

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias  
en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación  
en Control e Instrumentación**

---

**Análisis de estabilidad de sistemas lineales con  
retardo**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Jessica Raquel Fernández Gómez**

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por

**Jessica Raquel Fernández Gómez**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
Director de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos  
Dra. María del Carmen Maya Sánchez  
Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez



---

Dr. Daniel Saucedo Carvajal  
Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

---

Dra. Rufina Hernández Martínez  
Directora de Estudios de Posgrado

*Jessica Raquel Fernández Gómez © 2018*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis*

Resumen de la tesis que presenta Jessica Raquel Fernández Gómez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Control e Instrumentación.

## **Análisis de estabilidad de sistemas lineales con retardo**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
Director de tesis

En este trabajo de tesis se presentan condiciones para determinar la estabilidad o inestabilidad de algunas clases de sistemas lineales con retardo. Esto es indispensable para resolver problemas de control, sincronización, e incluso generación de osciladores en sistemas con dependencia del estado pasado. Este problema no tiene solución trivial, incluso para sistemas lineales de bajo orden, debido a que el retardo en el tiempo convierte al sistema en uno de dimensión infinita. Una herramienta para resolverlo es un teorema debido a Pontryagin, el cual provee condiciones necesarias y suficientes de estabilidad, pero su aplicación directa conlleva a ecuaciones trascendentales muy complicadas. A pesar de que este teorema ha permitido el desarrollo de criterios algorítmicos para determinar numéricamente la estabilidad de cualquier sistema lineal con retardo, sólo se dispone de una caracterización de regiones paramétricas de estabilidad en el caso de primer orden con un retardo. En este trabajo se estudian las ecuaciones trascendentales antes mencionadas, y se propone una forma general para representarlas. Dicha representación es transformada utilizando una matriz de rotación, lo que permitió, junto con algunas simplificaciones algebraicas, obtener condiciones genéricas para garantizar la estabilidad de sistemas de cualquier orden, las cuales son más sencillas de verificar que las que se obtienen en la literatura clásica. Particularmente se caracterizan todas las regiones paramétricas de estabilidad de los sistemas lineales de primer y segundo orden con un solo retardo en el tiempo. Se presenta además un resultado algorítmico para descomponer, cuando es posible, un sistema en dinámicas más sencillas para reducir la dificultad en el análisis de estabilidad en sistemas de orden elevado. Los resultados obtenidos son relacionados con algunos resultados clásicos, como la caracterización de la región paramétrica de estabilidad de sistemas de primer orden, la caracterización numérica de estabilidad en sistemas de cualquier orden, así como con el criterio de Nyquist, dando resultados prometedores que abren nuevas líneas de investigación.

**Palabras clave: análisis de estabilidad, sistemas con retardo, sistemas lineales.**

Abstract of the thesis presented by Jessica Raquel Fernández Gómez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronic and Telecommunications with orientation in Control and Instrumentation.

## **Stability analysis of time delay linear systems**

Abstract approved by:

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
Thesis Director

This thesis presents conditions to determine the stability or instability of some classes of time-delay linear systems. This is essential to solving problems of control, synchronization, and even the generation of oscillators in systems with dependence on the past state. This problem has no trivial solution, even for linear systems of low order, because the delay in time turns a system into an infinite-dimension one. A tool to solve it is a theorem due to Pontryagin, which provides necessary and sufficient stability conditions, but its direct application leads to very complicated transcendental equations. Although this theorem has allowed the development of algorithmic criteria to numerically determine the stability of any time-delay linear system, only one characterization of parametric stability regions is available in the case of first-order with one delay. In this work, we study the aforementioned transcendental equations, and we propose a general way to represent them. This representation is transformed using a rotation matrix, which allowed, together with some algebraic simplifications, to obtain general conditions to guarantee the stability of systems of any order, which are easier to verify than those obtained in classical literature. Particularly, we characterize all the parametric stability regions of the first and second order linear systems with a single time-delay. It also presents an algorithmic result to decompose, when possible, a system in simpler dynamics to reduce the difficulty in the stability analysis in high order systems. The results obtained are related to some classic results, such as the characterization of the parametric stability region of first-order systems, the numerical characterization of stability in systems of any order, as well as the Nyquist criterion, giving promising results that open new lines of investigation.

**Keywords: stability analysis, time-delay systems, linear systems.**

## **Dedicatoria**

***A mi familia y a todos los paraguayos que se esfuerzan por ser mejores.***

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por permitirme ser parte de esta gran institución y aprender de personas brillantes en el ámbito de la ciencia.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

A mi director de tesis, el Dr. Luis Alejandro Márquez, por ser un gran guía para lograr presentar el trabajo de investigación, por impartirme sus enseñanzas con mucha sabiduría, por su acompañamiento durante toda la maestría y por sus consejos.

A los miembros de mi comité de tesis, Dr. Joaquín Álvarez, Dra. María del Carmen Maya y Dr. Carlos Brizuela por sus aportes y comentarios importantes para la presentación de este trabajo.

A los maestros del CICESE que me dieron la oportunidad de asistir a sus clases, Dr. Miguel Alonso, Dr. David Covarrubias, Dra. Ma. del Carmen Maya, M.C. Moises Castro, Dr. Miguel Murillo, Dr. Adrián Arellano, Dr. Ricardo Cuesta, Dr. César Cruz. Y muy especialmente estoy agradecida por las enseñanzas impartidas por el Dr. Joaquín Álvarez, Dr. Jonatan Peña, Dr. Yury Orlov y por supuesto el Dr. Luis Alejandro Márquez, quienes me forjaron en el área de control.

AL Dr. Carlos Brizuela, por confiar en mi capacidad y brindarme el apoyo para así poder ser parte del alumnado del CICESE.

A mis padres Gabino y Marcela, por ser los principales promotores de mis sueños, gracias por confiar en mi y brindarme mucho amor en la distancia.

A mis hermanas Jennifer y Karen por ser mis fieles compañeras de vida en la distancia y enviarme siempre mucho cariño. A mi hermana del alma Claudia y mis sobrinos Chris y Adri, por ser mi inspiración para poder culminar mi maestría. A Bernardo por su amistad incondicional en todo momento.

A Heberto por su apoyo y comprensión durante la maestría, por estar conmigo en todo momento, y a sus padres y hermana Dani por recibirme como parte de su familia y hacerme sentir como en casa. Gracias por ser mi familia mexicana.

A la Sra. Alejandra Chávez, por ser una amiga y compañera, y demostrarme que la edad no importa si el alma es joven.

A mis compañeros del CICESE, René, Edu, Gera, Adán, Gustavo, Edén, Ernesto, Víctor, por compartir conmigo este sueño que ahora es realidad. Un agradecimiento especial a Edwin por su compañerismo y por todos los momentos compartidos y a Fernando por su amistad y apoyo de siempre, siempre los recordaré.

A Dios por la vida de mis seres queridos, y porque cada día bendice mi vida con las oportunidades que me regala.

A todos mis amigos y familiares que siempre me apoyaron con mensajes de apoyo y cariño, gracias.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	ix
Lista de tablas .....	x
<b>Capítulo 1. Introducción.</b>	
1.1. Justificación. ....	3
1.2. Objetivo General. ....	4
1.2.1. Objetivos particulares. ....	4
1.3. Organización de la tesis. ....	4
<b>Capítulo 2. Preliminares</b>	
2.1. Sistemas considerados. ....	6
2.2. Conceptos de estabilidad. ....	8
2.3. Ecuación característica del sistema considerado. ....	9
2.3.1. Número infinito de raíces de la función $H(s)$ . ....	10
2.4. Teorema de Pontryagin. ....	12
2.4.1. Ejemplo. ....	16
2.5. Criterio de estabilidad algorítmico. ....	17
2.6. Teorema de Hayes. ....	19
2.7. Teoremas de estabilidad para los sistemas lineales con retardo puro. .	20
2.8. Resumen. ....	21
<b>Capítulo 3. Análisis de estabilidad utilizando descomposición triangular por bloques para SLR.</b>	
3.1. Algoritmo de descomposición para el análisis de estabilidad asintótica.	24
3.2. Resultado principal. ....	27
3.2.1. Ejemplos. ....	28
3.3. Resumen. ....	32
<b>Capítulo 4. Fórmulas generales para la parte real y parte imaginaria de la función característica cuasipolinomial.</b>	
4.1. Propuesta de fórmulas generales para el caso de retardo único. ....	33
4.2. Estructura de la parte real y parte imaginaria de la función característica cuasipolinomial para múltiples retardos. ....	37
4.2.1. Caso de dos retardos. ....	37
4.2.2. Caso de tres retardos. ....	38
4.2.3. Fórmulas generales para el caso de múltiples retardos. ....	38

## Tabla de contenido (continuación)

4.3. Resumen. . . . .	39
<b>Capítulo 5. Condiciones de estabilidad y regiones de estabilidad.</b>	
5.1. Condiciones de estabilidad. . . . .	40
5.1.1. Matriz de transformación. . . . .	43
5.1.2. Resumen. . . . .	44
5.2. Regiones de estabilidad para los SLR de primer orden y retardo único. . . . .	45
5.2.1. Resumen. . . . .	50
5.3. Regiones de estabilidad para los SLR de segundo orden y retardo único. . . . .	51
5.3.1. Ilustración de las regiones de estabilidad. . . . .	59
5.3.2. Análisis de las regiones de estabilidad. . . . .	64
5.3.3. Resumen. . . . .	70
<b>Capítulo 6. Discusión.</b>	
6.1. Relación de los resultados obtenidos con el teorema de Hayes. . . . .	71
6.1.1. Comparación con el ejemplo de la sección 2.4.1. . . . .	72
6.2. Interpretación gráfica del teorema de Pontryagin. . . . .	72
6.3. Análisis de la cota máxima de verificación del entrelazado de raíces de $F(\omega) = 0$ y $G(\omega) = 0$ . . . . .	75
6.4. Análisis desde el enfoque matricial mediante la ecuación característica. . . . .	78
6.5. Resumen. . . . .	80
<b>Capítulo 7. Conclusiones</b>	
7.1. Trabajo futuro. . . . .	83
<b>Literatura citada</b> . . . . .	84

## Lista de figuras

Figura	Página
1. Región de estabilidad en función a los valores propios ( $\lambda$ ) de $A$ . . . . .	11
2. Infinitas intersecciones (raíces de (19)) a lo largo de $\omega$ . . . . .	12
3. Ejemplo de casos de entrelazado de raíces de $F(\omega) = 0$ y $G(\omega) = 0$ . . . . .	15
4. Regiones paramétricas de estabilidad asintótica para el SLR de primer orden (129). . . . .	46
5. Región aparente de raíces reales para $F_1(\omega)$ y $G_1(\omega)$ . . . . .	47
6. Raíces de $G_1(\omega)$ para caso ( $\alpha_{0,0} < 0$ ) y ( $\alpha_{0,0} > 0$ ). . . . .	48
7. Región 1 de estabilidad asintótica del SLR de primer orden. . . . .	48
8. Región 2 de estabilidad asintótica del SLR de primer orden. . . . .	50
9. Región 1 de estabilidad para SLR de segundo orden. . . . .	59
10. Región 2 de estabilidad para SLR de segundo orden. . . . .	60
11. Región 3 de estabilidad para SLR de segundo orden. . . . .	60
12. Región 4 de estabilidad para SLR de segundo orden. . . . .	60
13. Región 4 de estabilidad de $A_0$ con $A_1$ en la región de la Figura 14. . . . .	61
14. Región 4 de estabilidad para $A_1$ en relación a la Figura 13. . . . .	62
15. Región 4 estabilidad para el caso $\alpha_{1,0} = \alpha_{1,1}$ para SLR de segundo orden. . . . .	63
16. Ejemplos de regiones de estabilidad de $A_0$ para el caso $\alpha_{1,0} = \alpha_{1,1}$ . . . . .	63
17. Ejemplos de casos en los que se cumplen las condiciones (168) y (169). . . . .	64
18. Ejemplos de casos en los que no se cumple las condiciones (168) y (169). . . . .	65
19. Región de estabilidad para el punto $A_0$ . . . . .	66
20. Región de estabilidad para el punto $A_0^*$ cuando $\alpha_{0,0}^* > \frac{(\alpha_{1,0}^*)^2}{2}$ según la ubicación del punto $A_0^*$ . . . . .	67
21. Ejemplo de la curva paramétrica dada por (187) tendiendo a la recta $\alpha_{0,0} - \alpha_{0,1} = \pi^2$ . . . . .	68
22. Caso en el que la curva paramétrica tiende a salir de la zona de estabilidad. . . . .	69
23. Región de estabilidad paramétrica de $A_1$ que representa a (196) y (197). . . . .	70
24. Ejemplo 1 de representación paramétrica de $(F(\omega), G(\omega))$ para $\omega \geq 0$ . . . . .	74
25. Ejemplo 2 de representación paramétrica de $(F(\omega), G(\omega))$ para $\omega \geq 0$ . . . . .	76

## Lista de tablas

Tabla	Página
1. Fórmulas recursivas de los coeficientes para $r = 1$ . . . . .	36
2. Coeficientes para el caso $r = 1$ . . . . .	37
3. Coeficientes para el caso $r = 2$ . . . . .	37
4. Coeficientes para el caso $r = 3$ . . . . .	38

## Capítulo 1. Introducción.

---

Los retardos de tiempo aparecen en los sistemas por diversos motivos. Algunos presentan retardo de forma intrínseca como los procesos de transporte de materia o de información, o como los procesos con tiempos de procesamiento considerables (procesamiento del control o tratamiento de señales); también el retardo puede aparecer cuando es conveniente modelar un proceso de orden elevado a partir de un modelo de orden reducido con retardo, para así facilitar el análisis y el diseño de controladores (Halevi, 1996). Por ejemplo, un calentador de agua es más sencillo de modelar a partir de un sistema con retardo. Otros ejemplos de sistemas con retardo son: el transporte de fluidos en tuberías largas, sistemas de control en cuyos lazos hay sensores como cámaras, columnas de destilación, procesos de secado de papel, plantas de reciclado, procesos de refinación, sistemas teleoperados e incluso en el caso de modelado de población y procesos químicos (Kolmanovskii y Myshkis, 2012).

Los sistemas que presentan retardo también son conocidos como sistemas con tiempo muerto, sistemas hereditarios o ecuaciones diferenciales en diferencias. Pertenecen a una clase de ecuaciones diferenciales funcionales que poseen dimensión infinita. El análisis de estabilidad se vuelve complicado al incluir el retardo en el modelo de un sistema, por el simple hecho de que se convierte en un sistema de dimensión infinita. Esto conlleva a que en varias ocasiones se opte por utilizar aproximaciones de dimensión finita para facilitar el análisis, pero con esto puede ocurrir que a pesar que el sistema original sea estable, con la aproximación resulte en un modelo inestable.

En este trabajo se analizarán los sistemas lineales con retardo (SLR) de la forma:

$$y^{(n)}(t) = - \sum_{j=0}^{\tau} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j} y^{(i)}(t-jh), \quad (1)$$

donde  $y \in \mathcal{R}$ ,  $n$  es el orden del sistema,  $a_{i,j} \in \mathcal{R}$  son parámetros constantes,  $h$  es el retardo base,  $\tau \in \mathcal{N}$  es el retardo máximo y  $y^{(i)}$  es la  $i$ -ésima derivada de  $y$  respecto al tiempo  $t$ .

Como se dijo anteriormente, el análisis de estabilidad de los SLR se dificulta debido al término del retardo. Si hacemos la comparación con un sistema lineal sin retardo de la forma  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , donde  $A$  es una matriz de dimensión  $n \times n$  ( $n$  = número

de estados del sistema) y  $x \in \mathcal{R}^n$ , el análisis de estabilidad se realiza de manera directa, verificando que todos los valores propios de la matriz  $A$  tengan parte real negativa, ya sea por cálculo directo, o por medio del criterio de Routh-Hurwitz. Ahora si consideramos un SLR de la forma:

$$\dot{x}(t) = Bx(t - \tau), \quad B \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad (2)$$

su ecuación característica es trascendente, es decir, posee un número infinito de raíces que además se deben calcular de manera numérica. Para este caso particular de la ecuación (2) ya se dispone del criterio de estabilidad en la literatura actual, presentada en (Hara y Sugie, 1996), pero para muchos otros casos no se dispone de las regiones de estabilidad.

Básicamente los métodos de análisis de estabilidad para SLR existentes en la literatura actual se basan en lo que se denomina el teorema de Pontryagin presentado en (Pontryagin, 1942), y en los teoremas de Lyapunov-Krasoskii, el cual consiste en analizar la estabilidad de sistemas con retardo a partir de funcionales de Lyapunov y de Lyapunov-Razumikhin, el cual se basa en una redefinición de las funciones de Lyapunov aplicables a sistemas con retardos; estos dos últimos teoremas establecen los fundamentos del análisis de la estabilidad en el dominio del tiempo y se centran básicamente en el diseño de la función o funcional candidata de Lyapunov, como se explica en (Fridman, 2014).

Además en la literatura también se encuentra el análisis de la estabilidad para obtener condiciones necesarias y suficientes a partir de la búsqueda de una solución a un problema LMI (desigualdad matricial lineal) en sistemas continuos, el cual se basa en los teoremas de Razumikhin y Lyapunov-Krasovskii. Por otro lado, la ubicación de las raíces de la ecuación característica de los sistemas con retardo se puede caracterizar con base en el trabajo de (Pontryagin, 1942), los cuales están relacionados con la estabilidad asintótica de los SLR.

Dichos trabajos son la base de este trabajo de tesis. Además existen otros trabajos realizados que están basados en el teorema de Pontryagin como los resultados de Cahlon y Schmidt (Cahlon y Schmidt, 2001, 2004, 2007), y el teorema de Hayes (Hayes, 1950), los cuales obtuvieron condiciones necesarias y suficientes de estabilidad,

siendo el de Cahlon y Schmidt un resultado algorítmico de estabilidad, y el de Hayes una región de estabilidad para el caso de los sistemas lineales con retardo único de primer orden. En esta propuesta de tesis se encontrarán condiciones necesarias o suficientes con base en los teoremas ya existentes respecto a la estabilidad asintótica de la solución cero en sistemas lineales con retardo invariante en el tiempo.

### **1.1. Justificación.**

El estudio de los sistemas con retardo es importante para el posterior diseño de los controladores para estos sistemas. De hecho, los sistemas de control son sensibles a los retardos que se presenten en los sistemas, esto se puede ver, teniendo en cuenta el control clásico, que al tener retardos en el sistema esto hace que el margen de fase disminuya; el hecho de no considerar los retardos en el diseño podría generar inestabilidad en el sistema en lazo cerrado. Además, es común que para facilitar el análisis de estabilidad de los SLR se utilicen aproximaciones de dimensión finita, pero el estudio la estabilidad del SLR sin tener que utilizar estas aproximaciones da un resultado más exacto y confiable.

Como se mencionó anteriormente, ya existen métodos de análisis de estabilidad que proveen condiciones necesarias y suficientes para los SLR, como lo es un teorema debido a Pontryagin, su desventaja es que presenta criterios que deben ser verificados para todas las raíces de la función característica asociada al sistema, pero el número de estas raíces es infinito, y esto dificulta el análisis. Ahora, teniendo en cuenta el trabajo de Cahlon y Schmidt, este método tiene la ventaja de permitir analizar la estabilidad punto a punto (para los parámetros específicos) de un SLR, mas no permite caracterizar las regiones de estabilidad en función a los parámetros del sistema. En cambio, el resultado que se presenta en (Hayes, 1950), permite caracterizar la región de estabilidad para el caso del SLR simple de primer orden, y esto da mayor facilidad en el análisis de estabilidad para los sistemas de este tipo.

Por lo tanto, en esta tesis se busca disminuir la dificultad en el trabajo de análisis de estabilidad de los SLR, mediante la obtención de expresiones más simples de verificar y la caracterización de las regiones de estabilidad, sin tener que estudiar las expresiones que resultan al aplicar directamente el teorema de Pontryagin y evitar tener que

comprobar la estabilidad punto a punto como lo hacen en (Cahlon y Schmidt, 2007).

## **1.2. Objetivo General.**

El objetivo de esta tesis es encontrar condiciones necesarias o suficientes para estabilidad asintótica del origen de los SLR que no sean algorítmicas y que sean simples de verificar.

### **1.2.1. Objetivos particulares.**

1. Establecer una fórmula general para las ecuaciones requeridas por el teorema de Pontryagin.
2. Caracterizar las regiones de estabilidad para sistemas con un solo retardo y  $n < 3$  ( $n$ =orden del sistema).
3. Establecer condiciones necesarias o suficientes para la estabilidad asintótica basadas en los resultados obtenidos en el punto 1.

## **1.3. Organización de la tesis.**

El resto del trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera. El Capítulo 2 presenta los conceptos y las consideraciones necesarias para familiarizarse con los resultados obtenidos en este trabajo, como los conceptos referentes a estabilidad y el modelo matemático del sistema a utilizar para el análisis. Se dará mayor énfasis en ese capítulo al teorema de Pontryagin, incluyendo ejemplos didácticos para su mejor entendimiento ya que será la base para la obtención de resultados; también se presentan otros resultados de la literatura actual como los de (Cahlon y Schmidt, 2007) y de (Hayes, 1950). En el Capítulo 3 se presenta un resultado algorítmico de análisis de estabilidad asintótica de los SLR con retardo simple, este trabajo en particular realiza la descomposición triangular por bloques utilizando el concepto de separación en parte controlable y no controlable, para así lograr realizar el análisis con menor dificultad. En el Capítulo 4 se establecen las fórmulas generales para las ecuaciones requeridas por el teorema de Pontryagin, las cuales resultan ser fórmulas recursivas. Además se

presentan las pruebas de cada fórmula y un resumen de las mismas en una tabla. En el Capítulo 5 se establecen las condiciones de estabilidad asintótica las cuales están basadas en los resultados obtenidos en el capítulo cuatro, además de esto, se presenta una interpretación en forma matricial de estas condiciones halladas, donde aparece la matriz de rotación. También en ese capítulo se presenta la caracterización de las regiones de estabilidad para sistemas con un solo retardo y  $n < 3$ , donde se realiza un análisis algebraico a cada condición de estabilidad para obtener así las curvas paramétricas que definen a cada región de estabilidad. Las comparaciones de los trabajos actuales de la literatura con los resultados obtenidos en esta tesis se presentan en el Capítulo 6, junto con una interpretación geométrica del teorema de Pontryagin y un análisis de uno de los criterios del teorema de Pontryagin. Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones generales donde se resumen los resultados obtenidos y también se hace una introducción a los temas de trabajo futuro que tienen relación con los resultados de este trabajo de investigación.

## Capítulo 2. Preliminares

---

En este capítulo se dará una introducción sobre el tipo de sistema con retardo considerado en este trabajo y del modelo o representación matemática que se utilizará para este sistema, el cual será utilizado para todos los análisis del mismo (sección 2.1). Enseguida, en la sección 2.2 se da una breve introducción sobre los conceptos de estabilidad y a su vez de inestabilidad. La ecuación característica relacionada con el tipo de sistema con retardo considerado se presenta en la sección 2.3, junto con la explicación de la problemática del número infinito de raíces que posee la misma, y un concepto de estabilidad que tiene relación con la ecuación característica. En la sección 2.4 se expone el teorema de Pontryagin, el cual es fundamental para este trabajo de tesis donde se hablará de cada criterio del mismo, acompañado de un ejemplo didáctico donde se aplica el teorema para el análisis de estabilidad. Luego en la sección 2.5 se presenta uno de los dos casos para los SLR que desarrollaron Cahlon y Schmidt los cuales consisten en criterios algorítmicos de estabilidad. En la sección 2.6 se encuentra el teorema de estabilidad de Hayes, el cual es aplicable a los sistemas lineales de primer orden con retardo único y la sección 2.7 presenta teoremas para los sistemas con retardo puro. Los trabajos presentados en las secciones 2.5 y 2.6 sirven de base para la obtención de los resultados de esta tesis y servirán como referencia para la discusión a presentarse en el Capítulo 6.

### 2.1. Sistemas considerados.

Un sistema dinámico sin retardo se puede caracterizar utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (3)$$

donde  $x \in \mathcal{R}^n$  simboliza las variables de estado del sistema o proceso. Sin embargo, en este trabajo se presentan sistemas que no solo dependen de su estado actual en  $x(t_0)$ , sino también de los valores pasados dentro de un tiempo  $\phi$ , con  $t_0 - \tau \leq \phi \leq t_0$ , donde  $\tau \in \mathcal{N}$  representa el retardo en el tiempo, por esto reciben el nombre de sistemas hereditarios. Los sistemas con retardo pueden ser modelados por ecuaciones

diferenciales funcionales (EDF) como

$$\dot{x}(t) = f(t, x_{[\tau]}), \quad x_{\tau} = \{x(t), x(t-1), \dots, x(t-\tau)\}. \quad (4)$$

En este trabajo de tesis se estudiarán los sistemas que pueden modelarse por EDF con la característica de que el término de mayor orden de la derivada es justamente el término sin retardo, por lo tanto a este tipo se les llama ecuaciones diferenciales funcionales retardadas (EDFR). Además, según el número de retardos se pueden dividir en:

**sistemas con retardo simple:** sistemas con retardo simple: en los que solo aparece un único retardo  $\tau$ ; y

**sistemas con retardos múltiples:** para un sistema de orden  $n$  en el que aparece más de un retardo  $\tau_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . En el caso particular de que todos los retardos sean múltiplos enteros de un retardo base  $\tau$ , se los llama retardos conmensurables.

Finalmente, se puede decir que en este trabajo de tesis se analizarán los sistemas lineales con retardo que pueden ser representados por EDFR y son de la forma

$$x^{(n)}(\hat{t}) = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r \hat{a}_{j,k} x^{(j)}(\hat{t} - k\tau), \quad (5)$$

donde  $x \in \mathcal{R}$ ,  $n$  es el orden del sistema,  $\hat{a}_{j,k} \in \mathcal{R}$  son los coeficientes constantes del sistema,  $\tau \geq 0$  es el retraso en el tiempo,  $r$  es la cantidad de retardos en el sistema y  $x^{(j)}$  es la  $j$ -ésima derivada de  $x$  respecto al tiempo  $t$ . El sistema (5) posee condiciones iniciales

$$x(\hat{t}) = \phi(\hat{t}), \quad \hat{t} \in [-r\tau, 0]. \quad (6)$$

En el caso de retardos conmensurables se puede realizar un escalamiento en el tiempo con  $\hat{t} = \tau t$ , entonces el sistema (5) queda de la forma

$$\frac{d^n x(t)}{\tau^n dt^n} = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r \hat{a}_{j,k} \frac{d^j x(t-k)}{\tau^j dt^j}, \quad (7)$$

y multiplicando por  $\tau^n$  se tiene

$$x^{(n)}(t) = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r a_{j,k} x^{(j)}(t-k), \quad (8)$$

donde

$$a_{j,k} = \hat{a}_{j,k} \tau^{n-j}. \quad (9)$$

## 2.2. Conceptos de estabilidad.

Básicamente, un sistema es estable cuando dadas ciertas condiciones iniciales todos los estados del sistema alcanzan el punto de equilibrio en régimen permanente o estado estacionario, es decir, una vez que ya haya transcurrido el estado transitorio. En este trabajo se analizan los SLR, los cuales tienen como punto de equilibrio el origen  $x_0 = 0$ , siendo este una solución del sistema considerado. A continuación se presentan las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov:

**Definición 2.1** *Estabilidad.* Se dice que un sistema lineal es estable si para cualquier valor de tiempo arbitrario  $t_0 \geq 0$ , y para cierto valor  $\epsilon > 0$  escalar existe cierto valor  $\delta = \delta(t_0)$  tal que para sistemas continuos verifica  $|x(t_0)| \leq \delta(t)$  entonces  $|x(t)| \leq \epsilon$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

Con base en esta definición, con palabras más simples, se puede decir que el sistema es estable si para cada  $\epsilon > 0$  hay un  $\delta$  tal que si la condición inicial de la solución del sistema empieza a una distancia menor del punto de equilibrio  $x_0 = 0$  que  $\delta$ , esta se mantendrá distante al punto de equilibrio a una distancia menor que  $\epsilon$  de ahí en adelante. Esta característica deben tener todas las soluciones con condición inicial a una distancia menor que  $\delta$ . Teniendo en cuenta a una bola de radio  $\epsilon$ , si existe una solución que no se mantiene dentro de la bola de radio  $\epsilon$  para ningún  $\delta$ , entonces el sistema es inestable.

**Definición 2.2** *Estabilidad asintótica.* Se dice que el sistema es estable asintóticamente en  $x_0 = 0$  si es estable y si  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$ .

En el caso de estabilidad asintótica, el punto de equilibrio  $x_0 = 0$  en régimen permanente siempre es alcanzado. Esto implica que las soluciones del sistema que empiezan

en un entorno cercano al punto de equilibrio tiendan al mismo.

### 2.3. Ecuación característica del sistema considerado.

En este trabajo se estudia la estabilidad de los SLR representados por (5). Para ello se estudia la estabilidad de

$$x^{(n)}(t) = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r a_{j,k} x^{(j)}(t-k), \quad (10)$$

donde  $a_{j,k} = \hat{a}_{j,k} \tau^{n-j}$ . Las soluciones de la ecuación (10) son de la forma  $x(t) = e^{st}$  donde  $t$  es el tiempo y  $s$  una variable compleja que no debe confundirse con la variable de Laplace, aunque jugará un papel similar. Por lo tanto utilizando la solución  $x(t) = e^{st}$  en (10) se puede obtener su ecuación característica la cual está dada por:

$$s^n e^{st} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r e^{s(t-k)} a_{j,k} s^j = 0. \quad (11)$$

Factorizando  $e^{st}$  queda

$$\left( s^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r e^{-ks} a_{j,k} s^j \right) e^{st} = 0. \quad (12)$$

Así la función característica del sistema (10) es:

$$\hat{H}(s) = s^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r e^{-ks} a_{j,k} s^j, \quad (13)$$

luego, multiplicando por  $e^{rs}$  queda:

$$H(s) = s^n e^{rs} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r e^{s(r-k)} a_{j,k} s^j, \quad (14)$$

y renombrando  $e^s = z$  se puede ver que

$$H(s) = h(s, z) = s^n z^r + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r a_{j,k} z^{r-k} s^j. \quad (15)$$

Sea  $N$  el mayor exponente de  $s$  y  $M$  el de  $z$ , entonces el término  $s^N z^M$  en (15) es llamado término principal. No todos los polinomios poseen término principal, los polinomios

que sí lo poseen son llamados cuasipolinomios. En este caso  $H(s)$  es una función cuasipolinomial.

A continuación se presenta una definición de estabilidad que está relacionada con las características que posea la función cuasipolinomial  $H(s)$ .

**Definición 2.3** *Criterio de estabilidad: Sea  $H(s)$  la ecuación característica del sistema con retardo (10). El sistema con retardo es asintóticamente estable si y sólo si todas las raíces de  $H(s) = 0$  se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo.*

### 2.3.1. Número infinito de raíces de la función $H(s)$ .

El análisis de estabilidad asintótica para el caso de un sistema que presenta retardo es más complicado que cuando éste no presenta retardo. Esto se explica mejor con una simple comparación entre sus ecuaciones características. Si primeramente tenemos en cuenta el sistema lineal sin retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad (16)$$

su ecuación característica es

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (17)$$

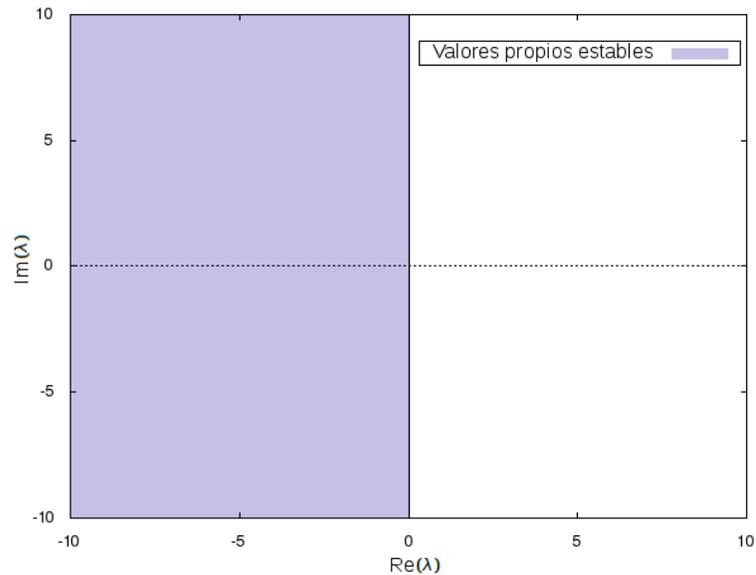
donde  $\lambda$  representa los valores propios de  $A$ , e  $I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , es la matriz identidad. Se sabe que el origen de este sistema es un punto de equilibrio asintóticamente estable si la matriz  $A$  es estrictamente Hurwitz, es decir, si todos sus valores propios tienen su parte real negativa; por lo tanto la región de estabilidad del sistema (16) puede ser ilustrada fácilmente como se presenta en la Figura 1.

Si un valor propio de la matriz  $A$  tiene parte real positiva esto significa que al menos una solución se aleja del punto de equilibrio (el origen), esto implica que el origen no es estable. Este análisis es directo y conciso, en cambio, si sólo analizamos el ejemplo más simple de un SLR

$$\dot{x}(t) = -bx(t - \tau), \quad b \in \mathcal{R}, \quad (18)$$

haciendo  $x(t) = e^{st}$ , se obtiene que su ecuación característica es:

$$e^s s + b = 0. \quad (19)$$



**Figura 1.** Región de estabilidad en función a los valores propios ( $\lambda$ ) de  $A$ .

Si se quieren hallar todas las raíces de (19), entonces se escribe  $s = \sigma + i\omega$ , donde  $\sigma$  y  $\omega$  son la parte real y la parte imaginaria de  $s$  respectivamente; de ahí

$$e^{\sigma+i\omega}(\sigma + i\omega) + b = 0, \quad (20)$$

y aplicando la identidad de Euler  $e^{\sigma+i\omega} = e^{\sigma}(\cos(\omega) + i\sen(\omega))$  entonces

$$e^{\sigma}(\cos(\omega) + i\sen(\omega))(\sigma + i\omega) + b = 0. \quad (21)$$

Multiplicando por  $\sigma - i\omega$  se llega a

$$e^{\sigma} \cos(\omega) + ie^{\sigma} \sen(\omega) = \frac{-b\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} + i \frac{b\omega}{\sigma^2 + \omega^2}, \quad (22)$$

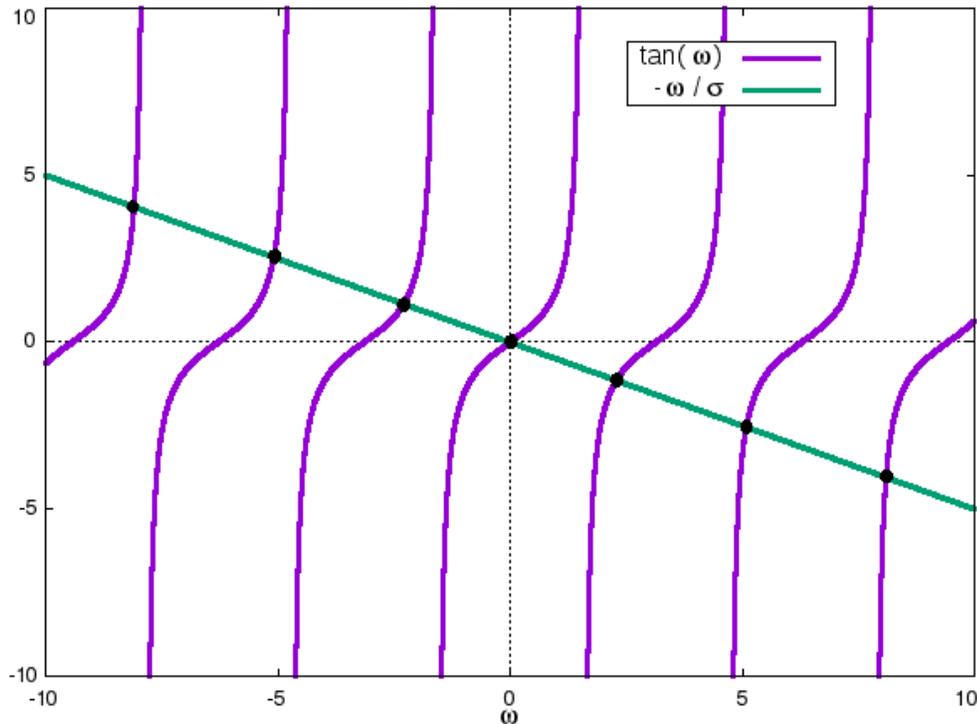
Si se separa en parte real y parte imaginaria se tiene que

$$e^{\sigma} = \frac{-b\sigma}{\cos(\omega)(\sigma^2 + \omega^2)} = \frac{b\omega}{\sen(\omega)(\sigma^2 + \omega^2)}, \quad (23)$$

luego

$$\tan(\omega) = -\frac{\omega}{\sigma}, \quad (24)$$

por lo tanto las raíces de (19) están en (24); esto implica que las raíces se encuentran en las intersecciones de la función  $\tan(\omega)$  con  $-\frac{\omega}{\sigma}$  como se muestra en la Figura 2.



**Figura 2.** Infinitas intersecciones (raíces de (19)) a lo largo de  $\omega$ .

Se puede notar que el problema está en que la ecuación característica (19) tiene un número infinito de raíces, las cuales deben ser verificadas para comprobar la estabilidad del sistema en cuestión. Esta es la dificultad que presenta el análisis de estabilidad de los sistemas con retardo.

#### 2.4. Teorema de Pontryagin.

Con base en el criterio de estabilidad 2.3 presentado anteriormente, el teorema de Pontryagin se dedica a estudiar las raíces de la ecuación  $H(s) = 0$  presentada en (14) para así determinar la estabilidad asintótica de los SLR.

**Teorema 2.1** (Pontryagin, 1942) *Considere el sistema lineal con retardo de la forma (10) cuya ecuación característica asociada es (14).*

**Criterio 1.** *Si la ecuación característica (15) no tiene término principal, entonces el sistema (5) es inestable para todo  $a_{j,k}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $k = 0, 1, \dots, r$ .*

**Criterio 2.** *Sea  $H(s) = h(s, z)$ , donde  $z = e^s$  es un polinomio con un término principal.*

La función  $H(i\omega)$  se separa en parte real y parte imaginaria; es decir, se establece

$$H(i\omega) = \underbrace{F(\omega)}_{\text{real}} + i \underbrace{G(\omega)}_{\text{imaginaria}} . \quad (25)$$

Así, si todos los ceros de la función  $H(s)$  se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo, entonces las raíces de las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  son reales, entrelazadas y para toda  $\omega$  real se cumple

$$\nabla\omega = F(\omega)G'(\omega) - F'(\omega)G(\omega) > 0. \quad (26)$$

Además, para que todos los ceros de la función  $H(s)$  se encuentren en el semiplano izquierdo, es suficiente que una de las siguientes condiciones se satisfaga:

1. Todos los ceros de las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  son reales y entrelazados, y la desigualdad (26) es satisfecha para al menos un valor de  $\omega$ .
2. Todos los ceros de la función  $F(\omega)$  son reales y para cada uno de estos ceros  $\omega = \omega_0$ , la condición (26) es satisfecha; esto es  $F'(\omega)G(\omega) < 0$ .
3. Todos los ceros de la función  $G(\omega)$  son reales y para cada uno de estos ceros  $\omega = \omega_0$ , la condición (26) es satisfecha; esto es  $F(\omega)G'(\omega) > 0$ .

Para lograr verificar el criterio 2, el siguiente resultado de Pontryagin puede ser utilizado para encontrar el número de raíces reales de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$ .

**Criterio 3:** para que las ecuaciones  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  tengan sólo raíces reales, es necesario y suficiente que en el intervalo

$$-2K\pi + \eta \leq \omega \leq 2K\pi + \eta,$$

tenga exactamente  $4KM + N$  raíces reales, donde  $N$  y  $M$  son el valor de las potencias más grandes de  $s$  y  $z$  de la ecuación (15) respectivamente, comenzando con una  $K$  suficientemente grande.  $\eta$  es una constante apropiada de forma a que el coeficiente de términos de mayor grado en  $\omega$  no se desvanece en  $\omega = \eta$ .

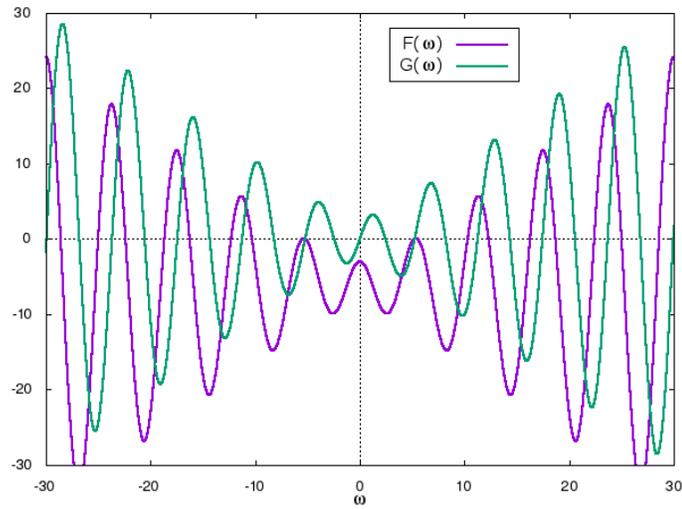
Se puede ver que lo que indica el criterio 1 es sólo una condición necesaria de

estabilidad, mas no suficiente; el criterio 2 es una condición necesaria y suficiente y el criterio 3 es útil para comprobar el criterio 2.

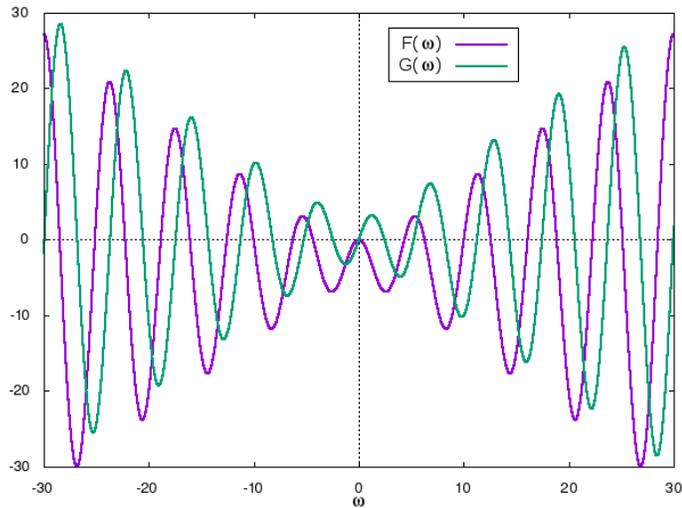
Para estudiar la localización de las raíces de  $H(s) = 0$  se deben estudiar los ceros de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$ . Por lo tanto, si las raíces de  $H(s) = 0$  se encuentran en el semi-plano izquierdo del plano complejo entonces el sistema con retardo es asintóticamente estable.

**Observación 2.1** *La condición de entrelazado se refiere a que las raíces de las ecuaciones  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  tengan la característica de que entre dos raíces consecutivas de  $F(\omega) = 0$  exista una y solamente una raíz de  $G(\omega) = 0$ .*

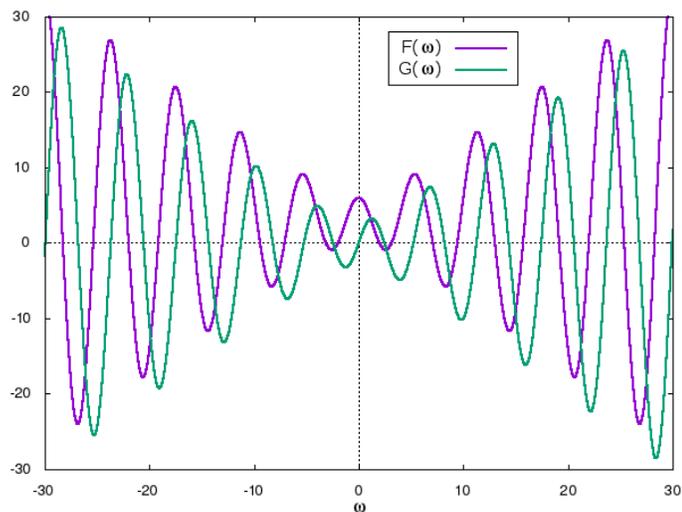
El hecho de que las raíces de las funciones  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  se entrelacen o no, puede representarse en la Figura 3, donde se puede ver que ambas funciones presentan un comportamiento sinusoidal, y que dependiendo del valor de los parámetros del sistema se cumple el entrelazado o no. Así, en la Figura 3(a) las raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  se entrelazan sólo en algunos intervalos de  $\omega$ , pero se ve que aproximadamente en el intervalo de  $\omega \in (-2\pi, 2\pi)$  no se entrelazan. En la Figura 3(b), las raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  están en el límite de entrelazado, se puede ver que ambas funciones tienen raíces en  $\omega = 0$ . Sin embargo, la Figura 3(c) muestra el entrelazado de las raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  para todo valor de  $\omega$ .



(a) Raíces no entrelazadas.



(b) Raíces al límite del entrelazado.

(c) Raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  entrelazadas.**Figura 3.** Ejemplo de casos de entrelazado de raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$ .

### 2.4.1. Ejemplo.

A continuación se muestra un ejemplo ilustrativo en la aplicación de este teorema para el caso  $n = r = 1$  y  $a_{0,0} = 0$  del sistema (5). Considere entonces el sistema

$$\dot{x}(\hat{t}) = -\hat{a}_{0,1}x(\hat{t} - \tau), \quad x(\hat{t}), \hat{a}_{0,1} \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Si se escala en tiempo con  $\hat{t} = t\tau$  entonces  $a_{0,1} = \hat{a}_{0,1}\tau$ . El sistema (27) queda de la forma

$$\dot{x}(t) = -a_{0,1}x(t - 1), \quad x(t), a_{0,1} \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Para este caso particular la función característica cuasipolinomial está dada por:

$$H(s) = h(s, e^s) = se^s + a_{0,1} = 0, \quad (29)$$

sustituyendo  $z = e^s$  queda:

$$H(s) = h(s, z) = sz + a_{0,1} = 0, \quad (30)$$

por lo tanto la función  $h(s, z)$  posee término principal. Haciendo  $s = i\omega$  queda que:

$$H(i\omega) = i\omega e^{i\omega} + a_{0,1} = (-\omega \operatorname{sen}(\omega) + a_{0,1}) + i\omega \cos(\omega). \quad (31)$$

De esta forma la función  $H(i\omega) = F(\omega) + iG(\omega)$  posee una parte real  $F(\omega)$  y una parte imaginaria  $G(\omega)$  dadas por:

$$F(\omega) = -\omega \operatorname{sen}(\omega) + a_{0,1}, \quad (32)$$

$$G(\omega) = \omega \cos(\omega). \quad (33)$$

Las raíces de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  se encuentran en:

$$F(\omega) = -\omega \operatorname{sen}(\omega) + a_{0,1} = 0 \rightarrow \omega_{01} \operatorname{sen}(\omega_{01}) = a_{0,1},$$

$$G(\omega) = \omega \cos(\omega) = 0 \rightarrow \omega_{02} = 0 \vee \omega_{03} = \frac{(2l+1)\pi}{2}; l \in \mathbb{Z}.$$

Luego las derivadas de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  son:

$$F'(\omega) = -\text{sen}(\omega) - \omega \cos(\omega), \quad (34)$$

$$G'(\omega) = \cos(\omega) - \omega \text{sen}(\omega). \quad (35)$$

Posteriormente, se tiene que  $F(\omega)G'(\omega)$  es

$$F(\omega)G'(\omega) = -\omega \text{sen}(\omega) \cos(\omega) + \omega^2 \text{sen}^2(\omega) + \alpha_{0,1} \cos(\omega) - \alpha_{0,1} \omega \text{sen}(\omega), \quad (36)$$

se procede a verificar si cumple la condición 3 del criterio 2. Sustituyendo en la ecuación (36) las raíces de  $G(y)$  para  $l = 0$  se tiene

- $F(\omega_{02})G'(\omega_{02}) = F(0)G'(0) = \alpha_{0,1}$ ,
- $F(\omega_{03})G'(\omega_{03}) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\alpha_{0,1}$ .

Entonces para que se cumpla la condición 3 de Pontryagin se debe satisfacer:

- $\alpha_{0,1} > 0$ ,
- $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\alpha_{0,1} > 0 \rightarrow \alpha_{0,1} < \frac{\pi}{2}$ .

Por lo tanto para que la solución cero del sistema lineal con retardo de la ecuación (28) sea asintóticamente estable es suficiente que  $0 < \alpha_{0,1} < \frac{\pi}{2}$ . Este es un resultado conocido, que también se presenta en (Matsunaga, 2007).

## 2.5. Criterio de estabilidad algorítmico.

El trabajo de Cahlon y Schmidt propone un criterio de estabilidad algorítmico, el cual está dividido en dos partes, uno se dedica a analizar la estabilidad asintótica de los SLR de orden par y el otro a los de orden impar. Se refiere a que es algorítmico debido a que se basa en un conjunto de pasos a seguir que conllevan resolver ecuaciones para encontrar sus raíces y volver a verificar en el siguiente paso estas raíces. En el trabajo (Cahlon y Schmidt, 2007), el cual corresponde al caso de orden impar, se presentan

criterios algorítmicos de estabilidad para el sistema:

$$x^{(2m+1)}(t) = - \sum_{j=0}^{2m} \hat{a}_{j,0} x^{(j)}(t) - \sum_{j=0}^{2m} \hat{a}_{j,1} x^{(j)}(t - \tau), \quad (37)$$

donde  $\hat{a}_{j,0}$ ,  $\hat{a}_{j,1}$  son las constantes del sistema;  $m \geq 1$  y  $\tau > 0$ . Su ecuación característica es

$$H(s) = s^n e^s + \sum_{j=0}^{2m} a_{j,0} s^j e^s + \sum_{j=0}^{2m} a_{j,1} s^j. \quad (38)$$

donde  $a_{j,0} = \hat{a}_{j,0} \tau^{2m+1-j}$  y  $a_{j,1} = \hat{a}_{j,1} \tau^{2m+1-j}$  con  $j = 0, \dots, 2m$ , teniendo en cuenta que se trata de un sistema con retardos conmensurables.

**Teorema 2.2** (Cahlon y Schmidt, 2007) (Prueba de estabilidad algorítmica general): sea  $2N$  el entero par más pequeño mayor o igual a  $\max\{N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ . La solución cero es asintóticamente estable si y sólo si

1.  $\alpha_{1,0} + \alpha_{0,0} + \alpha_{1,1} > 0$  y  $\alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} > 0$ ,
2.  $G$  tiene  $2N + m$  distintos ceros  $r_1 < r_2 < \dots < r_{2N+m}$  en  $(0, 2N\pi)$ ,
3.  $(-1)^n F(r_n) > 0$  ( $n = 1, \dots, 2N + m$ ).

donde  $F$  y  $G$  representan a las funciones que corresponden a la parte real y parte imaginaria respectivamente de la función cuasipolinomial asociada al sistema (37).

$\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  son los enteros positivos que están dados por

$$M_1 = \left[ 1 + \left( \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha_{2j+1,0} + \alpha_{2j+1,1}}{\pi^{2(m-j)}} \right)^{1/2} \right],$$

$$M_2 = \left[ 1 + \sqrt{2} \left( \sum_{j=0}^m \frac{|\alpha_{2j,0}|}{\pi^{2(m-j)+1}} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|\alpha_{2j+1,1}|}{\pi^{2(m-j)}} \right) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|\alpha_{2j+1,0}|}{\pi^{2(m-j)}} \right],$$

$$M_3 = \left( 1 + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^{2(m-j)}} \right) + \sqrt{2} \sum_{j=0}^{m-1} |\alpha_{2j+1,1}| \left( \frac{1}{\pi^{2(m-j)}} + \frac{2(m-j)-1}{\pi^{2(m-j)+1}} \right) \frac{|\alpha_{2m,0}|}{\pi^2}$$

$$+ 2 \sum_{j=0}^{m-1} |\alpha_{2j+1,0}| \left( \frac{m-j-1}{\pi^{2(m-j)+1}} \right) + \sum_{j=0}^{m-1} |\alpha_{2j,0}| \frac{2(m-j)+1}{\pi^{2(m-j+1)}},$$

$$M_4 = \left[ 1 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|a_{2j+1,0}|}{\pi^{2(m-j)}} + \sum_{j=0}^m \frac{|a_{2j,0}|}{\pi^{2(m-j)+1}} + \sqrt{2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|a_{2j+1,1}|}{\pi^{2(m-j)}} \right],$$

y se deben escoger  $N_1, N_2, N_3$  que sean los enteros positivos más pequeños tales que

$$\sum_{l=0}^m \frac{|a_{2l,0}|}{(N_1 \pi)^{2(m-l)+1}} < \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$$\sum_{l=0}^{m-1} \frac{|a_{2l,0}|}{(N_2 \pi)^{2(m-l)}} < \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$$\sum_{l=0}^m \frac{|a_{2l,1}|}{(N_3 \pi)^{2(m-l)+1}} < \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

En conclusión, este método algorítmico permite hallar una cota o intervalo en la cual se debe verificar punto a punto que las raíces de las funciones de parte real e imaginaria, correspondientes al cuasipolinomio característico del sistema, sean reales y a la vez se entrelacen, ya que fuera de este intervalo se asegura que se cumpla la condición de entrelazado de raíces.

## 2.6. Teorema de Hayes.

El resultado que se presenta a continuación también tiene como base al teorema de Pontryagin explicado en la sección 2.4, y cabe mencionarlo debido a que será de utilidad para aplicarlo y para luego compararlo con los resultados obtenidos en esta tesis. Para el caso  $n = r = 1$ , se tiene que el sistema lineal con retardo es de la forma

$$\dot{x}(t) = -\hat{a}_{0,0}x(t) - \hat{a}_{0,1}x(t - \tau). \quad (39)$$

**Teorema 2.3** (Hayes, 1950) *La solución cero de (39) es asintóticamente estable si y sólo si los parámetros del sistema (39) se encuentran en la unión de las regiones*

$$\{(\hat{a}_{0,0}, \hat{a}_{0,1}) : \hat{a}_{0,0} = -\hat{a}_{0,1} \cos(\omega), 0 < \hat{a}_{0,1} \tau \sin(\omega) < \omega, 0 < \omega < \pi\}, \quad (40)$$

y

$$\{(\hat{a}_{0,0}, \hat{a}_{0,1}) : -\hat{a}_{0,0} < \hat{a}_{0,1} \leq \hat{a}_{0,0}\}. \quad (41)$$

Por lo tanto, este teorema provee dos regiones de estabilidad, siendo la región (40) dependiente del retardo y la región (41) independiente del retardo.

## 2.7. Teoremas de estabilidad para los sistemas lineales con retardo puro.

En esta sección se presentan los resultados que se tienen en la literatura actual para el análisis de estabilidad de los sistemas lineales con retardo puro. Específicamente se mostrarán los resultados obtenidos en (Hara y Sugie, 1996).

Sea el SLR de la forma

$$\dot{x}(t) = Bx(t - \tau) \quad (42)$$

donde  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ . En el trabajo de Hara y Sugie se define el criterio de estabilidad para el sistema (42) en términos de la traza de  $B$ , el determinante de  $B$  y el retardo  $\tau$ , el cual se expone a continuación.

**Teorema 2.4** (Hara y Sugie, 1996) *La solución cero del sistema (42) con  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es asintóticamente estable si y sólo si*

$$2\sqrt{\det A} \operatorname{sen}(\tau\sqrt{\det A}) < -\operatorname{tr} A < \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau \det A}{\pi}, \quad (43)$$

y

$$0 < \det A < \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^2. \quad (44)$$

Ahora, si se considera el caso de que las características del sistema (42) sean  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ , entonces la estabilidad del sistema (42) se puede verificar usando el siguiente resultado.

**Teorema 2.5** (Hara y Sugie, 1996) *La solución cero de (42) con  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es asintóticamente estable si y sólo si los valores propios reales de  $B$  denotados por  $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_l$  están en*

$$0 < \lambda_j < \frac{\pi}{2\tau} \quad (j = 1, \dots, l); \quad (45)$$

y los valores propios complejos de  $B$  denotados por  $-\rho_k(\cos \theta_k \pm i \sin \theta_k)$  satisfacen

$$0 < \rho_k \tau < \frac{\pi}{2} - |\theta_k| \quad (k = 1, \dots, m); \quad (46)$$

donde  $n = l + 2m$ .

## 2.8. Resumen.

En este capítulo se detallaron algunos conceptos y teoremas importantes que se utilizan en los siguientes capítulos. El modelado de los SLR considerados y su ecuación característica se emplean a lo largo de todos los capítulos restantes de esta tesis. El teorema de Pontryagin es de importancia ya que es la base de la investigación realizada, se utiliza principalmente en los capítulos 4 y 5. Los teoremas de Cahlon y Schmidt son de gran utilidad en el Capítulo 6 y los teoremas de Hayes y de Hara y Sugie se utilizan para lograr comparar los resultados obtenidos en esta tesis con dichos resultados y para emplearlos en los resultados del Capítulo 3.

### Capítulo 3. Análisis de estabilidad utilizando descomposición triangular por bloques para SLR.

---

Este capítulo está dedicado al análisis de estabilidad de sistemas lineales de retardo de tiempo con un solo retraso, dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (47)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ . El análisis de estabilidad de (47) ha sido estudiado en [Hayes (1950); Malek-Zavarei y Jamshidi (1987); Sakata (1998); Cahlon y Schmidt (2000, 2001); Niculescu (2001); Fridman (2014)]. Si  $B = 0$ , entonces su estabilidad puede establecerse directamente si todos los valores propios de  $A$  se encuentran en el lado izquierdo del plano complejo. Si  $A = 0$ , la estabilidad de (47) se puede verificar usando el Teorema 2.5 de la sección 2.7.

Para el análisis de estabilidad del caso escalar ( $n = 1$ ) del sistema (47), se puede aplicar el Teorema 2.3 presentado en la sección 2.6.

A pesar de esto, el caso general sigue siendo un problema no resuelto; existe una condición necesaria y suficiente para verificar la estabilidad de una clase particular de sistemas de la forma (47), para los cuales existe una matriz no singular  $Q(0)$ , la cual es una solución de la siguiente ecuación algebraica no lineal matricial:

$$e^{A+Q(0)\tau} Q(0) = B. \quad (48)$$

**Teorema 3.1** (Malek-Zavarei y Jamshidi, 1987) *Considere un sistema de la forma (47), para el cual  $Q(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una solución no singular de (48). Entonces, una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica de (47) es que*

$$\|\lambda_i\{BQ^{-1}(0)\}\| < 1, \quad (49)$$

para toda  $i = 1, \dots, n$ .

Pero esta no es una solución general, ya que no siempre existe una solución para la ecuación (48) para sistemas cuyo origen es asintóticamente estable. Por ejemplo,

el sistema

$$\dot{x}(t) = 0.5x(t) - x(t-1), \quad (50)$$

es asintóticamente estable pero no posee solución no singular para (48).

En este trabajo, se propone una descomposición triangular por bloques que puede usarse para analizar la estabilidad de algunos SLR de mayor dimensión, descomponiéndolo en subsistemas de orden bajo para los cuales los criterios de estabilidad ya están disponibles.

La idea principal es considerar primero el estado retardado como una entrada de control, y si el par  $(A, B)$  no es controlable, entonces existe una transformación  $T_1^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix}$  que descompone el sistema como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & A_2 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_3 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad (51)$$

lo que resulta en una dinámica sin retardo (que correspondería a  $z_1$ ) la cual se puede analizar calculando los valores propios de  $A_1$ , y una parte de dinámica mixta (que corresponde a  $x_1$ ). La matriz  $T_1$  se puede construir usando una base de la matriz de controlabilidad  $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  y los vectores requeridos para completar una matriz invertible, siendo este el procedimiento estándar para separar los subsistemas controlables y no controlables. En caso de que el par  $(A, B)$  sea controlable, el subsistema  $z_1$  tiene una dimensión cero y la transformación  $T_1$  es la matriz identidad. Cabe señalar que la dinámica de  $z_1$  no depende del retardo, y su estabilidad se puede probar directamente. Si  $z_1$  es asintóticamente estable, la estabilidad de (51) es equivalente a la estabilidad de

$$\dot{x}_1(t) = A_3x_1(t) + B_3x_1(t-\tau). \quad (52)$$

Se sabe que el par  $(A_3, B_3)$  es controlable, pero ahora es el estado sin retardo  $x_1(t)$  el que puede considerarse como una entrada de control. Si el par  $(B_3, A_3)$  no es controlable, entonces existe una transformación  $\bar{T}_1^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix}$  que descompone el sistema

como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\eta}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{\xi_1} & A_{\eta_1} \\ 0 & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} A_2 \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} B_{\xi_1} & B_{\eta_1} \\ 0 & B_1 \\ & 0 \end{bmatrix} B_2 \begin{bmatrix} \xi_1(t-\tau) \\ \eta_1(t-\tau) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

Si  $z_1$  es asintóticamente estable, la estabilidad del sistema (53) se determina mediante el análisis de una dinámica puramente retardada dada por

$$\dot{\eta}_1(t) = B_1 \eta_1(t - \tau), \quad (54)$$

y una parte de dinámica mixta dada por

$$\dot{\xi}_1(t) = A_{\xi_1} \xi_1(t) + B_{\xi_1} \xi_1(t - \tau). \quad (55)$$

Este proceso se repite hasta que ya no es posible una descomposición adicional que da como resultado una forma triangular por bloques, la cual está compuesta por dinámicas no retardadas, dinámicas puramente retardadas y una parte de dinámica mixta. De esta forma, el sistema (47) ha sido descompuesto en una forma más simple para el análisis de estabilidad. Esto se resume en el siguiente algoritmo.

### 3.1. Algoritmo de descomposición para el análisis de estabilidad asintótica.

El sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ ,  $x \in \mathcal{R}^n$  puede ser descompuesto en una forma más simple para el análisis de estabilidad con el siguiente procedimiento.

#### Paso 1.

- Si el par  $(A, B)$  es controlable, definir  $x_1(t) = x(t)$ . De otra forma, si el par  $(A, B)$  no es controlable entonces existe una transformación  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} = T_1^{-1} x(t)$  que

descomponer el sistema como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{3,1} & A_{2,1} \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{3,1} & B_{2,1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix}.$$

cuya estabilidad es equivalente a la estabilidad de

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{3,1}x_1(t) + B_{3,1}x_1(t-\tau), \\ \dot{z}_1(t) &= A_1z_1(t), \end{aligned} \tag{56}$$

donde  $z_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{s_1 \times s_1}$ , y  $x_1 \in \mathbb{R}^{\ell_1}$ ,  $A_{3,1}, B_{3,1} \in \mathbb{R}^{(\ell_0-s_1) \times (\ell_0-s_1)}$ , con  $\ell_0 = n$ .

Si  $\dim(z_1) > 0$ , y  $A_1$  no es Hurwitz, el sistema (56) es inestable. Detenerse.

- Si  $\dim(x_1) < 2$ , o el par  $(B_{3,1}, A_{3,1})$  es controlable, entonces el algoritmo convergió; hacer  $\xi_1(t) = x_1(t)$  y detenerse.
- De lo contrario, si el par  $(B_{3,1}, A_{3,1})$  no es controlable existe una matriz de transformación  $\bar{T}_1^{-1} x_1 = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix}$  que descompone al sistema (56) como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\eta}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{\xi_1} & A_{\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} B_{\xi_1} & B_{\eta_1} & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t-\tau) \\ \eta_1(t-\tau) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{57}$$

cuya estabilidad es, a su vez, equivalente a la estabilidad de

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= A_{\xi_1}\xi_1(t) + B_{\xi_1}\xi_1(t-\tau), \\ \dot{\eta}_1(t) &= B_1\eta_1(t-\tau), \\ \dot{z}_1(t) &= A_1z_1(t), \end{aligned} \tag{58}$$

donde  $\eta_1 \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{\rho_1 \times \rho_1}$ , y  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{\ell_1}$ ,  $A_{\xi_1}, B_{\xi_1} \in \mathbb{R}^{\ell_1 \times \ell_1}$ , con  $\ell_1 = \ell_0 - s_1 - \rho_1$ .

**Paso  $k$ .**

- Desde el paso  $k - 1$  se ha definido

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{k-1}(t) &= A_{\xi_{k-1}} \xi_{k-1}(t) + B_{\xi_{k-1}} \xi_{k-1}(t - \tau), \\ \dot{\eta}_i(t) &= B_i \eta_i(t - \tau), \\ \dot{z}_i(t) &= A_i z_i(t) \quad i = 1, \dots, k - 1.\end{aligned}\tag{59}$$

donde  $\eta_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{p_i \times p_i}$ ,  $z_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$  and  $\xi_{k-1} \in \mathbb{R}^{\ell_{k-1}}$ ,  $A_{\xi_{k-1}}, B_{\xi_{k-1}} \in \mathbb{R}^{\ell_{k-1} \times \ell_{k-1}}$ .

- Si  $\dim(\xi_{k-1}) < 2$  o el par  $(A_{\xi_{k-1}}, B_{\xi_{k-1}})$  es controlable, entonces el algoritmo convergió. Detenerse.
- De otra forma, si el par  $(A_{\xi_{k-1}}, B_{\xi_{k-1}})$  no es controlable, existe una transformación

$$T_k^{-1} \xi_{k-1}(t) = \begin{bmatrix} x_k(t) \\ z_k(t) \end{bmatrix} \text{ que descompone el sistema (59) como}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_k(t) \\ \dot{z}_k(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{3,k} & A_{2,k} \\ 0 & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k(t) \\ z_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{3,k} & B_{2,k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k(t - \tau) \\ z_k(t - \tau) \end{bmatrix} \\ \dot{\eta}_i(t) &= B_i \eta_i(t - \tau), \\ \dot{z}_i(t) &= A_i z_i(t) \quad i = 1, \dots, k - 1,\end{aligned}$$

cuya estabilidad es equivalente a la estabilidad de

$$\begin{aligned}\dot{x}_k(t) &= A_{3,k} x_k(t) + B_{3,k} x_k(t - \tau), \\ \dot{z}_k(t) &= A_k z_k(t), \\ \dot{\eta}_i(t) &= B_i \eta_i(t - \tau), \\ \dot{z}_i(t) &= A_i z_i(t) \quad i = 1, \dots, k - 1.\end{aligned}$$

donde  $z_k \in \mathbb{R}^{s_k}$ ,  $A_k \in \mathbb{R}^{s_k \times s_k}$  y  $x_k \in \mathbb{R}^{\ell_{k-1} - s_k}$ ,  $A_{3,k}, B_{3,k} \in \mathbb{R}^{(\ell_{k-1} - s_k) \times (\ell_{k-1} - s_k)}$ .

- Si  $\dim(x_k) < 2$  o el par  $(B_{3,k}, A_{3,k})$  es controlable entonces el algoritmo convergió, hacer  $\xi_k(t) = x_k(t)$  y detenerse.
- De lo contrario, si el par  $(B_{3,k}, A_{3,k})$  no es controlable, existe una transformación

$\bar{T}_k^{-1} x_k(t) = \begin{bmatrix} \xi_k(t) \\ \eta_k(t) \end{bmatrix}$  que descompone al sistema (60) como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_k(t) \\ \dot{\eta}_k(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{\xi_k} & A_{\eta_k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k(t) \\ \eta_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\xi_k} & B_{\eta_k} \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k(t-\tau) \\ \eta_k(t-\tau) \end{bmatrix} \\ \dot{z}_k(t) &= A_k z_k(t), \\ \dot{\eta}_i(t) &= B_i \eta_i(t-\tau), \\ \dot{z}_i(t) &= A_i z_i(t) \quad i = 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

cuya estabilidad es equivalente a la estabilidad de

$$\dot{\xi}_k(t) = A_{\xi_k} \xi_k(t) + B_{\xi_k} \xi_k(t-\tau), \quad (60)$$

$$\dot{\eta}_i(t) = B_i \eta_i(t-\tau), \quad (61)$$

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) \quad i = 1, \dots, k. \quad (62)$$

donde  $\eta_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{p_i \times p_i}$ ,  $z_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$  and  $\xi_k \in \mathbb{R}^{\ell_k}$ ,  $A_{\xi_k}, B_{\xi_k} \in \mathbb{R}^{\ell_k \times \ell_k}$ , con  $\ell_k = \ell_{k-1} - s_k - p_k$ .

El algoritmo terminará en un número finito de pasos  $n^* \leq n$  ya que en cada paso, se reduce la dimensión de  $\xi_k$  o el algoritmo converge.

### 3.2. Resultado principal.

Ahora, podemos enunciar nuestro resultado principal de este capítulo.

**Teorema 3.2** *La estabilidad asintótica de la solución cero del sistema (47) es equivalente a la estabilidad asintótica de la solución cero del sistema asociado (60) - (62).*

La prueba se puede obtener directamente del algoritmo.

**Observación 3.1** *La estabilidad de (61) se puede probar usando el Teorema 2.5, mientras que (62) es estable si y sólo si todos los  $A_i$  son Hurwitz.*

**Observación 3.2** *Si  $\dim(\xi_{n^*}) = 1$ , la estabilidad (60) puede ser probada utilizando el*

*Teorema de Hayes de la sección 2.6. Si  $n > \dim(\xi_{n^*}) > 1$ , entonces la estabilidad será más sencilla de probar que la del sistema (47).*

**Observación 3.3** *Si  $\dim(\xi_{n^*}) > 1$ , entonces la estabilidad de (60) puede ser probada utilizando el Teorema 3.1 si existe una solución de (48) para  $Q(0)$ .*

### 3.2.1. Ejemplos.

**Ejemplo 1** *Consideremos el sistema*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1), \quad (63)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -18 & 3 & 2 \\ -24 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

El par  $(A, B)$  no es controlable; entonces la transformación  $T_1^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix}$  con

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

permite descomponer al sistema (63) como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ z_1(t-1) \end{bmatrix},$$

donde  $A_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$  y  $B_{3,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ , luego el par  $(A_{3,1}, B_{3,1})$  es controlable, pero podemos verificar la controlabilidad del par  $(B_{3,1}, A_{3,1})$ , el cual no es controlable. Así se define la transformación  $\bar{T}_1^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix}$  con  $\bar{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ . Entonces el sistema

con esta transformación es

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\eta}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t-1) \\ \eta_1(t-1) \\ z_1(t-1) \end{bmatrix}, \quad (64)$$

cuya estabilidad es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= -\xi_1(t) + 5\xi_1(t-1), \\ \dot{\eta}_1(t) &= -\eta_1(t-1), \\ \dot{z}_1(t) &= -z_1(t), \end{aligned} \quad (65)$$

Comenzando el análisis de estabilidad, el estado  $z_1$  es asintóticamente estable. Luego, el estado  $\eta_1$  de acuerdo al Teorema 2.5, es asintóticamente estable. El estado  $\xi_1$  no cumple con el Teorema 2.3 entonces el sistema (63) no es estable.

**Ejemplo 2** Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-2); \quad (66)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -0.25 & 1.75 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

El par  $(A, B)$  no es controlable. Entonces, se define la transformación  $T_1^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix}$

con

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.25 & 1.75 & 0 \end{bmatrix},$$

que descompone al sistema (66) como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.25 & -11.25 & -15 \\ -0.75 & -3.75 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.25 & 9.75 & 1 \\ -0.25 & 2.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2) \\ z_1(t-2) \end{bmatrix},$$

donde  $A_{3,1} = \begin{bmatrix} -2.25 & -11.25 \\ -0.75 & -3.75 \end{bmatrix}$  y  $B_{3,1} = \begin{bmatrix} -1.25 & 9.75 \\ -0.25 & 2.75 \end{bmatrix}$ , luego el par  $(A_{3,1}, B_{3,1})$  es controlable, pero el par  $(B_{3,1}, A_{3,1})$  no lo es. Entonces una transformación  $\bar{T}_1^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$  con

$$\bar{T}_1 = \begin{bmatrix} -2.25 & 1 \\ -0.75 & 0 \end{bmatrix},$$

descompone al sistema (67) como

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\eta}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 6.6667 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0.33 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t-2) \\ \eta_1(t-2) \\ z_1(t-2) \end{bmatrix}.$$

cuya estabilidad es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= -6\xi_1(t) + 2\xi_1(t-2), \\ \dot{\eta}_1(t) &= -0.5\eta_1(t-2), \\ \dot{z}_1(t) &= -z_1(t). \end{aligned} \tag{67}$$

El estado  $z_1$  es asintóticamente estable, luego el estado  $\eta_1$  de acuerdo al Teorema 2.5 es asintóticamente estable, y finalmente el estado  $\xi_1$  cumple con el Teorema 2.3 entonces el sistema (66) es asintóticamente estable.

**Ejemplo 3** Para el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1); \tag{68}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1.5 & 0.5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1 \\ 2.5 & 0.5 & -1 \\ 3.5 & -0.5 & -1 \end{bmatrix}.$$

En este caso el par  $(A, B)$  es controlable, entonces la transformación  $T_1$  corresponde a la matriz identidad y  $T_1^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ . El subsistema  $z_1$  es de dimensión cero entonces el

sistema (68) queda como

$$\dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1.5 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1 \\ 2.5 & 0.5 & -1 \\ 3.5 & -0.5 & -1 \end{bmatrix} x_1(t-1), \quad (69)$$

donde  $A_{3,1} = A$  and  $B_{3,1} = B$ , luego el par  $(A_{3,1}, B_{3,1})$  es controlable, pero el par  $(B_3, A_3)$

no lo es. Entonces existe una transformación  $\bar{T}_1^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$  con

$$\bar{T}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

que descompone al sistema (69) como

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\eta}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.1 & -0.3 & -1 \\ 0.7 & -1.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.7 & 2.1 & -1.9 \\ -0.9 & -0.7 & 1.3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t-1) \\ \eta_1(t-1) \end{bmatrix}, \quad (70)$$

donde  $A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} -4.1 & -0.3 \\ 0.7 & -1.9 \end{bmatrix}$  y  $B_{\xi_1} = \begin{bmatrix} 2.7 & 2.1 \\ -0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$ , luego el par  $(B_{\xi_1}, A_{\xi_1})$  es controla-

ble, pero el par  $(A_{\xi_1}, B_{\xi_1})$  es no controlable. Entonces la transformación  $T_2^{-1}\xi_1 = \begin{bmatrix} x_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$  con

$$T_2 = \begin{bmatrix} 2.7 & 1 \\ -0.9 & 0 \end{bmatrix},$$

puede descomponer al sistema (70) como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{\eta}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -0.7778 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ z_2(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1.4444 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t-1) \\ z_2(t-1) \\ \eta_1(t-1) \end{bmatrix}. \quad (71)$$

De esta forma, la estabilidad de

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= -4x_2(t) + 2x_2(t-1) \\ \dot{z}_2(t) &= -2z_2(t), \\ \dot{\eta}_1(t) &= -\eta_1(t-1).\end{aligned}\tag{72}$$

es equivalente a la estabilidad de (71). El estado  $\eta_1$  cumple con el Teorema 2.5 entonces es asintóticamente estable, el estado  $z_2$  también lo es. Luego  $\dim(x_2) < 2$  entonces  $x_2 = \xi_2$  en (72) y este cumple con el Teorema 2.3 entonces el sistema (68) es asintóticamente estable.

### 3.3. Resumen.

En este capítulo se presentó uno de los resultados obtenidos en el trabajo de tesis, el cual tiene como metodología base la separación de la parte controlable y la parte no controlable de un SLR en el que la parte retardada se considera como una entrada de control. Con este resultado algorítmico es posible analizar la estabilidad asintótica de los SLR con retardo simple, de características particulares, descomponiendo al sistema en dinámicas más sencillas de analizar, esto permite aplicar algunos criterios de estabilidad ya disponibles y se reduce así la dificultad en el análisis de estabilidad en sistemas de orden elevado.

## Capítulo 4. Fórmulas generales para la parte real y parte imaginaria de la función característica cuasipolinomial.

En este capítulo se presenta una fórmula general para las ecuaciones requeridas por el teorema de Pontryagin. Teniendo en cuenta que en la sección (2.4) se definieron las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  que representaban la parte real y la parte imaginaria de la función  $H(i\omega)$  dada por (14) y relacionada con los SLR de la forma (10). De esta manera se proponen las fórmulas generales de las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  primeramente para el caso de retardo único, para todo orden  $n$ , distinguiendo el caso de orden par y el caso de orden impar. También se presenta la prueba de estas fórmulas generales para ambos casos partiendo del análisis de la estructura de la ecuación característica  $H(s) = 0$ . Además, se utilizará la notación  $F(\omega) = F_{n,r}(\omega)$  y  $G(\omega) = G_{n,r}(\omega)$  para así identificar el orden  $n$  del sistema al que está relacionada cada función y el número de retardos  $r$ , siendo  $r = 1$ , el caso de retardo único.

### 4.1. Propuesta de fórmulas generales para el caso de retardo único.

Para el caso de retardo único ( $r = 1$ ) se tiene que el sistema (10) queda de la forma

$$x^{(n)}(t) = - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,0} x^{(j)}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,1} x^{(j)}(t-1), \quad (73)$$

y su cuasipolinomio característico es de la forma

$$H(s) = s^n e^s + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,0} s^j e^s + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,1} s^j. \quad (74)$$

**Proposición. 1** Sea  $H(s) = F_{n,1}(\omega) + iG_{n,1}(\omega)$  el cuasipolinomio característico del sistema (73). Entonces

$$F_{n,1}(\omega) = -\alpha_{n,1} \operatorname{sen}(\omega) + \beta_{n,1} \operatorname{cos}(\omega) + \gamma_{n,1}, \quad (75)$$

$$G_{n,1}(\omega) = \beta_{n,1} \operatorname{sen}(\omega) + \alpha_{n,1} \operatorname{cos}(\omega) + \delta_{n,1}, \quad (76)$$

donde  $\alpha_{n,1}$ ,  $\beta_{n,1}$ ,  $\gamma_{n,1}$  y  $\delta_{n,1}$  son coeficientes polinomiales en  $\omega$ . Para el caso  $n$  impar

( $n = 2m + 1$ ,  $m \geq 0 \in \mathcal{Z}$ ) se definen como

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,1}(\omega) &= \omega, & \beta_{1,1}(\omega) &= a_{0,0}, & \gamma_{1,1}(\omega) &= a_{0,1}, & \delta_{1,1}(\omega) &= 0 \\
 \alpha_{2m+1,1}(\omega) &= (-1)^m \omega^{2m+1} + \alpha_{2m,1}(\omega), \\
 \beta_{2m+1,1}(\omega) &= (-1)^m \omega^{2m} (a_{2m,0} - 1) + \beta_{2m,1}(\omega), \\
 \gamma_{2m+1,1}(\omega) &= (-1)^m \omega^{2m-1} a_{2m,1} + \gamma_{2m,1}(\omega), \\
 \delta_{2m+1,1}(\omega) &= \delta_{2m,1}(\omega),
 \end{aligned} \tag{77}$$

y para el caso  $n$  par ( $n = 2m$ ,  $0 < m \in \mathcal{Z}$ ) se definen como

$$\begin{aligned}
 \alpha_{2m,1}(\omega) &= (-1)^{m+1} \omega^{2m-1} (a_{2m-1,0} - 1) + \alpha_{2m-1,1}(\omega), \\
 \beta_{2m,1}(\omega) &= (-1)^m \omega^{2m} + \beta_{2m-1,1}(\omega), \\
 \gamma_{2m,1}(\omega) &= \gamma_{2m-1,1}(\omega), \\
 \delta_{2m,1}(\omega) &= (-1)^{m+1} \omega^{2m-1} a_{2m-1,1} + \delta_{2m-1,1}(\omega).
 \end{aligned} \tag{78}$$

**Demostración.** Considere  $n = 1$ , así el sistema (73) queda de la forma

$$x^{(n)}(t) = -a_{0,0}x(t) - a_{0,1}x(t-1). \tag{79}$$

Su cuasipolinomio característico es

$$H_{1,1}(s) = e^s(s + a_{0,0}) + a_{0,1}. \tag{80}$$

Si  $s = i\omega$ , queda

$$H_{1,1}(i\omega) = e^{i\omega}(i\omega + a_{0,0}) + a_{0,1}, \tag{81}$$

y por la identidad de Euler  $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega)$  se tiene

$$H_{1,1}(\omega) = [-\omega \operatorname{sen}(\omega) + a_{0,0} \cos(\omega) + a_{0,1}] + i[a_{0,0} \operatorname{sen}(\omega) + \omega \cos(\omega)], \tag{82}$$

cuyas partes real e imaginaria son

$$F_{1,1}(\omega) = -\omega \operatorname{sen}(\omega) + a_{0,0} \cos(\omega) + a_{0,1}, \tag{83}$$

$$G_{1,1}(\omega) = a_{0,0} \operatorname{sen}(\omega) + \omega \cos(\omega), \tag{84}$$

respectivamente, con  $\alpha_{1,1} = \omega$ ,  $\beta_{1,1} = a_{0,0}$ ,  $\gamma_{1,1} = a_{0,1}$  y  $\delta_{1,1} = 0$ .

Ahora considere el caso  $n$  del sistema (73), su cuasipolinomio característico está dado por:

$$H_{n,1}(s) = e^s(s^n + a_{n-1,0}s^{n-1} + \dots + a_{1,0}s + a_{0,0}) + a_{n-1,1}s^{n-1} + a_{n-2,1}s^{n-2} + \dots + a_{0,1}. \quad (85)$$

Si se tiene en cuenta que el cuasipolinomio característico para el caso  $n - 1$  es

$$H_{n-1,1}(s) = e^s(s^{n-1} + \dots + a_{1,0}s + a_{0,0}) + a_{n-2,1}s^{n-2} + \dots + a_{0,1}, \quad (86)$$

entonces (85) se puede obtener de la siguiente fórmula recursiva

$$H_{n,1}(s) = e^s(s^n + s^{n-1}(a_{n-1,0} - 1)) + a_{n-1,1}s^{n-1} + H_{n-1,1}(s). \quad (87)$$

Con  $s = i\omega$  y utilizando la identidad de Euler  $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega)$  en (87) se tiene:

$$H_{n,1}(i\omega) = [\cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega)][(i\omega)^n + (i\omega)^{n-1}(a_{n-1,0} - 1)] + a_{n-1,1}(i\omega)^{n-1} + F_{n-1,1}(\omega) + iG_{n-1,1}(\omega), \quad (88)$$

luego

$$H_{n,1}(i\omega) = (i\omega)^{n-1}[(a_{n-1,0} - 1) + i\omega] \cos(\omega) + (-\omega + i(a_{n-1,0} - 1)) \operatorname{sen}(\omega) + (i\omega)^{n-1}a_{n-1,1} + F_{n-1,1}(\omega) + iG_{n-1,1}(\omega). \quad (89)$$

Para la función (89) se deben considerar 2 casos: caso  $n$  par,  $n = 2m$  y caso  $n$  impar,  $n = 2m + 1$ ,  $m \geq 0$ . Para el caso  $n$  par (89) queda:

$$H_{2m,1}(i\omega) = (-1)^m(\omega)^{2m-1}[(\omega + i(1 - a_{2m-1,0})) \cos(\omega) + ((a_{2m-1,0} - 1) + i\omega) \operatorname{sen}(\omega)] + (-1)^m i a_{2m-1,1} + F_{2m-1,1}(\omega) + iG_{2m-1,1}(\omega), \quad (90)$$

luego

$$\begin{aligned}
H_{2m,1}(i\omega) = & -[(-1)^{m+1}\omega^{2m-1}(a_{2m-1,0}-1) + \alpha_{2m-1,1}(\omega)]\text{sen}(\omega) + \gamma_{2m-1,1}(\omega) + \\
& + i[(-1)^{m+1}\omega^{2m-1}(a_{2m-1,0}-1) + \alpha_{2m-1,1}(\omega)]\text{cos}(\omega) + i\delta_{2m-1,1}(\omega) + \\
& i[(-1)^m\omega^{2m} + \beta_{2m-1,1}(\omega)]\text{sen}(\omega) + i(-1)^{m+1}\omega^{2m-1}a_{2m-1,1} + \\
& [(-1)^m\omega^{2m} + \beta_{2m-1,1}(\omega)]\text{cos}(\omega). \quad (91)
\end{aligned}$$

Para el caso  $n$  impar (89) queda:

$$\begin{aligned}
H_{2m+1,1}(i\omega) = & (-1)^m\omega^{2m}[(a_{n-1,0}-1) + i\omega]\text{cos}(\omega) + (i(a_{n-1,0}-1) - \omega)\text{sen}(\omega) + \\
& (-1)^m a_{n-1,1} + F_{n-1,1}(\omega) + iG_{n-1,1}(\omega), \quad (92)
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
H_{2m+1,1}(i\omega) = & -[(-1)^m\omega^{2m+1} + \alpha_{2m,1}(\omega)]\text{sen}(\omega) + (-1)^m\omega^{2m}a_{2m,1} + \gamma_{2m,1}(\omega) + \\
& [(-1)^m\omega^{2m}(a_{2m,0}-1) + \beta_{2m,1}(\omega)]\text{cos}(\omega) + i\delta_{2m,1}(\omega) + \\
& i[(-1)^m\omega^{2m}(a_{2m,0}-1) + \beta_{2m,1}(\omega)]\text{sen}(\omega) + \\
& i[(-1)^m\omega^n + \alpha_{2m,1}(\omega)]\text{cos}(\omega). \quad (93)
\end{aligned}$$

Se puede notar que las ecuaciones (91) y (93) son de la forma

$$H_{n,1}(\omega) = -\alpha_{n,1}\text{sen}(\omega) + \beta_{n,1}\text{cos}(\omega) + \gamma_{n,1} + i[\beta_{n,1}\text{sen}(\omega) + \alpha_{n,1}\text{cos}(\omega) + \delta_{n,1}],$$

donde los coeficientes  $\alpha_{n,1}$ ,  $\beta_{n,1}$ ,  $\gamma_{n,1}$  y  $\delta_{n,1}$  están dados en (78) para el caso  $n$  par, y en (77) para el caso  $n$  impar. ■

Las fórmulas de los coeficientes para el caso de  $r = 1$  en (78) y (77) se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Fórmulas recursivas de los coeficientes para  $r = 1$

	$n$ impar	$n$ par
$\alpha_{n,1}$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\omega^n + \alpha_{n-1,1}(\omega)$	$(-1)^{\frac{n}{2}+1}\omega^{n-1}(a_{n-1,0}-1) + \alpha_{n-1,1}(\omega)$
$\beta_{n,1}$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\omega^{n-1}(a_{n-1,0}-1) + \beta_{n-1,1}(\omega)$	$(-1)^{\frac{n}{2}}\omega^n + \beta_{n-1,1}(\omega)$
$\gamma_{n,1}$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\omega^{n-1}a_{n-1,1} + \gamma_{n-1,1}(\omega)$	$\gamma_{n-1,1}(\omega)$
$\delta_{n,1}$	$\delta_{n-1,1}(\omega)$	$(-1)^{\frac{n}{2}+1}\omega^{n-1}a_{n-1,1} + \delta_{n-1,1}(\omega)$

donde  $\alpha_{1,1} = \omega$ ,  $\beta_{1,1} = a_{0,0}$ ,  $\gamma_{1,1} = a_{0,1}$  y  $\delta_{1,1} = 0$ .

En la Tabla 2 se muestran los valores de dichos coeficientes para  $n = 1, \dots, 5$ , donde se puede comprobar que las fórmulas de los coeficientes (77) y (78) reproducen dichos resultados.

**Tabla 2.** Coeficientes para el caso  $r = 1$

$n$	$\alpha_{n,1}$	$\beta_{n,1}$	$\gamma_{n,1}$	$\delta_{n,1}$
1	$\omega$	$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	0
2	$a_{1,0}\omega$	$a_{0,0} - \omega^2$	$a_{0,1}$	$a_{1,1}\omega$
3	$a_{1,0}\omega - \omega^3$	$a_{0,0} - a_{2,0}\omega^2$	$-a_{2,1}\omega^2 + a_{0,1}$	$a_{1,1}\omega$
4	$a_{1,0}\omega - a_{3,0}\omega^3$	$a_{0,0} - a_{2,0}\omega^2 + \omega^4$	$-a_{2,1}\omega^2 + a_{0,1}$	$a_{1,1}\omega - a_{3,1}\omega^3$
5	$a_{1,0}\omega - a_{3,0}\omega^3 + \omega^5$	$a_{0,0} - a_{2,0}\omega^2 + a_{4,0}\omega^4$	$a_{4,1}\omega^4 - a_{2,1}\omega^2 + a_{0,1}$	$a_{1,1}\omega - a_{3,1}\omega^3$

## 4.2. Estructura de la parte real y parte imaginaria de la función característica cuasipolinomial para múltiples retardos.

### 4.2.1. Caso de dos retardos.

Para el caso de número de retardos  $r = 2$  se tiene que las funciones de la parte real  $F(\omega)$  y de la parte imaginaria  $G(\omega)$  de la ecuación característica asociada son de la forma:

$$F_{n,2}(\omega) = -\alpha_{n,2} \operatorname{sen}(\omega) + \beta_{n,2} \cos(\omega) - \alpha_{n,1} \operatorname{sen}(2\omega) + \beta_{n,1} \cos(2\omega) + \gamma_{n,2}, \quad (94)$$

$$G_{n,2}(\omega) = \beta_{n,2} \operatorname{sen}(\omega) + \alpha_{n,2} \cos(\omega) + \beta_{n,1} \operatorname{sen}(2\omega) + \alpha_{n,1} \cos(2\omega) + \delta_{n,2}. \quad (95)$$

Para este caso se cumple que  $\alpha_{n,1}$  y  $\beta_{n,1}$  son los mismos coeficientes de la sección anterior. Por lo tanto los nuevos valores de  $\alpha_{n,2}$  y  $\beta_{n,2}$  y de  $\gamma_{n,2}$  y  $\delta_{n,2}$  para  $n = 1, \dots, 5$ , se muestran en la Tabla 3.

**Tabla 3.** Coeficientes para el caso  $r = 2$

$n$	$\alpha_{n,2}$	$\beta_{n,2}$	$\gamma_{n,2}$	$\delta_{n,2}$
1	0	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	0
2	$a_{1,1}\omega$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{1,2}\omega$
3	$a_{1,1}\omega$	$a_{0,1} - a_{2,1}\omega^2$	$-a_{2,2}\omega^2 + a_{0,2}$	$a_{1,2}\omega$
4	$a_{1,1}\omega - a_{3,1}\omega^3$	$a_{0,1} - a_{2,1}\omega^2$	$-a_{2,2}\omega^2 + a_{0,2}$	$a_{1,2}\omega - a_{3,2}\omega^3$
5	$a_{1,1}\omega - a_{3,1}\omega^3$	$a_{0,1} - a_{2,1}\omega^2 + a_{4,1}\omega^4$	$a_{4,2}\omega^4 - a_{2,2}\omega^2 + a_{0,2}$	$a_{1,2}\omega - a_{3,2}\omega^3$

#### 4.2.2. Caso de tres retardos.

Para el caso  $r = 3$  tienen la siguiente forma:

$$F_{n,3}(\omega) = -\alpha_{n,3} \operatorname{sen}(\omega) + \beta_{n,3} \cos(\omega) - \alpha_{n,2} \operatorname{sen}(2\omega) + \beta_{n,2} \cos(2\omega) + \\ -\alpha_{n,1} \operatorname{sen}(3\omega) + \beta_{n,1} \cos(3\omega) + \gamma_{n,3}, \quad (96)$$

$$G_{n,3}(\omega) = \beta_{n,3} \operatorname{sen}(\omega) + \alpha_{n,3} \cos(\omega) + \beta_{n,2} \operatorname{sen}(2\omega) + \alpha_{n,2} \cos(2\omega) + \\ + \alpha_{n,1} \operatorname{sen}(3\omega) + \beta_{n,1} \cos(3\omega) + \delta_{n,3}. \quad (97)$$

Para este caso se cumple que  $\alpha_{n,1}$ ,  $\beta_{n,1}$ ,  $\alpha_{n,2}$  y  $\beta_{n,2}$  ya se encuentran en las tablas anteriores. Por lo tanto los nuevos valores de  $\alpha_{n,3}$  y  $\beta_{n,3}$  y de  $\gamma_{n,3}$  y  $\delta_{n,3}$  para  $n = 1, \dots, 5$ , se muestran en la Tabla 4.

**Tabla 4.** Coeficientes para el caso  $r = 3$

$n$	$\alpha_{n,3}$	$\beta_{n,3}$	$\gamma_{n,3}$	$\delta_{n,3}$
1	0	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	0
2	$a_{1,2}\omega$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	$a_{1,3}\omega$
3	$a_{1,2}\omega$	$a_{0,2} - a_{2,2}\omega^2$	$-a_{2,3}\omega^2 + a_{0,3}$	$a_{1,3}\omega$
4	$a_{1,2}\omega - a_{3,2}\omega^3$	$a_{0,2} - a_{2,2}\omega^2$	$-a_{2,3}\omega^2 + a_{0,3}$	$a_{1,3}\omega - a_{3,3}\omega^3$
5	$a_{1,2}\omega - a_{3,2}\omega^3$	$a_{0,2} - a_{2,2}\omega^2 + a_{4,2}\omega^4$	$a_{4,3}\omega^4 - a_{2,3}\omega^2 + a_{0,3}$	$a_{1,3}\omega - a_{3,3}\omega^3$

#### 4.2.3. Fórmulas generales para el caso de múltiples retardos.

Para el caso general las fórmulas generadoras de estas funciones de la parte real y parte imaginaria del cuasi-polinomio asociado al polinomio característico de orden  $n$  y un número de retardos máximo  $r$  son

$$F_{n,\tau}(\omega) = \sum_{k=1}^{\tau} \{-\alpha_{n,k} \operatorname{sen}[(\tau - k + 1)\omega] + \beta_{n,k} \cos[(\tau - k + 1)\omega]\} + \gamma_{n,\tau}, \quad (98)$$

$$G_{n,\tau}(\omega) = \sum_{k=1}^{\tau} \{\beta_{n,k} \operatorname{sen}[(\tau - k + 1)\omega] + \alpha_{n,k} \cos[(\tau - k + 1)\omega]\} + \delta_{n,\tau}. \quad (99)$$

### 4.3. Resumen.

En este capítulo se propusieron las fórmulas generales para las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$ , las cuales son las funciones de parte real y parte imaginaria respectivamente de la función característica del sistema (73). Estas fórmulas son de gran utilidad debido a que sólo se requiere de los parámetros del sistema y del valor del orden  $n$  para obtener los coeficientes que dependen de  $\omega$ ; por lo tanto este resultado puede ser utilizado para enunciar las condiciones de estabilidad en función a los coeficientes que pueden ser generados mediante las fórmulas de la Tabla 1.

## Capítulo 5. Condiciones de estabilidad y regiones de estabilidad.

En este capítulo se presentan resultados de las condiciones de estabilidad para los SLR de orden  $n$ . En la sección (2.4) se definieron las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  que representaban la parte real y la parte imaginaria de la función  $H(s)$  respectivamente dada por (14) relacionada con los SLR de la forma (10). Así en la sección 5.1 se presentan las condiciones de estabilidad asintótica para los SLR para el caso de retardo único y orden  $n$  de la forma (73), las cuales van a acompañadas de sus respectivas demostraciones. Posteriormente, se dedicará la sección 5.1.1 a explicar algunas formas matriciales peculiares, específicamente hablando de la conocida matriz de rotación que fueron de gran ayuda para lograr entender el teorema de Pontryagin y su significado geométrico.

En la segunda parte de este capítulo se estudiarán las regiones de estabilidad para el caso de retardo único del sistema (10), específicamente para los sistemas de primer y segundo orden, los cuales siguen la línea de los presentados en la sección 5.1 pero de manera específica para cada orden del sistema.

### 5.1. Condiciones de estabilidad.

**Proposición. 2** *El origen del sistema lineal con retardo de la forma (73) es asintóticamente estable si los parámetros del sistema cumplen con*

$$\alpha_{0,0} + \alpha_{0,1} > 0, \quad \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} > 0, \quad (100)$$

y si el sistema se encuentra en la unión de las siguientes regiones:

■ *Región 1:*

$$\{ |[\gamma(\omega), \delta(\omega)]|_{\infty} < |[\alpha(\omega), \beta(\omega)]|_2 \}. \quad (101)$$

■ *Región 2:*

$$\left\{ \Lambda(\omega) = 0, \left( \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega) - \Gamma(\omega) \right) \text{sgn}(F(\omega)) > 0, 0 < \omega < \pi \right\}, \quad (102)$$

donde

$$\Lambda(\omega) = \gamma \cos(\omega) + \delta \sin(\omega) + \beta, \quad (103)$$

$$\Gamma(\omega) = -\gamma \sen(\omega) + \delta \cos(\omega) + \alpha, \quad (104)$$

$$F(\omega) = -\alpha \sen(\omega) + \beta \cos(\omega) + \gamma. \quad (105)$$

**Demostación.** Para probar la condición dada por (101) se tiene que aplicando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} -a \sen(\omega) + b \cos(\omega) &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega + \text{atan2}(a, b)), \\ a \sen(\omega) + b \cos(\omega) &= \sqrt{a^2 + b^2} \sen(\omega + \text{atan2}(b, a)); \end{aligned} \quad (106)$$

en las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$ , sus raíces están en:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\omega + \text{atan2}(\alpha, \beta)) + \gamma = 0, \\ G(\omega) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sen(\omega + \text{atan2}(\alpha, \beta)) + \delta = 0; \end{aligned} \quad (107)$$

las cuales son reales si

$$\frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \leq 1, \quad \frac{|\delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \leq 1. \quad (108)$$

Por lo tanto, descartando la igualdad, ya que esto haría que el sistema sea estable pero no asintóticamente estable, entonces surge la condición

$$\{[\gamma(\omega), \delta(\omega)]_\infty < [\alpha(\omega), \beta(\omega)]_2\}. \quad (109)$$

Para demostrar la región 2 primero se tiene que para  $F(\omega) = -\alpha \sen(\omega) + \beta \cos(\omega) + \gamma$ ,  $G(\omega) = \beta \sen(\omega) + \alpha \cos(\omega) + \delta$ ; la desigualdad presentada en el criterio 2 del Teorema 2.1 de Pontryagin:

$$F'(\omega)G(\omega) - F(\omega)G'(\omega) < 0, \quad (110)$$

puede ser expresada de la forma

$$\begin{aligned} & \left[ \alpha \frac{d\gamma}{d\omega} + \left( -\frac{d\alpha}{d\omega} - \beta \right) \gamma + \left( \frac{d\beta}{d\omega} - \alpha \right) \delta - \beta \frac{d\delta}{d\omega} \right] \cos(\omega) + \\ & \left[ \beta \frac{d\gamma}{d\omega} + \left( \alpha - \frac{d\beta}{d\omega} \right) \gamma + \alpha \frac{d\delta}{d\omega} - \left( \frac{d\alpha}{d\omega} + \beta \right) \delta \right] \sin(\omega) + \\ & \delta \left( \frac{d\gamma}{d\omega} \right) - \frac{d\delta}{d\omega} \gamma + \alpha \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right) - \beta^2 - \frac{d\alpha}{d\omega} \beta - \alpha^2 < 0, \end{aligned} \quad (111)$$

que puede agruparse como

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{d\alpha}{d\omega} - \beta \right) (\gamma \cos(\omega) + \delta \sin(\omega) + \beta) + \left( -\alpha + \frac{d\beta}{d\omega} \right) (\delta \cos(\omega) - \\ & \gamma \sin(\omega) + \alpha) + \frac{d\gamma}{d\omega} G(\omega) - \frac{d\delta}{d\omega} F(\omega) < 0. \end{aligned} \quad (112)$$

Se definen las funciones

$$\Lambda(\omega) := F(\omega) \cos(\omega) + G(\omega) \sin(\omega) = \gamma \cos(\omega) + \delta \sin(\omega) + \beta, \quad (113)$$

$$\Gamma(\omega) := F(\omega) \sin(\omega) - G(\omega) \cos(\omega) = -\gamma \sin(\omega) + \delta \cos(\omega) + \alpha, \quad (114)$$

y utilizando esto se reescribe la ecuación (5.1) como

$$\left( \alpha - \frac{d\beta}{d\omega} \right) \Gamma(\omega) - \frac{d\gamma}{d\omega} G(\omega) + \frac{d\delta}{d\omega} F(\omega) > \left( \frac{d\alpha}{d\omega} - \beta \right) \Lambda(\omega). \quad (115)$$

Luego, haciendo  $\Lambda(\omega) = 0$ , y multiplicando la desigualdad por  $\sin(\omega) > 0$  para  $0 < \omega < \pi$  se tiene:

$$\left( \left( \alpha - \frac{d\beta}{d\omega} \right) \Gamma(\omega) - \frac{d\gamma}{d\omega} G(\omega) + \frac{d\delta}{d\omega} F(\omega) \right) \sin(\omega) > 0, \quad 0 < \omega < \pi \quad (116)$$

Sin embargo,  $\Lambda(\omega) = 0$  implica  $G(\omega) \sin(\omega) = -F(\omega) \cos(\omega)$ , de donde

$$\Gamma(\omega) \sin(\omega) = (-F(\omega) \sin(\omega) + G(\omega) \cos(\omega)) \sin(\omega) = -F(\omega), \quad (117)$$

por lo tanto la condición se resume a

$$\left( \frac{d\gamma}{d\omega} \cos(\omega) + \frac{d\delta}{d\omega} \sin(\omega) - \alpha + \frac{d\beta}{d\omega} \right) \operatorname{sgn}(F(\omega)) > 0, \quad 0 < \omega < \pi \quad (118)$$

Por último, se tiene que  $\frac{d\gamma}{d\omega} \cos(\omega) + \frac{d\delta}{d\omega} \sin(\omega) - \alpha + \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega) - \Gamma(\omega)$ , por lo que finalmente queda

$$\left( \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega) - \Gamma(\omega) \right) \operatorname{sgn}(F(\omega)) > 0. \quad (119)$$

De esta forma se llega a la condición escrita como

$$\left\{ \Lambda(\omega) = 0, \left( \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega) - \Gamma(\omega) \right) \operatorname{sgn}(F(\omega)) > 0 \right\}. \quad (120)$$

Posteriormente, teniendo en cuenta de nuevo que el criterio 2 del Teorema 2.1 de Pontryagin indica que para toda  $\omega$  real se cumpla la desigualdad (110) y evaluando en  $\omega = 0$  a (110), se tiene que para los SLR de orden  $n > 1$  queda

$$(a_{0,0} + a_{1,1} + a_{1,0})(a_{0,1} + a_{0,0}) > 0. \quad (121)$$

En la sección 5.2 la condición de estabilidad  $a_{0,1} + a_{0,0} > 0$  entonces para que se cumpla la desigualdad (121) se necesita que  $a_{0,0} + a_{1,1} + a_{1,0} > 0$ . De esta forma se tienen las condiciones necesarias de estabilidad asintótica para el sistema (10) para el caso de retardo único siguientes

$$(a_{0,1} + a_{0,0}) > 0, (a_{0,0} + a_{1,1} + a_{1,0}) > 0. \quad (122)$$

■

### 5.1.1. Matriz de transformación.

Como se demostró en la sección 4.1, las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  son de la forma

$$F(\omega) = -\alpha \sin(\omega) + \beta \cos(\omega) + \gamma, \quad (123)$$

$$G(\omega) = \beta \sin(\omega) + \alpha \cos(\omega) + \delta, \quad (124)$$

lo que es igual a

$$\begin{bmatrix} F(\omega) \\ G(\omega) \end{bmatrix} = R(\omega) \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}. \quad (125)$$

donde  $R(\omega) = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\text{sen}(\omega) \\ \text{sen}(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}$  es una matriz de rotación. Se definen ahora las funciones  $\lambda(\omega)$  y  $\Gamma(\omega)$  de la siguiente forma

$$\Gamma(\omega) := -F(\omega) \text{sen}(\omega) + G(\omega) \cos(\omega) \quad (126)$$

$$\Lambda(\omega) := F(\omega) \cos(\omega) + G(\omega) \text{sen}(\omega), \quad (127)$$

lo que se puede traducir a

$$\begin{bmatrix} \Lambda(\omega) \\ \Gamma(\omega) \end{bmatrix} = R^{-1}(\omega) \begin{bmatrix} F(\omega) \\ G(\omega) \end{bmatrix}. \quad (128)$$

Con esto se puede ver que las funciones dadas por  $\Gamma(\omega)$  y  $\Lambda(\omega)$  son generadas mediante la rotación del espacio generado por las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$ . La matriz de rotación tiene la propiedad de ser invertible, por lo tanto, se puede pasar al espacio de  $\Gamma(\omega)$  y  $\Lambda(\omega)$  y regresarse al espacio de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$ .

### 5.1.2. Resumen.

En esta sección se presentaron otros resultados del trabajo de investigación realizado, en cumplimiento con el objetivo de la tesis. Se propusieron las condiciones de estabilidad asintótica para los SLR de orden  $n$ , con sus respectivas demostraciones matemáticas. Posteriormente, se expuso una interpretación matricial que tiene relación con las funciones asignadas para las condiciones de estabilidad encontradas, donde se pudo ver que se involucra a la matriz de rotación. Resultó en que estas funciones asignadas son generadas mediante la rotación del espacio generado por las funciones de parte real  $F(\omega)$  y parte imaginaria  $G(\omega)$  de la función cuasipolinomial característica de cada SLR. Estos resultados son de gran importancia debido a que a partir de estas condiciones de estabilidad se pueden caracterizar las regiones paramétricas de estabilidad para cada caso.

## 5.2. Regiones de estabilidad para los SLR de primer orden y retardo único.

Para el caso en el que el sistema (10) es de primer orden y de retardo único,  $n = r = 1$ , el SLR es de la forma

$$\dot{x}(t) = -a_{0,0}x(t) - a_{0,1}x(t-1). \quad (129)$$

Se sabe que existe un resultado en la literatura actual que permite obtener las regiones de estabilidad para este tipo de sistemas, este es el trabajo de (Hayes, 1950), el cual se expuso en la sección 2.6. En esta sección se presenta un resultado el cual es equivalente al trabajo citado pero con una propuesta más sencilla en cuanto a su verificación, y un procedimiento distinto para su obtención. A continuación se expone el resultado obtenido.

**Proposición. 3** *El SLR de la forma (129) es asintóticamente estable si el sistema se encuentra en*

$$\left\{ (a_{0,0}, a_{0,1}) \mid a_{0,0} + a_{0,1} > 0, \left| \frac{a_{0,1}}{a_{0,0}} \right| < 1 \right\}, \quad (130)$$

o en

$$\{(a_{0,0}, a_{0,1}) \mid a_{0,0} = -a_{0,1} \cos(\omega), \operatorname{sgn}(F_1(\omega)) < 0, 0 < \omega < \pi\}. \quad (131)$$

*Es decir, si los parámetros del sistema se encuentran dentro de la región paramétrica que se muestra en la Figura 4.*

**Demostración.** Teniendo en cuenta el teorema de Pontryagin, el cuasipolinomio característico del sistema (129) es

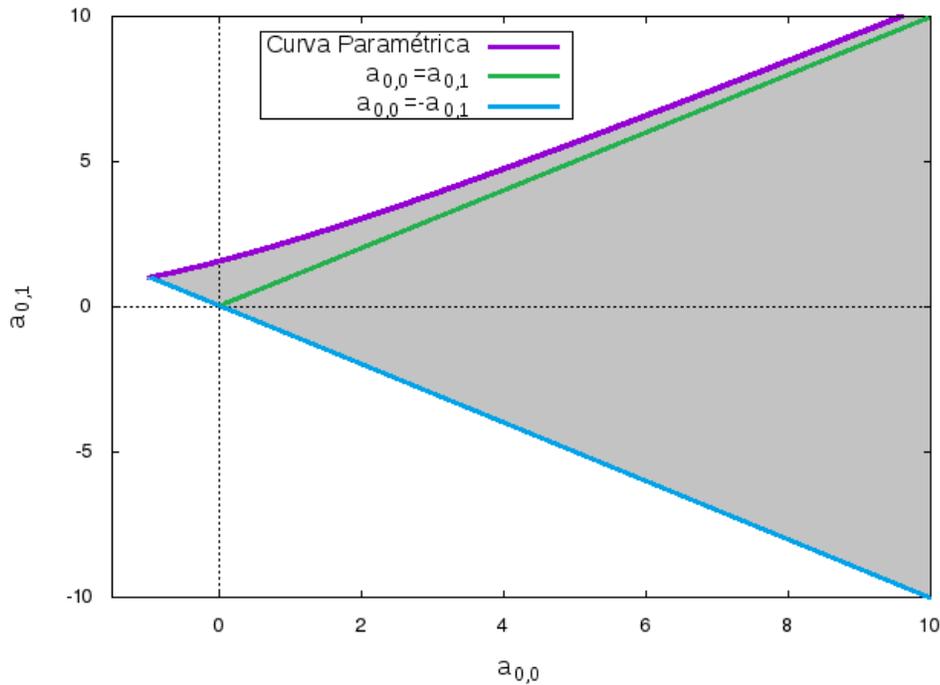
$$H_{1,1}(s) = e^s(s + a_{0,0}) + a_{0,1}, \quad (132)$$

cuyas partes real e imaginaria son

$$F_{1,1}(\omega) = -\omega \operatorname{sen}(\omega) + a_{0,0} \cos(\omega) + a_{0,1}, \quad (133)$$

$$G_{1,1}(\omega) = a_{0,0} \operatorname{sen}(\omega) + \omega \cos(\omega). \quad (134)$$

Para probar la región de estabilidad (130), se pueden aplicar las identidades trigono-



**Figura 4.** Regiones paramétricas de estabilidad asintótica para el SLR de primer orden (129).

métricas dadas en 106 a las ecuaciones de la funciones (133) y (134), así quedan como:

$$F_1(\omega) = \sqrt{a_{0,0}^2 + \omega^2} \cos(\omega + \text{atan2}(\omega, a_{0,0})) + a_{0,1}, \quad (135)$$

$$G_1(\omega) = \sqrt{a_{0,0}^2 + \omega^2} \text{sen}(\omega + \text{atan2}(\omega, a_{0,0})). \quad (136)$$

Las raíces de (133) y (134) se encuentran en

$$\cos(\omega + \text{atan2}(\omega, a_{0,0})) = -\frac{a_{0,1}}{\sqrt{\omega^2 + a_{0,0}^2}}, \quad (137)$$

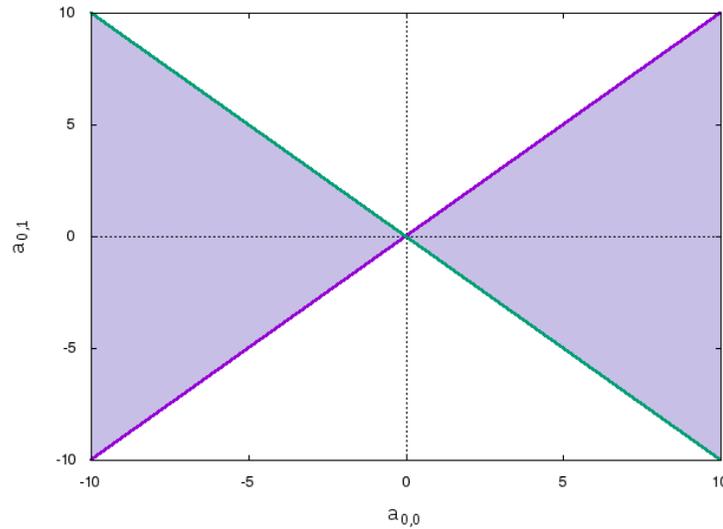
y

$$\text{sen}(\omega + \text{atan2}(\omega, a_{0,0})) = 0, \quad (138)$$

respectivamente. Como se puede ver, la función  $|\cos(\omega + \text{atan2}(\omega, a_{0,0}))| \leq 1$ , entonces si las raíces de  $F_1(\omega)$  son reales se cumple que:

$$\frac{|a_{0,1}|}{\sqrt{\omega^2 + a_{0,0}^2}} \leq 1. \quad (139)$$

Luego, una condición suficiente de estabilidad asintótica indicado en el criterio 2 del



**Figura 5.** Región aparente de raíces reales para  $F_1(\omega)$  y  $G_1(\omega)$ .

Teorema 2.1 de Pontryagin es que las raíces de  $F_1(\omega)$  y  $G_1(\omega)$  sean reales. Para este caso se puede ver que las raíces de  $G_1(\omega)$  siempre son reales; sin embargo, analizando las raíces de  $F_1(\omega)$ , si  $a_{0,0} \neq 0$ , una condición suficiente de estabilidad asintótica es que  $\left| \frac{a_{0,1}}{a_{0,0}} \right| < 1$ . Esta región paramétrica se puede ver en la Figura 5.

Teniendo en cuenta el criterio 3 del Teorema 2.1 de Pontryagin, el cual indica que en el intervalo de  $-2K\pi + \eta \leq \omega \leq 2K\pi + \eta$  las funciones  $F_n(\omega)$  y  $G_n(\omega)$  deben tener  $4K + 1$  raíces; para  $K = 1$  entonces en  $-2\pi + \eta \leq \omega \leq 2\pi + \eta$  deben haber 5 raíces. De (134) se puede ver que las raíces  $G_1(\omega)$  están en

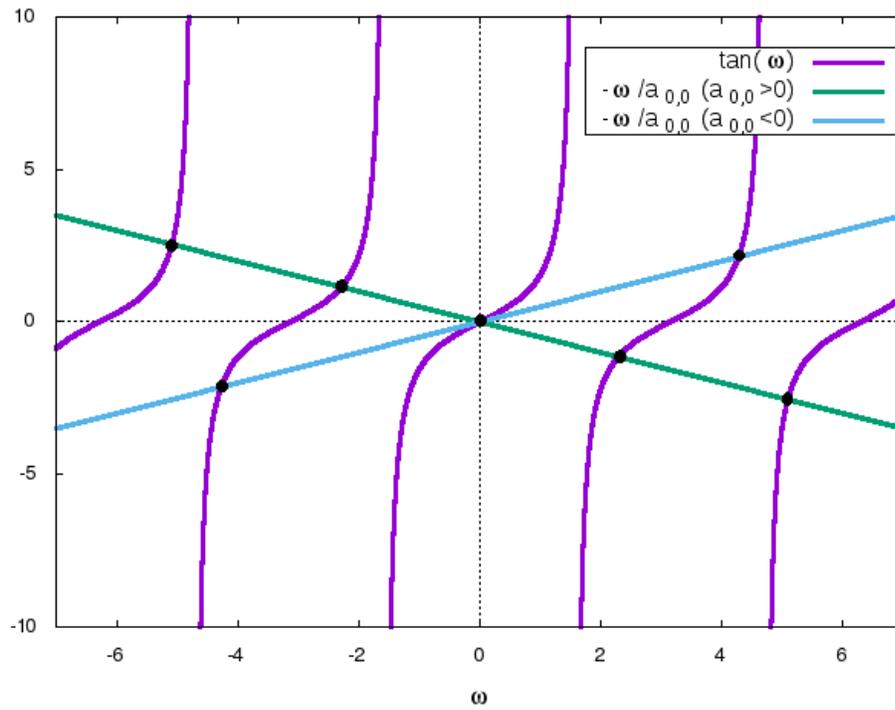
$$\tan(\omega) = -\frac{\omega}{a_{0,0}}. \quad (140)$$

En la Figura 6 se muestran los puntos que representan las raíces de  $G_1(\omega)$  para cada caso: cuando  $(a_{0,0} < 0)$  y cuando  $(a_{0,0} > 0)$ .

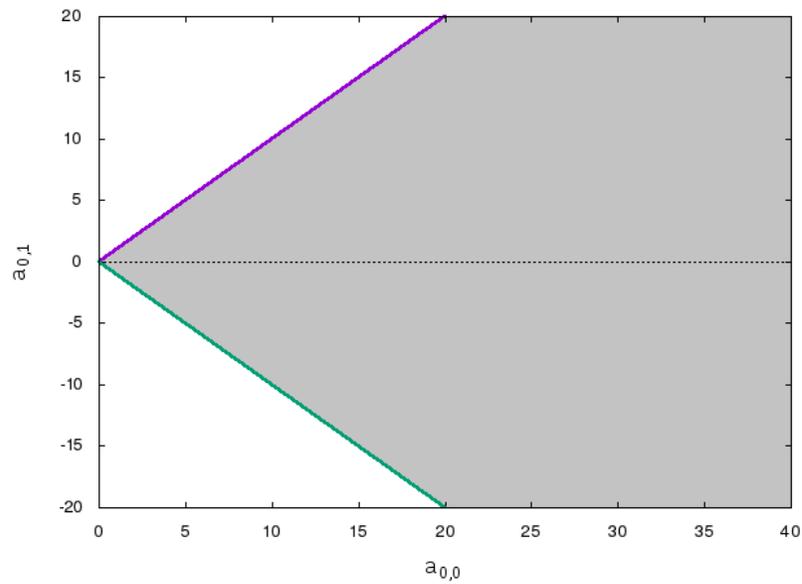
Se puede notar que para el caso  $(a_{0,0} > 0)$  hay 5 intersecciones (raíces); sin embargo, para el caso  $(a_{0,0} < 0)$  sólo se tienen 3 raíces. Por lo tanto esto descarta la región de  $(a_{0,0} < 0)$  de la Figura 5 como región de estabilidad. Además aquí se comprueba la condición necesaria de estabilidad (154). Y queda que la región está dada por

$$\left\{ (a_{0,0}, a_{0,1}) \mid a_{0,0} + a_{0,1} > 0, \left| \frac{a_{0,1}}{a_{0,0}} \right| < 1 \right\}, \quad (141)$$

que está representada en la Figura 7.



**Figura 6.** Raíces de  $G_1(\omega)$  para caso  $(a_{0,0} < 0)$  y  $(a_{0,0} > 0)$ .



**Figura 7.** Región 1 de estabilidad asintótica del SLR de primer orden.

Para obtener la región de estabilidad (131) se analiza el criterio 2 del Teorema 2.1 de Pontryagin, el cual indica que una condición suficiente es que las funciones  $F_1(\omega)$  y  $G_1(\omega)$  satisfagan la desigualdad

$$\nabla\omega = F_1(\omega)G_1'(\omega) - F_1'(\omega)G_1(\omega) > 0. \quad (142)$$

para al menos un valor de  $\omega$ . Por lo tanto se tiene que (142) queda como

$$\nabla\omega = \omega(\omega - a_{0,1} \sin(\omega)) + (a_{0,0} + 1)(a_{0,0} + a_{0,1} \cos(\omega)) > 0, \quad (143)$$

si  $a_{0,0} = -a_{0,1} \cos(\omega)$  entonces (143) es

$$\omega(\omega - a_{0,1} \sin(\omega)) > 0. \quad (144)$$

Ahora si se multiplica a (144) por  $\sin(\omega)$ , esto no afecta la desigualdad si se tiene en cuenta para  $\omega \in (0, \pi)$  donde  $\sin(\omega) > 0$ , así queda

$$\omega(\omega \sin(\omega) - a_{0,1} \sin^2(\omega)) > 0, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (145)$$

y utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin^2(\omega) + \cos^2(\omega) = 1, \quad (146)$$

se llega a

$$\omega(\omega \sin(\omega) - a_{0,1} + a_{0,1} \cos^2(\omega)) > 0, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (147)$$

pero como se analiza el caso  $a_{0,0} = -a_{0,1} \cos(\omega)$  en (147) se tiene

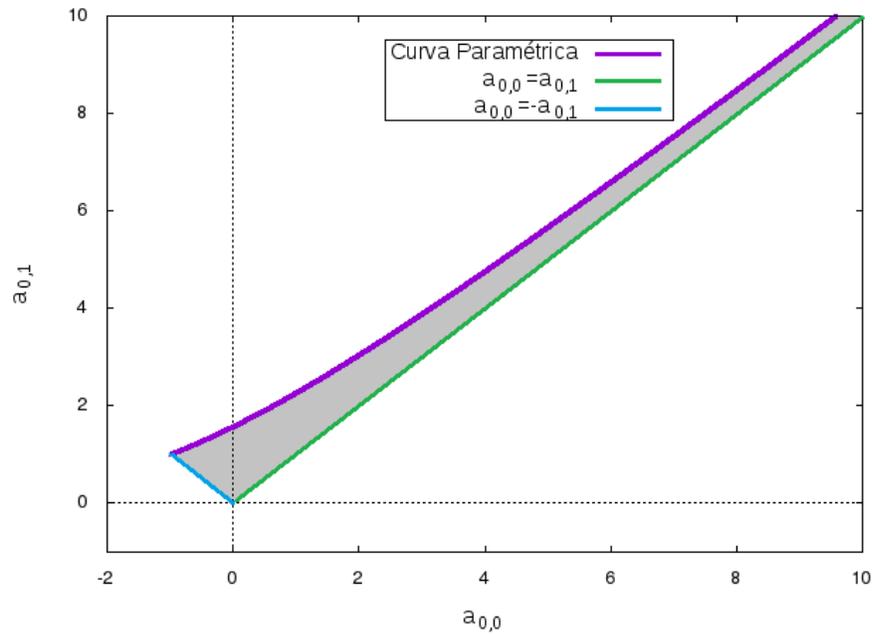
$$\omega(\omega \sin(\omega) - a_{0,1} - a_{0,0} \cos(\omega)) > 0, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (148)$$

luego, tomando en cuenta la ecuación (133), se puede escribir como

$$-\omega F_1(\omega) > 0, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (149)$$

y a su vez es igual a

$$\text{sgn}(F_1(\omega)) < 0, \quad 0 < \omega < \pi. \quad (150)$$



**Figura 8.** Región 2 de estabilidad asintótica del SLR de primer orden.

Así la región 2 de estabilidad queda como

$$\{(a_{0,0}, a_{0,1}) \mid a_{0,0} = -a_{0,1} \cos(\omega), \operatorname{sgn}(F_1(\omega)) < 0, 0 < \omega < \pi\}. \quad (151)$$

Para graficar esta región obtenida se procede a obtener la curva límite, para ello se puede tener en cuenta la igualdad  $a_{0,0} = -a_{0,1} \cos(\omega)$  en  $F_1(\omega) = 0$ , entonces se tiene que la curva paramétrica límite de la región 2 dada por:

$$a_{0,0} = -\frac{\omega \cos(\omega)}{\operatorname{sen}(\omega)}, \quad a_{0,1} = \frac{\omega}{\operatorname{sen}(\omega)}, \quad (152)$$

para  $\omega \in (0, \pi)$ . La Figura 8 representa a la región (151). ■

### 5.2.1. Resumen.

En esta sección se presentó la caracterización de las regiones de estabilidad de los SLR de primer orden teniendo en cuenta que actualmente se tiene en la literatura el resultado de Hayes (Hayes, 1950). En la sección 5.2 se lograron obtener las regio-

nes paramétricas que son equivalentes al trabajo de (Hayes, 1950) pero utilizando un procedimiento distinto, de esta forma se obtuvieron condiciones en función a los parámetros del sistema en cuestión  $(\alpha_{0,0}, \alpha_{0,1})$ ; además se puede notar que la región dada por (130) es independiente del valor del retardo  $\tau$  mientras que la región (131) es dependiente de  $\tau$ , teniendo en cuenta que  $\alpha_{0,0} = \hat{\alpha}_{0,0}\tau$  y  $\alpha_{0,1} = \hat{\alpha}_{0,1}\tau$ .

### 5.3. Regiones de estabilidad para los SLR de segundo orden y retardo único.

Se considera ahora el caso de que el sistema (10) sea de segundo orden y de retardo único, es decir con  $n = 2$  y  $r = 1$ , entonces el SLR es de la forma

$$\ddot{x}(t) = -\alpha_{0,0}x(t) - \alpha_{0,1}x(t-1) - \alpha_{1,0}\dot{x}(t) - \alpha_{1,1}\dot{x}(t-1). \quad (153)$$

**Observación 5.1** Cabe aclarar que los parámetros del sistema de segundo orden serán agrupados en forma de coordenadas rectangulares, definiendo  $A_0$  como un punto cuyas coordenadas son  $(\alpha_{0,0}, \alpha_{0,1})$  y  $A_1$  es otro punto cuyas coordenadas son  $(\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1})$ , esto con el fin de facilitar graficar las regiones de estabilidad.

**Teorema 5.1** Sea  $A_0 = (\alpha_{0,0}, \alpha_{0,1})$  y  $A_1 = (\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1})$ . El SLR de la forma (153) es asintóticamente estable si y sólo

$$\alpha_{0,0} + \alpha_{0,1} > 0, \quad \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} > 0 \quad (154)$$

y si el sistema se encuentra en la unión de las siguientes regiones:

■ *Región 1:*

$$U_1 = \left\{ (A_0, A_1) \mid \alpha_{0,0} - \alpha_{0,1} \geq \pi^2, \alpha_{0,0} \leq \frac{\alpha_{1,0}^2}{2}, \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} > 0, \alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} > 0 \right\}. \quad (155)$$

■ *Región 2:*

$$U_2 = \left\{ (A_0, A_1) \mid \alpha_{0,0} - \alpha_{0,1} \geq \pi^2, \alpha_{0,0} > \frac{\alpha_{1,0}^2}{2}, \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} > 0, \alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} > 0 \right\}, \quad (156)$$

que verifiquen

$$\alpha_{0,1} < |c|, \quad c = |\alpha_{1,0}| \sqrt{\alpha_{0,0} - \frac{\alpha_{1,0}^2}{4}}. \quad (157)$$

■ *Región 3:*

$$U_3 = \{(A_0, A_1) | \alpha_{0,0} - \alpha_{0,1} < \pi^2, \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} > 0, \alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} > 0\}, \quad (158)$$

que verifiquen si  $\exists \omega \in (0, \pi)$  tal que  $\alpha_{1,1}\omega \operatorname{sen}(\omega) + \alpha_{0,1} \cos(\omega) - \omega^2 + \alpha_{0,0} = 0$ , y

$$\{(\alpha_{1,1} \operatorname{sen}(\omega) - (2 + \alpha_{1,0})\omega) \operatorname{sgn}(F_2(\omega)) > 0\}. \quad (159)$$

Además, si  $\alpha_{0,0} > \frac{\alpha_{1,0}^2}{2}$  entonces se debe cumplir (157).

■ *Región 4:*

$$U_4 = \left\{ A_1 | \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} > 0, \alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} > 0, 0 \leq \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} < 2, \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} > -\frac{\pi^2}{2} \right\} \\ \cap \{A_0 | \alpha_{0,0} - \alpha_{0,1} < \pi^2\}, \quad (160)$$

que verifiquen si  $\exists \omega \in (0, \pi)$  tal que  $\alpha_{1,1}\omega \operatorname{sen}(\omega) + \alpha_{0,1} \cos(\omega) - \omega^2 + \alpha_{0,0} = 0$ , y que cumpla (159).

### **Demostración.**

Teniendo en cuenta de nuevo el teorema de Pontryagin, se puede analizar la estabilidad del sistema (153) a partir de las funciones:

$$F_2(\omega) = -\alpha_{1,0}\omega \operatorname{sen}(\omega) + (\alpha_{0,0} - \omega^2) \cos(\omega) + \alpha_{0,1}, \quad (161)$$

$$G_2(\omega) = (\alpha_{0,0} - \omega^2)\omega \operatorname{sen}(\omega) + \alpha_{1,0}\omega \cos(\omega) + \alpha_{1,1}\omega. \quad (162)$$

que corresponden a la parte real e imaginaria respectivamente de la función cuasipolinomial característica relacionada con (153).

**Condición (157) de  $U_2$  y  $U_3$ .**

Aplicando las identidades trigonométricas (106) a las funciones  $F_2(\omega)$  de (161) y  $G_2(\omega)$  de (162) quedan como:

$$F_2(\omega) = \sqrt{a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2} \cos(\omega + \text{atan2}(a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2)) + a_{0,1}, \quad (163)$$

$$G_2(\omega) = \sqrt{a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2} \cos(\omega + \text{atan2}(a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2)) + a_{1,1}\omega. \quad (164)$$

Las raíces de (161) y (162) se encuentran en

$$\cos(\omega + \text{atan2}(a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2)) = -\frac{a_{0,1}}{\sqrt{a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2}}, \quad (165)$$

$$\text{sen}(\omega + \text{atan2}(a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2)) = -\frac{a_{1,1}\omega}{\sqrt{a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2}}. \quad (166)$$

respectivamente. Una condición de estabilidad asintótica indicado en el criterio 2 del Teorema de Pontryagin es que las raíces de  $F_2(\omega)$  y  $G_2(\omega)$  sean reales. Elevando al cuadrado (165) y (166) y usando (146) se puede ver que si las raíces de  $F_2(\omega)$  y  $G_2(\omega)$  son reales se cumple que:

$$\{||[a_{0,1}, a_{1,1}\omega]||_\infty < ||[-a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2]||_2\}; \quad (167)$$

lo que implica que se deben verificar

$$|a_{0,1}| < ||[-a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2]||_2, \quad |\omega| \leq \left| \frac{a_{0,1}}{a_{1,1}} \right|, \quad (168)$$

$$|a_{1,1}\omega| < ||[-a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2]||_2, \quad |\omega| > \left| \frac{a_{0,1}}{a_{1,1}} \right|. \quad (169)$$

La condición (168) presenta dos casos: la función  $\sqrt{a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2}$  puede presentar uno o dos mínimos. Entonces calculándolos se tiene que los puntos críticos se encuentran en los valores de  $\omega$  cuando

$$\frac{d\left(\sqrt{a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2}\right)}{d\omega} = \frac{-4(a_{0,0} - \omega^2)\omega + 2a_{1,0}^2 \omega}{2\sqrt{a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2}} = 0. \quad (170)$$

Así un máximo local está en  $\omega_1 = 0$  y los dos mínimos en

$$\omega_{2,3} = \pm \sqrt{a_{0,0} - \frac{a_{1,0}^2}{2}}. \quad (171)$$

los cuales existen cuando  $a_{0,0} > \frac{a_{1,0}^2}{2}$ . La condición (168) en el máximo local  $\omega_1 = 0$ , junto con la condición de estabilidad necesaria (154), implica que se debe cumplir que

$$|a_{0,1}| < |a_{0,0}|. \quad (172)$$

Luego verificando la condición (168) para los mínimos en  $\omega_{2,3}$ , se tiene

$$|a_{0,1}^*| < |a_{1,0}^*| \sqrt{a_{0,0}^* - \frac{(a_{1,0}^*)^2}{4}}, \quad (173)$$

donde el \* indica que son para valores constantes dados. Por lo tanto, la región de estabilidad está formada primeramente por

$$|a_{0,1}| < |a_{0,0}|, \quad a_{0,0} + a_{0,1} > 0 \quad (174)$$

y para  $a_{0,0}^* > \frac{(a_{1,0}^*)^2}{2}$  dentro de la región (174) se debe cumplir (173).

Luego, la metodología a utilizarse para verificar la condición (169) consiste en analizarla en el punto exacto cuando se da la igualdad, es decir cuando

$$a_{1,1}^2 \omega^2 = a_{1,0}^2 \omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2, \quad (175)$$

donde se tiene que

$$\omega^2 = \frac{2a_{0,0} - a_{1,0}^2 + a_{1,1}^2 \pm \sqrt{(a_{1,1}^2 - a_{1,0}^2)(a_{1,1}^2 - a_{1,0}^2 + 4a_{0,0})}}{2}. \quad (176)$$

Para que la condición (169) siempre se cumpla se necesita que  $\omega^2 \notin \mathcal{R}^+$ . Esto puede ocurrir cuando

$$(a_{1,1}^2 - a_{1,0}^2)(a_{1,1}^2 - a_{1,0}^2 + 4a_{0,0}) < 0. \quad (177)$$

Es decir,  $a_{1,1}^2 - a_{1,0}^2 < 0$  y  $a_{1,1}^2 - a_{1,0}^2 + 4a_{0,0} > 0$  satisface (177): esto implicaría que

$\alpha_{0,0} > \frac{\alpha_{1,0}^2 - \alpha_{1,1}^2}{4}$ ; lo cual tiene sentido, debido a que se encuentra dentro de la región de estabilidad (174) cuando  $\alpha_{0,0}$  es positivo. Entonces la región del punto  $A_1(\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1})$  que satisface (167) es

$$\alpha_{1,1}^2 - \alpha_{1,0}^2 < 0. \quad (178)$$

**Condición (159) de  $U_3$  y  $U_4$ .**

El criterio 2 del Teorema 2.1 de Pontryagin indica que una condición suficiente es que las funciones  $F_2(\omega)$  y  $G_2(\omega)$  satisfagan la desigualdad

$$\nabla\omega = F_2(\omega)G_2'(\omega) - F_2'(\omega)G_2(\omega) > 0. \quad (179)$$

para al menos un valor de  $\omega$ . Por lo tanto de (161) y de (162) se tiene que (179) es

$$\begin{aligned} & [a_{0,0}a_{0,1} + a_{0,1}a_{1,0} + a_{0,0}a_{1,1} + ((1 + a_{1,0})a_{1,1} - a_{0,1})\omega^2] \cos(\omega) + \\ & [(a_{0,0}a_{1,1} - a_{0,1}a_{1,0} - 2a_{0,1})\omega - a_{1,1}\omega^3] \sin(\omega) + \\ & \omega^4 + (-2a_{0,0} + a_{1,0} + a_{1,0}^2)\omega^2 + a_{0,1}a_{1,1} + a_{0,0}a_{1,0} + a_{0,0}^2 > 0. \end{aligned} \quad (180)$$

y reagrupando se obtiene

$$\begin{aligned} & [-a_{1,0}\omega \sin(\omega) + (a_{0,0} - \omega^2) \cos(\omega) + a_{0,1}]a_{1,1} + (2 + a_{1,0})a_{1,0}\omega^2 + \\ & (a_{1,0} + a_{0,0} - \omega^2)(a_{1,1}\omega \sin(\omega) + a_{0,1} \cos(\omega) - \omega^2 + a_{0,0}) + \\ & -a_{0,1}(2 + a_{1,0})\omega \sin(\omega) + (2 + a_{1,0})a_{1,1}\omega^2 \cos(\omega) > 0, \end{aligned}$$

que junto con (161), da

$$\begin{aligned} & (a_{1,0} + a_{0,0} - \omega^2)(a_{1,1}\omega \sin(\omega) + a_{0,1} \cos(\omega) - \omega^2 + a_{0,0}) + a_{1,1}F_2(\omega) + \\ & -(2 + a_{1,0})\omega (a_{0,1} \sin(\omega) - a_{1,1}\omega \cos(\omega) - a_{1,0}\omega) > 0. \end{aligned} \quad (181)$$

Si existe un valor de  $\omega$  tal que

$$a_{1,1}\omega \sin(\omega) + a_{0,1} \cos(\omega) - \omega^2 + a_{0,0} = 0, \quad (182)$$

y multiplicando ambos lados por  $\text{sen}(\omega) > 0$  con  $\omega \in (0, \pi)$ , se tiene que la desigualdad (181) es

$$a_{1,1} \text{sen}(\omega) F_2(\omega) - (2 + a_{1,0}) \omega (a_{0,1} \text{sen}^2(\omega) - a_{1,1} \omega \text{sen}(\omega) \cos(\omega) - a_{1,0} \omega \text{sen}(\omega)) > 0.$$

Luego, utilizando la identidad trigonométrica (146) se puede ver que

$$\begin{aligned} -(2 + a_{1,0}) \omega (a_{0,1} - a_{0,1} \cos^2(\omega) - a_{1,1} \omega \text{sen}(\omega) \cos(\omega) - a_{1,0} \omega \text{sen}(\omega)) \\ a_{1,1} \text{sen}(\omega) F_2(\omega) > 0, \end{aligned} \quad (183)$$

pero además la ecuación (182) implica que  $-a_{1,1} \omega \text{sen}(\omega) - a_{0,1} \cos(\omega) = -\omega^2 + a_{0,0}$ . Sustituyendo esto en (183) queda

$$[a_{1,1} \text{sen}(\omega) - (2 + a_{1,0}) \omega] F_2(\omega) > 0, \quad (184)$$

que se puede expresar como

$$[a_{1,1} \text{sen}(\omega) - (2 + a_{1,0}) \omega] \text{sgn}(F_2(\omega)) > 0, \quad 0 < \omega < \pi. \quad (185)$$

Así, una región de estabilidad consiste en que se cumpla (182), y se satisfaga (185).

### **Región de $A_0$ de $U_3$ y $U_4$ .**

La metodología para hallar las regiones encerradas por la condición (185) cuando  $\exists \omega \in (0, \pi)$  tal que cumpla (182) consiste en analizar a las funciones  $F_2(\omega)$  de (161) y  $G_2(\omega)$  de (162) en el punto en el que ambas son cero. Entonces de  $F_2(\omega) = 0$  y  $G_2(\omega) = 0$  para  $\omega \in (0, \pi)$  se obtiene la curva paramétrica dada por los valores para  $a_{0,0}$  y  $a_{0,1}$  en función a  $\omega$  y al punto  $A_1(a_{1,0}, a_{1,1})$  donde

$$(a_{0,0}, a_{0,1}) = \left( \frac{-a_{1,1} \omega - a_{1,0} \omega \cos(\omega) + \omega^2 \text{sen}(\omega)}{\text{sen}(\omega)}, \frac{a_{1,0} \omega + a_{1,1} \omega \cos(\omega)}{\text{sen}(\omega)} \right). \quad (186)$$

De la misma forma se pueden obtener obtener los valores para  $a_{1,0}$  y  $a_{1,1}$  en función a  $\omega$  y al punto  $A_0(a_{0,0}, a_{0,1})$  donde

$$(a_{1,0}, a_{1,1}) = \left( \frac{a_{0,1} + (a_{0,0} - \omega^2) \cos(\omega)}{\omega \text{sen}(\omega)}, \frac{-a_{0,1} \cos(\omega) - a_{0,0} + \omega^2}{\omega \text{sen}(\omega)} \right). \quad (187)$$

Si se analiza la curva límite dada en (186) cuando  $\omega \rightarrow 0$  para hallar su punto de inicio  $A_{0I}(a_{0,0}, a_{0,1})$  se obtiene

$$A_{0I}(a_{0,0}, a_{0,1}) = [-a_{1,0} - a_{1,1}, a_{1,0} + a_{1,1}]. \quad (188)$$

La curva límite representada por (187) la cual se da en  $\omega \in (0, \pi)$  debe cumplir con la condición necesaria de estabilidad presentada en (154) la cual es  $a_{1,1} + a_{1,0} + a_{0,0} > 0$ , por lo que se tiene que

$$a_{1,1} + a_{1,0} + a_{0,0} = \frac{a_{0,1} - a_{0,0} + \omega^2 + (a_{0,0} - a_{0,1} - \omega^2) \cos(\omega)}{\omega \sin(\omega)} + a_{0,0} > 0, \quad (189)$$

donde  $\omega \sin(\omega) > 0$  en  $\omega \in (0, \pi)$ , entonces queda verificar

$$a_{0,1} - a_{0,0} + \omega^2 + (a_{0,0} - a_{0,1} - \omega^2) \cos(\omega) + a_{0,0} \omega \sin(\omega) > 0, \quad (190)$$

entonces de (190) cuando  $\omega \rightarrow \pi$  se tiene que una recta límite de la región de estabilidad es

$$a_{0,0} - a_{0,1} < \pi^2. \quad (191)$$

### Región de estabilidad de $A_1$ .

Las regiones de estabilidad para el punto  $A_1(a_{1,0}, a_{1,1})$  se obtienen analizando la curva paramétrica (186) la cual debe encerrar la región que satisfaga la condición necesaria de estabilidad  $a_{0,0} + a_{0,1} > 0$ . Se puede hallar la pendiente de la recta tangente a la curva (186) en su punto inicial, es decir en el punto  $A_0 = [-a_{1,0} - a_{1,1}, a_{1,0} + a_{1,1}]$  dado en (188). Entonces procediendo con el cálculo se tiene que la pendiente de la recta tangente a la curva es

$$\begin{aligned} \frac{da_{0,1}}{da_{0,0}} &= \frac{da_{0,1}}{d\omega} \frac{d\omega}{da_{0,0}} \\ &= \frac{-a_{1,1}\omega - a_{1,0}\omega \cos(\omega) + (a_{1,1} \cos(\omega) + a_{1,0}) \sin(\omega)}{2\omega \sin^2(\omega) - (a_{1,1} + a_{1,0} \cos(\omega)) \sin(\omega) + a_{1,1}\omega \cos(\omega) + a_{1,0}\omega} \end{aligned}$$

y en  $\omega = 0$ , es decir para el punto inicial da

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d(-a_{1,1}\omega - a_{1,0}\omega \cos(\omega) + (a_{1,1} \cos(\omega) + a_{1,0}) \sin(\omega))/d\omega}{d(2\omega \sin^2(\omega) - (a_{1,1} + a_{1,0} \cos(\omega)) \sin(\omega) + a_{1,1}\omega \cos(\omega) + a_{1,0}\omega)/d\omega} = \frac{a_{1,0} - 2a_{1,1}}{6 + 2a_{1,0} - a_{1,1}}. \quad (192)$$

Luego, teniendo en cuenta que el límite de estabilidad se da cuando la pendiente de esta curva en su punto inicial tiende a la pendiente de la recta  $a_{0,0} + a_{0,1} = 0$ , es decir cuando  $\frac{a_{0,1}}{a_{0,0}} > -1$  entonces se tiene que (192) bajo esta condición es

$$a_{1,1} - a_{1,0} < 2. \quad (193)$$

El punto inicial de la curva dada por (186), obtenido en (188),  $A_{0I}(a_{0,0}, a_{0,1}) = [-a_{1,0} - a_{1,1}, a_{1,0} + a_{1,1}]$  debe cumplir con el resultado obtenido en (191), que representa a la recta  $a_{0,0} - a_{0,1} < \pi^2$ , la cual limita a la región de estabilidad dada por (186), esto es:

$$a_{0,0} - a_{0,1} = (-a_{1,0} - a_{1,1}) - (a_{1,0} + a_{1,1}) < \pi^2, \quad (194)$$

por lo tanto resulta que

$$a_{1,0} + a_{1,1} > -\frac{\pi^2}{2}. \quad (195)$$

Además recordando que la condición  $a_{0,0} + a_{0,1} > 0$  utilizada para la obtención de (193) es necesaria, entonces la región aparente de estabilidad para el punto  $A_1$  obtenida en (178) queda que es

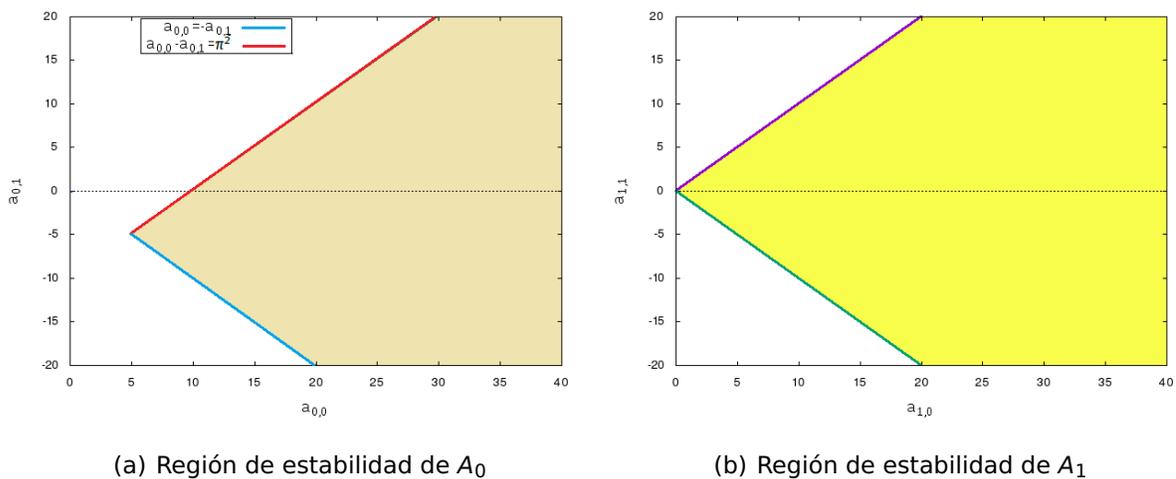
$$\{(a_{1,0}, a_{1,1}) \mid \{a_{1,0} + a_{1,1} > 0\} \cap \{a_{1,0} - a_{1,1} > 0\}\}, \quad (196)$$

unión

$$\{(a_{1,0}, a_{1,1}) \mid \{0 \leq a_{1,1} - a_{1,0} < 2\} \cap \left\{a_{1,0} + a_{1,1} > -\frac{\pi^2}{2}\right\}\}. \quad (197)$$

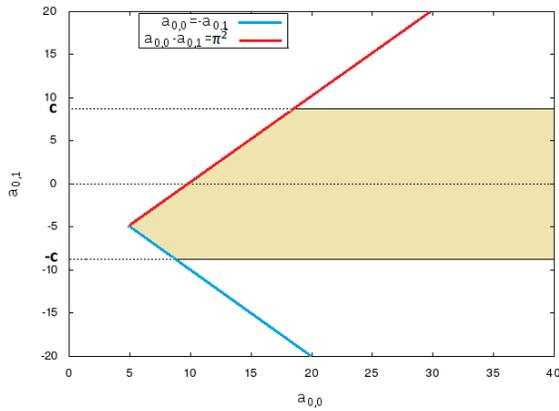
### 5.3.1. Ilustración de las regiones de estabilidad.

- Región 1: siendo  $A_0$  cualquier punto dentro de la región de la Figura 9(a) y  $A_1$  cualquier punto dentro de la región de la Figura 9(b).
- Región 2: la región de  $A_0$  dada en la Figura 10(a) varía según la posición de  $A_1$  dentro de la región de la Figura 10(b).
- Región 3: la región de  $A_0$  dada en la Figura 11(a) varía según la posición de  $A_1$  dentro de la región de la Figura 11(b).
- Región 4: la región de  $A_0$  dada en la Figura 12(a) varía según la posición de  $A_1$  dentro de la región de la Figura 12(b). Las observaciones 5.2 y 5.3 se refieren específicamente a esta región.

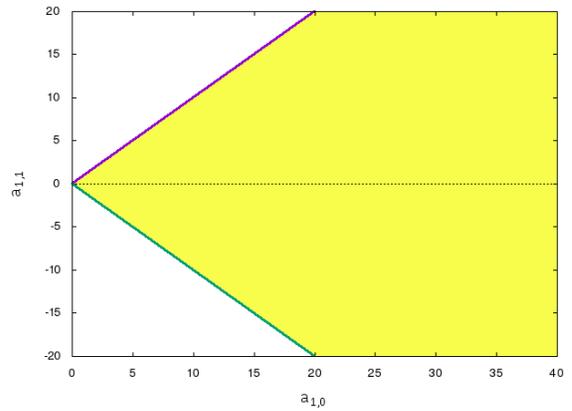


**Figura 9.** Región 1 de estabilidad para SLR de segundo orden.

**Observación 5.2** La Figura 13 muestra las distintas regiones de  $A_0$  para algunos valores de  $A_1$  de la Figura 14. Es importante tener en cuenta que la Figura 13 es un gráfico de tipo multidimensional, debido a que en el caso de SLR de segundo orden ya se tienen 4 parámetros constantes.

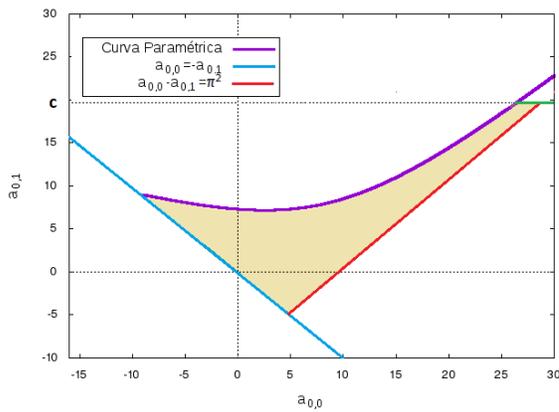


(a) Región de estabilidad de  $A_0$

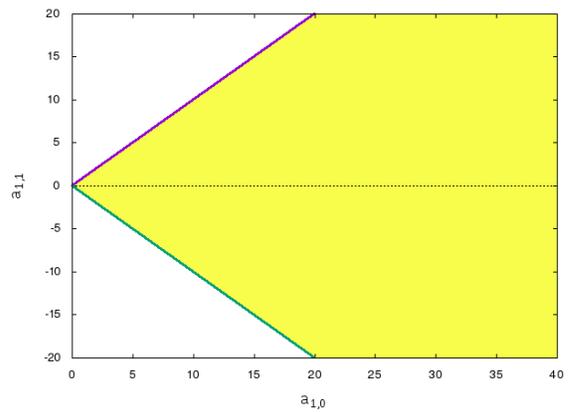


(b) Región de estabilidad de  $A_1$

**Figura 10.** Región 2 de estabilidad para SLR de segundo orden.

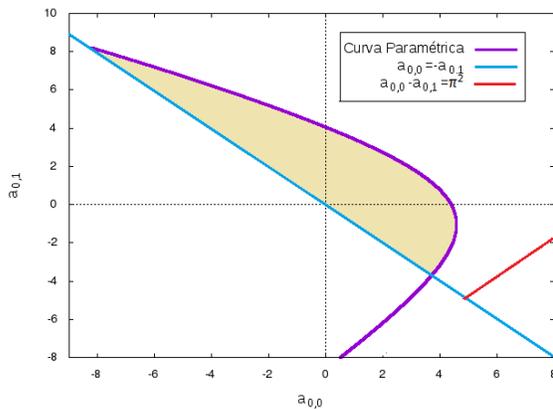


(a) Región de estabilidad de  $A_0$

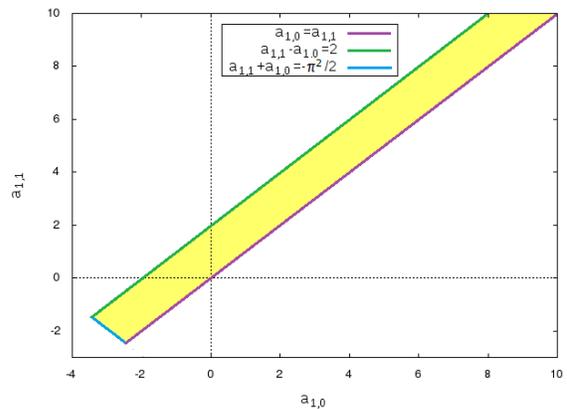


(b) Región de estabilidad de  $A_1$

**Figura 11.** Región 3 de estabilidad para SLR de segundo orden.

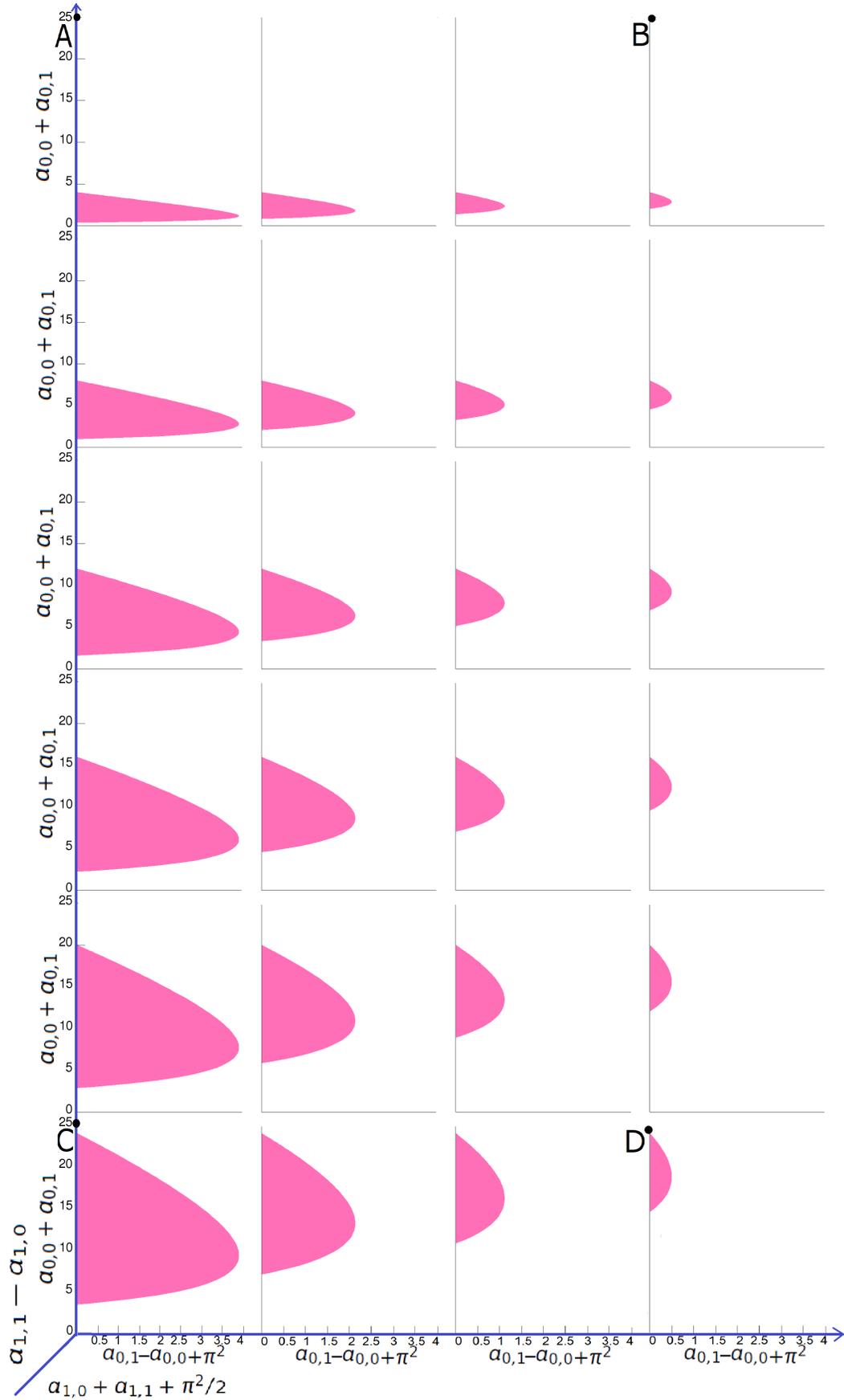


(a) Región de estabilidad de  $A_0$

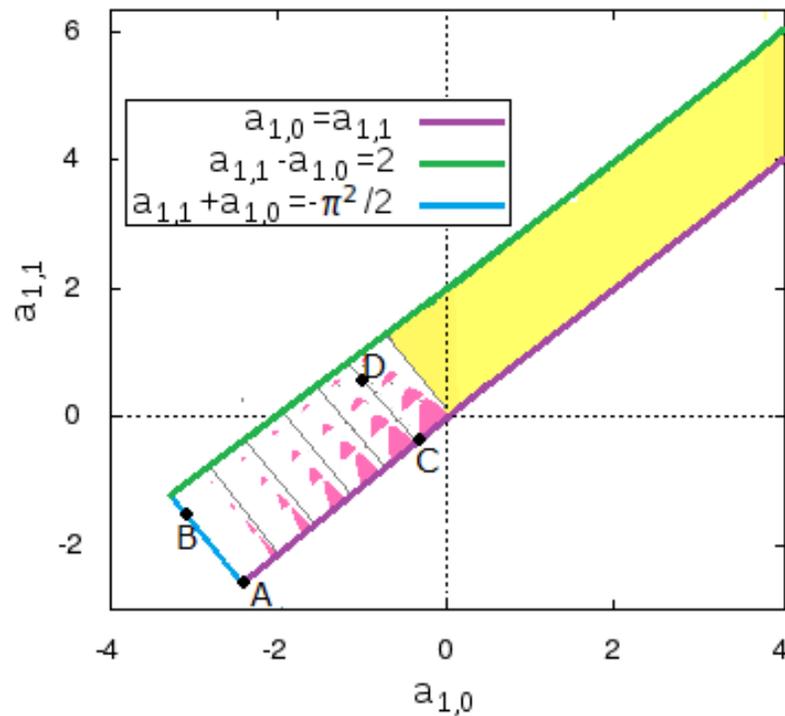


(b) Región de estabilidad de  $A_1$

**Figura 12.** Región 4 de estabilidad para SLR de segundo orden.

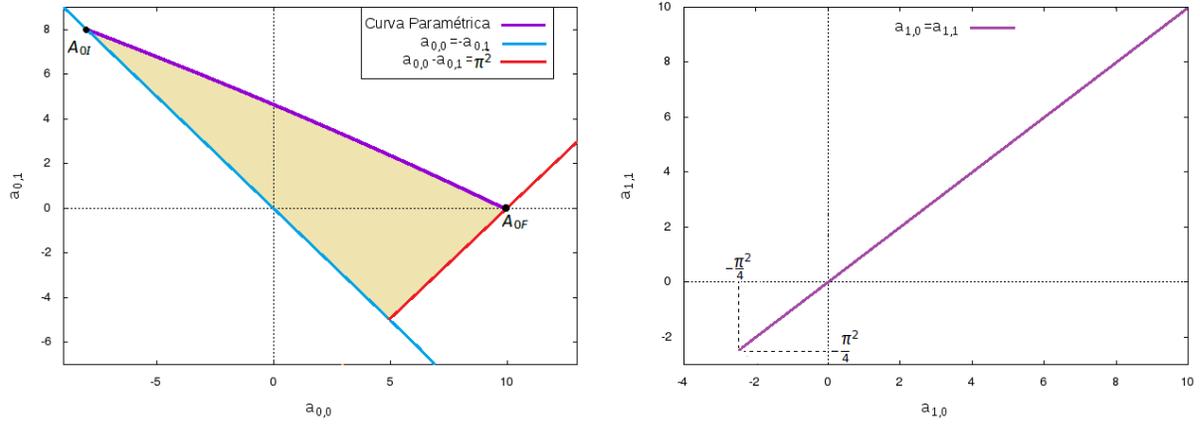


**Figura 13.** Región 4 de estabilidad de  $A_0$  con  $A_1$  en la región de la Figura 14.



**Figura 14.** Región 4 de estabilidad para  $A_1$  en relación a la Figura 13.

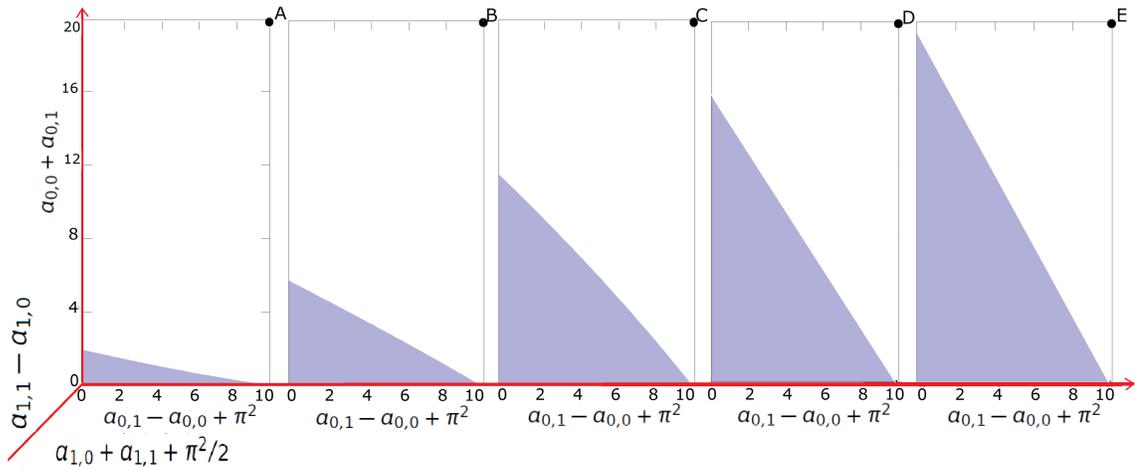
**Observación 5.3** Caso especial  $a_{1,0} = a_{1,1}$  (figuras 15 y 16): la región de  $A_1$  son los puntos que forman la semirrecta dada por  $a_{1,0} = a_{1,1}$  iniciando en  $a_{1,0} = \frac{-\pi^2}{4}$  como se muestra en la Figura 15(b). Así, en la Figura 15(a) se ve que la curva dada por (186) es un segmento con punto inicial  $A_{0I} = [-2a_{1,0}, 2a_{1,0}]$  y punto final  $A_{0F} = [\pi^2, 0]$ . La región de estabilidad para el punto  $A_0$  está encerrada por el segmento de recta dado por (186), la recta  $a_{0,1} + a_{0,0} > 0$  y  $a_{0,0} - a_{0,1} < \pi^2$ . En la Figura 15 se puede ver una región de estabilidad a modo de ejemplo. Además la Figura 16(a), muestra las distintas regiones de  $A_0$  para algunos valores de  $A_1$  de la Figura 16(b).



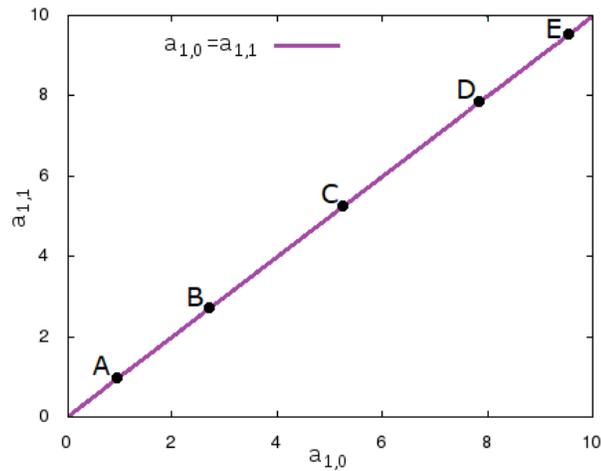
(a) Región de estabilidad de  $A_0$

(b) Región de estabilidad de  $A_1$

**Figura 15.** Región 4 estabilidad para el caso  $a_{1,0} = a_{1,1}$  para SLR de segundo orden.

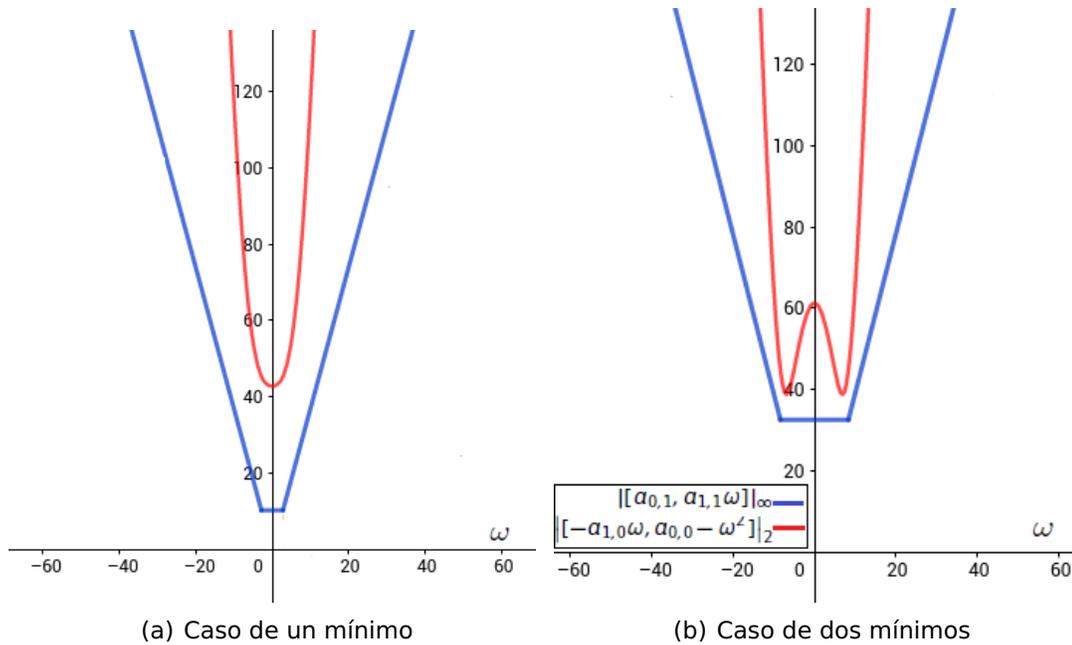


(a) Ejemplos de regiones de estabilidad de  $A_0$



(b) Región de  $A_1$  del ejemplo

**Figura 16.** Ejemplos de regiones de estabilidad de  $A_0$  para el caso  $a_{1,0} = a_{1,1}$ .



**Figura 17.** Ejemplos de casos en los que se cumplen las condiciones (168) y (169).

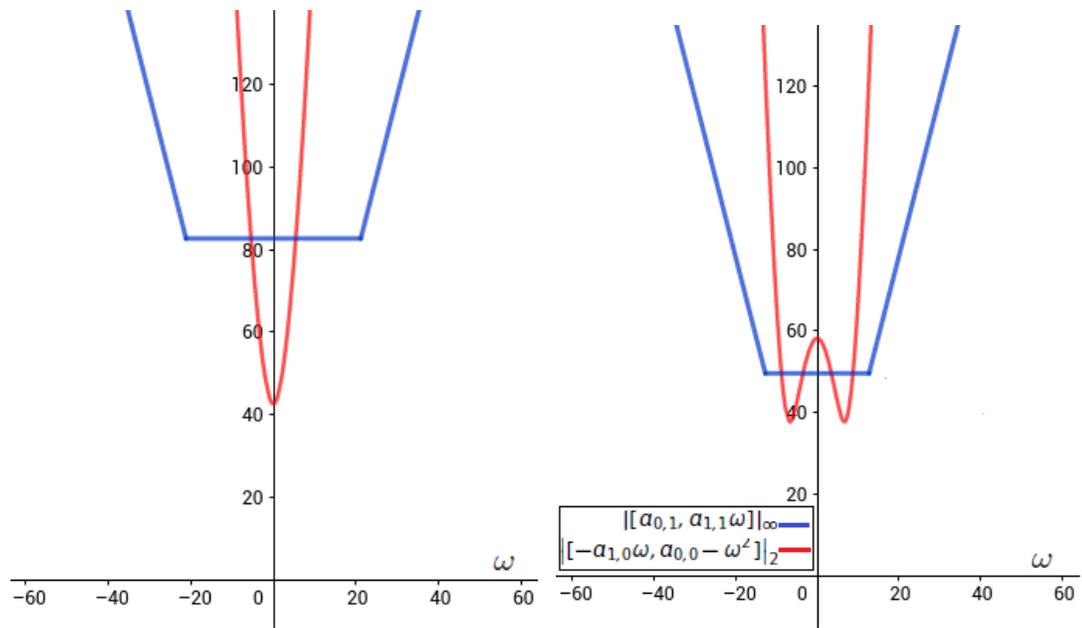
### 5.3.2. Análisis de las regiones de estabilidad.

En esta sección se procederá a analizar más detalladamente el procedimiento utilizado para la obtención de las regiones de estabilidad de los SLR de segundo orden, mediante el apoyo de gráficas. Para analizar las regiones de estabilidad obtenidas se puede partir de la condición de estabilidad dada por (167), la cual implica que se cumplan (168) y (169). En las figuras 17(a) y 17(b) se puede ver que se cumplen las condiciones (168) y (169), donde la línea roja representa a la norma  $||[-a_{1,0}\omega, a_{0,0} - \omega^2]||_2$  y la azul a  $||[a_{0,1}, a_{1,1}\omega]||_{\infty}$ .

En la Figura 17(a), la curva de color rojo puede presentar 2 casos: a) cuando tiene un solo mínimo y b) cuando tiene dos mínimos. Por lo tanto cuando se debe verificar el caso (168), se pueden analizar los mínimos de la función  $\sqrt{a_{1,0}^2\omega^2 + (a_{0,0} - \omega^2)^2}$  debido a que en estos mínimos podría darse que no se cumpla la condición de estabilidad (168).

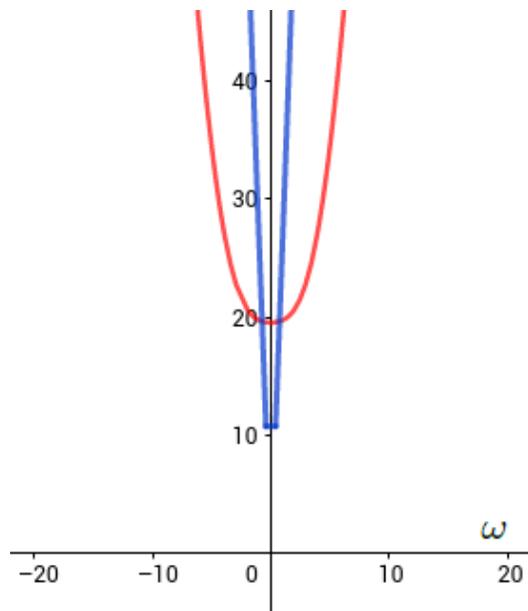
En las figuras 18(a) y 18(b) se pueden ver los casos en los que la condición (168) no se cumple. Por lo tanto fue importante tener en cuenta estos mínimos de la función para poder obtener las regiones de estabilidad.

Con este análisis se obtuvo que las regiones de estabilidad para el punto  $A_0(a_{0,0}, a_{0,1})$



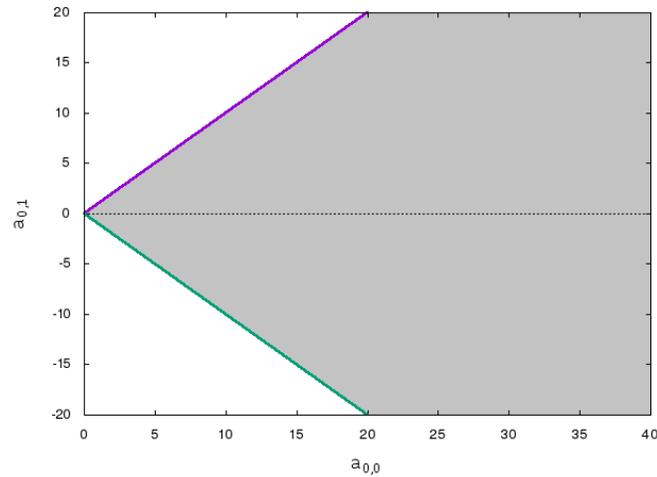
(a) Caso de un mínimo. No cumple la condición (168).

(b) Caso de dos mínimos. No cumple la condición (168).



(c) No cumple la condición (169).

**Figura 18.** Ejemplos de casos en los que no se cumple las condiciones (168) y (169).



**Figura 19.** Región de estabilidad para el punto  $A_0$ .

está dado por (174) que se muestra en la Figura 19 y cuando  $a_{0,0}^* > \frac{(a_{1,0}^*)^2}{2}$  se debe cumplir (173), algunos ejemplos de dicho caso se muestran en la Figura 20 donde  $c = |a_{1,0}^*| \sqrt{a_{0,0}^* - \frac{(a_{1,0}^*)^2}{4}}$ .

Luego, para el caso de verificar la condición (169), fue importante estudiar el punto en el que se deja de cumplir dicha condición; la Figura 18(c) muestra el caso en el que la condición (169) no se cumple y por eso se la analizó en el punto exacto cuando se da la igualdad.

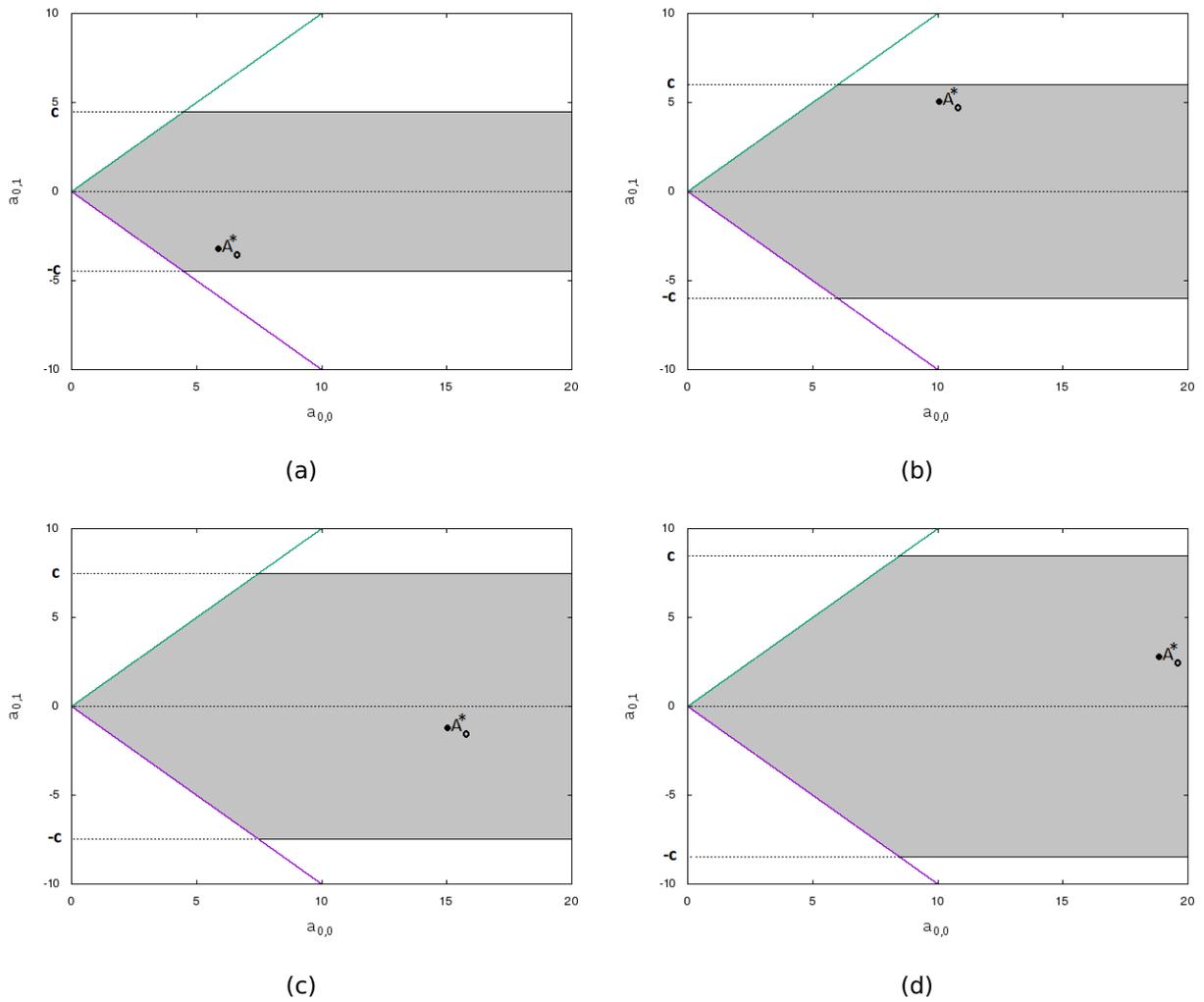
La región definida por la condición obtenida (185) cuando  $\exists \omega \in (0, \pi)$  tal que cumpla (182), se obtuvo mediante la curva límite de la región; para esto se puede tener en cuenta el criterio 2 del Teorema de Pontryagin el cual indica que se debe cumplir que las raíces de las funciones  $F_n(\omega)$  y  $G_n(\omega)$  deben estar entrelazadas de manera continua a lo largo de todo el eje de  $\omega$ . Si se analiza este criterio, se puede verificar que el límite de entrelazado ocurre cuando  $F_n(\omega)$  y  $G_n(\omega)$  poseen las mismas raíces, específicamente cuando ambos son cero para el mismo valor de  $\omega$ . Para el caso de primer orden  $n = 1$  se tenía que esto se traduce en que

$$F_1(\omega) = -\omega \sin(\omega) + a_{0,0} \cos(\omega) + a_{0,1} = 0, \quad (198)$$

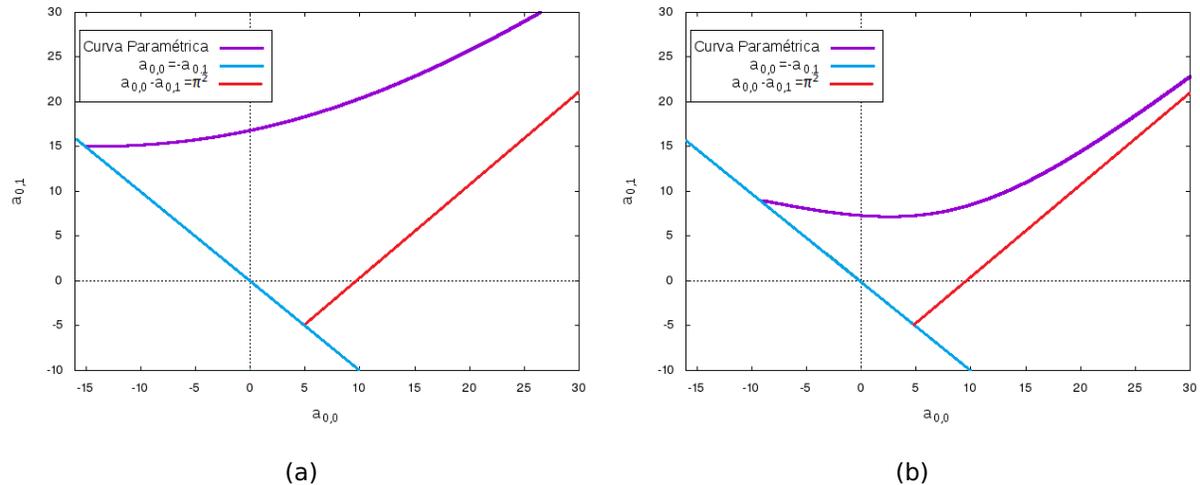
y

$$G_1(\omega) = a_{0,0} \sin(\omega) + \omega \cos(\omega) = 0. \quad (199)$$

A partir de estas ecuaciones también se pueden obtener los mismos valores para  $A_0$



**Figura 20.** Región de estabilidad para el punto  $A_0^*$  cuando  $a_{0,0}^* > \frac{(a_{1,0}^*)^2}{2}$  según la ubicación del punto  $A_0^*$ .



**Figura 21.** Ejemplo de la curva paramétrica dada por (187) tendiendo a la recta  $a_{0,0} - a_{0,1} = \pi^2$ .

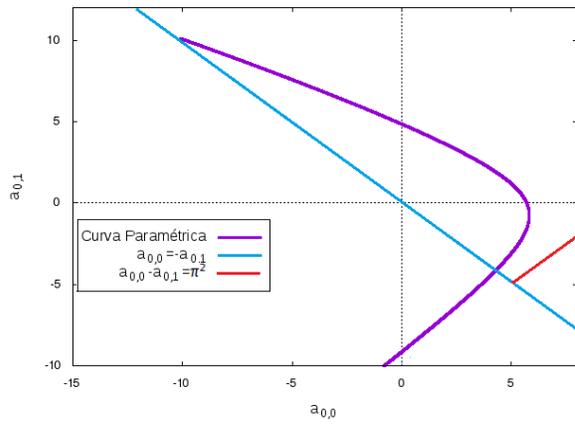
dados en (152); estos son los valores límites para los parámetros del sistema, por lo tanto a partir de esto se pudo obtener una curva límite para la región de estabilidad del caso  $n = 1$  la cual fue útil para lograr obtener la curva límite que encierra la región de estabilidad de la Figura 10 en función de los parámetros del sistema. Esta coincidencia indicó que se podía seguir el mismo camino para encontrar la curva límite de estabilidad de la región de estabilidad para el caso  $n = 2$ .

Además se puede ver que la curva paramétrica dada por (187) va tendiendo a la recta (191), es decir a  $a_{0,0} - a_{0,1} = \pi^2$  como se puede ver en la Figura 21. Con el análisis realizado se puede llegar a la siguiente observación.

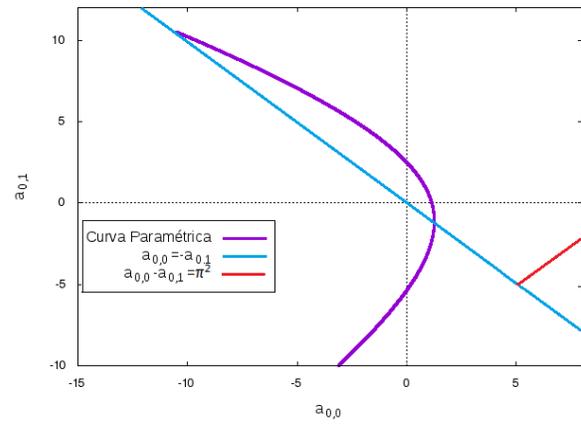
**Observación 5.4** Una región de estabilidad está limitada por la recta (191), luego por la recta  $a_{0,1} + a_{0,0} > 0$  de la condición (154) y por la curva definida por (187) como se muestra en la Figura 21.

Ahora, para analizar el proceso seguido para obtener las regiones de estabilidad obtenidas para el punto  $A_1(a_{1,0}, a_{1,1})$  se debe tener en cuenta la condición necesaria de estabilidad  $a_{0,0} + a_{0,1} > 0$ . En la Figura 22 se ve claramente que la curva paramétrica (186) encierra un región de estabilidad para ciertos valores de  $(a_{1,0}, a_{1,1})$  pero para otros no. Por esta razón se obtuvo la pendiente de la recta tangente a la curva (186) en su punto inicial donde se obtuvo a (192).

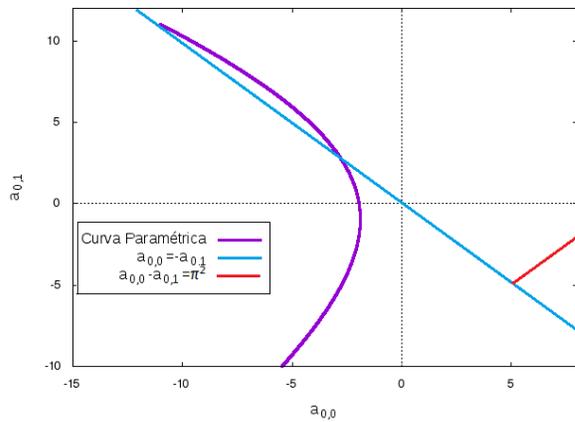
Cabe resaltar que en la Figura 22 se muestran cuatro casos, esto para poder visua-



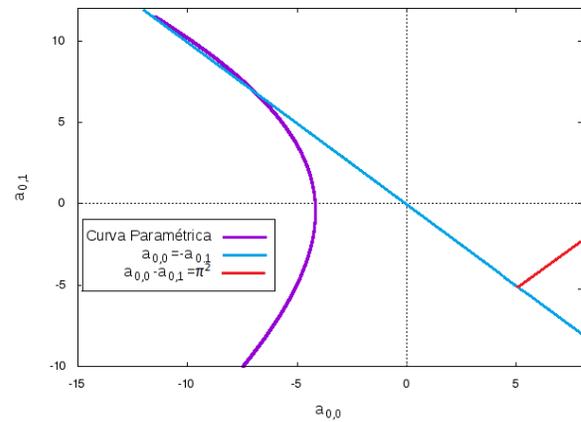
(a) Se puede ver una región de estabilidad encerrada.



(b) La región de estabilidad encerrada disminuye a medida que la curva paramétrica se acerca a la recta  $a_{0,0} + a_{0,1} = 0$ .

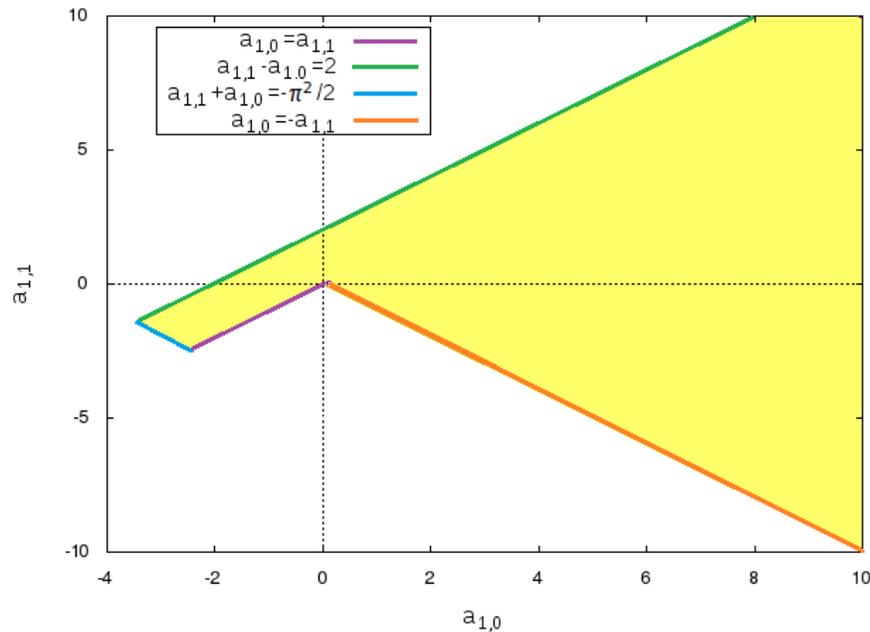


(c) Aún aparece una región de estabilidad aunque sea más pequeña.



(d) Desaparece el encierro de la región de estabilidad.

**Figura 22.** Caso en el que la curva paramétrica tiende a salir de la zona de estabilidad.



**Figura 23.** Región de estabilidad paramétrica de  $A_1$  que representa a (196) y (197).

lizar con mayor facilidad que la curva paramétrica dada por (186) tiende a salir de la región de  $a_{0,0} + a_{0,1} > 0$ , es decir, el límite de estabilidad está cuando la pendiente de esta curva en su punto inicial tiende a la pendiente de la recta  $a_{0,0} + a_{0,1} = 0$ . Finalmente, la unión de las regiones de estabilidad encontradas para  $A_1(a_{1,0}, a_{1,1})$  se presentan en la Figura 23.

### 5.3.3. Resumen.

En esta sección se presentó la caracterización de las regiones de estabilidad de los SLR de segundo orden. Para lograr caracterizar las regiones paramétricas de estabilidad de los SLR de segundo orden, el análisis fue más detallado y algebraico, en la sección 5.3 se demostraron las curvas límites obtenidas para cada región de estabilidad, teniendo en cuenta que para este caso ya se cuenta con dos parámetros más que en caso de primer orden  $(a_{1,0}, a_{1,1})$  por lo que son agrupados en pares. También se incluye en la sección 5.3.2 un análisis más detallado de las regiones obtenidas y del procedimiento algebraico utilizado para la obtención de las regiones de estabilidad del caso de los SLR de segundo orden.

## Capítulo 6. Discusión.

En este capítulo se comparan los resultados obtenidos en este trabajo de tesis con los ya existentes en la literatura. Primeramente, en la sección 6.1 se utiliza el resultado de Hayes presentado en la sección 2.6 para compararlo con los resultados obtenidos en esta tesis en la sección 5.2. Posteriormente un análisis del teorema de Pontryagin se presenta en la sección 6.2, donde se da el enfoque a la interpretación geométrica del teorema.

### 6.1. Relación de los resultados obtenidos con el teorema de Hayes.

A modo de verificar las condiciones y regiones de estabilidad obtenidas en el Capítulo 5, se puede utilizar el resultado ya conocido para los SLR de primer orden que se enuncia en el Teorema 2.3 de la sección 2.6. Entonces si se utilizan los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, de las condiciones dadas en la sección 5.1 se tiene que un SLR de la forma

$$\dot{x}(t) = -a_{0,0}x(t) - a_{0,1}x(t-1). \quad (200)$$

es asintóticamente estable si y sólo si

- $a_{0,0} + a_{0,1} > 0$ , y
- si se cumple  $\{[\gamma(\omega), \delta(\omega)]|_{\infty} \leq [\alpha(\omega), \beta(\omega)]|_2\}$  es decir si  $|a_{0,1}| < |a_{0,0}|$ ,
- o si  $\exists \omega \in (0, \pi)$  tal que  $\Lambda(\omega) = a_{0,1} \cos(\omega) + a_{0,0} = 0$  y verifica

$$\left( \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega) - \Gamma(\omega) \right) \text{sgn}(F(\omega)) > 0,$$

es decir

$$\text{sgn}(F_1(\omega)) < 0, \quad (201)$$

lo cual es fácil de verificar ya que sólo se debe cumplir que la función  $F_1(\omega) < 0$  y esto reproduce la condición dada en el Teorema 2.3  $0 < a_{0,1} \sin(\omega) < \omega$ , donde  $\hat{a}_{0,1}\tau = a_{0,1}$

Con esto se puede comprobar que las condiciones de estabilidad obtenidas reproducen las ya conocidas. Pero además se puede notar que se presentan de una manera

más sencilla.

### 6.1.1. Comparación con el ejemplo de la sección 2.4.1.

Se pueden comparar las condiciones de estabilidad obtenidas en el Capítulo con el resultado del ejemplo visto en la sección 2.4.1 el cual fue analizado con la aplicación del teorema de Pontryagin. Entonces para el caso mencionado se tiene que  $n = r = 1$  con  $a_{0,0} = 0$  y  $a_{0,1} \neq 0$ , y el sistema queda de la forma

$$\dot{x}(t) = -a_{0,1}x(t-1), \quad (202)$$

para el cual se procede a verificar su estabilidad con las condiciones encontradas en este trabajo de tesis. Verificando para  $\Lambda(\omega) = 0$  entonces  $\cos(\omega) = 0$  así la única solución en el intervalo  $\omega \in (0, \pi)$  es  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . Luego queda verificar que para este valor de  $\omega$  se tenga que  $\left(\frac{d}{d\omega}\Lambda(\omega) - \Gamma(\omega)\right) \operatorname{sgn}(F(\omega)) = -\omega \operatorname{sgn}(F(\omega)) > 0$ , esto queda en que  $\operatorname{sgn}(F(\frac{\pi}{2})) < 0$  lo cual se cumple si  $-\frac{\pi}{2} + a_{0,1} < 0$ . Además, verificando la condición de  $a_{0,0} + a_{0,1} > 0$  se necesita que  $a_{0,1} > 0$ . Por lo tanto el sistema (202) es asintóticamente estable si y sólo si  $0 < a_{0,1} < \frac{\pi}{2}$ . De esta forma se verifica que se llega al mismo resultado.

### 6.2. Interpretación gráfica del teorema de Pontryagin.

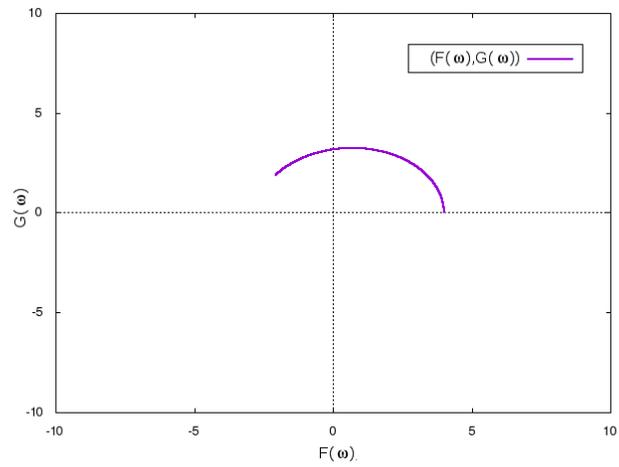
El teorema de Pontryagin de la sección 2.4 indica que la función característica cuasipolinomial relacionada con el sistema (10) puede ser separada en una parte real  $F(\omega)$  y una imaginaria  $G(\omega)$ . Ahora, si se utilizan estas funciones para graficar en forma paramétrica, es decir graficando con  $F(\omega)$  como la abscisa y  $G(\omega)$  como la ordenada se obtiene algo parecido a un caracol pero que se va expandiendo para fuera infinitamente para  $\omega \rightarrow \infty$ . La interpretación geométrica al teorema de Pontryagin tiene sentido en esta gráfica porque implica en el análisis del número de encierros al origen para una frecuencia  $\omega$  dada. El hecho de que las raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  se entrelacen implica, en coordenadas polares, que se encierre el origen continuamente, donde esta curva generada cruza por los ejes coordenados de manera intercalada, es decir luego de cruzar por el eje de la abscisa, cruza el eje de ordenada, y luego de nuevo a la abscisa, y así sucesivamente siguiendo la dirección de la curva generada. Este caracol

generado es equivalente a verificar el entrelazado de raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$ , pero el entrelazado es nada más una condición necesaria. Para que la condición sea necesaria y suficiente se debe verificar el criterio 3 del teorema de Pontryagin, el cual indica el número de raíces que deben tener las funciones  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$  en un intervalo determinado; esto se podría traducir a un número de encierros al origen para una frecuencia determinada.

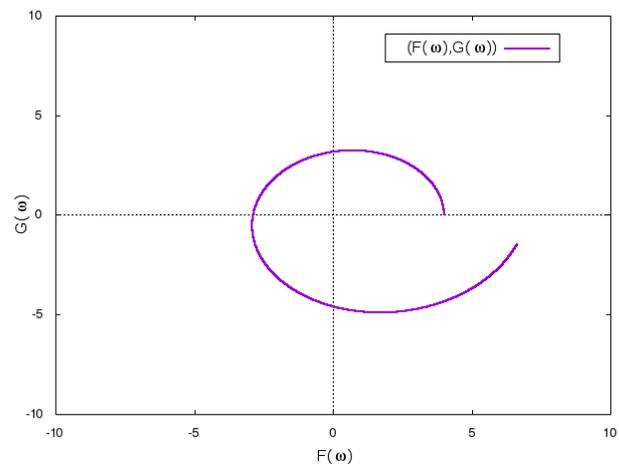
Se debe tener en cuenta que el criterio 3 de Pontryagin indica que el intervalo para verificar el número de raíces el cual debe ser lo suficientemente grande, esto hace que el intervalo de verificación pueda ser muy grande, pero para poder acotar esto se puede utilizar el resultado del criterio de estabilidad algorítmico de B. Cahlon, D. Schmidt que se presenta en la sección 2.5, en el cual el Teorema 2.2 indica el intervalo de verificación de las condiciones de entrelazado y de número de raíces.

Lo que se pretende es encontrar otro enfoque al teorema de Pontryagin, de manera a poder realizar el análisis de estabilidad con mayor facilidad, eso se puede ver si en lugar de obtener las gráficas de las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  de manera separada, se grafican de manera paramétrica, es decir con los valores de  $F(\omega)$  para cada  $\omega$  en el eje de abscisa y los valores de  $G(\omega)$  para cada  $\omega$  en el eje de ordenada.

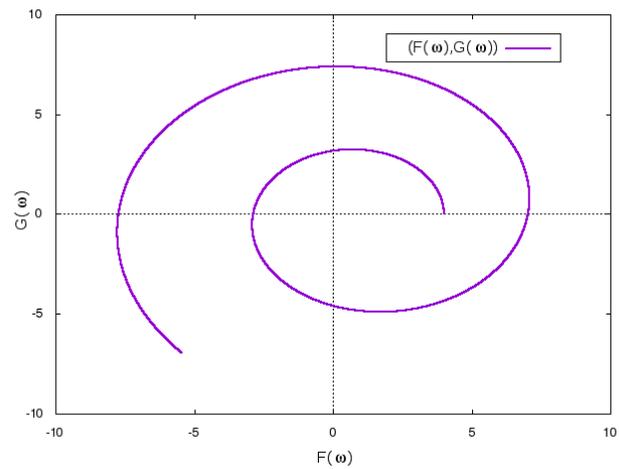
Si se realiza un gráfico paramétrico de los valores de  $(F(\omega), G(\omega))$ , se puede notar que esto depende del valor de  $\omega$ , entonces si se grafica de esta forma para  $\omega > 0$ , se tiene un gráfico de un caracol, pero si se va graficando hasta cierto valor de  $\omega$  se puede ver cómo van apareciendo las raíces de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  y cómo se intercalan. Para poder explicar esto, vamos a utilizar un ejemplo que corresponde a un SLR de primer orden. Así en la Figura 24(a) aparece primeramente una raíz de  $G(\omega)$  en donde  $F(\omega)$  tiene valor positivo; luego aparece una raíz de  $F(\omega)$  donde  $G(\omega)$  es positivo también, luego siguiendo lo mismo, en la Figura 24(b) continuando para un valor de  $\omega$  mayor al anterior, se tiene nuevamente una raíz de  $G(\omega)$  en donde  $F(\omega)$  tiene valor negativo, y seguido a esto se tiene una raíz de  $F(\omega)$  donde  $G(\omega)$  es negativo también; y si continuamos con el mismo procedimiento, la Figura 24(c) muestra que para un valor de  $\omega$  aún mayor al utilizado anteriormente, aparece nuevamente una raíz de  $G(\omega)$  en donde  $F(\omega)$  es positivo, y así se vuelve a repetir el mismo comportamiento, es decir se completó una vuelta completa que seguirá a medida que el valor de  $\omega$  aumenta.



(a) Primera raíz de  $G(\omega) = 0$  con  $F(\omega) > 0$ , seguida de una raíz de  $F(\omega) = 0$  con  $G(\omega) > 0$ .



(b) Segunda raíz de  $G(\omega) = 0$  con  $F(\omega) < 0$ , seguida de una raíz de  $F(\omega) = 0$  con  $G(\omega) < 0$ .



(c) Aparecen nuevas raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$ .

**Figura 24.** Ejemplo 1 de representación paramétrica de  $(F(\omega), G(\omega))$  para  $\omega \geq 0$

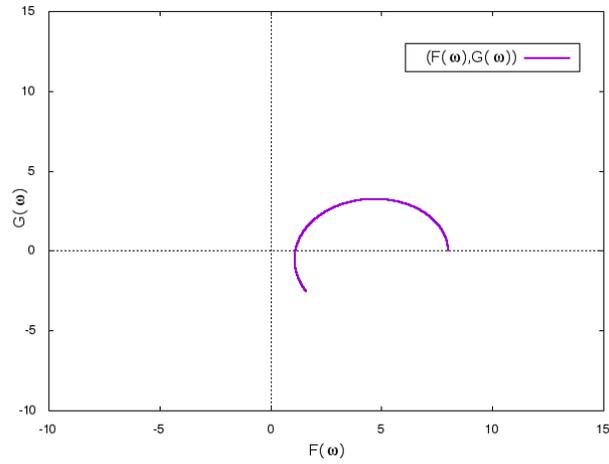
Lo que se puede interpretar con lo visto en la Figura 24 es que se puede ver que el hecho de que van apareciendo las raíces de manera intercalada y además que el valor de la función que no es cero en esa raíz va cambiando de signo es un equivalente a la condición de entrelazado de raíces que menciona el teorema de Pontryagin. Pero además el número de vueltas que completa la gráfica para cierto valor de  $\omega > 0$  tiene relación con el número de raíces del que habla el criterio 3 del teorema de Pontryagin.

La Figura 25 muestra la representación paramétrica de  $(F(\omega), G(\omega))$  para otro SLR de primer orden, para este se sigue el mismo procedimiento del ejemplo anterior, es decir, se grafica para valores de  $\omega > 0$ , donde también aparece un gráfico de un caracol. La Figura 25(a) muestra la gráfica hasta cierto valor de  $\omega > 0$  donde aparece primeramente una raíz de  $G(\omega)$  en donde  $F(\omega)$  tiene valor positivo, pero posterior a esto vuelve a aparecer otra raíz de  $G(\omega)$  en donde  $F(\omega)$  es positivo, esto es diferente al ejemplo anterior, y se puede interpretar como ausencia de entrelazado de raíces (con referencia al teorema de Pontryagin), y esto significa que este SLR no es estable. En las figuras 25(b) y 25(c) se puede ver que continuando la gráfica para valores de  $\omega$  mayores, van apareciendo de manera intercalada las raíces de  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$ , por lo que seguirá así para otros valores de  $\omega$ . Este ejemplo es interesante ya que evidencia que con esta representación geométrica se puede verificar la inestabilidad del SLR.

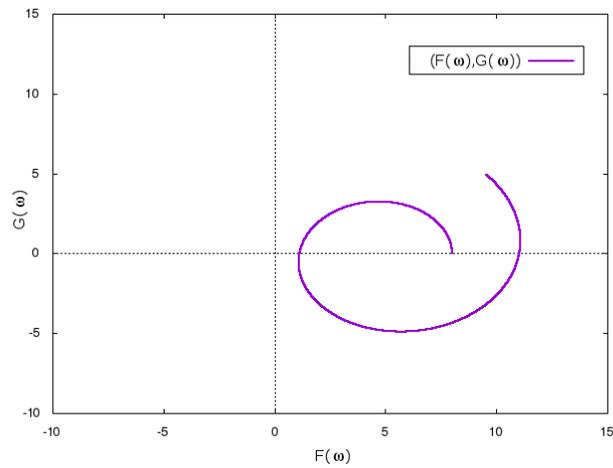
### **6.3. Análisis de la cota máxima de verificación del entrelazado de raíces de $F(\omega) = 0$ y $G(\omega) = 0$ .**

Verificar la estabilidad asintótica de los SLR conlleva a comprobar el cumplimiento de los criterios del teorema de Pontryagin. Uno de los criterios indica que el intervalo para verificar el número de raíces de las funciones de la parte real y la parte imaginaria de la función característica del SLR es  $-2K\pi + \eta \leq \omega \leq 2K\pi + \eta$ , donde  $K$  debe ser lo suficientemente grande, esto hace que el intervalo de verificación pueda ser muy grande, pero para poder acotar esto se puede utilizar el resultado del criterio de estabilidad algorítmico que presenta el Teorema 2.2 en la sección 2.5.

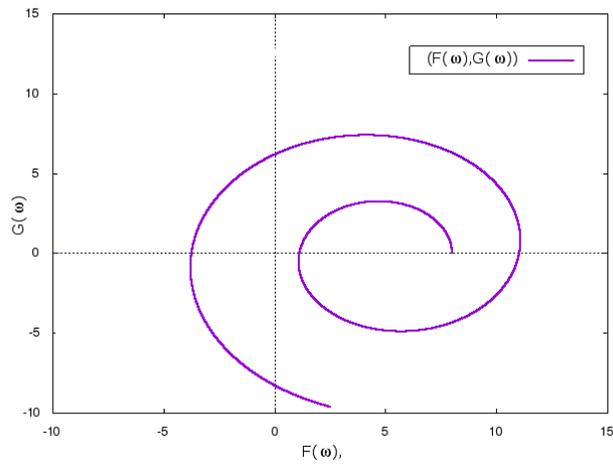
El criterio de estabilidad algorítmico desarrollado en (Cahlon y Schmidt, 2007) establece una cota máxima donde se debe verificar la condición de entrelazado entre las raíces de las funciones de parte real  $F(\omega) = 0$  y parte imaginaria  $G(\omega) = 0$ . El intervalo



(a) Primera raíz de  $G(\omega) = 0$  con  $F(\omega) > 0$ , seguida de otra raíz de  $G(\omega) = 0$  con  $F(\omega) > 0$ .



(b) Tercera raíz de  $G(\omega) = 0$  con  $F(\omega) > 0$ , aún no aparece raíz de  $F(\omega) = 0$ .



(c) Aparece la primera raíz de  $F(\omega) = 0$ , luego de 3 raíces seguidas de  $G(\omega) = 0$ .

**Figura 25.** Ejemplo 2 de representación paramétrica de  $(F(\omega), G(\omega))$  para  $\omega \geq 0$

de verificación es para valores de  $\omega$  en  $(0, 2N\pi)$  para el caso de sistemas de orden impar, y en  $(0, 2N\pi + \pi/2)$  para el caso de sistemas de orden par, donde el valor de  $2N$  se calcula como lo indica el Teorema 2.2. La verificación se realiza nada más en ese intervalo debido a que fuera de este se asegura el entrelazado de raíces, y esto se puede explicar mejor utilizando el resultado mostrado en la sección 5.1, donde las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  son de la forma

$$\begin{aligned} F(\omega) &= -\alpha \operatorname{sen}(\omega) + \beta \operatorname{cos}(\omega) + \gamma, \\ G(\omega) &= \beta \operatorname{sen}(\omega) + \alpha \operatorname{cos}(\omega) + \delta, \end{aligned} \quad (203)$$

y utilizando las identidades trigonométricas (106), pueden expresarse como

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{cos}(\omega + \operatorname{atan2}(\alpha, \beta)) + \gamma, \\ G(\omega) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen}(\omega + \operatorname{atan2}(\alpha, \beta)) + \delta. \end{aligned} \quad (204)$$

Los coeficientes polinomiales  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  pueden obtenerse mediante las fórmulas que se muestran en la Tabla 1; si se analiza el grado polinomial de estos coeficientes se tiene que para

- el caso  $n$  impar: el grado polinomial de  $\alpha$  es mayor que el de  $\beta$ ,
- el caso  $n$  par: el grado polinomial de  $\alpha$  es menor que el de  $\beta$ .
- el caso par e impar, el grado polinomial del término  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  es mayor que el de  $\gamma$  y  $\delta$ .

De esto se puede interpretar que llegado cierto valor  $\omega^*$ , el argumento de las funciones trigonométricas de (204)  $\omega + \operatorname{atan2}(\alpha, \beta)$  tenderá a

- $\omega^*$  para el caso  $n$  impar,
- $\omega^* + \pi/2$  para el caso  $n$  par.

Lo interesante también está en el efecto del valor de los coeficientes  $\gamma$  y  $\delta$ , los cuales son términos independientes en cada función, y hacen que las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  se desplacen verticalmente, al punto que pueden dejar de entrelazarse debido a esto.

Se puede ver que las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  de (204) para cierto valor de  $\omega^*$  tenderán a

$$\begin{aligned} F(\omega^*) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\omega^*), \\ G(\omega^*) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sen(\omega^*), \end{aligned} \quad (205)$$

para el caso impar y a

$$\begin{aligned} F(\omega^*) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\omega^* + \pi/2) = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sen(\omega^*), \\ G(\omega^*) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sen(\omega^* + \pi/2) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\omega^*), \end{aligned} \quad (206)$$

para el caso par. Esto explica que para ambos casos las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  siempre se entrelazan ya que poseen la misma amplitud y un desfase de  $\pi/2$ . Por este motivo es que no es necesario verificar el entrelazado para todos los valores de  $\omega$ , basta con hacerlo en un intervalo.

#### 6.4. Análisis desde el enfoque matricial mediante la ecuación característica.

Considérese el sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = Bx(t - \tau) \quad (207)$$

donde  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ . En (Hara y Sugie, 1996) se define el criterio de estabilidad para el sistema (207) en términos de la traza de  $B$ , el determinante de  $B$  y el retardo  $\tau$ ; esto se expone en el Teorema 2.5 de la sección 2.7.

Este criterio de estabilidad se prueba utilizando el hecho de que la solución cero de (207) es asintóticamente estable si y sólo si todas las raíces de la ecuación característica para (207) se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo. La ecuación característica para (207) es de la forma

$$\det(\lambda I - B) = 0, \quad (208)$$

donde  $\lambda$  representa los valores propios de  $B$ , e  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es la matriz identidad.

Luego dado un sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = Cx(t) + Bx(t - 1) \quad (209)$$

donde  $B, C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  están dados por

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

su ecuación característica está dada por

$$\det(\lambda I - C - Be^{-s}) = 0. \quad (210)$$

Desarrollando queda que

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})e^{-2s} + [c_{11}b_{22} + c_{22}b_{11} - c_{21}b_{12} - c_{12}b_{21} - (b_{22} - b_{11}s)]e^{-s} + [s^2 - (c_{22} + c_{11})s - c_{21}c_{12} + c_{11}c_{22}] = 0, \quad (211)$$

y multiplicando por  $e^{2s}$

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + [c_{11}b_{22} + c_{22}b_{11} - c_{21}b_{12} - c_{12}b_{21} - (b_{22} - b_{11}s)]e^s + [s^2 - (c_{22} + c_{11})s - c_{21}c_{12} + c_{11}c_{22}]e^{2s} = 0. \quad (212)$$

Se puede observar que es posible escribir esto en términos de determinantes y trazas de las matrices  $B$  y  $C$ , y de una combinación de columnas de las matrices. Así queda que (212) es equivalente a

$$\det B + (\det(C_1B_2) + \det(B_1C_2) - \text{tr} B s) e^s + (\det C - \text{tr} C s + s^2) e^{2s} = 0. \quad (213)$$

donde

$$C_1B_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

$$B_1C_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} \\ b_{21} & c_{22} \end{bmatrix};$$

es decir,  $C_1B_2$  es una matriz formada por la primera columna de  $C$  y la segunda columna de  $B$  mientras que  $B_1C_2$  está formada por la primera columna de  $B$  y la segunda

columna de  $C$ .

Ahora si se tiene en cuenta el SLR de segundo orden (153), de la forma

$$\dot{x}(t) = -a_{0,0}x(t) - a_{0,1}x(t-1) - a_{1,0}\dot{x}(t) - a_{1,1}\dot{x}(t-1). \quad (214)$$

puede representarse en forma matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0,0} & -a_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{0,1} & -a_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix}; \quad (215)$$

y haciendo relación con lo obtenido en (213), donde en este caso las matrices  $B$  y  $C$  son

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{0,1} & -a_{1,1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0,0} & -a_{1,0} \end{bmatrix},$$

se puede decir que la ecuación característica de (215) es

$$(a_{0,1} + a_{1,1}s)e^s + (a_{0,0} + a_{1,0}s + s^2)e^{2s} = 0. \quad (216)$$

la cual es equivalente a:

$$(\det(B_1C_2) - \text{tr}Bs)e^s + (\det C - \text{tr}Cs + s^2)e^{2s} = 0. \quad (217)$$

De esta forma se puede ver que también se logra obtener la expresión matemática de la ecuación característica de (215) en términos de los determinantes y las trazas de las matrices involucradas.

## 6.5. Resumen.

En el capítulo de discusiones se realizó primeramente la comparación de los resultados obtenidos en este trabajo de tesis con el teorema de Hayes de la sección 2.6, donde se pudo ver que se obtiene un resultado más simple que el del Teorema

2.3. También se realizó una comparación con el ejemplo de aplicación del teorema de Pontryagin, desarrollado en la sección 2.4.1 donde se pudo obtener el mismo resultado. Luego, en la sección 6.2 se presentó una interpretación gráfica del teorema de Pontryagin utilizando las funciones  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  como parámetros, donde se pudieron observar gráficas en forma de caracol y que existe una relación con el análisis de estabilidad que implica el entrelazado de las raíces de dichas funciones. Un análisis que tiene relación con el criterio 3 del teorema de Pontryagin se mostró en la sección 6.3, donde se hace un análisis matemático de dichas funciones y de los términos que los componen para así lograr encontrar la cota máxima de verificación del entrelazado de raíces de  $F(\omega) = 0$  y  $G(\omega) = 0$ . Y por último, en la sección 6.4 se utiliza la representación matricial de los SLR para poder analizarla desde ese enfoque. Estos análisis serán de utilidad para los trabajos futuros que tienen relación con el análisis de estabilidad de los SLR.

## Capítulo 7. Conclusiones

---

En este trabajo de tesis se ha mostrado el análisis de estabilidad de los sistemas lineales con retardo (SLR). Se abordaron los problemas concernientes al estudio de la estabilidad cuando aparece el término de retardo en el sistema, tales como la existencia del número infinito de raíces de la función característica. A modo de un mejor entendimiento, se expusieron los conceptos básicos de dichos problemas y los trabajos existentes en la literatura actual que trataron dichos problemas.

En el presente trabajo primeramente se presentó un resultado algorítmico para el análisis de estabilidad asintótica de los SLR con retardo simple, de características particulares, descomponiendo al sistema en dinámicas más sencillas de analizar, el cual tiene como metodología base la separación de la parte controlable y la parte no controlable de un SLR en el que la parte retardada se considera como una entrada de control; con esto es posible reducir la dificultad en el análisis de estabilidad en sistemas de orden elevado. Los resultados obtenidos luego de este, tienen como base el teorema de Pontryagin (Pontryagin, 1942), el cual provee condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para los SLR. La desventaja de utilizar directamente este resultado para el análisis de estabilidad de los SLR es que se vuelve muy complicado, debido a que se tratan de ecuaciones trascendentales; además si se aplica para múltiples retardos, aparecerían términos armónicos, lo que hace que sea aún más difícil.

Con este trabajo de tesis se busca disminuir la dificultad en el análisis de estabilidad de los SLR, de esta forma, en cumplimiento con los objetivos propuestos se logró obtener la caracterización de las regiones de estabilidad para los SLR de primer y segundo orden con retardo único; las regiones obtenidas son paramétricas, es decir, dependen de los valores de los parámetros del sistema, de esta manera es más fácil comprobar la estabilidad de los SLR de este tipo mediante la verificación de pertenencia a dichas regiones, sin tener que lidiar con funciones trascendentales. Además las condiciones de estabilidad para los SLR de orden  $n$  también se presentaron, a partir de las cuales se pueden obtener las regiones de estabilidad para cada caso.

Otro resultado que cumple con los objetivos de este trabajo de tesis es el conjunto de fórmulas genéricas de los coeficientes polinomiales de la función cuasipolinomial característica relacionada con cada SLR de orden  $n$ ; estas fórmulas son útiles debido

a que teniendo los valores de los parámetros del sistema y el valor del orden  $n$  se obtienen los coeficientes que dependen de  $\omega$  y estos pueden utilizarse para la aplicación de las condiciones de estabilidad obtenidas en esta tesis.

Finalmente, se puede decir que los resultados presentados disminuyen la dificultad de análisis de estabilidad de los SLR, ya que resulta en expresiones más simples que las que se obtienen al aplicar directamente el teorema de Pontryagin, y evita tener que comprobar la estabilidad de manera algorítmica como lo hacen en (Cahlon y Schmidt, 2007).

### **7.1. Trabajo futuro.**

Los resultados de esta tesis pueden ser de ayuda para continuar con el estudio de la estabilidad de los SLR. Uno de los trabajos que puede realizarse es realizar una extensión del criterio de estabilidad de Nyquist para los SLR, el cual al ser un criterio de estabilidad necesario y suficiente, podría ser útil para relacionarlo con el teorema de Pontryagin. Esto puede enlazarse con el análisis realizado en la sección 6.2 donde se realiza una interpretación geométrica del teorema de Pontryagin, utilizando como apoyo los resultados de los trabajos de Cahlon y Schmidt (Cahlon y Schmidt, 2007).

Otro trabajo que se relaciona con el análisis de estabilidad de los SLR es el estudio del intervalo de verificación de la condición que menciona el teorema de Pontryagin, es decir, obtener una cota máxima. El análisis realizado en la sección 6.3 puede llevar a obtener una cota máxima de verificación. El trabajo a futuro se trata en encontrar esta cota de verificación de entrelazado, la cual puede tener relación con las raíces de los coeficientes polinomiales  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  dados en la Tabla 1.

Además, en la sección 6.4 se hace una introducción a otro posible estudio a futuro, que consiste básicamente en buscar si la representación matricial del SLR podría ayudar a encontrar condiciones de estabilidad en función a los determinantes y trazas de sus matrices constantes así como se pudo ver en el resultado presentado en (Hara y Sugie, 1996).

## Literatura citada

- Baptistini, M. y Táboas, P. (1997). On the stability of some exponential polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **205**(1): 259–272.
- Cahlon, B. y Schmidt, D. (2000). On stability of systems of delay differential equations. *Journal of computational and applied mathematics*, **117**(2): 137–158.
- Cahlon, B. y Schmidt, D. (2001). Asymptotic stability of linear delay differential equations. *Dynamic Systems and Applications*, **10**(1): 63–88.
- Cahlon, B. y Schmidt, D. (2004). Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **170**(1): 79–102.
- Cahlon, B. y Schmidt, D. (2007). Stability criteria for certain high odd order delay differential equations. *Journal of computational and applied mathematics*, **200**(1): 408–423.
- Čermák, J. (2015). Stability conditions for linear delay difference equations: a survey and perspectives. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, **63**(1): 1–29.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer.
- Gu, K., Chen, J., y Kharitonov, V. L. (2003). *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media.
- Halevi, Y. (1996). Reduced-order models with delay. *International journal of control*, **64**(4): 733–744.
- Hara, T. y Sugie, J. (1996). Stability region for systems of differential-difference equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, **39**(1): 69–86.
- Hayes, N. (1950). Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**(3): 226–232.
- Jarlebring, E. y Damm, T. (2007). The lambert w function and the spectrum of some multidimensional time-delay systems. *Automatica*, **43**(12): 2124–2128.
- Kolmanovskii, V. y Myshkis, A. (2012). *Applied theory of functional differential equations*, Vol. 85. Springer Science & Business Media.
- Kolmanovskii, V. y Myshkis, A. (2013). *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*, Vol. 463. Springer Science & Business Media.
- Lee, E., Neftci, S., y Olbrot, A. (1982). Canonical forms for time delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27**(1): 128–132.
- Levin, S. A. y May, R. M. (1976). A note on difference-delay equations. *Theoretical Population Biology*, **9**(2): 178–187.
- Malek-Zavarei, M. y Jamshidi, M. (1987). *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*. Elsevier Science Inc. New York, NY, USA.
- Matsunaga, H. (2007). Exact stability criteria for delay differential and difference equations. *Applied mathematics letters*, **20**(2): 183–188.

- Maxima, M. (2016). A computer algebra system. version 5.34. 1, 2014.
- Niculescu, S.-I. (2001). *Delay effects on stability: a robust control approach*, Vol. 269. Springer Science & Business Media.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Pontryagin, L. (1942). On zeros of some transcendental functions. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, **6**(3): 115–134.
- Sakata, S. (1998). Asymptotic stability for a linear system of differential-difference equations. *Funkcialaj Ekvacioj Serio Internacia*, **41**: 435–450.