

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias  
en Oceanografía Física**

---

**Convertidor de energía del oleaje: análisis del movimiento de la  
plataforma Stewart-Gough**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Eduardo Santiago Ojeda**

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por

**Eduardo Santiago Ojeda**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Francisco Javier Ocampo Torres**

Director del Comité

**Dr. José Pedro Osuna Cañedo**

**Dr. Daniel Saucedo Carvajal**

**Dr. José Luis Ochoa de la Torre**



---

**Dr. Cuauhtémoc Turrent Thompson**

Coordinador del Programa de Posgrado en  
Oceanografía Física

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**

Directora de Estudios de Posgrado

*Eduardo Santiago Ojeda © 2018*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y el director de la tesis*

Resumen de la tesis que presenta **Eduardo Santiago Ojeda** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física.

## **Convertidor de energía del oleaje: análisis del movimiento de la plataforma Stewart-Gough**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres

Director de tesis

Los dispositivos convertidores de energía del oleaje son algunos de los más estudiados dentro de las tecnologías de energías renovables. La plataforma Stewart-Gough (PSG) es un dispositivo comúnmente usado en robótica como un manipulador paralelo, simulador de vuelo o de navegación marítima por poseer seis grados de libertad en su movimiento y tener gran precisión tanto en su posición como en su velocidad. Algunos trabajos teóricos sugieren que a mayor grados de libertad más energía puede extraerse del oleaje, por lo que se ha propuesto desarrollar un convertidor de energía del oleaje (CEO) basado en la PSG. En el presente trabajo se analiza un dispositivo CEO basado en la PSG considerando generadores lineales en sus patas. Como el movimiento inducido sobre el CEO basado en la PSG se transforma en lineal en sus patas y en los generadores lineales en energía, se estudia la longitud de las patas. Mediante cinemática inversa se estudia la longitud de las patas como función del movimiento que induce oleaje monocromático. Además mediante la formulación lagrangiana de la dinámica se estudia un dispositivo CEO con un grado de libertad en su movimiento (CEO1), pues se puede pensar como una pata con un generador lineal del CEO basado en la PSG. Los resultados indican que la direccionalidad del oleaje no afecta la eficiencia del CEO basado en la PSG. Los resultados del CEO1 muestran que considerando la formulación lagrangiana se puede obtener un modelo que unifica a los sistemas mecánico y eléctrico con lo cual se encuentra una eficiencia del 16% para la potencia, y que resulta congruente con trabajos previos.

Palabras Clave: **WEC, Stewart, Gough y energía de las olas.**

Abstract of the thesis presented by **Eduardo Santiago Ojeda** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Physical Oceanography.

### **Wave energy converter: Analysis of the movement of the Stewart-Gough platform**

Abstract approved by:

---

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres  
Thesis director

Wave energy converting devices are some of the most studied within renewable energy technologies. The Stewart-Gough platform (SGP) is a device commonly used in robotics as a parallel manipulator, flight simulator or maritime navigation because it has six degrees of freedom in its movement and has great precision in both its position and its speed. Some theoretical work suggests that more degrees of freedom more energy can be extracted from the waves, so it has been proposed to develop a wave energy converter (WEC) based on SGP in CICESE. In the present work a WEC device based on the SGP is analyzed considering linear generators in its legs. As the movement induced on the WEC based on the SGP becomes linear in its legs and in the linear generators in energy, the length of the legs is studied. Through inverse kinematics the length of the legs is studied as a function of the movement that induces monochromatic waves. Furthermore, through the Lagrangian formulation of the dynamics, a WEC device with a degree of freedom in its movement (WEC1) is studied, because it can be thought of as a leg with a linear generator of the WEC based on the SGP. The results indicate that the directionality of the waves does not affect the WEC's efficiency based on the SGP. The results of the WEC1 show that considering the lagrangian formulation, a model can be obtained that unifies the mechanical and electrical systems, with which there is an efficiency of 16% for the power and which is consistent with previous work.

Keywords: **WEC, Stewart, Gough, and Wave energy**

## Dedicatoria

*Estos versos, lector mío, que a tu deleite consagro, y sólo tienen de buenos conocer yo que son malos... Bien pudiera yo decirte por disculpa, que no ha dado lugar para corregirlos... Pero todo eso no sirve pues pensarás que me jacto de que quizás fueran buenos de haberlos hecho despacio...(Sor Juana Inés de la Cruz)*

## Agradecimientos

Un agradecimiento singular debo a mi comité de tesis: Al Dr. Ocampo, que como director de tesis me ha orientado y apoyado, además por su paciencia a la hora de leer mis intentos de escritos y correcciones de mi redacción. Al Dr. Osuna muchas gracias por su paciencia y por escucharme *los jueves de oleaje* además por sus aportaciones y comentarios en este trabajo. Al Dr. Ochoa muchas gracias por esas discusiones al respecto de este trabajo y mostrarme que se necesita humildad al enfrentarse a un problema. Al Dr. Saucedo muchas gracias por los comentarios de este trabajo y el apoyo brindado para esta tesis.

A mi familia por su apoyo incondicional.

Ahora la parte más difícil, gracias a todas aquellas personas que de alguna manera ayudaron en este trabajo.

A mi amigo Diego Galván muchas gracias por todos aquellos comentarios sobre los CEOs, por compartir su tiempo, asesoría y paciencia, gracias. A mis amigos Rene y Arturo, gracias por sus críticas. A Daniel muchas gracias por tu apoyo tanto en las cuestiones de oleaje como en las de redacción. A mis amigos y compañeros de generación Javier, Karyna, Nadia, Lenin, Nemesis y Raúl, de corazón gracias por la paciencia, el apoyo y las fiestas. A mis compañeros del grupo de oleaje por sus múltiples comentarios y paciencia. A mis compañeros del posgrado, gracias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico con número 586931 para realizar mis estudios de maestría. Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por el apoyo económico brindado. Al CEMIE-Océano por brindarme apoyo económico para realizar el curso de convertidores de energía del oleaje en septiembre del 2017 en Cork, Irlanda.

# Tabla de contenido

	Página
<b>Resumen en español</b> . . . . .	ii
<b>Resumen en inglés</b> . . . . .	iii
<b>Dedicatoria</b> . . . . .	iv
<b>Agradecimientos</b> . . . . .	v
<b>Lista de figuras</b> . . . . .	viii
<b>Lista de tablas</b> . . . . .	xi
<b>Capítulo 1: Introducción</b> . . . . .	1
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	5
1.3. Objetivos . . . . .	6
1.3.1. Objetivo general . . . . .	6
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	6
<b>Capítulo 2: Metodología</b> . . . . .	7
2.1. Teorías consideradas en este trabajo . . . . .	7
2.1.1. Dinámica . . . . .	7
2.1.2. Teoría del oleaje . . . . .	9
2.1.3. Cinemática de la PSG . . . . .	11
2.2. Cinemática de un CEO basado en la PSG . . . . .	14
2.3. Ecuaciones de movimiento de un CEO con un grado de libertad, derivadas con la formulación lagrangiana . . . . .	16
2.3.1. Ecuación del oscilador armónico simple . . . . .	17
2.3.2. Ecuación del oscilador armónico forzado con oleaje lineal . . . . .	18
2.3.3. Ecuación del oscilador armónico forzado y con disipación . . . . .	20
2.3.4. Principios del funcionamiento de un generador basado en un solenoide e imán . . . . .	24
2.3.5. Ecuaciones de movimiento de un sistema electromecánico . . . . .	28
2.3.6. Voltaje estimado del CEO con un generador lineal. . . . .	30
<b>Capítulo 3: Resultados y discusiones</b> . . . . .	34
3.1. Dispositivo CEO basado en la PSG . . . . .	34
3.1.1. La longitud de las patas correspondiente al oleaje en dirección $x$ . . . . .	37
3.1.2. Las longitudes de las patas por oleaje incidiendo en diferentes direcciones . . . . .	41
3.2. Un dispositivo CEO con un grado de libertad en su movimiento . . . . .	46
3.2.1. Voltaje, corriente y potencia de un dispositivo CEO1 . . . . .	47
3.2.2. Diagramas de Bode de un CEO1 . . . . .	49
<b>Capítulo 4: Conclusiones</b> . . . . .	53

## Tabla de contenido (continuación)

<b>Literatura citada</b> . . . . .	55
<b>Apéndice A: Ley de Lenz</b> . . . . .	58
A.1. Ley de Lenz . . . . .	58



## Lista de figuras

Figura	Página
1. El espectro de frecuencias de las ondas que existen el océano. Se puede apreciar que las mareas y las olas son de las más energéticas. Imagen modificada de Holthuijsen (2010). . . . .	2
2. Esquema de olas incidiendo sobre tres tipos dispositivos. El primer dispositivo de izquierda a derecha tiene la orientación paralela al frente de onda y su tamaño es proporcional a la longitud de onda, este tipo de dispositivo es conocido terminador. El segundo dispositivo tiene la orientación perpendicular al frente de onda y su tamaño es proporcional a la longitud de onda, es conocido como atenuador. El tercer dispositivo tiene un tamaño menor a la longitud de onda y es indiferente al dirección de incidencia, este es conocido como puntual. Imagen modifica de Cruz (2007) . . . . .	3
3. Simulador de vuelo de Luftansa usando la plataforma Stewart-Gough. Tomada de Arnold (2004) . . . . .	5
4. Onda sinusoidal con algunos de los parámetros característicos . . . . .	9
5. Imagen de la PSG donde se muestran sus componentes: la base, seis patas y la plataforma móvil. Por simplicidad para el estudio del movimiento del PSG se ancla un sistema de referencia inercial en la base (color verde), otro sistema de referencia no inercial montado en la plataforma móvil (en azul). Relacionando el sistema de la plataforma móvil con la base se puede describir el movimiento de cada uno de los componentes de la PSG . . . . .	12
6. Ejemplo de un gráfico realizado en Mathematica donde se aprecia como funciona el algoritmo <i>MaxRecursion</i> , imagen tomada de Wolfram Research, Inc. (2016) . . . . .	16
7. Esquema que representa un oscilador armónico, formado por un masa de forma elipsoidal y un resorte. La gravedad tiene dirección $-z$ . . . . .	17
8. Esquema de una boya cilíndrica (amarillo) con el centro de gravedad en el origen que coincide con la superficie libre de una ola monocromática (turquesa). El movimiento de la boya debido a la ola está restringido a la dirección $\hat{z}$ . . . . .	20
9. Resultados de la posición $z_h$ de una boya que corresponden con una oscilación amortiguada sin forzamiento, donde la línea sólida azul es la posición de la boya $z_h$ en función del tiempo y las envolventes representan el decaimiento exponencial de la posición respecto al tiempo, se muestran con líneas punteadas. . . . .	23
10. Gráfica de la solución general para el oscilador armónico amortiguado y forzado, que describe la posición $z$ en función del tiempo. . . . .	24
11. Esquema de un imán (cilindro gris) dentro de un solenoide (línea naranja). El solenoide puede ser un alambre de cobre por ejemplo. Si el imán se mueve respecto al solenoide entonces se genera una corriente eléctrica en el mismo, inducida por el cambio del campo magnético en el solenoide. . . . .	25

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
12. Circuito RL (Resistencia-Inductancia) equivalente del sistema solenoide imán , donde $V_\epsilon$ representa al voltaje que se genera al moverse el imán (ver apéndice A para la relación entre $V_\epsilon$ con el imán), $L$ la inductancia que tiene el solenoide y $R$ es la suma de la resistencia eléctrica interna del solenoide $R_s$ y la resistencia eléctrica de carga $R_c$ . $V(t)$ es el voltaje medido entre las terminales $A$ y $B$ . . .	27
13. Esquema de un dispositivo CEO con un grado de libertad de movimiento, en color naranja esta el nivel medio del mar, en turquesa se puede apreciar el oleaje. El CEO está contituido por una boya (amarillo) acoplada con un generador eléctrico (negro) y pueden desplazarse libremente en el eje vertical (gris) debido a que el oleaje induce movimiento en ella. . . . .	30
14. Vista superior del elemento flotante de la PSG. El ángulo $0^\circ$ coincide con el eje $x$ y el ángulo $90^\circ$ con el eje $y$ . La circunferencia azul de radio=1 m circunscribe a la plataforma, la circunferencia naranja de líneas punteadas circunscribe un radio interior de la plataforma. Las líneas punteadas azules son líneas de simetría de PSG, al igual que el eje $y$ . . . . .	36
15. Vista superior de la PSG. En amarillo se muestra el elemento flotante, en gris la base y los cilindros de azul y rojo las patas; la superficie libre se representa con azul turquesa. Las patas se enumeran en sentido antihorario. La posición y orientación de las patas que se observa corresponde con $t = 0$ s. . . . .	36
16. Resultados de la longitud (m) de la seis patas de la PSG que corresponden al caso 1). En tabla 1 se presentan las características del oleaje. . . . .	38
17. Resultados de la longitud (m) de las seis patas de la PSG para el caso 2). Las características del oleaje se resumen en la tabla 1. . . . .	40
18. Resultados de la longitud de las patas de la PSG del ejercicio 3). Las características más importantes de oleaje incidente se resumen en la tabla 1. . . . .	42
19. Resultados de la longitud de las patas de la PSG del ejercicio 4). Las características del oleaje incidente se resumen en la tabla 2. . . . .	43
20. Resultados de la longitud de las patas de la PSG del ejercicio 5). Las características principales del oleaje incidente se resumen en la tabla 2. . . . .	43
21. Instantáneas de la simulación de un CEO basado en PSG. La plataforma está amarillo con oleaje (azul) en dirección paralela al eje $x$ . El orden de la imágenes es como el acostumbrado en las matrices (reglón,columna), iniciando en la esquina superior izquierda y terminando en la esquina inferior derecha. . . . .	45
22. Voltaje obtenido con la función de transferencia (70). La gráfica presenta la señal resultante (el voltaje) de transformar la fuerza del oleaje ( $F_{z0} = 107$ N, $\omega = \pi$ rad s <sup>-1</sup> ) con un dispositivo CEO1. . . . .	48

## Lista de figuras (continuación)

Figura		Página
23.	Resultado de la corriente eléctrica obtenida de la ley de Ohm una vez conocido el voltaje. La gráfica presenta la señal resultante de transformar la fuerza del oleaje a través de un CEO1. . . . .	49
24.	Resultado de la potencia eléctrica estimada para un CEO1 . . . . .	50
25.	Resultado del módulo de la función de transferencia, la respuesta está dada en voltios sobre Newtons en función de $\omega/\omega_N$ . En este caso el CEO presenta resonancia en $\omega/\omega_N \simeq 1.5$ . La amplitud del pico puede variarse cambiando el amortiguamiento hidrodinámico y la resistencia eléctrica . . . . .	51
26.	Esta gráfica es el argumento de la función de transferencia, el angulo de desfase entre la ola incidente y el voltaje generado está en grados en función de $\omega/\omega_N$ . En este caso se puede ver que desfase es de $-180^\circ$ entre el oleaje que induce movimiento y el voltaje resultante para la razón $\omega/\omega_N \simeq 1.5$ , asociado con la resonancia. . . . .	52

## Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Se presentan algunas características del oleaje consideradas para las gráficas de la longitud de las patas de la PSG. Frecuencia del oleaje $\omega$ , amplitud del oleaje $A$ , longitud de onda $\lambda$ , ángulo de incidencia $\theta_i$ y la relación $ka$ del tamaño la PSG (radio $a$ ) respecto a la longitud de onda ( $k = 2\pi/\lambda$ ). . .	37
2.	Características del oleaje consideradas para las gráficas de la longitud de patas de la PSG. Frecuencia del oleaje $\omega$ , amplitud del oleaje $A$ , longitud de onda $\lambda$ , ángulo de incidencia $\theta_i$ y la relación $ka$ del tamaño PSG (radio $a$ ) respecto a la longitud de onda ( $k = 2\pi/\lambda$ ). . . . .	42
3.	Parámetros considerados para modelar el dispositivo CEO1, considerados en el análisis de voltaje, corriente y potencia. . . . .	47

# Capítulo 1. Introducción

---

## 1.1. Antecedentes

La energía es base de la sociedad actual. De ésta la mayoría es generada con base en petróleo o carbón. Debido a que las investigaciones muestran que dichas fuentes de energía han acelerado el cambio climático en los últimos años se han implementado políticas para una transición a la utilización de energía limpia (Obama, 2017). Por otro lado afortunadamente ya existen fuentes de energía renovable con una tecnología moderadamente desarrollada con la cual se pueden satisfacer demandas pequeñas de energía. Dentro de la energía renovable, la energía eólica y la energía solar son las que tienen precios competitivos y alcanzan un nivel de madurez. Sin embargo la demanda mundial de energía está aún lejos de satisfacerse únicamente con estas dos fuentes de energía. Una fuente de energía renovable que ha cobrado importancia es la energía del oleaje. La energía relativa de las ondas del océano fue estimada alrededor de 1950 (Munk, 1950), en la figura 1 se puede observar dicha estimación. Donde en el rango de frecuencias  $10^{-2}$  y  $10^1 \text{ rad s}^{-1}$  se encuentran algunas de las ondas más energéticas que corresponden con el oleaje.

Las ventajas más atractivas para generar energía del oleaje son su presencia y persistencia, principalmente al hacer la comparación con la intermitencia del viento o con la luz solar que por las noches es nula. También algunos estudios sugieren (López *et al.*, 2013) que la densidad de energía en las olas ( $2$  y  $3 \text{ kW m}^{-2}$ ) es mayor que la correspondiente energía eólica ( $0.4$  y  $0.6 \text{ kW m}^{-2}$ ) y que la energía solar ( $0.1$  y  $0.2 \text{ kW m}^{-2}$ ).

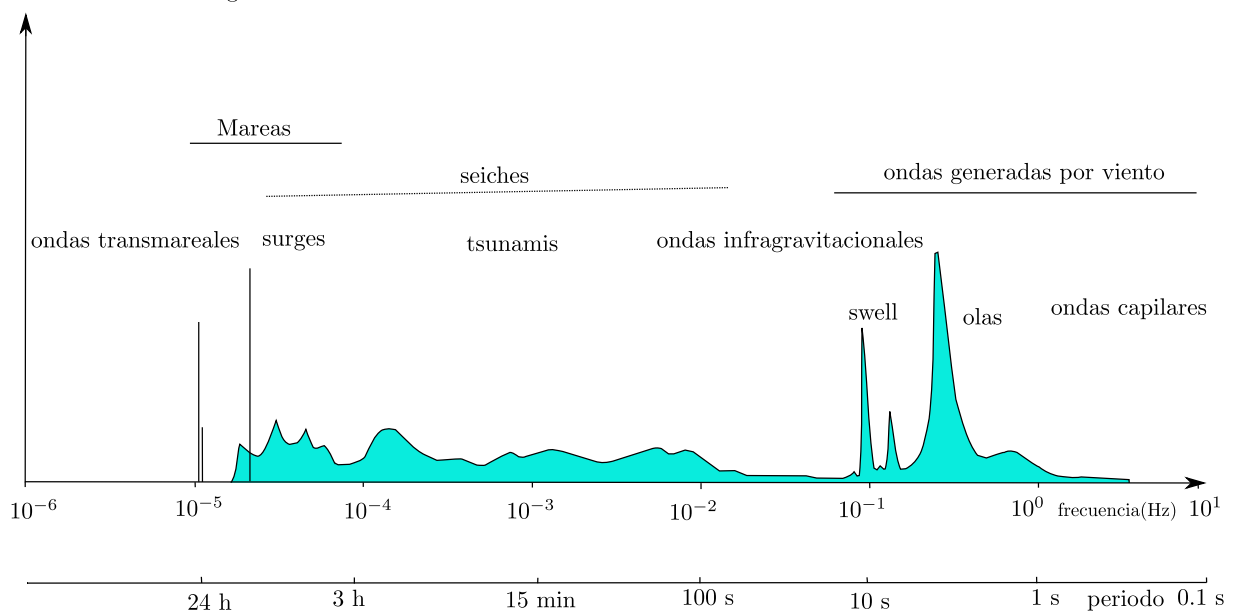
Por lo anterior existe un gran interés en la investigación sobre la energía de las olas. A la fecha existen cientos de patentes sobre dispositivos convertidores de energía del oleaje. Sin embargo aún no existe un método o tecnología que pueda considerarse como la predominante (López *et al.*, 2013), así la investigación para encontrar una tecnología eficiente sigue en curso.

Existen indicios del desarrollo de dispositivos convertidores de energía del oleaje (CEO) desde el siglo XIII en China. La primer patente fue registrada en 1799 por Girard e hijo en Francia (López *et al.*, 2013). Pero fue hasta la década de los 70's con Yoshio Masuda, Stephen Salter and Kjell Budal que, la energía de las olas y convertirla a algún tipo de energía útil se consideró seriamente;

para realizar investigación científica (de O. Falcão, 2010).

En las investigaciones realizadas se sentó la base del problema esencial de los convertidores de energía del oleaje (CEO) que es encontrar un método para convertir fuerzas alternativas, aleatorias y dispersas (las fuerzas debidas al oleaje) en fuerzas concentradas y directas; usando mecanismos que sean eficientes con alturas moderadas de oleaje y suficientemente robustos para resistir las condiciones marinas (Salter, 1974). De los dispositivos CEO ideados hasta la actualidad un gran número funcionan con base en una frecuencia de resonancia y un grado de libertad en su movimiento (Crowley *et al.*, 2013; Falnes, 2002).

escala arbitraria de energía

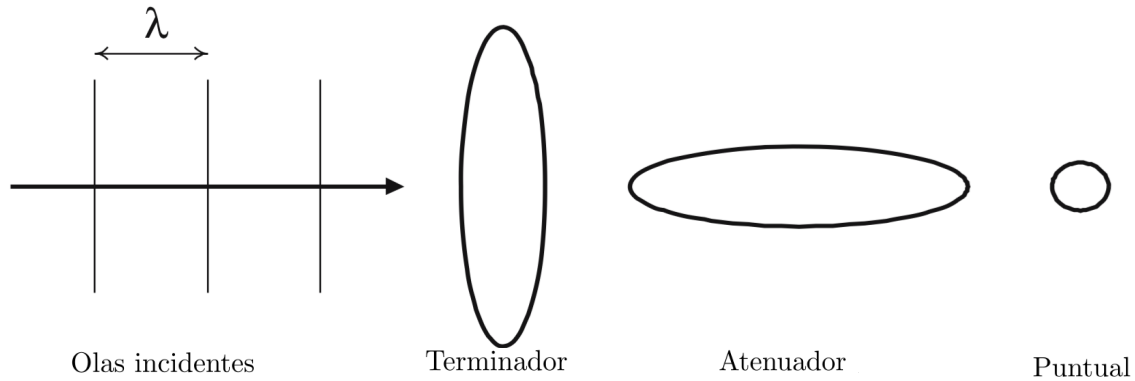


**Figura 1:** El espectro de frecuencias de las ondas que existen el océano. Se puede apreciar que las mareas y las olas son de las más energéticas. Imagen modificada de Holthuijsen (2010).

Debido a la gran cantidad de conceptos de dispositivos CEO que se han propuesto; existen varias maneras de clasificarlos. Una de ellas es al tomar en cuenta su tamaño y su orientación con respecto al oleaje incidente (Cruz, 2007), en la figura 2 se puede observar dicha clasificación.

Dentro de los CEO los puntuales son considerados como algunos de los más efectivos (Zheng *et al.*, 2015). Éstos pueden poseer uno o más grados de libertad en su movimiento. Existen trabajos teóricos donde se muestra que al aumentar los grados de libertad de movimiento aumenta la energía que absorbe el CEO (Falnes, 2002).

La mayoría de los dispositivos puntuales que se han diseñado funcionan considerando únicamente



**Figura 2:** Esquema de olas incidiendo sobre tres tipos dispositivos. El primer dispositivo de izquierda a derecha tiene la orientación paralela al frente de onda y su tamaño es proporcional a la longitud de onda, este tipo de dispositivo es conocido terminador. El segundo dispositivo tiene la orientación perpendicular al frente de onda y su tamaño es proporcional a la longitud de onda, es conocido como atenuador. El tercer dispositivo tiene un tamaño menor a la longitud de onda y es indiferente al dirección de incidencia, este es conocido como puntual. Imagen modifica de Cruz (2007)

un grado de libertad en su movimiento. Un ejemplo del movimiento de los dispositivos puntuales creados es el movimiento a lo largo de una línea correspondiente al ascenso y descenso vertical de una boya, otro es el movimiento alrededor de un eje (McCormick, 2007). Tomando en cuenta que el oleaje es variable en dirección y frecuencia, se ha propuesto diseñar dispositivos con varios grados de libertad de su movimiento, lo cual resultaría en mayor conversión de energía.

Una propuesta para aprovechar más de un grado de libertad del movimiento de un dispositivo CEO es utilizar estructuras de tensegridad, para convertir la energía mecánica de las olas en energía eléctrica (Scruggs y Skelton, 2006). Una estructura de tensegridad es un tipo de armadura (como el esqueleto metálico de un edificio o torre metálica), para la cual todas las barras en tensión son sustituidas por barras elásticas. Basándose en las estructuras de tensegridad se ha estudiado la dinámica de un CEO de hasta tres grados de libertad en su movimiento, mostrando que se puede obtener hasta 10 % más energía que la estimada para un CEO con un grado de libertad en su movimiento (Vasquez *et al.*, 2014).

La plataforma Stewart-Gough (PSG) es una clase de estructura de tensegridad, muy usada en robótica. En su forma más general, está constituida por una base fija y otra móvil, éstas se encuentran unidas por 6 cadenas cinemáticas que se conocen como patas (Taghirad, 2013). En la figura 3 se muestra un tipo de PSG formada por una base (que es el piso) conectada por seis patas (en este caso actuadores que producen movimiento), con un elemento móvil que tiene una

cabina.

Para la descripción y estudio de la PSG se considera un sistema de referencia en principio inercial en la base y otro no inercial en la cabina móvil.

La PSG es uno de los robots con mayor precisión en su posición y mayor velocidad de su movimiento, por esta razón es popular en la industria. Otra ventaja es que tiene seis grados de libertad en su movimiento por lo cual se puede utilizar como simulador de vuelo (ver figura 3).

En robótica el movimiento de la plataforma móvil se origina en cada una de las seis patas. Para usarla como un convertidor de energía de oleaje, el movimiento debe originarse en la plataforma móvil (que es un elemento de flotación) que responde a la acción de las olas y el movimiento se transfiere a las patas donde se convierte a energía eléctrica. La cinemática inversa es el estudio de como se transfiere el movimiento del elemento de flotación a las patas (Bingul y Karahan, 2012).

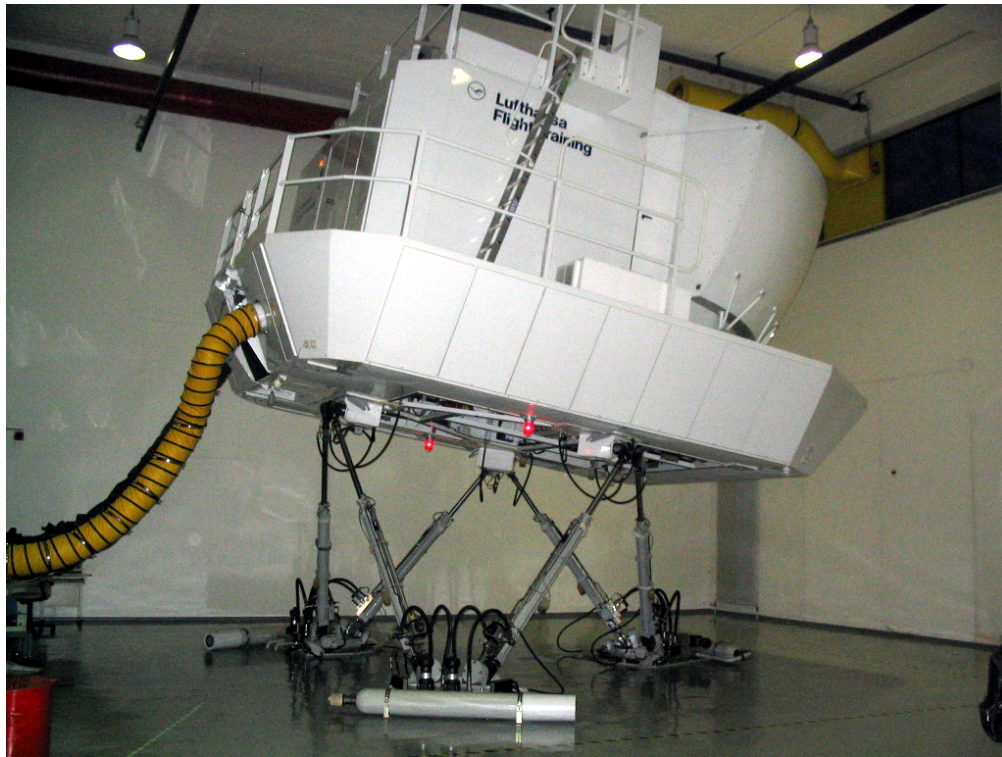
Lotfi y Huang (2014) realizaron simulaciones numéricas de olas irregulares que inciden sobre la PSG y mediante cinemática inversa obtuvieron la longitud de las patas de la PSG. Considerando que en cada pata contiene un pistón hidráulico obtienen 16 % más presión en una PSG en comparación con un CEO con un grado de libertad en su movimiento. Ocampo-Torres *et al.* (2014) propusieron el diseño y construcción de un CEO basado en la PSG. Donde realizaron pruebas experimentales, simulaciones numéricas y un modelo de interacción oleaje-estructura, con el fin de conocer la dinámica de dicho dispositivo.

El estudio de sistemas electromecánicos como un sólo sistema considerando la formulación lagrangiana puede encontrarse en trabajos como el de Preumont (2006). Y su aplicación en nuevas energías es amplio, abarca ideas como la cosecha de energía en carreteras (Duarte y Ferreira, 2016) y su estudio ha sido considerado con anterioridad véase por ejemplo Lyshevski (2008).

En la presente tesis se aborda el estudio de las características mecánicas de un dispositivo CEO considerando un modelo de la cinemática inversa de la PSG con el que se describe el comportamiento del CEO. En particular, se analiza el movimiento de la PSG como respuesta al efecto inducido por oleaje monocromático.

También se analizan las características electromecánicas de un CEO con un grado de libertad en su movimiento. Se estudia la dinámica de este CEO con la formulación lagrangiana, ya que





**Figura 3:** Simulador de vuelo de Luftansa usando la plataforma Stewart-Gough. Tomada de Arnold (2004)

este tipo de formulación considera coordenadas adaptables al sistema físico. Al final se estima el voltaje, la corriente y la potencia que un dispositivo CEO con un solo grado de libertad en su movimiento podría generar.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma: en la sección 1.1 se presentan los objetivos. En el capítulo 2 se describe la metodología, en la sección 2.1 se describen las formulaciones de la dinámica usadas en la presente tesis y en la sección 2.2 se desarrolla la cinemática de un CEO basado en la PSG. En la sección 2.3 se desarrolla la dinámica de un CEO con un grado de libertad en su movimiento. En el capítulo 3 se presentan los resultados y la discusión de la tesis. Las conclusiones se presentan en el capítulo 4.

## 1.2. Justificación

La búsqueda de un dispositivo convertidor de energía del oleaje que sea eficiente, viable y que responda a las necesidades locales es parte de los objetivos de muchos países tanto desarrollados como en desarrollo desde la década de los 90 del siglo pasado. Es posible realizar el análisis de CEO de manera completa pero frecuentemente esto conduce a tener mucha información que requiere un

análisis complicado y se encuentra el dilema de tener mucha información no deseada. La derivación de un modelo matemático que resulte útil y realista es complicado, pero si se encuentra se puede tener información de la forma más económica y con una precisión aceptable. La formulación lagrangiana ha sido utilizada para el estudio de sistemas como micrófonos y bocinas (Preumont, 2006; Lyshevski, 2008). Pero al momento no se conoce su aplicación en dispositivos CEO desde el punto de vista electromecánico. Con el fin de contribuir en la evaluación de un dispositivo CEO basado en la PSG se desarrolla el presente trabajo.

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1. Objetivo general**

Proponer un modelo teórico para describir el movimiento de un convertidor de energía del oleaje que se basa en el concepto de la PSG, considerando utilizar convertidores lineales en cada una de sus patas.

#### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Estudiar el movimiento de un dispositivo CEO que se basa en la PSG mediante un modelo teórico cuando oleaje monocromático induce movimiento en la plataforma móvil.
- Plantear un modelo matemático con la formulación lagrangiana para un dispositivo CEO puntual con un grado de libertad. Con el modelo planteado cuantificar la cantidad de potencia del oleaje que se convierte en energía eléctrica mediante el CEO.

## Capítulo 2. Metodología

---

Para entender el comportamiento de los dispositivos CEO, se estudian la interacción entre el oleaje y las estructuras. En esta tesis se aborda utilizando la teoría del oleaje y la dinámica de un CEO. Para abordar cómo transformar la energía mecánica de las olas en otro tipo de energía útil, por ejemplo en energía eléctrica, se incorporan también aspectos de electromagnetismo. Estos son los temas que se tratarán en este capítulo.

### 2.1. Teorías consideradas en este trabajo

#### 2.1.1. Dinámica

Para realizar un análisis dinámico de un CEO existen varias formulaciones. La más conocida es la formulación de Newton-Euler. La formulación de Newton se basa en su segunda ley, es decir,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza que se aplica sobre el cuerpo que se estudia,  $m$  es la masa de dicho cuerpo y  $\vec{a}$  su aceleración, debida a la fuerza aplicada sobre él. Con ésta se describe el movimiento de un cuerpo respecto a un sistema inercial, y considerando coordenadas cartesianas.

Posteriormente Leonhard Euler reformuló la notación y aportó la dinámica de cuerpos en rotación que se muestra a continuación,

$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{I} \cdot \vec{\omega})}{dt}, \quad (2)$$

donde  $\vec{\tau}$  es el momento de la fuerza que actúa sobre el cuerpo,  $\vec{I}$  es el momento de inercia de dicho cuerpo y  $\vec{\omega}$  su velocidad angular. Con ésta se describen las rotaciones de un cuerpo alrededor de los ejes cartesianos, una rotación por cada eje. La combinación de la ecuación (1) y la (2), se le conoce como formulación de Newton-Euler de la dinámica, y describe el movimiento general de un cuerpo una vez conocidas las fuerzas y torcas (momentos de fuerza ver Goldstein *et al.* (2002); Serway y Jewett (2018)) que actúan sobre él. Esta formulación es la más usada en el estudio de

los dispositivos CEO.

Una formulación de la dinámica ágil y poderosa la desarrolló Joseph Louis de Lagrange en 1788 en la *Mécanique Analytique* (Rañada, 2005) donde reúne y sistematiza los conocimientos de la dinámica desde Newton. Esta formulación tiene la ventaja de dar una visión unificada con otras ramas de la física como el electromagnetismo.

Para describir el movimiento de un cuerpo o partícula es necesario conocer variables que determinen su posición, y cambien o no cambien con el tiempo. Al conjunto de estas variables se les llama coordenadas y en la formulación de Newton-Euler éstas pueden ser las coordenadas cartesianas,  $x(t), y(t), z(t)$  las que determinen la posición del cuerpo.

En la formulación lagrangiana las variables que describen el movimiento de un cuerpo o partícula son las coordenadas generalizadas. Éstas representan al mínimo conjunto de coordenadas con las que se puede determinar la posición de un cuerpo (o partícula). Se acostumbra representar a las coordenadas generalizadas con  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

En la formulación lagrangiana las ecuaciones de movimiento de un sistema conservativo, se expresan en términos de la diferencia entre la energía cinética  $T(q, \dot{q})$  y la energía potencial  $V(q)$ . Con lo cual se define el lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ .

Una vez conocido el lagrangiano se sustituye en la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \quad (3)$$

donde  $q$  son las coordenadas generalizadas, los puntos sobre  $q$  indican derivada temporal ( $\dot{q} = dq/dt$ ) y  $\mathcal{L}$  el lagrangiano. La ecuación (3) es la base de la formulación lagrangiana, pues ella representa la ecuación de movimiento del sistema que se analiza.

La ecuación (3) es análoga a la segunda ley de Newton, del lado izquierdo de la ecuación están las fuerzas (únicamente las fuerzas conservativas) y del lado derecho se encuentran las derivadas del momento. Para incluir fuerzas no conservativas en la ecuación de Euler-Lagrange se agrega un término de las fuerzas no conservativas, que por ejemplo contiene a la fricción, como a continuación

se muestra (Goldstein *et al.*, 2002),

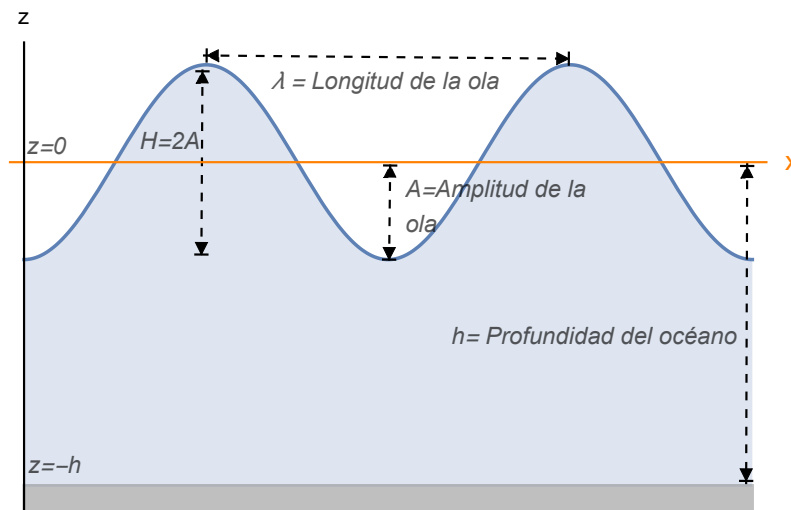
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial P_d}{\partial \dot{z}} = F(t), \quad (4)$$

donde  $P_d$  es una función de disipación y las fuerzas no conservativas están incluidas en,  $\partial P_d / \partial \dot{z}$ . La ecuación (4) es la que se usará en este trabajo para derivar las ecuaciones de movimiento por ser la más apropiada para este trabajo.

### 2.1.2. Teoría del oleaje

Las olas son ondas que se generan por el viento y cuya fuerza restauradora es la gravedad. Para su estudio las olas pueden clasificarse como olas lineales, olas no lineales y olas que rompen (McCormick, 2010). Este trabajo se limita a las olas lineales. Las olas lineales se caracterizan por su pendiente  $H/\lambda \ll 1$ ,  $H$  es la altura de la ola y  $\lambda$  la longitud de la ola.

Algunos de los parámetros típicos con los que se caracteriza a las olas se ilustran en la figura 4. Por ejemplo la longitud de ola  $\lambda$ , la amplitud de ola  $A$ , la relación entre la amplitud y la altura es  $2A = H$ . El periodo  $T$  cuantifica el tiempo que toma completar un ciclo completo de la oscilación de la ola. Además en el estudio del oleaje se consideran otras variables derivadas como el número de onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  y la frecuencia angular de la onda  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .



**Figura 4:** Onda sinusoidal con algunos de los parámetros característicos

Una vez conocidos algunos parámetros que ayudan a caracterizar el oleaje, lo que se quiere estudiar es el movimiento del mismo. Para olas lineales esto se hace con un modelo matemático sencillo. Partiendo de la ecuación de conservación de masa para un fluido incompresible y la de conservación momento simplificada en la ecuación de Bernulli. Con lo cual se obtiene un sistema de una ecuación diferencial parcial con sus condiciones de frontera.

El sistema de ecuaciones linealizadas que rigen la evolución de las olas con sus condiciones de frontera (Young, 1999; Mei *et al.*, 2005):

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad z = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad z = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{en el fondo } z = -h, \quad (8)$$

donde (5) es la ecuación de Laplace expresada en términos del potencial de la velocidad, cuyas condiciones de frontera son: (6) la condición dinámica en la superficie libre, (7) la condición cinemática en la superficie libre y (8) condición cinemática en el fondo. En el sistema de ecuaciones [(5)-(8)],  $\phi$  es el potencial de velocidad,  $g$  es la aceleración de la gravedad terrestre y  $h$  es la profundidad del océano. El dominio de este sistema de ecuaciones es para  $x \in (-\infty, \infty)$  y para  $z \in [-h, \eta]$ . Al resolver el sistema de ecuaciones linealizadas se puede encontrar el potencial de velocidad que se expresa como,

$$\phi = \frac{Ag \cosh[k(z+h)]}{\omega \cosh(kh)} \text{sen}(kx - \omega t), \quad (9)$$

una vez conocido el potencial de velocidad y dada la ecuación (7) se puede establecer la forma de la superficie libre  $\eta$ , tal que

$$\eta = A \cos(kx - \omega t). \quad (10)$$

McCormick (2010) considera el desplazamiento de las partículas de fluido con la aproximación de

aguas profundas ( $kh \gg 1$ ), es decir, que la profundidad del océano  $h$  es mucho mayor que la longitud de ola  $\lambda$ , se tiene

$$\zeta = A \exp(kz) \cos(kx - \omega t), \quad (11)$$

$$\xi = -A \exp(kz) \operatorname{sen}(kx - \omega t). \quad (12)$$

donde el desplazamiento de las partículas en dirección del eje  $z$  está dada por la ecuación (11), el desplazamiento de las partículas en la dirección del eje  $x$  está dada por la ecuación (12).

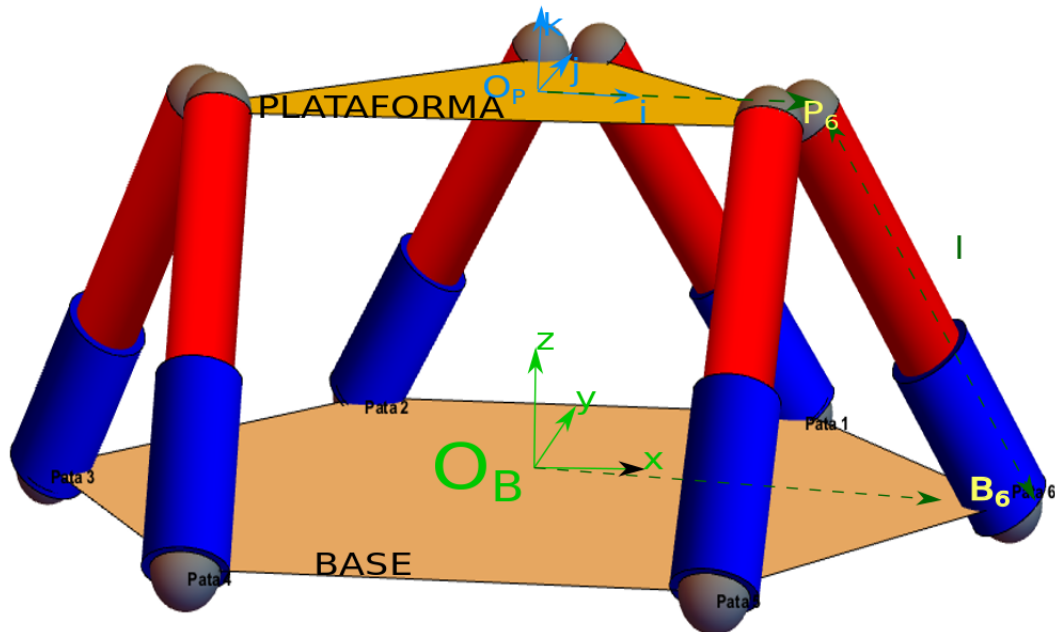
Una relación muy importante entre dos parámetros característicos del oleaje es conocida como relación de dispersión. Que se puede obtener una vez que se conoce  $\phi$  y  $\eta$  mediante el sistema de ecuaciones (5)-(8). Considerando la aproximación de aguas profundas la relación de dispersión es,

$$\omega^2 = gk, \quad (13)$$

La utilidad de esta relación es que generalmente se puede medir uno de los dos parámetros del oleaje y el otro determinar con esta relación.

### 2.1.3. Cinemática de la PSG

En trabajos desarrollados para describir el comportamiento de la PSG se consideran dos planteamientos conocidos como cinemática inversa y directa (Bingul y Karahan, 2012; Lebret *et al.*, 1993). En el presente trabajo se adopta la cinemática inversa, con lo que se busca conocer la longitud de las patas de la PSG, una vez que se conocen las posiciones y orientaciones de la plataforma móvil, que es un sólido rígido. En esta tesis se postula que puede tener los seis grados de libertad en su movimiento. Para encontrar la longitud de las patas se relaciona un sistema de referencia no inercial atado a la plataforma que es móvil, con otro anclado a la base que es un sistema de referencia inercial. La relación entre el sistema anclado a la base y el atado a la plataforma móvil se da mediante la matriz de transformación homogénea MTH:



**Figura 5:** Imagen de la PSG donde se muestran sus componentes: la base, seis patas y la plataforma móvil. Por simplicidad para el estudio del movimiento del PSG se ancla un sistema de referencia inercial en la base (color verde), otro sistema de referencia no inercial montado en la plataforma móvil (en azul). Relacionando el sistema de la plataforma móvil con la base se puede describir el movimiento de cada uno de los componentes de la PSG

$$\mathbf{MTH} = \begin{pmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escala} \end{pmatrix}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & e_{1 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

que contiene cuatro matrices: la de rotación que transforma las rotaciones del sistema anclado a la plataforma móvil en uno paralelo al sistema de referencia de la base. La de traslación que traslada las posiciones de la plataforma móvil al sistema de la base. La matriz de perspectiva que en robótica está definida con valores cero. Por último la matriz de escala que tiene una sola componente, el escalar 1.

A continuación se define la matriz de rotación  $R_{3 \times 3}$ ,

$$R_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) - \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\psi) \sin(\phi) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \cos(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) \end{pmatrix}, \quad (15)$$



donde la orientación de la plataforma móvil se representa por los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$ , alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

La matriz de traslación  $T_{3 \times 1}$  del centro de masa de la plataforma móvil se expresa como,

$$T_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} \iota \\ \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (16)$$

está formada por las posiciones  $\iota$ ,  $\xi$  y  $\zeta$ , que son las coordenadas a lo largo de los ejes  $y$ ,  $x$  y  $z$  respectivamente.

Sustituyendo (15) y (16) en (14) la matriz de transformación homogénea, queda como (Taghirad, 2013),

$$\mathbf{MTH} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) + \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi) & \cos(\theta) \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi) - \cos(\phi) \text{sen}(\theta) & \cos(\psi) \text{sen}(\phi) & \iota \\ \cos(\psi) \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & \xi \\ \cos(\phi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi) - \cos(\theta) \text{sen}(\phi) & \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \text{sen}(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Con la finalidad de conocer el movimiento de la plataforma móvil, es necesario conocer las posiciones iniciales del punto de unión de cada pata con la plataforma móvil. Dicha posición inicial se escribe comúnmente con un vector de tres componentes, colocando cada vector en la columna de una matriz se obtiene,

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 & -0.916 & -0.816 & 0.816 & 0.916 \\ 1 & 1 & -0.413 & -0.586 & -0.586 & -0.413 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

donde se ha agregado un reglón de unos, para la multiplicación de la matriz  $\mathbf{X}_0$  con la  $\mathbf{MTH}$ , de donde se obtiene,

$$\mathbf{X}' = \mathbf{MTH} \cdot \mathbf{X}_0, \quad (19)$$

donde los primeros tres elementos de cada columna son las posiciones instantáneas del punto de unión de cada pata con la plataforma móvil.

También se debe conocer el vector de posiciones de la unión de cada pata con la base, colocando cada vector en una columna de una matriz se obtiene,

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.75 & -1.5 & -0.75 & 0.75 & 1.5 \\ 1.3 & 1.3 & 0 & -1.3 & -1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Con el fin de obtener la longitud de las patas, en la matriz (19) se elimina el último reglón, nombrando a esta nueva matriz  $\mathbf{X}$ . Se tienen entonces las posiciones instantáneas de la unión de cada pata con la plataforma móvil en cada columna de  $\mathbf{X}$  y la posiciones de la unión de cada pata con la base en cada columna de  $\mathbf{B}_0$ . Con lo anterior se obtiene la matriz que en cada columna contiene al vector de posición de cada pata:  $\mathbf{L} = \mathbf{X} - \mathbf{B}$ . Para facilitar los cálculos, ahora cada columna de la matriz  $\mathbf{L}$  se puede representar como,

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{B}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (21)$$

de manera que  $\mathbf{L}_i$  es el vector con que se puede obtener la magnitud y dirección de cada pata de la PSG. La longitud de cada pata es así la magnitud del vector  $\mathbf{L}_i$ ,

$$l_i = \|\mathbf{L}_i\|. \quad (22)$$

## 2.2. Cinemática de un CEO basado en la PSG

Anteriormente se describió el oleaje, sus parámetros característicos y las ecuaciones que caracterizan el movimiento del oleaje lineal. Además se presentó la ecuación de la cinemática inversa de la PSG; que relaciona el movimiento de la plataforma móvil y las patas de la PSG. En esta sección se vincula el oleaje con la cinemática inversa de la PSG con el fin de tener una idea del comportamiento de un CEO basado en la PSG.

En este trabajo se adopta la idea de que la plataforma móvil es un elemento de flotación (una boya por ejemplo) y como primera aproximación es tangente a la superficie libre del océano aún cuando se mueve. Con esta aproximación se logra que las variables del movimiento del elemento de flotación se pueden describir en función de parámetros del oleaje.

Es posible escribir el vector de la posición del centro de masa del elemento de flotación con,

$$\zeta = A \cos(kx + ly - \omega t), \quad \text{paralelo al eje } z \quad (23a)$$

$$\xi = A \sin(kx + ly - \omega t), \quad \text{paralelo al eje } x \quad (23b)$$

$$\iota = A \sin(kx + ly - \omega t), \quad \text{paralelo al eje } y, \quad (23c)$$

del lado izquierdo están las coordenadas del centro de masa del elemento de flotación que se relacionan con las trayectorias de partículas de fluido en el lado derecho.

Las rotaciones del centro de masa del elemento de flotación se pueden describir con,

$$\theta = 0, \quad \text{alrededor de } z \quad (24a)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad \text{alrededor de } y \quad (24b)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad \text{alrededor de } x, \quad (24c)$$

donde del lado izquierdo están los ángulos de la rotación del elemento de flotación que se relacionan con la superficie libre del oleaje  $\eta$  del lado derecho.

Las ecuaciones (23) y (24) son las coordenadas de movimiento del elemento de flotación y representan los seis grados de libertad del movimiento del elemento de flotación de la PSG. Sustituyéndolas en **MTH** se puede obtener la longitud de las patas de la PSG debido al oleaje. Con lo que se tiene la cinemática inversa de un CEO basado en la PSG.

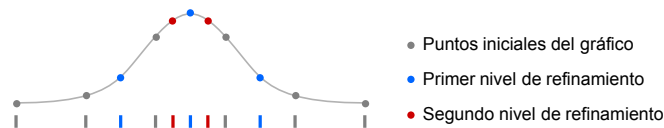
## Software utilizado en el análisis

Todas las gráficas y simulaciones se realizaron en Mathematica 11.0. Mathematica es un software que asimila de manera simbólica las ecuaciones, por lo que una ecuación en Mathematica es muy similar a como la escribimos a mano. Mathematica cuenta con un *front end* o notebook que es donde interactúa el usuario con el *kernel* o núcleo del software.

Por ejemplo la ecuación (17) en el *front end* de Mathematica se vería,

$$Mtransformacion[px_, py_, pz_, \psi_, \phi_, \theta_] := \begin{pmatrix} \cos[\phi] \cos[\theta] \sin[\psi] \sin[\phi] \cos[\theta] - \cos[\psi] \sin[\theta] \cos[\psi] \sin[\phi] \cos[\theta] - \sin[\psi] \sin[\theta] & px \\ \cos[\phi] \sin[\theta] \sin[\psi] \sin[\phi] \sin[\theta] + \cos[\psi] \cos[\theta] \cos[\psi] \sin[\phi] \sin[\theta] - \sin[\psi] \cos[\theta] & py \\ -\sin[\phi] & \sin[\psi] \cos[\phi] & \cos[\psi] \cos[\phi] & 1 \end{pmatrix}$$

Para graficar una función inicialmente Mathematica evalúa la función  $f$ , en una cantidad de puntos de muestra espaciados similarmente, especificados por *PlotPoints*. Como sólo se usa un número finito de puntos de muestra, es posible que el trazo pierda características de  $f$ . Luego utiliza un algoritmo adaptativo para elegir puntos de muestra adicionales, subdividiendo un intervalo dado especificado por el algoritmo *MaxRecursion*. El aumento de la configuración de *PlotPoints* y *MaxRecursion* a menudo atraparán las características de la función  $f$  (Wolfram Research, Inc., 2016).



**Figura 6:** Ejemplo de un gráfico realizado en Mathematica donde se aprecia como funciona el algoritmo *MaxRecursion*, imagen tomada de Wolfram Research, Inc. (2016)

### 2.3. Ecuaciones de movimiento de un CEO con un grado de libertad, derivadas con la formulación lagrangiana

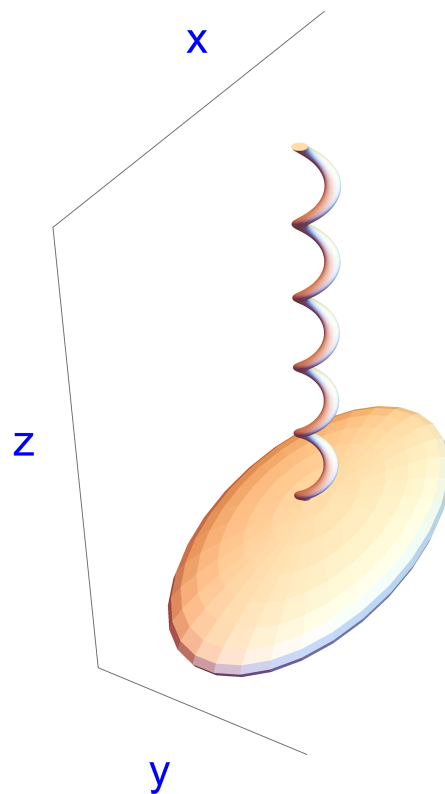
En la sección anterior se mostró como se transfiere el movimiento de las olas al elemento de flotación de la PSG de donde es convertido a movimiento lineal en las patas. Lo importante es que este movimiento lineal es el que podría generar energía eléctrica por ejemplo mediante un generador lineal de imanes permanentes. Dicho generador se puede considerar tiene un grado de libertad en su movimiento.

Hacer esto salva de considerar la dinámica de PSG incluyendo las patas, lo cual aún es un problema que no se ha resuelto analíticamente (Bingul y Karahan, 2012; Lebret *et al.*, 1993).

Por lo que en la presente sección se analiza y derivan la ecuaciones de un dispositivo CEO con un grado de libertad en su movimiento, que está formado por una boya y un generador lineal. Basándose en la dinámica de un altavoz (Preumont, 2006) se obtienen las ecuaciones de movimiento considerando la formulación lagrangiana. Además aplicando una transformada de Laplace se resuelve el sistema de ecuaciones de movimiento y con las soluciones se obtiene una función de transferencia entre la fuerza del oleaje que induce movimiento en la boya, con ésta se obtiene el voltaje que podría obtener un generador lineal, instalado en el CEO.

### 2.3.1. Ecuación del oscilador armónico simple

Se considera un oscilador que está formado por una masa y un resorte de masa despreciable que se puede imaginar está sujeto a una estructura fija, ver figura 7.



**Figura 7:** Esquema que representa un oscilador armónico, formado por un masa de forma elipsoidal y un resorte. La gravedad tiene dirección -z.

Además se considera que sobre la masa de este sistema actúa la gravedad terrestre  $g$ , el movi-

miento está restringido al eje  $\hat{z}$  y la fricción es despreciable. Con el fin de obtener la ecuación de movimiento del oscilador armónico simple se consideran como coordenadas generalizadas a  $z$  la posición y  $\dot{z}$  la velocidad. Para derivar la ecuación con la formulación lagrangiana se tiene que determinar el lagrangiano  $\mathcal{L}$ . Considerando la energía potencial  $\mathcal{E}_p$ ,

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kz^2, \quad (25)$$

Donde  $k$  es la constante elástica del resorte. La energía cinética  $\mathcal{E}_c$ ,

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2, \quad (26)$$

de forma que el lagrangiano se define como,

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2. \quad (27)$$

Para derivar la ecuación de movimiento del oscilador se sustituye el lagrangiano (27) en la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

y el resultado es,

$$m\ddot{z} + kz = 0, \quad (29)$$

la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple, que tiene soluciones conocidas que pueden ser  $\sin(\omega t)$  o  $\cos(\omega t)$  o una combinación lineal de ambas (Halliday *et al.*, 2013).

### 2.3.2. Ecuación del oscilador armónico forzado con oleaje lineal

En la sección anterior se presentó un sistema físico formado por una masa unida a un resorte, que representan a un oscilador armónico simple, y se obtuvo su ecuación de movimiento (29) con la

formulación lagrangiana. Con esta misma ecuación de movimiento (29), se pueden modelar otros sistemas físicos, por ejemplo, el de un objeto que está flotando en un fluido, como una boya de forma cilíndrica (en adelante sólo boya) que está en el agua, y que se le permite oscilar libremente.

Para describir el movimiento que ocasiona una ola lineal en una boya al modelo anterior representado por la ecuación (29) del oscilador armónico simple se le agrega un término que modela a una fuerza externa (el oleaje lineal). A continuación se derivan las ecuaciones de movimiento de una boya que oscila verticalmente debido al oleaje (ver la figura 8).

Al igual que para el caso del oscilador armónico simple, para derivar las ecuaciones de movimiento es necesario escribir la energía potencial  $\mathcal{E}_p$ ,

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}g\rho A_d z^2 = \frac{1}{2}k_f z^2, \quad (30)$$

donde  $\rho$  es la densidad de la boya y  $A_d$  es la sección transversal de la boya o área proyectada ( $A_d = \pi * a^2$ ) y el radio de la boya  $a$ . Por simplicidad se renombra las constantes como

$$k_f = g\rho A_d$$

Inicialmente la boya se encuentra en equilibrio estático o reposo y su centro de masa coincide con la superficie libre de un mar en calma, un momento después una ola induce movimiento sobre la misma.

La energía cinética  $\mathcal{E}_c$

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2, \quad (31)$$

y por definición el lagrangiano  $\mathcal{L}$  de la boya queda,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_f z^2), \quad (32)$$

poniendo (32) dentro de las ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = F(t), \quad (33)$$

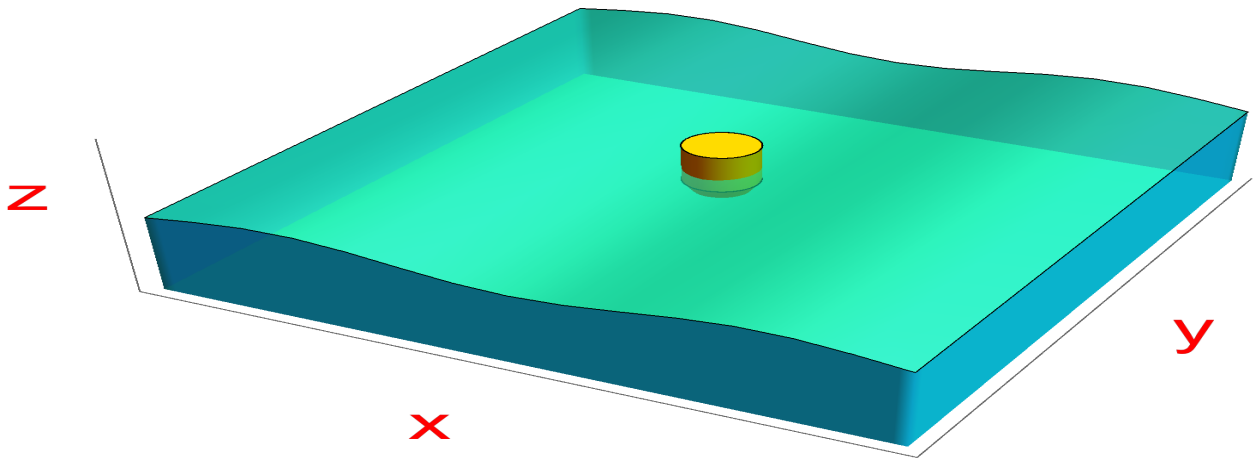
considerando el caso particular en que la fuerza  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = F_0 \cos(\omega t), \quad (34)$$

donde  $F_0$  es la amplitud de la fuerza que ejerce en este caso el oleaje sobre la boya. La ecuación de movimiento, se obtiene sustituyendo el lagrangiano (32) en (34) que es,

$$m\ddot{z} + k_f z = F_0 \cos(\omega t), \quad (35)$$

esta es la ecuación de movimiento del oscilador armónico forzado (Rañada, 2005), en nuestro caso en particular de una boya que es forzada a oscilar verticalmente por la acción del oleaje.



**Figura 8:** Esquema de una boya cilíndrica (amarillo) con el centro de gravedad en el origen que coincide con la superficie libre de una ola monocromática (turquesa). El movimiento de la boya debido a la ola está restringido a la dirección  $\hat{z}$ .

### 2.3.3. Ecuación del oscilador armónico forzado y con disipación

Aunque Feynman *et al.* (2013) comenta que la fricción es un fenómeno difícil de modelar de acuerdo a las experiencias. Como primera aproximación la fricción de un cuerpo en el seno de un



fluido se puede modelar como una función proporcional a la velocidad; a este tipo de fricción se le conoce como amortiguamiento de Stokes (Rañada, 2005).

De manera general cualquier tipo de fuerza de disipación se incluye en el término  $\partial P_d / \partial \dot{z}$  que se agrega en la ecuación de Euler-Lagrange (33) (Goldstein *et al.*, 2002), con lo que se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial P_d}{\partial \dot{z}} = F(t). \quad (36)$$

Al sistema formado por una boya cilíndrica que interactúa con una ola (ver figura 8); se agrega la función de disipación de energía  $P_d$ , considerando amortiguamiento tipo Stokes la función de disipación es de la forma,

$$P_d = \frac{1}{2} k_d \dot{z}^2, \quad (37)$$

en donde  $\dot{z}$  es la velocidad vertical de la boya y  $k_d$  la constante de disipación o amortiguamiento en donde se incluye la fricción. En el caso de la boya cilíndrica  $k_d$  es una constante que tiene la información de la fricción entre el agua y la boya; y se define como,

$$k_d = \frac{1}{2} \rho C_d A_d,$$

en donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $C_d$  es el coeficiente de arrastre y  $A_d$  es el área proyectada (McCormick, 2010).

Sustituyendo un forzamiento debido al oleaje de la forma de  $F_0 \cos(\omega t)$ , el lagrangiano (32) y la función de disipación (37) en la ecuación (36) y reacomodando términos se obtiene la ecuación de movimiento de una boya cilíndrica,

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_N^2 z = F_0 \cos(\omega t), \quad (38)$$

que considera la fricción. Por simplicidad se han agrupado constantes, donde a  $\omega_N = \sqrt{\frac{k_f}{m}}$  se le conoce como frecuencia característica o frecuencia natural, a  $\gamma = \frac{k_d}{2m}$  se le conoce como parámetro de amortiguamiento (Thornton y Marion, 2004). La ecuación (38) es una ecuación de movimiento de un oscilador armónico forzado y amortiguado (Rañada, 2005).

La ecuación (38) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, por lo que la solución general se puede obtener como la suma de solución a la ecuación homogénea  $z_h(t)$  más la solución particular  $z_1(t)$ ,

$$z(t) = z_h(t) + z_1(t). \quad (39)$$

Resolviendo primero la ecuación homogénea,

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_N^2 z = 0, \quad (40)$$

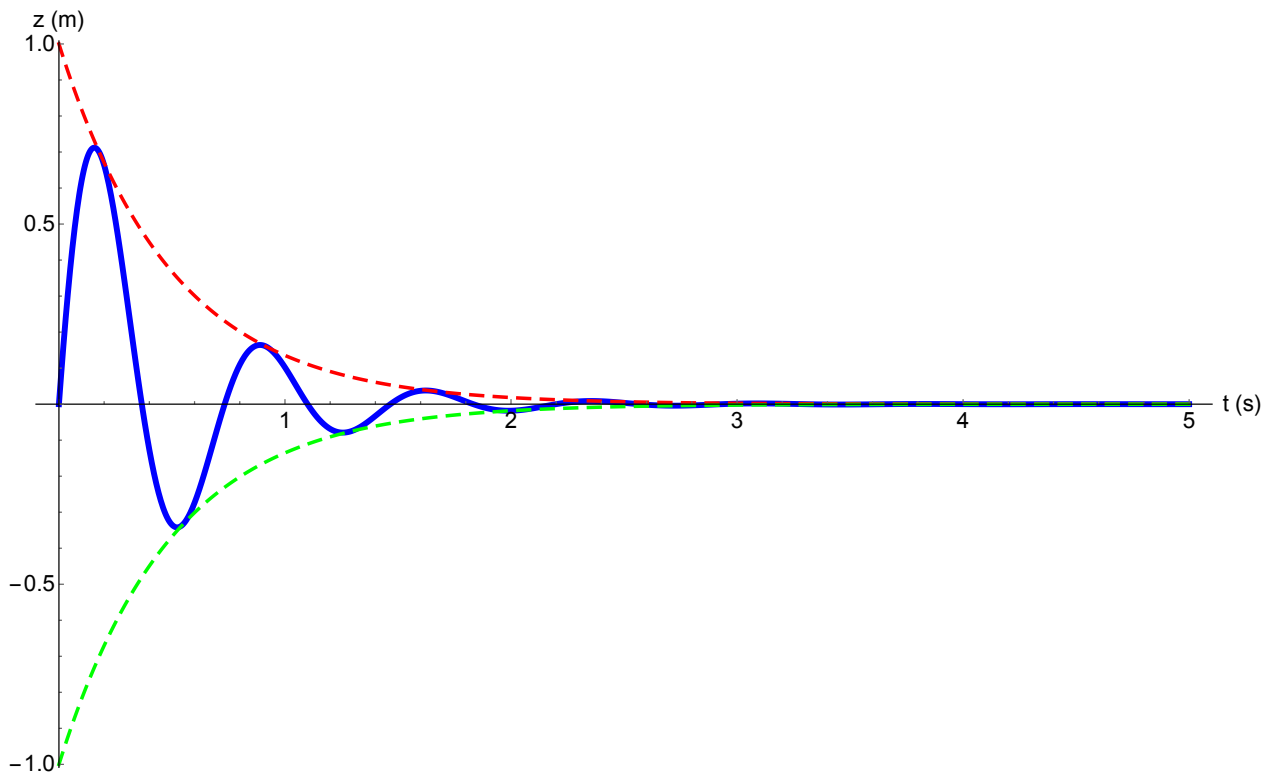
las soluciones de esta ecuación se agrupan en tres casos generales en el estudio del oscilador armónico amortiguado: amortiguamiento subcrítico ( $\omega_N^2 > \gamma^2$ ), amortiguamiento supercrítico ( $\omega_N^2 < \gamma^2$ ) y amortiguamiento crítico ( $\omega_N^2 = \gamma^2$ ).

En este trabajo importa el amortiguamiento subcrítico ( $\omega_N^2 > \gamma^2$ ), porque describe las oscilaciones de una boya cilíndrica en decaimiento libre (Tom, 2013). Resolviendo para el caso subcrítico se obtiene la solución homogénea,

$$z_h(t) = C \exp(-\gamma t) \text{sen}(\omega_\gamma t + \delta), \quad (41)$$

en donde  $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_N^2 - \gamma^2}$  es la frecuencia de oscilación de la boya,  $C^2 = z_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma z_0)^2}{\omega_\gamma^2}$  la amplitud de la oscilación,  $z_0$  y  $v_0$  son la posición inicial y la velocidad inicial de la boya respecto a un mar en calma. La oscilación decae con  $\exp(-\gamma t)$  y  $\delta$  es la fase.

El resultado de la solución homogénea se muestra en la figura 9, en donde se presenta la posición  $z_h(t)$  de la boya. Corresponde al caso de una boya que inicialmente se impulsa e inicia el movimiento y se deja oscilar libremente. La solución es el producto de una exponencial con una función seno los cual se puede observar en la gráfica azul. Las líneas punteadas representan el decaimiento exponencial.



**Figura 9:** Resultados de la posición  $z_h$  de una boya que corresponden con una oscilación amortiguada sin forzamiento, donde la línea sólida azul es la posición de la boya  $z_h$  en función del tiempo y las envolventes representan el decaimiento exponencial de la posición respecto al tiempo, se muestran con líneas punteadas.

La solución particular de la ecuación 38 es (Rañada, 2005),

$$z(t)_1 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega^2)^2 - 4\gamma^2\omega^2}} \text{sen}(\omega t - \beta), \quad (42)$$

en donde

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_N^2 - \omega^2}\right). \quad (43)$$

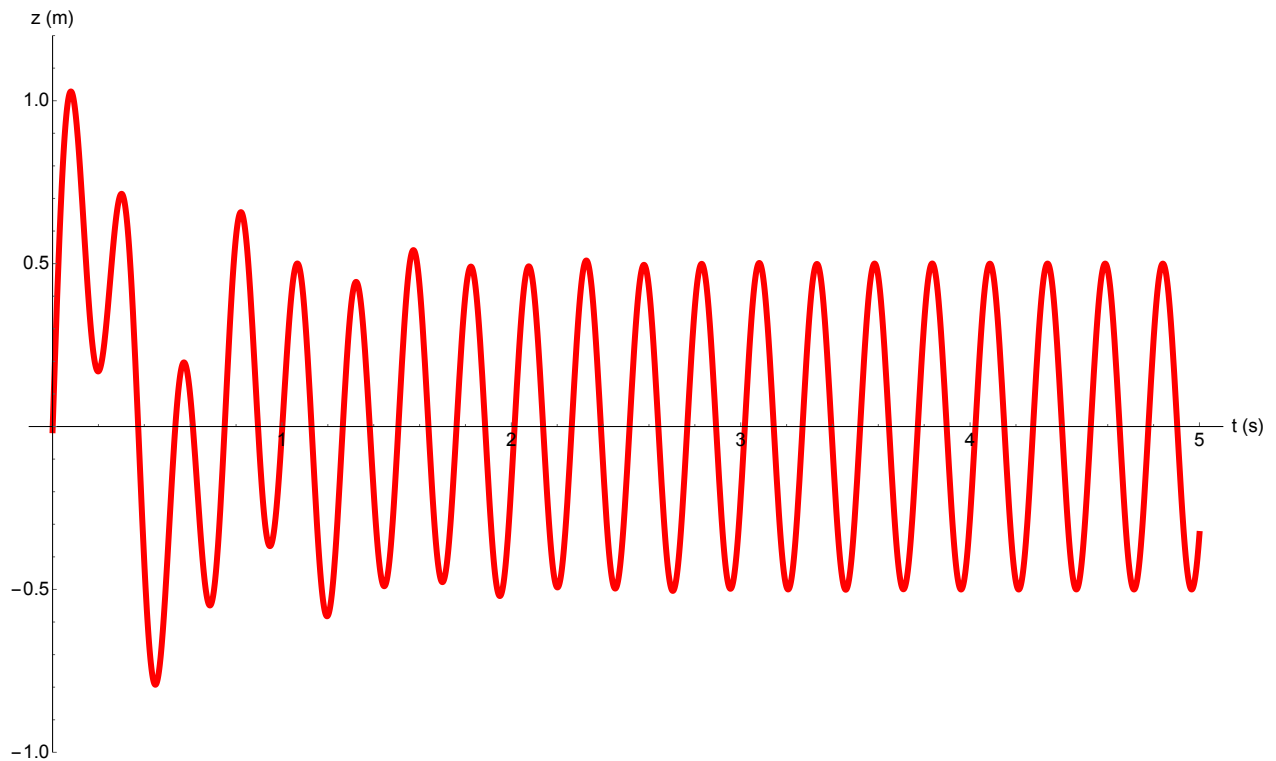
Añadiendo la solución homogénea (41) y la particular (42) en (39) se obtiene la solución general,

$$z(t) = C \exp(-\gamma t) \text{sen}(\omega_\gamma t + \delta) + \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega^2)^2 - 4\gamma^2\omega^2}} \text{sen}(\omega t - \beta), \quad (44)$$

con la que podemos describir el movimiento de la boya forzada por oleaje y amortiguada por fricción de Stokes.

En la figura 10 se muestran los resultados de la solución general (44). Se presenta la posición de la boya  $z$  en función del tiempo (la línea roja). En el caso en que la posición de la boya está en

le intervalo de tiempos  $t = 0\text{ s}$  y  $t = 2\text{ s}$  se dice que está en el régimen transitorio porque este comportamiento decae exponencialmente, en este intervalo dominan  $z(t)_h$  y  $z(t)_1$ . En el caso en que  $t \geq 2\text{ s}$ , la parte de la solución que domina es  $z(t)_1$  y a este régimen se le conoce como permanente.



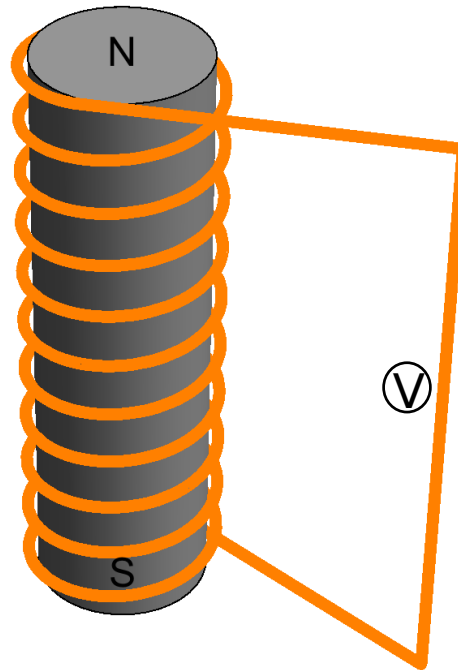
**Figura 10:** Gráfica de la solución general para el oscilador armónico amortiguado y forzado, que describe la posición  $z$  en función del tiempo.

#### 2.3.4. Principios del funcionamiento de un generador basado en un solenoide e imán

El funcionamiento de un generador eléctrico se puede basar en un imán que se mueve dentro de un solenoide, como el que se muestra en la figura 11. El imán se mueve debido a una fuerza externa que se ejerce en él. En este ejemplo nos interesa conocer la velocidad con la cual se mueve el imán debido a esa fuerza.

La formulación lagrangiana es más general que la de Newton-Euler, así se puede utilizar para incorporar sistemas electromagnéticos en el tratamiento del problema (generador eléctrico). En esta sección se deriva la ecuación que modela un generador lineal sencillo como el de la figura 11.

Primero se trata el caso sin resistencia eléctrica y a continuación el caso con resistencia eléctrica.



**Figura 11:** Esquema de un imán (cilindro gris) dentro de un solenoide (línea naranja). El solenoide puede ser un alambre de cobre por ejemplo. Si el imán se mueve respecto al solenoide entonces se genera una corriente eléctrica en el mismo, inducida por el cambio del campo magnético en el solenoide.

En este ejemplo además, las coordenadas generalizadas que se consideran son la carga  $q$  y su derivada temporal  $\dot{q}$ , que es la corriente eléctrica  $I = \dot{q}$  por definición.

Una vez definidas las coordenadas generalizadas que se desean utilizar, se determina el lagrangiano  $\mathcal{L}$ . A partir de la energía potencial  $\mathcal{E}_p$  y la energía cinética  $\mathcal{E}_c$ . En este caso en particular la energía potencial es cero

$$\mathcal{E}_p = 0, \quad (45)$$

esto es porque no hay un componente en este sistema que almacene energía potencial eléctrica. Por ejemplo se necesitaría un capacitor para almacenar energía potencial.

De acuerdo a Preumont (2006), la energía cinética  $\mathcal{E}_c$  de un sistema solenoide e imán debe escribirse como,

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(L\dot{q}^2) + T\dot{q}(z - z_0), \quad (46)$$

donde  $L$  es la inductancia,  $T$  es la constante de transducción definida por  $T = 2\pi NrB$ ,  $z_0$  es la posición del centro de masa del imán,  $N$  es el número de espiras del solenoide,  $r$  es el radio del solenoide y  $B$  es el campo magnético del imán. A partir de la definición de lagrangiano  $\mathcal{L}$ , tenemos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(L\dot{q}^2) + T\dot{q}(z - z_0). \quad (47)$$

En la ecuación de Euler-Lagrange para sistemas electromagnéticos se tiene un termino análogo al forzamiento externo (aunque realmente no es una fuerza), a este termino análogo se llama fuerza electromotriz  $FEM$  ( $V_\epsilon(t)$ ) cuyas unidades son voltios (V), se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = V_\epsilon(t). \quad (48)$$

Esta ecuación es similar a (33), pero las unidades no son Newtons sino voltios. Sustituyendo el lagrangiano  $\mathcal{L}$  de (47) en (48) se obtiene la ecuación de movimiento para un sistema solenoide e imán sin considerar la resistencia eléctrica, tal que,

$$L\ddot{q} + T\dot{z} = V_\epsilon(t). \quad (49)$$

Por simplicidad se ha descrito el sistema electromagnético sin resistencia, y con analogía al modelo mecánico de una boya cilíndrica. Análogamente como se hizo en el sistema mecánico se escribe la ecuación de Euler-Lagrange con un término disipativo como,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial P_d}{\partial \dot{q}} = V_\epsilon(t), \quad (50)$$

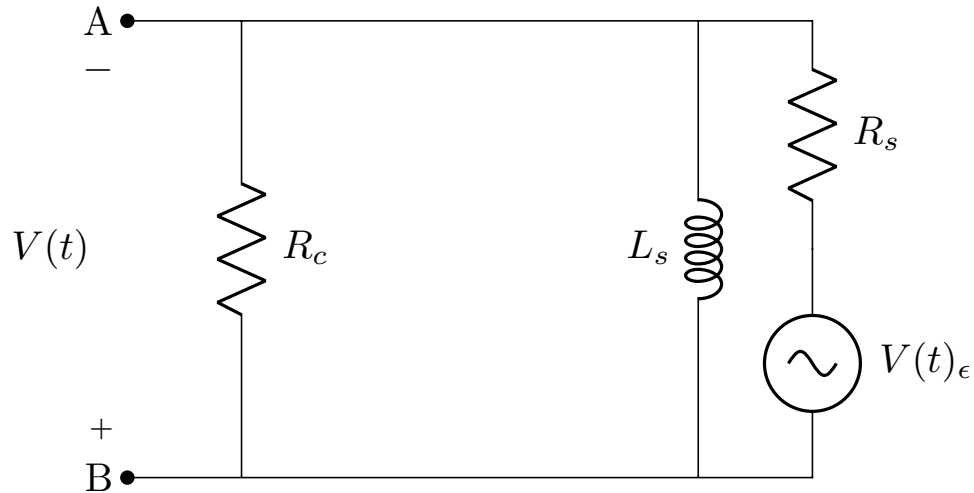
Ahora, se considerará al sistema electromagnético con resistencia eléctrica  $R$  del alambre que forma el solenoide. La resistencia  $R$  es un termino análogo a  $K_d$ . La función de disipación  $P_d$  para el sistema electromagnético se define como,

$$P_d = \frac{1}{2}R\dot{q}^2, \quad (51)$$

de manera que sustituyendo la función de disipación (51) y el lagrangiano (47) en la ecuación de Euler-Lagrange (50) se obtiene,

$$L\ddot{q} + T\dot{z} + R\dot{q} = V_\epsilon(t), \quad (52)$$

que es la ecuación que describe el movimiento de las cargas en un sistema electromagnético, formado por un solenoide y un imán. En la figura 12 se muestra el diagrama eléctrico asociado con este sistema.



**Figura 12:** Circuito RL (Resistencia-Inductancia) equivalente del sistema solenoide imán, donde  $V_\epsilon$  representa al voltaje que se genera al moverse el imán (ver apéndice A para la relación entre  $V_\epsilon$  con el imán),  $L$  la inductancia que tiene el solenoide y  $R$  es la suma de la resistencia eléctrica interna del solenoide  $R_s$  y la resistencia eléctrica de carga  $R_c$ .  $V(t)$  es el voltaje medido entre las terminales  $A$  y  $B$

Una descripción detallada de un generador lineal se puede encontrar en (Niu, 2013), donde muestra la ecuación,

$$V_\epsilon(t) = L\ddot{q} + R\dot{q} + V, \quad (53)$$

y describe que el voltaje en las terminales del generador es el término debido a  $V = R_c\dot{q}$  y el valor de la fuerza electromotriz total de un generador es  $V_\epsilon$ . En contraste, en este trabajo se presenta la forma en como se transfiere la información externa al sistema eléctrico mediante la constante de transducción  $T$  en la ecuación (52). Además en (Wang *et al.*, 1999), se puede revisar una descripción más general.

### 2.3.5. Ecuaciones de movimiento de un sistema electromecánico

En la sección 2.3.3 se obtuvo la ecuación de movimiento de una boya que oscila debido al oleaje considerando amortiguamiento de Stokes. En la sección 2.3.4 se obtuvo la ecuación de un sistema electromagnético que genera voltaje.

En esta sección se acoplan los modelos matemáticos de esos dos sistemas: el de la boya y el de un generador lineal; con el fin de describir el comportamiento de un dispositivo CEO con un grado de libertad en su movimiento (ver figura 13).

Para establecer el lagrangiano del sistema formado por la boya y un generador lineal cuando oleaje induce movimiento. Primero se escribe la energía cinética  $\mathcal{E}_c$ , que contiene la de ambos sistemas

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(m\dot{z}^2) + \frac{1}{2}(L\dot{q}^2) + T\dot{q}(z - z_0), \quad (54)$$

se define la energía potencial  $\mathcal{E}_p$ , que contiene la de ambos sistemas

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(k_f z^2), \quad (55)$$

Restando a (54) la ecuación (55) se puede definir el lagrangiano  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{z}^2) + \frac{1}{2}(L\dot{q}^2) + T\dot{q}(z - z_0) - \frac{1}{2}(k_f z^2). \quad (56)$$

Se establece una función disipativa que incluye la función disipativa del sistema mecánico y del sistema electromagnético,

$$P_d = \frac{1}{2}k_d \dot{z}^2 + \frac{1}{2}R\dot{q}^2. \quad (57)$$

El lagrangiano (56) y la función de disipación (58) se sustituyen en la ecuación de Euler-Lagrange, sin embargo ahora se obtienen dos ecuaciones de Euler-Lagrange, una por cada grado de libertad, uno asociado con el desplazamiento vertical de la boya y el otro asociado con la coordenada  $q$  la carga eléctrica; tal que,



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial P_d}{\partial \dot{z}} = F(t), \quad (58)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial P_d}{\partial \dot{q}} = V_\epsilon(t). \quad (59)$$

Ahora, sustituyendo en el lagrangiano acoplado (56) y la función disipativa acoplada (57), en las ecuaciones de Euler-Lagrange (58) y (59) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$m\ddot{z} + k_d\dot{z} + k_fz - T\dot{q} = F(t), \quad (60)$$

donde el primer término representa las fuerzas inerciales, el segundo las fuerzas disipativas, el tercero la fuerza debida a la flotabilidad de la boya y el cuarto termino es la fuerza que se transmite al sistema eléctrico. Del lado derecho  $F(t)$  es la fuerza transferida del oleaje al CEO.

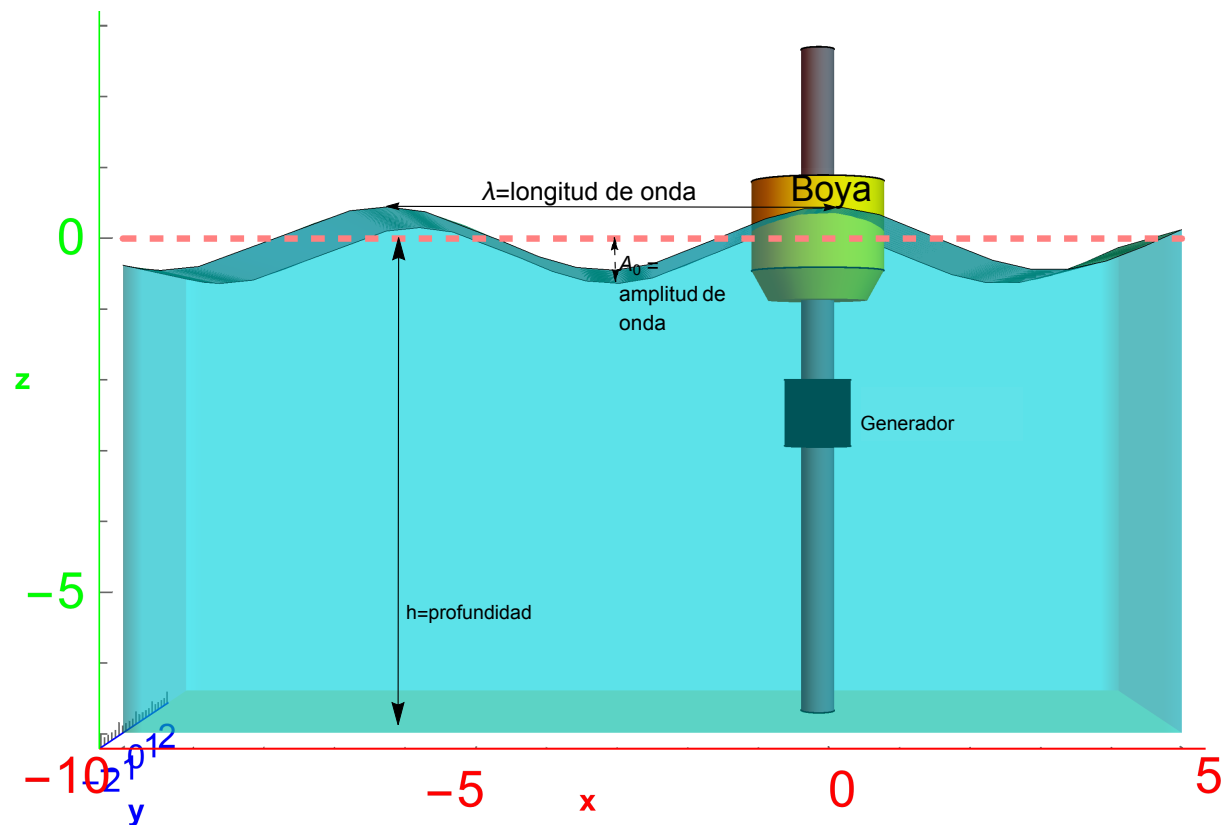
$$L\ddot{q} + T\dot{z} + R\dot{q} = V_\epsilon(t), \quad (61)$$

en donde contando de izquierda a derecha el primer término es el voltaje inducido en el solenoide por el imán, el segundo es el voltaje que se transfiere a las bobinas debido al movimiento de la boya por acción de las olas, el tercer término es la disipación por la resistencia eléctrica, y del lado derecho  $V_\epsilon(t)$  representa una fuente externa de voltaje o FEM.

Las ecuaciones (60) y (61), forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, que modelan al sistema boya y generador lineal. La conexión de las ecuaciones acopladas se establece mediante  $T$ , la constante de transducción.

El sistema ecuaciones acopladas (60) y (61) es un paso para estimar el voltaje que podrá obtenerse al convertir la fuerza de una ola que induce movimiento en una boya. Además de resolver el sistema de ecuaciones es necesario que conocer el campo magnético (determinado por el tipo de imán), la resistencia eléctrica del alambre (que depende de la longitud de la espira y el grosor del cable), las dimensiones de la boya y la fuerza del oleaje.

Para encontrar la relación entre la fuerza del oleaje  $F(t)$  y el voltaje  $V_\epsilon(t)$  obtenido, se requiere resolver las ecuaciones acopladas (60) y (61). Esta relación y su forma se obtienen en la siguiente



**Figura 13:** Esquema de un dispositivo CEO con un grado de libertad de movimiento, en color naranja esta el nivel medio del mar, en turquesa se puede apreciar el oleaje. El CEO está constituido por una boya (amarillo) acoplada con un generador eléctrico (negro) y pueden desplazarse libremente en el eje vertical (gris) debido a que el oleaje induce movimiento en ella.

sección.

### 2.3.6. Voltaje estimado del CEO con un generador lineal.

En las secciones 2.3.3, 2.3.4 y 2.3.5 se derivaron ecuaciones de movimiento para diferentes sistemas con la formulación lagrangiana. Utilizando esta formulación se obtuvo un sistema de dos ecuaciones acopladas para describir el comportamiento de un CEO, es decir incorporando a la dinámica de la boya, la del generador eléctrico. En esta sección se usará ese sistema de dos ecuaciones para obtener una relación entre la fuerza de una ola y el voltaje que podría obtenerse del generador. A esa relación se le conoce de manera general como la función de transferencia.

En el diseño de naves marinas, estructuras marinas y dispositivos CEO las funciones de transferencia se usan de manera recurrente para estudiar la amplitud de la oscilación de un flotador en respuesta a la amplitud de la oscilación del oleaje. (*response amplitude operator* RAO); (Egeland

y Gravdahl, 2002; Hoen, 2009; Tom, 2013).

Para obtener la función de transferencia se usará la transformada de Laplace ( $\mathcal{TL}$ ), que es un método para resolver ecuaciones diferenciales (Preumont, 2006). La ventaja de este método es que se pasa de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas. Con las soluciones del sistema algebraico se procederá a determinar la función de transferencia. Una vez que se obtienen la función de transferencia se aplica un transformada inversa de Laplace ( $\mathcal{TIL}$ ) con el fin de tener las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

Si existe la  $\mathcal{TL}$  de la señal resultante y la señal de original, se puede encontrar una función de transferencia que las relaciona (Bendat y Piersol, 2011). Esto es mediante la ecuación,

$$Y(t) = H(t)X(t), \quad (62)$$

donde,  $t$  es el tiempo,  $Y(t)$  es la señal resultante,  $X(t)$  es la señal de original y  $H(t)$  es la función de transferencia.

Para determinar la función de transferencia  $H(t)$ , se aplica la  $\mathcal{TL}$  a la ecuación (62), considerando que la función de transferencia ahora es una relación algebraica definida por,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (63)$$

donde las funciones  $H(s)$ ,  $Y(s)$  y  $X(s)$  están en el espacio transformado de Laplace que se indica con la variable  $s$  que es un número complejo.

En particular en este caso la señal resultante es el voltaje del dispositivo  $V(t)$  y la función original es la fuerza del oleaje  $F(t)$  que induce el movimiento vertical de la boya.

La fuerza del oleaje  $F(t)$  es una función que es conocida. El voltaje  $V(t)$  se puede medir en las terminales del generador como lo que aporta y puede describirse como:

$$V = R\dot{q} \quad (64)$$

de donde  $\dot{q}$  es una incógnita, pero se obtiene al resolver las ecuaciones acopladas (60) y (61).

De manera que aplicando  $\mathcal{TL}$  la función de transferencia se define con,

$$H(s) = \frac{V(s)}{F(s)}, \quad (65)$$

En la ecuación (61) consideramos que  $V_\epsilon = 0$ , porque no hay una fuente de voltaje en este modelo.

A continuación aplicamos la  $\mathcal{TL}$  y se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas

$$(ms^2 + k_d s + k_f)z - Tsq = F(s), \quad (66)$$

$$Tsz + (Ls^2 + Rs)q = 0, \quad (67)$$

y aplicando la regla de cramer se puede resolver facilmente.

La solución del sistema de ecuaciones (66) y (67) es,

$$z = \frac{F(s)(Ls^2 + Rs)}{(ms^2 + k_d s + k_f) - (Ts)^2}, \quad y \quad (68)$$

$$q = \frac{-TsF(s)}{(ms^2 + k_d s + k_f) - (Ts)^2}. \quad (69)$$

Considerando el resultado del sistema, el voltaje en las terminales está dado por  $V(s) = Rsq$  que es la  $\mathcal{TL}$  de la ecuación (64). Utilizando (69) se obtiene que,

$$V(s) = Rs \frac{-TsF(s)}{(ms^2 + k_d s + k_f) - (Ts)^2}. \quad (70)$$

Además, sustituyendo (70) y la  $\mathcal{TL}$  de la señal original de la fuerza  $F(s)$  en (65) se obtiene la función de transferencia de forma que,

$$H(s) = \frac{Rs(-Ts)}{(ms^2 + k_d s + k_f) - (Ts)^2}. \quad (71)$$

En general la función de transferencia  $H(s)$  caracteriza la respuesta de un sistema ante un agente

externo Rañada (2005).

En particular la función de transferencia (71) caracteriza la respuesta del CEO con 1GLMV debido a la fuerza del oleaje que induce el movimiento.

Para obtener la señal resultante en función de tiempo es necesario aplicar la  $\mathcal{TIL}$  a la ecuación (71) y se obtiene que,

$$V(t) = H(t)F(t) \quad (72)$$

donde la  $F(t)$  es la fuerza del oleaje que induce el movimiento,  $V(t)$  el voltaje generado por el CEO con 1GLMV y  $H(t)$  es la función de transferencia en función del tiempo. La ventaja es que voltaje generado  $V(t)$  está en función de la fuerza del oleaje  $F(t)$  que induce el movimiento multiplicada por la  $H(t)$ .

Para finalizar se acostumbra representar gráficamente la función de transferencia  $H(s)$  en términos de su modulo  $|H(s)|$  y su argumento  $\arg H(s)$  en el espacio de frecuencias. A dicha representación gráfica se le conoce como diagrama de Bode y es gran de apoyo para entender la respuesta dinámica de estructuras ante el forzamiento con diversas frecuencias de forzamiento (Beards, 1996), en este trabajo también se considera para estudiar la respuesta dinámica del CEO.

## Capítulo 3. Resultados y discusiones

---

En este capítulo se presentan y discuten los resultados obtenidos en este trabajo, principalmente enfocados en dos aspectos:

- a) La comprensión de las características cinemáticas de un dispositivo CEO basado en la PSG. Los resultados de considerar que una ola monocromática induce movimiento en la PSG, se presentan en la sección 3.1. El movimiento inducido produce un alargamiento o acortamiento en las patas de la PSG. Se realizaron ejercicios numéricos considerando oleaje monocromático con diferentes frecuencias y amplitudes. Es importante mencionar que una de las principales suposiciones es que la plataforma es un dispositivo puntual.

Se encuentra que en general es difícil tener soluciones analíticas de la dinámica de la PSG considerando las patas con masa (Lebret *et al.*, 1993; Bingul y Karahan, 2012). Se aborda el problema con simplificaciones importantes. Como primera aproximación se considera que los movimientos de la PSG (considerado cinemática inversa) se convierten en movimiento lineal en cada una de sus patas (Lotfi y Huang, 2014) y es precisamente ese movimiento lineal el que se puede transformar en energía, se analiza la dinámica de un generador con un sólo grado de libertad en su movimiento, y por ende con una sola pata o generador lineal.

- b) La descripción de las características electromecánicas de un dispositivo CEO con un grado de libertad para utilizarlo como pata de la PSG. En la sección 3.2 se presentan los resultados de un sistema de ecuaciones de movimiento de un dispositivo CEO con un grado de libertad, considerando un generador lineal con una bobina. Con las soluciones de las ecuaciones de movimiento se obtiene una función de transferencia entre la fuerza del oleaje que es capturada por el CEO y la conversión a voltaje y corriente, y se presentan los resultados de la estimación de la potencia.

### 3.1. Dispositivo CEO basado en la PSG

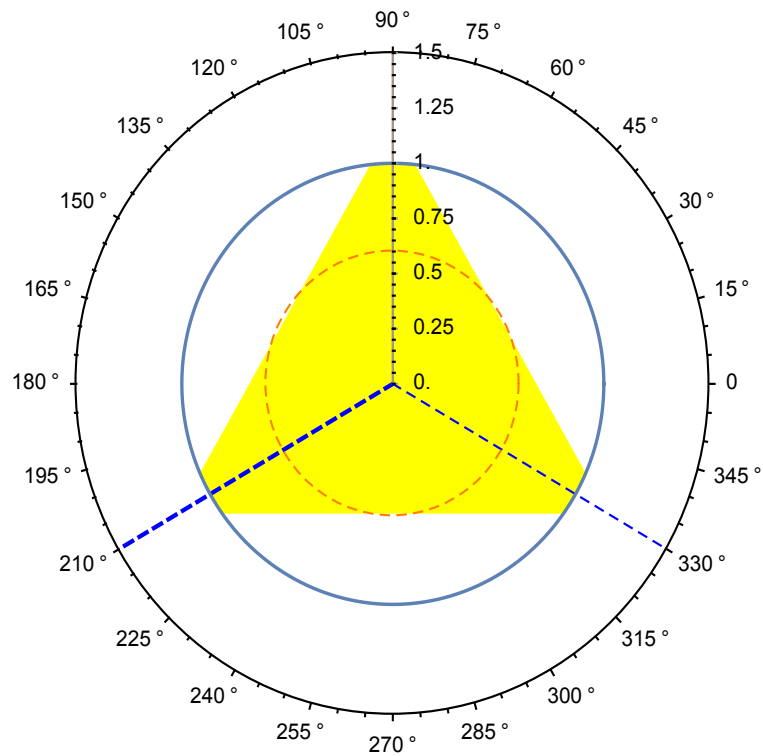
Considerando la cinemática inversa se aborda el estudio del movimiento de un dispositivo CEO basado en la PSG. En la sección 2.1.3 se explicó brevemente que, la cinemática inversa se utiliza

para describir la longitud de las patas de la PSG una vez establecidas la posición y orientación de la plataforma (ver imagen 5).

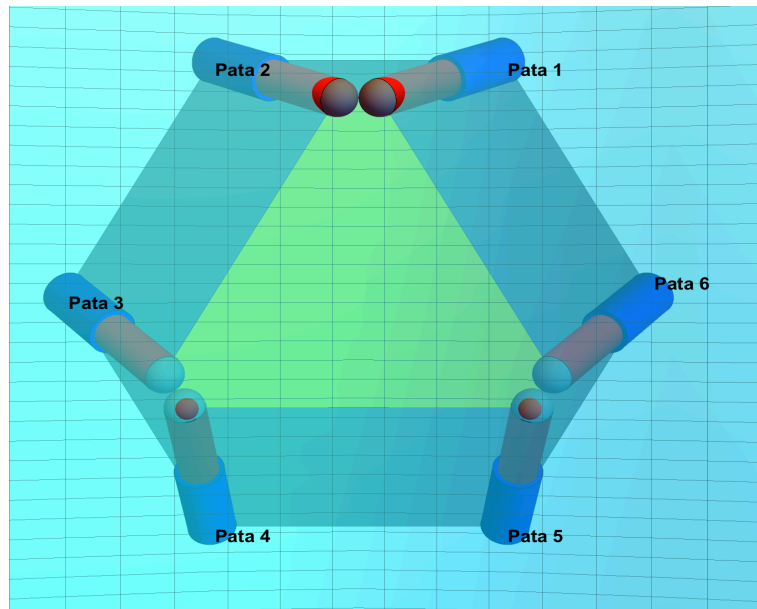
El dispositivo CEO basado en la PSG que se analiza se muestra desde las siguientes perspectivas, en la figura 5 se muestra una perspectiva frontal donde en estado de reposo o inicial la distancia entre el elemento de flotación (la plataforma) y la base es de 1 m, el grosor del elemento flotante es de 0.1 m. Los vectores de posición de cada una de las patas (rojo y azul) se describen con la ecuación (21). En la figura 14 se muestra una perspectiva superior, la distancia  $a = 1$  m entre el centro del elemento flotante y la unión con las patas, que es el radio del círculo externo (azul).

Se considera que la PSG que se analiza es tangente a la superficie libre del mar. Por lo tanto se supone que la plataforma es una boya con su centro de masa justo en la superficie libre; también se supone que la frecuencia del movimiento de la boya es igual a la frecuencia del oleaje monocromático incidente. Otra suposición que es importante es que las fuerzas de amortiguamiento y de fricción de los convertidores lineales (las patas) son despreciables comparadas con la fuerza del oleaje, de manera que el desplazamiento de la plataforma es igual al desplazamiento de las partículas de fluido que se encuentran en la superficie libre del mar.

Otra consideración importante es que el CEO que se basa en la PSG se considera un dispositivo puntual. De acuerdo con Mei *et al.* (2005) un dispositivo se considera puntual si su dimensión característica  $a$  es pequeña comparada con la longitud de onda  $\lambda$  del oleaje incidente, es decir si se cumple que  $ka \ll 1$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ), en particular la dimensión característica es el radio  $a$  del CEO en este trabajo.



**Figura 14:** Vista superior del elemento flotante de la PSG. El ángulo  $0^\circ$  coincide con el eje  $x$  y el ángulo  $90^\circ$  con el eje  $y$ . La circunferencia azul de radio=1 m circunscribe a la plataforma, la circunferencia naranja de líneas punteadas circunscribe un radio interior de la plataforma. Las líneas punteadas azules son líneas de simetría de PSG, al igual que el eje  $y$ .



**Figura 15:** Vista superior de la PSG. En amarillo se muestra el elemento flotante, en gris la base y los cilindros de azul y rojo las patas; la superficie libre se representa con azul turquesa. Las patas se enumeran en sentido antihorario. La posición y orientación de las patas que se observa corresponde con  $t = 0$  s.

Con la ecuación (22) se obtiene la longitud de cada pata y su variación en el tiempo, y se analizan gráficas de la longitud de cada pata en función del tiempo para dos casos:



- i) Se presentan los resultados de la longitud de las patas, cuando el oleaje monocromático incide sobre el dispositivo CEO basado en la PSG, y se propaga en dirección  $x$ . Se realiza el análisis considerando dos casos en la frecuencia y amplitud del oleaje, una en la que se cumple  $ka \ll 1$  (ejercicio 1) y la otra en la que  $ka \simeq 1$  (ejercicio 2).
- ii) Se presentan los resultados de la longitud de las patas, considerando oleaje monocromático que varía la dirección (ejercicio 3 a  $90^\circ$ , ejercicio 4 a  $210^\circ$  y ejercicio 5 a  $330^\circ$ ) con que incide sobre el dispositivo CEO basado en la PSG manteniendo la frecuencia y la amplitud constantes considerando  $ka \ll 1$ .

**Tabla 1:** Se presentan algunas características del oleaje consideradas para las gráficas de la longitud de las patas de la PSG. Frecuencia del oleaje  $\omega$ , amplitud del oleaje  $A$ , longitud de onda  $\lambda$ , ángulo de incidencia  $\theta_i$  y la relación  $ka$  del tamaño la PSG (radio  $a$ ) respecto a la longitud de onda ( $k = 2\pi/\lambda$ ).

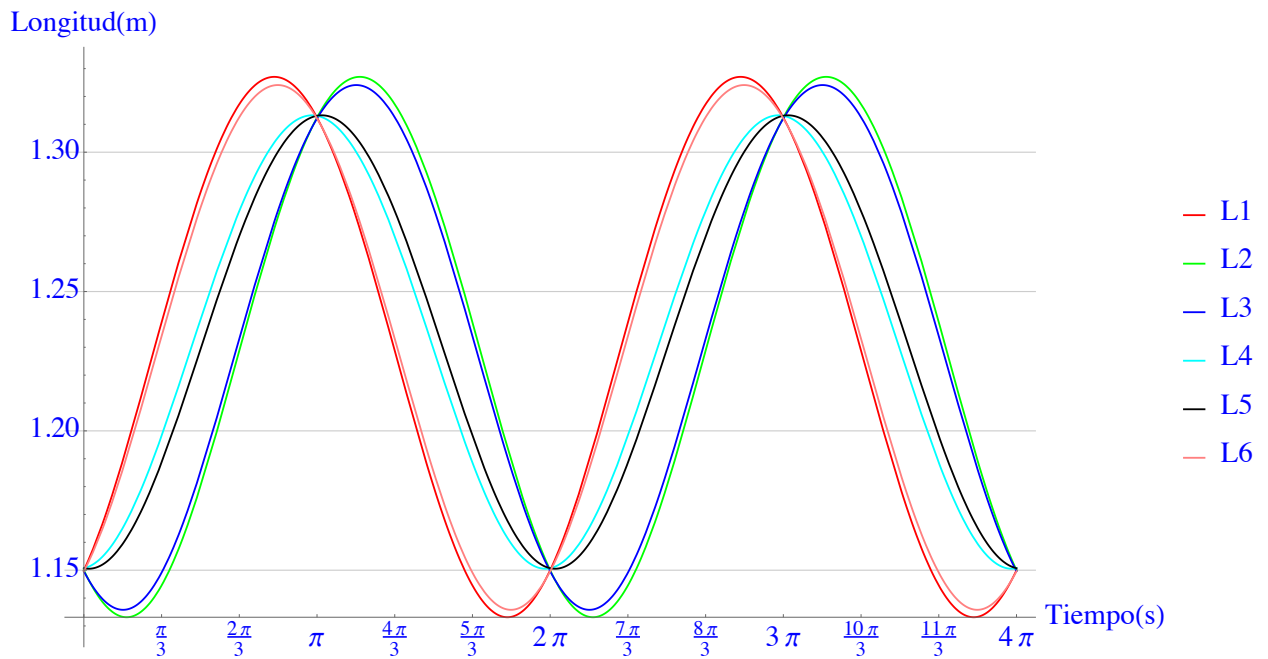
No. de Ejercicio	$\omega$	$\lambda$	$A$	$\theta_i$	$ka$
1	$1 \text{ rad s}^{-1}$	61.8 m	0.1 m	$0^\circ$	0.1
2	$3 \text{ rad s}^{-1}$	6.8 m	0.3 m	$0^\circ$	0.92

### 3.1.1. La longitud de las patas correspondiente al oleaje en dirección $x$

La longitud de las patas es la que hay entre la unión de la parte superior de la pata con el elemento de flotación y la unión de la parte inferior de la pata con la base. En esta sección se muestran los resultados de la longitud de las seis patas de la PSG al responder a una ola que induce el movimiento. En estos casos en particular la dirección en que viaja la ola se mantiene constante, variando la frecuencia y la amplitud de onda.

Se muestran a continuación los resultados de los dos casos estudiados:

**Ejercicio 1** Las características del oleaje más importantes consideradas en este ejercicio se resumen en la tabla 1.



**Figura 16:** Resultados de la longitud (m) de la seis patas de la PSG que corresponden al caso 1). En tabla 1 se presentan las características del oleaje.

Los resultados del primer ejercicio se presentan en la figura 16, donde se muestra la longitud de las seis patas de la PSG. En donde L1 representa la longitud de la pata 1, L2 la longitud de la pata 2,... y L6 la longitud de la pata 6. La escala de la longitud se encuentra en el intervalo entre 1.10 m y 1.36 m, donde se puede ver que la mínima longitud de una pata es 1.10 m. El tiempo es presentado en múltiplos de  $\pi$  para que se aprecien mejor los ciclos de oscilación.

Cuando la boya está en reposo la distancia entre la base y la boya (elemento de flotación) es de 1 m. En este caso de acuerdo con la geometría y las ubicación de la base, las patas presentan una longitud aproximada de 1.23 m. El valor de esta longitud es alrededor del cual oscilan las patas en la gráfica.

En la figura 16 se puede observar que hay cuatro patas que presentan una longitud máximo (casi igual a la altura de la ola), éstas son la L1, L2, L3 y L6 mientras que L4 y L5 presentan una longitud menor que la altura de la ola. La longitud de las patas cuando la PSG se considera un CEO depende de la posición y orientación de la pata, y de la orientación con que incide la ola sobre la PSG.

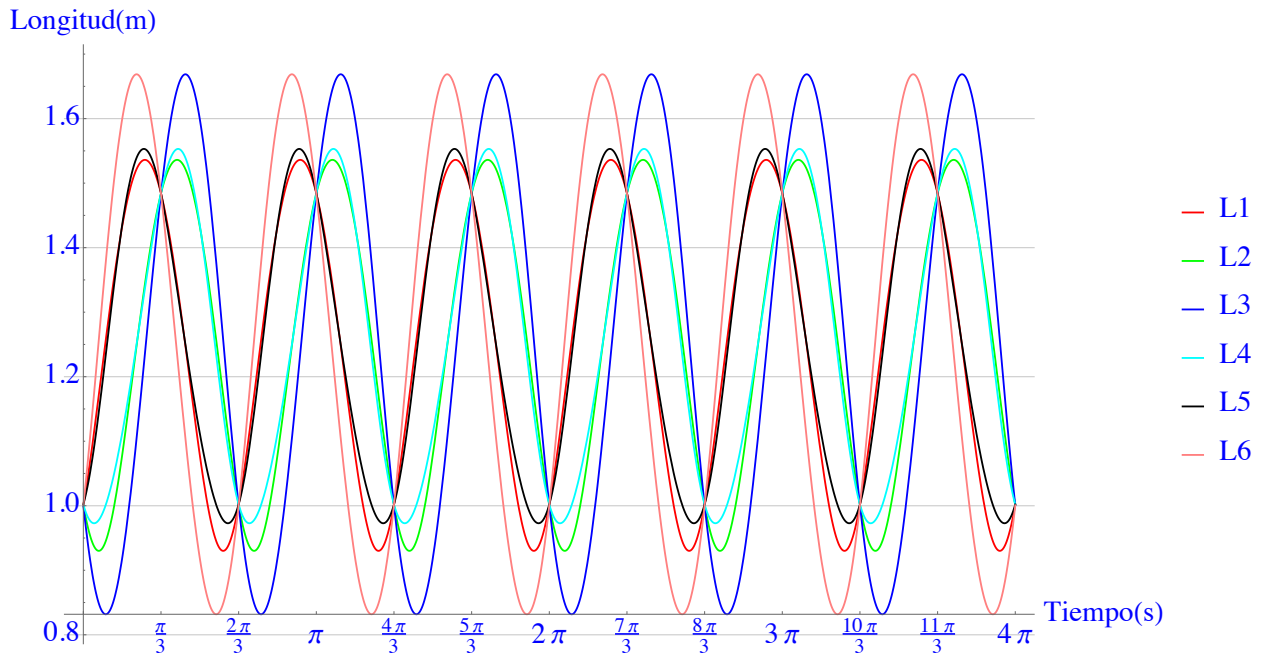
Cuando una ola monocromática induce movimiento en la PSG, el movimiento de una pata puede estar en un plano paralelo o perpendicular al del movimiento orbital de las partículas de fluido.

Cuando es paralelo la longitud máxima de las patas es igual a la altura de la ola. Esto es fácil de ver geoméricamente, cuando la pata está en el mismo plano la longitud máxima  $l_{max}$ , es la suma de la longitud mínima  $l_{min}$  más el diámetro  $D$  del círculo descrito por la trayectoria de la partícula de fluido (la altura de la ola) entonces es  $l_{max} = l_{min} + D$ . Por esto las patas 1, 2, 3 y 6 tienen una longitud que corresponde con la altura de la ola, están en un plano muy cercano al de las trayectorias de las partículas.

Cuando la longitud de las patas es perpendicular al plano del movimiento orbital de las partículas de fluido, la longitud máxima es menor a la altura de la ola esto se puede deducir de que la longitud máxima está dada por los catetos del triángulo formado por la longitud mínima  $l_{min}$  con el diámetro  $D$  del círculo descrito por la trayectoria de la partícula de fluido (la altura de la ola), entonces  $l_{max} = \sqrt{l_{min}^2 + D^2}$ . Por esto las patas 4 y 5 tienen una longitud menor a la altura de la ola, pues se encuentran en un plano que es casi perpendicular al del movimiento orbital. Estos dos casos son los límites, por lo que el resto de longitudes se encuentran dentro de un intervalo de las longitudes perpendiculares y paralelas.

Como último comentario del ejercicio 1 la longitud máxima no puede ser mayor que la altura de la ola. Esto es debido a que la longitud de onda (aproximadamente 61.5 m) es grande comparada con el radio de la PSG, con lo cual se cumple que  $ka \ll 1$  lo cual se había mencionado es condición de que el CEO es puntual y por lo tanto tangente a la superficie libre de la ola.

**Ejercicio 2)** Las características más importantes del oleaje consideradas en el segundo ejercicio se presentan en la tabla 1.



**Figura 17:** Resultados de la longitud (m) de las seis patas de la PSG para el caso 2). Las características del oleaje se resumen en la tabla 1.

Los resultados del segundo ejercicio se presentan en la figura 17. Se muestra la longitud de las seis patas de la PSG en donde la longitud mínima de una pata es 0.83 m. Cuando la superficie libre está sin movimiento y la boya está en reposo, la distancia entre la base y la boya (elemento de flotación) es de 1 m, a esta distancia las patas presentan una longitud aproximado de 1.23 m, que es la longitud alrededor del cual oscilan las gráficas de las longitudes de las patas en figura 17. Al igual que en el caso anterior el tiempo está en múltiplos de  $\pi$ .

En la figura 17 se puede apreciar que la amplitud de la longitud de L6 y L3, aproximadamente 0.9 m que es mayor que la altura del oleaje 0.6 m. Esto es debido a que la plataforma ha salido de la superficie libre, por lo que ya no es tangente a la superficie libre. Y el radio de la plataforma tiene un tamaño del orden de la longitud de onda (aproximadamente 3 m) que induce movimiento en la plataforma, por lo que ya no se puede considerar a la PSG un dispositivo puntual, esto es que  $ka \simeq 1$ . Por otro lado se puede observar que L1, L2, L4 y L5 presentan una longitud que corresponde con la altura de la ola.

De lo anterior para que la plataforma sea tangente a la superficie libre del oleaje, es importante que la longitud de la onda sea grande comparada con el tamaño de la plataforma, es decir  $ka \ll 1$ .

### 3.1.2. Las longitudes de las patas por oleaje incidiendo en diferentes direcciones

En esta sección se presenta el resultado de la longitud de las patas de la PSG variando las direcciones de incidencia del oleaje, manteniendo constantes la amplitud de onda y la frecuencia. Considerando también que la longitud de ola monocromática  $\lambda$  que induce movimiento sobre la PSG es mucho mayor que el radio  $a$  de la PSG. Con la cual la PSG se considera un dispositivo puntual,  $ka \ll 1$ .

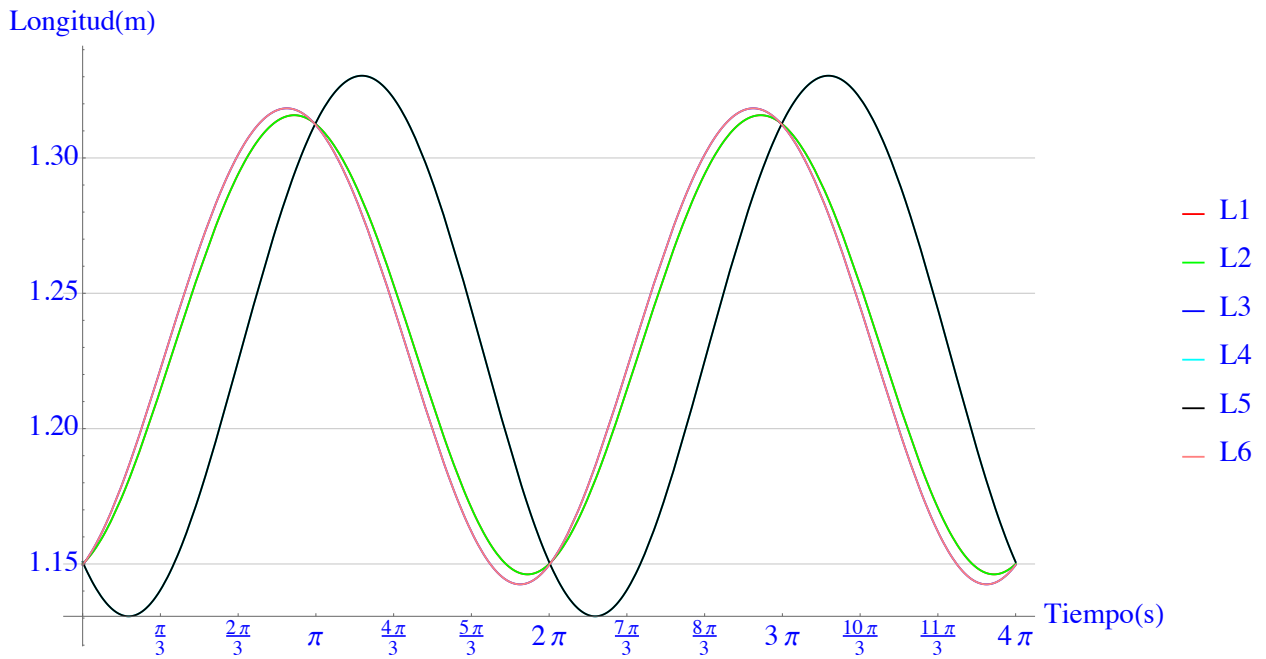
Las direcciones de incidencia del oleaje consideradas son ejercicio 3) a  $90^\circ$ , ejercicio 4) a  $210^\circ$  y ejercicio 5) a  $330^\circ$ ; en éstas direcciones la PSG tiene simetría, y son algunas de las simetrías más representativas. La geometría de la plataforma se puede observar en las figuras 14 y 15. En donde en la figura 14 se tiene una vista superior de la PSG y se muestra la orientación de la plataforma superior respecto a un sistema de coordenadas polares, el número 1 corresponde con el radio de la plataforma. En la figura 15 se pueden observar que las patas que unen a la plataforma (amarillo) y a la base (gris) están numeradas en sentido antihorario; en azul se muestra la superficie libre.

A continuación se muestran las gráficas de los casos estudiados, con las características antes mencionadas:

**Ejercicio 3)** Las características del oleaje de este ejercicio se resumen en la tabla 2. Se mostró en la sección anterior que con estos valores del oleaje el CEO es puntual. Los resultados de la longitud de las seis patas de la PSG del ejercicio se presentan en la figura 18. La propagación del oleaje monocromático es en dirección  $90^\circ$ . Se puede observar que las variaciones de las longitudes de las patas, son similares en ciertos pares de patas. Por ejemplo L4 y L5 tiene un comportamiento similar, y su mayor variación de longitud corresponde con la altura de la ola. El comportamiento de L1 y L6 es también similar, y asimismo L2 es similar a L3. La máxima variación de la longitud, es menor que a la altura de la ola, de forma que se deduce que el movimiento de estas cuatro patas se lleva preferentemente en un plano aproximadamente perpendicular al del movimiento orbital de las partículas de fluido.

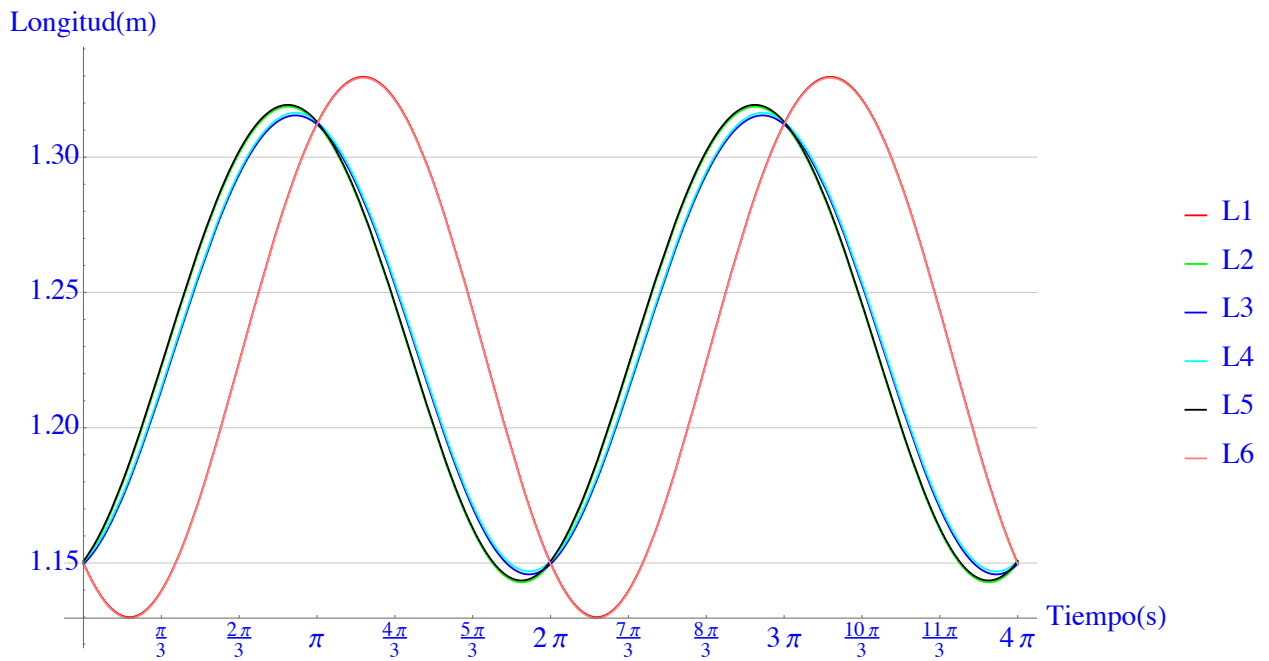
**Tabla 2:** Características del oleaje consideradas para las gráficas de la longitud de patas de la PSG. Frecuencia del oleaje  $\omega$ , amplitud del oleaje  $A$ , longitud de onda  $\lambda$ , ángulo de incidencia  $\theta_i$  y la relación  $ka$  del tamaño PSG (radio  $a$ ) respecto a la longitud de onda ( $k = 2\pi/\lambda$ ).

No. de Ejercicio	$\omega$	$\lambda$	$A$	$\theta_i$	$ka$
3	$1 \text{ rad s}^{-1}$	61.5 m	0.1 m	$90^\circ$	0.1
4	$1 \text{ rad s}^{-1}$	61.5 m	0.1 m	$210^\circ$	0.1
5	$1 \text{ rad s}^{-1}$	61.5 m	0.1 m	$330^\circ$	0.1

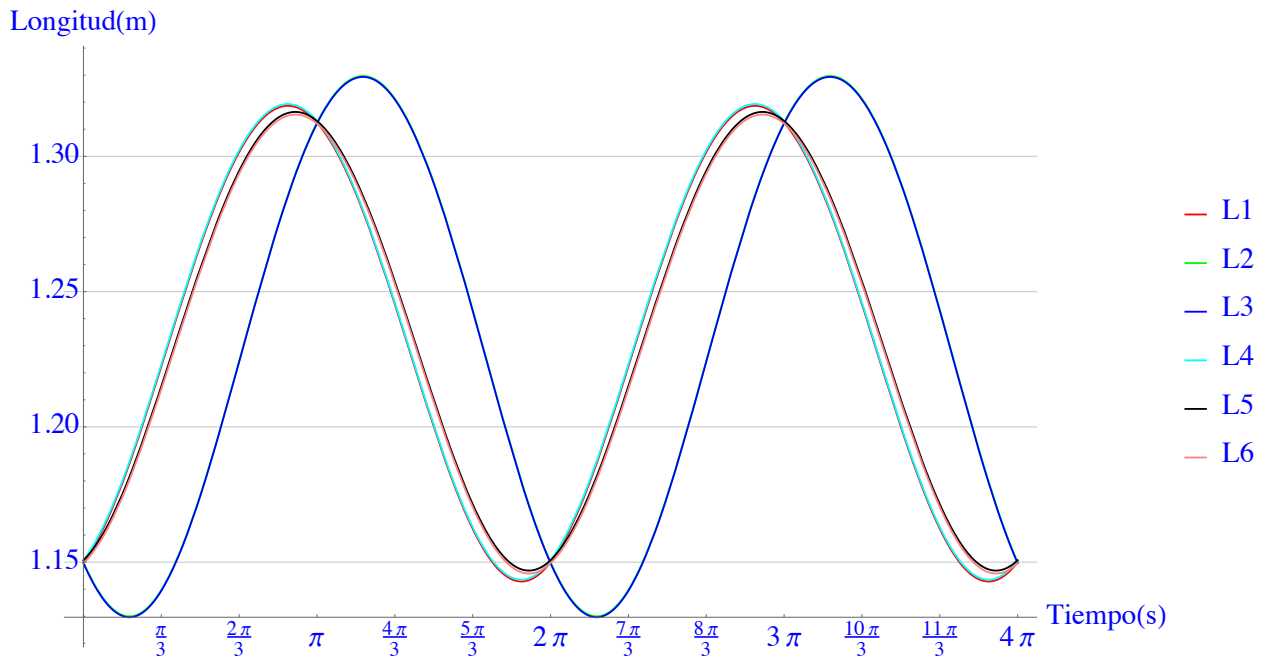


**Figura 18:** Resultados de la longitud de las patas de la PSG del ejercicio 3). Las características más importantes de oleaje incidente se resumen en la tabla 1.

**Ejercicio 4)** Las características del oleaje considerados en este ejercicio se resumen en la tabla 2. Los resultados de la longitud de las seis patas del ejercicio se presentan en la figura 19. En este caso el par de patas que muestran la máxima longitud son L1 y L6, el cual tiene una longitud que corresponden con la altura de la ola, esto debido a que este par de patas se mueven en un plano muy cercano al del movimiento orbital de las partículas del fluido. Los otros pares son L2, L5 y L3, L4 que tienen una longitud menor a la altura de las olas porque su movimiento está en un plano casi perpendicular al del movimiento orbital de las partículas de fluidos. Se puede apreciar como la simetría de la PSG y de la incidencia del oleaje corresponde con la longitud de las patas en la figura 18.



**Figura 19:** Resultados de la longitud de las patas de la PSG del ejercicio 4). Las características del oleaje incidente se resumen en la tabla 2.



**Figura 20:** Resultados de la longitud de las patas de la PSG del ejercicio 5). Las características principales del oleaje incidente se resumen en la tabla 2.

**Ejercicio 5)** Las características del oleaje consideradas en este ejercicio se resumen en la tabla 2. Los resultados de la longitud de las seis patas de la PSG del ejercicio se presentan en la figura 20. Se puede observar en dicha figura que el par de patas que muestran el máximo largo son L2

y L3, esta longitud corresponde con la altura de la ola, al igual que en los ejercicios 3) y 4) esto es debido a que el movimiento de las patas está en un plano cercano al del movimiento orbital de la partículas de fluido. Los pares formados por L4, L1 y L5, L6 tienen una longitud menor que la de la altura de la ola. Se puede apreciar como la simetría de incidencia del oleaje corresponde con la longitud de las patas de la PSG en las figuras 18 y 19.

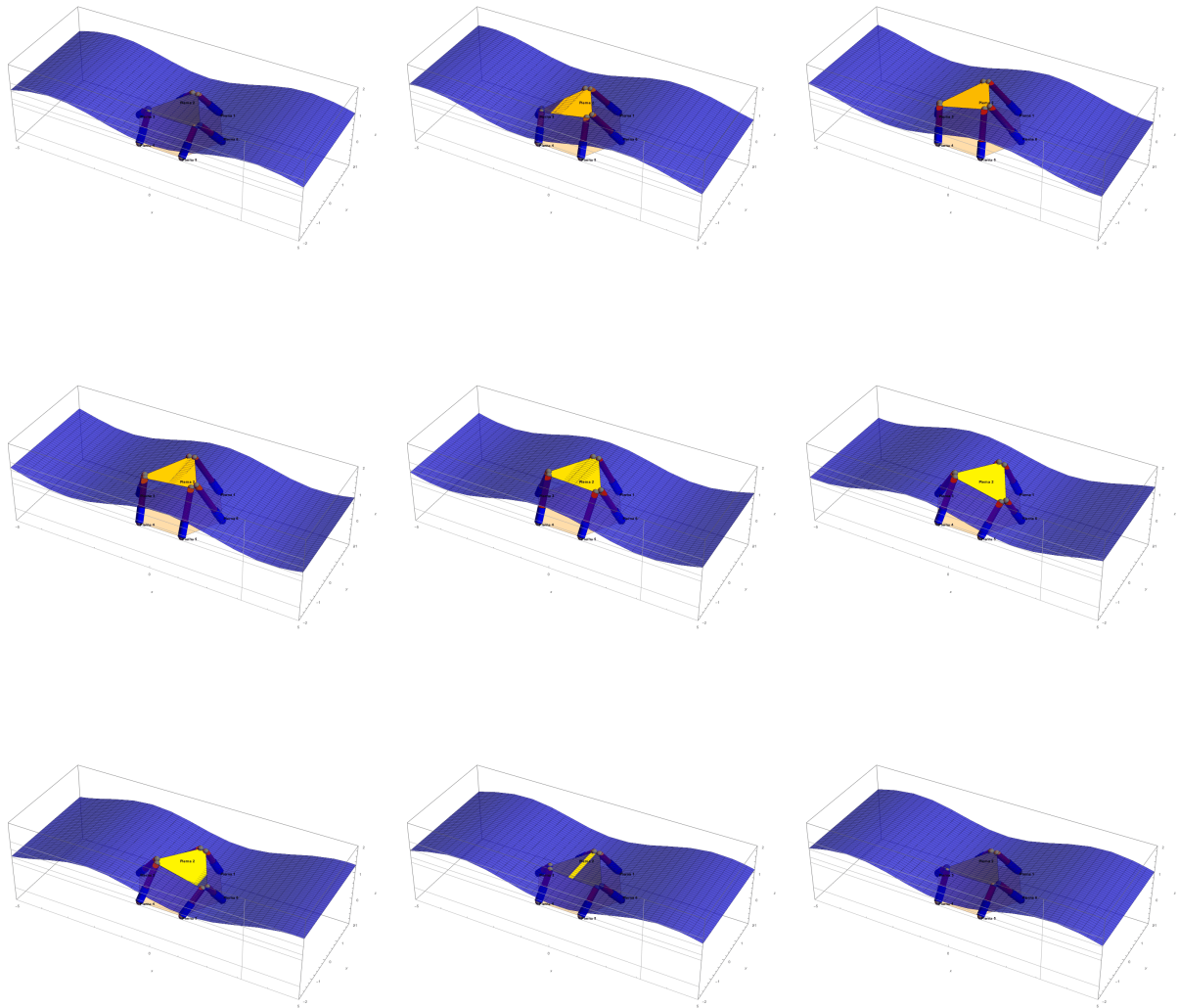
Se mostró que la longitud de las patas de la PSG tienen gráficas iguales para oleaje que incide donde la plataforma presenta simetrías, esto resulta de ayuda para determinar las características de la estructura mecánica de la PSG para usarla como CEO de acuerdo con lo que sugieren Scruggs y Skelton (2006).

Galván Pozos y Ocampo-Torres (2017) investigaron mediante cinemática inversa un CEO basado en la PSG. Consideraron una plataforma con 10 m de radio y una altura entre la base y la plataforma de 20 m, las simulaciones realizadas fueron desarrolladas en el software MATLAB. Uno de los resultados más relevantes es que la PSG es óptima cuando la razón entre el radio de la base y el radio de la plataforma móvil es igual a uno. El otro resultado importante es que la potencia promedio obtenida de un CEO basado en PSG es casi insensible ante variaciones de dirección del oleaje incidente. Este resultado resulta congruente con los resultados presentados en esta sección.

### **Simulación de un CEO basado en la PSG**

Otro de los resultados del trabajo en Mathematica, es que con la cinemática inversa presentada se obtuvieron simulaciones del movimiento del CEO basado en la PSG cuando oleaje incide sobre ella (Ed, 2018). En la figura 21 se muestran imágenes instantáneas de la simulación del CEO basado en la PSG con oleaje cuya frecuencia es  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$  y la amplitud  $A = 0.3 \text{ m}$ , con el objetivo de apreciar el tamaño de las olas comparado con la plataforma. Las imágenes presentadas están tomadas durante un periodo del oleaje aproximado de 6.28 s.





**Figura 21:** Instantáneas de la simulación de un CEO basado en PSG. La plataforma está amarillo con oleaje (azul) en dirección paralela al eje  $x$ . El orden de la imágenes es como el acostumbrado en las matrices (reglón,columna), iniciando en la esquina superior izquierda y terminando en la esquina inferior derecha.

La simulación de la figura 21 inicia y termina cuando la separación entre la base y la plataforma es de 1 m y el oleaje incidente tiene dirección paralela al eje  $x$ . Se puede apreciar como la pendiente de la plataforma (amarillo) es casi la pendiente de la ola monocromática (azul). El movimiento de la plataforma debido a la onda monocromática tiene 3 grados de libertad 1 vertical (en  $z$ ), uno horizontal (paralelo a  $x$ ) y uno angular (alrededor del eje  $y$ ), esto se puede apreciar en la figuras. La ventaja de esta simulación es que puede corroborar que el análisis de las patas se estaba llevando realizando correctamente, por ejemplo se puede observar la fase o desfase entre

el oleaje y el movimiento de la PSG.

### 3.2. Un dispositivo CEO con un grado de libertad en su movimiento

Al inicio del presente capítulo se comentó que los movimientos de un CEO basado en la PSG son transmitidos a movimientos lineales en sus patas. En este trabajo se considera que las patas son generadores lineales, por lo que el único movimiento que genera electricidad es el alargamiento de las patas. A primera aproximación podemos estudiar una pata como un dispositivo *CEO con un grado de libertad en su movimiento vertical* (en adelante CEO1).

En esta sección se analiza la dinámica de un dispositivo CEO1. El CEO1 está formado por una boya y un generador lineal, las características de diseño más importantes se presentan en la tabla 3. Probablemente el CEO con un grado de libertad en su movimiento sea el más estudiado, modelado y usado en experimentos esto debido a su sencillez. El enfoque que se presenta en esta sección muestra que mediante la formulación lagrangiana se puede integrar el modelo mecánico y el modelo eléctrico como uno sólo (electromecánico).

Zheng *et al.* (2015) estudiaron mediante simulaciones y analíticamente un CEO con un grado de libertad y consideran un generador lineal como sistema de conversión de la potencia. Obtienen ecuaciones de movimiento y la respuesta dinámica de todo el sistema del CEO (es decir mecánico y electromagnético). La principal diferencia con el trabajo desarrollado en esta sección es que ellos se basan en la formulación de Newton-Euler de la dinámica, y obtienen sólo una ecuación de movimiento, para un CEO con un generador lineal de cinco bobinas.

Los resultados presentados en esta sección de modelar a un dispositivo CEO1 son un sistema de ecuaciones de movimiento, la función de transferencia con la cual se obtienen gráficas del voltaje, corriente y potencia que podría obtenerse.

Se muestran un par de gráficas conocidas como diagrama de Bode, obtenidas a partir de la función de transferencia entre la fuerza del oleaje que incide sobre el CEO1 y el voltaje que podría obtenerse. La información relevante de estas gráficas es el pico asociado con la resonancia del CEO1 como respuesta al oleaje incidente.

### 3.2.1. Voltaje, corriente y potencia de un dispositivo CEO1

Se modela un dispositivo CEO1 (ver figura 13) cuyas características se muestran en la tabla 3. Una de las suposiciones es que la masa añadida es constante y se suma a la masa de la boya . El sistema electromagnético está formado por una bobina móvil y un imán fijo (ver figura 11). Scruggs y Skelton (2006) comentan que como actuador lineal se puede elegir entre un generador lineal y un actuador de una bobina de voz, la diferencia es que el primero consta de varias bobina y el segundo sólo de una bobina. En este trabajo se considera una bobina de voz como generador, por simplicidad del modelo matemático, cuyas características se describen en la tabla 3. Además se considera que el oleaje incidente es monocromático y la fuerza del mismo está dada por  $F = F_0 \cos \omega t$  donde  $F_0 = 107 \text{ N}$ , considerando a la frecuencia del oleaje  $\omega = \pi \text{ rad s}^{-1}$ .

En la figura 22 se muestra el voltaje que se estimó mediante la función de transferencia (70) como resultado del movimiento inducido en el dispositivo CEO1 por una ola monocromática.

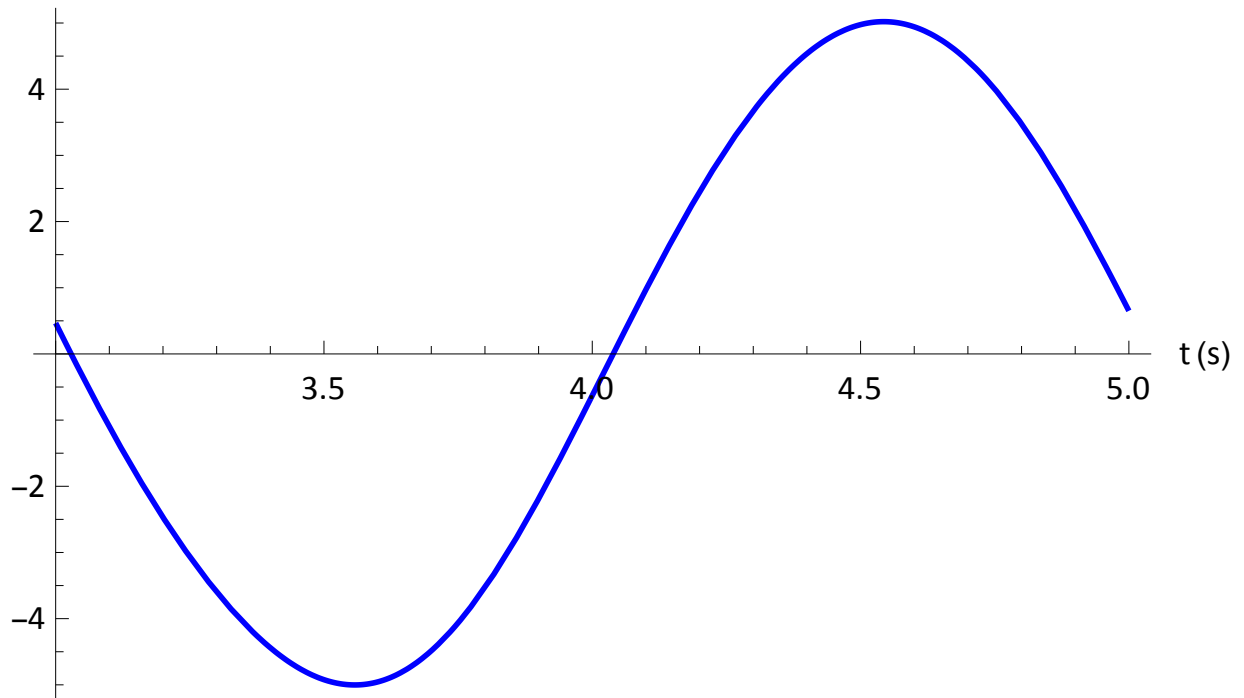
**Tabla 3:** Parámetros considerados para modelar el dispositivo CEO1, en el análisis de voltaje, corriente y potencia.

constante	valor	unidades
$m$	9.1	kg
$k_d$	36.4	$\text{kg s}^{-1}$
$k_f$	713.5	$\text{kg s}^{-2}$
$L$	$17 * 10^{-6}$	H
$R$	8.3	$\Omega$
$T$	9.4	$\text{N A}^{-1}$

Como se observa en la figura 22 la señal del voltaje tiene forma senoidal, esto se esperaba pues al tener un sistema de ecuaciones lineales (60,61) la forma y la frecuencia de la señal original deben prevalecer (Bendat y Piersol, 2011). El voltaje se ha obtenido de aplicar la transformada inversa de Laplace a la ecuación (70). Una característica más es que se observa es un desfase de  $90^\circ$  entre la señal del voltaje con la señal original del oleaje.

Chen *et al.* (2014) obtuvieron de manera experimental el voltaje generado por un CEO1. Donde el generador eléctrico es un generador lineal, constituido por tres fases de cinco bobinas. Los resultados del voltaje obtenido son correpondientes con el orden de magnitud del sistema aquí presentado a pesar de la diferencia del tipo de generador.

Voltaje (V)



**Figura 22:** Voltaje obtenido con la función de transferencia (70). La gráfica presenta la señal resultante (el voltaje) de transformar la fuerza del oleaje ( $F_{z0} = 107 \text{ N}$ ,  $\omega = \pi \text{ rad s}^{-1}$ ) con un dispositivo CEO1.

Si se tiene una carga en el sistema eléctrico, un foco por ejemplo, al mismo tiempo que se genera el voltaje existe un flujo de electrones que genera corriente eléctrica en el circuito. De manera que una vez determinado el voltaje es fácil obtener la corriente mediante la ley de Ohm. A continuación se presenta un gráfico de la corriente eléctrica del CEO1.

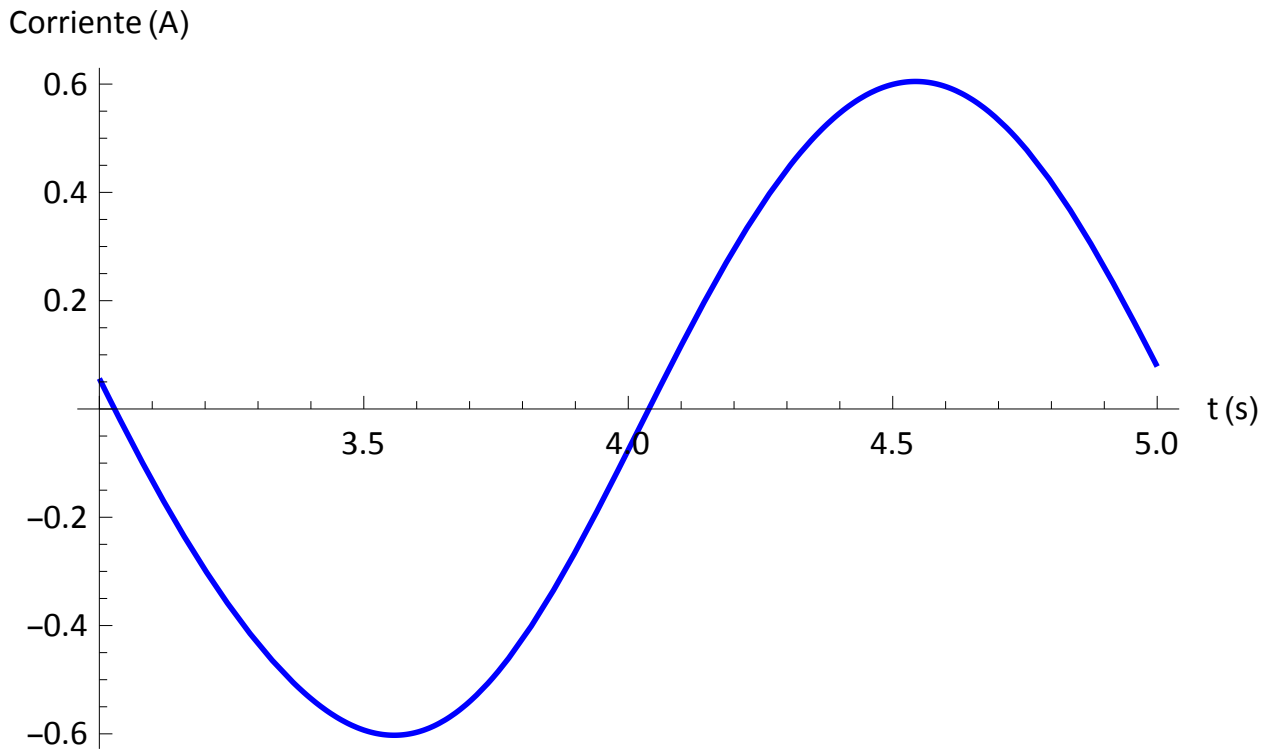
Al igual que en el voltaje, la corriente debe presentar la forma senoidal y conservar la frecuencia de la señal original, lo cual se puede observar en la figura 22.

Como parte de los resultados obtenidos, se muestra la potencia generada por dispositivo CEO1 de la figura 24 que se estimó con las soluciones (68) y (69) de las ecuaciones que modelan al CEO1.

La potencia promedio se obtiene a partir de la relación,

$$P = R\dot{q}^2, \quad (73)$$

esta es la potencia eléctrica promedio del dispositivo CEO1. Donde  $\dot{q}$  es la corriente eléctrica del CEO, la que es inducida por la ola monocromática y se obtiene a partir de las soluciones



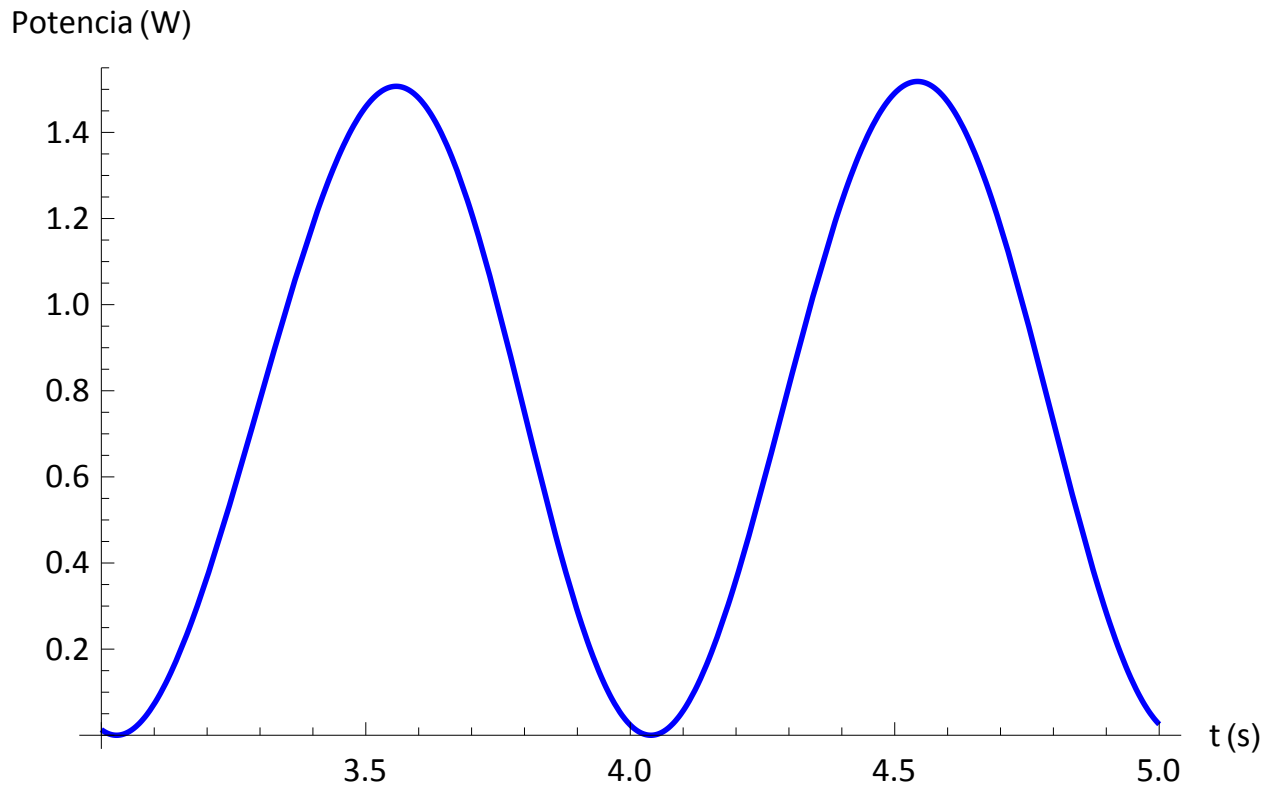
**Figura 23:** Resultado de la corriente eléctrica obtenida con la ley de Ohm una vez conocido el voltaje dada una carga en el sistema eléctrico. La gráfica presenta la señal resultante de transformar la fuerza del oleaje a través de un CEO1.

del sistema de ecuaciones (60) y (61). En la potencia  $R$  es la resistencia eléctrica, cuyo valor se presenta en la tabla 3. Cabe mencionar que para un sistema cuyo comportamiento se puede describir con la solución o suma de soluciones de la ecuación (44), la potencia promedio es la debida a la parte permanente de la solución (Feynman *et al.*, 2013) del sistema de ecuaciones.

La potencia estimada en la figura 24 es del orden de la presentada por Chen *et al.* (2014). Por último la eficiencia que se define como la potencia que entra mediante el oleaje y la potencia que entrega el dispositivo es de 16 % aunque no es un valor alto se encuentra en el rango de los CEO (Falnes, 2002; Bull y Ochs, 2013). Esta eficiencia es el cociente de la potencia del CEO1 y la potencia promedio en una longitud de la ola monocromática .

### 3.2.2. Diagramas de Bode de un CEO1

Hasta el momento se ha presentado el voltaje generado como respuesta al movimiento inducido sobre un dispositivo CEO1 por el oleaje con una sola frecuencia. La función de transferencia



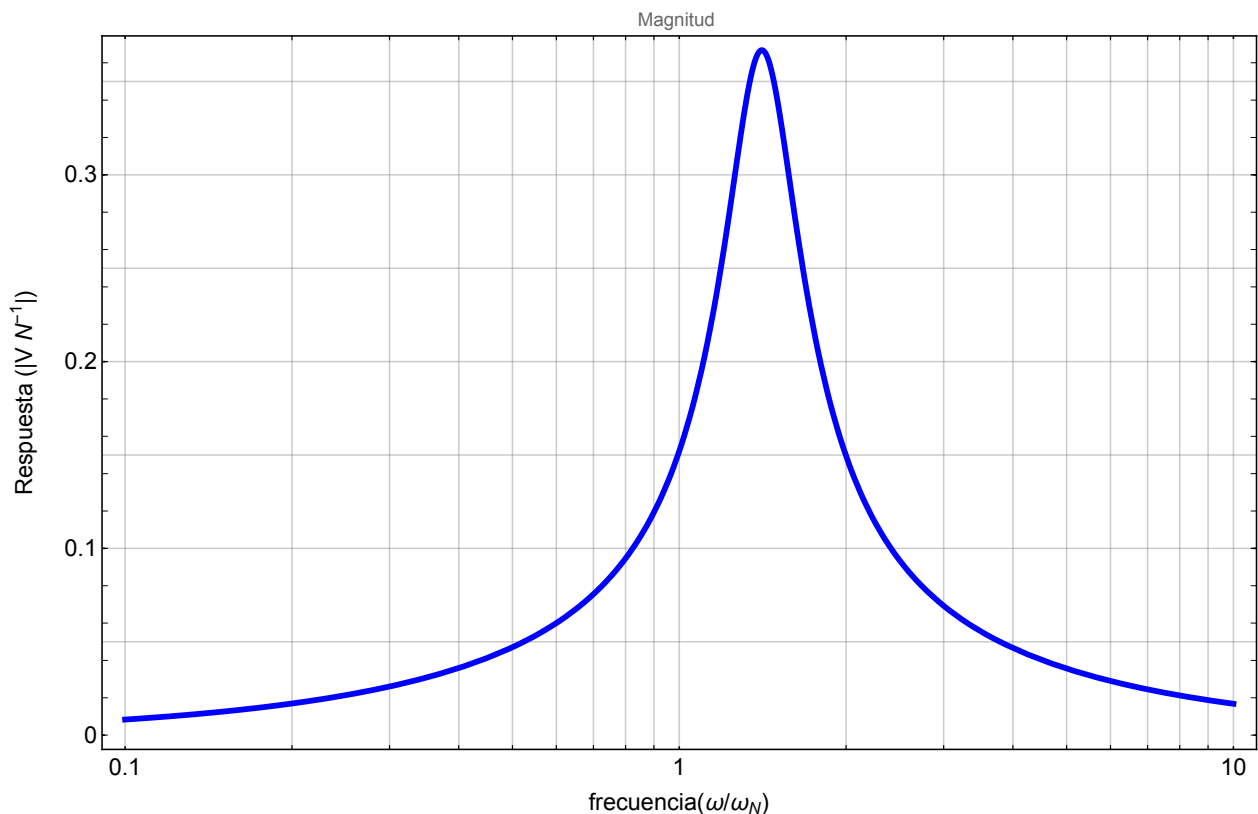
**Figura 24:** Resultado de la potencia eléctrica estimada para un CEO1

como se mencionó en la metodología proporciona información de la respuesta del sistema para forzamientos a diferentes frecuencias.

La gráfica que se muestra en la figura 25 es conocida como la ganancia del diagrama de Bode, ésta es el módulo de la función de transferencia presentada en la ecuación (71). Esta función de transferencia es función de la razón de la frecuencia del oleaje incidente  $\omega$  y la frecuencia natural del CEO1  $\omega_N$ . Lo que muestra esta gráfica es la magnitud de la respuesta para oleaje que incide sobre el dispositivo CEO1 a diferentes frecuencias.

En la gráfica de la figura 25, se observa el pico asociado con la razón de frecuencias  $\omega/\omega_N \simeq 1.5$ . Este valor se obtiene considerando las características del dispositivo CEO1 de la tabla 3. El valor máximo de este pico es consecuencia de que el CEO1 está en resonancia con la frecuencia del oleaje incidente. Con los parámetros de la tabla 3 la frecuencia de resonancia es  $\omega_N \simeq 17$ . En este trabajo se consideró una ola monocromática de  $\omega = \pi$  con lo que la razón de frecuencias es  $\omega/\omega_N \simeq 0.184$ , por lo que para obtener la máxima respuesta debemos acercarnos al valor de esta razón.

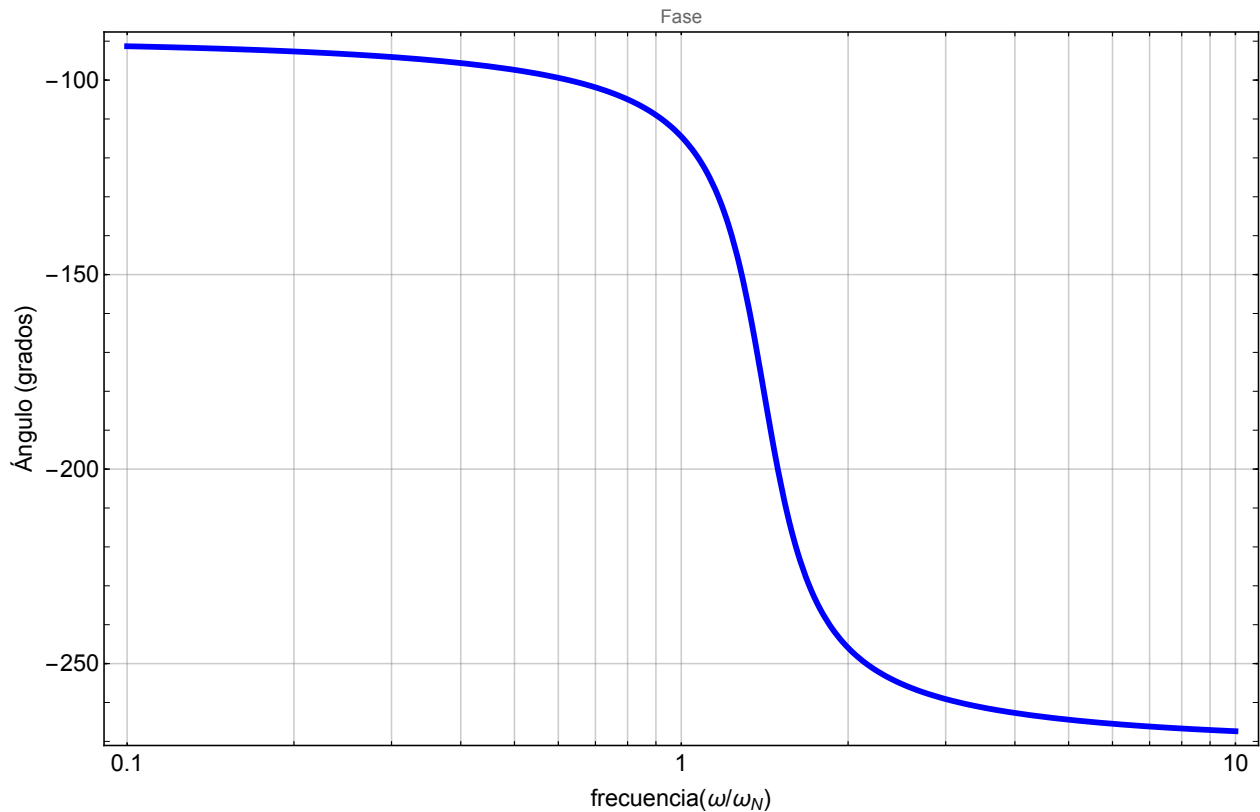
De acuerdo con McCormick (2007) el objetivo de los CEO es minimizar el amortiguamiento y maximizar la respuesta. Una manera para lograr ésto es hacer incidir oleaje con una frecuencia igual a la de resonancia, con lo cual se cumpliría el objetivo de los CEO, pero en la realidad el oleaje no tiene una frecuencia predominante y tampoco podemos *ajustar* el oleaje. Por lo que la manera más práctica es que dicho pico puede desplazarse de frecuencia. Esto se puede realizar modificando las características del CEO1, ajustando la frecuencia natural del CEO a las frecuencias propias del lugar donde se desea colocar. Ésta es una razón de peso por la cual se debe caracterizar o tener mapas del oleaje predominante de los lugares donde se desea colocar un CEO. Una vez ajustada la respuesta del CEO al oleaje, se puede diseñar un CEO óptimo.



**Figura 25:** Resultado del módulo de la función de transferencia, la respuesta está dada en voltios sobre Newtons en función de  $\omega/\omega_N$ . En este caso el CEO presenta resonancia en  $\omega/\omega_N \simeq 1.5$ . La amplitud del pico puede variarse cambiando el amortiguamiento hidrodinámico y la resistencia eléctrica

La gráfica de la figura 26 es el argumento de la función de transferencia (71), del diagrama de Bode. Lo que representa esta figura son los desfases en grados de la señal original (el oleaje incidente) y la señal resultante el voltaje generado; a diferentes frecuencias de oleaje incidente. En la figura 26 se observa que el desfase entre el oleaje y el voltaje que produce el dispositivo CEO1 es de  $-180^\circ$  para la razón  $\omega/\omega_N \simeq 1.5$ , que es la asociada con la resonancia del CEO. Para la

frecuencia del oleaje monocromático presentado en este trabajo existe un desfase entre la señal del oleaje incidente y el voltaje generado de  $-90^\circ$ , el signo menos significa que la generación del voltaje es posterior a la incidencia del oleaje.



**Figura 26:** Esta gráfica es el argumento de la función de transferencia, el ángulo de desfase entre la ola incidente y el voltaje generado está en grados en función de  $\omega/\omega_N$ . En este caso se puede ver que desfase es de  $-180^\circ$  entre el oleaje que induce movimiento y el voltaje resultante para la razón  $\omega/\omega_N \simeq 1.5$ , asociado con la resonancia.

Para finalizar en la realidad no existe el oleaje monocromático pero existen trabajos como el de Czitrom *et al.* (2000) donde se propone que un CEO se puede sintonizar al oleaje prevaleciente; en otros trabajos como el de Crowley *et al.* (2013) se plantea la idea que un CEO posea múltiples resonancias. Para llevar acabo dichas propuestas son necesarias la ecuaciones de movimiento como las que se han planteado aquí, obtener la función de transferencia y los diagramas de Bode para conocer la respuesta del CEO Beards (1996).



## Capítulo 4. Conclusiones

---

En este trabajo se analizó el movimiento de un dispositivo *convertidor de energía del oleaje* (CEO) basado en la *plataforma Stewart-Gough* (PSG) mediante cinemática inversa. Como el movimiento inducido por el oleaje en el dispositivo CEO basado en la PSG se transforma en lineal y este es el que se transforma en energía, también se estudió la dinámica de un dispositivo *convertidor de energía del oleaje con un grado de libertad en su movimiento vertical* (CEO1) con la formulación lagrangiana de la dinámica.

Con los valores,  $ka \ll 1$ , la relación entre la longitud de la ola  $k$  y el tamaño característico  $a$  del dispositivo CEO basado en la PSG, se encontró que las longitudes de las patas corresponden a un movimiento tangencial del elemento de flotación con la superficie libre del mar. Se encontró que la máxima longitud de las patas es igual a la amplitud de la onda incidente para este caso. Para valores,  $ka \simeq 1$ , el dispositivo CEO basado en la PSG no se mueven tangencialmente con la superficie libre de mar, debido principalmente a que las longitudes de las patas del dispositivo son mayores al radio de las trayectorias orbitales de la superficie libre.

De las pruebas con  $ka \ll 1$ , y diferentes direcciones de incidencia del oleaje ( $90^\circ$ ,  $210^\circ$  y  $330^\circ$ ) se encontró que el estudio de longitudes de las patas del dispositivo CEO basado en la PSG es importante debido a que se puede estimar la potencia para un sistema de toma de potencia conformado por un convertidor lineal de imanes permanentes. Los resultados de este trabajo son congruentes con otras investigaciones realizadas (Galván Pozos y Ocampo-Torres, 2017) dado que la potencia del dispositivo es independiente de la dirección de incidencia del oleaje.

Una de las limitaciones del estudio del dispositivo CEO basado en la PSG con cinemática inversa es que considera que la captura de potencia debe ser muy pequeña para que pueda seguir el movimiento de las olas.

Del análisis de la dinámica (electromecánica) del dispositivo CEO1 por medio de la formulación lagrangiana, se encontró que la eficiencia de la potencia fue del 16% lo cual es congruente a resultados previos obtenidos con otras formulaciones, i.e. Newton-Euler (Falnes, 2002). Los resultados del CEO1 en este trabajo son comparables a otros estudios a pesar de las diferencias estructurales en los sistemas de generadores utilizados (Chen *et al.*, 2014).

Como resultado del estudio de la dinámica del dispositivo CEO1 con la formulación lagrangiana, se obtuvo una función de transferencia entre la fuerza del oleaje incidente y el voltaje que podría generar un CEO1. La función de transferencia obtenida es la base del diagrama de Bode que muestran la conversión de la fuerza del oleaje a voltaje como función de la razón de diversas frecuencias del oleaje y la frecuencia natural del dispositivo. El diagrama de Bode presentado en este trabajo resume las respuestas del sistema mecánico y eléctrico como un único sistema, lo cual es consecuencia de utilizar la formulación lagrangiana, que parece no encontrarse en la literatura de los convertidores de energía del oleaje con anterioridad.

## Literatura citada

- Arnold, E. U. (2004). *Lufthansa flight simulator on 6-axis platform*. Consultado el 25 de noviembre del 2017 de [https://en.wikipedia.org/wiki/Stewart\\_platform#/media/File:Simulator-flight-compartment.jpeg](https://en.wikipedia.org/wiki/Stewart_platform#/media/File:Simulator-flight-compartment.jpeg).
- Beards, C. (1996). *Structural vibration: analysis and damping*. Butterworth-Heinemann.
- Bendat, J. y Piersol, A. (2011). *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- Bingul, Z. y Karahan, O. (2012). Dynamic modeling and simulation of stewart platform. En: *Serial and Parallel Robot Manipulators-Kinematics, Dynamics, Control and Optimization*. InTech.
- Bull, D. y Ochs, M. E. (2013). Technological cost-reduction pathways for attenuator wave energy converters in the marine hydrokinetic environment. Reporte técnico, Sandia National Laboratories.
- Chen, Z., Yu, H., y Hu, M. (2014). The research on direct-drive wave energy conversion system and performance optimization. *Acta Oceanologica Sinica*, **33**(9): 178–183.
- Crowley, S., Porter, R., y Evans, D. V. (2013). A submerged cylinder wave energy converter. *Journal of Fluid Mechanics*, **716**: 566–596.
- Cruz, J. (2007). *Ocean Wave Energy: Current Status and Future Perspectives*. Green Energy and Technology. Springer Berlin Heidelberg.
- Czitrom, S., Godoy, R., Prado, E., Pérez, P., y Peralta-Fabi, R. (2000). Hydrodynamics of an oscillating water column seawater pump: Part i: theoretical aspects. *Ocean engineering*, **27**(11): 1181–1198.
- de O. Falcão, A. F. (2010). Wave energy utilization: A review of the technologies. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **14**(3): 899 – 918.
- Duarte, F. y Ferreira, A. (2016). Energy harvesting on road pavements: state of the art. *Proceedings of the institution of civil engineers*, **169**: 79–90.
- Ed, S. (2018). *Convertidor de energía del Oleaje basado en la plataforma Stewart Gogh (WEC)*. Consultado el 15 de Marzo del 2018 de <https://www.youtube.com/watch?v=F05c0Cd-Exc&feature=youtu.be>.
- Egeland, O. y Gravdahl, J. T. (2002). *Modeling and simulation for automatic control*, Vol. 76. Marine Cybernetics Trondheim, Norway.
- Falnes, J. (2002). *Ocean waves and oscillating systems: linear interactions including wave-energy extraction*. Cambridge University Press.
- Feynman, R., Leighton, R., y Sands, M. (2013). *The Feynman Lectures on Physics, vol. 1 for tablets*. Basic Books.
- Galván Pozos, D. y Ocampo-Torres, F. (2017). Dynamics analysis of the movement of a wave energy converter with more than one degree of freedom. En: A. Lewis (ed.), *Proceedings of the Twelfth European Wave and Tidal Energy Conference*, Aug 27–Sep 1, University College Cork, Ireland. EWTEC, pp. 636–1–636–10, ISSN: 2309-1983.

- Goldstein, H., Poole, C., y Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*. Addison Wesley.
- Halliday, D., Resnick, R., y Walker, J. (2013). *Fundamentals of Physics Extended*. Wiley.
- Hoem, M. K. T. (2009). *Modeling and Control of Wave Energy Converters*. Tesis de maestría, Institutt for teknisk kybernetikk.
- Holthuijsen, L. H. (2010). *Waves in oceanic and coastal waters*. Cambridge university press.
- Lebret, G., Liu, K., y Lewis, F. L. (1993). Dynamic analysis and control of a stewart platform manipulator. *Journal of Robotic Systems*, **10**(5): 629–655.
- Lotfi, B. y Huang, L. (2014). A novel wave energy converter using the stewart platform. *Journal of Green Engineering*, **4**: 33–48.
- Lyshevski, S. (2008). *Electromechanical Systems and Devices*. CRC Press.
- López, I., Andreu, J., Ceballos, S., de Alegría, I. M., y Kortabarria, I. (2013). Review of wave energy technologies and the necessary power-equipment. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **27**(Supplement C): 413 – 434.
- McCormick, M. (2007). *Ocean Wave Energy Conversion*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, primera edición.
- McCormick, M. (2010). *Ocean Engineering Mechanics: With Applications*. Cambridge University Press.
- Mei, C., Stiassnie, M., y Yue, D. (2005). *Theory and Applications of Ocean Surface Waves: Linear aspects*. Advanced series on ocean engineering. World Scientific.
- Munk, W. (1950). Origin and generation of waves. *Coastal Engineering Proceedings*, **1**(1): 1.
- Niu, X. (2013). Modeling and design analysis of a permanent magnet linear synchronous generator. Reporte técnico, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Obama, B. (2017). The irreversible momentum of clean energy. *Science*.
- Ocampo-Torres, F., Osuna, P., Evans, R. T., Esquivel Trava, B., Rubio, G. G., Verduzco Zapata, M. G., Galván Pozos, D., Canino Ramos, C. A., Sánchez García, A., Torres Guerrero, F. I., y Toro Valencia, V. G. (2014). Diseño y desarrollo de convertidores de energía del oleaje. Reporte técnico, CICESE.
- Plonus, M. (1994). *Electromagnetismo aplicado*. Reverté.
- Preumont, A. (2006). *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands.
- Rañada, A. (2005). *Dinámica clásica*. Ciencia y tecnología. Fondo de Cultura Económica.
- Salter, S. H. (1974). Wave power. *Nature*, **249**: 720 – 724.
- Scruggs, J. y Skelton, R. (2006). Regenerative tensegrity structures for energy harvesting applications. En: *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*. IEEE, pp. 2282–2287.

- Serway, R. A. y Jewett, J. W. (2018). *Physics for scientists and engineers with modern physics*. Cengage learning.
- Taghirad, H. (2013). *Parallel Robots: Mechanics and Control*. Taylor & Francis.
- Thornton, S. y Marion, J. (2004). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole.
- Tom, N. M. (2013). *Design and control of a floating wave-energy converter utilizing a permanent magnet linear generator*. Tesis de doctorado, University of California, Berkeley.
- Vasquez, R. E., Crane, C. D., y Correa, J. C. (2014). Analysis of a planar tensegrity mechanism for ocean wave energy harvesting. *Journal of Mechanisms and Robotics*, **6**(3): 031015.
- Wang, J., Jewell, G. W., y Howe, D. (1999). A general framework for the analysis and design of tubular linear permanent magnet machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, **35**(3): 1986–2000.
- Wolfram Research, Inc. (2016). Mathematica (version 11.0). <https://www.wolfram.com>. Online; consultado el 14 Junio 2018.
- Young, I. R. (1999). *Wind generated ocean waves*, Vol. 2. Elsevier.
- Zheng, Z.-Q., Huang, P., Gao, D.-X., y Chang, Z.-Y. (2015). Analysis of electromagnetic force of the linear generator in point absorber wave energy converters. *Journal of Marine Science and Technology*, **23**(4): 475–480.

## Apéndice A. Ley de Lenz

### A.1. Ley de Lenz

La relación que tiene la fuerza electromotriz (FEM),  $V_\epsilon(t)$ , con el movimiento del imán viene dada por la ley de Faraday (Plonus, 1994) que dice:

La FEM inducida en un circuito es igual al negativo de la velocidad con que cambia en el tiempo el flujo magnético en el circuito. Además considerando la ley de Lorentz se puede reescribir como en (74)

$$V_\epsilon(t) = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int \vec{w} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}, \quad (74)$$

en particular

$$V_\epsilon(t) = -NwBl, \quad (75)$$

donde  $N$  es el número de espiras,  $w = \dot{z}$  es la velocidad con que se mueve el imán respecto a la espira,  $B$  es el campo magnético y  $l$  es la longitud del alambre que forma el solenoide. Para entender como se transforma la energía de las olas en energía eléctrica, la ley de Lenz dice:

**Ley A.1** (Ley de Lenz). *La fuerza electromotriz(FEM) inducida se opone siempre a la causa que la genera.*

Así en este caso la fuerza electromotriz que está generando se opone al movimiento del imán, debido a que la energía cinética de este movimiento se está transformando en energía eléctrica. Ésta cantidad de fuerza electromotriz es directamente proporcional a la velocidad y el campo magnético, esto quiere decir que si se mueve rápido el imán se genera más FEM ó si el campo magnético es grande.

$$L\ddot{q} + T\dot{z} = V_\epsilon(t). \quad (76)$$