o Dahl y las perturbaciones no son completamente conocidas. Los controladores propuestos se diseñan para el sistema general sin importar la zona de movimiento en que se encuentre. Se prueba que los sistemas no lineales contenidos en este capítulo son asintóticamente estables en forma global y alcanzan un error de fuerza igual a cero en estado estacionario.

### 5.1 Robot manipulador de 2 g.d.l. con un círculo como restricción

El modelo dinámico del sistema mecánico de dos eslabones con restricción que se muestra en la Figura 15, se puede expresar en coordenadas de espacio de estado como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q) + F_c(\dot{q}) = \tau + w(t) \quad (115)$$

donde  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^2$  denotan el desplazamiento, velocidad y aceleración articular de los eslabones del sistema mecánico;  $M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva para cada  $q \in \mathbb{R}^2$ ;  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis;  $G(q) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de fuerzas gravitacionales;  $F(q) \in \mathbb{R}^2$  es el par generado por el resorte al hacer contacto con la restricción;  $F_c(\dot{q}) = [\alpha_1 \text{sign}(\dot{q}_1), \alpha_2 \text{sign}(\dot{q}_2)]^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de fricciones de Coulomb, donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los coeficientes de magnitud de la fricción;  $\tau \in \mathbb{R}^2$  son las entradas de control y  $w(t) = [w_1(t), w_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  son las perturbaciones externas desconocidas. La amplitud de la fricción de Coulomb y la perturbación se supone que satisfacen

$$\alpha_i \leq A_i, \quad \sup_t |w_i(t)| \leq B_i \quad (116)$$

para todo  $t$  y unas constantes  $A_i > 0$ ,  $B_i > 0$ , con  $i = 1, 2$ . La suposición (116) se establece por razones técnicas que se especificarán mas adelante.

De la Figura 15,  $k \in \mathbb{R}$  es la rigidez del resorte en el efector final,  $l_1 \in \mathbb{R}$  es la longitud del primer eslabón,  $l_2 \in \mathbb{R}$  es la longitud del segundo eslabón,  $m_1 \in \mathbb{R}$  es la masa del primer eslabón,  $m_2 \in \mathbb{R}$  es la masa del segundo eslabón,  $r_0 \in \mathbb{R}$  es la distancia desde el origen hasta la punta del segundo eslabón sin tomar en cuenta el resorte, considerando que se tiene contacto entre el resorte y la restricción con una fuerza de compresión cero. La posición euclidiana de la punta del segundo eslabón está denotada por  $x_r = [x_{r1}, x_{r2}]^T \in \mathbb{R}^2$  y se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_{r1} &= l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ x_{r2} &= l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (117)$$

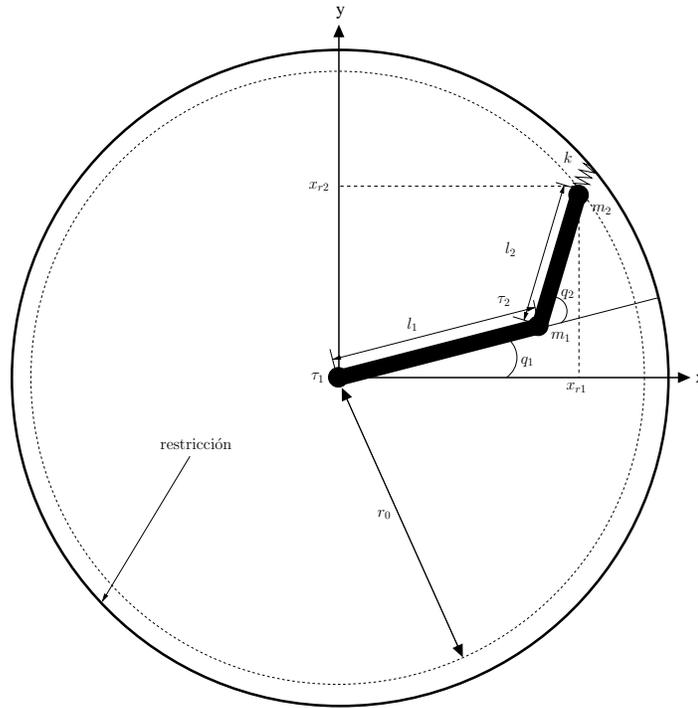


Figura 15. Sistema mecánico de dos eslabones con una circunferencia como restricción.

La superficie de restricción es un círculo en el espacio de trabajo (plano x-y), cuyo centro coincide con el eje de rotación del primer eslabón del sistema mecánico, y se expresa como

$$\phi(x_r) = x_{r1}^2 + x_{r2}^2 - r_0^2 = 0. \quad (118)$$

La restricción se puede expresar en términos de variables de estado como

$$\psi(q) = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)} - r_0 = 0. \quad (119)$$

Por lo tanto se puede definir la fuerza en el resorte como

$$F_r = \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)} < r_0 \\ k\psi(q) & \text{si } \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)} \geq r_0 \end{cases} \quad (120)$$

donde  $F_r$  se puede reescribir de la siguiente manera

$$F_r = \frac{k}{2} \left( \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)} - r_0 + \left| \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)} - r_0 \right| \right) \quad \forall q_2 \in \mathbb{R}. \quad (121)$$

El par generado en el sistema mecánico por la fuerza del resorte al hacer contacto con la restricción  $F(q)$  se denota como

$$F(q) = F_r \begin{bmatrix} \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2)} \\ l_2 \end{bmatrix}. \quad (122)$$

### 5.1.1 Diseño del control por modos deslizantes

El objetivo de control es encontrar un control  $\tau \in \mathbb{R}^2$ , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte  $F_d$  (a través de la distancia deseada hasta la punta del segundo eslabón  $r_d$ ), las posiciones articulares  $(q_1, q_2)$ , la posición de referencia  $r_0$ , las velocidades articulares  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ , y las posiciones articulares deseadas dadas por las constantes  $(q_{1d}, q_{2d})$  tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_1(t) - q_{1d}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_2(t) - q_{2d}| = 0 \quad (123)$$

Dado que  $F_d = k(r_d - r_0)$ , despejando  $r_d$  y utilizando (119) se puede obtener  $q_{2d}$ , es decir

$$q_{2d} = \arccos \left( \frac{r_d^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \right) = \arccos \left( \frac{(F_d/k + r_0)^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \right). \quad (124)$$

Con estos antecedentes se diseña una ley de control por modos deslizantes para el sistema (115). Se busca que un controlador dirija las trayectorias del sistema hacia la superficie deslizante  $s \in \mathbb{R}^2$

$$s = \mu q + \dot{q} + \gamma \int_0^t (q - q_d) dt \quad (125)$$

donde  $q_d = [q_{1d}, q_{2d}]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{diag}\{\mu\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\text{diag}\{\gamma\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales positivas de sintonización. Esta superficie deslizante se propone dinámica debido a que el término integral facilita alcanzar el objetivo de control. La ley de control  $\tau \in \mathbb{R}^2$  que asegura esto, está dada por

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q) - \beta \frac{s}{\|s\|} - M(q)[\mu\dot{q} + \gamma(q - q_d) + \lambda s]. \quad (126)$$

Se propone que la ley de control estará actuando en todo tiempo, es decir, cuando el sistema mecánico está en movimiento libre o en movimiento restringido (contacto con el círculo).  $\lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\beta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales de ganancia positivas, cuyos valores serán sintonizados para asegurar que el movimiento de las trayectorias se dirija hacia la superficie deslizante. Debido a que la superficie deslizante (125) es una variable dinámica, añadiremos  $s$  como otro estado en (115). Esto nos conduce al sistema extendido

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q)[-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - F(q) - F_c(\dot{q}) + w(t) + \tau] \\ \mu\dot{q} + \ddot{q} + \gamma(q - q_d) \end{bmatrix}. \quad (127)$$

### 5.1.2 Análisis de estabilidad

En esta sección se analizará la estabilidad del sistema en lazo cerrado (127) y concluiremos acerca de la estabilidad global.

Sustituyendo (126) en (127), el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[\beta \text{sign}(s) + F_c(q) - w] - \mu\dot{q} - \gamma(q - q_d) - \lambda s \\ -\lambda s - M^{-1}(q)[\beta \frac{s}{\|s\|} + F_c(q) - w] \end{bmatrix}. \quad (128)$$

Ahora, se puede probar la existencia de modos deslizantes verificando que  $s^T \dot{s} < 0$ , a través del siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} s^T \dot{s} &= s^T \left( -\lambda s - M^{-1}(q) \left[ \beta \frac{s}{\|s\|} + F_c(q) - w \right] \right) \\ &\leq -s^T \lambda s - \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} \|s\| + \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \|s\| \\ &\leq -\lambda \|s\|^2 - \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\|. \end{aligned}$$

Concluimos la existencia de modos deslizantes en la superficie  $s = \mu q + \dot{q} + \gamma \int_0^t (q - q_d) dt$  mientras la condición  $0 < \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} (A_i + B_i) < \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\}$  permanezca válida, con  $i = 1, 2$ .

También se puede demostrar la convergencia en tiempo finito de las trayectorias hacia la superficie  $s = 0$  a través de la siguiente función cuadrática  $V(s) \in \mathbb{R}$

$$V(s) = s^T s \quad (129)$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (128),

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t)) &\leq -2\lambda \|s\|^2 - 2 \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\| \\ &\leq -2 \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\| \\ &= -2 \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \sqrt{V(s(t))}. \end{aligned} \quad (130)$$

De (130) se tiene que

$$V(t) = 0 \text{ para } t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i)} = t_f. \quad (131)$$

Por lo tanto,  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito y en consecuencia, un movimiento a través del conjunto  $s = 0$  ocurre en el sistema discontinuo (128). De esta manera, en

los siguientes desarrollos supondremos que el sistema (128) está en modo deslizante, es decir que  $s = \dot{s} = 0$  para  $t \geq t_f$ .

Ahora se demostrará que, mientras el sistema permanezca en  $s = 0$ , las trayectorias  $(q, \dot{q})$  convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . De (125) con el cambio de variables  $e = q - q_d \in \mathbb{R}^2$ ,  $\dot{e} = \dot{q}$ , donde  $e = [e_1, e_2]^T$  y  $\dot{e} = [\dot{e}_1, \dot{e}_2]^T$ , se tiene que la dinámica del sistema (128), una vez que se encuentra en la superficie deslizante, se describe por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (132)$$

Dado que los elementos  $\gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2$  son positivos, nótese que el sistema (132) tiene un único punto de equilibrio situado en el origen  $[0, 0, 0, 0]^T$ , el cual es asintóticamente estable.

En resumen, se puede asegurar que todas las trayectorias del sistema (115), (117)–(122), con la ley de control (125)–(126) convergen a la referencia deseada. Sin embargo una forma de reducir el número de impactos en el sistema mecánico es teniendo una adecuada sintonización de los parámetros del controlador, especialmente de la relación entre los elementos de  $\text{diag}\{\gamma\}$  y  $\text{diag}\{\mu\}$ . Esto se obtiene haciendo los polos del sistema (132) negativos y reales. Esto se logra satisfaciendo la relación

$$\mu_{i=1,2} \geq 2\sqrt{\gamma_{i=1,2}}. \quad (133)$$

### 5.1.3 Simulación numérica

El desempeño y robustez del controlador por modos deslizantes propuesto son puestos a prueba en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando

MatLab<sup>®</sup>. Se estudia el modelo dinámico como en (127), el cual está en función de las posiciones articulares  $[q_1, q_2]$ , sus velocidades  $[\dot{q}_1, \dot{q}_2]$  y la dinámica de las superficies deslizantes  $[s_1, s_2]$ . Se consideran los siguientes parámetros: fuerza deseada  $F_d = 2N$ , la distancia deseada desde el centro del círculo hasta la punta del segundo eslabón  $r_d = 4$ , con la distancia de referencia  $r_0 = 3$ , la posición deseada  $q_{1d} = 0$ ,  $q_{2d}$  se calcula de (124), la constante de rigidez del resorte  $k = 2$ , las masas  $m_1 = m_2 = 1$ . La ganancia del controlador es sintonizada en  $\lambda_1 = \lambda_2 = 70$ , el parámetro de la superficie deslizante  $\mu_1 = \mu_2 = 4$ , el parámetro de ganancia de la función signo  $\beta_1 = \beta_2 = 2$  y la ganancia del error de posición  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ . Las amplitudes de las fricciones de Coulomb son  $\alpha_1 = 0.5$  y  $\alpha_2 = 0.3$ , las perturbaciones en el sistema son  $w_1 = 0.2 \sin(t)$  y  $w_2 = 0.3 \sin(2t)$ . Las condiciones iniciales de posición, velocidad y superficie deslizante  $s$  son puestas como  $q(0) = [-\pi/4, \pi]$ ,  $\dot{q} = [0, 0]$ , y  $s = [0.1, -0.1]$ . La selección de parámetros de control se realiza cumpliendo las condiciones que garantizan la estabilidad del sistema mecánico en lazo cerrado, de la misma manera se seleccionan condiciones iniciales que pongan a prueba al controlador propuesto.

La Figura 16a muestra la posición y velocidad del primer eslabón. La Figura 16b muestra la posición y velocidad del segundo eslabón. En la Figura 16c se observa los movimientos deslizantes  $s$ , alcanzándose las superficies deslizantes en tiempo finito. La Figura 16d muestra la fuerza ejercida en el resorte regulada indirectamente a través de  $q_2$ , la Figura 17 las señales de control aplicadas y la Figura 18 la fuerza en el resorte vs. posición articular del primer eslabón, donde se observa la relación entre ambas variables.

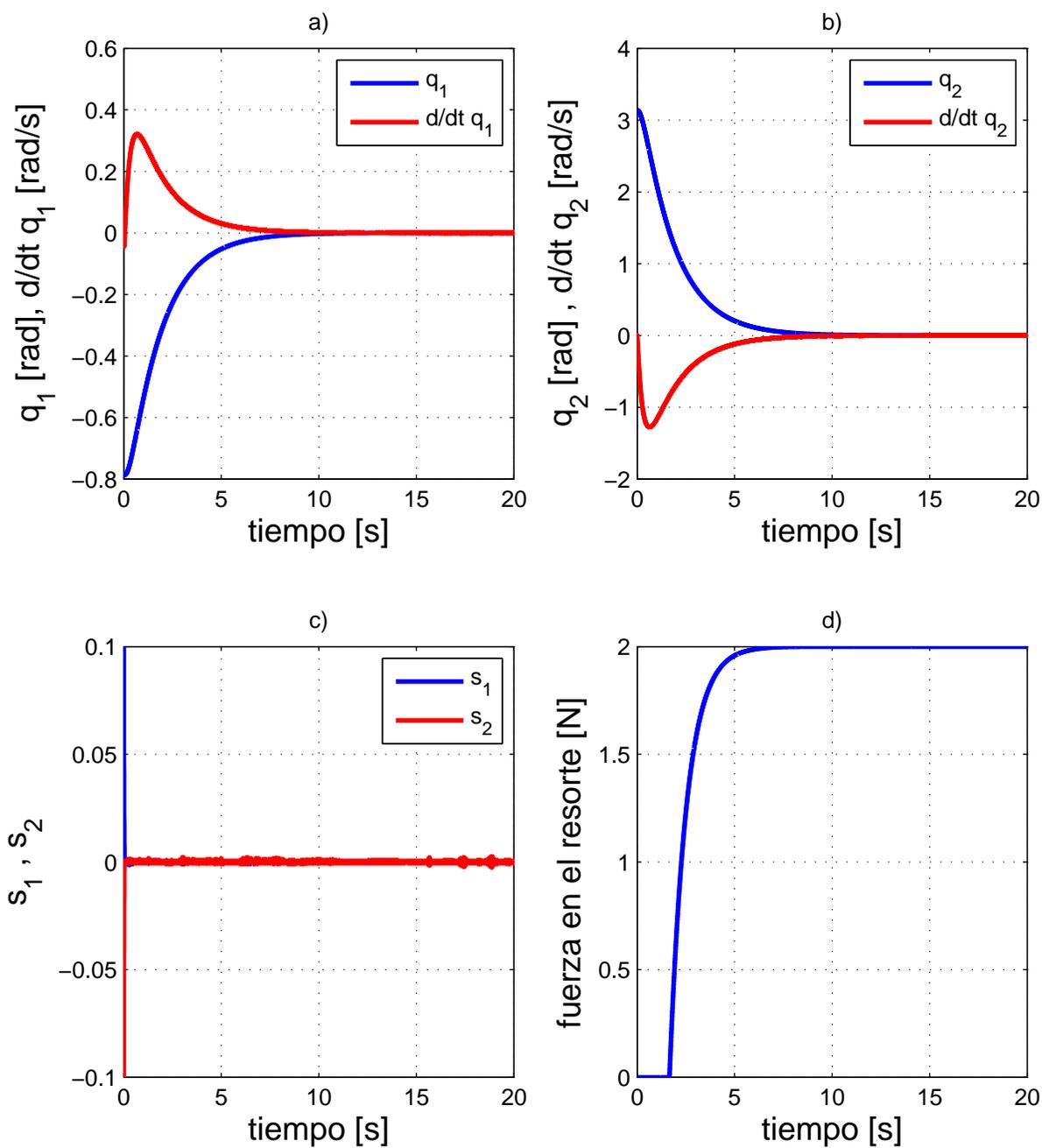


Figura 16. a) Posición y velocidad del primer eslabón, b) posición y velocidad del segundo eslabón, c) movimiento deslizante ( $s$ ) y d) fuerza generada en el resorte.

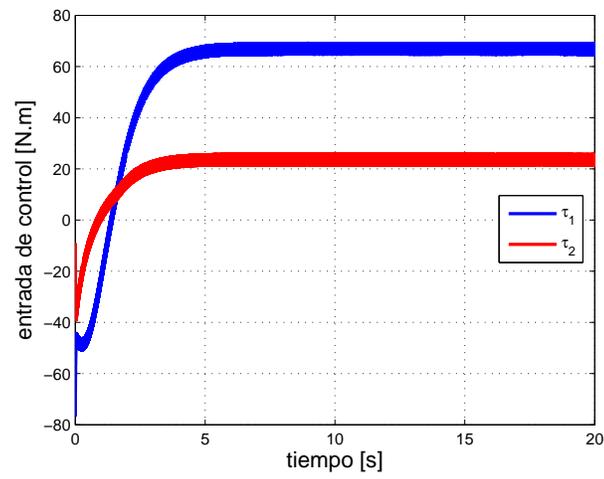
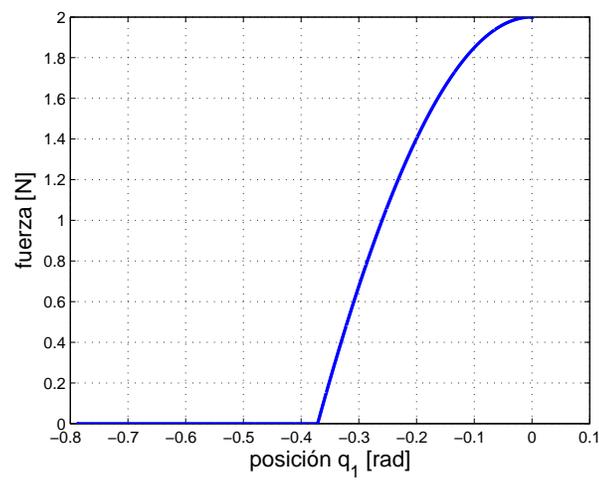


Figura 17. Señal de control.

Figura 18. Fuerza vs. posición  $q_1$ .

### 5.1.4 Comentarios

Se estudia un problema de regulación asintótica de posición y fuerza en un resorte para un sistema mecánico de 2 g.d.l., el cual presenta una restricción en la posición modelada por un círculo. Este sistema de estructura variable constituye un ejemplo básico para la construcción de ejemplos más complejos y completos. Mas aún, se incorporan algunos elementos reales que no son completamente conocidos en el diseño del controlador como lo son la fricción de Coulomb y perturbaciones externas.

El controlador el cual presenta robustez en lazo cerrado, fue sintetizado utilizando la metodología de controladores dinámicos por modos deslizantes. A su vez se prueba la convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante y estabilidad asintótica global hacia un único punto de equilibrio.



$\mathbb{R}^2$  es el par generado por el resorte al hacer contacto con la restricción;  $F_c(\dot{q}) = [\alpha_1 \text{sign}(\dot{q}_1), \alpha_2 \text{sign}(\dot{q}_2)]^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de fricciones de Coulomb;  $\tau \in \mathbb{R}^2$  son las entradas de control y  $w(t) = [w_1(t), w_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  son las perturbaciones externas desconocidas. La amplitud de la fricción de Coulomb y la perturbación se supone que satisfacen las mismas condiciones dadas en (116).

El objetivo de control es encontrar un control  $\tau \in \mathbb{R}^2$ , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte  $F_d$  (a través de la posición deseada  $x_{d1}$  sobre el eje  $x$  de la punta del segundo eslabón), las posiciones articulares  $(q_1, q_2)$ , la posición de referencia  $x_0$ , las velocidades articulares  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ , y las posiciones articulares deseadas  $(q_{d1}, q_{d2})$  tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_1(t) - q_{d1}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_2(t) - q_{d2}| = 0. \quad (135)$$

Dado que  $F_d = k(x_{d1} - x_0)$ , con  $F_d \geq 0$  y del hecho de que  $x_{d1} = l_1 \cos(q_{d1}) + l_2 \cos(q_{d2})$ , sustituyendo y despejando podemos obtener  $q_{d2}$  en función de las otras variables

$$q_{d2} = \arccos\left(\frac{F_d}{l_2 k} + \frac{x_0}{l_2} - \frac{l_1 \cos(q_{d1})}{l_2}\right) \quad (136)$$

Con estos antecedentes se diseña una ley de control por modos deslizantes para el sistema (134). Se busca que el controlador dirija las trayectorias del sistema hacia la superficie deslizante  $s \in \mathbb{R}^2$

$$s = \mu q + \dot{q} + \gamma \int_0^t (q - q_d) dt' \quad (137)$$

donde  $q_d = [q_{1d}, q_{2d}]^T \in \mathbb{R}^2$ , a su vez  $\mu \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales positivas de sintonización. Esta superficie deslizante se propone dinámica debido a que el término integral facilita alcanzar el objetivo de control. La ley de control  $\tau$  que asegura esto está dada por

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q) - \beta \frac{s}{\|s\|} - M(q)[\mu\dot{q} + \gamma(q - q_d) + \lambda s]. \quad (138)$$

Se propone que la ley de control estará actuando en todo tiempo, es decir, cuando el sistema mecánico está en movimiento libre o en movimiento restringido. Los valores de  $\text{diag}\{\lambda\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\text{diag}\{\beta\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales positivas las cuales serán sintonizadas para asegurar que el movimiento de las trayectorias se dirija hacia la superficie deslizante. Debido a que la superficie deslizante (137) es una variable dinámica, añadiremos  $s$  como otro estado en (134). Esto nos conduce al sistema extendido

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q)[-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - \tau_c(q) - F_c(\dot{q}) + w(t) + \tau] \\ \mu\dot{q} + \ddot{q} + \gamma(q - q_d) \end{bmatrix}. \quad (139)$$

### 5.2.2 Análisis de estabilidad

En esta sección se analizará la estabilidad del sistema en lazo cerrado (139) y concluiremos acerca de la estabilidad global.

Sustituyendo (138) en (139), el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[\beta \text{sign}(s) + F_c(q) - w] - \mu\dot{q} - \gamma(q - q_d) - \lambda s \\ -\lambda s - M^{-1}(q)[\beta \frac{s}{\|s\|} + F_c(q) - w] \end{bmatrix}. \quad (140)$$

Ahora, se puede probar la existencia de modos deslizantes verificando que  $s^T \dot{s} < 0$ , a través del siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} s^T \dot{s} &= s^T \left( -\lambda s - M^{-1}(q) \left[ \beta \frac{s}{\|s\|} + F_c(q) - w \right] \right) \\ &\leq -s^T \lambda s - \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} \|s\| + \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \|s\| \\ &\leq -\lambda \|s\|^2 - \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\|. \end{aligned}$$

Se concluye la existencia de modos deslizantes en la superficie  $s = \mu q + \dot{q} + \gamma \int_0^t (q - q_d) dt'$  mientras la condición  $0 < \lambda_{max}\{M^{-1}(q)\} (A_i + B_i) < \lambda_{min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{min}\{\beta\}$  permanezca válida, con  $i = 1, 2$ .

También podemos demostrar la convergencia en tiempo finito de las trayectorias hacia la superficie  $s = 0$  a través de la siguiente función cuadrática  $V(s) \in \mathbb{R}$

$$V(s) = s^T s \quad (141)$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (141),

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t)) &\leq -2\lambda \|s\|^2 - 2 \left( \lambda_{min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{min}\{\beta\} - \lambda_{max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\| \\ &\leq -2 \left( \lambda_{min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{min}\{\beta\} - \lambda_{max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\| \\ &= -2 \left( \lambda_{min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{min}\{\beta\} - \lambda_{max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \sqrt{V(s(t))}. \end{aligned} \quad (142)$$

De (142) se tiene que

$$V(t) = 0 \text{ para } t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\lambda_{min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{min}\{\beta\} - \lambda_{max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i)} = t_f. \quad (143)$$

Por lo tanto,  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito y en consecuencia, un movimiento a través del conjunto  $s = [0, 0]^T$  ocurre en el sistema discontinuo (140). De esta manera, en los siguientes desarrollos supondremos que el sistema (140) está en modo deslizante, tal que  $s = \dot{s} = 0$  para  $t \geq t_f$ .

Ahora se demostrará que, mientras el sistema permanezca en  $s = 0$ , las trayectorias  $(q, \dot{q})$  convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . De (137) con el cambio de variables  $e = q - q_d \in \mathbb{R}^2$ ,  $\dot{e} = \dot{q} \in \mathbb{R}^2$ , se tiene que la dinámica del sistema (140), una vez que se encuentra

en la superficie deslizante, se describe por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (144)$$

Dado que las matrices

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

tienen todos sus elementos positivos, entonces el sistema (144) tiene todos sus puntos de equilibrio situados en el origen, los cuales son asintóticamente estables.

En resumen, se puede asegurar que todas las trayectorias del sistema (134), con la ley de control (137)–(138) convergen a la referencia deseada. Sin embargo una forma de reducir el número de impactos en el sistema mecánico es teniendo una adecuada sintonización de los parámetros del controlador, especialmente de la relación entre  $\gamma$  y  $\mu$ . Esto se obtiene localizando los polos del sistema (144) como negativos y reales. Esto se logra satisfaciendo la relación

$$\mu_i \geq 2\sqrt{\gamma_i} \quad , \quad i = 1, 2. \quad (145)$$

### 5.2.3 Simulación numérica

El desempeño y robustez del controlador por modos deslizantes propuesto (138) es puesto a prueba en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab<sup>®</sup>. Los parámetros utilizados en la planta corresponden a los del robot PEGASUS fabricado por la compañía Amatrol. Se estudia el modelo dinámico como en

Tabla 1: Parámetros del manipulador de 2 g.d.l.

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$l_1$	Longitud del eslabón 1	0.297	m
$l_2$	Longitud del eslabón 2	0.297	m
$m_1$	Masa del eslabón 1	0.38	kg
$m_2$	Masa del eslabón 2	0.34	kg
$I_1$	Inercia 1	0.000243	kg $m^2$
$I_2$	Inercia 2	0.000068	kg $m^2$
$I_3$	Inercia 3	0.000015	kg $m^2$
$g$	Gravedad	9.80665	$m/s^2$
$k$	Constante de rigidez del resorte	100	N/m
$l_{c1}$	Longitud al centro de masa: Eslabón 1	0.1485	m
$l_{c2}$	Longitud al centro de masa: Eslabón 2	0.1485	m

(139) basado en las posiciones articulares  $[q_1, q_2]$ , sus velocidades  $[\dot{q}_1, \dot{q}_2]$  y la dinámica de las superficies deslizantes  $[s_1, s_2]$ , se consideran los parámetros mostrados en las Tablas 1 y 2.

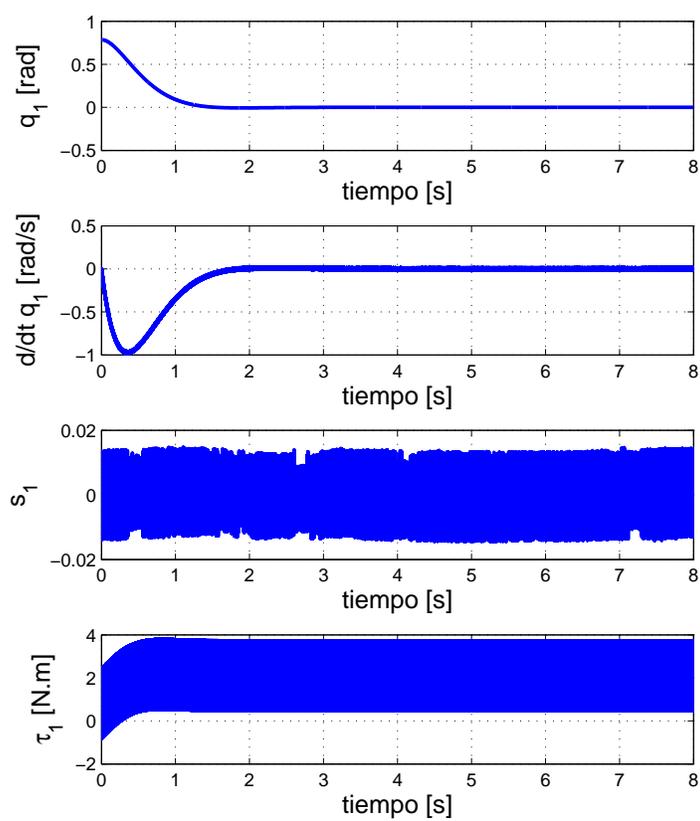


Figura 20. Valores para el esbalón 1.

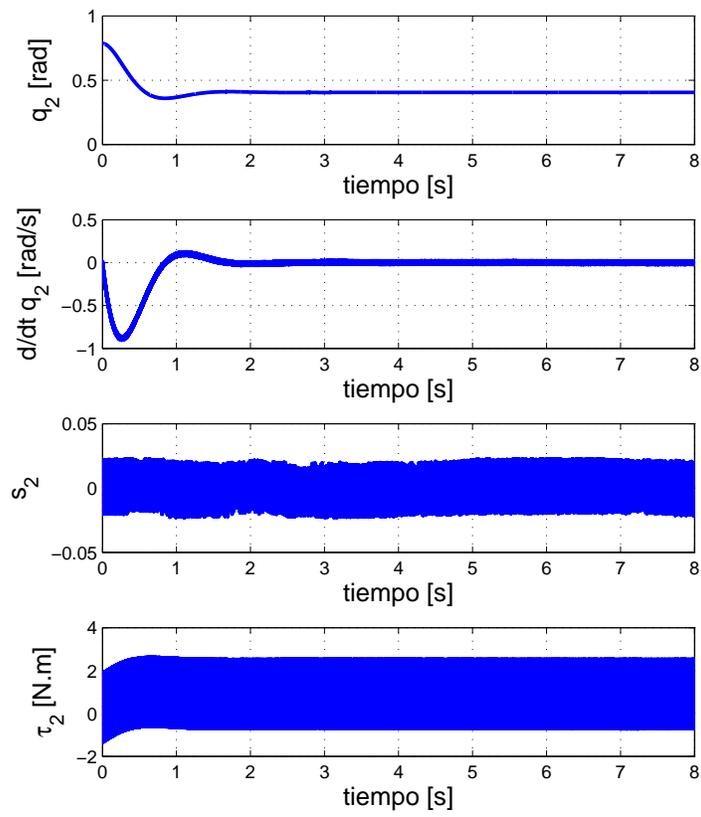


Figura 21. Valores para el esbalón 2.

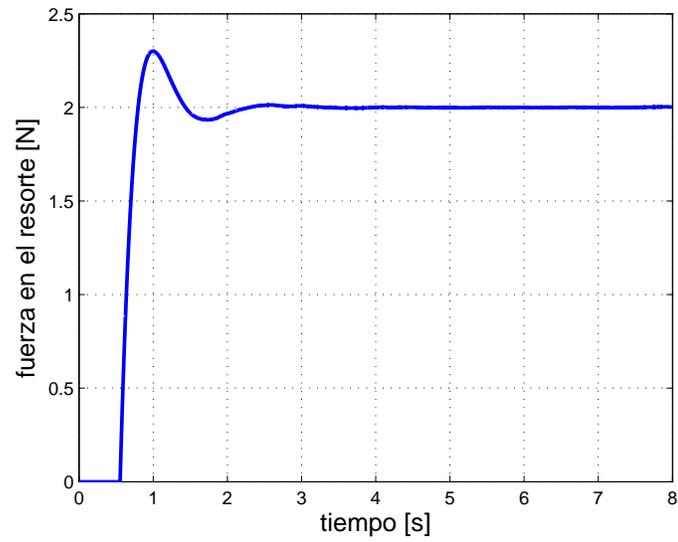
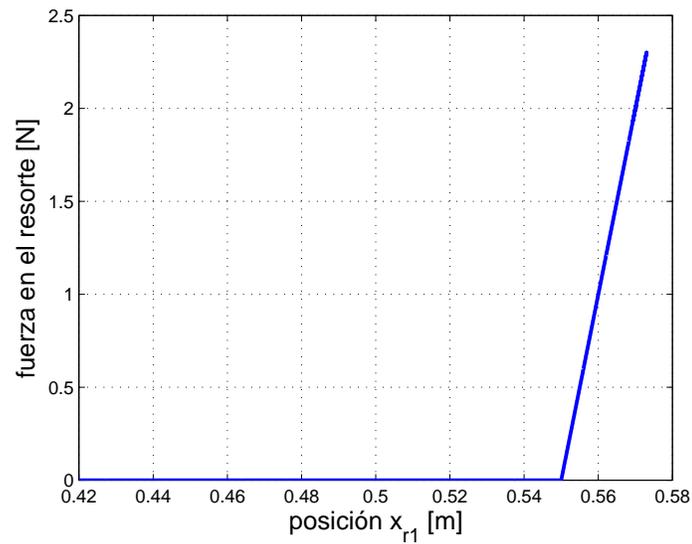
Figura 22. Fuerza en el resorte  $F_c$ .Figura 23. Fuerza en el resorte  $F_c$  vs. posición euclidiana del efector final  $x_{r1}$ .

Tabla 2: Ganancias del controlador y perturbaciones externas de la planta, control por modos deslizantes

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$q_1(0)$	Posición articular 1	$\pi/4$	rad
$\dot{q}_1(0)$	Velocidad articular 1	0	rad/s
$q_2(0)$	Posición articular 2	$\pi/4$	rad
$\dot{q}_2(0)$	Velocidad articular 2	0	rad/s
$s_1(0)$	Movimiento deslizante 1	0	
$s_2(0)$	Movimiento deslizante 2	0	
$\lambda_1$	Ganancia del controlador	40	$1/s^2$
$\lambda_2$	Ganancia del controlador	30	$1/s^2$
$\mu_1$	Ganancia del controlador	5	$1/(m.s)$
$\mu_2$	Ganancia del controlador	5	$1/(m.s)$
$\beta_1$	Ganancia del controlador	1.6	N.m
$\beta_2$	Ganancia del controlador	1.6	N.m
$\gamma_1$	Ganancia del controlador	9	$1/(m.s^2)$
$\gamma_2$	Ganancia del controlador	20	$1/(m.s^2)$
$\alpha_1$	Fricción de Coulomb en el eslabón 1	0.2	N.m
$\alpha_2$	Fricción de Coulomb en el eslabón 2	0.1	N.m
$x_{d1}$	Posición euclidiana deseada del efector final	0.57	m
$F_d$	Fuerza deseada en el efector final	2	N
$x_0$	Posición euclidiana de referencia	0.55	m
$q_{d1}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$w_1$	Perturbación en eslabón 1	$0.1 \sin(t)$	N.m
$w_2$	Perturbación en eslabón 2	$0.1 \cos(t)$	N.m

### 5.2.4 Diseño del controlador $H_\infty$

El controlador por modos deslizantes desarrollado en la sección IV.2.2 mostró ser robusto ante cierto tipo de perturbaciones acopladas y fricción de Coulomb, en la presente sección se pretende explorar otro tipo de control el cual atenúa incertidumbres paramétricas, fricción tipo Dahl y perturbaciones no acopladas al sistema mecánico de la Figura 19, esta metodología de diseño es el control  $H_\infty$ , cuyo desarrollo del controlador se muestra a continuación.

El modelo dinámico del sistema mecánico de dos eslabones con restricción, que se muestra en la Figura 19, se puede expresar en coordenadas de espacio de estado como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + \tau_c(q) + w(t) \quad (146)$$

donde  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^2$  denotan el desplazamiento, velocidad y aceleración articular de los eslabones del sistema mecánico, respectivamente;  $M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva para cada  $q \in \mathbb{R}^2$ ;  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis;  $G(q) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de fuerzas gravitacionales;  $\tau_c(q) \in \mathbb{R}^2$  es el par generado por el resorte al hacer contacto con la restricción;  $\tau \in \mathbb{R}^2$  son las entradas de control y  $w(t) = [w_1(t), w_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  son las perturbaciones externas desconocidas.  $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de fuerzas de fricción, las cuales son representadas como una combinación

$$F_i = \sigma_{0i}\dot{q}_i + F_{di}, \quad i = 1, 2 \quad (147)$$

de fricción viscosa  $\sigma_{0i}\dot{q}_i$ , y fricción de Dahl  $F_{di}$ , la cual es gobernada por el siguiente modelo dinámico (véase Dahl (1976)):

$$\dot{F}_{di} = \sigma_{1i}\dot{q}_i - \sigma_{1i}|\dot{q}_i|\frac{F_{di}}{F_{ci}} + w_{2i}, \quad (148)$$

donde  $\sigma_{0i} > 0$ ,  $\sigma_{1i} > 0$  y  $F_{ci} > 0$  son los coeficientes de fricción viscosa, coeficiente de rigidez y nivel de fricción de Coulomb, respectivamente; correspondientes a la  $i$ -ésima articulación del manipulador;  $w_{2i}$  es una perturbación externa agregada para lidiar con discrepancias en el modelo de fricción.

El modelo de Dahl (148) describe el comportamiento en un resorte con fricción estática, este modelo representa esencialmente la fricción de Coulomb con un retraso en el cambio de la fuerza de fricción cuando la dirección del movimiento cambia. Como la fricción de Coulomb es solamente una función del desplazamiento y el signo de la velocidad, este modelo dinámico es no suave.

El modelo (148) puede reescribirse en su forma vectorial

$$F = \sigma_0 \dot{q} + F_d, \quad (149)$$

$$\dot{F}_d = \sigma_1 \dot{q} - \sigma_1 \text{diag}\{|\dot{q}_i|\} F_c^{-1} F_d + w_2, \quad (150)$$

donde  $F = \text{col}\{F_i\}$ ,  $F_d = \text{col}\{F_{di}\}$ ,  $x = \text{col}\{q_i\}$ ,  $\sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0i}\}$ ,  $\sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_{1i}\}$ ,  $F_c = \text{diag}\{F_{ci}\}$ ,  $w_2 = \text{col}\{w_{2i}\}$ .

Sea  $q_d = \text{col}\{q_{di}\}$  las constantes de las posiciones deseadas. Entonces si no hay perturbaciones iniciales y externas, la posición deseada será el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado actuado por  $\tau$ . *El objetivo de control* es diseñar un regulador de la forma

$$\tau = G(q) + \phi \left( \int_0^t (q - q_d) dt, q - q_d, \dot{q}, F(\dot{q}) \right) + u \quad (151)$$

donde  $\phi(\cdot)$  es un compensador, el cual elimina los términos no deseados de la ecuación en lazo cerrado y otorga al sistema la estructura necesaria para diseñar la parte de control  $H_\infty$ . A su vez la expresión  $\tau$  asegura estabilidad asintótica hacia la referencia  $q_d$  a la vez que se atenúan localmente los efectos de perturbaciones.

Por otro lado, la salida a ser controlada está dada por

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q - q_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (152)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$ . La salida del sistema está dada por

$$y = q + w_0, \quad (153)$$

donde se supone que solo tiene acceso a la medición de posiciones y son afectadas por el vector de error  $w_0(t) \in \mathbb{R}^2$ .

El problema de  $H_\infty$  para regulación de posición para el manipulador con fricción puede ser considerado de la siguiente manera. Dado el sistema mecánico (146)-(153), una posición deseada  $q_d$  y un número real  $\gamma > 0$ , se busca encontrar (si existe) un regulador dinámico causal con estados internos  $\xi \in \mathbb{R}^8$  de tal forma que el sistema en lazo cerrado sin perturbaciones sea asintóticamente estable y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  sea localmente menor a  $\gamma$ .

*El objetivo de control* es encontrar un control  $\tau \in \mathbb{R}^2$ , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte  $F_d$  (a través de la posición deseada  $x_{d1}$  sobre el eje  $x$  de la punta del segundo eslabón), las posiciones articulares  $(q_1, q_2)$ , la posición de referencia  $x_0$ , las velocidades articulares  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ , y las posiciones articulares deseadas  $(q_{d1}, q_{d2})$  tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_1(t) - q_{d1}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_2(t) - q_{d2}| = 0 \quad (154)$$

dado que  $F_d = k(x_{d1} - x_0)$ , con  $F_d \geq 0$  y  $x_{d1} = l_1 \cos(q_{d1}) + l_2 \cos(q_{d2})$ . Sustituyendo y despejando podemos obtener  $q_{d2}$  en función de las otras variables

$$q_{d2} = \arccos \left( \frac{F_d}{l_2 k} + \frac{x_0}{l_2} - \frac{l_1 \cos(q_{d1})}{l_2} \right) \quad (155)$$

Se puede trasladar el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (146) al origen a través del siguiente cambio de variables, que incluye la integral del error de posición, error de posición, velocidad y fricción de Dahl, respectivamente;

$$x_1 = \int_0^t x_2(t) dt', \quad x_2 = [q_1 - q_{d1}, q_2 - q_{d2}]^T, \quad x_3 = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T, \quad x_4 = [F_{d1}, F_{d2}]^T. \quad (156)$$

Entonces las ecuaciones de estado son de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= M^{-1}(x_2 + q_d)[-C(x_2 + q_d, x_3)x_3 - \sigma_0 x_3 - x_4 \\ &\quad + \tau_c(x_2 + q_d) + \phi + u + w_1] \\ \dot{x}_4 &= \sigma_1 x_3 - \sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 + w_2. \end{aligned} \quad (157)$$

donde  $q_d$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  y  $F_c \in \mathbb{R}^2$ . El problema de control  $H_\infty$  en cuestión es el problema de control  $H_\infty$  para sistemas no lineales y no suaves desarrollado en el Capítulo II, donde el sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + f_2(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w \end{aligned} \quad (158)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de espacio de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^r$  son perturbaciones desconocidas,  $z \in \mathbb{R}^l$  es la salida a controlar,  $y \in \mathbb{R}^p$  son

las mediciones del sistema. Adecuando (157) a la forma (158) se tiene que

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ M^{-1}(x_2 + q_d) [-C(x_2 + q_d, x_3)x_3 \\ -\sigma_0 x_3 - x_4 + \tau_c(x_2 + q_d) + \phi] \\ \sigma_1 x_3 \end{bmatrix}, \quad (159)$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 \end{bmatrix}, \quad (160)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & M^{-1}(x_2 + q_d) & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \\ M^{-1}(x_2 + q_d) \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_2 + q_d, \\ k_{12}(x) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 4} \end{bmatrix} \quad (161)$$

Se propone  $\phi(\int_0^t (q - q_d) dt', q - q_d, \dot{q}, F(\dot{q})) \in \mathbb{R}^2$  la cual garantiza propiedades de estabilidad en (156) de la siguiente manera

$$\phi = \sigma_0 x_3 + x_4 - k_i x_1 - k_p x_2 - k_d x_3 \quad (162)$$

entonces  $\tau$  de (151) es:

$$\tau = G(x_2 + q_d) + \sigma_0 x_3 + x_4 - k_i x_1 - k_p x_2 - k_d x_3 + u \quad (163)$$

donde  $k_i$ ,  $k_p$  y  $k_d \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , son matrices diagonales definidas positivas.

### 5.2.5 Solución local al problema $H_\infty$

El siguiente análisis local involucra el problema de control lineal  $H_\infty$  para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w. \end{aligned} \quad (164)$$

Dado que el punto de equilibrio del sistema (157) es el origen se puede aseverar que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial f_1(0)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial x}, & B_1 &= g_1(0) & B_2 &= g_2(0) \\ C_1 &= \frac{\partial h_1(0)}{\partial x}, & D_{12} &= K_{12}(0) \\ C_2 &= \frac{\partial h_2(0)}{\partial x}, & D_{21} &= K_{21}(0). \end{aligned} \quad (165)$$

El sistema (164) debe de ser estabilizable y detectable en  $u$  y  $y$ , respectivamente. Bajo estas suposiciones, las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que exista solución al problema de control  $H_\infty$ .

**A1** Existe una solución simétrica positiva semi-definida para la ecuación

$$P A_1 + A_1^T P + C_1^T C_1 + P \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P = 0 \quad (166)$$

de tal forma que la matriz  $[A_1 - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P]$  tiene todos sus valores propios con parte real negativa.

**A2** Existe una solución simétrica positiva semi-definida para la ecuación

$$AZ + ZA^T + B_1^T B_1 + Z \left[ \frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2 C_2^T \right] Z = 0 \quad (167)$$

donde  $A = A_1 + (1/\gamma^2) B_1 B_1^T P$ , de tal manera que la matriz  $[A - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)]$  tenga todos sus valores propios con parte real negativa. Las ecuaciones (166) y (167) se conocen como ecuaciones algebraicas de Riccati.

De acuerdo con el lema citado en Aguilar *et al.* (2003), se puede aseverar que las condiciones (A1) y (A2) aseguran que existe una constante positiva  $\varepsilon_0$  tal que las ecuaciones perturbadas de Riccati

$$P_\varepsilon A_1 + A_1^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P_\varepsilon + \varepsilon I = 0 \quad (168)$$

$$A_\varepsilon Z_\varepsilon + Z_\varepsilon A_\varepsilon^T + B_1 B_1^T + Z_\varepsilon \left[ \frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2 C_2^T \right] Z_\varepsilon + \varepsilon I = 0 \quad (169)$$

tienen una única solución definida positiva  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  donde  $A_\varepsilon = A_1 + (1/\gamma^2) B_1 B_1^T P_\varepsilon$ .

Las ecuaciones (168) y (169) serán utilizadas para obtener una solución local para el problema de control no lineal como en (158). El siguiente Teorema es extraído de Aguilar *et al.* (2003)

**Teorema 3.** *Supóngase que las condiciones (A1) y (A2) se satisfacen y sean  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  soluciones positivas definidas de (168) y (169) con un  $\varepsilon > 0$ . Entonces el controlador a retroalimentar*

$$\dot{\xi} = f_1(\xi) + f_2(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)] \quad (170)$$

$$u = -B_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi \quad (171)$$

es una solución local del problema de control  $H_\infty$ .

La prueba es omitida, se puede encontrar en Aguilar *et al.* (2003). En lo consecuente el Teorema 3 es utilizado para diseñar un controlador  $H_\infty$  para el manipulador con fricción en cada una de sus articulaciones. ■

### 5.2.6 Simulación numérica

El desempeño y robustez del compensador + controlador  $H_\infty$  propuesto (163) utilizando también (171) es puesto a prueba en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab<sup>®</sup>. Los parámetros utilizados en la planta corresponden a los del robot PEGASUS fabricado por la compañía Amatrol. Se estudia el modelo dinámico como en (157) basado en la integral del error de posición  $[x_{11}, x_{12}]$ , los errores de posiciones articulares  $[x_{21}, x_{22}]$ , sus velocidades  $[x_{31}, x_{32}]$  y fricciones de Dahl  $[x_{41}, x_{42}]$ , se consideran los siguientes parámetros mostrados en las Tabla 1, que son los parámetros de la planta y a su vez la Tabla 3 nos muestra los parámetros de control y condiciones iniciales:

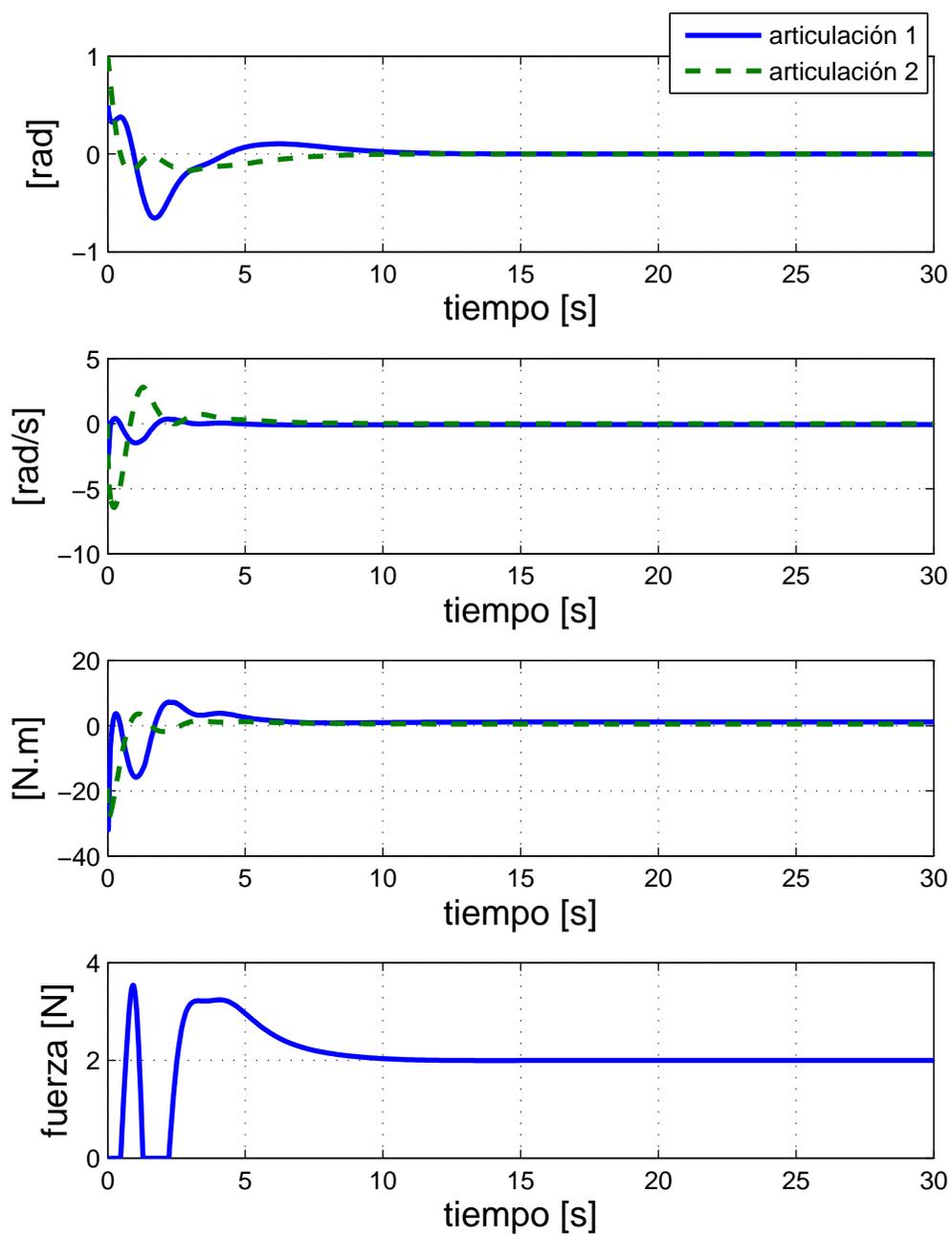


Figura 24. Errores de posición, velocidades, señales de control y fuerza ejercida en el resorte en el robot Pegasus.

Tabla 3: Condiciones iniciales, ganancias del controlador y perturbaciones externas de la planta, controlador  $H_\infty$

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$x_{11}(0)$	Integral de error de posición 1	0	rad.s
$x_{12}(0)$	Integral de error de posición 2	0	rad.s
$x_{21}(0)$	Error de posición articular 1	0.5	rad
$x_{22}(0)$	Error de posición articular 2	1	rad
$x_{31}(0)$	Velocidad articular 1	0	rad/s
$x_{32}(0)$	Velocidad articular 2	0	rad/s
$x_{41}(0)$	Fricción Dahl articular 1	0	N.m
$x_{42}(0)$	Fricción Dahl articular 2	0	N.m
$\xi_1(0) \in \mathbb{R}^8$	Estados del filtro	$0_{8 \times 1}$	
$x_{d1}$	Posición euclidiana deseada del efector final	0.57	m
$F_d$	Fuerza deseada en el efector final	2	N
$x_0$	Posición euclidiana de referencia	0.55	m
$q_{d1}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$w_1$	Perturbación en eslabón 1	0	N.m
$w_2$	Perturbación en eslabón 2	0	N.m
$k_i$	Ganancias Integrales	[3,6]	N/s
$k_p$	Ganancias Proporcionales	[3,12]	N
$k_d$	Ganancias Derivativas	[1,8]	N.s
$\sigma_0$	Fricción viscosa	[13.02,9.87]	N.s
$\sigma_1$	Coefficiente de rigidez	[0.053,0.039]	N.m
$f_c$	Nivel de fricción de Coulomb	[1.02,0.78]	N.m
$\gamma$	constante de control $H_\infty$	1.1	
$\varepsilon$	constante de ec. perturbada de Riccati	500	
$\rho$	Coefficiente de peso en diseño de control	1	

### 5.2.7 Diseño del control por modos deslizantes con atenuador

$$H_\infty$$

El controlador por modos deslizantes desarrollado en la sección IV.2.2 mostró ser robusto ante cierto tipo de perturbaciones acopladas y fricción de Coulomb. A su vez, el controlador  $H_\infty$  desarrollado en la sección IV.2.5 atenúa incertidumbres paramétricas, fricción tipo Dahl y perturbaciones no acopladas al sistema mecánico de la Figura 19. Debido a las ventajas particulares de cada uno de estos controladores se decide unificar estas dos metodologías de control con el fin de diseñar un control que incluya las ventajas de ambas, lo cual se muestra a continuación.

El objetivo de control es encontrar un control  $\tau \in \mathbb{R}^2$ , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte  $F_d$  (a través de la posición deseada  $x_{d1}$  sobre el eje  $x$  de la punta del segundo eslabón), las posiciones articulares  $(q_1, q_2)$ , la posición de referencia  $x_0$ , las velocidades articulares  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ , y las posiciones articulares deseadas  $(q_{d1}, q_{d2})$  tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_1(t) - q_{d1}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_2(t) - q_{d2}| = 0 \quad (172)$$

A pesar de la perturbación acotada  $\sup_t \|w_i(t)\| \leq N_i$ , con  $i = 1, 2$ , donde la acción  $H_\infty$  atenúa la influencia de las otras perturbaciones externas  $w_0, w_2 \in \mathbb{R}^2$ . Dado que  $F_d = k(x_{d1} - x_0)$ , con  $F_d \geq 0$  y  $x_{d1} = l_1 \cos(q_{d1}) + l_2 \cos(q_{d2})$ , sustituyendo y despejando podemos obtener  $q_{d2}$  en función de las otras variables, es decir

$$q_{d2} = \arccos \left( \frac{F_d}{l_2 k} + \frac{x_0}{l_2} - \frac{l_1 \cos(q_{d1})}{l_2} \right). \quad (173)$$

Se puede cambiar el punto de equilibrio de (134) en lazo cerrado al origen a través del siguiente cambio de variables, que incluye la integral del error de posición, error de

posición, velocidad y fricción de Dahl, respectivamente, es decir:

$$x_1 = \int_0^t x_2(t') dt', \quad x_2 = [q_1 - q_{d1}, q_2 - q_{d2}]^T, \quad x_3 = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T, \quad x_4 = [F_{d1}, F_{d2}]^T. \quad (174)$$

Las ecuaciones de estado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= M^{-1}(x_2 + q_d)[-C(x_2 + q_d, x_3)x_3 - G(x_2 + q_d) \\ &\quad - \sigma_0 x_3 - x_4 - \tau_c(x_2 + q_d) + u + w_1] \\ \dot{x}_4 &= \sigma_1 x_3 - \sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 + w_2. \end{aligned} \quad (175)$$

donde  $q_d \in \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $w_1 \in \mathbb{R}$ ,  $w_2 \in \mathbb{R}$  y  $F_c \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Se propone una superficie deslizante para el diseño del controlador, donde se busca que el controlador dirija las trayectorias de los estados hacia la siguiente superficie deslizante

$$s = \nu x_1 + \mu x_2 + x_3 - \int_0^t u_\infty dt' \quad (176)$$

donde  $\nu, \mu \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales positivas y  $u_\infty$  es un controlador  $H_\infty$  el cual funciona alrededor del punto de equilibrio del sistema (175), a su vez podemos notar que la superficie deslizante (176) es dinámica, esto debido al término integral.

La ley de control que asegura la convergencia de las trayectorias de (175) a  $s$  es

$$\begin{aligned} u &= C(x_2 + q_d, x_3)x_3 + \sigma_0 x_3 + x_4 + \tau_c(x_2 + q_d) + G(x_2 + q_d) \\ &\quad - M(x_2 + q_d) \left[ \nu x_2 + \mu x_3 - u_\infty + \lambda s + \beta \frac{s}{\|s\|} \right]. \end{aligned} \quad (177)$$

La ley de control propuesta estará actuando en todo momento, es decir, cuando el sistema esté en movimiento libre o en movimiento restringido (contacto con la restricción).

Las matrices  $\lambda$  y  $\beta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son diagonales positivas, las cuales son sintonizadas para asegurar que las trayectorias de (175) se dirijan hacia la superficie deslizante.

Debido a que la superficie deslizante (176) es una variable dinámica, se añadirá  $s$  como otro estado en (175). Esto nos conduce al sistema extendido

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= -x_2 - x_3 - \lambda s - \beta \frac{s}{\|s\|} + M^{-1}(x_2 + q_d)w_1 \\
\dot{x}_4 &= \sigma_1 x_3 - \sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 + w_2 \\
\dot{s} &= \nu x_2 + \mu x_3 + M^{-1}(x_2 + q_d)[-C(x_2 + q_d, x_3)x_3 - \sigma_0 x_3 - x_4 \\
&\quad - \tau_c(x_2 + q_d) - G(x_2 + q_d) + u + w_1] - u_\infty.
\end{aligned} \tag{178}$$

A partir de substituir el controlador (177) en el sistema (178), se puede verificar la existencia de modos deslizantes si se cumple la condición  $s^T \dot{s} < 0$  (véase Utkin (1978)). Para este fin, recordemos que  $\sup_t |w_{1i}(t)| \leq N_i$  para todo tiempo y una constante  $N_i > 0$ , con  $i = 1, 2$ , a su vez definimos  $N = \max(N_i)$

$$\begin{aligned}
s^T \dot{s} &= s^T \left( -\lambda s - \beta \frac{s}{\|s\|} + M^{-1}(x_2 + q_d)w_{1i} \right) \\
&\leq -\lambda \|s\|^2 - (\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(x_2 + q_d)\}N) \|s\|.
\end{aligned}$$

Se puede concluir la existencia de modos deslizantes en la superficie  $s = x_1 + x_2 + x_3 - \int_0^t u_\infty dt'$  mientras la condición  $\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(x_2 + q_d)\}N > 0$  permanezca válida. A su vez se puede demostrar la convergencia hacia la superficie deslizante  $s = 0$  en tiempo finito utilizando la siguiente función cuadrática

$$V(s) = s^T s. \tag{179}$$

Calculamos su derivada a lo largo de la solución de (178), se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(s(t)) &\leq -2(\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(x_2 + q_d)\}N) \|s\| \\
&= -2(\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(x_2 + q_d)\}N) \sqrt{V(s(t))}.
\end{aligned} \tag{180}$$

De (180) se puede asegurar lo siguiente:

$$V(t) = 0 \quad \text{para} \quad t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{(\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(x_2 + q_d)\}N)} = t_f. \quad (181)$$

De esta forma, la función  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito y en consecuencia, el movimiento a lo largo del conjunto  $s = [0, 0]^T$  ocurre en el sistema (178). A partir de este punto y en los próximos desarrollos, se supondrá que el sistema (178) se encuentra sobre el modo deslizante, por lo que  $s = \dot{s} = 0$  para todo tiempo  $t \geq t_f$ . Primero derivando (176) y luego despejando  $\dot{x}_3$  de ella se puede describir la dinámica del sistema cuando éste está en modo deslizante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\nu x_2 - \mu x_3 + u_\infty \\ \dot{x}_4 &= \sigma_1 x_3 - \sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 + w_2. \end{aligned} \quad (182)$$

Ahora se analizará la trayectoria  $(x_2, x_3)$  en (182), suponiendo  $u_\infty = 0$ , a través de la siguiente función cuadrática

$$V(x_2, x_3) = (x_2 + x_3)^T (x_2 + x_3) + 2x_2^T x_2 + x_3^T x_3 \quad (183)$$

donde  $V(x_2, x_3)$  es una función positiva definida y radialmente desacotada. La derivada de  $V(x_2, x_3)$  a lo largo de las trayectorias de (182) con  $u_\infty = 0$  es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_2, x_3) &= 6x_2^T \dot{x}_2 + 2x_2^T \dot{x}_3 + 2x_3^T \dot{x}_2 + 4x_3^T \dot{x}_3 \\ &= -2x_2^T \nu x_2 - 4x_3^T \mu x_3 + 6x_2^T x_3 - 2x_2^T \mu x_3 - 4x_2^T \nu x_3 + 2x_3^T x_3 \\ &= -2x_2^T \nu x_2 - 4x_3^T \mu x_3 + x_2^T (6 - 2\mu - 4\nu) x_3 + 2x_3^T x_3 < 0. \end{aligned} \quad (184)$$

Escogiendo los elementos de la diagonal principal de la matriz  $(\text{diag}\{6\} - \text{diag}\{2\mu\} - \text{diag}\{4\nu\})$  de tal forma que sean cero con  $\text{diag}\{\mu\} > 1/2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\text{diag}\{\nu\} > 0 \in$

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , aseguramos que mientras el sistema permanezca en  $s = 0$ , las trayectorias de  $(x_2, x_3)$  del sistema (182) con la entrada  $u_\infty = 0$  convergen a cero en  $t \rightarrow \infty$ .

Así, el problema de regulación para  $x_2$  en el sistema (182) puede ser considerado como un problema de control  $H_\infty$  no lineal.

En lo subsecuente, el desarrollo se enfocará en el problema de regulación  $H_\infty$  donde

1. La salida a controlar es

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_\infty \quad (185)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$ .

2. La posición  $x_2$  es la medición disponible y es afectada por el vector de error  $w_0(t) \in \mathbb{R}^2$ .

$$y = x_2 + w_0, \quad (186)$$

El problema de  $H_\infty$  para regulación de posición para el manipulador con fricción puede ser considerado de la siguiente manera. Dado el sistema mecánico (182)-(186) y un número  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , se busca encontrar (si existe) un regulador dinámico con la siguiente forma

$$u_\infty = K(\xi) \quad (187)$$

con estados internos  $\xi \in \mathbb{R}^8$  de tal forma que el sistema en lazo cerrado sin perturbaciones sea asintóticamente estable hacia el punto de equilibrio y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  sea localmente menor a  $\gamma$ , i.e., la desigualdad

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (188)$$

se satisface para todo  $T > 0$  y toda función continua  $w(t) = [w_0(t), w_1(t), w_2(t)]^T$  para las cuales la trayectoria del sistema (182) en lazo cerrado, inicializado en el origen, permanece en alguna vecindad de este punto.

### 5.2.8 Síntesis $H_\infty$

El problema de  $H_\infty$  en cuestión es el problema de control  $H_\infty$  para sistemas no lineales y no suaves, donde el sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + f_2(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w \end{aligned} \tag{189}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de espacio de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^r$  son perturbaciones desconocidas,  $z \in \mathbb{R}^l$  es la salida a controlar,  $y \in \mathbb{R}^p$  son las mediciones del sistema. Adecuando (182) a la forma (189) tenemos que

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_2 - x_3 \\ \sigma_1 x_3 \end{bmatrix}, \tag{190}$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 \end{bmatrix}, \tag{191}$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & M^{-1}(x_2 + q_d) & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_2 + q_d,$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 4} \end{bmatrix} \quad (192)$$

### 5.2.9 Solución local al problema $H_\infty$

El siguiente análisis local involucra el problema de control lineal  $H_\infty$  para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (193)$$

Dado que el punto de equilibrio para el sistema (182) es el origen podemos aseverar que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial f_1(0)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial x}, & B_1 &= g_1(0) & B_2 &= g_2(0) \\ C_1 &= \frac{\partial h_1(0)}{\partial x}, & D_{12} &= K_{12}(0) \\ C_2 &= \frac{\partial h_2(0)}{\partial x}, & D_{21} &= K_{21}(0). \end{aligned} \quad (194)$$

Dado que las condiciones (A1) y (A2) del Teorema 3 se satisfacen para el sistema (182), se pueden obtener las soluciones positivas definidas  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  con un  $\varepsilon > 0$ . Entonces el controlador a retroalimentar es

$$\dot{\xi} = f_1(\xi) + f_2(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)] \quad (195)$$

$$u_\infty = -B_2^T(\xi)P_\varepsilon\xi \quad (196)$$

es una solución local del problema de control  $H_\infty$ .

### 5.2.10 Simulación numérica

El desempeño y robustez del controlador de modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$  propuesto (177) se prueba en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab<sup>®</sup>. Los parámetros utilizados en la planta corresponden a los del robot PEGASUS fabricado por la compañía Amatrol. Se estudia el modelo dinámico como en (178) basado en la integral del error de posición  $[x_{11}, x_{12}]$ , los errores de posiciones articulares  $[x_{21}, x_{22}]$ , sus velocidades  $[x_{31}, x_{32}]$ , fricciones de Dahl  $[x_{41}, x_{42}]$  y superficies deslizantes  $[s_1, s_2]$ , se consideran los parámetros mostrados en la Tabla 1 que son los parámetros de la planta, las Tablas 4 y 5 contienen condiciones iniciales, parámetros del control y perturbaciones:

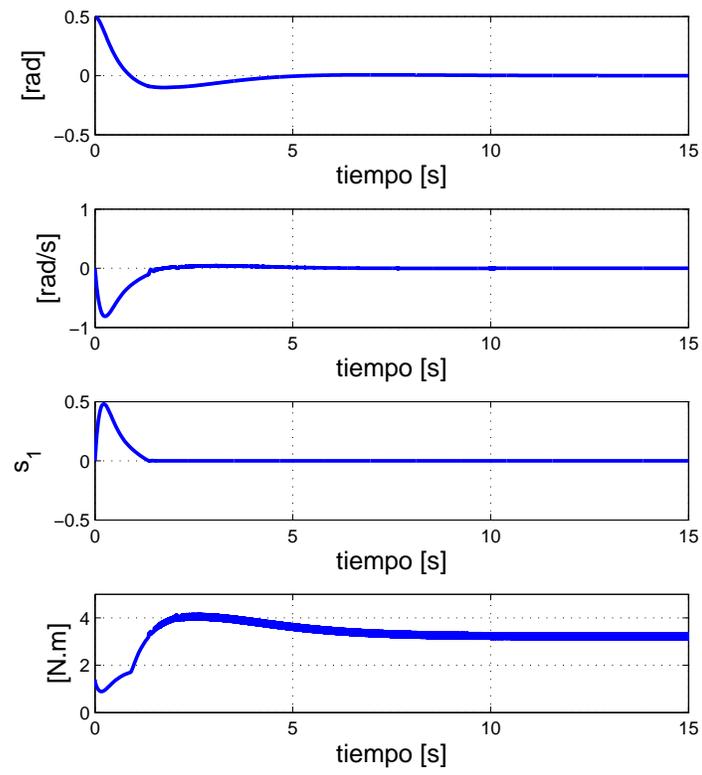


Figura 25. Valores para el esbalón 1.

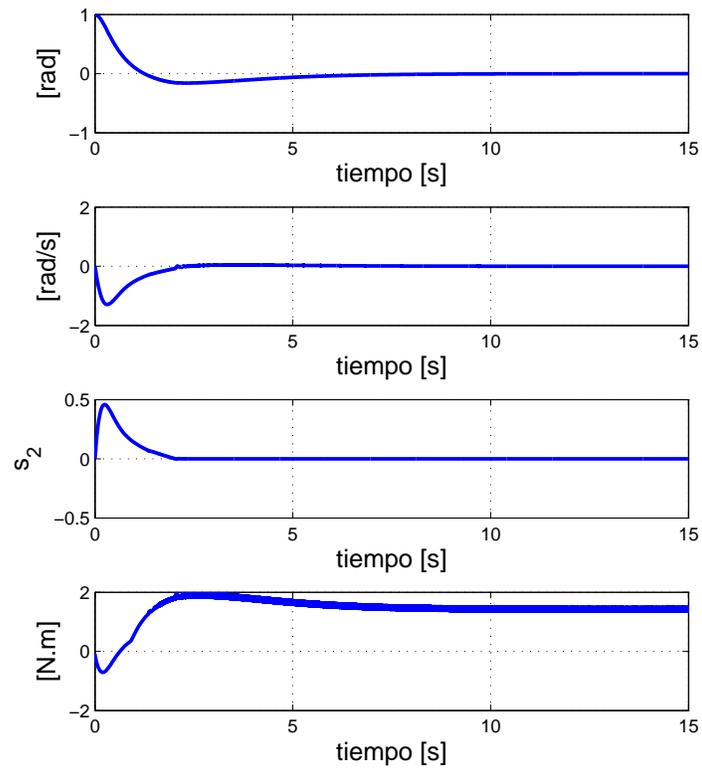


Figura 26. Valores para el esbalón 2.

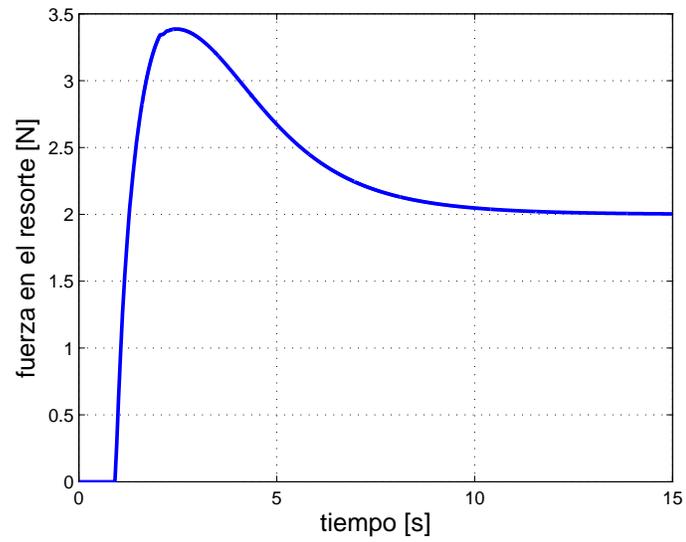
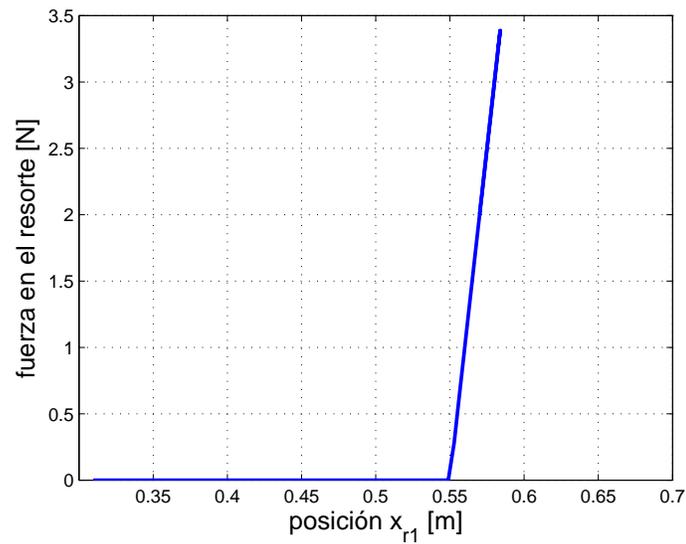
Figura 27. Fuerza en el resorte  $F_c$ .Figura 28. Fuerza en el resorte  $F_c$  vs. posición euclidiana del efector final  $x_{r1}$ .

Tabla 4: Condiciones iniciales y ganancias del controlador por modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$x_{11}(0)$	Integral de error de posición 1	0	rad.s
$x_{12}(0)$	Integral de error de posición 2	0	rad.s
$x_{21}(0)$	Error de posición articular 1	0.5	rad
$x_{22}(0)$	Error de posición articular 2	1	rad
$x_{31}(0)$	Velocidad articular 1	0	rad/s
$x_{32}(0)$	Velocidad articular 2	0	rad/s
$x_{41}(0)$	Fricción Dahl articular 1	0	N.m
$x_{42}(0)$	Fricción Dahl articular 2	0	N.m
$s_1(0)$	Variable deslizante 1	0	
$s_2(0)$	Variable deslizante 2	0	
$\xi_1(0) \dots \xi_8(0)$	Estados del filtro	[0,0,0,0,0,0,0,0]	
$\lambda$	Ganancia del controlador	[10,20]	$1/s^2$
$\mu$	Ganancias del controlador	[9,10]	$1/(m.s)$
$\beta$	Ganancias del controlador	[1,1]	N.m
$\nu$	Ganancias del controlador	[4,4]	$1/(m.s^2)$

Tabla 5: Parámetros de la planta y ganancias del controlador por modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$k$	Constante de rigidez del resorte	100	N/m
$x_{d1}$	Posición euclidiana deseada del efector final	0.57	m
$F_d$	Fuerza deseada en el efector final	2	N
$x_0$	Posición euclidiana de referencia	0.55	m
$q_{d1}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$w_1$	Perturbación en eslabón 1	0	N.m
$w_2$	Perturbación en eslabón 2	0	N.m
$\sigma_0$	Fricción viscosa	[13.02,9.87]	N.s
$\sigma_1$	Coficiente de rigidez	[0.053,0.039]	N.m
$f_c$	Nivel de fricción de Coulomb	[1.02,0.78]	N.m
$\gamma$	constante de control $H_\infty$	1.1	
$\varepsilon$	constante de ec. perturbada de Riccati	500	
$\rho$	Coficiente de peso en diseño de control	1	

### 5.2.11 Comentarios

Se estudia un problema de regulación de posición y fuerza para un prototipo mecánico de dos grados de libertad, el cual opera en condiciones restrictivas. El sistema mecánico y su modelo representan una etapa intermedia antes de desarrollar controladores para el robot Pegasus de 3 g.d.l.. Por otro lado se incorporan al sistema algunos elementos reales que no son completamente conocidos como fricción de Coulomb, fricción de Dahl y perturbaciones externas.

Los controladores son sintetizados utilizando la técnica de control por modos deslizantes,  $H_\infty$  y un control que es la mezcla de ambas técnicas que denominamos control por modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$ . Este tipo de controladores hacen que el sistema en lazo cerrado sea robusto contra perturbaciones. Para el caso de modos deslizantes y modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$  se probó que la convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado fue en tiempo finito hacia la superficie deslizante y asintóticamente hacia el punto de equilibrio. A su vez se dio una idea para reducir los posibles rebotes en el sistema, debido a que pueden causar efectos no deseados en este. Cabe señalar que las ganancias de los controladores fueron seleccionadas heurísticamente; por lo tanto, es posible que otros valores en los parámetros de los controladores arrojaran mejores resultados. Se llevaron a cabo simulaciones numéricas que mostraron concordancia con la robustez y desempeño esperados.

## Capítulo 6

### Aplicación a sistemas mecánicos sub-actuados de 2 g.d.l.

En el presente capítulo se desarrollan tres tipos de controladores: modos deslizantes,  $H_\infty$  y modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$ . Con el propósito de validar los controladores propuesto se llevan a cabo simulaciones numéricas y experimentos en la plataforma rectilínea ECP-210, de igual manera se hacen simulaciones numéricas para un manipulador que puede tener contacto con un sistema masa resorte. Podemos resaltar la importancia de este capítulo debido a que este tipo de sistemas mecánicos sub-actuados son más complicados de controlar que el resto de los sistemas mecánicos analizados en este trabajo. De esta manera los controladores tienen que compensar incertidumbres paramétricas, fricción seca y viscosa y perturbaciones externas las cuales pueden estar acopladas y/o desacopladas con respecto a la entrada de control.

#### 6.1 Sistema mecánico bajo contacto con un sistema masa-resorte

La clase de sistemas mecánicos que se presentan en esta sección son solamente una clase particular de sistemas sujetos a restricciones unilaterales, los cuales son sub-actuados y presentan un mayor reto en el diseño del controlador y su prueba de estabilidad en lazo cerrado.

### 6.1.1 Modelo dinámico

El modelo dinámico de la masa  $m_1$ , como se muestra en la Figura 29, se puede expresar en coordenadas de espacio de estado como

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + \alpha_1\text{sign}(\dot{x}_1) = u + w_1 \quad (197)$$

donde  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$ ,  $\ddot{x}_1(t) \in \mathbb{R}$  denotan el desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa  $m_1$ , respectivamente;  $b_1$  es el coeficiente de fricción viscosa y  $\alpha_1$  es el coeficiente de fricción de Coulomb. La masa  $m_1$  está actuada por la entrada de control  $u(t) \in \mathbb{R}$  y  $w_1(t) \in \mathbb{R}$  es la perturbación externa desconocida.

La dinámica del sistema masa-resorte en la Figura 29 es

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + \alpha_2\text{sign}(\dot{x}_2) + k(x_2 - x_0) = w_2 \quad (198)$$

donde  $x_2(t)$ ,  $\dot{x}_2(t)$ ,  $\ddot{x}_2(t) \in \mathbb{R}$  denotan el desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa  $m_2$ , respectivamente;  $x_0 \in \mathbb{R}$  es la posición en reposo y sin perturbación de la masa  $m_2$ ,  $k$  es el coeficiente de rigidez del resorte,  $b_2$  es el coeficiente de fricción viscosa y  $\alpha_2$  es el coeficiente de fricción de Coulomb y  $w_2(t) \in \mathbb{R}$  es la perturbación externa desconocida. La amplitud de la fricción de Coulomb y la perturbación se supone que satisfacen

$$\alpha_i \leq M_i, \quad \sup_t |w_i(t)| \leq N_i, \quad i = 1, 2 \quad (199)$$

para todo  $t$  y unas constantes estrictamente positivas  $M_1, M_2, N_1, N_2$ .

Ocurrirá un impacto entre la masa  $m_1$  y la masa  $m_2$  del sistema masa-resorte cuando  $x_1(t) \geq x_2(t) - d$ . El impacto genera fuerzas opuestas y de igual magnitud entre la masa  $m_1$  y la masa  $m_2$ . La fuerza de impacto actuando en las masas  $m_1$  y  $m_2$ , denotada como  $F_m(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ , se define de la siguiente manera

$$F_m = \frac{K}{2}(x_1 - (x_2 - d) + |x_1 - (x_2 - d)|) \quad (200)$$

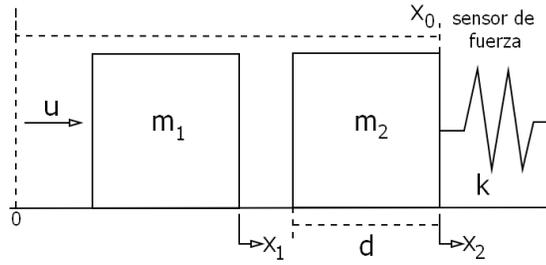


Figura 29. Ejemplo académico de un impacto entre dos sistemas dinámicos.

donde  $K$  es una constante que denota la rigidez y  $d$  es la longitud horizontal de la masa  $m_2$ .

Basándonos en (197), (198) y (200), el modelo dinámico para el sistema masa-masa-resorte puede ser expresado como

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + \alpha_1 \text{sign}(\dot{x}_1) - F_m &= u + w_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + \alpha_2 \text{sign}(\dot{x}_2) + k(x_2 - x_0) &= F_m + w_2 \end{aligned} \quad (201)$$

donde la fuerza en el resorte es

$$F = k(x_2(t) - x_0), \quad \forall t \geq 0. \quad (202)$$

### 6.1.2 Diseño del control por modos deslizantes

Se pretende regular la fuerza ejercida en un resorte en un sistema mecánico donde se presenta fricción seca tipo Coulomb y perturbaciones externas, donde ambas variables no son completamente conocidas. El control por modos deslizantes es adecuado para lograr el objetivo de control, el cual es diseñado para el sistema general sin importar la zona de movimiento en que se encuentre, se prueba que el sistema no lineal es asintóticamente estable en forma global y alcanza un error de fuerza igual a cero en estado estacionario.

El objetivo de control es encontrar un control  $u$ , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte  $F^{**}$  (a través de la posición deseada  $x^*$  y la longitud horizontal  $d$  de la masa  $m_2$ ), los desplazamientos de posición  $(x_1, x_2)$ , la posición de referencia  $x_0$  y las velocidades  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ , tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - x^*| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t) - x^{**}| = 0 \quad (203)$$

donde  $x^*$  es la posición deseada de la masa  $m_1$  y  $x^{**} = x^* + d$  es la posición deseada de la masa  $m_2$ . Trasladamos el punto de equilibrio de (201) a cero definiendo la siguiente transformación de estado basada en el error de posición:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x^*, \\ \dot{y}_1 &= \dot{x}_1, \\ y_2 &= x_2 - x^{**}, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (204)$$

Por lo tanto el sistema (201) se puede transformar como

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 + \alpha_1 \text{sign}(\dot{y}_1) - F_m &= u + w_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + b_2 \dot{y}_2 + \alpha_2 \text{sign}(\dot{y}_2) + k(y_2 + x^{**} - x_0) &= F_m + w_2 \end{aligned} \quad (205)$$

donde  $F_m$  se puede reescribir como

$$F_m = \frac{K}{2}(y_1 - y_2 + |y_1 - y_2|). \quad (206)$$

De igual forma la transformación para  $F$  es

$$F = k(y_2 + x^{**} - x_0). \quad (207)$$

Se diseña una ley de control por modos deslizantes para el sistema (205). Se busca que el controlador dirija las trayectorias del sistema hacia la superficie deslizante

$$s = \mu(y_1 + y_2) + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \gamma \int_0^t (F - F^{**} + ky_1) dt' \quad (208)$$

donde  $F^{**} = k(x^{**} - x_0)$ ,  $\mu$  y  $\gamma$  son parámetros positivos. La ley de control que asegura esto está dada por

$$u = -m_1\lambda s - m_1\beta\text{sign}(s) + (b_1 - m_1\mu)\dot{y}_1 + \frac{m_1k}{m_2}(y_2 + x^{**} - x_0) + \left(\frac{b_2m_1}{m_2} - m_1\mu\right)\dot{y}_2 - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)F_m - m_1\gamma(F - F^{**} + ky_1). \quad (209)$$

Se propone que la ley de control estará actuando en todo tiempo, es decir, cuando la masa esta en movimiento libre o en movimiento restringido (contacto con masa-resorte). Los valores de  $\lambda$  y  $\beta$  son parámetros de ganancia positivos, los cuales serán sintonizados para asegurar que el movimiento de las trayectorias se dirija hacia la superficie deslizando. Debido a que la superficie deslizando (208) es una variable dinámica, se añadirá  $s$  como otro estado en (205). Esto nos conduce al sistema extendido

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{F_m}{m_1} + \frac{u}{m_1} - \frac{b_1}{m_1}\dot{y}_1 - \frac{\alpha_1}{m_1}\text{sign}(\dot{y}_1) + \frac{w_1}{m_1} \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{k(y_2+x^*-x_0)}{m_2} + \frac{F_m}{m_2} - \frac{b_2}{m_2}\dot{y}_2 - \frac{\alpha_2}{m_2}\text{sign}(\dot{y}_2) + \frac{w_2}{m_2} \\ \dot{s} &= \mu(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \frac{F_m}{m_1} + \frac{u}{m_1} - \frac{b_1}{m_1}\dot{y}_1 - \frac{\alpha_1}{m_1}\text{sign}(\dot{y}_1) + \frac{w_1}{m_1} \\ &\quad - \frac{k(y_2+x^{**}-x_0)}{m_2} + \frac{F_m}{m_2} - \frac{b_2}{m_2}\dot{y}_2 - \frac{\alpha_2}{m_2}\text{sign}(\dot{y}_2) \\ &\quad + \frac{w_2}{m_2} + \gamma(F - F^{**} + ky_1). \end{aligned} \quad (210)$$

### 6.1.3 Análisis de estabilidad

En esta sección se analizará la estabilidad del sistema en lazo cerrado (210) y concluiremos acerca de la estabilidad global.

Sustituyendo (209) en (210), el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\lambda s - \beta\text{sign}(s) - \mu\dot{y}_1 + \frac{k}{m_2}(y_2 + x^{**} - x_0) \\ &\quad + \left(\frac{b_2}{m_2} - \mu\right)\dot{y}_2 + \frac{F_m}{m_2} - \gamma(\tilde{F} + ky_1) - \frac{\alpha_1}{m_1}\text{sign}(\dot{y}_1) + \frac{w_1}{m_1} \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{k(y_2+x^{**}-x_0)}{m_2} + \frac{F_m}{m_2} - \frac{b_2}{m_2}\dot{y}_2 - \frac{\alpha_2}{m_2}\text{sign}(\dot{y}_2) + \frac{w_2}{m_2} \\ \dot{s} &= -\lambda s - \beta\text{sign}(s) - \frac{\alpha_1}{m_1}\text{sign}(\dot{y}_1) - \frac{\alpha_2}{m_2}\text{sign}(\dot{y}_2) + \frac{w_1}{m_1} + \frac{w_2}{m_2} \end{aligned} \quad (211)$$

donde  $\tilde{F} = F - F^{**}$ . Ahora, se verificará la existencia de modos deslizantes verificando que  $s\dot{s} < 0$ :

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s \left( -\lambda s - \beta \text{sign}(s) - \frac{\alpha_1}{m_1} \text{sign}(\dot{y}_1) + \frac{w_1}{m_1} - \frac{\alpha_2}{m_2} \text{sign}(\dot{y}_2) + \frac{w_2}{m_2} \right) \\ &\leq -\lambda s^2 - \beta |s| + \left( \frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) |s| \\ &\leq -\lambda s^2 - \left( \beta - \left( \frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) |s|. \end{aligned}$$

Se concluye entonces la existencia de modos deslizantes en la superficie  $s = \mu(y_1 + y_2) + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \gamma \int_0^t (F - F^{**} + ky_1) dt'$  mientras la condición  $0 < N_1/m_1 + N_2/m_2 < \beta - M_1/m_1 - M_2/m_2$  permanezca válida.

También se puede demostrar la convergencia en tiempo finito de las trayectorias hacia la superficie  $s = 0$  a través de la siguiente función cuadrática

$$V(s) = s^2 \tag{212}$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (211),

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t)) &\leq -2\lambda s^2 - 2 \left( \beta - \left( \frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) |s| \\ &\leq -2 \left( \beta - \left( \frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) |s| \\ &= -2 \left( \beta - \left( \frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) \sqrt{V(s(t))}. \end{aligned} \tag{213}$$

De (213) se tiene que

$$V(t) = 0 \text{ para } t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\left( \beta - \left( \frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right)} = t_f. \tag{214}$$

Por lo tanto,  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito y en consecuencia, un movimiento a través del conjunto  $s = 0$  ocurre en el sistema discontinuo (211). De esta manera, en los siguientes desarrollos supondremos que el sistema (211) está en modo deslizante, tal que  $s = \dot{s} = 0$  para  $t \geq t_f$ .

Ahora demostremos que, mientras el sistema permanezca en  $s = 0$ , las trayectorias  $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$  convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . De (207), (208) con el cambio de variables  $z = y_1 + y_2$ ,  $\dot{z} = \dot{y}_1 + \dot{y}_2$  y dado que  $F^{**} = k(x^{**} - x_0)$ , tenemos que la dinámica del sistema (211), una vez que se encuentra en la superficie deslizante, se describe por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma k & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \quad (215)$$

Dado que  $\gamma$ ,  $k$  y  $\mu$  son positivas, nótese que el sistema (215) tiene un único punto de equilibrio situado en el origen, el cual es asintóticamente estable. Debido a restricciones físicas del sistema mecánico la única forma de tener  $(z, \dot{z}) = (0, 0)$  es que  $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2) = (0, 0, 0, 0)$ .

En resumen, se puede asegurar que todas las trayectorias del sistema (205)–(207), con la ley de control (208)–(209) convergen al origen. Sin embargo una forma de reducir el número de impactos en el sistema mecánico es teniendo una adecuada sintonización de los parámetros del controlador, especialmente de la relación entre  $\gamma$ ,  $k$  y  $\mu$ . Esto se obtiene localizando los polos del sistema (215) como negativos y reales. Esto se logra satisfaciendo la relación

$$\mu \geq 2\sqrt{k\gamma}. \quad (216)$$

### 6.1.4 Simulación numérica

Se llevan a cabo simulaciones numéricas del controlador por modos deslizantes utilizando MatLab<sup>®</sup>. Se estudia el modelo dinámico como en (210) basado en los errores de posición de las masas, velocidades de las masas y la dinámica de la superficie deslizante  $s$ , se consideran los siguientes parámetros: fuerza deseada  $F^{**} = 2N$ , con la posición en reposo  $x_0 = 3$ , una posición deseada  $x^* = 3.5$  y una longitud horizontal  $d = 0.5$  de

la masa  $m_2$ , por lo que  $x^{**} = x^* + d = 4$ , la constante de rigidez del resorte  $k = 2$ , los coeficientes de fricción  $b_1 = b_2 = 1$ , las masas  $m_1 = m_2 = 1$  y un valor constante de rigidez  $K = 3000$ . La ganancia del controlador es sintonizada en  $\lambda = 70$ , el parámetro de la superficie deslizante  $\mu = 2$ , el parámetro de ganancia de la función signo  $\beta = 2$  y la ganancia de la fuerza  $\gamma = 0.5$ . Las amplitudes de las fricciones de Coulomb son  $\alpha_1 = 0.5$  y  $\alpha_2 = 0.3$ , las perturbaciones en el sistema son  $w_1 = 0.2\text{sen}(t)$  y  $w_2 = 0.3\text{sen}(2t)$ . Las condiciones iniciales de error de posición, velocidad y superficie deslizante  $s$  son puestas como  $y_1(0) = -4$ ,  $\dot{y}_1 = 0$ ,  $y_2 = -1$ ,  $\dot{y}_2 = 0$  y  $s = -0.1$ .

La Figura 30 muestra el error de posición y velocidad de la masa  $m_1$ , donde se pueden apreciar los impactos principalmente en los cambios repentinos de velocidad. La Figura 31 muestra el error de posición y velocidad de la masas  $m_2$ , donde de igual manera se observan los efectos de los impactos. En la Figura 32 se observa el movimiento deslizante  $s$  alcanzando la superficie deslizante en tiempo finito. La Figura 33 muestra la fuerza ejercida en el resorte y la Figura 34 la señal de control aplicada, donde se aprecia la reacción del control al presentarse rebotes en el sistema físico y tratar de compensarlos.

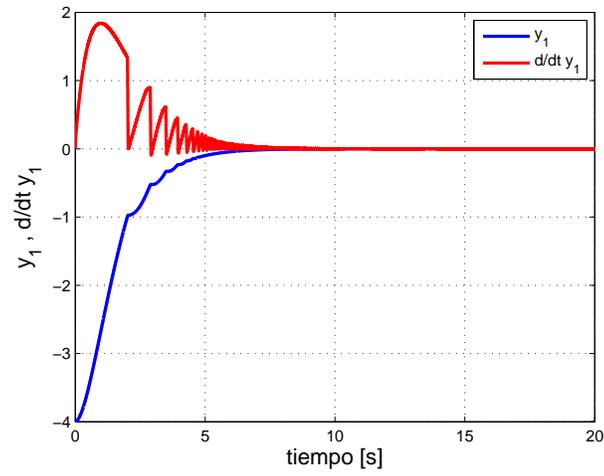


Figura 30. Error de posición y velocidad de masa  $m_1$ .

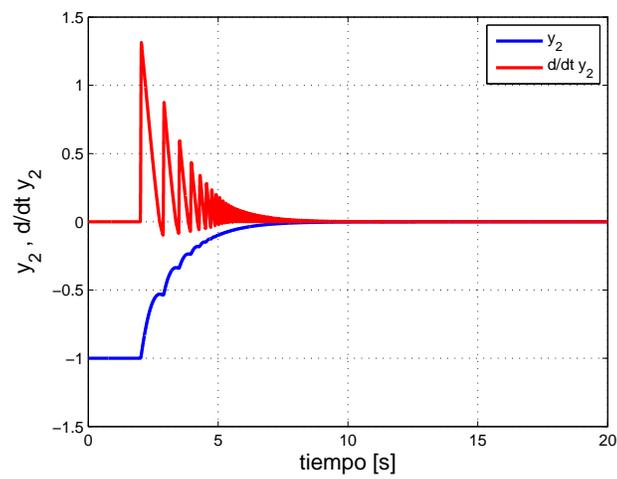


Figura 31. Error de posición y velocidad de masa  $m_2$ .

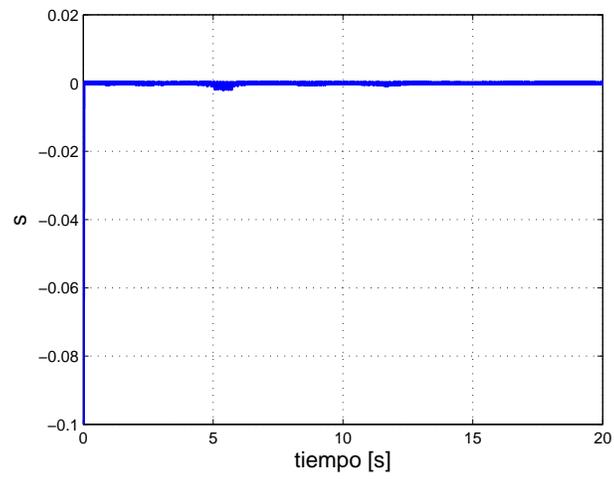
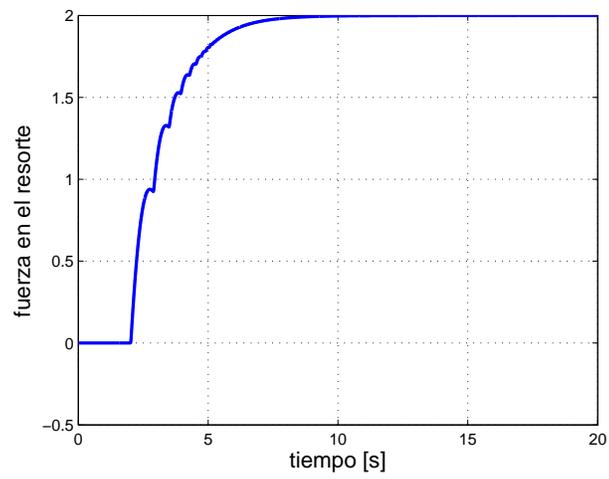
Figura 32. Movimiento deslizante ( $s$ ).

Figura 33. Fuerza generada en el resorte.

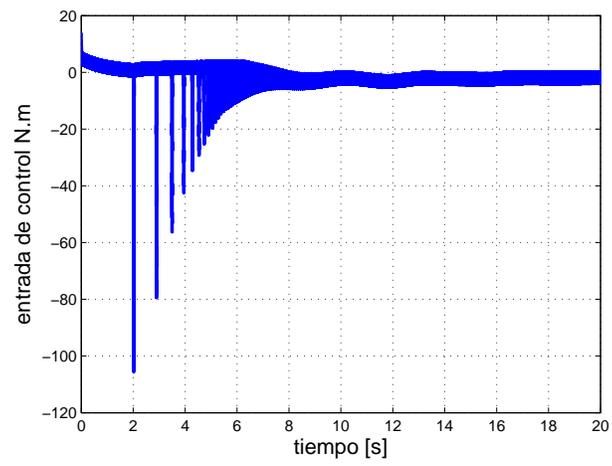


Figura 34. Señal de control.

## 6.2 Sistema masa-resorte de 2 g.d.l. con holgura como restricción, donde sus eslabones están unidos a través de cuñas

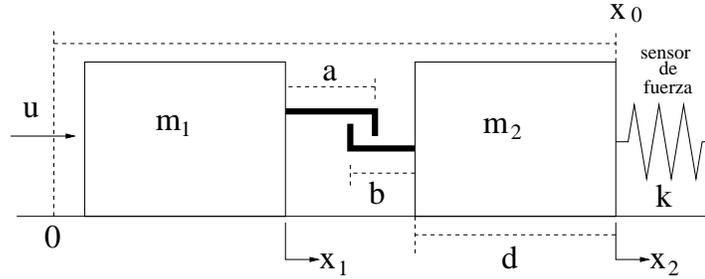


Figura 35. Ejemplo académico de un impacto entre dos sistemas dinámicos.

### 6.2.1 Modelo dinámico

El modelo dinámico es idéntico al modelo (197)-(199), incluyendo las cotas superiores para fricción de Coulomb y perturbaciones externas en ambas masas, la diferencia en este sistema mecánico es el modelo de fuerza de contacto el cual se da a través de cuñas como en la Figura 35, donde pueden la masa actuada puede empujar o jalar a la masa no actuada. Esta fuerza de impacto se define de la siguiente manera

Un impacto entre la masa  $m_1$  y la masa  $m_2$  del sistema masa-resorte ocurre cuando  $x_1(t) + a \geq x_2(t) - d$  ó cuando  $x_1(t) + a \leq x_2(t) - d - b$ . El impacto genera fuerzas opuestas y de igual magnitud entre la masa  $m_1$  y la masa  $m_2$ . La fuerza de impacto actuando en la masa  $m_1$  y masa  $m_2$ , representada por  $F_m(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ , se define como

$$F_m = K \left( x_1 + a - x_2 + d + \frac{b}{2} \right) + \frac{K}{2} (|x_1 + a - x_2 + d| - |x_2 - d - b - x_1 - a|) \quad (217)$$

donde  $K$  representa un valor constante de rigidez,  $d$  es la longitud horizontal de la masa  $m_2$ ,  $a$  es la longitud de la cuña de la masa  $m_1$  y  $b$  es la longitud de la cuña de la masa  $m_2$ , donde se cumple que  $a > b$ .

Basándonos en (197), (198) y (217), el modelo dinámico para el sistema masa-masa-resorte puede ser expresado como

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + \alpha_1\text{sign}(\dot{x}_1) - F_m &= u + w_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + \alpha_2\text{sign}(\dot{x}_2) + k(x_2 - x_0) &= F_m + w_2 \end{aligned} \quad (218)$$

donde la fuerza en el resorte es

$$F = k(x_2(t) - x_0), \quad \forall t \geq 0. \quad (219)$$

Debido a que el modelo dinámico (218)-(219) es el mismo al presentado para el sistema mecánico de la sección V.1, solo cambia el término  $F_m$ , sin cambiar esto la estructura del diseño del controlador ni su prueba de estabilidad, es que se omiten esos desarrollos.

## 6.2.2 Simulación numérica

Se llevan a cabo simulaciones numéricas donde son puestos a prueba el desempeño y robustez del controlador propuesto. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab<sup>®</sup>. Se estudia el modelo dinámico como en (210) basado en los errores de posición de las masas, velocidades de las masas y la dinámica de la superficie deslizante  $s$ , se consideran los siguientes parámetros: fuerza deseada  $F^* = 2N$ , con la posición en reposo  $x_0 = 2$ , una posición deseada  $x^* = 0$  para la masa  $m_1$ , la longitud de la cuña  $a = 2$  para la masa  $m_1$ , una posición deseada  $x^{**} = 3$  para la masa  $m_2$ , con una longitud horizontal  $d = 1$  de la masa  $m_2$  y una longitud de la cuña  $b = 1$  de la masa  $m_2$ , la constante de rigidez del resorte  $k = 2$ , los coeficientes de fricción  $b_1 = b_2 = 1$ , las

masas  $m_1 = m_2 = 1$  y un valor de la constante de rigidez  $K = 3000$ . La ganancia del controlador es sintonizada en  $\lambda = 70$ , el parámetro de la superficie deslizante  $\mu = 2$ , el parámetro de ganancia de la función signo  $\beta = 2$  y la ganancia de la fuerza  $\gamma = 0.5$ . Las amplitudes de las fricciones de Coulomb son  $\alpha_1 = 0.5$  y  $\alpha_2 = 0.3$ , las perturbaciones en el sistema son  $w_1 = 0.2\text{sen}(t)$  y  $w_2 = 0.3\text{sen}(2t)$ . Las condiciones iniciales de error de posición, velocidad y superficie deslizante  $s$  son puestas como  $x_1(0) = -2$ ,  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  y  $s = -0.1$ .

La Figura 36a) muestra en orden de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo el error de posición y velocidad de la masa  $m_1$ , donde se pueden apreciar los impactos principalmente en los cambios repentinos de velocidad, la siguiente Figura 36b) muestra el error de posición y velocidad de la masas  $m_2$ , donde de igual manera se observan los efectos de los impactos. En la Figura 36c) se observa el movimiento deslizante  $s$  alcanzando la superficie deslizante en tiempo finito. La Figura 36d) muestra la fuerza ejercida en el resorte, la Figura 36e) la señal de control aplicada y la Figura 36f) la fuerza vs. error de posición en masa  $m_1$ .

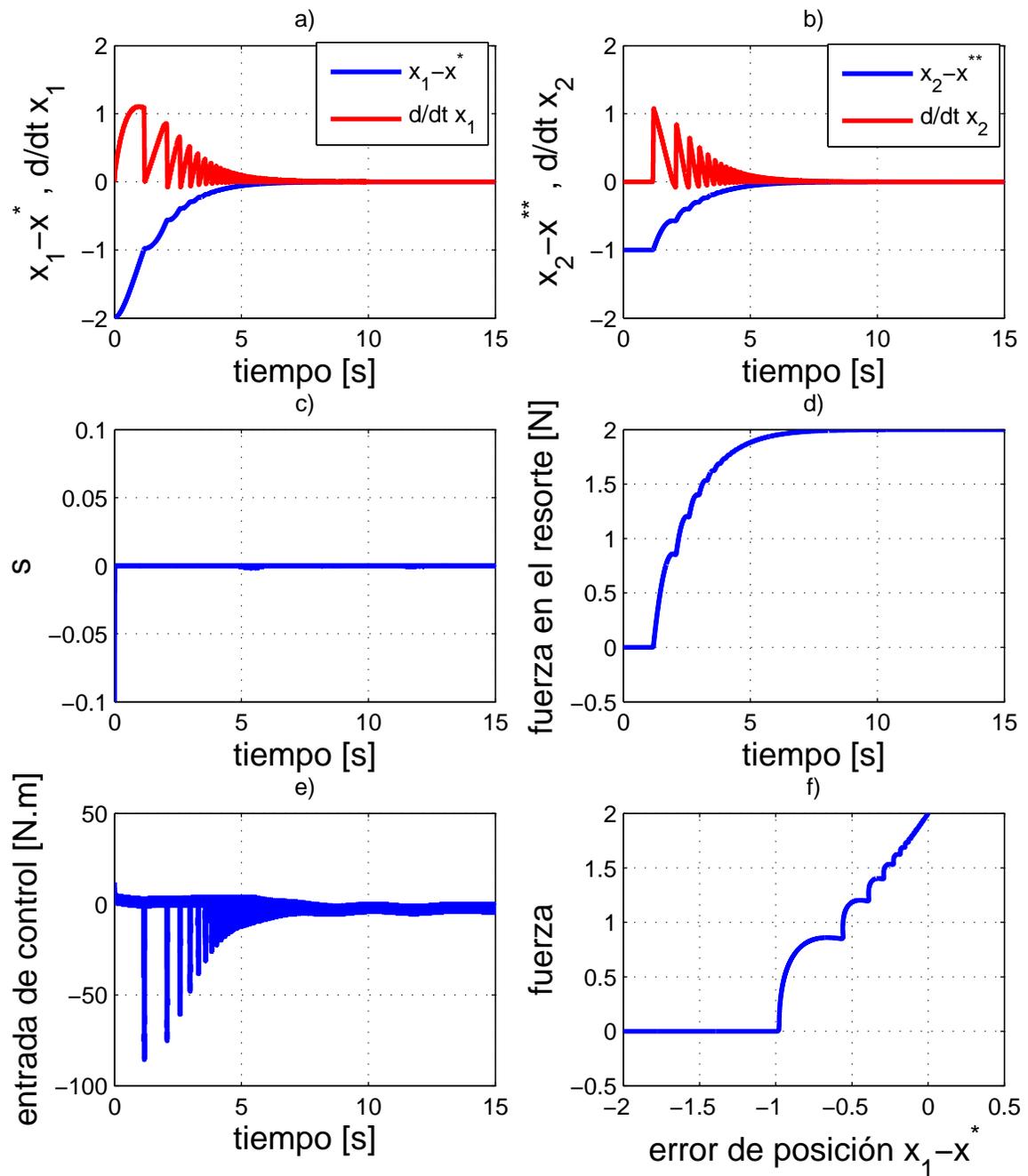


Figura 36. Error de posición y velocidad de masa  $m_1$ , error de posición y velocidad de masa  $m_2$ , movimiento deslizante ( $s$ ), fuerza generada en el resorte, señal de control y fuerza vs. error de posición  $x_1 - x^*$ .

Ahora se simula para una fuerza deseada en el resorte  $F^* = -2N$ , con una posición deseada  $x^* = -3$  para la masa  $m_1$ , una posición deseada  $x^{**} = 1$  para la masa  $m_2$ , utilizando los mismos valores de parámetros y las siguientes condiciones iniciales  $x_1(0) = -1$ ,  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  y  $s = -0.1$ .

### 6.2.3 Comentarios

Dada la similitud entre el sistema mecánico de la sección V.1 y el de la sección V.2 y debido a que solo varía entre ellos la fuerza de impacto  $F_m$ , eso conduce a que el diseño de control y prueba de estabilidad tengan la misma estructura, eso hace pensar que es posible generalizar este término a una variedad más amplia de restricciones, como podrían ser de velocidad y conservar la misma estructura del controlador y su prueba de estabilidad.

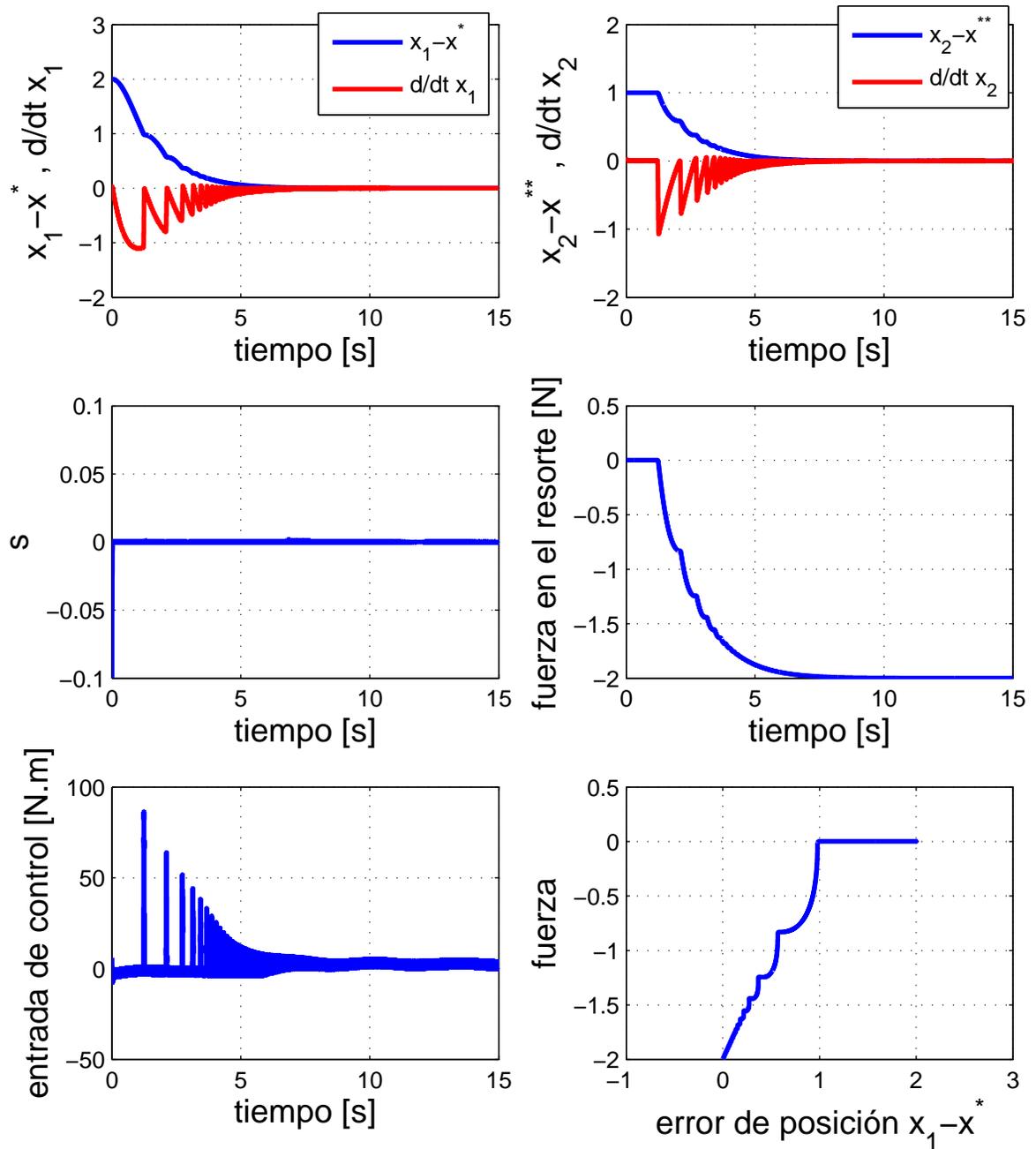


Figura 37. Error de posición y velocidad de masa  $m_1$ , error de posición y velocidad de masa  $m_2$ , movimiento deslizante ( $s$ ), fuerza generada en el resorte, señal de control y fuerza vs. error de posición  $x_1 - x^*$ .

### 6.3 Sistema masa-resorte de 2 g.d.l. con holgura como restricción

Ahora aplicaremos el diseño de control  $\mathcal{H}_\infty$  desarrollado en la sección previa para ser utilizado en una planta rectilínea sujeta a una restricción unilateral (ver Figura 38). El

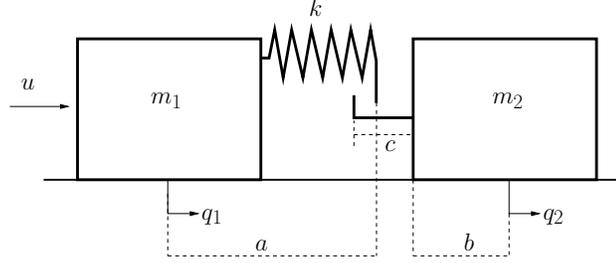


Figura 38. Sistema mecánico restringido.

modelo matemático para el prototipo de laboratorio de la planta rectilínea, en coordenadas de espacio está dado por

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + F_1(q) &= \tau + f(q) + w_{1,1}, \\ m_2 \ddot{q}_2 + F_2(q) &= f(q) + w_{1,2}. \end{aligned} \quad (220)$$

En las ecuaciones anteriores,  $q_1(t)$ ,  $\dot{q}_1(t)$ ,  $\ddot{q}_1(t) \in \mathbb{R}$  representan la posición, velocidad y aceleración de la masa  $m_1 \in \mathbb{R}$ , respectivamente;  $q_2(t)$ ,  $\dot{q}_2(t)$ ,  $\ddot{q}_2(t) \in \mathbb{R}$  representan la posición, velocidad y aceleración de la masa  $m_2 \in \mathbb{R}$ , respectivamente;  $\tau \in \mathbb{R}$  es el par de entrada y  $w_1 \in \mathbb{R}^2$  es una perturbación externa. Las fuerzas de fricción  $F_i(\dot{q})$ ,  $i = 1, 2$  son especificadas como en (48)–(49). Finalmente,  $f(q)$  es la fuerza de contacto entre las masas modeladas por

$$f = \begin{cases} -k(q_2 - b - c - (q_1 + a)) & \text{si } q_2 - b - c \geq q_1 + a, \\ 0 & \text{si } 0 < -q_1 - a + q_2 - b < c, \\ k(q_1 + a - (q_2 - b)) & \text{si } q_1 + a \geq q_2 - b; \end{cases} \quad (221)$$

las cuales se pueden reescribir como

$$f = \frac{k}{2} (2(q_1 + a + b - q_2) + c + |q_1 + a - q_2 + b| - |q_2 - b - c - a - q_1|) \quad (222)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es la rigidez del resorte.

Previendo que las únicas mediciones disponibles en el sistema son la posición de la masa  $q_1(t)$  y la posición de la masa  $q_2(t)$ , el modelo anterior (220), (222) es una vez continuamente diferenciable y el sistema en lazo abierto posee un conjunto de equilibrios  $(q_1, q_2)$  con  $q_1 \in [m - a - b - c, m - a - b]$  donde  $m$  es cualquier constante y  $q_2 = m$ .

Para satisfacer los requisitos del diseño de control para una solución local al problema de regulación de control  $\mathcal{H}_\infty$ , el modelo de fuerza de contacto (222) se reemplaza por una aproximación estrictamente monótona, ésta aproximación asegura que  $f_3(x)$  es al menos dos veces continuamente diferenciable, esto es acorde con la suposición **(A<sub>2</sub>)** del Capítulo II,

$$f = k\Delta q + k\eta(\Delta q) \quad (223)$$

donde

$$\Delta q = q_1 + a - q_2 + b + c/2 \quad (224)$$

y

$$\eta = -c \frac{1 - e^{-(\Delta q/0.5c)}}{1 + e^{-(\Delta q/0.5c)}}. \quad (225)$$

En lo sucesivo esta aproximación de  $f$  será utilizada, la cual es inspirada en el trabajo de Merzouki y M'Sirdi (2004). La aproximación de  $f$  acoplada al sistema actuado (220) constituye una aproximación suave del sistema mecánico, el cual opera bajo las incertidumbres  $w_{1,1}(t)$ ,  $w_{1,2}(t)$  que serán atenuadas. En realidad, estas incertidumbres constituyen discrepancias entre el modelo físico de fuerza de contacto (222) y su aproximación (223)–(225).

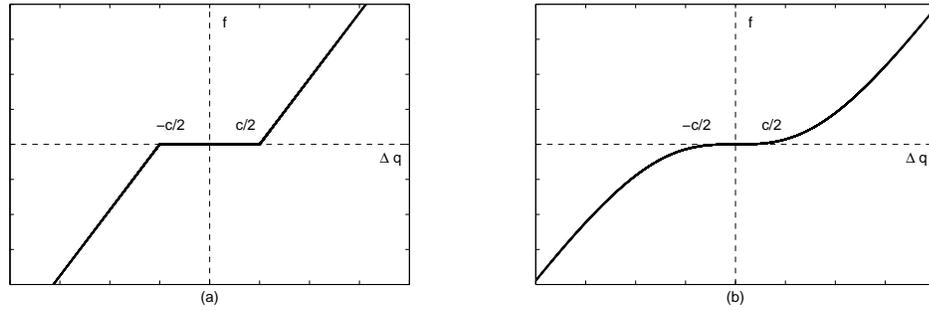


Figura 39. (a) Modelo de fuerza de contacto y (b) Aproximación monótona del modelo de fuerza de contacto.

Basados en (53), se propone el siguiente regulador

$$\tau_d = \sigma_{0,1}\dot{q}_1 + f_{d1} - f - \lambda_1 \int_0^t (q_2 - q_d) dt' - \lambda_2 (q_2 - q_d) - \lambda_3 \dot{q}_2 - \lambda_4 f_{d2} \quad (226)$$

que impone propiedades de estabilidad alrededor del punto de referencia  $q_d \in \mathbb{R}$  del sistema sin perturbaciones.

En todo tiempo la salida a controlar está dada por

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 - q_d^* \\ q_2 - q_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (227)$$

donde  $q_d^* = q_d - a - b - c/2$ , con un coeficiente de peso positivo  $\rho$ , y las únicas mediciones disponibles son de posición

$$y = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{0,1} \\ w_{0,2} \end{bmatrix}, \quad (228)$$

corrompidas por los vectores de error  $w_{0,1}(t), w_{0,2}(t) \in \mathbb{R}$ .

### 6.3.1 Objetivo de control

El objetivo de regulación  $\mathcal{H}_\infty$  de salida del sistema no lineal (220) con fricción (50)–(51) y fuerza de contacto (223)–(225) es diseñar un controlador no lineal  $\mathcal{H}_\infty$  de tal

forma que el sistema en lazo cerrado tenga las trayectorias de los estados acotadas y la salida  $q_2(t)$  decaiga asintóticamente a la referencia deseada  $q_d$  cuando  $t \rightarrow \infty$  en el caso sin perturbaciones  $w = 0$ ; de otra manera el controlador  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal va a atenuar la influencia de las perturbaciones externas  $w = [w_{0,1}, w_{0,2}, w_{1,1}, w_{1,2}, w_{2,1}, w_{2,2}]^T$ . Trasladando el punto de equilibrio de (220) al origen de acuerdo a la suposición (A2) al introducir el cambio de coordenadas en función del error de posición, incluyendo la integral del error de posición la cual se agrega para efectos de control, de igual manera se mantiene la fricción de Dahl como estado en el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t x_2(t) dt', \quad x_2 = q_1 - q_d^*, \quad x_3 = \dot{q}_1, \quad x_4 = F_{d1} \\ x_5 &= \int_0^t x_6(t) dt', \quad x_6 = q_2 - q_d, \quad x_7 = \dot{q}_2, \quad x_8 = F_{d2}. \end{aligned} \quad (229)$$

Después de lo anterior, se puede reescribir las ecuaciones de estado (220)–(228) en términos del vector  $x$ ;

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= m_1^{-1} (-\sigma_{0,1} x_3 - x_4 + f + u + w_{1,1}) \\ \dot{x}_4 &= \sigma_{1,1} x_3 - \sigma_{1,1} \text{diag}\{|x_3|\} F_{c1}^{-1} x_4 + w_{2,1} \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= x_7 \\ \dot{x}_7 &= m_2^{-1} (-\sigma_{0,2} x_7 - x_8 + f + w_{1,2}) \\ \dot{x}_8 &= \sigma_{1,2} x_7 - \sigma_{1,2} \text{diag}\{|x_7|\} F_{c2}^{-1} x_8 + w_{2,2} \end{aligned} \quad (230)$$

donde

$$f = k\Delta x + k\eta(\Delta x) \quad (231)$$

con  $\Delta x = x_2 + q_d^* + a - x_6 - q_d + b + c/2$  el cual se puede simplificar a  $\Delta x = x_2 - x_6$ ,  
con

$$\eta = -c \frac{1 - e^{-(\Delta x/0.5c)}}{1 + e^{-(\Delta x/0.5c)}}. \quad (232)$$

y

$$\tau_d = \sigma_{0,1}x_3 + x_4 - f - \lambda_1x_5 - \lambda_2x_6 - \lambda_3x_7 - \lambda_4x_8. \quad (233)$$

Esta aproximación impone propiedades de estabilidad en el sistema sin perturbaciones alrededor de  $x_6 = 0$ .

### 6.3.2 Diseño del control $\mathcal{H}_\infty$

El objetivo del control es determinar un controlador retroalimentado que resuelva el problema de regulación, tal que el sistema en lazo cerrado ante la ausencia de perturbaciones satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_6(t)\| = 0. \quad (234)$$

La representación de (230) aplicando (233) y acorde a (10) es la siguiente

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ m_1^{-1}(-\lambda_1x_5 - \lambda_2x_6 - \lambda_3x_7 - \lambda_4x_8) \\ \sigma_{1,1}x_3 \\ x_6 \\ x_7 \\ m_2^{-1}(-\sigma_{0,2}x_7 - x_8) \\ \sigma_{1,2}x_7 \end{bmatrix}, \quad (235)$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{c1}^{-1}(-\sigma_{1,1}|x_3|x_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{c2}^{-1}(-\sigma_{1,2}|x_7|x_8) \end{bmatrix}, \quad (236)$$

$$f_3(x) = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ m_2^{-1} f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (237)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ m_1^{-1} \\ 0_{5 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (238)$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = \begin{bmatrix} x_2 + q_d^* \\ x_6 + q_d \end{bmatrix} \quad (239)$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (240)$$

Entonces la retroalimentación de salida (61)-(62) sujeta a (235)-(240) es una solución local del problema de regulación de posición  $H_\infty$  para el sistema con restricciones de fuerza (230). Así, el controlador  $\tau$  a ser construido consiste en el compensador  $\tau_d$  (233) y el atenuador de perturbaciones  $u$  (62), que estabilizan el sistema en lazo cerrado (230) alrededor de la posición deseada, siendo de la siguiente manera

$$\tau = \sigma_{0,1}x_3 + x_4 - f - \lambda_1x_5 - \lambda_2x_6 - \lambda_3x_7 - \lambda_4x_8 - g_2^T(\xi)P_\varepsilon\xi. \quad (241)$$

### 6.3.3 Estudio experimental

En los siguientes experimentos se prueba el compensador (233) y el atenuador de perturbaciones  $u(t)$  (62). Como solamente se tienen las mediciones de los estados  $x_2$  y  $x_6$ , se utiliza un filtro  $\mathcal{H}_\infty$  (61) para tener acceso a los estados remanentes.

En la plataforma ECP-210 modificada para tener una restricción de fuerza como en la Figura 40, se utilizaron los siguientes parámetros: posición deseada de la segunda masa  $\mathbf{q}_d = \mathbf{23.1}$  cm siendo  $q_d^* = 3.0$  cm, coeficientes de fricción viscosa  $\sigma_{0,1} = 7.695$ ,  $\sigma_{0,2} = 2.1141$ , coeficientes de rigidez  $\sigma_{1,1} = 0.1$ ,  $\sigma_{1,2} = 1$ , niveles de fricción de Coulomb  $F_{c1} = 0.1$ ,  $F_{c2} = 0.1$ , valores de las masas en kilogramos  $m_1 = 1.06238$  kg.,  $m_2 = 0.611$  kg., valores de las distancias en metros  $a = 15.0$  cm,  $b = 5.1$  cm,  $c = 1.0$  cm, la rigidez del resorte  $k = 375.42$  Nm. Las ganancias del controlador se fijaron en  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = 4$  and  $\lambda_4 = 1$ .

Adicionalmente aplicamos un par acotado como perturbación dado por

$$w_{1,1} = 0.2e^{-0.1t} \cos(10t). \quad (242)$$



Figura 40. Plataforma experimental ECP-210 modificada para tener una restricción de fuerza.

Para los parámetros seleccionados  $\gamma = 400$ ,  $\rho = 1$  and  $\varepsilon = 5$ , la ecuación de Riccati correspondiente (43) y (44) tiene las siguientes soluciones definidas positivas:

$$P_\varepsilon = 10^3 \times$$

$$\begin{bmatrix} 1.1367 & -0.1524 & 0.0008 & 0.1615 & -1.1348 & -0.8753 & -0.0013 & 0.8679 \\ -0.1524 & 4.6501 & 0.0493 & -1.8023 & 0.1717 & -3.1253 & -0.0275 & 0.3399 \\ 0.0008 & 0.0493 & 0.0052 & -0.0012 & 0.0008 & -0.0440 & -0.0047 & 0.0011 \\ 0.1615 & -1.8023 & -0.0012 & 1.7936 & -0.1627 & 0.3366 & 0.0006 & -0.3346 \\ -1.1348 & 0.1717 & 0.0008 & -0.1627 & 1.1395 & 0.8684 & 0.0004 & -0.8699 \\ -0.8753 & -3.1253 & -0.0440 & 0.3366 & 0.8684 & 5.3139 & 0.0254 & -2.5548 \\ -0.0013 & -0.0275 & -0.0047 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0254 & 0.0046 & -0.0013 \\ 0.8679 & 0.3399 & 0.0011 & -0.3346 & -0.8699 & -2.5548 & -0.0013 & 2.5535 \end{bmatrix}$$

$$Z_\varepsilon = 10^3 \times$$

$$\begin{bmatrix} 2.6841 & 0.0385 & -0.0003 & 0.0003 & -2.6559 & -0.0392 & -0.0014 & 0.0001 \\ 0.0385 & 3.4717 & 0.1165 & -0.0000 & 0.0562 & -3.2976 & -0.0550 & 0.0052 \\ -0.0003 & 0.1165 & 0.0065 & -0.0000 & 0.0042 & -0.1092 & -0.0041 & 0.0004 \\ 0.0003 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0039 & -0.0010 & -0.0015 & 0.0001 & -0.0000 \\ -2.6559 & 0.0562 & 0.0042 & -0.0010 & 2.6841 & -0.0163 & -0.0001 & -0.0003 \\ -0.0392 & -3.2976 & -0.1092 & -0.0015 & -0.0163 & 3.1948 & 0.0520 & -0.0056 \\ -0.0014 & -0.0550 & -0.0041 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0520 & 0.0034 & -0.0002 \\ 0.0001 & 0.0052 & 0.0004 & -0.0000 & -0.0003 & -0.0056 & -0.0002 & 0.0039 \end{bmatrix}$$

las cuales fueron encontradas numéricamente utilizando MATLAB. Los valores iniciales

para la integral del error de posición, error de posición, velocidades y términos de fricción fueron fijados en  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = -0.03$  m,  $x_3(0) = 0$ ,  $x_4(0) = 0$ ,  $x_5(0) = 0$ ,  $x_6(0) = -0.02$  m,  $x_7(0) = 0$  y  $x_8(0) = 0$ , respectivamente. Las condiciones iniciales para el filtro  $\mathcal{H}_\infty$  se fijaron como  $\xi(0) = 0$ . De las Figuras 41–42, podemos observar buen desempeño y robustez en el sistema mecánico de la Figura 40 utilizando el compensador (233) + ley de control  $\mathcal{H}_\infty$  (62).

### 6.3.4 Comentarios

Se ha desarrollado un marco práctico para el control de sistemas no lineal utilizando la metodología de control  $\mathcal{H}_\infty$ . El diseño de control ha mostrado ser lo suficientemente efectivo para resolver un problema de regulación en un sistema mecánico con fricción y restricciones. El modelo de fricción elegido fue el modelo de Dahl aumentado con fricción viscosa. Para este caso de estudio, hecho para una planta rectilínea, el sistema no es dos veces continuamente diferenciable debido al fenómeno de zona muerta presente en la restricción, es por eso que se considera una aproximación monótona de esta zona muerta la cual es continuamente diferenciable. La síntesis de  $\mathcal{H}_\infty$  propuesta para regulación de salida muestra ser adecuada para resolver el problema de regulación en forma local, a la vez que atenúa las discrepancias en la aproximación de la zona muerta. La eficiencia del diseño propuesto es apoyado con experimentos realizados en un sistema mecánico de dos g.d.l. sujeto a una restricción (plataforma ECP-210).

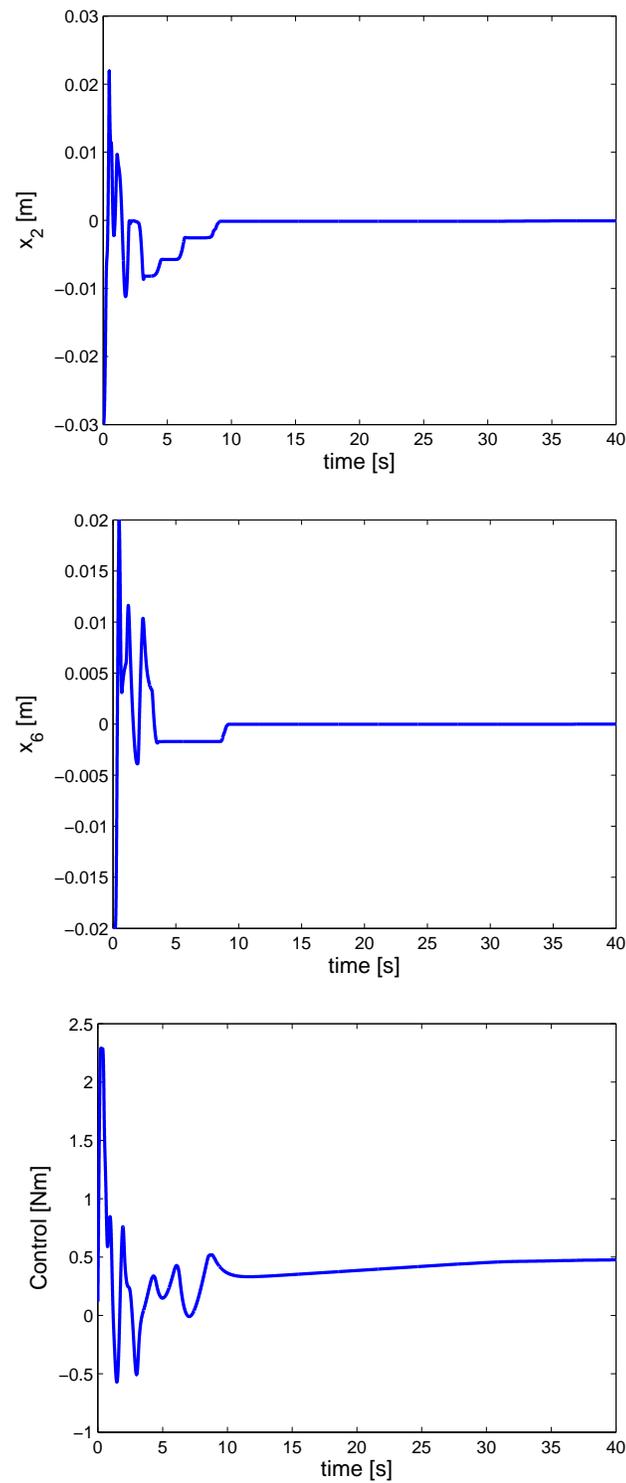


Figura 41. Resultados experimentales del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  considerando solo medición de la posición de las masas.

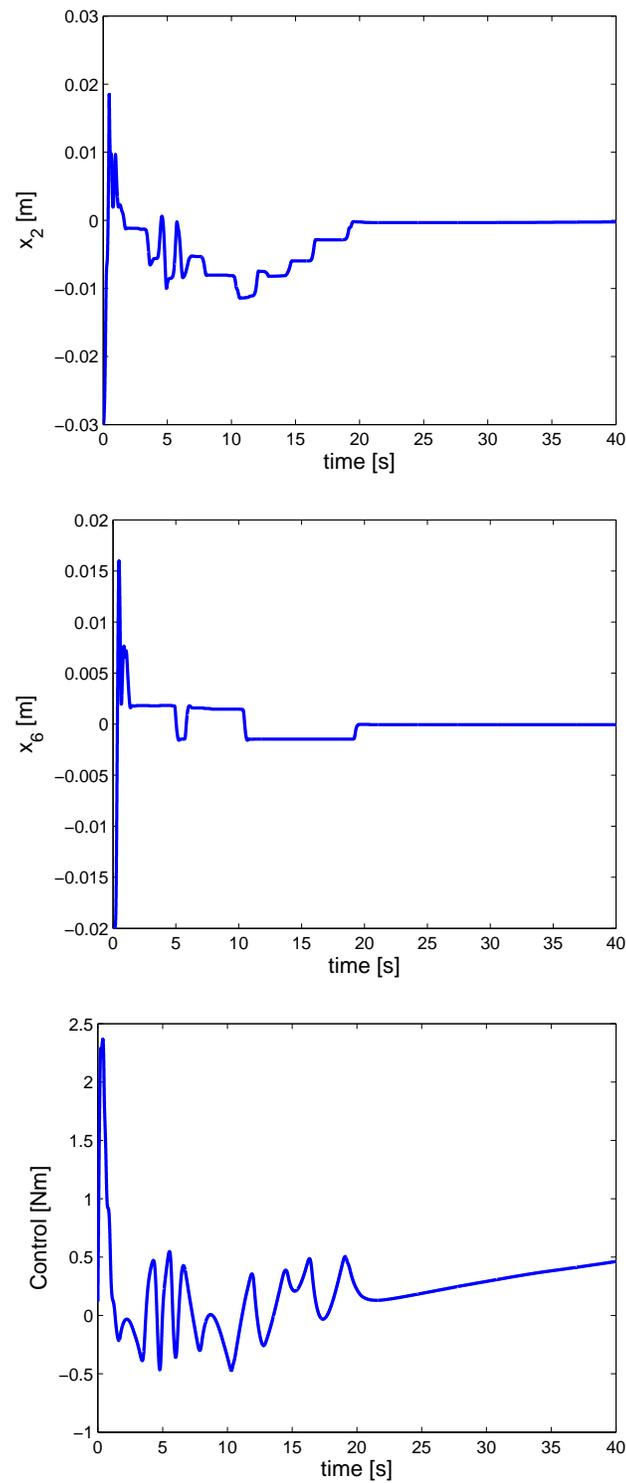


Figura 42. Resultados experimentales del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  considerando solo medición de la posición de las masas: caso perturbado.

### 6.3.5 Diseño de control modos deslizantes- $\mathcal{H}_\infty$

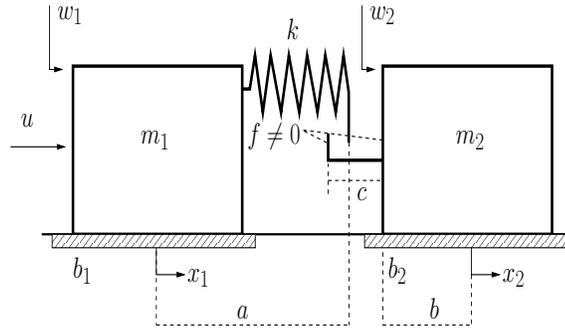


Figura 43. Sistema mecánico restringido.

La idea principal es diseñar un controlador para regulación de posición y desarrollar la prueba de estabilidad, para un sistema mecánico sujeto a una restricción bilateral (ver Figura 43). Este es un sistema básico, descrito por un modelo simple. Sin embargo, este mismo sistema es similar a la estructura presentada por otros sistemas mecánicos, especialmente con holgura. Estos sistemas pueden presentar en su dinámica fenómenos tales como rebotes, debido a colisiones con la restricción, los cuales pueden poner en riesgo la integridad del mecanismo. De esta forma, diseñaremos un controlador con el propósito de reducir los rebotes en el sistema aparte de alcanzar el objetivo de regulación.

Las ecuaciones en lazo abierto del sistema mecánico con restricciones puede ser expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + f &= u + w_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 &= f + w_2 \end{aligned} \tag{243}$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es la rigidez del resorte,  $m_1 \in \mathbb{R}$  es la masa,  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$ ,  $\ddot{x}_1(t) \in \mathbb{R}$  representan la posición, velocidad y aceleración de la masa  $m_1$  respectivamente;  $m_2 \in \mathbb{R}$  es la segunda masa y  $x_2(t)$ ,  $\dot{x}_2(t)$ ,  $\ddot{x}_2 \in \mathbb{R}$  representan la posición, velocidad y aceleración

de la masa  $m_2$ . Se involucran fuerzas de fricción, donde  $b_1$  y  $b_2$  son los coeficientes de fricción viscosa para cada masa respectivamente. Con el fin de tener en cuenta las discrepancias del modelo se agregan las perturbaciones  $w_1(t)$  y  $w_2(t) \in \mathbb{R}$ . A su vez  $f$  es la fuerza de contacto entre las masas, donde se utilizará la aproximación (223), (224) y (225) para modelar la fuerza de contacto como se muestra en la Figura 39.

El objetivo del controlador de modos deslizantes utilizando un criterio  $H_\infty$  es regular  $x_2(t)$ , la posición de la segunda masa hacia una referencia a pesar de ciertas perturbaciones, esto es que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t) - x_{d2}\| = 0$ . El propósito de la parte de control por modos deslizantes es eliminar el efecto de  $w_1(t)$  y el propósito de la parte de control  $H_\infty$  es la de atenuar o al menos no amplificar las perturbaciones desacopladas  $w_2(t)$ ,  $w_3(t)$  y  $w_4(t)$ , cabe mencionar que un diseño inadecuado del controlador pudiera provocar que al tratarse de eliminar las perturbaciones acopladas se amplificaran las no acopladas. Dado el sistema no lineal (243) con fuerza de contacto (223)-(225), se diseña el controlador de tal forma que las trayectorias del sistema antes mencionado sean acotadas y la salida  $x_2(t)$  asintóticamente decaiga a la posición de referencia  $x_{d2}$  a través de  $x_{d1}$ , aun con la presencia de perturbaciones acotadas que satisfagan  $\sup_t |w_1(t)| \leq M$  y con  $w_2(t) = w_3(t) = w_4(t) = 0$ .

Primeramente desplazemos el punto de equilibrio de (243) al origen a través del siguiente cambio de coordenadas basado en los errores de las posiciones

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 - x_{d1} & q_2 &= \dot{x}_1 \\ q_3 &= x_2 - x_{d2} & q_4 &= \dot{x}_2 \end{aligned} \tag{244}$$

donde  $x_{d2} = x_{d1} + a + b + c/2$ . Por lo que la dinámica del sistema es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ -\frac{b_1}{m_1}q_2 - \frac{f}{m_1} + \frac{u}{m_1} + \frac{w_1}{m_1} \\ q_4 \\ -\frac{b_2}{m_2}q_4 + \frac{f}{m_2} + \frac{w_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (245)$$

donde

$$f = k\Delta q + k\eta(\Delta q) \quad (246)$$

con  $\Delta q = q_1 + x_{d1} + a - q_3 - x_{d2} + b + c/2$ . Reemplazando  $x_{d2}$  en  $\Delta q$  se tiene que

$$\Delta q = q_1 - q_3$$

$\eta$  es dado por

$$\eta = -c \frac{1 - e^{-(\Delta q/0.5c)}}{1 + e^{-(\Delta q/0.5c)}}. \quad (247)$$

La aproximación (246)-(247) acoplada al sistema (245), constituye una aproximación dos veces continuamente diferenciable del sistema mecánico (Figura 43), el cual puede tener incertidumbres que van a ser atenuadas.

El objetivo de control consiste en lograr que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| q_3(t) \| = 0. \quad (248)$$

Consideremos la siguiente superficie deslizante

$$s = q_1 + q_2 + \int_0^T q_1 dt - \int_0^T u_\infty(t) dt \quad (249)$$

donde  $u_\infty(t) \in \mathbb{R}$  es el controlador  $H_\infty$  el cual se diseña como en Aguilar *et al.* (2003); Isidori y Astolfi (1992). La ley de control que asegura que las trayectorias alcancen la superficie deslizante está dada por

$$u = b_1 q_2 + f + m_1 (-q_1 - q_2 + u_\infty - \lambda s - \beta \text{sign}(s)). \quad (250)$$

La ley de control propuesta actuará en todo tiempo  $t \geq 0$ , esto es, cuando el sistema está en movimiento libre o movimiento restringido (en contacto con la restricción). Los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  son ganancias positivas que se sintonizarán para asegurar que las trayectorias se dirijan hacia la superficie deslizante.

Combinando la entrada de control (249) con las dinámicas del sistema (245)–(247) se tiene la dinámica en lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -\frac{b_1}{m_1}q_2 - \frac{f}{m_1} + \frac{u}{m_1} + \frac{w_1}{m_1} \\ q_4 \\ -\frac{b_2}{m_2}q_4 + \frac{f}{m_2} + \frac{w_2}{m_2} \\ (1 - \frac{b_1}{m_1})q_2 - \frac{f}{m_1} + \frac{u}{m_1} + \frac{w_1}{m_1} + q_1 - u_\infty \end{bmatrix}. \quad (251)$$

### 6.3.6 Análisis de estabilidad

**Teorema 4.** *Sea el sistema (251) con (246), (247) a través del controlador gobernado por (249), (250). Considerando la condición  $\sup_t |w_1(t)| \leq M$  y  $w_2(t) = 0$ , entonces se tiene que el estado  $q_3$  en el sistema (251) es asintóticamente estable.*

*Prueba.* Al sustituir (250) en (251), el sistema cerrado toma la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -q_1 - q_2 + u_\infty - \lambda s - \beta \text{sign}(s) + \frac{w_1}{m_1} \\ q_4 \\ -\frac{b_2}{m_2} q_4 + \frac{f}{m_2} + \frac{w_2}{m_2} \\ -\lambda s - \beta \text{sign}(s) + \frac{w_1}{m_1} \end{bmatrix}. \quad (252)$$

Ahora, aseguramos la existencia de modos deslizantes al verificar que  $s\dot{s} < 0$ . Para este fin, notar que  $\sup_t |w_1(t)| \leq M$  para todo  $t$  y una constante  $M > 0$

$$s\dot{s} = s \left( -\lambda s - \beta \text{sign}(s) + \frac{w_1}{m_1} \right) \leq -\lambda s^2 - \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) |s|. \quad (253)$$

Concluimos la existencia de modos deslizantes en la superficie  $s = q_1 + q_2 + q_3 - \int_0^T u_\infty dt'$  mientras la condición  $\beta - \frac{M}{m_1} > 0$  permanezca válida. A su vez, podemos demostrar convergencia en tiempo finito de las trayectorias a la superficie deslizante  $s = 0$  usando la función cuadrática

$$V(s) = s^2, \quad (254)$$

y calcular su derivada temporal a lo largo de las soluciones de (252),

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t)) &\leq -2\lambda s^2 - 2 \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) |s| \\ &\leq -2 \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) |s| = -2 \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) \sqrt{V(s(t))}. \end{aligned} \quad (255)$$

De (255) se tiene que

$$V(t) = 0 \quad \forall \quad t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\left( \beta - \frac{M}{m_1} \right)} = t_f. \quad (256)$$

Así,  $V(t)$  converge en tiempo finito y en consecuencia un movimiento a lo largo del conjunto  $s = 0$  ocurre en el sistema discontinuo (252). De tal manera, en los próximos desarrollos, supondremos que el sistema (252) está en modo deslizante, tal que  $s = \dot{s} = 0$  para  $t \geq t_f$ . De (249) se muestra que la dinámica del sistema (252) una vez que está en modo deslizante es descrita por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -q_1 - q_2 \\ q_4 \\ -\frac{b_2}{m_2}q_4 + \frac{f}{m_2} + \frac{w_2}{m_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_\infty \quad (257)$$

**Lemma 1.** *Supóngase que se satisface que se tiene el sistema (257) considerando la entrada  $u_\infty = 0$ , entonces las trayectorias  $(q_1, q_2)$  en el sistema (257) son asintóticamente estables.*

*Prueba.* Para empezar, consideremos la función de Lyapunov con la forma

$$V(q_1, q_2) = \frac{q_1^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} \quad (258)$$

donde  $V(q_1, q_2)$  es definida positiva y radialmente desacotada. La derivada temporal de  $V(q_1, q_2)$  a lo largo de las trayectorias de (257) con la entrada  $u_\infty = 0$  está dada por

$$\dot{V}(q_1, q_2) = q_1 q_2 + q_2 (-q_1 - q_2) = -q_2^2 \leq 0. \quad (259)$$

Con el fin de completar la prueba, nos queda aplicar el principio de invarianza LaSalle-Krasovskii al sistema en cuestión. De esta manera, mientras el sistema permanezca en  $s = 0$ , las trayectorias  $(q_1, q_2)$  en (257) con la entrada  $u_\infty = 0$  convergen al origen. Se

satisfacen las suposiciones del Teorema 3.8 en Khalil (2002), así, el punto de equilibrio para las trayectorias  $(q_1, q_2)$  es globalmente exponencialmente estable. ■

Nótese que la dinámica cero es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \\ -\frac{b_2}{m_2}q_4 + \frac{f}{m_2} + \frac{w_2}{m_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_\infty \quad (260)$$

**Lemma 2.** *Supóngase que se satisface que el sistema (260) con (246), (247), considerando la entrada  $u_\infty = 0$ ,  $w_2(t) = 0$  y los estados exponencialmente estables  $q_1 = q_2 = 0$ , entonces se tiene que los estados  $(q_3, q_4)$  en el sistema (260) son asintóticamente estables.*

*Prueba.* Para comenzar, consideremos la función de Lyapunov con la forma

$$V(q_3, q_4) = \frac{k}{2m_2}q_3^2 + \frac{1}{2}q_4^2 + \frac{2c^2k}{m_2} \left( \frac{q_3 + \delta}{c} - \ln \frac{e^{q_3/0.5c} + 1}{2} \right). \quad (261)$$

Desde

$$\frac{q_3 + \delta}{c} \geq \ln \frac{e^{q_3/0.5c} + 1}{2} \quad \forall \quad q_3 \in \mathbb{R} \quad (262)$$

con  $\delta \gg 0$ , por inspección, la función  $V$ , gobernada por (261), parece ser definida positiva. Entonces, calculemos la derivada temporal de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias de (260)

$$\begin{aligned} \dot{V}(q_3, q_4) &= \frac{k}{m_2}q_3q_4 + q_4 \left( -\frac{b_2q_4}{m_2} - \frac{kq_3}{m_2} - \frac{kc}{m_2} \frac{1 - e^{q_3/0.5c}}{1 + e^{q_3/0.5c}} \right) \\ &\quad + \frac{c^2k}{m_2} \left( -2 \frac{e^{q_3/0.5c}}{c(e^{q_3/0.5c} + 1)} q_4 + \frac{q_4}{c} \right) \\ &= -\frac{b_2}{m_2}q_4^2. \end{aligned} \quad (263)$$

La dinámica cero en (260) no tiene solución trivial en el conjunto  $q_4 = 0$ , mientras la derivada temporal de la función de Lyapunov es igual a cero. De hecho, si  $q_4 = 0$ , entonces debido a (260) se tiene que

$$\frac{q_3}{c} + \frac{1 - e^{q_3/0.5c}}{1 + e^{q_3/0.5c}} = 0 \quad (264)$$

así se concluye que  $q_3 = 0$ . Para reproducir esta conclusión, es suficiente representar (264) en términos de  $z = q_3/0.5c$

$$0.5z + \frac{1 - e^z}{1 + e^z} = 0. \quad (265)$$

Nótese que la parte izquierda de (265) es una función estrictamente creciente de  $z$  debido a que su derivada es definida positiva por inspección.

$$0.5 - \frac{2e^z}{(1+e^z)^2} = 0.5 \frac{(1-e^z)^2}{(1+e^z)^2} > 0 \quad \forall \quad z \neq 0 \quad (266)$$

Con el fin de completar la prueba, nos queda aplicar el principio de invarianza LaSalle-Krasovskii al sistema en cuestión.

■

■

Así, el problema de regulación para  $q_3$  en el sistema (257) puede formularse como un problema de control  $H_\infty$  no lineal. En lo subsecuente, la investigación se centrara en el problema de regulación de posición  $H_\infty$ , donde

1. La salida a ser controlada está dada por

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_\infty \quad (267)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$ ,

2. Las posiciones  $q_1, q_3$  están disponibles a través de mediciones, las cuales están corrompidas por los vectores de error  $w_3(t), w_4(t) \in \mathbb{R}$ .

$$y = \begin{bmatrix} q_1 + x_{d1} + w_3 \\ q_3 + x_{d2} + w_4 \end{bmatrix}, \quad (268)$$

El problema de control  $H_\infty$  en cuestión se formula de la siguiente forma. Dado el sistema (257)-(268) y un número real  $\gamma > 0$ , se requiere encontrar (si existe) un controlador dinámico causal para retroalimentar al sistema

$$u_\infty = K(\xi) \quad , \quad \dot{\xi} = F(\xi, y) \quad (269)$$

con estados internos  $\xi \in \mathbb{R}^5$  de tal forma que en el sistema en lazo cerrado y sin perturbaciones, el estado  $q_3$  sea uniformemente asintóticamente estable alrededor del origen, y su ganancia  $\mathfrak{L}_2$  es localmente menor a  $\gamma$ , es decir, la desigualdad

$$\int_0^t \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^t \|w(t)\|^2 dt' \quad (270)$$

se satisface para todo  $t > 0$  y todas las funciones continuas  $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \ w_3(t) \ w_4(t)]^T$ , inicializadas en el origen permanecen acotadas en alguna vecindad de este punto.

### 6.3.7 Síntesis $H_\infty$

El problema de control  $H_\infty$  mencionado arriba tiene la estructura del control no lineal  $H_\infty$  para sistemas no suaves (257) modelada por las ecuaciones formuladas en el Capítulo II

$$\dot{q} = f(q) + g_1(q)w + g_2(q)u \quad (271)$$

$$z = h_1(q) + k_{12}(q)u \quad (272)$$

$$y = h_2(q) + k_{21}(q)w \quad (273)$$

cuando las ecuaciones (271)-(273) están especificadas con

$$f(q) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -q_1 - q_2 \\ q_4 \\ -\frac{b_2}{m_2}q_4 + \frac{f}{m_2} \end{bmatrix}, \quad (274)$$

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ 1 \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (275)$$

$$h_1(q) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad h_2(q) = \begin{bmatrix} q_1 + x_{d1} \\ q_3 + x_{d2} \end{bmatrix}, \quad (276)$$

$$k_{12}(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_{21}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (277)$$

El controlador resultante de la síntesis de regulación de salida  $H_\infty$  involucra un controlador lineal  $H_\infty$  para el sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u$$

$$z = C_1x + D_{12}u$$

$$y = C_2x + D_{21}w$$

donde

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\partial f}{\partial x}(0), & B_1 &= g_1(0), & B_2 &= g_2(0) \\
 C_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial x}(0), & D_{12} &= k_{12}(0), & C_2 &= \frac{\partial h_2}{\partial x}(0) \\
 D_{21} &= k_{21}(0).
 \end{aligned} \tag{278}$$

Las siguientes condiciones son conocidas (ver, e.g., Doyle *et al.* (1989)) por ser necesarias y suficientes para que exista una solución al problema lineal:

**C1.** Existe una solución simétrica positiva semidefinida y acotada de

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + P \left( \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P = 0 \tag{279}$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P] x. \tag{280}$$

**C2.** Existe una solución simétrica positiva semidefinida y acotada de

$$\tilde{A} Z + Z \tilde{A}^T + B_1 B_1^T + Z \left( \frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2^T C_2 \right) Z = 0 \tag{281}$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)] x \tag{282}$$

sea exponencialmente estable y  $\tilde{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P$ .

A través del lema real acotado (véase Anderson y Vreugdenhil (1973)), las condiciones C1 y C2 aseguran que existe una constante positiva  $\epsilon_0$  tal que el sistema de las ecuaciones perturbadas de Riccati

$$P_\epsilon A + A^T P_\epsilon + C_1^T C_1 + P_\epsilon \left( \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P_\epsilon + \epsilon I = 0 \tag{283}$$

$$\tilde{A} Z_\epsilon + Z_\epsilon \tilde{A}^T + B_1 B_1^T + Z_\epsilon \left( \frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2^T C_2 \right) Z_\epsilon + \epsilon I = 0 \tag{284}$$

tengan una solución única simétrica definida positiva  $(P_\epsilon, Z_\epsilon)$  para cada  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  donde  $A_\epsilon = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P_\epsilon$ .

Las ecuaciones (283) y (284) son subsecuentemente utilizadas para derivar una solución local del problema de control  $H_\infty$  para sistemas mecánicos con restricciones en la posición (257) utilizando (246) y (247). Los siguientes resultados son extraídos de Aguilar *et al.* (2003); Acho *et al.* (2001).

Dado que se satisfacen las condiciones C1 y C2 de acuerdo con el Teorema 2 para las matrices  $A, B_1, B_2$ , donde  $C_1, C_2$  son gobernadas por el sistema (274)-(277) y (278) y dado que  $(P_\epsilon, Z_\epsilon)$  son las soluciones correspondientes de (283) y (284) sujeto a  $\epsilon > 0$ . Entonces la salida a retroalimentar está dada por

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^2 f_i(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\epsilon \xi + Z_\epsilon C_2^T [y - h_2(\xi)], \quad (285)$$

$$u_\infty = -g_2^T(\xi) P_\epsilon \xi, \quad (286)$$

sujeto a (274)-(277) es una solución local para el problema de regulación de posición  $H_\infty$  sujeto a fuerzas restrictivas como en (257).

Así, el controlador retroalimentado (285) y (286), especificado acorde a (274)-(277), localmente resuelve el problema de regulación de posición  $H_\infty$  (257) y (267)-(270). Vale la pena mencionar que los estados que no están disponibles para usarse en (249) y (250) como retroalimentación fueron tomados del filtro (285).

### 6.3.8 Resultados experimentales

Las propiedades de robustez y desempeño del controlador propuesto (250) utilizando el atenuador de perturbaciones  $u_\infty$  en (286) son puestas a prueba en la plataforma ECP-210, la cual es modificada utilizando un perno como unión entre el resorte y la segunda masa, ésto con el fin de generar el efecto de la restricción, véase la Figura 44.



Figura 44. Plataforma experimental ECP-210 modificada para tener una restricción de posición.

Como solamente están disponibles para medición los estados  $q_2$  y  $q_6$ , el filtro  $H_\infty$  (285) fue aplicado para tener acceso a los estados remanentes.

En el experimento, el controlador y el filtro  $H_\infty$  son sintonizados bajo los siguientes parámetros: posición deseada de la segunda masa  $\mathbf{x}_{d2} = \mathbf{22.1cm}$  con respecto a la condición inicial de la masa  $m_1$ , lo que equivale a un desplazamiento de 1 cm. en la segunda masa. Los coeficientes de fricción viscosa son  $(b_1 = 7.695, b_2 = 2.1141)$ , valores de las masas en kilogramos  $(m_1 = 1.1kg., m_2 = 0.5kg.)$ , valores de las distancias en centímetros  $(a = 15cm, b = 5.1cm, c = 1cm)$ , la rigidez del resorte  $k = 375.42Nm$ . Las ganancias de retroalimentación del controlador se fijan en  $\lambda = 0.5$  y  $\beta = 0.5$ . Los parámetros  $\gamma = 1$ ,  $\rho = 1$  y  $\varepsilon = 500$  del controlador  $H_\infty$ . En el caso perturbado fue aplicado un par acotado gobernado por

$$w_1 = 0.2sen(t). \quad (287)$$

Las condiciones iniciales se fijaron como  $\theta(0) = 0$ ,  $q_1(0) = -0.02m$ ,  $q_2(0) = 0$ ,  $q_3(0) = -0.01m$ ,  $q_4(0) = 0$  y  $s(0) = 0$ , respectivamente. Las condiciones iniciales para el filtro  $H_\infty$  (285) se fijaron como  $\xi = [0, -0.02, 0, -0.01, 0]$ . Se concluye de los experimentos

de las Figuras 45–50 buen desempeño y propiedades de robustez deseadas del sistema de la Figura 44, el cual opera con el controlador por modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$  (250), (286), a su vez también se utiliza el filtro  $H_\infty$  (285).

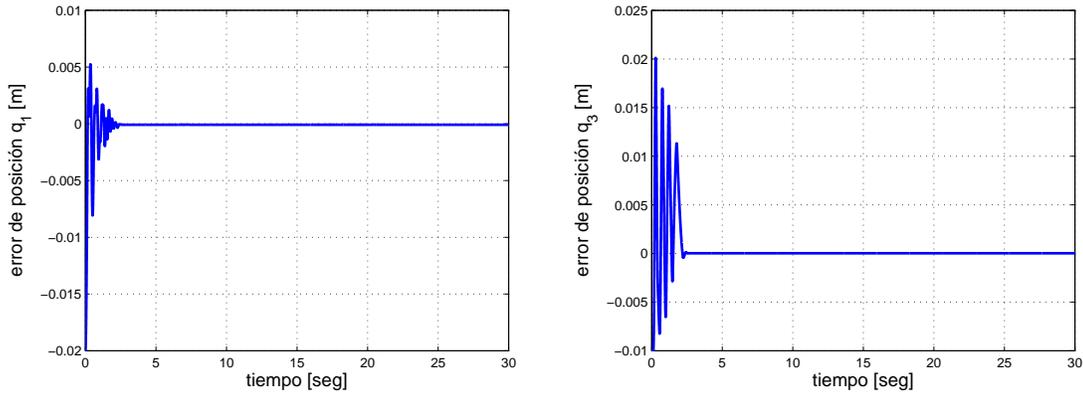


Figura 45. Sistema en lazo cerrado usando el filtro  $H_\infty$  para la retroalimentación de salida (caso no perturbado).

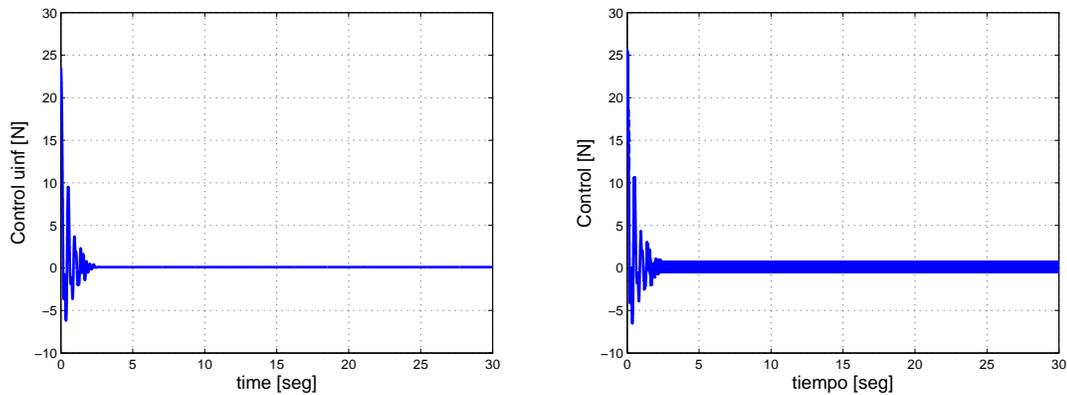


Figura 46. Sistema en lazo cerrado usando el filtro  $H_\infty$  para la retroalimentación de salida (caso no perturbado).

### 6.3.9 Comentarios

Se desarrolló un marco práctico para la aplicación y diseño de un controlador por modos deslizantes con un atenuador  $H_\infty$ . El antes mencionado diseño de control ha probado

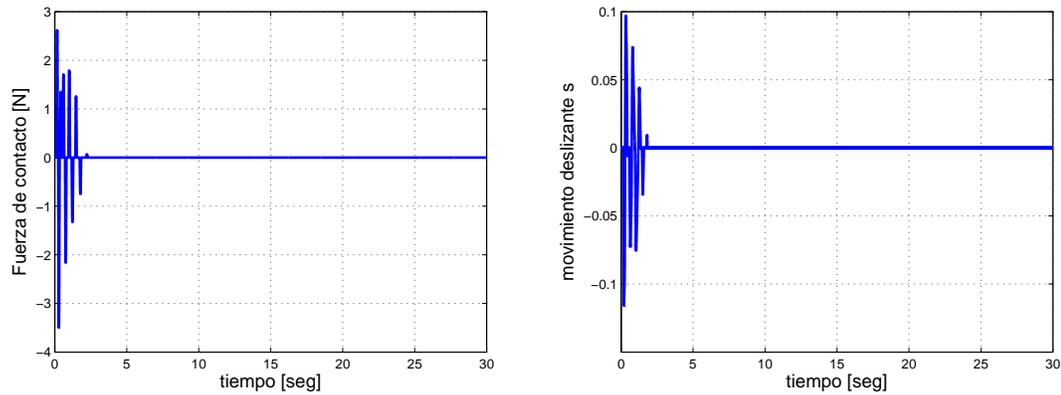


Figura 47. Sistema en lazo cerrado usando el filtro  $H_\infty$  para la retroalimentación de salida (caso no perturbado).

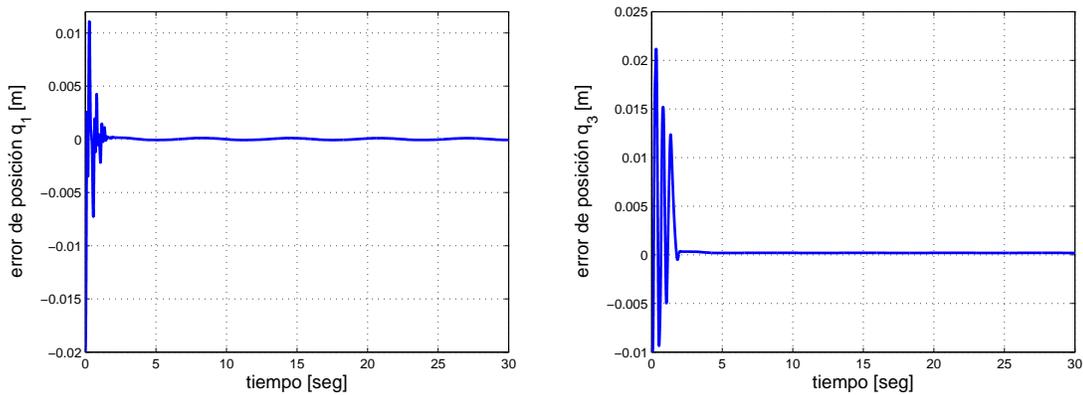


Figura 48. Sistema en lazo cerrado usando el filtro  $H_\infty$  para la retroalimentación de salida (caso perturbado).

resolver el problema de regulación de posición en un sistema mecánico con fricción y una fuerza de restricción. El modelo de fricción seleccionado para facilitar el desarrollo del controlador es el de Dahl aumentado con fricción viscosa. Se utiliza en el sistema mecánico una aproximación estrictamente monótona de zona muerta, con el fin de adecuar el sistema a la metodología de diseño de control  $H_\infty$ . La síntesis de control modos deslizantes- $H_\infty$  para regulación de salida es adecuada para resolver en forma global el problema de regulación cuando la desigualdad  $\beta - M/m_1 > 0$  se satisface, incluso en la presencia de perturbaciones  $\sup_t |w_1(t)| \leq M$ , cuando esta desigualdad

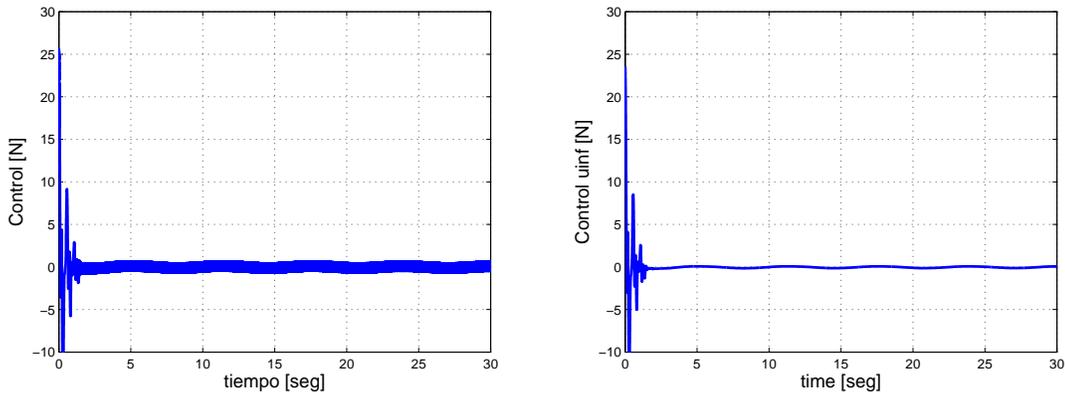


Figura 49. Sistema en lazo cerrado usando el filtro  $H_\infty$  para la retroalimentación de salida (caso perturbado).

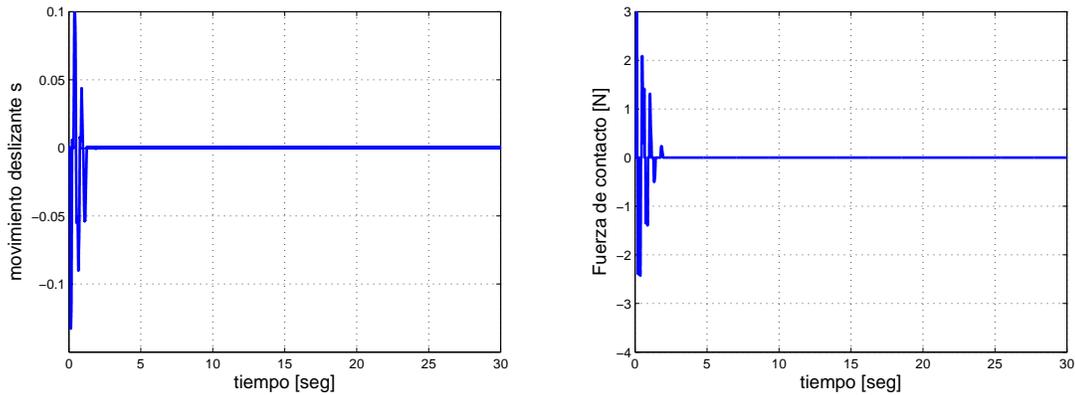


Figura 50. Sistema en lazo cerrado usando el filtro  $H_\infty$  para la retroalimentación de salida (caso perturbado).

no se satisface el controlador atenuará las perturbaciones y discrepancias del modelo de zona muerta, aunque es suficiente con incrementar el parámetro de ganancia  $\beta$  con el fin de satisfacer  $\beta - M/m_1 > 0$  y volver al sistema asintóticamente estable. La efectividad del diseño propuesto se complementa con experimentos en la plataforma ECP-210 modificada para tener una restricción de fuerza.

## 6.4 Sistema manipulador-masa-resorte

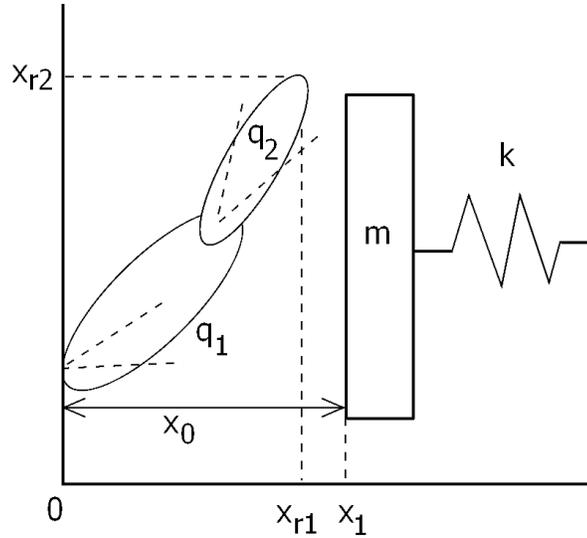


Figura 51. El sistema manipulador-masa-resorte es un ejemplo académico donde se presentan impactos entre dos sistemas dinámicos.

Podemos aplicar la metodología de control  $H_\infty$  descrita anteriormente al sistema manipulador-masa-resorte como el de la Figura 51. El modelo dinámico para el manipulador de dos grados de libertad mostrado en la Figura 51 se puede expresar en coordenadas de espacio como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (288)$$

donde  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^2$  representan la posición angular, velocidad y aceleración de los eslabones del manipulador, respectivamente;  $M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  representa la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  representa la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $G(q) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de pares gravitacionales y  $\tau \in \mathbb{R}^2$  representa los pares de entradas de control.

La posición euclidiana de la punta del segundo eslabón del manipulador se denota

por  $x_r(t) = [x_{r1}(t), x_{r2}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ , el cual puede cambiado a coordenadas de espacio a través de la siguiente relación:

$$\dot{x}_r = J(q)\dot{q} \quad (289)$$

donde  $J(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  denota el jacobiano del manipulador. La dinámica del sistema manipulador-masa-resorte como en la Figura 51 durante movimiento libre está dada por

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_0) = 0 \quad (290)$$

donde  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$ ,  $\ddot{x}_1(t) \in \mathbb{R}$  representan la posición, velocidad y aceleración de la masa  $m \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  representa la posición inicial sin perturbar de la masa y  $k$  representa la rigidez del resorte.

Un impacto entre el segundo eslabón del manipulador y el sistema masa-resorte ocurre cuando  $x_{r1} \geq x_1(t)$  donde  $x_{r1} = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)$ . El impacto genera fuerzas iguales en magnitud pero en sentido opuesto entre el manipulador y el sistema masa-resorte. Específicamente, la fuerza de impacto actuando en la masa, representado por  $F_m(x_r, x_1) \in \mathbb{R}$  se define como

$$F_m = K\Lambda(x_{r1} - x_1) \quad (291)$$

donde  $K \in \mathbb{R}$  es una constante positiva conocida y  $\Lambda(x_r, x_1) \in \mathbb{R}$  se define como

$$\Lambda = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{r1} \geq x_1 \\ 0, & \text{si } x_{r1} < x_1 \end{cases} \quad (292)$$

y  $\Lambda$  se puede aproximar como

$$\Lambda = \frac{\epsilon + x_{r1} - x_1 + |\epsilon + x_{r1} - x_1|}{2(\epsilon + x_{r1} - x_1)} \quad (293)$$

donde  $\epsilon$  es una constante pequeña positiva. La fuerza de impacto actuando en los eslabones del manipulador produce un par, denotado por  $\tau_{dist}(x_r, x_1, q) \in \mathbb{R}^2$ , el cual

tiene la siguiente forma

$$\tau_{dist} = -K\Lambda(x_{r1} - x_1) \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (294)$$

donde  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  denota la longitud de los eslabones del manipulador. Basándonos en (288), (290), (291), (293) y (294), el modelo dinámico para el sistema manipulador-masa-resorte puede expresarse como

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \tau_{dist} &= \tau \\ m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_0) &= F_m. \end{aligned} \quad (295)$$

#### 6.4.1 Diseño del control $\mathcal{H}_\infty$

A los dos eslabones del manipulador y el sistema masa-resorte se le agrega fricción de LuGre, la dinámica en (295) se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ M^{-1}(q) \begin{bmatrix} -C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - \tau_{dist} - \begin{bmatrix} F_{l1} \\ F_{l2} \end{bmatrix} \\ -\frac{|q_3|}{g(q_3)}\eta_1 + q_3 \\ -\frac{|q_4|}{g(q_4)}\eta_2 + q_4 \\ x_2 \\ -\frac{k}{m_3}(x_1 - x_0) - \frac{F_{l3}}{m_3} + \frac{F_m}{m_3} \\ -\frac{|x_2|}{g(x_2)}\eta_3 + x_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (296)$$

donde  $g(\theta)$ , con  $\theta = [q_3, q_4, x_2]^T$  es

$$g(\theta) = \frac{1}{\sigma_0} (f_c + (f_s - f_c) \exp(-(\theta/v_s)^2)) \quad (297)$$

y el término de la fricción de LuGre con  $i = 1, \dots, 3$  está dado por

$$F_l = \sigma_0 \eta + \sigma_1 \dot{\eta} \quad (298)$$

donde  $\eta = \text{col}\{\eta_i\}$  es la deflexión promedio de las cerdas. Acorde a (57)-(60) la representación de (296) es la siguiente

$$f_1(q, \eta) = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ M^{-1}(q) \left[ -C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - \begin{bmatrix} \sigma_{01}\eta_1 + \sigma_{11}q_3 \\ \sigma_{02}\eta_2 + \sigma_{12}q_4 \end{bmatrix} \right] \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (299)$$

$$f_2(q, \eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1}(q) \begin{bmatrix} \sigma_{11} \frac{|q_3|}{g(q_3)} \eta_1 \\ \sigma_{12} \frac{|q_4|}{g(q_4)} \eta_2 \end{bmatrix} \\ -\frac{|q_3|}{g(q_3)} \eta_1 \\ -\frac{|q_4|}{g(q_4)} \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (300)$$

$$f_3(q, \eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1}(q) K \Lambda (x_{r1} - x_1) \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (301)$$

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ M^{-1}(q) & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ M^{-1}(q) \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (302)$$

$$h_1(q) = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ I_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \quad h_2(q) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 4} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad (303)$$

$$k_{12}(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{6 \times 1} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(q) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \end{bmatrix}. \quad (304)$$

Entonces el controlador a retroalimentar

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^6 f_i(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)], \quad (305)$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi, \quad (306)$$

y  $\tau_d$  se diseña tal que

$$\tau_d = C(q, \xi) \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + G(q) + \tau_{dist} + \begin{bmatrix} \hat{F}_{l1} \\ \hat{F}_{l2} \end{bmatrix} - M(q) \left[ \lambda_1 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \right] \quad (307)$$

y

$$\hat{F}_{li} = \sigma_{0i} \xi_i + \sigma_{1i} \dot{\xi}_i \quad (308)$$

los valores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se deben seleccionar negativos e iguales con el fin de obtener una respuesta críticamente amortiguada en el sistema, esto con el fin de evitar un sobretiro en  $q_1$  y  $q_2$ .

## 6.4.2 Simulación numérica

Las propiedades de robustez y desempeño del compensador (307) diseñado para tener una respuesta críticamente amortiguada en  $q_1$  y  $q_2$  y el atenuador de perturbaciones

$u(t)$  en (306) son puestas a prueba en simulaciones numéricas para el sistema (296) que se muestra en la Figura 51. Como solamente tenemos acceso a mediciones de los estados  $q_1$ ,  $q_2$  y  $x_1$ , el filtro  $H_\infty$  (305) es utilizado para tener acceso a los estados remanentes. En la simulación desarrollada en MatLab, se estudia el modelo dinámico que depende de las posiciones, velocidades y la deflexión promedio de cerdas según el modelo de fricción de Dahl (296) bajo los siguientes parámetros: fuerza deseada  $\mathbf{F}^* = \mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^* = \mathbf{2}$ , rigidez del resorte  $k = 2$  y masa  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  siendo la masa de la primera, segunda articulación y masa de la restricción. Las ganancias del controlador se fijan en  $\lambda_1 = 25$  y  $\lambda_2 = 10$ . Los parámetros  $\gamma = 1.3$  y  $\varepsilon = 3$  del controlador  $H_\infty$ . En el modelo de LuGre (298) la fricción se modela como un contacto entre cerdas donde,  $\sigma_0 = \text{diag}\{700, 80, 1\}$  es la rigidez,  $\sigma_1 = \text{diag}\{1, 1, 1\}$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $[\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$  es la deflexión promedio de las cerdas,  $f_c = [0.745, 0.745, 0.745]^T$  es el nivel de fricción de Coulomb,  $f_s = [0.85, 0.85, 0.85]^T$  es el nivel de fuerza estática y  $v_s = [0.1, 0.1, 0.1]^T$  es la velocidad de Stribeck. La perturbación se fija en  $w = [0, 0, 0, 0]^T$ . Los valores iniciales de posición, velocidad y fricción de LuGre se fijan en  $q_1(0) = -\pi/2$ ,  $q_2(0) = \pi$ ,  $q_3(0) = 0$ ,  $q_4(0) = 0$ ,  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $[x_1(0), x_2(0), \eta_3]^T = [3, 0, 0]^T$  respectivamente. Las condiciones iniciales para el filtro  $H_\infty$  se fijan en  $\xi(0) = [-\pi/2, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ . Se puede observar buen desempeño del sistema (296) retroalimentado con el compensador (307) + ley de control  $H_\infty$  (306) de las Figuras 52–54.

### 6.4.3 Comentarios

Hemos desarrollado un marco práctico para sintetizar un controlador no suave  $H_\infty$  para sistemas de control restringidos. El antes mencionado procedimiento de diseño

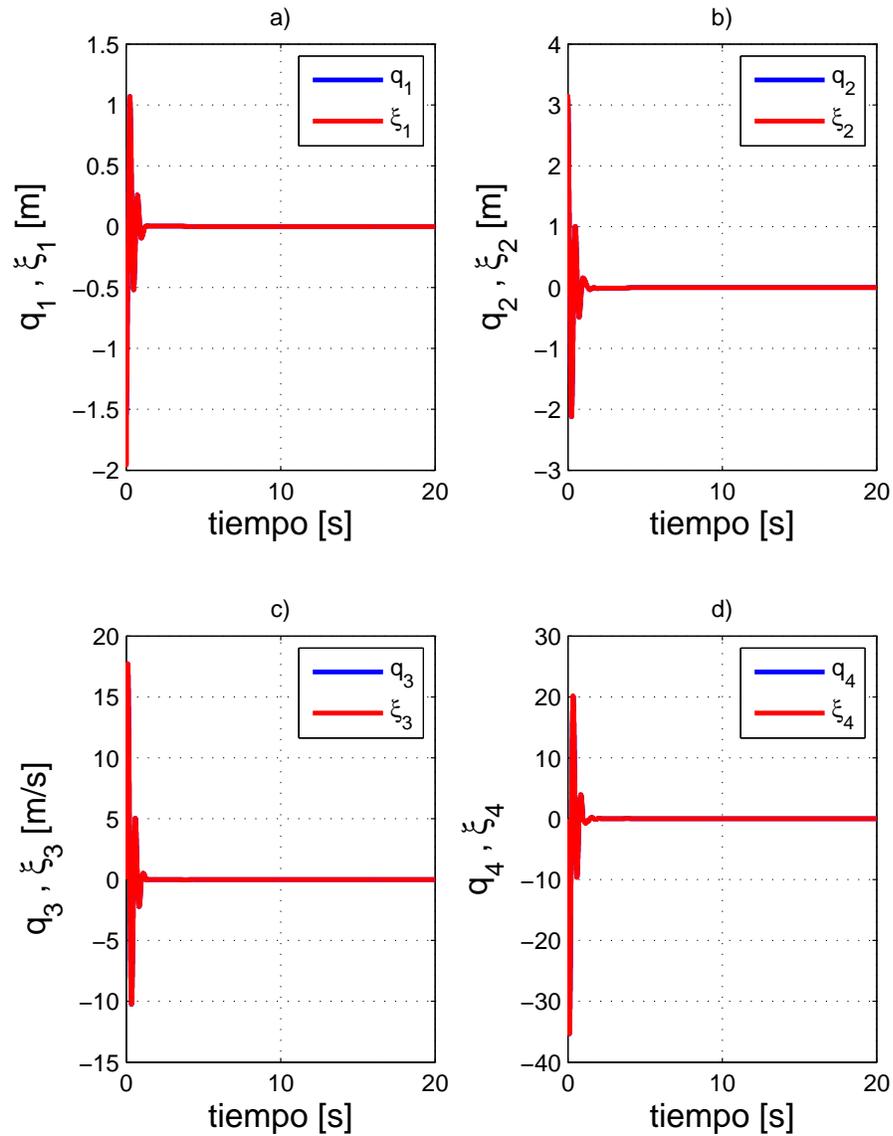


Figura 52. a) Posición del eslabón 1  $q_1$  y su estimación, b) posición del eslabón 2  $q_2$  y su estimación, c) Velocidad del eslabón 1  $q_3$  y su estimación, d) velocidad del eslabón 2  $q_4$  y su estimación.

resulta ser adecuado para resolver el problema de regulación de posición para sistemas mecánicos sujetos a restricciones de posición. El modelo de fricción seleccionado para el diseño es el de LuGre aumentado con fricción viscosa. La efectividad del presente diseño

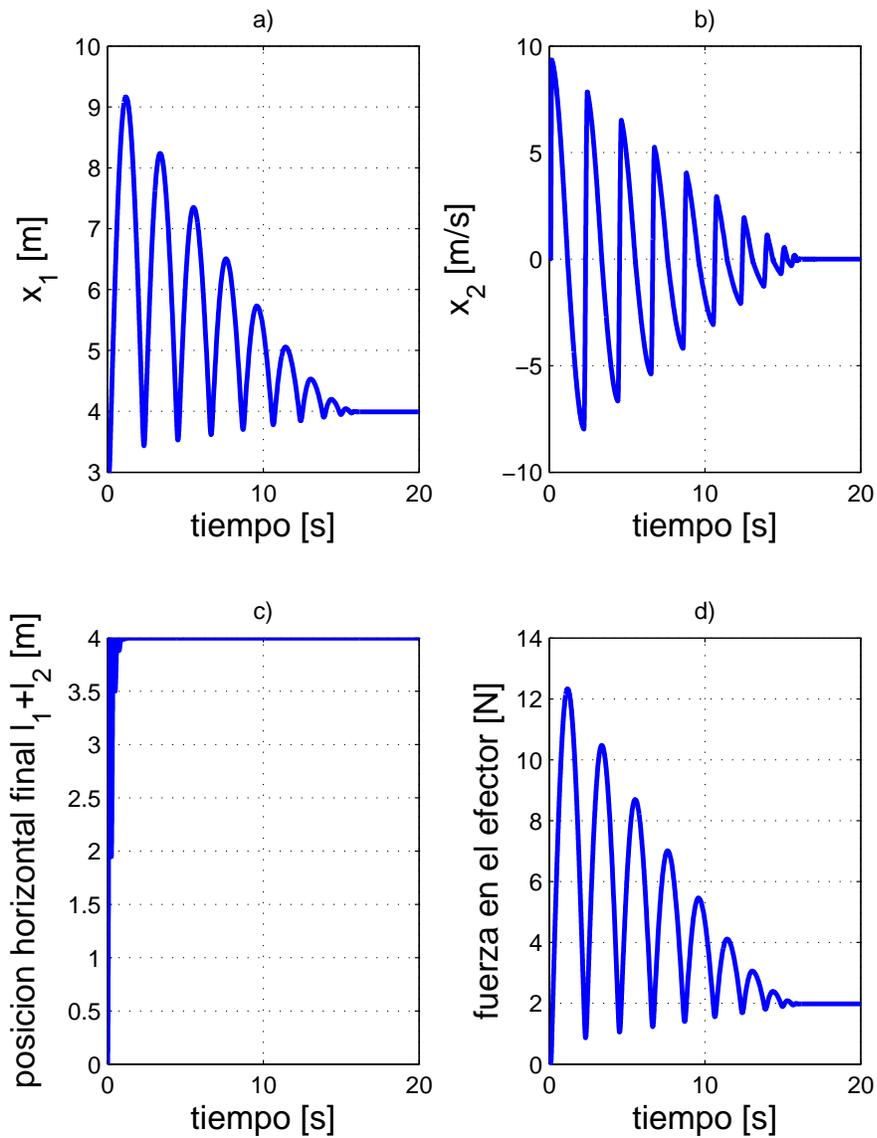


Figura 53. a) Posición de la masa 3, b) velocidad de la masa 3, c) posición horizontal del efector final en el eslabón 2, d) regulación de la fuerza deseada (Newtons).

de control es respaldada por simulaciones hechas para en sistema mecánico subactuado.

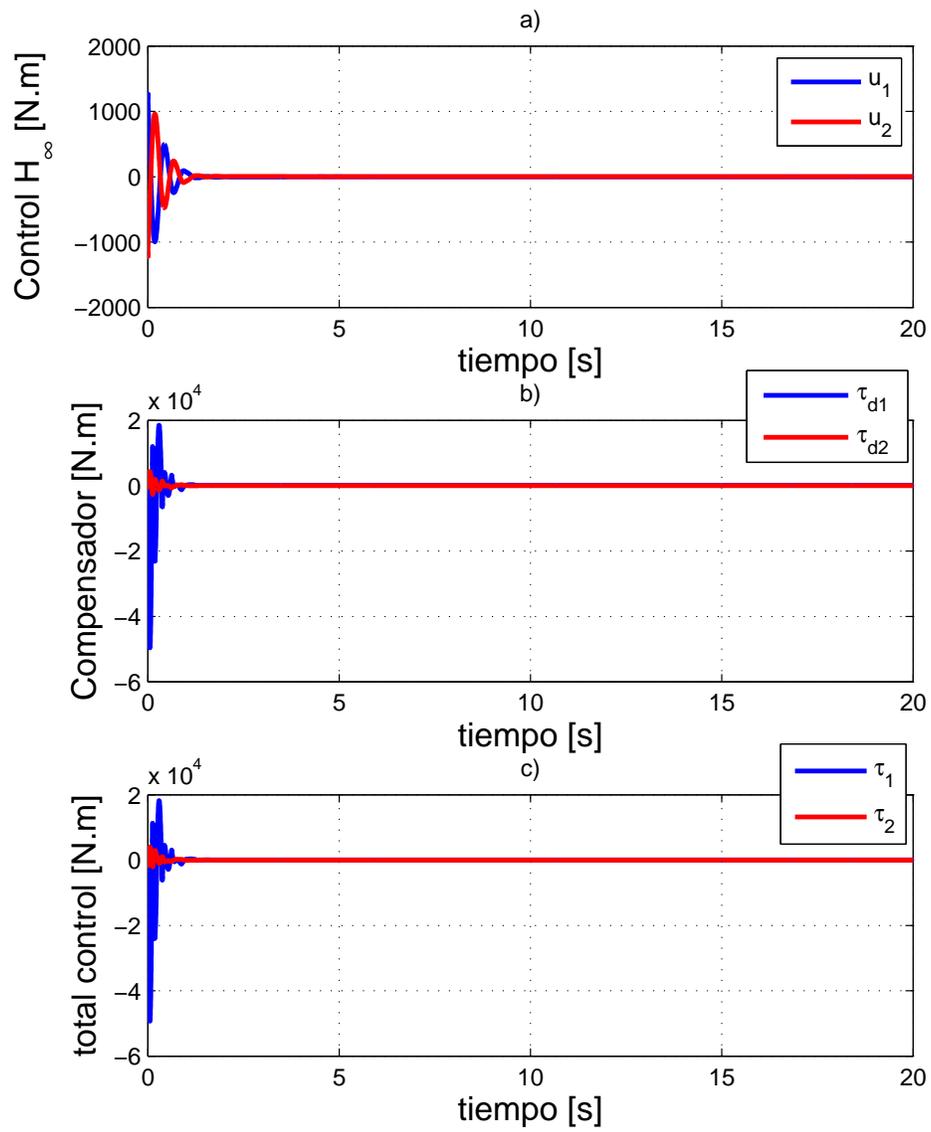


Figura 54. a) control  $H_\infty$  (Newtons), b) compensador (Newtons), c) compensador + control  $H_\infty$  (Newtons).

## Capítulo 7

# Aplicación en robot manipulador Pegasus de 3 g.d.l. con un muro como restricción

En el presente capítulo se desarrollan tres tipos de controladores: modos deslizantes,  $H_\infty$  y modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$ . Con el propósito de ilustrar los controladores propuestos, se llevan a cabo simulaciones numéricas y experimentos en el robot PEGASUS fabricado por la compañía Amatrol. Podemos resaltar la importancia de los experimentos debido a que representan un escenario más apegado a aplicaciones industriales, de esta manera los controladores tienen que compensar incertidumbres paramétricas, fricción y perturbaciones externas presentes en el robot Pegasus, algunos de estos factores son generados y amplificadas debido a que el robot PEGASUS utiliza una transmisión de engranes y cadenas para transmitir el par generado por los actuadores hacia cada uno de los eslabones.

### 7.1 Controlador por modos deslizantes

El modelo dinámico del sistema mecánico de tres eslabones con restricción como se muestra en la Figura 55, se puede expresar en coordenadas de espacio de estado como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_c(\dot{q}) = \tau + \tau_c(q) + w(t) \quad (309)$$

donde  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^3$  denotan el desplazamiento, velocidad, y aceleración articular de los eslabones del sistema mecánico;  $M(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de inercia, la cual

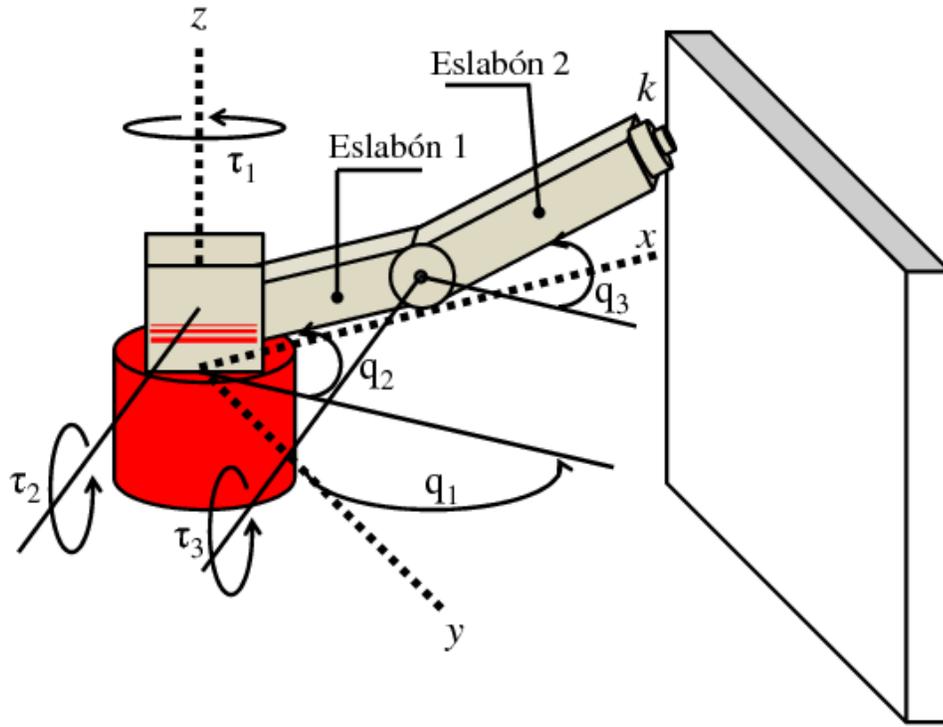


Figura 55. Robot PEGASUS con 3 g.d.l. y restricción en la posición

es simétrica y definida positiva para cada  $q \in \mathbb{R}^3$ ;  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis;  $G(q) \in \mathbb{R}^3$  es el vector de fuerzas gravitacionales;  $\tau_c(q) \in \mathbb{R}^3$  es el par generado por el resorte al hacer contacto con la restricción;  $F_c(\dot{q}) = [\alpha_1 \text{sign}(\dot{q}_1), \alpha_2 \text{sign}(\dot{q}_2), \alpha_3 \text{sign}(\dot{q}_3)]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de fricciones de Coulomb;  $\tau \in \mathbb{R}^3$  son las entradas de control y  $w(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  son las perturbaciones externas desconocidas. La amplitud de la fricción de Coulomb y la perturbación se supone que satisfacen

$$\alpha_i \leq A_i, \quad \sup_t |w_i(t)| \leq B_i \quad (310)$$

para todo  $t$  y unas constantes  $A_i > 0$ ,  $B_i > 0$ , con  $i = 1, 2, 3$ . La suposición (310) se establece por razones técnicas que serán claras más adelante.

### 7.1.1 Diseño del control

El objetivo de control es encontrar un control  $\tau \in \mathbb{R}^3$ , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte  $F_d$  (a través de la posición deseada  $x_{d1}$  sobre el eje  $x$  de la punta del segundo eslabón), las posiciones articulares  $(q_1, q_2, q_3)$ , la posición de referencia  $x_0$ , las velocidades articulares  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ , y las posiciones articulares deseadas  $(q_{d1}, q_{d2}, q_{d3})$  tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_1(t) - q_{d1}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_2(t) - q_{d2}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_3(t) - q_{d3}| = 0. \quad (311)$$

Dado que  $F_d = k(x_{d1} - x_0)$ , con  $F_d \geq 0$  y del hecho de que  $x_{d1} = [l_1 \cos(q_{d2}) + l_2 \cos(q_{d3})] \cos(q_{d1})$ , sustituyendo y despejando se puede obtener  $q_{d2}$  en función de las otras variables

$$q_{d2} = \arccos \left( \frac{F_d}{l_1 k \cos(q_{d1})} + \frac{x_0}{l_1 \cos(q_{d1})} - \frac{l_2 \cos(q_{d3})}{l_1} \right). \quad (312)$$

Con estos antecedentes se diseñará una ley de control por modos deslizantes para el sistema (309). En principio se busca que el controlador dirija las trayectorias del sistema hacia la superficie deslizante  $s \in \mathbb{R}^3$

$$s = \mu q + \dot{q} + \gamma \int_0^t (q - q_d) dt' \quad (313)$$

donde  $q_d = [q_{d1}, q_{d2}, q_{d3}]^T \in \mathbb{R}^3$ , a su vez  $\mu \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $\gamma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices diagonales positivas de sintonización. La ley de control que asegura esto está dada por  $\tau \in \mathbb{R}^3$

$$\tau = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau_c(q) - \beta \frac{s}{\|s\|} - M(q)[\mu\dot{q} + \gamma(q - q_d) + \lambda s]. \quad (314)$$

Se propone que la ley de control estará actuando en todo tiempo, es decir, cuando el sistema mecánico está en movimiento libre o en movimiento restringido. Las matrices  $\lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $\beta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son diagonales con valores positivos los cuales serán sintonizados para asegurar que el movimiento de las trayectorias se dirija hacia la superficie deslizante. Debido a que la superficie deslizante (313) es una variable dinámica,

añadiremos  $s$  como otro estado en (309). Esto conduce al sistema extendido

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q)[-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + \tau_c(q) - F_c(\dot{q}) + w(t) + \tau] \\ \mu\dot{q} + \ddot{q} + \gamma(q - q_d) \end{bmatrix}. \quad (315)$$

### 7.1.2 Análisis de estabilidad

En esta sección se analizará la estabilidad del sistema en lazo cerrado (315), utilizando el controlador (314) y concluiremos acerca de la estabilidad global.

Primero, se obtiene la ecuación de lazo cerrado al sustituir (314) en (315):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[\beta \text{sign}(s) + F_c(q) - w] - \mu\dot{q} - \gamma(q - q_d) - \lambda s \\ -\lambda s - M^{-1}(q)[\beta \frac{s}{\|s\|} + F_c(q) - w] \end{bmatrix}. \quad (316)$$

Ahora, se puede probar la existencia de modos deslizantes verificando que  $s^T \dot{s} < 0$ , a través del siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} s^T \dot{s} &= s^T \left( -\lambda s - M^{-1}(q) \left[ \beta \frac{s}{\|s\|} + F_c(q) - w \right] \right) \\ &\leq -s^T \lambda s - \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} \|s\| + \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \|s\| \\ &\leq -\lambda \|s\|^2 - \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\|. \end{aligned}$$

Se concluye la existencia de modos deslizantes en la superficie  $s = \mu q + \dot{q} + \gamma \int_0^t (q - q_d) dt'$  mientras la condición  $0 < \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} (A_i + B_i) < \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\} \lambda_{\min}\{\beta\}$  permanezca válida, con  $i = 1, 2, 3$ .

También podemos demostrar la convergencia en tiempo finito de las trayectorias hacia la superficie  $s = 0$  a través de la siguiente función cuadrática  $V(s) \in \mathbb{R}$

$$V(s) = s^T s \quad (317)$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (317),

$$\begin{aligned}
\dot{V}(s(t)) &\leq -2\lambda\|s\|^2 - 2 \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\}\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\| \\
&\leq -2 \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\}\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \|s\| \\
&= -2 \left( \lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\}\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i) \right) \sqrt{V(s(t))}.
\end{aligned} \tag{318}$$

De (317) se tiene que

$$V(t) = 0 \text{ para } t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\lambda_{\min}\{M^{-1}(q)\}\lambda_{\min}\{\beta\} - \lambda_{\max}\{M^{-1}(q)\} \sum_{i=1,2} (A_i + B_i)} = t_f. \tag{319}$$

Por lo tanto,  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito y en consecuencia ocurrirá un movimiento a través del conjunto  $s = [0, 0, 0]^T$  en el sistema discontinuo (316). De esta manera, en los siguientes desarrollos se supondrá que el sistema (316) está en modo deslizante, tal que  $s = \dot{s} = 0$  para  $t \geq t_f$ .

Ahora se demostrará que, mientras el sistema permanezca en  $s = 0$ , las trayectorias  $(q, \dot{q})$  convergen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . De (313) con el cambio de variables  $e = q - q_d \in \mathbb{R}^3$ ,  $\dot{e} = \dot{q} \in \mathbb{R}^3$ , se tiene que la dinámica del sistema (316), una vez que se encuentra

en la superficie deslizando, se describe por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma_1 & 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_3 & 0 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (320)$$

Dado que  $\gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}^T$  y  $\mu = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}^T$  son definidas positivos, nótese que el sistema (320) tiene todos sus puntos de equilibrio situados en el origen, los cuales son asintóticamente estables.

En resumen, se puede asegurar que todas las trayectorias del sistema (309), con la ley de control (313)–(314) convergen a la referencia deseada. Sin embargo una forma de reducir el número de impactos en el sistema mecánico es teniendo una adecuada sintonización de los parámetros del controlador, especialmente de la relación entre  $\gamma$  y  $\mu$ . Esto se obtiene localizando los polos del sistema (320) como negativos y reales. Esto se logra satisfaciendo la relación

$$\mu_i \geq 2\sqrt{\gamma_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (321)$$

## 7.2 Simulación numérica

El desempeño y robustez del controlador por modos deslizantes propuesto (314) es puesto a prueba en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab<sup>®</sup>. Los parámetros utilizados en la planta corresponden a los del robot PEGASUS fabricado por la compañía Amatrol. Se estudia el modelo dinámico como en

(315) basado en las posiciones articulares  $q \in \mathbb{R}^3$ , sus velocidades  $\dot{q} \in \mathbb{R}^3$  y la dinámica de la superficies deslizantes  $s \in \mathbb{R}^3$ . Se consideraran los parámetros del robot Pegasus mostrados en la Tabla 1, mientras en la Tabla 6 y 7 se muestran las ganancias del control, condiciones iniciales y perturbaciones.

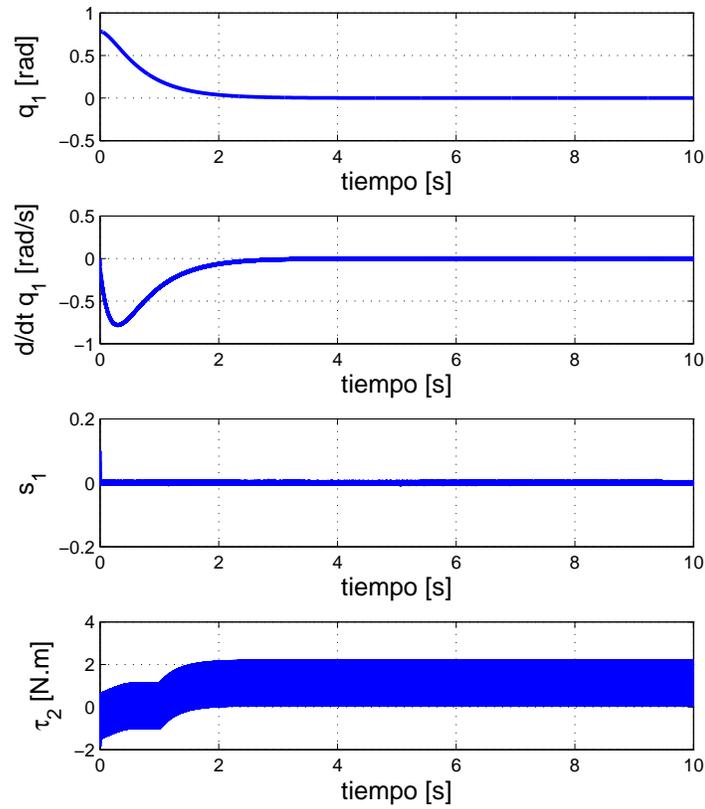


Figura 56. Valores para la articulación  $q_1$ .

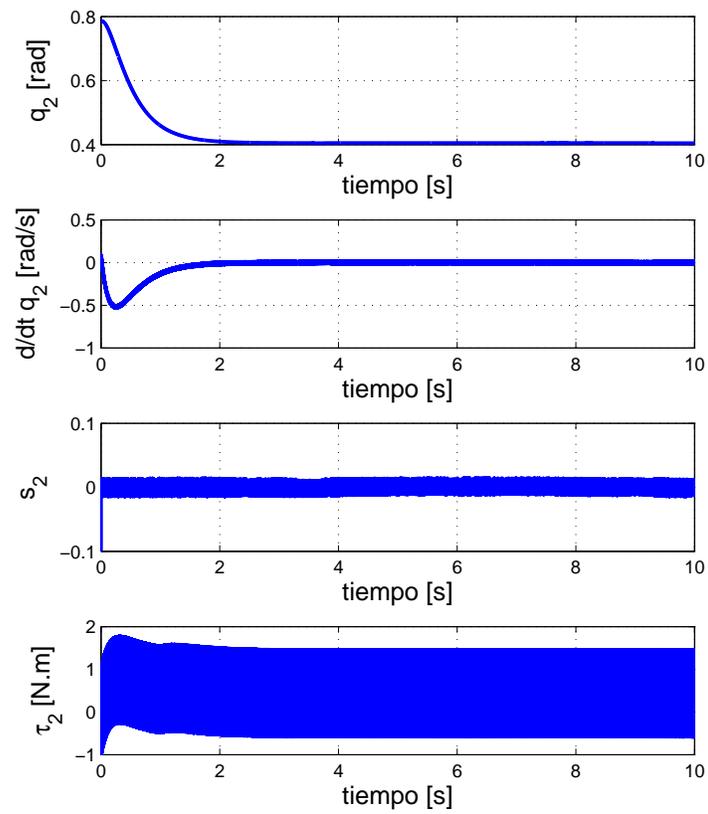


Figura 57. Valores para la articulación  $q_2$ .

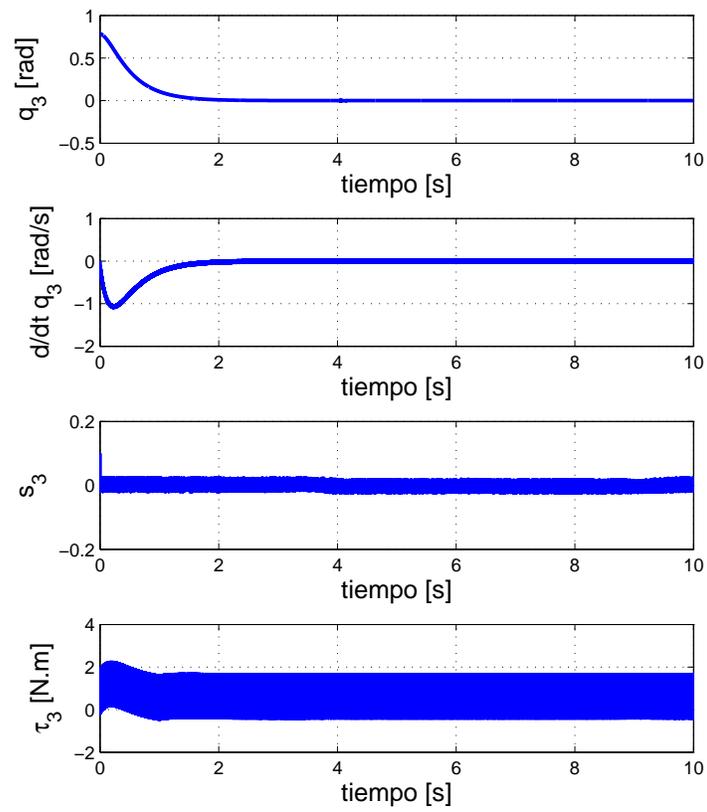


Figura 58. Valores para la articulación  $q_3$ .

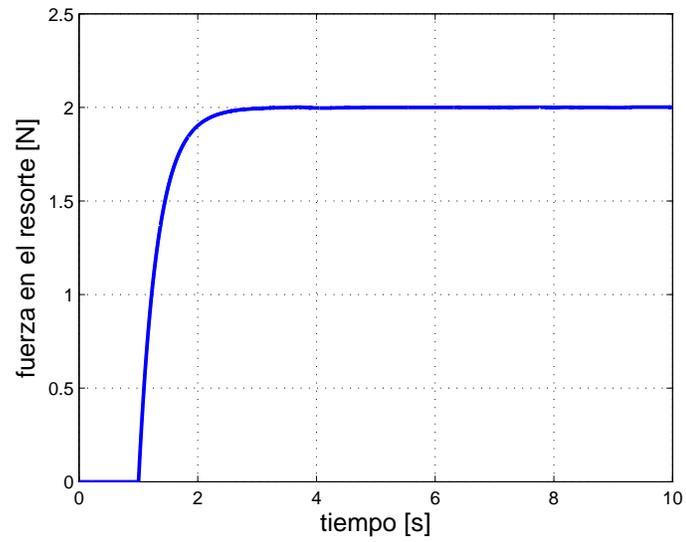
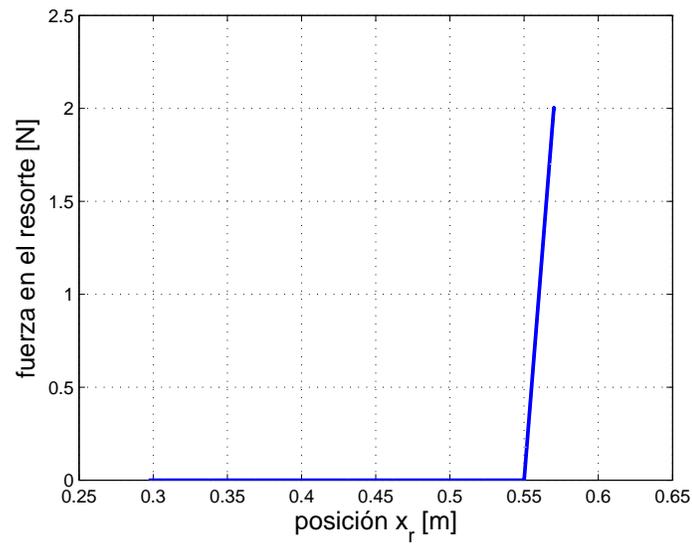
Figura 59. Fuerza en el resorte  $F_c$ .Figura 60. Fuerza en el resorte  $F_c$  vs. posición euclidiana del efector final  $x_r$ .

Tabla 6: Condiciones iniciales y ganancias del controlador (314) por modos deslizantes (simulación)

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$q_1(0)$	Posición articular 1	$\pi/4$	rad
$\dot{q}_1(0)$	Velocidad articular 1	0	rad/s
$q_2(0)$	Posición articular 2	$\pi/4$	rad
$\dot{q}_2(0)$	Velocidad articular 2	0	rad/s
$q_3(0)$	Posición articular 3	$\pi/4$	rad
$\dot{q}_3(0)$	Velocidad articular 3	0	rad/s
$s_1(0)$	Movimiento deslizante 1	0.1	
$s_2(0)$	Movimiento deslizante 2	-0.1	
$s_3(0)$	Movimiento deslizante 3	0.1	
$\lambda_1$	Ganancia del controlador	40	$1/s^2$
$\lambda_2$	Ganancia del controlador	30	$1/s^2$
$\lambda_3$	Ganancia del controlador	30	$1/s^2$
$\mu_1$	Ganancia del controlador	7	$1/(m.s)$
$\mu_2$	Ganancia del controlador	9	$1/(m.s)$
$\mu_3$	Ganancia del controlador	9	$1/(m.s)$

Tabla 7: Ganancias del controlador (314), perturbaciones externas y parámetros de la planta, control por modos deslizantes (simulación)

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$\beta_1$	Ganancia del controlador	1	N.m
$\beta_2$	Ganancia del controlador	1	N.m
$\beta_3$	Ganancia del controlador	1	N.m
$\gamma_1$	Ganancia del controlador	9	$1/(m.s^2)$
$\gamma_2$	Ganancia del controlador	16	$1/(m.s^2)$
$\gamma_3$	Ganancia del controlador	16	$1/(m.s^2)$
$\alpha_1$	Fricción de Coulomb en el eslabón 1	0.2	N.m
$\alpha_2$	Fricción de Coulomb en el eslabón 2	0.1	N.m
$\alpha_3$	Fricción de Coulomb en el eslabón 2	0.1	N.m
$k$	Constante de rigidez del resorte 2	100	N/m
$x_{d1}$	Posición euclidiana deseada del efector final	0.57	m
$F_d$	Fuerza deseada en el efector final	2	N
$x_0$	Posición euclidiana de referencia	0.55	m
$q_{d1}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$q_{d3}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$w_1$	Perturbación en eslabón 1	$0.1 \sin(t)$	N.m
$w_2$	Perturbación en eslabón 1	$0.1 \cos(t)$	N.m
$w_3$	Perturbación en eslabón 2	$0.2 \cos(t/2)$	N.m

### 7.3 Experimentos en el robot Pegasus

El desempeño y robustez del controlador por modos deslizantes propuesto (314) es puesto a prueba en la plataforma del robot pegasus. Estos experimentos se llevan a cabo utilizando el robot pegasus y se utiliza simulink de MatLab® para programar el algoritmo de control. Como interfaz entre la computadora y el robot se utiliza la tarjeta de adquisición de datos SENSORAY 626. El sensor de fuerza utilizado es el FC2231 de Measurement Specialties<sup>TM</sup> con un rango de medición de 0-50 Lbf. El robot pegasus es fabricado por la compañía Amatrol. Los parámetros de la planta son mostrados en la Tabla 1. Se considerarán los parámetros de condiciones iniciales y ganancias de control mostrados en la Tablas 8 y 9.

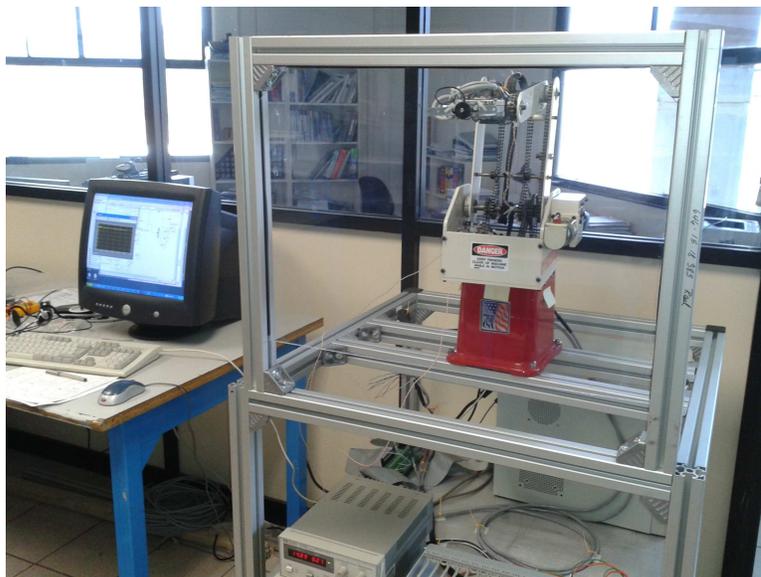


Figura 61. Plataforma experimental desarrollada con el Robot pegasus.

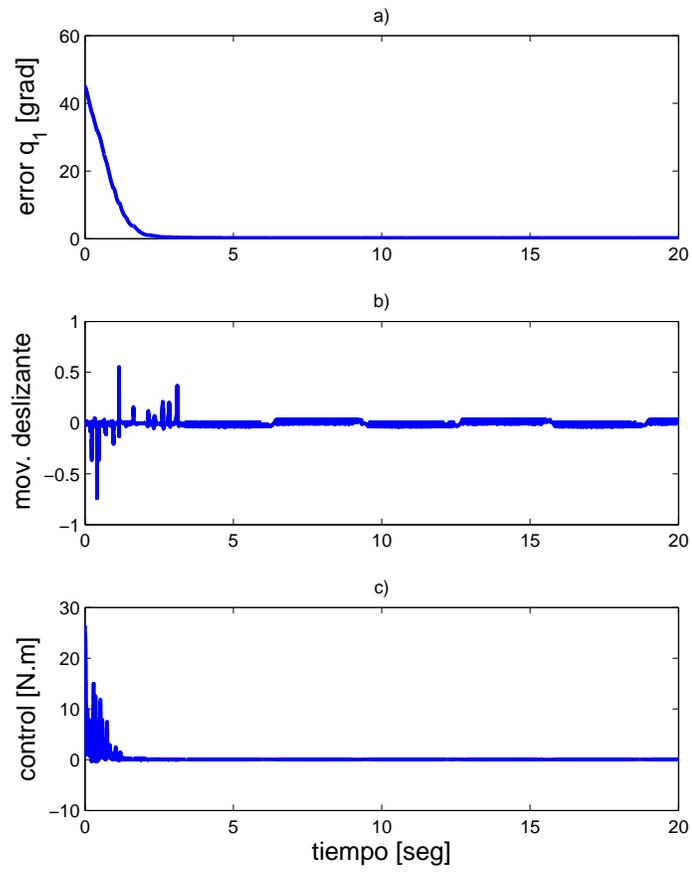


Figura 62. Valores para la articulación  $q_1$  (experimento).

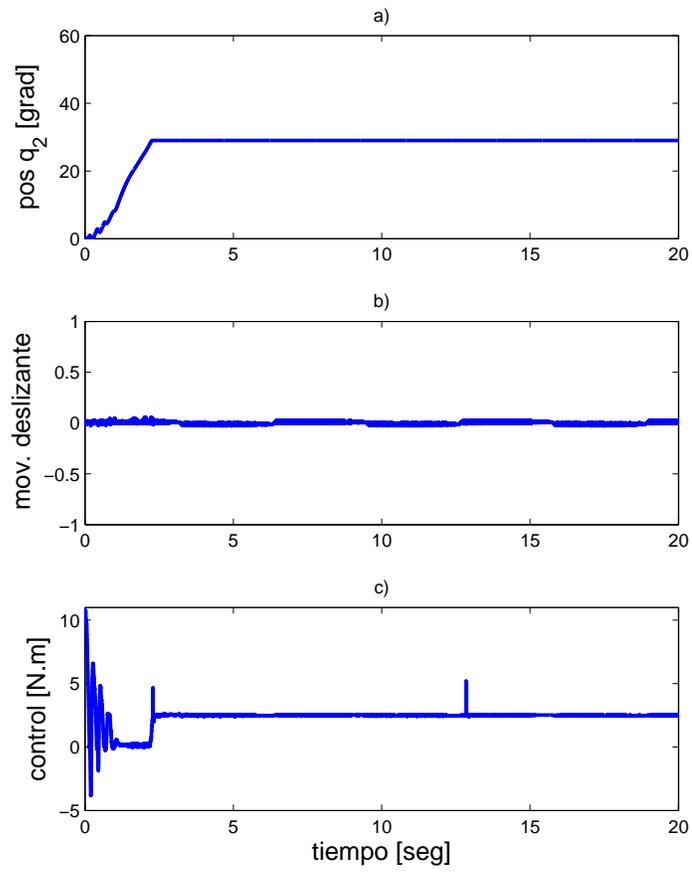


Figura 63. Valores para la articulación  $q_2$  (experimento).

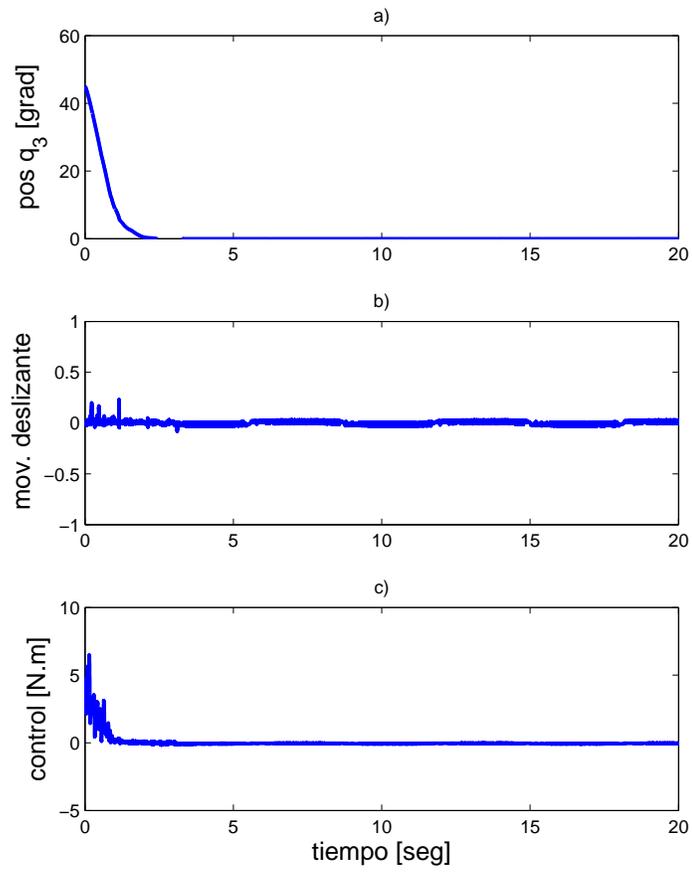


Figura 64. Valores para la articulación  $q_3$  (experimento).

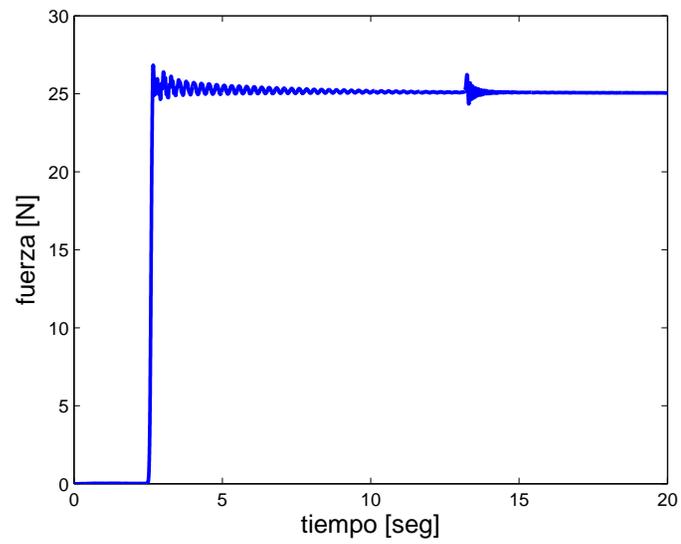


Figura 65. Fuerza medida por el sensor (experimento).

Tabla 8: Condiciones iniciales y ganancias del controlador (314) por modos deslizantes (experimentos)

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$q_1(0)$	Posición articular 1	45	grad
$\dot{q}_1(0)$	Velocidad articular 1	0	grad/s
$q_3(0)$	Posición articular 3	45	grad
$\dot{q}_3(0)$	Velocidad articular 3	0	rad/s
$s_1(0)$	Movimiento deslizante 1	0	
$s_2(0)$	Movimiento deslizante 2	0	
$s_3(0)$	Movimiento deslizante 3	0	
$\lambda_1$	Ganancia del controlador	40	$1/s^2$
$\lambda_2$	Ganancia del controlador	30	$1/s^2$
$\lambda_3$	Ganancia del controlador	30	$1/s^2$
$\mu_1$	Ganancia del controlador	7	$1/m \cdot s$
$\mu_2$	Ganancia del controlador	9	$1/m \cdot s$
$\mu_3$	Ganancia del controlador	9	$1/m \cdot s$
$\beta_1$	Ganancia del controlador	1	N.m
$\beta_2$	Ganancia del controlador	1	N.m
$\beta_3$	Ganancia del controlador	1	N.m

Tabla 9: Ganancias del controlador (314) y perturbaciones externas de la planta, control por modos deslizantes (experimentos)

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$\gamma_1$	Ganancia del controlador	9	$1/(m.s^2)$
$\gamma_2$	Ganancia del controlador	16	$1/(m.s^2)$
$\gamma_3$	Ganancia del controlador	16	$1/(m.s^2)$
$\alpha_1$	Fricción de Coulomb en el eslabón 1	0.2	N.m
$\alpha_2$	Fricción de Coulomb en el eslabón 2	0.1	N.m
$\alpha_3$	Fricción de Coulomb en el eslabón 3	0.1	N.m
$F_d$	Fuerza deseada en el efector final	25	N
$q_{d1}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$q_{d3}$	Posición articular deseada del eslabón 2	0	rad
$w_1$	Perturbación en articulación 1	$0.1 \sin(t)$	N.m
$w_2$	Perturbación en articulación 2	$0.1 \cos(t)$	N.m
$w_3$	Perturbación en articulación 3	$0.1 \cos(t)$	N.m

## 7.4 Controlador $H_\infty$

El modelo dinámico del sistema mecánico de tres articulaciones con restricción como se muestra en la Figura 74, se puede expresar en coordenadas de espacio de estado como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + \tau_c(q) + w(t) \quad (322)$$

Donde  $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^3$  es el vector de fuerzas de fricción, las cuales son representadas como una combinación

$$F_i = \sigma_{0i}\dot{q}_i + F_{di}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (323)$$

de fricción viscosa  $\sigma_{0i}\dot{q}_i$  y fricción de Dahl  $F_{di}$  que es gobernado por el siguiente modelo dinámico:

$$\dot{F}_{di} = \sigma_{1i}\dot{q}_i - \sigma_{1i}|\dot{q}_i|\frac{F_{di}}{F_{ci}} + w_{2i}, \quad (324)$$

donde  $\sigma_{0i} > 0$ ,  $\sigma_{1i} > 0$  y  $F_{ci} > 0$  son los coeficientes de fricción viscosa, coeficiente de rigidez y nivel de fricción de Coulomb, correspondientes a la  $i$ -ésima articulación del manipulador;  $w_{2i}$  es una perturbación externa agregada para lidiar con discrepancias en el modelo de fricción.

El modelo de Dahl (324) describe el comportamiento en un resorte con fricción estática, este modelo representa esencialmente la fricción de Coulomb con un retraso en el cambio de la fuerza de fricción cuando la dirección del movimiento cambia. Como la fricción de Coulomb es solamente una función del desplazamiento y el signo de la velocidad, este modelo dinámico es no suave.

El modelo (324) puede reescribirse en su forma vectorial

$$F = \sigma_0\dot{q} + F_d, \quad (325)$$

$$\dot{F}_d = \sigma_1\dot{q} - \sigma_1\text{diag}\{|\dot{q}_i|\}F_c^{-1}F_d + w_2, \quad (326)$$

donde  $F = \text{col}\{F_i\}$ ,  $F_d = \text{col}\{F_{di}\}$ ,  $x = \text{col}\{q_i\}$ ,  $\sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0i}\}$ ,  $\sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_{1i}\}$ ,  $F_c = \text{diag}\{F_{ci}\}$ ,  $w_2 = \text{col}\{w_{2i}\}$ , la notación  $\text{diag}$  y  $\text{col}$  es utilizada para denotar una matriz diagonal y un vector columna, respectivamente.

Sea  $q_d = \text{col}\{q_{di}\}$  el vector de posiciones deseadas. Entonces si no hay perturbaciones iniciales y externas, la posición deseada será el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado actuado por  $\tau$ . Nuestro objetivo es diseñar un regulador de la forma

$$\tau = G(q) + \phi\left(\int_0^t (q - q_d)dt, q - q_d, \dot{q}, F(\dot{q})\right) + u \quad (327)$$

con el cual aseguramos estabilidad asintótica hacia la referencia  $q_d$  a la vez que se atenúan localmente los efectos de perturbaciones.

Por otro lado, la salida a ser controlada está dada por

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q - q_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (328)$$

con un coeficiente de peso positivo  $\rho$ . La salida del sistema está dada por

$$y = q + w_0, \quad (329)$$

donde solo se tiene acceso a la medición de posiciones y son afectadas por el vector de error  $w_0(t) \in \mathbb{R}^3$ .

El problema de  $H_\infty$  para regulación de posición para el robot Pegasus con fricción puede ser considerado de la siguiente manera. Dado el sistema mecánico 322-329, una posición deseada  $q_d \in \mathbb{R}^3$  y un número real  $\gamma > 0$ , se busca encontrar (si existe) un regulador dinámico causal con estados internos  $\xi \in \mathbb{R}^{12}$  de tal forma que el sistema en lazo cerrado sin perturbaciones sea asintóticamente estable hacia el punto de equilibrio y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  sea localmente menor a  $\gamma$ .

### 7.4.1 Diseño del control

El objetivo de control es encontrar un control  $\tau \in \mathbb{R}^3$ , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte  $F_d$  (a través de la posición deseada  $x_{d1}$  sobre el eje  $x$  de la punta del segundo eslabón), las posiciones articulares  $(q_1, q_2, q_3)$ , la posición de referencia  $x_0$ , las velocidades articulares  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ , y las posiciones articulares deseadas  $(q_{d1}, q_{d2}, q_{d3})$  tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_1(t) - q_{d1}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_2(t) - q_{d2}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |q_3(t) - q_{d3}| = 0 \quad (330)$$

dado que  $F_d = k(x_{d1} - x_0)$ , con  $F_d \geq 0$  y del hecho de que  $x_{d1} = [l_1 \cos(q_{d2}) + l_2 \cos(q_{d3})] \cos(q_{d3})$ , sustituyendo y despejando se puede obtener  $q_{d2}$  en función de las otras variables

$$q_{d2} = \arccos \left( \frac{F_d}{l_1 k \cos(q_{d1})} + \frac{x_0}{l_1 \cos(q_{d1})} - \frac{l_2 \cos(q_{d3})}{l_1} \right). \quad (331)$$

Se puede trasladar el punto de equilibrio de (322) en lazo cerrado al origen a través del siguiente cambio de variables, que incluye la integral del error de posición, error de posición, velocidad y fricción de Dahl, respectivamente

$$x_1 = \int_0^t x_2(t') dt', \quad x_2 = [q_1 - q_{d1}, q_2 - q_{d2}, q_3 - q_{d3}]^T, \quad x_3 = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T, \quad x_4 = [F_{d1}, F_{d2}, F_{d3}]^T, \quad (332)$$

quedándonos las ecuaciones de estado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= M^{-1}(x_2 + q_d) [-C(x_2 + q_d, x_3)x_3 - \sigma_0 x_3 - x_4 \\ &\quad + \tau_c(x_2 + q_d) + \phi + u + w_1] \\ \dot{x}_4 &= \sigma_1 x_3 - \sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 + w_2, \end{aligned} \quad (333)$$

donde  $\text{diag}\{q_d\}$ ,  $\text{diag}\{\sigma_0\}$ ,  $\text{diag}\{\sigma_1\}$ ,  $\text{diag}\{w_1\}$ ,  $\text{diag}\{w_2\}$  y  $\text{diag}\{F_c\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . El problema de  $H_\infty$  en cuestión es el problema de control  $H_\infty$  para sistemas no lineales y no suaves, donde el sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + f_2(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w \end{aligned} \tag{334}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de espacio de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^r$  son perturbaciones desconocidas,  $z \in \mathbb{R}^l$  es la salida a controlar,  $y \in \mathbb{R}^p$  son las mediciones del sistema. Adecuando (333) a la forma (334) tenemos que

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ M^{-1}(x_2 + q_d) [-C(x_2 + q_d, x_3)x_3 \\ -\sigma_0 x_3 - x_4 + \tau_c(x_2 + q_d) + \phi] \\ \sigma_1 x_3 \end{bmatrix}, \tag{335}$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_1 \text{diag}\{|x_{3i}|\} F_c^{-1} x_4 \end{bmatrix}, \quad (336)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & M^{-1}(x_2 + q_d) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (337)$$

$$g_2(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ M^{-1}(x_2 + q_d) \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_2 + q_d,$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (338)$$

Proponemos  $\phi(x) \in \mathbb{R}^3$  como

$$\phi = \sigma_0 x_3 + x_4 - k_i x_1 - k_p x_2 - k_d x_3 \quad (339)$$

quedándonos de esta forma  $\tau$  de (327) como

$$\tau = G(x_2 + q_d) + \sigma_0 x_3 + x_4 - k_i x_1 - k_p x_2 - k_d x_3 + u \quad (340)$$

donde  $k_i$ ,  $k_p$  y  $k_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices diagonales definidas positivas y  $u$  es el control  $H_\infty$  cuyo desarrollo se presenta a continuación.

### 7.4.2 Solución local al problema $H_\infty$

El siguiente análisis local involucra el problema de control lineal  $H_\infty$  para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \quad (341)$$

Dado que el punto de equilibrio para el sistema (333) es el origen podemos aseverar que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial f_1(0)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial x}, & B_1 &= g_1(0) & B_2 &= g_2(0) \\ C_1 &= \frac{\partial h_1(0)}{\partial x}, & D_{12} &= K_{12}(0) \\ C_2 &= \frac{\partial h_2(0)}{\partial x}, & D_{21} &= K_{21}(0). \end{aligned} \quad (342)$$

Las ecuaciones (168) y (169) son subsecuentemente utilizadas para obtener una solución local para el problema de control no lineal como en (334). Una vez que las condiciones (A1) y (A2) se satisfacen y sean  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  soluciones positivas definidas de (168) y (169) con un  $\varepsilon > 0$ . Entonces la salida a retroalimentar

$$\dot{\xi} = f_1(\xi) + f_2(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)] \quad (343)$$

$$u = -B_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi \quad (344)$$

es una solución local del problema de control  $H_\infty$ .

## 7.5 Simulación numérica

El controlador por modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$  propuesto (335) es probado en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab<sup>®</sup>. Los parámetros utilizados en la planta corresponden a los del robot PEGASUS. Se estudia el

modelo dinámico como en (338) basado en la integral del error de posición  $[x_{11}, x_{12}, x_{13}]$ , los errores de posiciones articulares  $[x_{21}, x_{22}, x_{23}]$ , sus velocidades  $[x_{31}, x_{32}, x_{33}]$ , fricciones de Dahl  $[x_{41}, x_{42}, x_{43}]$  y superficies deslizantes  $[s_1, s_2, s_3]$ . Se considerarán los parámetros de la planta Pegasus mostrados en la Tabla 1 y las condiciones iniciales, parámetros del control y perturbaciones contenidos en la Tabla 10.

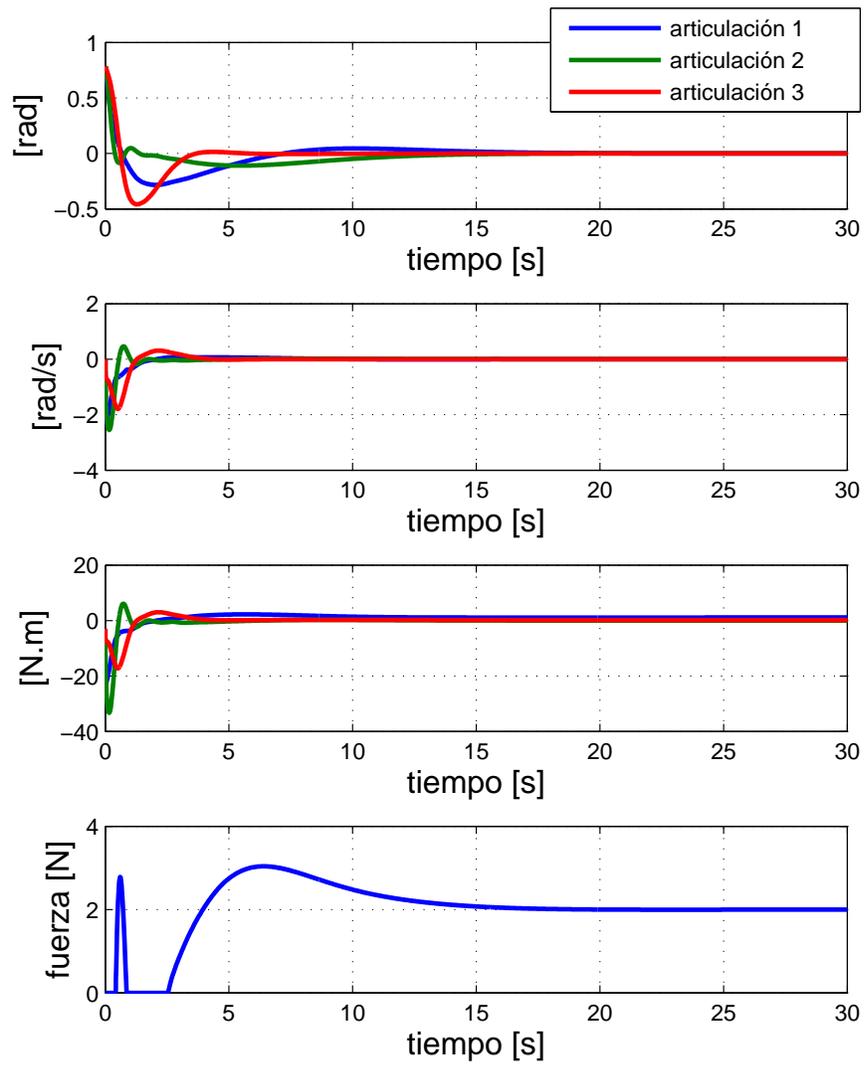


Figura 66. Errores de posición, velocidades, señales de control y fuerza ejercida en el resorte en el robot Pegasus.

Tabla 10: Condiciones iniciales, ganancias del controlador (341) y perturbaciones externas de la planta, control  $H_\infty$  (simulación)

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$x_1(0)$	Integrales de errores de posición	[0,0,0]	rad.s
$x_2(0)$	Errores de posiciones articulares	$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$	rad
$x_3(0)$	Velocidades articulares	[0,0,0]	rad/s
$x_4(0)$	Fricción Dahl articular 1	[0,0,0]	N.m
$\xi_1(0) \dots \xi_{12}(0)$	Estados del filtro	[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	
$k$	Constante de rigidez del resorte 2	100	N/m
$x_{d1}$	Posición euclidiana deseada del efector final	0.57	m
$F_d$	Fuerza deseada en el efector final	2	N
$x_0$	Posición euclidiana de referencia	0.55	m
$q_{d1}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$q_{d3}$	Posición articular deseada del eslabón 1	0	rad
$w_1$	Perturbación en articulación 1	$0.1 \sin(t)$	N.m
$w_2$	Perturbación en articulación 2	$0.1 \cos(t)$	N.m
$w_3$	Perturbación en articulación 3	$0.2 \cos(t/2)$	N.m
$k_i$	Ganancias Integrales	diag{3,3,6}	N/s
$k_p$	Ganancias Proporcionales	diag{3,3,1}	N
$k_d$	Ganancias Derivativas	diag{1,1,8}	N.s
$\sigma_0$	Fricción viscosa	diag{9.84,13.02,9.87}	N.s
$\sigma_1$	Coefficiente de rigidez	diag{0.054,0.053,0.039}	N.m
$f_c$	Nivel de fricción de Coulomb	diag{2.10,1.02,0.78}	N.m
$\gamma$	constante de control $H_\infty$	1.1	
$\varepsilon$	constante de ec. perturbada de Riccati	500	
$\rho$	Coefficiente de peso en diseño de control	1	

Tabla 11: Condiciones iniciales, ganancias del controlador (341) y perturbaciones externas de la planta, control  $H_\infty$  (experimentos)

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$q_1(0)$	Posición articular 1	22.5	grad
$\dot{q}_1(0)$	Velocidad articular 1	0	grad/s
$q_3(0)$	Posición articular 3	45	grad
$\dot{q}_3(0)$	Velocidad articular 3	0	rad/s
$F_d$	Fuerza deseada en el efector final	25	N
$q_{d1}$	Posición articular deseada de la articulación 1	0	rad
$q_{d3}$	Posición articular deseada de la articulación 3	0	rad
$w_1$	Perturbación en articulación 1	$0.1 \sin(t)$	N.m
$w_2$	Perturbación en articulación 2	$0.1 \cos(t)$	N.m
$w_3$	Perturbación en articulación 3	$0.1 \cos(t)$	N.m

## 7.6 Experimentos en el robot Pegasus

Se prueba el controlador  $H_\infty$  propuesto (341) con (344) en la plataforma del robot pegasus, se utiliza el filtro (343) para tener acceso a los estados sin medición. Estos experimentos se llevan a cabo utilizando el robot pegasus. Los parámetros utilizados corresponden a los del robot Pegasus. Los parámetros de la planta Pegasus se encuentran en la Tabla 1, las condiciones iniciales, ganancias de control y perturbaciones se muestran en la Tabla 11:

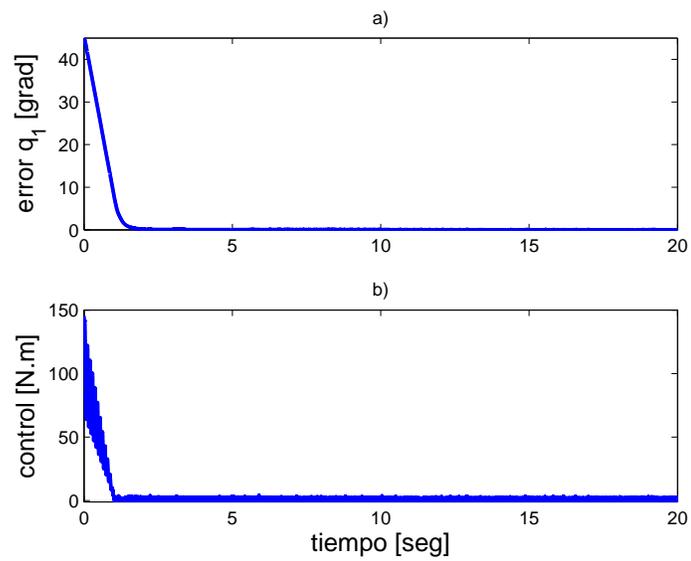


Figura 67. Valores para la articulación  $q_1$  (experimento).

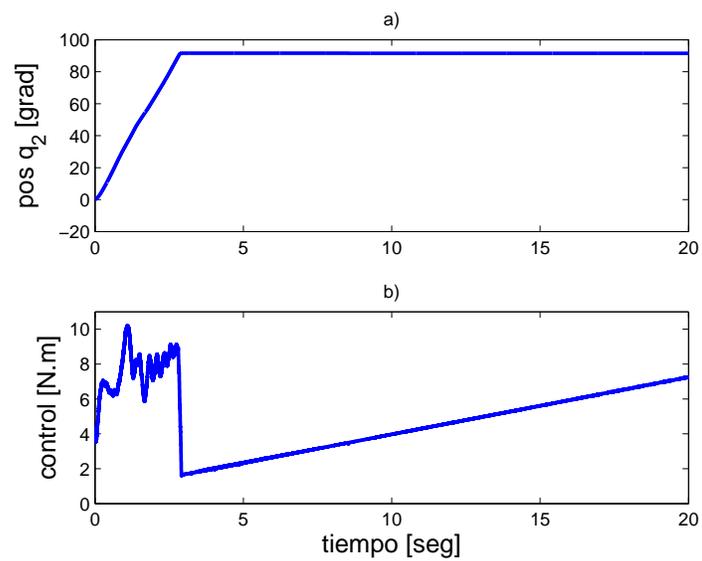


Figura 68. Valores para la articulación  $q_2$  (experimento).

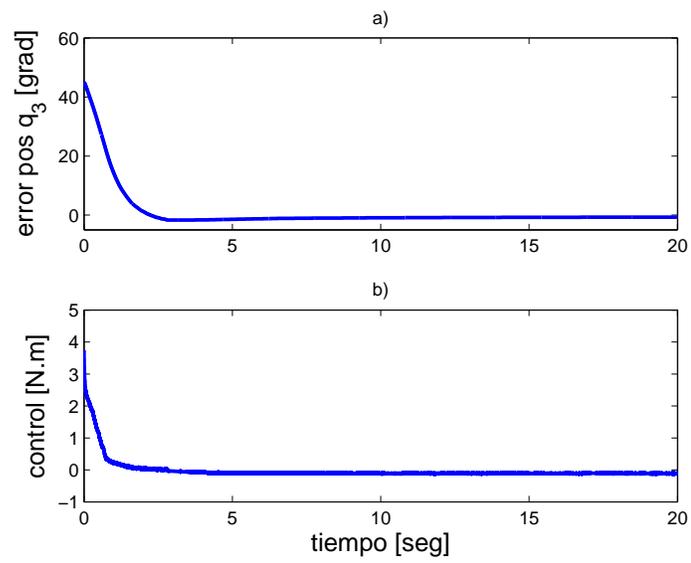


Figura 69. Valores para la articulación  $q_3$  (experimento).

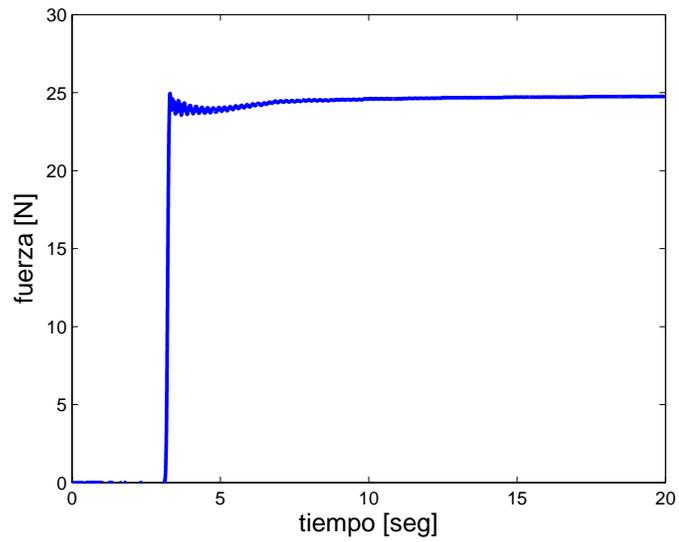


Figura 70. Fuerza medida por el sensor (experimento).

## 7.7 Comentarios

La plataforma experimental consiste en un robot manipulador de tres grados de libertad, el cual opera bajo condiciones restrictivas, a su vez tiene montado un sensor de fuerza en el efector final. Esta plataforma bajo nuestra consideración resulta adecuada para probar los controladores desarrollados para regulación de posición y fuerza. Cabe mencionar que este mecanismo presenta una transmisión de engranes y cadenas, lo que genera un considerable juego de engranes o backlash en cada articulación. Por otro lado se incorporan al sistema algunos elementos reales que no son completamente conocidos como fricción de Coulomb, fricción de Dahl y perturbaciones externas.

Las metodologías de control que fueron utilizadas son modos deslizantes y  $H_\infty$ , este tipo de controladores hacen que el sistema en lazo cerrado sea robusto contra cierto tipo de perturbaciones externas, fricción seca y en algunos casos incertidumbres paramétricas. Para el caso de modos deslizantes se probó que la convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado fue en tiempo finito hacia la superficie deslizante y asintóticamente hacia el punto de equilibrio. A su vez se dio una idea para reducir los posibles rebotes en el sistema, debido a que pueden causar efectos no deseados en éste. Las ganancias de los controladores fueron seleccionadas heurísticamente; por lo tanto, es posible que otros valores en los parámetros de los controladores arrojaran mejores resultados. La robustez y desempeño esperados en los controladores fueron alcanzados al realizarse los experimentos y simulaciones numéricas para el sistema mecánico.

## Conclusiones generales

En esta memoria de tesis se desarrolló un marco práctico para resolver el problema de regulación de posición en sistemas mecánicos con restricciones en la posición. Se utilizaron las metodologías de control por modos deslizantes, control  $H_\infty$  y un control que es la mezcla de ambas técnicas que es el control por modos deslizantes con atenuador  $H_\infty$ .

Se ha considerado que los sistemas mecánicos con restricciones presentan tanto fricción seca tipo Coulomb o de Dahl y fricción viscosa, así como incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas, las cuales pueden estar acopladas en el caso de sistemas completamente actuados o desacopladas para sistemas sub-actuados con respecto a la entrada de control. La consideración de estos aspectos en el problema de regulación para sistemas mecánicos con restricciones es la principal aportación en este trabajo.

A su vez otra contribución es que se modela la restricción de posición de tal forma que se tiene una sola expresión para el modelo dinámico, independientemente si el sistema se encuentra en movimiento libre o movimiento restringido (contacto con la restricción). Este mismo concepto para modelar la restricción se puede extender a restricciones de velocidad o entradas de control, lo que sería interesante abordar en un futuro.

La efectividad en los procedimientos de diseño se apoya mediante resultados experimentales realizados en varios sistemas mecánicos actuados y sub-actuados. En el caso del manipulador Pegasus de tres grados de libertad, el sistema de transmisión de potencia es a través de engranes y debido al contacto entre dientes es fuentes de fricción y *backlash*, por otro lado, sólo se dispone de la información de las posiciones

articulares. También se utilizan como plataforma experimentales la planta rectilínea de Educational Control Products (ECP-210) utilizando diferentes configuraciones para representar un sistema de 1 ó 2 g.d.l. según sea el caso, de igual manera se utilizan circuitos electrónicos que emulan la dinámica de un sistema mecánico con restricciones.

## 7.8 Trabajo a futuro

Un punto a considerar es que la teoría  $H_\infty$  que se maneja en la presente tesis no permite tratar con sistemas discontinuos. El interés de esto es que el modelo discontinuo de fricción de Coulomb es la representación más simple para caracterizar este fenómeno. De igual forma se reduciría el modelo del sistema mecánico en espacio de estados, debido a que al utilizar fricción dinámica de Dahl, se agrega un estado más por cada articulación en el sistema mecánico, lo que repercute directamente en el tiempo de computo a la hora de hacer alguna aplicación.

Por otro lado sería interesante abordar el problema de seguimiento de trayectoria para manipuladores con restricciones en la posición, donde, por citar un ejemplo, el manipulador podría dibujar una trayectoria en una superficie a través del efector final, aplicando una fuerza de contacto predeterminada.

A su vez otro problema relevante sería la sincronización de sistemas mecánicos con restricciones, ya sea con el propósito de interconectarse entre ellos o con la finalidad de transportar algún objeto.

## Referencias bibliográficas

- Acho, L., Orlov, Y., y Solis, V. (2001). Nonlinear measurement feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of time-periodic systems with application to tracking control of robot manipulators. *International Journal of Control*, **74**:P 190-198.
- Aguilar, L., Orlov, Y., y Acho, L. (2003). Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  control of nonsmooth time varying systems with application to friction mechanical manipulators. *Automatica*, **39**:P 1531-1542.
- Anderson, B. y Vreugdenhil, R. (1973). *Network analysis and synthesis*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ.
- Barrientos, A., Peñin, L., Balaguer, C., y Aracil, R. (1997). *Fundamentos de robótica*. McGraw Hill.
- Bartolini, G. (1989). Chattering phenomena in discontinuous control systems. *International Journal of Systems Science*, **20**(12):P 2471-2481.
- Bartolini, G., Ferrara, A., y Usai, E. (1997). Applications of the sub-optimal discontinuous control algorithm for uncertain second order systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, **7**:P 299-310.
- Bartolini, G., Ferrara, A., y Usani, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(2):P 241 -246.
- Bartolini, G., Ferrara, A., Usai, E., y Utkin, V. (2000). On multi-input chattering-free second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(9):P 1711 -1717.
- Bartolini, G., Orani, N., Pisano, A., y Usai, E. (2006). *Higher-order sliding mode approaches for control and estimation in electrical drives*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Berlin.
- Bartolini, G., Fridman, L., Pisano, A., y Usai, E. (2008). *Modern Sliding Mode Control Theory: New Perspectives and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, London.
- Basar, T. y Bernhard, P. (1990). *H-infinity optimal control and related minimax design problems: A dynamic game approach*. Birkhauser, Boston.
- Bourgeot, J.-M. y Delaleau, E. (2007). Fast algebraic impact times estimation for a linear system subject to unilateral constraint. En *46th IEEE Conference on Decision and Control*.

- Branicky, M. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**:P 475–482.
- Brogliato, B. (1999). *Nonsmooth Mechanics*. Springer, London, segunda edición.
- Brogliato, B. y Orhant, P. (1998). Contact stability analysis of a one degree-of-freedom robot. *Dyn. Control*, **8**:P 37–53.
- Brogliato, B., Niculescu, S.-I., y Orhant, P. (1997). On the control of finite-dimensional mechanical systems with unilateral constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**(2):P 200–215.
- Brogliato, B., Mabrouk, M., y Zavala Rio, A. (2006). On the controllability of linear juggling mechanical systems. *Systems and Control Letters*, **55**(4):P 350-367.
- Castaños, F. y Fridman, L. (2006). Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51**(5):P 853 - 858.
- Castaños, F. y Fridman, L. (2011). Dynamic switching surfaces for output sliding mode control: An approach. *Automatica*, **47**(9):P 1957 - 1961.
- Clarke, F. (1983). *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley Interscience, New York.
- Dahl, P. R. (1976). Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA journal*, **14**(12):P 1675-1682.
- Defoort, M., Nollet, F., Floquet, T., y Perruquetti, W. (2006). Higher order sliding mode control of a stepper motor. En *45th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., y Francis, B. (1989). State space solutions to standard  $h_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**:P 831-846.
- Dupree, K., Dixon, W., Hu, G., y Liang, C. (2006). Lyapunov-based control of a robot and mass-spring system undergoing an impact collision. En *Proc. of the 2006 American Control Conference*.
- Emelyanov, S., Korovin, S., y Levantovsky, L. (1986). Higher order sliding modes in the binary control systems. *Soviet Physics, Doklady*, **31**(4):P 291-293.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand sides*. Dordercht, The Netherlands: Kluwer.
- Fridman, L., Moreno, J., y Iriarte, R. (2011). *Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century: State of the Art*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Berlin.

- Ghafari-Kashani, A., Faiz, J., y Yazdanpanah, M. (2010). Integration of non-linear  $\mathcal{H}_\infty$  and sliding mode control techniques for motion control of a permanent magnet synchronous motor. *Electric Power Applications, IET*, **4**(4):P 267 -280.
- Goldsmith, P. (1996). Stability of robot force control applied to unilateral constraints. En *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 1996.*, Vol. 2.
- Haghshenas-Jaryani, M. y Vossoughi, G. (2009). Modeling and sliding mode control of a snake-like robot with holonomic constraints. En *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. ROBIO 2008.*
- Hou, Z. (2003). Bendixson's criterion for systems with non- $c^1$  vector fields. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **133A**:P 393–407.
- Indri, M. y Tornambé, A. (2001). On the design of a position feedback control law for a simple mechanical system subject to impacts. *International Journal of Control*, **74**(8):P 857–872.
- Isidori, A. y Astolfi, A. (1992). Disturbance attenuation and  $\mathcal{H}_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**(9):P 1283–1293.
- Kaveh, P. y Shtessel, Y. B. (2008). *Blood glucose regulation via double loop higher order sliding mode control and multiple sampling rate*. Modern Sliding Mode Control Theory. Springer, Berlin.
- Kazerooni, H. (1990). Contact instability of the direct drive robot when constrained by a rigid environment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**:P 710–714.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, tercer edición.
- Koshkouei, A., Burnham, K., y Zinober, A. (2005). Dynamic sliding mode control design. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, **152**(4):P 392-396.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, **58**:P 1247-1263.
- Levant, A. (1998). Arbitrary-order sliding modes with finite time convergence. *Proc. of the 6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems*.
- Levantovsky, L. (1985). Second order sliding algorithms: their realization. En *Dynamics of Heterogeneous Systems*, Moscow. Institute for System Studies.
- Lian, J. y Zhao, J. (2010). Robust h-infinity integral sliding mode control for a class of uncertain switched nonlinear systems. *Journal of Control Theory and Applications*, **8**(4):P 521–526.

- Lian, K.-Y. y Lin, C.-R. (1998). Sliding-mode motion/force control of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(8):P 1101–1103.
- Loukianov, A., Fridman, L., Cañedo, J., Sanchez, E., y Soto-Cota, A. (2008). *Higher order SM block-control of nonlinear systems with unmodeled actuators. Application to electric power systems and electrohydraulic servo-drives*. Modern Sliding Mode Control Theory. Springer, Berlin.
- Loukianov, A., Rivera, J., Orlov, Y., y Morales Teraoka, E. (2009). Robust trajectory tracking for an electrohydraulic actuator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **56**(9):P 3523 -3531.
- Mansard, N. y Khatib, O. (2008). Continuous control law from unilateral constraints. En *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*.
- Mansard, N., Khatib, O., y Kheddar, A. (2009). A unified approach to integrate unilateral constraints in the stack of tasks. *IEEE Transactions on Robotics*, **25**(3):P 670–685.
- Melin, J. (2005). Some examples describing the need of modifying the bendixson criterion for piecewise  $c^1$ -systems. *Nonlinear Analysis*, **62**:P 1516–1526.
- Merzouki, R. y M'Sirdi, N. (2004). Compensation of friction and backlash effects in an electrical actuator. *J. Systems and Control Engineering*, **218**:P 75-84.
- Morarescu, I. y Brogliato, B. (2010). Trajectory tracking control of multiconstraint complementarity lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55**(6):P 1300 -1313.
- Noh, C. y Smith, I. (1980). Chattering conditions in electromagnetic contactors. *IEE Proceedings B, Electric Power Applications*, **127**(5):P 324 -328.
- Nowacka-Leverton, A. y Bartoszewicz, A. (2008). Elastic and conventional constraints in sliding mode control of second order system. En *Industrial Electronics, IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*.
- Or, Y. y Ames, A. (2011). Stability and completion of zeno equilibria in lagrangian hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **56**(6):P 1322 -1336.
- Orlov, Y. (2009). *Discontinuous systems – Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer, London.
- Orlov, Y., Aguilar, L., y Cadiou, J. C. (2003). Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors. *International Journal of Control*, **76**(9-10):P 959-967.

- Orlov, Y., Aguilar, L., Aho, L., y Ortiz, A. (2008). *Robust orbital stabilization of pendubot: algorithm synthesis, experimental verification, and application to swing up and balancing control*. Modern Sliding Mode Control Theory. Springer, Berlin.
- Paden, B. y Sastry, S. (1987). A calculus for computing filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **34**:P 73–81.
- Patel, N., Edwards, C., y Spurgeon, S. (2006). *A sliding mode scheme for optimal braking and estimation of road/tyre friction*. Advances in variable structure and sliding mode control (Lecture Notes in Control and Information Sciences). Springer, Berlin.
- Pekarek, D. y Murphey, T. (2011). A backwards error analysis approach for simulation and control of nonsmooth mechanical systems. En *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*.
- Perez, M., Jimenez, E., y Camacho, E. (2010). Design of an explicit constrained predictive sliding mode controller. *Control Theory Applications, IET*, **4**(4):P 552 -562.
- Pisano, A. y Usai, E. (2008). *Contact force regulation in wire-actuated pantographs*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Berlin.
- Potini, A., Tornambe, A., Menini, L., Abdallah, C., y Dorato, P. (2006). Finite-time control of linear mechanical systems subject to non-smooth impacts. En *Proc. IEEE Conf. 14th Mediterranean Control and Automation*.
- Punta, E. (2006). Multivariable second order sliding mode control of mechanical systems. En *2006 45th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Ravi, R., Nagpal, K., y Khargonekar, P. (1991). H-infinity control of linear time-varying systems: A state-space approach. *SIAM Journal Control and Optimization*, **29**:P 1394-1413.
- Rengifo, C., Aoustin, Y., Chevallereau, C., y Plestan, F. (2009). A penalty-based approach for contact forces computation in bipedal robots. En *9th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*.
- Rosas, D., Alvarez, J., y Fridman, L. (2007). Robust observation and identification of ndof lagrangian systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **17**:P 842-861.
- Rubagotti, M. y Ferrara, A. (2010). Second order sliding mode control of a perturbed double integrator with state constraints. En *American Control Conference (ACC), 2010*.

- Sabanovic, A., Abidi, K., y Onal, C. (2006). *Sliding mode control application to nano positioners*. Advances in variable structure and sliding mode control (Lecture Notes in Control and Information Sciences). Springer, Berlin.
- Sabanovic, A., Elitas, M., y Ohnishi, K. (2008). Sliding modes in constrained systems control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **55**:P 3332–3339.
- Shen, J.-C. (2002).  $\mathcal{H}_\infty$  control and sliding mode control of magnetic levitation system. *Asian Journal of Control*, **4**(3):P 333 -340.
- Shevitz, D. y Paden, B. (1994). Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(9):P 1910–1914.
- Slotine, J.-J. E. (1984). Sliding controller design for non-linear systems. *International Journal of Control*, **40**(2):P 421-434.
- Stassinopoulos, G. y Vinter, R. (1977). On the dimension of the chattering basis for relaxed controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **22**(3):P 470 - 471.
- Tornambé, A. (1996). Global regulation of a planar robot arm striking a surface. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**:P 1517–1521.
- Tseng, C.-S. (2005). Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  adaptive tracking control design for uncertain constrained robots. *Asian Journal of Control*, **7**(3):P 296–309.
- Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **22**(2):P 212-222.
- Utkin, V. (1978). *Sliding Modes and Their Applications*. Mir, Moscow.
- Utkin, V. (1992). *Sliding modes in control optimization*. Springer, Berlín.
- Van der Schaft, A. (1992).  $l_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**(6):P 770 -784.
- Vidal-Idiarte, E., Martinez-Salamero, L., Calvente, J., y Romero, A. (2006). An  $\mathcal{H}_\infty$  control strategy for switching converters in sliding-mode current control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, **21**(2):P 553 - 556.
- Xiaoqiu, L. y DeCarlo, R. (2001). Memoryless sliding mode control of uncertain time-delay systems. En *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, Vol. 6.
- Zinober, A., Shtessel, Y., y Fossas, E. (2006). *Nonminimum Phase Output Tracking Control Strategies for DC-to-DC Power Converters*, Vol. 334 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, Berlin.

## Apéndice A

### Modelo dinámico de un robot manipulador de 2 g.d.l. con un muro como restricción

En este apéndice se obtienen las expresiones para el modelo dinámico de un robot manipulador de 2 g.d.l. con un muro como restricción.

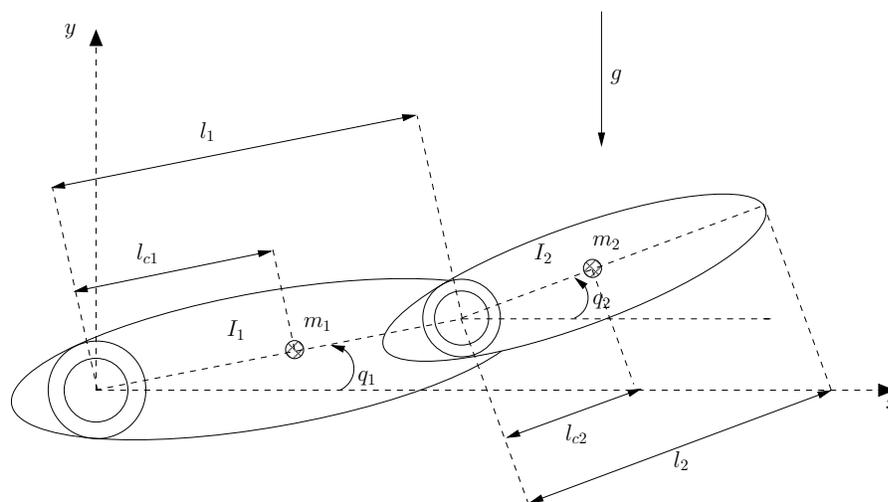


Figura 71. Robot manipulador de 2 g.d.l.

Considérese el brazo mecánico de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 71. El brazo manipulador está formado por 2 eslabones rígidos de longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , y masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Las uniones 1 y 2 son rotacionales. Los desplazamientos del robot se llevarán a cabo en el plano vertical  $x-y$  mostrado en la Figura 71. La distancia entre los ejes de giro y los centros de masas se denota por  $l_{c1}$  y  $l_{c2}$  respectivamente. Por último,  $I_1$  e  $I_2$  expresan los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masas y que es perpendicular al plano  $x-y$ . Los g.d.l. están

asociados a los ángulos  $q_1$  que se mide desde la posición vertical hacia abajo, y  $q_2$  que se mide a partir de la extensión del eslabón 1 hasta el eslabón 2, siendo ambos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. El vector de posiciones articulares  $q(t)$  se define como:

$$q(t) = [ q_1(t) \quad q_2(t) ]^T.$$

La energía cinética  $K(q, \dot{q})$  para este brazo manipulador puede descomponerse en la suma de dos partes:  $K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q})$  donde  $K_1(q, \dot{q})$  y  $K_2(q, \dot{q})$  son las energías cinéticas asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. A continuación se obtienen dichas expresiones.

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 1 expresadas en el plano  $x$ - $y$  son:

$$x_1 = l_{c1} \cos(q_1),$$

$$y_1 = l_{c1} \text{sen}(q_1).$$

El vector velocidad  $v_1$  del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la rapidez  $v_1^T v_1$  del centro de masa resulta ser:

$$v_1^T v_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2.$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al movimiento del eslabón 1 se obtiene como:

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (345)$$

Por otro lado, las coordenadas del centro de masa del eslabón 2 expresadas en el plano

$x - y$  son:

$$x_2 = l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_2),$$

$$y_2 = l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_{c2} \operatorname{sen}(q_2).$$

El vector velocidad  $v_2$  del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen}(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, empleando las identidades trigonométricas  $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$  y  $\operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2) + \cos(q_1) \cos(q_2) = \cos(q_1 - q_2)$  se obtiene finalmente la rapidez al cuadrado  $v_2^T v_2$  del centro de masa del eslabón 2:

$$v_2^T v_2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2)$$

de donde:

$$\begin{aligned} K_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2, \\ &= \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2. \end{aligned} \quad (346)$$

De forma similar, la energía potencial puede descomponerse como la suma de 2 partes:  $U(q) = U_1(q) + U_2(q)$  donde  $U_1(q)$  y  $U_2(q)$  son las energías potenciales asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Se tiene entonces que

$$U_1(q) = m_1 l_{c1} g \operatorname{sen}(q_1) \quad (347)$$

y

$$U_2(q) = m_2 l_1 g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_2). \quad (348)$$

A partir de las ecuaciones (345)-(348) puede obtenerse el lagrangiano:

$$\begin{aligned}
L(q, \dot{q}) &= K(q, \dot{q}) - U(q), \\
&= K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) - U_1(q) - U_2(q), \\
&= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
&\quad - [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \text{sen}(q_1) - m_2 g l_{c2} \text{sen}(q_2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2.
\end{aligned}$$

De esta última ecuación pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_2 + I_1 \dot{q}_1. \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1] \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
&\quad + m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2. \\
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1). \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_1 + I_2 \dot{q}_2. \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 \\
&\quad + m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_2 \ddot{q}_2. \\
\frac{\partial L}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g l_{c2} \cos(q_2).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el robot manipulador se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2$$

de donde finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1] \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_2 \\
&\quad + m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1)
\end{aligned} \tag{349}$$

y

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 \\ & + 2m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_2 \ddot{q}_2 + m_2 g l_{c2} \cos(q_2) \end{aligned} \quad (350)$$

siendo  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , los pares que actúan en las uniones 1 y 2. Las ecuaciones (349) y (350) pueden ser expresadas en coordenadas de espacio como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (351)$$

donde  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^2$  representan la posiciones angulares, velocidades y aceleraciones de los eslabones del robot, respectivamente,  $M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  representa la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  representa la fuerza centrífuga y de Coriolis,  $g(q) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de pares gravitacionales y  $\tau \in \mathbb{R}^2$  representa el par de entradas de control. La ecuación (351) se puede representar de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} = \tau,$$

donde

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1,$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2),$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2),$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2.$$

$$\begin{aligned}
C_{11}(q, \dot{q}) &= 0, \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_2, \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1 + 2m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_2, \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= 2m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_1 - q_2) \dot{q}_1, \\
g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1), \\
g_2(q) &= m_2 g l_{c2} \cos(q_2).
\end{aligned}$$

Las variables de estado adecuadas para escribir el modelo dinámico del robot son las posiciones  $q = [q_1, q_2]^T$  y las velocidades  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$ . En términos de estas variables de estado, el modelo dinámico del robot puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \end{bmatrix}.$$

Ahora se asumirá que el sistema mecánico presenta una restricción en la posición (ver

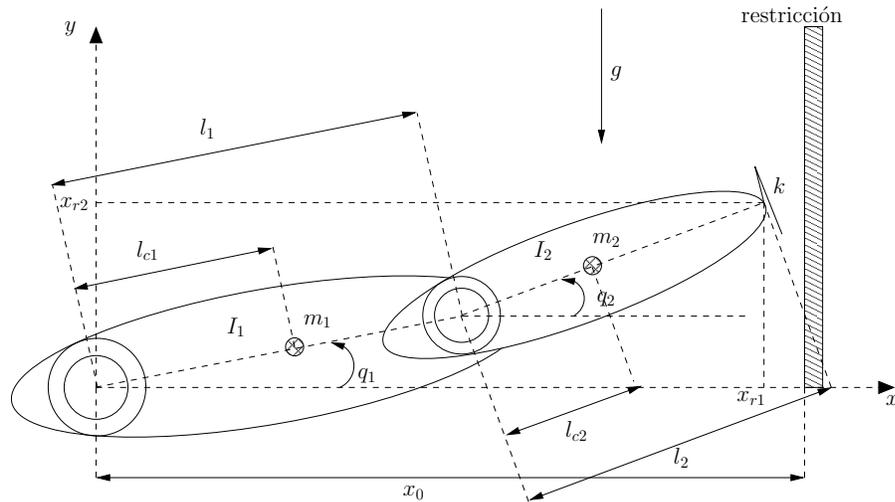


Figura 72. Robot manipulador de 2 g.d.l. y restricción en la posición.

Figura 72), la cual se representa en el modelo dinámico (352) como una fuerza  $\tau_c$  que

afecta al sistema, quedándonos el modelo de la siguiente manera

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + \tau_c = \tau. \quad (352)$$

La posición euclidiana entre el origen del robot y la restricción está dada por  $x_0$ , la posición del efector final del robot con respecto al eje  $x$  está dada por  $x_{r1}$ , a su vez la distancia del efector final con respecto al eje  $y$  está dada por  $x_{r2}$ , las cuales se denotan como  $x_r(t) = [x_{r1}(t), x_{r2}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ . Se agrega un resorte en la punta del efector final con una constante de rigidez  $k$ , y actúa como sensor de fuerza. Una forma de representar la fuerza generada en el resorte es utilizando la ley de Hooke  $F = kx$ .

Se genera un impacto entre el efector final del robot y la restricción cuando  $x_{r1} \geq x_0$  donde  $x_{r1} = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2)$ . El impacto genera fuerzas de igual magnitud y sentidos opuestos entre el robot y la restricción. Específicamente, la fuerza de impacto actuando sobre el resorte  $F_c \in \mathbb{R}$ , se define como

$$F_c = \frac{k}{2} (x_{r1} - x_0 + |x_{r1} - x_0|). \quad (353)$$

La fuerza de impacto actuando sobre los eslabones rígidos del robot produce un par, denotado por  $\tau_c(x_r, q) \in \mathbb{R}^2$ , con la siguiente forma

$$\tau_c = -F_c \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) \\ l_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (354)$$

con este término se completa el modelo (352) para el robot manipulador de 2g.d.l con restricción en la posición.

## Apéndice B

### Modelo dinámico del robot manipulador Pegasus de 3 g.d.l. con un muro como restricción

En este apéndice se obtienen las expresiones para el modelo dinámico del robot manipulador Pegasus de 3 g.d.l. con un muro como restricción.

Considérese el brazo mecánico de 3 g.d.l. mostrado en la Figura 73. El brazo manipulador está formado por dos eslabones rígidos de longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , y masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Sus tres uniones entre eslabones son rotacionales. Los desplazamientos del robot se llevarán a cabo en el plano vertical  $x$ - $y$ - $z$  mostrado en la Figura 73. La distancia entre los ejes de giro y los centros de masas se denota por  $l_{c1}$  y  $l_{c2}$ , respectivamente. Por último,  $I_1$  e  $I_2$  expresan los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masas y que es perpendicular al plano  $x$ - $y$ . Los g.d.l. están asociados a los ángulos  $q_1$  que es la rotación sobre su propio eje en el sentido de las manecillas del reloj,  $q_2$  que se mide desde la posición vertical hacia abajo, y  $q_3$  que se mide a partir de la extensión del eslabón 1 hasta el eslabón 2, siendo ambos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. El vector de posiciones articulares  $q(t)$  se define como:

$$q(t) = [ q_1(t) \quad q_2(t) \quad q_3(t) ]^T.$$

La energía cinética  $K(q, \dot{q})$  para este brazo manipulador puede descomponerse en la suma de dos partes:  $K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q})$  donde  $K_1(q, \dot{q})$  y  $K_2(q, \dot{q})$  son las energías cinéticas asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. A continuación se

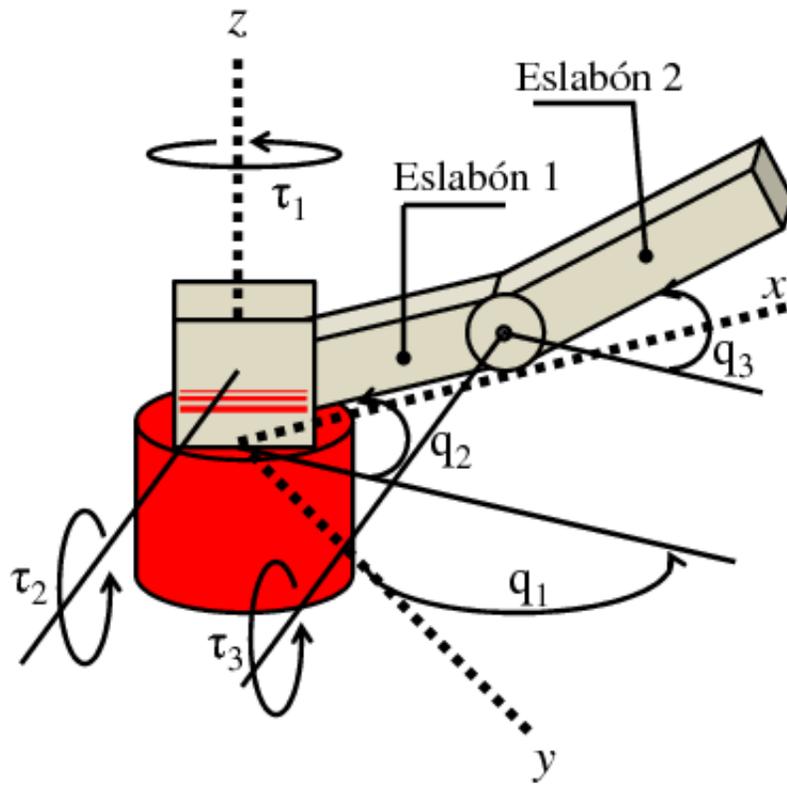


Figura 73. Robot PEGASUS con 3 g.d.l.

obtienen dichas expresiones.

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 1 expresadas en el plano  $x, y, z$  son:

$$x_1 = l_{c1} \cos(q_1) \cos(q_2),$$

$$y_1 = l_{c1} \text{sen}(q_1) \cos(q_2),$$

$$z_1 = l_{c1} \text{sen}(q_2).$$

El vector velocidad  $v_1$  del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 - l_{c1} \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\ -l_{c1} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 + l_{c1} \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \cos(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la rapidez al cuadrado  $v_1^T v_1$  del centro de masa resulta ser:

$$v_1^T v_1 = \dot{x}_1^T \dot{x}_1 + \dot{y}_1^T \dot{y}_1 + \dot{z}_1^T \dot{z}_1 = l_{c1}^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_1^2 + l_{c1}^2 \dot{q}_2^2.$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al movimiento del eslabón 1 se obtiene como:

$$\begin{aligned} K_1(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{q}_2^2, \\ &= \frac{1}{2}m_1 l_{c1}^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2 \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (355)$$

donde  $I$  es la inercia correspondiente a cada articulación. Por otro lado, las coordenadas del centro de masa del eslabón 2 expresadas en el plano  $x - y - z$  son:

$$\begin{aligned} x_2 &= [l_1 \cos(q_2) + l_{c2} \cos(q_3)] \cos(q_1), \\ y_2 &= [l_1 \cos(q_2) + l_{c2} \cos(q_3)] \operatorname{sen}(q_1), \\ z_2 &= l_1 \operatorname{sen}(q_2) + l_{c2} \operatorname{sen}(q_3). \end{aligned}$$

El vector velocidad  $v_2$  del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$\begin{aligned} v_2 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 - l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 - l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \\ -l_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 + l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \\ l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la rapidez al cuadrado  $v_2^T v_2$  del centro de masa del eslabón 2 es

$$\begin{aligned} v_2^T v_2 &= ((-l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 \\ &\quad - l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3)^2 + (-l_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 + l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\ &\quad + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3)^2 + (l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_3)^2)^2 \end{aligned}$$

de donde  $K_2(q, \dot{q})$ :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2}I_3 \dot{q}_3^2, \\
&= \frac{1}{2}m_2 ((-l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 \\
&\quad - l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3)^2 + (-l_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 + l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\
&\quad + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3)^2 + (l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_3)^2) + \frac{1}{2}I_3 \dot{q}_3^2.
\end{aligned} \tag{356}$$

De forma similar, la energía potencial puede descomponerse como la suma de 2 partes:

$U(q) = U_1(q) + U_2(q)$  donde  $U_1(q)$  y  $U_2(q)$  son las energías potenciales asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Se tiene entonces que

$$U_1(q) = m_1 l_{c1} g \operatorname{sen}(q_2) \tag{357}$$

y

$$U_2(q) = m_2 l_1 g \operatorname{sen}(q_2) + m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_3). \tag{358}$$

A partir de las ecuaciones (355)-(358) puede obtenerse el lagrangiano:

$$\begin{aligned}
L(q, \dot{q}) &= K(q, \dot{q}) - U(q), \\
&= K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) - U_1(q) - U_2(q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \left( \dot{q}_1^2 (\cos(q_2))^2 + \dot{q}_2^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 - m_1 l_{c1} g \operatorname{sen}(q_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 ((-l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 - l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\
&\quad - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 - l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3)^2 \\
&\quad + (-l_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 + l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\
&\quad + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 - l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3)^2 \\
&\quad + (l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_3)^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} I_3 \dot{q}_3^2 - m_2 l_1 g \operatorname{sen}(q_2) - m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_3)
\end{aligned}$$

De esta última ecuación pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & m_1 l_{c1}^2 (\cos(q_2))^2 \dot{q}_1 + I_1 \dot{q}_1 + m_2 l_1^2 (\text{sen}(q_1))^2 (\cos(q_2))^2 \dot{q}_1 \\
& + 2 m_2 l_1 (\text{sen}(q_1))^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) \\
& + m_2 l_1^2 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& + m_2 l_{c2}^2 (\text{sen}(q_1))^2 (\cos(q_3))^2 \dot{q}_1 \\
& + m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& - m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) (\text{sen}(q_2))^2 \dot{q}_2 \cos(q_1) \\
& + m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 (\text{sen}(q_2))^2 \dot{q}_1 \\
& + 2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) \\
& + m_2 l_{c2}^2 (\cos(q_1))^2 (\cos(q_3))^2 \dot{q}_1 \\
& - m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] = & \ddot{q}_1 m_2 l_{c2}^2 (\cos(q_1))^2 (\cos(q_3))^2 \\
& - 3 \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\text{sen}(q_1))^2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 (\text{sen}(q_2))^2 \\
& + \ddot{q}_1 I1 + \ddot{q}_1 m_2 l_{c2}^2 (\text{sen}(q_1))^2 (\cos(q_3))^2 + \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 (\text{sen}(q_1))^2 (\cos(q_2))^2 \\
& + 3 \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \cos(q_2) \\
& + 4 m_2 l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 l_{c2} \cos(q_3) \cos(q_1) \\
& - 2 m_2 l_1^2 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_2^2 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& + 2 \ddot{q}_1 m_2 l_1 (\text{sen}(q_1))^2 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \\
& - 2 \dot{q}_3 m_2 l_{c2}^2 (\cos(q_1))^2 \cos(q_3) \dot{q}_1 \text{sen}(q_3) \\
& - 2 \dot{q}_3 m_2 l_{c2}^2 (\text{sen}(q_1))^2 \cos(q_3) \dot{q}_1 \text{sen}(q_3) \\
& - 4 m_2 l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 l_{c2} \cos(q_3) \text{sen}(q_1) \\
& - 3 \dot{q}_1 m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \text{sen}(q_2) \\
& + \dot{q}_1 m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_2) \\
& + \ddot{q}_2 m_2 l_1^2 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& + 2 \ddot{q}_1 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \\
& - 3 \dot{q}_1 m_2 l_{c2} (\text{sen}(q_1))^2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_2) \\
& + m_2 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3^2 l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) + 2 \dot{q}_2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) \\
& - 2 \dot{q}_2 m_2 l_1 (\text{sen}(q_1))^2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) + \dot{q}_1 m_2 l_{c2} (\text{sen}(q_1))^2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \text{sen}(q_2) \\
& - \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& - \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \\
& + \ddot{q}_1 m_1 l_{c1}^2 (\cos(q_2))^2 - m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3^2 l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \\
& - \ddot{q}_3 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) + \ddot{q}_3 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& - \ddot{q}_2 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) (\text{sen}(q_2))^2 \cos(q_1) - 2 \dot{q}_2 m_1 l_{c1}^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \text{sen}(q_2) \\
& - m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) (\text{sen}(q_2))^2 \dot{q}_2^2 \cos(q_1) + m_2 l_1^2 \cos(q_1) (\cos(q_2))^2 \dot{q}_2^2 \text{sen}(q_1) \\
& + \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\text{sen}(q_1))^2 (\text{sen}(q_2))^2 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 (\text{sen}(q_2))^2 \dot{q}_2 \\
& - 2 m_2 l_1^2 \cos(q_1) (\text{sen}(q_2))^2 \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_1) + 2 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) (\cos(q_2))^2 \dot{q}_1^2 \cos(q_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= -m_2 l_1 \dot{q}_1 (-\operatorname{sen}(q_2) + \cos(q_2)) (-l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2)) \\
&\quad -l_1 (\cos(q_1))^2 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 + l_1 (\operatorname{sen}(q_1))^2 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - l_{c2} (\cos(q_1))^2 \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \\
&\quad -2 \operatorname{sen}(q_1) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) + (\operatorname{sen}(q_1))^2 l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \\
&\quad -l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_2 + I_2 \dot{q}_2 + m_2 l_1^2 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 + m_2 l_1^2 \dot{q}_2 \\
&\quad -m_2 l_1^2 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_1 + m_2 l_1^2 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_1) \dot{q}_1 (\cos(q_2))^2 \\
&\quad +m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 + m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_3.
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = -m_2 l_1^2 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 (\operatorname{sen}(q_1) - \cos(q_1)) (\operatorname{sen}(q_1) + \cos(q_1)) (-\operatorname{sen}(q_2) + \cos(q_2)).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_2} &= -m_1 l_{c1}^2 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \operatorname{sen}(q_2) - m_1 l_{c1} g \cos(q_2) \\
&\quad +\frac{1}{2} m_2 ((-2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 - 2 l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - 2 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 \\
&\quad -2 l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3) (l_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 - l_1 \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2) \\
&\quad +(-2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 + 2 l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 + 2 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_1 \\
&\quad -2 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3) (-l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_1 \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1) \\
&\quad -(2 l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + 2 l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_3) l_1 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2) - m_2 l_1 g \cos(q_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} &= m_2 l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\
&\quad +m_2 l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) l_1 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - m_2 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\
&\quad +\dot{q}_3 m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} \cos(q_3) l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + I_3 \dot{q}_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right] &= 2 m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \\
&+ \dot{q}_3 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\
&+ \ddot{q}_1 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
&+ \ddot{q}_2 m_2 l_{c2} \cos(q_3) l_1 \cos(q_2) - m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 + \ddot{q}_3 I_3 \\
&+ \ddot{q}_3 m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2^2 \\
&+ \dot{q}_3 m_2 l_{c2} \cos(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\
&+ \ddot{q}_2 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) + m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \\
&- 2 m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 l_{c2} \cos(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2^2 \\
&- \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\
&- \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\
&- \ddot{q}_1 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_2) \\
&- \dot{q}_3 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \cos(q_3) l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\
&- \dot{q}_3 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_3} &= -m_2 l_{c2} (l_1 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_3) \\
&- l_1 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_3) (\cos(q_1))^2 - l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3 \\
&+ l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_3) - l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \cos(q_3) \dot{q}_3 \\
&+ l_1 (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_3) + l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3 \\
&+ \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + g \cos(q_3)).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el robot manipulador se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, 3$$

de donde finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \ddot{q}_2 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) \cos(q_1) (\cos(q_2))^2 - m_2 l_1^2 \cos(q_1) \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_1) \\
& - m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) \dot{q}_2^2 \cos(q_1) + 2 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) (\cos(q_2))^2 \dot{q}_1^2 \cos(q_1) \\
& + 2 m_2 l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 l_{c2} \cos(q_3) \cos(q_1) \\
& - 2 m_2 l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 l_{c2} \cos(q_3) \text{sen}(q_1) \\
& + 4 \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \cos(q_2) + 2 \dot{q}_1 m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_2) \\
& - 2 \dot{q}_1 m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \text{sen}(q_2) + 2 m_2 l_1^2 \cos(q_1) (\cos(q_2))^2 \dot{q}_2^2 \text{sen}(q_1) \\
& - 2 m_2 l_1^2 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_2^2 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) - 2 \ddot{q}_1 m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) (\cos(q_1))^2 \\
& - 2 \dot{q}_2 m_1 l_{c1}^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \text{sen}(q_2) - 2 \dot{q}_2 m_2 l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) \\
& + 2 \dot{q}_2 m_2 l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) (\cos(q_1))^2 - 2 \dot{q}_1 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \cos(q_2) \\
& - 2 \dot{q}_3 m_2 l_{c2}^2 \cos(q_3) \dot{q}_1 \text{sen}(q_3) - 2 \dot{q}_1 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_2) \\
& + \ddot{q}_1 I_1 - \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \\
& - \ddot{q}_3 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) - \ddot{q}_2 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) \cos(q_1) \\
& - \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& + m_2 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3^2 l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& - m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3^2 l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) + \ddot{q}_2 m_2 l_1^2 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\
& + \ddot{q}_3 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) + \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_2))^2 \\
& + \ddot{q}_1 m_1 l_{c1}^2 (\cos(q_2))^2 + \ddot{q}_1 m_2 l_{c2}^2 (\cos(q_3))^2 + \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 \\
& + 2 \dot{q}_2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) \\
& + 2 \ddot{q}_1 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) - 2 \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_2))^2 (\cos(q_1))^2 \\
& + 2 \ddot{q}_1 m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3)
\end{aligned}$$

(359)

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \ddot{q}_2 m_2 l_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2 m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 (\cos(q_1))^2 (\cos(q_2))^2 \\
& + m_2 l_1 \text{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_3^2 + \ddot{q}_3 m_2 l_1 \text{sen}(q_2) l_{c2} \text{sen}(q_3) \\
& + m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 + l_1 m_2 g \cos(q_2) \\
& - m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \cos(q_3) \dot{q}_1^2 l_1 \cos(q_2) \\
& + m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) \dot{q}_3 l_1 \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\
& + \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_1) \cos(q_2) + \ddot{q}_3 m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \\
& + m_1 l_{c1}^2 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_2) + m_2 l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_1^2 l_1 \text{sen}(q_2) \\
& - m_2 l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_1^2 l_1 \text{sen}(q_2) (\cos(q_1))^2 - \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) \cos(q_1) \\
& + \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) \cos(q_1) (\cos(q_2))^2 + \ddot{q}_2 m_1 l_{c1}^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_2) \\
& - m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 (\cos(q_2))^2 - 2 m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 (\cos(q_1))^2 + \ddot{q}_2 I_2 \\
& - m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \text{sen}(q_3) \dot{q}_3^2
\end{aligned} \tag{360}$$

y

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & \ddot{q}_3 I_3 + \ddot{q}_1 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) + m_2 l_{c2} g \cos(q_3) \\
& + m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2 m_2 l_{c2} \cos(q_3) l_1 \cos(q_2) \\
& - \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\
& - \dot{q}_2 m_2 l_{c2} \cos(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 - m_2 l_{c2} \cos(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2^2 \\
& - \ddot{q}_1 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) - m_2 l_{c2} (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \\
& + \ddot{q}_2 m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) + \ddot{q}_3 m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \\
& + m_2 l_{c2} \text{sen}(q_3) l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2^2 + m_2 l_{c2}^2 \cos(q_3) \dot{q}_1^2 \text{sen}(q_3)
\end{aligned} \tag{361}$$

siendo  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ , los pares que actúan en las uniones 1 y 2. Las ecuaciones (359), (360) y (361) pueden ser expresadas en coordenadas de espacio como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (362)$$

La ecuación (362) se puede representar de igual forma de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{22}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \end{bmatrix} = \tau,$$

donde

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= 2 m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) - 2 m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) (\cos(q_1))^2 \\ &\quad - 2 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 (\cos(q_2))^2 + 2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \text{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \\ &\quad + I_1 + m_1 l_{c1}^2 (\cos(q_2))^2 + m_2 l_{c2}^2 (\cos(q_3))^2 + m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 \\ &\quad + m_2 l_1^2 (\cos(q_2))^2, \end{aligned}$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_1^2 \text{sen}(q_1) \cos(q_1) (-1 + (\cos(q_2))^2 + \cos(q_2) \text{sen}(q_2)),$$

$$M_{13}(q) = -m_2 l_1 \cos(q_1) l_{c2} \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_3) (\text{sen}(q_2) - \cos(q_2)),$$

$$M_{21}(q) = M_{12}(q),$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + I_2,$$

$$M_{23}(q) = m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2 - q_3),$$

$$M_{31}(q) = M_{13}(q),$$

$$M_{32}(q) = M_{23}(q),$$

$$M_{33}(q) = I_3 + m_2 l_{c2}^2,$$

$$\begin{aligned}
C_{11}(q, \dot{q}) = & -2 m_2 l_1^2 \cos(q_2) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - 2 \dot{q}_2 m_1 l c_1^2 \cos(q_2) \operatorname{sen}(q_2) \\
& -2 \dot{q}_1 m_2 l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \operatorname{sen}(q_1) + 2 \dot{q}_1 m_2 l_1^2 \operatorname{sen}(q_1) (\cos(q_2))^2 \cos(q_1) \\
& +4 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 - 2 \dot{q}_3 m_2 l_{c2}^2 \cos(q_3) \operatorname{sen}(q_3) \\
& -2 \dot{q}_2 m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) + 2 \dot{q}_2 m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) (\cos(q_1))^2 \\
& -2 m_2 l_1 \cos(q_2) l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 + 2 \dot{q}_1 m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \cos(q_1) \\
& -2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \\
& +2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 + 2 \dot{q}_2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \\
& -\dot{q}_1 m_2 l_1^2 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_1) \\
C_{12}(q, \dot{q}) = & -2 m_2 l_1^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_2) - 2 m_1 l c_1^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_2) \\
& +4 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_2) - 2 m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) \\
& +2 m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) (\cos(q_1))^2 + 2 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 l_{c2} \cos(q_3) \\
& -m_2 l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \operatorname{sen}(q_1) - m_2 l_1^2 \cos(q_1) \dot{q}_2 \operatorname{sen}(q_1) \\
& -m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 + 2 m_2 l_1^2 \operatorname{sen}(q_1) (\cos(q_2))^2 \cos(q_1) \dot{q}_2 \\
& -2 m_2 l_1^2 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_{c2} (2 l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_3) + 2 l_1 \cos(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_3)) \\
&\quad + 2 l_1 (\cos(q_1))^2 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_3) + l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 \operatorname{sen}(q_3) \operatorname{sen}(q_1) \\
&\quad + \dot{q}_2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) - 2 l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_3) \\
&\quad + l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3 - l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \cos(q_1) \cos(q_3) \dot{q}_3) \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= \dot{q}_1 m_2 l_1^2 - \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_2))^2 - 2 \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 \\
&\quad + m_2 l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 - \dot{q}_1 m_2 l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_3) \\
&\quad + \dot{q}_1 m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) - \dot{q}_1 m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_2) l_{c2} \cos(q_3) (\cos(q_1))^2 \\
&\quad + 2 \dot{q}_1 m_2 l_1^2 (\cos(q_1))^2 (\cos(q_2))^2 + m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) l_{c2} \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \\
&\quad + \dot{q}_1 m_1 l_{c1}^2 \cos(q_2) \operatorname{sen}(q_2)) \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= 0 \\
C_{23}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c2} (\cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) - \cos(q_2) \operatorname{sen}(q_3) \dot{q}_3 \\
&\quad + \operatorname{sen}(q_2) \cos(q_3) \dot{q}_3 + \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3)) \\
C_{31}(q, \dot{q}) &= m_2 l_{c2} \operatorname{sen}(q_3) \left( l_1 (\cos(q_1))^2 \cos(q_2) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_3) \dot{q}_1 \right. \\
&\quad + l_1 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 - l_1 (\cos(q_1))^2 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 - \dot{q}_2 l_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \operatorname{sen}(q_1) \\
&\quad \left. - \dot{q}_2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \cos(q_1) \right) \\
C_{32}(q, \dot{q}) &= (\cos(q_2) \dot{q}_2 \operatorname{sen}(q_3) - \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 \cos(q_3) - \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_3) \\
&\quad - \operatorname{sen}(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_3)) m_2 l_1 l_{c2} \\
C_{33}(q, \dot{q}) &= 0
\end{aligned}$$

$$g_2(q) = m_1 l_{c1} g \operatorname{sen}(q_2)$$

$$g_3(q) = m_2 l_1 g \operatorname{sen}(q_2) + m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_3).$$

Las variables de estado adecuadas para escribir el modelo dinámico del robot son las posiciones  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  y las velocidades  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$  y  $\dot{q}_3$ . En términos de estas variables de

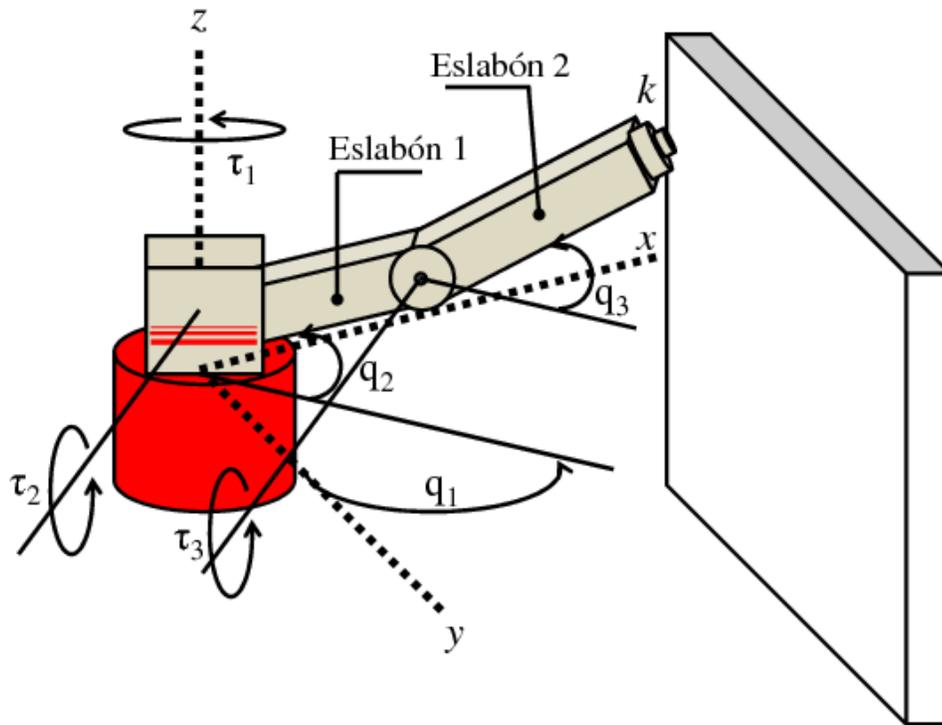


Figura 74. Robot PEGASUS con 3 g.d.l. y restricción en la posición.

estado, el modelo dinámico del robot puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \end{bmatrix}.$$

Ahora agreguemos al sistema mecánico una restricción en la posición (ver Figura 74), la cual se representa en el modelo dinámico (363) como una fuerza  $\tau_c$  que afecta al sistema, es decir, el modelo queda expresado de la siguiente manera:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + \tau_c. \quad (363)$$

La posición euclidiana entre el origen del robot y la restricción está dada por  $x_0$  ya que la restricción está situada a lo largo del eje  $x$ , la posición del efector final del robot con

respecto al eje  $x$  está dada por  $x_r$ , a su vez la distancia del efector final con respecto al eje  $y$  está dada por  $y_r$  y con respecto al eje  $z$  es  $z_r$ , las cuales se denotan como  $R(t) = [x_r(t), y_r(t), z_r(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ . Se agrega un resorte en la punta del efector final el cual es puntual con una constante de rigidez  $k$ , el cual actúa como sensor de fuerza. Una forma de representar la fuerza generada en el resorte es utilizando la ley de Hooke  $F = kx_r$ .

Se genera un impacto entre el efector final del robot y la restricción cuando  $x_r \geq x_0$  donde  $x_r = [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_3)] \cos(q_1)$ . El impacto genera fuerzas de igual magnitud y sentidos opuestos entre el robot y la restricción. Específicamente, la fuerza de impacto actuando sobre el resorte  $F_c \in \mathbb{R}$ , se define como

$$F_c = \frac{k}{2} (x_r - x_0 + |x_r - x_0|). \quad (364)$$

La fuerza de impacto actuando sobre los eslabones produce un par, denotado por  $\tau_c(x_r, q) \in \mathbb{R}^3$ , con la siguiente forma

$$\tau_c = -F_c \begin{bmatrix} [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_3)] \cos(q_1) \\ [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_3)] \text{sen}(q_1) \\ l_1 \text{sen}(q_2) + l_2 \text{sen}(q_3) \end{bmatrix}. \quad (365)$$

Con este término se completa el modelo (363) para el robot Pegasus de 3 g.d.l. con restricción en la posición.