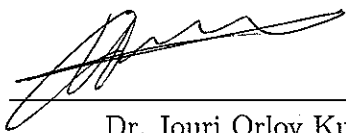


TESIS DEFENDIDA POR

**Iliana Marlen Meza Sánchez**

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



Dr. Iouri Orlov Kuchina  
*Codirector del Comité*



Dr. Luis Lupak Aguilar Bustos  
*Codirector del Comité*



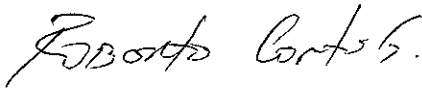
Dr. Arturo Zavala Río  
*Miembro del Comité*



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos  
*Miembro del Comité*



Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
*Miembro del Comité*



Dr. Roberto Conte Galván  
*Coordinador del programa de  
posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*



Dr. David Hilario Covarrubias Rosales  
*Director de Estudios de Posgrado*

30 de Noviembre de 2011

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

---

**CONTROL ROBUSTO DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA  
MECÁNICO SUBACTUADO DE TRES GRADOS DE LIBERTAD**

**TESIS**

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS**

Presenta:

**ILIANA MARLEN MEZA SÁNCHEZ**

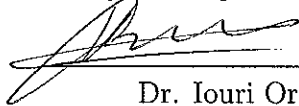
Ensenada, Baja California, México, Noviembre de 2011

---

RESUMEN de la tesis de **ILIANA MARLEN MEZA SÁNCHEZ**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, Noviembre de 2011.

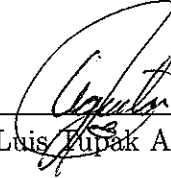
**CONTROL ROBUSTO DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA  
MECÁNICO SUBACTUADO DE TRES GRADOS DE LIBERTAD**

Resumen aprobado por:



Dr. Iouri Orlov Kuchina

Codirector de Tesis



Dr. Luis Rupak Aguilar Bustos

Codirector de Tesis

En el presente trabajo de tesis se presenta una solución al problema de control de seguimiento para un sistema mecánico subactuado de tres grados de libertad basada en la planificación de movimiento. Contrario a lo que sucede con mecanismos completamente actuados, en un sistema subactuado, el problema de seguimiento de trayectorias constituye un reto debido a que no es posible controlar cada grado de libertad en forma directa. Para resolver este problema, se propone un esquema de solución basado en dos etapas. En la primera etapa, se definen trayectorias a través del diseño por restricciones virtuales holonómicas (VHCA - Virtual Holonomic Constraints Approach). Las trayectorias establecidas en esta etapa, denominadas restricciones virtuales holonómicas, se redefinirán como las trayectorias objetivo a ser impuestas por medio de algoritmos de control robustos, con la finalidad de obtener en el mecanismo un comportamiento deseado. En la segunda etapa, la estabilidad del sistema en lazo cerrado es analizada a través de la dinámica reducida que se obtiene al imponer las restricciones virtuales holonómicas sobre el sistema. Se presentan resultados numéricos y experimentales que demuestran la robustez y efectividad del esquema de solución propuesto.

**Palabras Clave:** sistema subactuado, restricciones virtuales holonómicas, estabilización, seguimiento de trayectorias, modos deslizantes, control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida.

**ABSTRACT** of the thesis presented by **ILIANA MARLEN MEZA SÁNCHEZ**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of **DOCTOR IN SCIENCES** in **ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS** with orientation in **INSTRUMENTATION AND CONTROL**. Ensenada, Baja California, November 2011.

## **ROBUST MOTION CONTROL FOR A THREE DEGREES OF FREEDOM UNDERACTUATED MECHANICAL SYSTEM**

In this work, a motion planning-based solution to a tracking control problem is developed for an underactuated mechanical system of three degrees of freedom. In contrast to fully actuated systems, the lack of possibility to straightforwardly track each degree of freedom becomes a challenging task. A two-step procedure has been established in order to provide a feasible solution to the afore-mentioned problem. At the first step, a target motion to be enforced by a feedback control law is determined based on the Virtual Holonomic Constraints Approach (VHCA). Then, the resulting constraints are achieved by designing an appropriate robust control algorithm to impose desired behavior on the underlying system. At the second step, the stability of the closed-loop system is analyzed by means of that of the reduced-order dynamics confined to the virtual holonomic constraint. Numerical and experimental results are presented to confirm robustness and effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** underactuated system, virtual holonomic constraints, stabilization, tracking, sliding modes, output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control.

---

*A mis padres*

*A mi hermana Chio*

*A Clarisa*

*A La Pandilla*

# Agradecimientos

En primera instancia quisiera agradecer a mi familia y amigos a los cuales les he dedicado este trabajo de tesis. A mis padres Laura y Roberto, mi hermana Rocío, Clarisa, Laura, Lili, Karmel, Israel, Beto, Maggy y Ale. A todos ellos les doy gracias por su paciencia y cariño al apoyarme en otra etapa más de mi vida ya que sin ustedes, esto no habría sido posible.

De manera especial, quiero agradecer a mis codirectores de tesis, Dr. Iouri Orlov Kuchina y Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos por sus acertados comentarios que sirvieron de guía para la obtención del presente trabajo de tesis.

A Dr. Joaquín Álvarez Gallegos y Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez, por el apoyo recibido durante mi estancia en el programa de doctorado y por lo aprendido en el ciclo de revisión de tesis.

A Dr. Arturo Zavala Río, por su apoyo incondicional y por sus oportunos comentarios como sinodal externo de mi comité de tesis.

A mis amigos y compañeros de CICESE. De manera especial a M.C. José Ricardo Cuesta García por su apoyo en la rehabilitación del sistema mecánico utilizado en este trabajo de tesis y al Dr. Manuel Moisés Miranda Velasco por los consejos recibidos durante el tiempo que coincidimos siendo aún estudiante doctoral en CICESE.

Al CONACyT y al CICESE por su apoyo económico.

---

# Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Tablas	x
<b>I. Introducción</b>	<b>1</b>
I.1 Antecedentes . . . . .	5
I.2 Objetivos . . . . .	6
I.3 Metodología de solución . . . . .	6
I.4 Organización del trabajo de tesis . . . . .	8
I.5 Aportaciones . . . . .	9
<b>II. Helicóptero subactuado de 3-GDL: modelado y sistema de control</b>	<b>12</b>
II.1 Modelo dinámico simplificado . . . . .	14
II.2 Modelo dinámico de Newton-Euler . . . . .	16
II.3 Modelo dinámico de Newton . . . . .	19
II.4 Resumen . . . . .	21
<b>III. Observadores de velocidad de estructura variable</b>	<b>23</b>
III.1 Modelo dinámico simplificado . . . . .	23
III.1.1 Observador de velocidad para ángulo de elevación por modos deslizantes . . . . .	24
III.1.2 Observadores de velocidad para ángulos de dirección y rotación por modos deslizantes . . . . .	28
III.2 Modelo dinámico de Newton . . . . .	29
<b>IV. Control de posición: solución al problema de estabilización.</b>	<b>32</b>
IV.1 Formulación del problema . . . . .	32
IV.2 Control por modos deslizantes de segundo orden utilizando el modelo dinámico simplificado . . . . .	33

---

## Contenido (continuación)

	Página
IV.2.1 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para el ángulo de elevación . . . . .	33
IV.2.2 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para los ángulos de dirección y rotación . . . . .	34
IV.2.3 Síntesis con retroalimentación de salida . . . . .	37
IV.2.4 Resultados numéricos . . . . .	37
IV.3 Control por modos deslizantes de segundo orden utilizando el modelo dinámico de Newton . . . . .	38
IV.3.1 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para el ángulo de elevación . . . . .	38
IV.3.2 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para los ángulos de dirección y rotación . . . . .	41
IV.3.3 Síntesis con retroalimentación de salida . . . . .	45
IV.3.4 Resultados numéricos . . . . .	46
<b>V. Control de movimiento: seguimiento de trayectorias</b>	<b>49</b>
V.1 Control $\mathcal{H}_\infty$ con retroalimentación de salida utilizando el modelo simplificado . . . . .	50
V.1.1 Trayectoria deseada . . . . .	52
V.1.2 Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	53
V.1.3 Resultados numéricos . . . . .	55
V.2 Control $\mathcal{H}_\infty$ con retroalimentación de salida utilizando el modelo de Newton-Euler . . . . .	60
V.2.1 Trayectoria deseada . . . . .	60
V.2.2 Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	61
V.2.3 Resultados numéricos . . . . .	63
V.3 Control por modos deslizantes de segundo orden utilizando el modelo de Newton . . . . .	66
V.3.1 Trayectoria deseada . . . . .	68
V.3.2 Control por modos deslizantes para los ángulos de elevación $\theta$ y dirección $\phi$ . . . . .	69
V.3.3 Síntesis con retroalimentación de salida . . . . .	71
V.3.4 Resultados numéricos . . . . .	72
V.3.5 Resultados experimentales . . . . .	74
V.4 Resumen . . . . .	76
<b>VI. Conclusiones</b>	<b>79</b>
VI.1 Trabajo futuro . . . . .	83
<b>REFERENCIAS</b>	<b>85</b>



## Contenido (continuación)

	Página
A. Control $\mathcal{H}_\infty$ con retroalimentación de salida	91
A.1 Solución al problema de control $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas variantes en el tiempo	92
A.1.1 Consideraciones básicas y enunciado del problema . . . . .	92
A.1.2 Solución local en espacio de estados . . . . .	94

---

## Lista de Figuras

Figura		Página
1	Prototipo Quanser <sup>®</sup> de helicóptero de 3-GDL. . . . .	13
2	Plataforma experimental. . . . .	14
3	Helicóptero de 3-GDL: Vista frontal. . . . .	15
4	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (4) - (6) sin perturbaciones para estabilización en el origen. . . . .	39
5	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (4) - (6) perturbado para estabilización en el origen. . . . .	40
6	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (15) - (17) sin perturbaciones para estabilización en el origen. . . . .	47
7	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (15) - (17) perturbado para estabilización en el origen. . . . .	48
8	Simulación: Comportamiento del helicóptero de 3GDL (4)-(6) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (96) en $[\theta, \phi]^T$ con $f_1(\psi) = 1$ y $f_2(\psi) = 0$ . . . . .	57
9	Simulación: Comportamiento del helicóptero de 3GDL (4)-(6) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (97) en $[\theta, \phi]^T$ con $f_1(\psi) = \text{sen}(\psi)$ y $f_2(\psi) = 0$ . . . . .	59
10	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (7), (8) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (110) en $[\theta, \phi]^T$ con $f_1(\psi) = 0$ y $f_2(\psi) = \cos(\psi)$ . . . . .	65
11	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (7), (8) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (112) en $[\theta, \phi]^T$ con $f_1(\psi) = \cos(\psi)$ y $f_2(\psi) = 0.5$ . . . . .	67
12	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (129) en $[\theta, \phi]^T$ con $f_1(\psi) = 0.2$ and $f_2(\psi) = 0.1$ . . . . .	73
13	Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (131) en $[\theta, \phi]^T$ con $f_1(\psi) = 0$ y $f_2(\psi) = 0.1 \cos(\psi_1)$ . . . . .	75
14	Experimento: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (133) en $[\theta, \phi]^T$ con $f_1(\psi) = 0$ and $f_2(\psi) = 0.5$ . . . . .	77

- 15 Experimento: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (133) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = 0$  and  $f_2(\psi) = 0.7$ . 78

# Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Valores de los parámetros del prototipo de helicóptero de 3-GDL para el modelo simplificado. . . . .	17
II	Valores de los parámetros del prototipo de helicóptero de 3-GDL para el modelo de Newton. . . . .	21
III	Valores de las funciones $\Gamma_1$ , $\Gamma_2$ para la entrada de control $\tau_2$ . . . . .	43
IV	Valores de las funciones $\alpha(\psi)$ , $\beta(\psi)$ y $\gamma(\psi)$ de la dinámica reducida (115)	68

# Capítulo I

## Introducción

Los modelos utilizados para el diseño de controladores frecuentemente se encuentran derivados de las leyes físicas básicas descritas por un conjunto de ecuaciones diferenciales que permiten definir la dinámica de sistemas eléctricos, mecánicos, termodinámicos, entre otros (Brogliato *et al.*, 2007). Dichas ecuaciones representan una relación entre las derivadas de alguna función o funciones con respecto a una o varias variables independientes denominadas grados de libertad (GDL), véase por ejemplo (Arnold, 1991; Tenenbaum y Pollard, 1985; Kelly *et al.*, 2005).

Uno de los principales retos en el desarrollo de controladores en la cuestión referente a la robustez, es decir, el diseño de algoritmos de control que posean la capacidad de tolerar la existencia de dinámicas no modeladas (como por ejemplo, las incertidumbres paramétricas) y perturbaciones, que ocasionan comportamientos no deseables, sin afectar de manera significativa el desempeño del sistema (Khalil, 1996). Como consecuencia, muchas metodologías de control han sido desarrolladas en la búsqueda de mecanismos de control que permitan diseñar controladores capaces de solventar esta problemática.

Otro ejemplo de los principales problemas a abordar que influyen en el desarrollo de algoritmos de control implica la premisa de que la mayoría de los controladores suponen que se tiene acceso a todo el vector de estados del sistema, esto es, tanto a las variables independientes de interés que corresponden a los grados de libertad del sistema como a sus derivadas; en un sistema mecánico, esto equivale a contar con mediciones tanto de posición como de velocidad, lo cual no se satisface siempre al implementarlos

físicamente. Por lo tanto, es fundamental considerar el desarrollo de observadores que permitan generar los estados necesarios para la implementación del sistema de control en aquellas metodologías en donde el acceso a dichas variables no es posible; sin embargo, esta característica repercute de manera directa en la complejidad del análisis de estabilidad que garantiza un buen desempeño del sistema en toda su estructura. Otra opción para resolver este problema es la utilización de filtros ó la aplicación de alguna metodología que permita la reconstrucción de los estados del sistemas, como por ejemplo, en el caso del control robusto óptimo (Basar y Bernhard, 1991; Basar y Olsder, 1999).

Otro problema importante en ingeniería de control es el desarrollo de métodos de control para sistemas subactuados. Un sistema subactuado se caracteriza por poseer menos actuadores que grados de libertad; algunos ejemplos de estos sistemas son vehículos acuáticos, aeronaves, satélites, robots móviles, robots manipuladores, robots bípedos, entre otros. El estudio de este tipo de sistemas mecánicos es motivado por la necesidad de establecer mecanismos de control sobre una clase de sistemas cuya estabilización es muy difícil de garantizar y que frecuentemente manifiestan una dinámica interna muy compleja. Como consecuencia, los algoritmos desarrollados para su contraparte, esto es, sistemas completamente actuados, no pueden ser aplicados de manera directa en esta clase de mecanismos (Fantoni y Lozano, 2002). La necesidad de garantizar robustez en el desempeño del sistema por parte del algoritmo de control aunado a los inconvenientes inherentes en el control de sistemas subactuados, propician que el problema se vuelva mucho más complicado de resolver. Como resultado, la dinámica del sistema permite la existencia de configuraciones de movimientos que no pueden ser alcanzados por el sistema. De hecho, las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad que no se encuentran actuados imponen restricciones explícitas en las

segundas derivadas de dichas variables de configuración (Shiriaev *et al.*, 2007). Las dinámicas expresadas como restricciones no integrables corresponden a las propiedades no holonómicas del sistema, las cuales restringen de manera geométrica el movimiento en el sistema; un ejemplo claro de estas restricciones se da en el equilibrio dinámico que existe en todos aquellos grados de libertad en los que no es posible aplicar directamente una acción de control (eslabones pasivos) (Arai *et al.*, 1998).

Algunos desarrollos realizados para resolver el problema de control de seguimiento en sistemas subactuados son abordados en (Ortega *et al.*, 2002; Wang-Sheng y Jung-Shan, 2010; Do y Pan, 2009; Banavar y Sankaranarayanan, 2006; Siqueira *et al.*, 2011). Entre los ejemplos de aplicaciones para sistemas mecánicos podemos mencionar diseños para el Pendubot (Fantoni *et al.*, 2000), el Acrobot (Berkemeier y Fearing, 1999), (Olfati-Saber, 2000), (Spong, 1995), robots con ramificaciones (Fukuda y Saito, 1996), (Nakanishi *et al.*, 1997), (Fukuda y Koditschek, 2000), y (Saito *et al.*, 1994), robots gimnastas descritos en (Miyazaki *et al.*, 2001), (Ono *et al.*, 2001) y (Yamakita *et al.*, 2002) apoyados en barras, modelos para robots erguidos de Raibert (Ahmadi y Buehler, 1997), (Canudas-de-Wit *et al.*, 1997), (Francois y Samson, 1998), (Miyazaki *et al.*, 2000), (Raibert, 1986), así como también el robot RABBIT (Chevallereau y Sardain, 2000), (Chevallereau y Aoustin, 2001), (Chevallereau *et al.*, 2003, 2004), (Plestan *et al.*, 2003). Estos sistemas corresponden a cuerpos rígidos planares con  $N$  grados de libertad y  $N - 1$  actuadores conectados en una estructura ramificada tipo árbol, sin cadenas cinemáticas cerradas, y cuya base se encuentra fija a un marco de referencia inercial a través de un pivote, esto es, una unión de revolución subactuada.

Debido a la gran cantidad de dificultades que enfrenta la planificación de movimiento en sistemas robóticos subactuados, tiene sentido considerar el desarrollo, análisis y aplicación de algunas herramientas que faciliten el diseño de algoritmos de control para

este tipo de sistema. Algunos ejemplos de este tipo de metodologías son las restricciones virtuales holonómicas (VHC, por sus siglas en inglés) y las oscilaciones estables inducidas por retroalimentación como los reportados en (Shiriaev *et al.*, 2005, 2006, 2007; Westervelt *et al.*, 2007). A partir de estas definiciones, la estabilización orbital de sistemas mecánicos, refiriéndose al balanceo periódico (Canudas-de-Wit *et al.*, 2002), difiere de las formulaciones típicas de seguimiento donde la trayectoria de referencia a seguir es conocida a priori. Más aún, parte de un análisis del modelo dinámico que permite determinar las condiciones con las cuales este comportamiento es inducido por la ley de control a través de la imposición de trayectorias deseadas en algunos ó todos los grados de libertad del sistema.

De esta forma, el objetivo de control para el balanceo periódico, resulta en un sistema en lazo cerrado, que genera su propia órbita periódica similar a la que produce un oscilador no lineal; por ejemplo, véase (Chevallereau *et al.*, 2003). Además, el sistema en lazo cerrado debe de ser capaz de moverse de una órbita a otra simplemente cambiando los parámetros tales como su frecuencia o su amplitud. En (Orlov *et al.*, 2005) se presenta la estabilización orbital del Pendubot. En (Santesteban *et al.*, 2007) y (Riachy *et al.*, 2007) se describen el control utilizando esta técnica para sistemas mecánicos subactuados con aplicación particular a un péndulo invertido.

De manera particular, este trabajo de tesis se enfoca en el análisis y síntesis de modelos de helicópteros subactuados; específicamente, en el prototipo de la plataforma experimental denominada helicóptero de 3-GDL de la marca Quanser (véase (Quanser, 2002)). A continuación se mencionan los antecedentes y se introducen las características, fundamentos, objetivos, metodología de solución al problema de control de movimiento y contribución del presente trabajo.



## I.1 Antecedentes

Dentro de la literatura, existen varios trabajos realizados sobre la plataforma experimental del helicóptero de tres grados de libertad fabricado por Quanser. En (Tondel y Johansen, 2002) se resolvió el problema de control por retroalimentación de estados utilizando control predictivo lineal, en (Lopez *et al.*, 2006) se describen implementaciones de control predictivo utilizando un modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio. Algunos resultados sobre técnicas de control adaptivo para resolver el problema de control de movimiento se presentan en (Andrievsky *et al.*, 2007). En (García-Sanz *et al.*, 2006) se presentan resultados relativos a la solución de control de regulación sobre el ángulo de cabeceo del helicóptero utilizando un control PID. En (Shan *et al.*, 2005) se presentan resultados para sincronización de trayectorias en tres helicópteros aplicados a un solo grado de libertad. Otros trabajos desarrollados en este tema son por ejemplo (Avila-Vilchis *et al.*, 2003), (Isidori *et al.*, 2003) y (Kiefer *et al.*, 2006).

De manera más reciente podemos enumerar trabajos como los de (Ishutkina, 2004) en donde se desarrolla una plataforma de seguridad para la implementación de algoritmos de control, en (Bayraktar, 2004) se presenta el diseño de algoritmos para la implementación de maniobras agresivas de aterrizaje. En (Starkov *et al.*, 2008) se aplican modos deslizantes para el problema de regulación en un helicóptero de tres grados de libertad utilizando medición de posición, en (Zheng y Zhong, 2011) se presentan resultados para la regulación robusta de un grado de libertad del mecanismo y (Westerbergh *et al.*, 2009), en donde se presenta el desarrollo de un nuevo modelo aplicando restricciones virtuales holonómicas para lograr la estabilización orbital del sistema.

Pese a la numerosa cantidad de trabajos realizado, desde un punto de vista práctico, el diseño de controladores para este tipo de sistemas para control de movimiento sigue siendo un problema abierto. Una de las principales variantes en los estudios realizados

es el modelado del sistema y muy escasos los desarrollos en donde se considera el control de los tres grados de libertad; esto da una clara idea de la complejidad que implica la dinámica de este mecanismo para el diseño e implementación de algoritmos de control.

## **I.2 Objetivos**

El objetivo principal del presente trabajo de tesis es el de diseñar esquemas de control robusto para resolver el problema de control de movimiento para el sistema mecánico subactuado que posee tres grados de libertad y dos entradas de control con la capacidad de atenuar ó rechazar las perturbaciones externas que actúan sobre el sistema. Dicho sistema subactuado es una plataforma experimental de Quanser denominada helicóptero de tres grados de libertad instalada en el laboratorio de control del CICESE.

Los objetivos específicos a resolver son:

1. Resolver el problema de regulación para el sistema mecánico subactuado de tres grados de libertad.
2. Establecer una estrategia de solución para resolver el problema de seguimiento de trayectorias para el sistema mecánico subactuado de tres grados de libertad.
3. Validar numérica y experimentalmente los resultados obtenidos para la plataforma experimental.

## **I.3 Metodología de solución**

La intención del presente trabajo es ilustrar numérica y experimentalmente las soluciones propuestas los problemas de regulación (específicamente, estabilización del sis-

tema en el origen) y seguimiento de trayectorias en el sistema mecánico subactuado de tres grados de libertad.

El problema de regulación ha sido resuelto a través del diseño de algoritmos de control basados en modos deslizantes (Utkin, 1992). Tales controladores han sido desarrollados aprovechando la estructura de los modelos dinámicos del mecanismo, los cuales permiten convertir el problema de estabilizar tres grados de libertad en dos subproblemas en donde una ley de control es diseñada para estabilizar un solo grado de libertad y una segunda ley de control para los dos restantes.

El problema de seguimiento de trayectorias, como se establece en la introducción del presente capítulo, conlleva un desarrollo bastante complejo. Por tal motivo, se introduce la noción de restricciones virtuales que permite especificar una trayectoria deseada en dos grados de libertad y analizar la dinámica resultante de imponer tales comportamientos.

El plan de trabajo a seguir se describe a continuación.

1. Se lleva a cabo un análisis de los resultados más relevantes dentro de la literatura para este sistema y se seleccionan los modelos dinámicos del sistema subactuado que se utilizarán para el diseño de los algoritmos de control.
2. Se diseñan controladores basados en modos deslizantes para resolver el problema de regulación: solución a la estabilización en el origen.
3. Se proponen observadores de velocidad de estructura variable basados en modos deslizantes para tener acceso a todos los estados del sistema.
4. Se obtienen resultados numéricos con respecto al problema de regulación.
5. Análisis y selección de la herramienta adecuada que permita simplificar el problema de control de movimiento: seguimiento de trayectorias. En este caso, se

seleccionó la metodología basada en restricciones virtuales holonómicas propuestas en (Shiriaev *et al.*, 2005) debido a que permite simplificar el problema de control mediante la conversión del sistema original a uno de dinámica reducida fácil de obtener y analizar.

6. Se desarrollaron controladores para seguimiento de trayectorias basados en las teorías de Control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida y Control por modos deslizantes de segundo orden para imponer las trayectorias deseadas definidas al aplicar la metodología basada en restricciones virtuales holonómicas.
7. Se obtienen resultados numéricos y experimentales con respecto al problema de seguimiento de trayectorias.
8. Análisis de la comparación de los resultados obtenidos.

## I.4 Organización del trabajo de tesis

La estructura del presente trabajo de tesis se explica a continuación.

En este primer capítulo se ha presentado la motivación y justificación que originan el presente trabajo de tesis, también se han expuesto los objetivos y la metodología de solución propuesta para la resolución de los objetivos definidos en la sección previa correspondiente. En la siguiente sección de éste capítulo se describen las principales aportaciones, y se enuncian las publicaciones que se desprenden de este trabajo de tesis.

En el Capítulo II, se presenta el desarrollo correspondiente a los tres modelos dinámicos seleccionados de la literatura con respecto a los cuales se diseñaran los algoritmos de control.

En el Capítulo III se describe el desarrollo teórico realizado para el diseño de observadores de velocidad basados en modos deslizantes, los cuales serán utilizados para

tener acceso a todos los estados del sistema y formarán parte de la retroalimentación entre el sistema y los controladores.

El Capítulo IV se describen dos propuestas de algoritmos de control para resolver el problema de regulación, de forma más específica, el problema de estabilización en el origen. Se presentan resultados numéricos y se discuten aspectos importantes sobre la implementación.

El control de movimiento, también denominado seguimiento de trayectorias, es expuesto en el Capítulo V. Se presenta en dos partes: a) definición de la trayectoria deseada aplicando la metodología llamada Restricciones Virtuales Holonómicas (VHC), y b) desarrollo de algoritmos de control encargados de imponer los comportamientos definidos en la primera parte. La parte del desarrollo de los controladores incluye dos metodologías: control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida y control por modos deslizantes de segundo orden retroalimentado con las salidas de su correspondiente observador descrito en el Capítulo III.

Las conclusiones de los resultados numéricos y experimentales obtenidos del presente trabajo de tesis son presentados en el Capítulo VI. Además, también se presentan propuestas de trabajo futuro y áreas abiertas de investigación que no fueron cubiertas en el presente trabajo de tesis.

Finalmente, la bibliografía y apéndices se presentan al final del presente documento de tesis.

## I.5 Aportaciones

La principal aportación del trabajo de tesis consiste en el desarrollo de una metodología para resolver el problema de control de movimiento en el sistema mecánico subactuado que corresponde al helicóptero de 3-GDL de la marca Quanser, a través de la combi-

nación de metodologías de control bien definidas y estudiadas dentro de la literatura actual. Además, se presentan las bases para el estudio del sistema subactuado desde un punto de vista integral; esto es, incluyendo los tres grados de libertad.

Asimismo, parte de las contribuciones expuestas en este trabajo de tesis que ha sido presentada y publicada se enlista a continuación de manera cronológica.

- ▷ **Iliana M. Meza-Sánchez**, Yury Orlov y Luis T. Aguilar. *Periodic Motion Stabilization of a Virtually Constrained 3-DOF Underactuated Helicopter Using Second Order Sliding Modes*. Aceptado para ser presentado en 12th International Workshop on Variable Structure Systems, 12, 13 y 14 Enero, 2012, Bombay, India.
- ▷ **Iliana M. Meza-Sánchez**, Yury Orlov y Luis T. Aguilar. *Stabilization of a 3-DOF Underactuated Helicopter Prototype: Second Order Sliding Mode Algorithm Synthesis, Stability Analysis, and Numerical Verification*. Aceptado para ser presentado en 12th International Workshop on Variable Structure Systems, 12, 13 y 14 Enero, 2012, Bombay, India.
- ▷ **Iliana M. Meza-Sánchez**, Luis T. Aguilar, Anton Shiriaev, Leonid Freidovich y Yury Orlov. *Nonlinear Output Feedback  $\mathcal{H}_\infty$ -Tracking Control of a 3-DOF Underactuated Helicopter*. 18th IFAC World Congress, Agosto 28 – Septiembre 2, 2011, pp. 11145 – 11150, Milán, Italia.
- ▷ **Iliana M. Meza-Sánchez**, Luis T. Aguilar, Anton Shiriaev, Leonid Freidovich and Yury Orlov (2011). *Periodic motion planning and nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  tracking control of a 3-DOF underactuated helicopter*. International Journal of Systems Science, 42:5, 829 – 838. Primera publicación: 05 October 2010 (iFirst). DOI: 10.1080/00207721.2010.517874
- ▷ **Iliana M. Meza-Sánchez**, Luis T. Aguilar, Anton Shiriaev, Leonid Freidovich y

- Yury Orlov. *Planeación de Movimiento Periódico y Control  $\mathcal{H}_\infty$  No Lineal de un Helicóptero de Tres Grados de Libertad*. 1er. Encuentro Internacional Académico y de Investigación – VI Encuentro Regional Académico ERA 2010, Noviembre 10 y 11, 2010. Tijuana, Baja California, México.
- ▷ Yuri Orlov, Luis T. Aguilar y **Marlen Meza**. *Diseño de observador discontinuo para helicóptero de tres grados de libertad*. Congreso Nacional del AMCA 2009 (AMCA 2009) Zacatecas, Zacatecas, Septiembre 30 – Octubre 2, 2009, México.
  - ▷ Orlov Yury, **Meza-Sánchez Marlen** y Aguilar Luis T. *Sliding Mode Velocity-Observer-Based Stabilization of a 3-DOF Helicopter Prototype*. 6th IFAC Symposium on Robust Control Design, June 16 – 18, pp. 179 – 184, 2009. Haifa, Israel.
  - ▷ Konstantin K. Starkov, Luis T. Aguilar, Yury Orlov e **Iliana M. Meza Sánchez**. *Control por Modos Deslizantes de un Sistema Subactuado de Tres Grados de Libertad usando Medición de Posición*. IV Encuentro Regional Académico (ERA 08). Tijuana, B.C. Noviembre 17 y 18, pp. 141 – 146, 2008.

## Capítulo II

# Helicóptero subactuado de 3-GDL: modelado y sistema de control

El presente capítulo tiene como objetivo presentar el modelo y características del prototipo subactuado de Quanser llamado Helicóptero de tres grados de libertad (3-GDL). Este sistema mecánico posee, como su nombre indica, tres grados de libertad denominados elevación, dirección y rotación. Como puede observarse en la Figura 1, la posición del mecanismo está determinada por la posición en el espacio tridimensional del cuerpo en suspensión horizontal. El ángulo de elevación, que será denominado  $\theta(t) \in \mathbb{R}$ , corresponde al cambio en la altitud del cuerpo del helicóptero mientras que el ángulo de dirección, llamado  $\phi(t) \in \mathbb{R}$ , corresponde al movimiento del cuerpo del helicóptero, esto es, el desplazamiento angular del brazo de sustentación con respecto al eje horizontal  $x$ . Finalmente, el ángulo de rotación  $\psi(t) \in \mathbb{R}$  corresponde al movimiento que realiza al girar sobre el eje vertical  $z$ . La posición es medida a través de tres decodificadores ópticos (Avago-Technologies, 2010); los ejes de elevación y rotación poseen una resolución de 4096 ciclos por revolución (CPR), mientras que el eje de dirección posee 8192 CPR. El sistema es controlado a través del voltaje aplicado a dos motores PITTMAN modelo 9234S004 (Allied-Electronics, 2001) que se encuentran en el cuerpo del helicóptero.

Físicamente, el prototipo consiste de una base ó pivote sobre el cual se encuentra montado un brazo horizontal. Dicho brazo posee el cuerpo del helicóptero en un extremo y un contrapeso en el otro. La inclusión del contrapeso como parte del mecanismo permite que los actuadores tengan la fuerza suficiente para mover la estructura que corresponde al cuerpo del helicóptero y de esta forma, reducir los requisitos de potencia



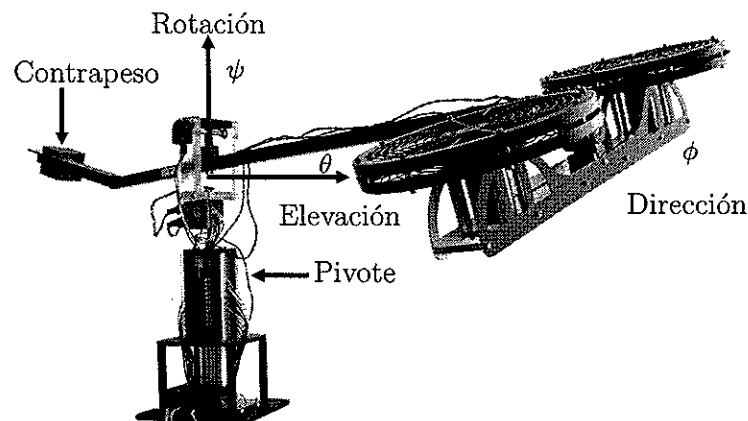


Figura 1. Prototipo Quanser<sup>©</sup> de helicóptero de 3-GDL.

en ambos motores.

La plataforma de control del helicóptero (véase Figura 2), además del sistema mecánico, está integrada por:

- **Computadora.** Procesador Pentium<sup>®</sup> 4 de 2.40Ghz, 1GB de memoria RAM, Disco duro de 40GB, Windows XP Professional<sup>®</sup>, Matlab R2007a<sup>®</sup>, Simulink<sup>®</sup>, Real-Time Windows Target (RTW<sup>®</sup>). Encargada del envío y recepción de datos de la tarjeta de adquisición de datos para la ejecución en tiempo real de los algoritmos de control.
- **Servoamplificadores AMC<sup>©</sup> Modelo 16A20AC(AMC, 2011).** Reciben las señales de salida de la tarjeta de adquisición de datos y suministran la corriente necesaria a los actuadores para mantener el voltaje especificado por la salida del controlador.
- **Tarjeta de adquisición de datos Sensoray<sup>©</sup> Modelo 626(Sensoray, 2004).** Sirve de interfaz entre la computadora y el sistema mecánico. Es la encargada de: a) transformar la salida del controlador en señales analógicas que corresponden a los voltajes que deberán ser suministrados por los servoamplificadores, y de

b) recibir las señales digitales de los decodificadores ópticos del helicóptero que permiten determinar la posición del sistema.

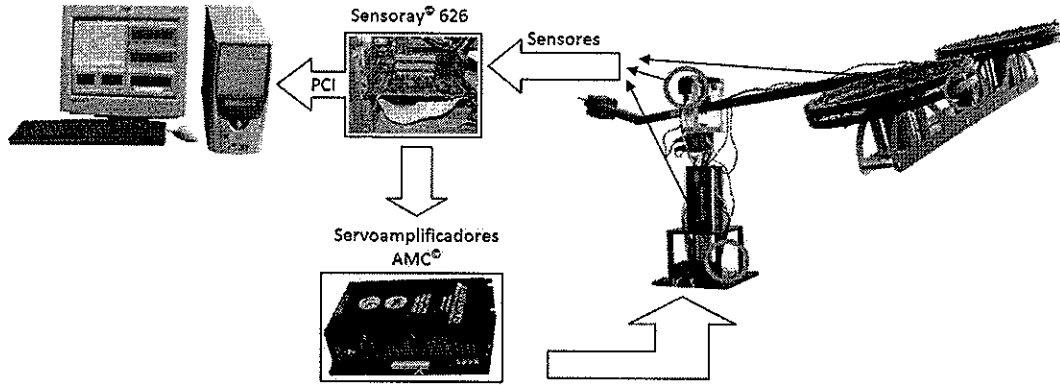


Figura 2. Plataforma experimental.

En las siguientes secciones se describen tres modelos matemáticos utilizados en la realización del presente trabajo de tesis, a partir de los cuales se presentarán los resultados de simulación y experimentales obtenidos en los Capítulos IV y V.

## II.1 Modelo dinámico simplificado

El modelo que se describe a continuación ha sido extraído del manual de Quanser (Quanser, 2002). Cada grado de libertad es analizado de acuerdo a la interacción entre fuerzas que permite su movimiento.

El movimiento en el eje de dirección  $\phi(t) \in \mathbb{R}$  (véase Figura 3) se encuentra definido por la diferencia entre las fuerzas aplicadas a ambos motores; esto es,  $F_\phi(t) = F_f(t) - F_b(t)$ . La dinámica que describe este comportamiento está definida por

$$I_\phi \ddot{\phi} = K_f(V_f - V_b)L_h + w_\phi \quad (1)$$

donde  $I_\phi$  es la inercia sobre el eje de dirección,  $L_h$  es la distancia del motor al centro

de masa entre los dos rotores,  $K_f$  es la fuerza constante de la combinación entre los motores y las propelas, y  $w_\phi$  son las perturbaciones.

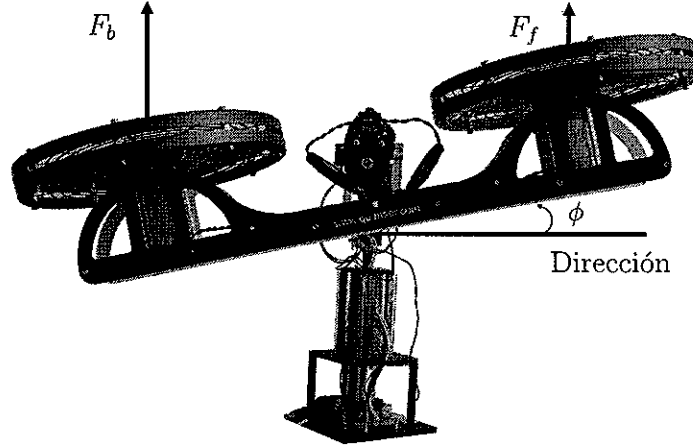


Figura 3. Helicóptero de 3-GDL: Vista frontal.

La dinámica del movimiento en el eje de elevación  $\theta(t) \in \mathbb{R}$ , contrario al eje de dirección, se describe como una respuesta a la fuerza originada por ambos actuadores  $F_\theta(t) = F_f(t) + F_b(t)$  al aplicar voltajes ( $V_f(t) = V_b(t)$ ) a los motores del helicóptero. De esta forma, es necesario vencer la fuerza de gravedad  $F_g$  para que el cuerpo del helicóptero se mantenga suspendido. Esta dinámica es descrita por la siguiente ecuación

$$I_\theta \ddot{\theta} = K_f(V_f + V_b)L_b - F_g L_b + w_\theta \quad (2)$$

donde  $I_\theta$  corresponde al momento de inercia del sistema sobre el eje de elevación,  $L_b$  es la distancia que existe del cuerpo del helicóptero hasta el pivote de giro, y  $w_\theta$  son las perturbaciones.

Por otro lado, es posible observar que el eje de rotación  $\psi(t) \in \mathbb{R}$  es el elemento pasivo del sistema ya que su dinámica está relacionada directamente con el movimiento en el eje de dirección. Esta dinámica está modelada por la ecuación

$$I_\psi \ddot{\psi} = -K_p \text{sen}(\phi)L_b + w_\psi \quad (3)$$

donde  $I_\psi$  es la inercia sobre el eje de rotación,  $K_p$  es la fuerza requerida para mantener el helicóptero en el aire, y  $w_\psi$  son las perturbaciones.

Para obtener las ecuaciones del modelo simplificado que se utilizará para los desarrollos correspondientes dentro del presente trabajo de tesis, se establecen las variables de estado  $\phi_1 = \phi$ ,  $\phi_2 = \dot{\phi}$ ,  $\theta_1 = \theta$ ,  $\theta_2 = \dot{\theta}$ ,  $\psi_1 = \psi$ ,  $\psi_2 = \dot{\psi}$  y definiendo  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  como  $V_f + V_b$  y  $V_f - V_b$ , respectivamente; además de introducir las constantes  $a = K_f L_b I_\theta^{-1}$ ,  $b = F_g L_b I_\theta^{-1}$ ,  $c = K_f L_h I_\phi^{-1}$ , y  $d = K_p L_b I_\phi^{-1}$ , obtenemos que el sistema (1)-(3) está descrito por

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2, \quad \dot{\theta}_2 = a\tau_1 - b + w_1, \quad (4)$$

$$\dot{\phi}_1 = \phi_2, \quad \dot{\phi}_2 = c\tau_2 + w_2, \quad (5)$$

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -d \sin(\phi_1) + w_3 \quad (6)$$

donde  $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$ ,  $w_1 = I_\theta^{-1} w_\theta$ ,  $w_2 = I_\phi^{-1} w_\phi$ , y  $w_3 = I_\psi^{-1} w_\psi$ . Los valores de los parámetros para este modelo se muestran en la Tabla I.

Tabla I. Valores de los parámetros del prototipo de helicóptero de 3-GDL para el modelo simplificado.

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$L_b$	Longitud de la base al cuerpo del helicóptero	0.66	$m$
$L_h$	Distancia del eje de dirección a cada motor	0.177	$m$
$I_\theta$	Momento de inercia del eje de elevación	0.0364	$kg \cdot m^2$
$I_\phi$	Momento de inercia del eje de dirección	0.91	$kg \cdot m^2$
$I_\psi$	Momento de inercia del eje de rotación	0.91	$kg \cdot m^2$
$K_p$	Fuerza mínima requerida para mantener al helicóptero en el aire	0.686	$N$
$F_g$	Aceleración gravitacional	9.81	$m/s^2$

## II.2 Modelo dinámico de Newton-Euler

En el presente trabajo de tesis, también se utiliza el modelo propuesto en (Westerberg *et al.*, 2010) donde las dinámicas del prototipo de laboratorio del helicóptero subactuado de tres grados de libertad es descrito por las ecuaciones de Newton-Euler (Spong *et al.*, 2006)

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = \tau, \quad (7)$$

donde  $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$  son las velocidades angulares,  $I = \text{diag}(I_\phi, I_\theta, I_\psi)$  es la matriz de inercia del cuerpo rígido suspendido que corresponde al cuerpo del helicóptero y cuyos valores son iguales a los del modelo simplificado (véase Tabla I). El vector de pares aplicados pueden definirse como  $\tau = [\tau_x, \tau_y, 0]^T$  considerando que es un sistema subactuado de grado uno con respecto al eje de rotación del mecanismo. Dicha formulación presenta las siguientes simplificaciones: a) la resistencia del aire y la fricción no son modeladas, y b) la fuerza gravitacional no es tomada en cuenta considerando que el cuerpo del helicóptero se encuentra balanceado con un contrapeso en el otro extremo.

De acuerdo con la formulación de Newton-Euler, todas las variables están expresadas con respecto al marco referencial correspondiente al cuerpo del helicóptero. Para la obtención de la velocidad angular este cuerpo con respecto a un marco inercial es necesario calcular la matriz de rotación que transforma las coordenadas de una marco a otro.

Defínanse  $q = [\phi, \theta, \psi]^T$  como los grados de libertad correspondientes a la dirección, elevación y rotación respectivamente; tal vector corresponde a las coordenadas generalizadas para describir la orientación del cuerpo rígido del helicóptero utilizando los ángulos de Euler Z-Y-X. De acuerdo a lo anterior, las velocidades angulares del

helicóptero con respecto a  $q$  se describen como

$$\omega = B_{zyx}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ 1 & 0 & -\text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Las ecuaciones (7), (8) permiten definir al sistema tal que

$$I(B_{zyx}\ddot{q} + \dot{B}_{zyx}\dot{q}) + \omega \times (I\omega) = \tau$$

donde la expresion  $\omega \times (I\omega)$  viene dada de manera explícita por

$$\begin{aligned} \omega \times (I\omega) &= B_{zyx}\dot{q} \times (IB_{zyx}\dot{q}) \\ &= \begin{bmatrix} -s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi} \\ c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi} \\ \dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -I_\phi(s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi}) \\ I_\theta(c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi}) \\ I_\psi(\dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{array}{c|c|c} \phi & \theta & \psi \\ (+) & (-) & (+) \\ \hline -s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi} & c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi} & \dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi} \\ \hline -I_\phi(s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi}) & I_\theta(c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi}) & I_\psi(\dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi}) \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} +[(c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi})I_\psi(\dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi}) - I_\theta(c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi})(\dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi})] \\ -[(-s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi})I_\psi(\dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi}) + I_\phi(s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi})(\dot{\phi} - s_\theta\dot{\psi})] \\ +[(-s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi})I_\theta(c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi}) + I_\phi(s_\phi\dot{\theta} + c_\phi c_\theta\dot{\psi})(c_\phi\dot{\theta} + s_\phi c_\theta\dot{\psi})] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, el sistema (7), (8) puede reescribirse con la ecuación diferencial

$$J(q)\ddot{q} + \vartheta(q, \dot{q}) = \tau \quad (9)$$

donde  $q = [\phi, \theta, \psi]^T$ ,  $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$ .

Los valores calculados para las funciones  $J(q) = IB_{zyx}$  y  $\vartheta(q, \dot{q}) = I\dot{B}_{zyx}\dot{q} + \omega \times (I\omega)$

están definidos por

$$J(q) = \begin{bmatrix} 0 & -I_\phi s_\phi & I_\phi c_\phi c_\theta \\ 0 & I_\theta c_\phi & I_\theta s_\phi c_\theta \\ I_\psi & 0 & -I_\psi s_\theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(q, \dot{q}) = & \begin{bmatrix} -I_\phi c_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} - I_\phi (c_\phi s_\theta \dot{\theta} + s_\phi c_\theta \dot{\phi}) \dot{\psi} + (c_\phi \dot{\theta} + s_\phi s_\theta \dot{\psi}) I_\psi (\dot{\phi} - s_\theta \dot{\psi}) \\ -I_\theta s_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} + I_\theta (c_\phi c_\theta \dot{\phi} - s_\phi s_\theta \dot{\theta}) \dot{\psi} - (-s_\phi \dot{\theta} + c_\phi c_\theta \dot{\psi}) I_\psi (\dot{\phi} - s_\theta \dot{\psi}) \\ I_\psi \dot{\phi} - I_\psi c_\theta \dot{\theta} \dot{\psi} + (-s_\phi \dot{\theta} + c_\phi c_\theta \dot{\psi}) I_\theta (c_\phi \dot{\theta} + s_\phi c_\theta \dot{\psi}) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -(\dot{\phi} - s_\theta \dot{\psi}) I_\theta (c_\phi \dot{\theta} + s_\phi c_\theta \dot{\psi}) \\ (\dot{\phi} - s_\theta \dot{\psi}) I_\phi (-s_\phi \dot{\theta} + c_\phi c_\theta \dot{\psi}) \\ -(c_\phi \dot{\theta} + s_\phi c_\theta \dot{\psi}) I_\phi (-s_\phi \dot{\theta} + c_\phi c_\theta \dot{\psi}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Las expresiones  $c_x$  y  $s_x$  denotan  $\cos(x)$  y  $\sin(x)$  respectivamente, donde  $x$  se refiere al ángulo correspondiente.

### II.3 Modelo dinámico de Newton

El modelo de Newton que se describe a continuación ha sido propuesto en (Ishutkina, 2004) en el cual se aplica la segunda ley de Newton a la razón de cambio con respecto al momento angular y está dado por

$$I_\theta \ddot{\theta} = L \cos(\phi) (V_f + V_b) - Mgl_\theta \sin(\theta + \theta_0) + w_e \quad (12)$$

$$I_\phi \ddot{\phi} = l_h (V_f - V_b) - mgl_\phi \sin(\phi) + w_d \quad (13)$$

$$\begin{aligned} I_\psi \ddot{\psi} = & L \cos(\theta) \sin(\phi) (V_f + V_b) - l_h \sin(\theta) \sin(\phi) (V_f - V_b) \\ & - \frac{1}{2} \rho (\dot{\psi} L)^2 (S + S' \sin(\phi)) + w_r \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\theta(t), \phi(t), \psi(t) \in \mathbb{R}$  corresponden a los ángulos de elevación, dirección y rotación, respectivamente.  $I_\theta, I_\phi$  y  $I_\psi$  son los momentos de inercia del sistema con respecto a

su ángulo correspondiente.  $\theta_0$  se define como el ángulo entre la base y el cuerpo del helicóptero.

Las variables de control son los voltajes de armadura,  $V_f(t)$  y  $V_b(t)$ , correspondientes a los motores especificados como *Front* y *Back*, respectivamente. La notación  $w_e$ ,  $w_d$  y  $w_r$  corresponde a las perturbaciones externas que afectan al sistema.

Los parámetros físicos del helicóptero se definen por:  $M$  es la masa total del prototipo,  $m$  es la masa del cuerpo en suspensión,  $L$  es la distancia del punto de giro hacia el cuerpo del helicóptero,  $g$  es la fuerza de gravedad,  $l_h$  es la distancia del eje de dirección hacia cada motor,  $S$  y  $S'$  son los coeficientes efectivos de arrastre por el área de referencia cuando  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi$ , respectivamente y finalmente,  $\rho$  corresponde a la densidad del aire. Los valores de los parámetros físicos del sistema, extraídos de (Ishutkina, 2004), se muestran en la Tabla II.

Definiendo las entradas de control como  $\tau_1 = V_f + V_b$  y  $\tau_2 = V_f - V_b$ ; a continuación, estableciendo  $\theta = \theta_1$ ,  $\dot{\theta} = \theta_2$ ,  $\phi = \phi_1$ ,  $\dot{\phi} = \phi_2$ ,  $\psi = \psi_1$ ,  $\dot{\psi} = \psi_2$ , y definiendo  $a = LI_\theta^{-1}$ ,  $b = Mgl_\theta I_\theta^{-1}$ ,  $c = l_h I_\phi^{-1}$ ,  $d = mgl_\phi I_\phi^{-1}$ ,  $e = MI_\psi^{-1}$ ,  $f = l_h I_\psi^{-1}$ , el sistema (12)-(14) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= a \cos(\phi_1)\tau_1 - b \sin(\theta_1 + \theta_0) + w_1\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= c\tau_2 - d \sin(\phi_1) + w_2\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= e \cos(\theta_1) \sin(\phi_1)\tau_1 - f \sin(\theta_1) \sin(\phi_1)\tau_2 \\ &\quad - \rho \frac{L^2}{2} (S + S' \sin(\phi_1))\psi_2^2 + w_3\end{aligned}\tag{17}$$

donde  $w_1 = I_\theta^{-1}w_e(t)$ ,  $w_2 = I_\phi^{-1}w_d(t)$  y  $w_3 = I_\psi^{-1}w_r(t)$ .



Tabla II. Valores de los parámetros del prototipo de helicóptero de 3-GDL para el modelo de Newton.

Notación	Descripción	Valor	Unidades
$M$	Masa total	3.57	$Kg$
$m$	Masa del cuerpo	1.15	$Kg$
$L$	Longitud de la base al cuerpo del helicóptero	0.66	$m$
$l_h$	Distancia del eje de dirección a cada motor	0.177	$m$
$l_\theta$	Longitud del péndulo en el eje de dirección	0.014	$m$
$l_\phi$	Longitud del péndulo en el eje de rotación	0.004	$m$
$g$	Aceleración gravitacional	9.81	$m/s^2$
$\rho$	Densidad del aire	1.23	$Kg/m^3$
$S$	Coefficiente efectivo de arrastre por área de referencia cuando $\phi = 0$	0.012	$m^2$
$S'$	Coefficiente efectivo de arrastre por área de referencia cuando $\phi = \pi$	0.168	$m^2$
$I_\theta$	Momento de inercia del eje de elevación	0.036	$kg \cdot m^2$
$I_\phi$	Momento de inercia del eje de dirección	0.93	$kg \cdot m^2$
$I_\psi$	Momento de inercia del eje de rotación	0.93	$kg \cdot m^2$

## II.4 Resumen

Se han presentado tres modelos para el prototipo de helicóptero de 3-GDL, los cuales corresponden a los más relevantes dentro de la literatura.

- El modelo simplificado se encuentra descrita en el manual de Quanser<sup>®</sup> para la plataforma experimental y modela la dinámica esencial del mecanismo.

- El modelo de Newton-Euler corresponde a un modelo sin dimensión propuesto en (Westerberg *et al.*, 2010) que modela de forma más completa la dinámica del sistema mecánico.
- Finalmente, el modelo de Newton, presentado en (Ishutkina, 2004), corresponde a un modelado similar al descrito por el modelo simplificado, en donde se incluye el término adicional  $\rho \frac{L^2}{2} (S + S' \text{sen}(\phi_1)) \psi_2^2$ , el cual corresponde al arrastre (*Drag*) del sistema.

Estos tres modelos forman la base para el diseño de los observadores de velocidad y algoritmos de control diseñados como parte del presente trabajo de tesis.

## Capítulo III

# Observadores de velocidad de estructura variable

En esencia, un sistema de control retroalimentado clásico cuenta con actuadores, encargados de proveer la acción del control al sistema y modificar su comportamiento; y con sensores, encargados de proveer una lectura de las señales que se pretenden controlar. Sin importar la naturaleza del sistema, las mediciones de la razón de cambio en dicho sistema, normalmente no son posibles de manera directa. Para el caso específico de sistemas mecánicos, nos referimos a las velocidades del movimiento de cada eslabón o variable de interés del sistema. Es en este escenario donde surge la importancia del diseño de observadores. La utilización de metodologías como modos deslizantes, parte esencial del presente trabajo de tesis, nos obliga al diseño de éste tipo de estructuras.

En el presente capítulo se presentará el diseño de observadores de velocidad para los modelos dinámicos simplificado y de Newton. Ambas estructuras serán posteriormente utilizadas en el desarrollo de las leyes de control basadas en modos deslizantes para la solución a los problemas de control de posición y seguimiento de trayectorias.

### III.1 Modelo dinámico simplificado

Basados en la dinámica no lineal del modelo simplificado descrito en el capítulo anterior, se propone una familia de observadores de velocidad que se presentan a continuación.

### III.1.1 Observador de velocidad para ángulo de elevación por modos deslizantes

El observador de estructura variable que se propone para el estado  $\theta$ , correspondiente al ángulo de elevación, está definido por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= \hat{\theta}_2 + \mu_\theta \text{sign}(\theta_1 - \hat{\theta}_1) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= au_1 - b + \nu_\theta \text{sign}(\theta_1 - \hat{\theta}_1),\end{aligned}\tag{18}$$

con parámetros  $\mu_\theta, \nu_\theta > 0$ . Claramente, las dinámicas de los errores de observación  $e_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ ,  $e_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$  están descritas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - \mu_\theta \text{sign } e_1, \\ \dot{e}_2 &= -\nu_\theta \text{sign } e_1 + w_1,\end{aligned}\tag{19}$$

con lado derecho discontinuo. De manera subsecuente, se observa que estas ecuaciones son interna y asintóticamente estables. Además, en presencia de perturbaciones externas  $w_1$  con magnitud superiormente acotada  $M_1 > 0$ , se demuestra que los errores de observación decaen de forma asintótica al segmento

$$S_\theta = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 : e_1 = 0, |e_2| \leq \frac{\mu_\theta M_1}{\nu_\theta}\}\tag{20}$$

con un dominio de atracción

$$D_\theta = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 : |e_2| < \frac{\mu_\theta \nu_\theta}{M_1}\},\tag{21}$$

condicionado a que

$$\nu_\theta > \max\{M_1, \mu_\theta M_1\}.\tag{22}$$

**Teorema 1** *Considérese que la dinámica de los errores de observación (19), sujetos a la subordinación de parámetros (22) para alguna  $M_1 > 0$ , son internamente estables en forma asintótica y global. Estas dinámicas llegan al intervalo  $I_{\mu_\theta} = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 :$*

$e_1 = 0, |e_2| < \mu_\theta$  en tiempo finito cuando son inicializadas dentro del dominio (21) y en presencia de perturbaciones externas admisibles  $w_1$  de magnitud menor ó igual a  $M_1$ . Posteriormente, aparecen modos deslizantes dentro del intervalo  $S_{\mu_\theta}$  a lo largo del eje vertical y decaen al segmento (20) cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prueba Primero**, nótese que para el sistema discontinuo del error (19), la condición

$$e_1 \dot{e}_1 = e_1(e_2 - \mu_\theta \text{sign} e_1) \leq -|e_1|(\mu_\theta - |e_2|) < 0$$

garantiza la existencia de modos deslizantes para todo  $e_1 \neq 0$  y  $|e_2| < \mu_\theta$ .

A continuación, considérese la función candidata de Lyapunov  $V(e_1, e_2) = \nu_\theta |e_1| + \frac{1}{2} e_2^2$ . Calculando la derivada temporal de esta función a lo largo de las trayectorias del sistema no perturbado (19), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nu_\theta \text{sign} e_1 (e_2 - \mu_\theta \text{sign} e_1) - e_2 \nu_\theta \text{sign} e_1 \\ &= -\mu_\theta \nu_\theta < 0, \end{aligned} \quad (23)$$

la cual es válida para toda la función excepto en el eje vertical  $e_1 = 0$  donde  $V(e_1, e_2)$  no es diferenciable. La desigualdad (23) asegura que las trayectorias llegan al intervalo de modo deslizante  $I_{\mu_\theta}$  en tiempo finito; de otra manera, dichas trayectorias se dirigirán al origen y llegarán en tiempo finito. Dado que los modos deslizantes en el intervalo  $I_{\mu_\theta}$  se gobiernan por la ecuación estable en forma asintótica

$$\dot{e}_2 = -\frac{\nu_\theta}{\mu_\theta} e_2, \quad (24)$$

esto origina que la dinámica del error (19) sea internamente estable en forma global.

Es importante recordar que la ecuación por modos deslizantes (24) se deriva de acuerdo al método del control equivalente (Utkin, 1992), a través de la sustitución del valor equivalente  $\text{sign}_{eq} e_1$  de la función conmutada  $\text{sign} e_1$ . Esto garantiza la identidad  $\dot{e}_1 = 0$  a lo largo de los modos deslizantes en la segunda ecuación del sistema no

perturbado (19) para  $\text{sign } e_1$ . De hecho, el valor equivalente representa la solución de la ecuación algebraica  $e_2 - \mu_\theta \text{sign } e_1 = 0$  con respecto a  $\text{sign } e_1$  y por lo tanto,  $\text{sign}_{eq} e_1 = \mu_\theta^{-1} e_2$ .

En consecuencia, para la dinámica perturbada (19), la relación (23) se modifica a

$$\dot{V} = -\mu_\theta \nu_\theta + e_2 w_1 \leq -\mu_\theta \nu_\theta + M_1 |e_2|, \quad (25)$$

y para las trayectorias, inicializadas dentro del dominio (21), permanece negativo definido. Así, junto con la dinámica interna, las trayectorias del sistema perturbado (19) llegan al intervalo de modos deslizantes  $I_{\mu_\theta}$  en tiempo finito  $T_{w_1} > 0$ , el cual depende de las perturbaciones  $w_1$ . Las soluciones de las ecuaciones con modos deslizantes en presencia de perturbaciones

$$\dot{e}_2 = -\frac{\nu_\theta}{\mu_\theta} e_2 + w_1 \quad (26)$$

están dadas por

$$e_2(t) = e^{-(t-T_{w_1})} e_2(T_{w_1}) + \int_{T_{w_1}}^t e^{-(t-\tau)} w_1(\tau) d\tau,$$

y tomando en consideración la cota superior  $M_1$  en la magnitud de las perturbaciones admisibles  $w_1$ , estas soluciones se aproximan al segmento (20) cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

Con el fin de interpretar el resultado anterior en términos del observador de velocidad (18), se introduce el siguiente concepto.

**Definición 1** *Considérese el sistema dinámico de segundo orden*

$$\ddot{\eta} = f(\eta, \dot{\eta}) \quad (27)$$

*y un sistema dinámico de la forma*

$$\dot{\hat{\eta}}_1 = f_1(\eta, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \dot{\hat{\eta}}_2 = f_2(\eta, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \quad (28)$$

con variables de estado escalares  $\eta(t)$ ,  $\dot{\eta}(t)$  y  $\hat{\eta}_1(t)$ ,  $\hat{\eta}_2(t)$ , respectivamente, poseen soluciones en el sentido de Filippov para condiciones iniciales arbitrarias. Se dice que el sistema (28) constituye un observador asintótico de velocidad del sistema (27) con un dominio de atracción  $D \subset \mathbb{R}^2$  de errores de observación inicial y una precisión  $\epsilon > 0$  si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq t} |\eta(\tau) - \hat{\eta}_1(\tau)| \leq \epsilon, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq t} |\dot{\eta}(\tau) - \hat{\eta}_2(\tau)| \leq \epsilon \quad (29)$$

para todas las soluciones en el sentido de Filippov  $(\eta, \dot{\eta})$  y  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$  de (27) y (28) tales que los errores de observación iniciales  $(\eta(0) - \hat{\eta}_1(0), \dot{\eta}(0) - \hat{\eta}_2(0))$  están en  $D$ .

Basados en la Definición 1, el Teorema 1 se reformula como sigue.

**Teorema 2** *Considérese el observador de velocidad de estructura variable (18) de la dinámica de elevación (4). Sea  $M_1 > 0$ , una cota superior de la magnitud de la perturbación externa  $w_1(t)$  que afecta a (4), conocida a priori. Entonces bajo la condición (22), impuesta en los parámetros  $\mu_\theta, \nu_\theta$  del observador, (18) representa un observador de velocidad asintótico de precisión  $\frac{\mu_\theta M_1}{\nu_\theta}$ , donde (21) corresponde al dominio de atracción de los errores de estimación iniciales  $e_1(0) = \theta_1(0) - \hat{\theta}_1(0)$ ,  $e_2(0) = \theta_2(0) - \hat{\theta}_2(0)$ . Además, (18) es un observador asintótico global del sistema no perturbado (4).*

### III.1.2 Observadores de velocidad para ángulos de dirección y rotación por modos deslizantes

De manera similar al observador de elevación (18), se diseña una familia de observadores de velocidad de estructura variable para el subsistema dirección-rotación

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\phi}}_1 &= \hat{\phi}_2 + \mu_\phi \text{sign}(\phi_1 - \hat{\phi}_1) \\ \dot{\hat{\phi}}_2 &= c u_2 + \nu_\phi \text{sign}(\phi_1 - \hat{\phi}_1),\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\psi}}_1 &= \hat{\psi}_2 + \mu_\psi \text{sign}(\psi_1 - \hat{\psi}_1) \\ \dot{\hat{\psi}}_2 &= -d \text{sen}(\phi_1) + \nu_\psi \text{sign}(\psi_1 - \hat{\psi}_1),\end{aligned}\tag{31}$$

con parámetros  $\mu_\phi, \nu_\phi, \mu_\psi, \nu_\psi > 0$ .

Los errores de observación  $\phi_i - \hat{\phi}_i, \psi_i - \hat{\psi}_i, i = 1, 2$  decaen en forma asintótica a los segmentos

$$S_\phi = \{(\phi_1 - \hat{\phi}_1, \phi_2 - \hat{\phi}_2) \in \mathbb{R}^2 : \phi_1 = \hat{\phi}_1, |\phi_2 - \hat{\phi}_2| \leq \frac{\mu_\phi M_2}{\nu_\phi}\}\tag{32}$$

$$S_\psi = \{(\psi_1 - \hat{\psi}_1, \psi_2 - \hat{\psi}_2) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1 = \hat{\psi}_1, |\psi_2 - \hat{\psi}_2| \leq \frac{\mu_\psi M_3}{\nu_\psi}\}\tag{33}$$

con dominios de atracción

$$D_\phi = \{(\phi_1 - \hat{\phi}_1, \phi_2 - \hat{\phi}_2) \in \mathbb{R}^2 : |\phi_2 - \hat{\phi}_2| < \frac{\mu_\phi \nu_\phi}{M_2}\},\tag{34}$$

$$D_\psi = \{(\psi_1 - \hat{\psi}_1, \psi_2 - \hat{\psi}_2) \in \mathbb{R}^2 : |\psi_2 - \hat{\psi}_2| < \frac{\mu_\psi \nu_\psi}{M_3}\},\tag{35}$$

a condición de que

$$\nu_\phi > \max\{M_2, \mu_\phi M_2\}, \quad \nu_\psi > \max\{M_3, \mu_\psi M_3\}.\tag{36}$$

**Teorema 3** *Considérense los observadores de velocidad de estructura variable (30) y (31) de las dinámicas de dirección y rotación (5) y (6). Sean  $M_2 > 0$  y  $M_3 > 0$ , las cotas superiores de las magnitudes de las perturbaciones externas  $w_2(t)$  y  $w_3(t)$  que*



afectan a los sistemas (30) y (31), conocidas a priori. Entonces, bajo las condiciones (36), impuestas en los parámetros  $\mu_\phi, \nu_\phi, \mu_\psi, \nu_\psi$  de los observadores, las dinámicas de los sistemas (30) y (31) representan observadores de velocidad asintóticos de dirección y rotación, con una precisión  $\frac{\mu_\phi M_2}{\nu_\phi}$  y  $\frac{\mu_\psi M_3}{\nu_\psi}$ , respectivamente; estos observadores poseen dominios de atracción (34) y (35) de los errores de estimación iniciales  $\phi_i(0) - \hat{\phi}_i(0), \psi_i(0) - \hat{\psi}_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ . Además, (30) y (31) son observadores asintóticos globales del sistema no perturbado (5) y (6).

**Prueba** La línea de razonamiento usado para establecer la validación del Teorema 2 se aplica también aquí. La prueba del Teorema 3 entonces se omite.  $\square$

## III.2 Modelo dinámico de Newton

De forma similar al modelo dinámico anterior, se propone la siguiente familia de observadores de velocidad de estructura variable

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_1 &= \hat{\theta}_2 + \mu_\theta \text{sign}(\theta_1 - \hat{\theta}_1) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= a \cos(\phi_1) \tau_1 - b \text{sen}(\theta_1 + \theta_0) + \nu_\theta \text{sign}(\theta_1 - \hat{\theta}_1)\end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\phi}}_1 &= \hat{\phi}_2 + \mu_\phi \text{sign}(\phi_1 - \hat{\phi}_1) \\ \dot{\hat{\phi}}_2 &= c \tau_2 - d \text{sen}(\phi_1) + \nu_\phi \text{sign}(\phi_1 - \hat{\phi}_1)\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\psi}}_1 &= \hat{\psi}_2 + \mu_\psi \text{sign}(\psi_1 - \hat{\psi}_1) \\ \dot{\hat{\psi}}_2 &= e \cos(\theta_1) \text{sen}(\phi_1) \tau_1 - f \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\phi_1) \tau_2 \\ &\quad - \rho \frac{L^2}{2} (S + S' \text{sen}(\phi_1)) \hat{\psi}_2^2 + \nu_\psi \text{sign}(\psi_1 - \hat{\psi}_1)\end{aligned}\quad (39)$$

con parámetros  $\mu_\theta, \nu_\theta, \mu_\phi, \nu_\phi, \mu_\psi, \nu_\psi > 0$ .

Los errores de observación  $\theta_i - \hat{\theta}_i, \phi_i - \hat{\phi}_i, \psi_i - \hat{\psi}_i$ ,  $i = 1, 2$  son interna y asintóticamente estables. Además, en presencia de perturbaciones externas  $w_1, w_2, w_3$  con magnitudes

superiormente acotadas por  $M_1, M_2, M_3 > 0$ , respectivamente, los errores de observación también decaen en forma asintótica a los segmentos

$$S_\theta = \{(\theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2) \in \mathbb{R}^2 : \theta_1 = \hat{\theta}_1, |\theta_2 - \hat{\theta}_2| \leq \frac{\mu_\theta M_1}{\nu_\theta}\} \quad (40)$$

$$S_\phi = \{(\phi_1 - \hat{\phi}_1, \phi_2 - \hat{\phi}_2) \in \mathbb{R}^2 : \phi_1 = \hat{\phi}_1, |\phi_2 - \hat{\phi}_2| \leq \frac{\mu_\phi M_2}{\nu_\phi}\} \quad (41)$$

$$S_\psi = \{(\psi_1 - \hat{\psi}_1, \psi_2 - \hat{\psi}_2) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1 = \hat{\psi}_1, |\psi_2 - \hat{\psi}_2| \leq \frac{\mu_\psi M_3}{\nu_\psi}\} \quad (42)$$

con dominios de atracción

$$D_\theta = \{(\theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2) \in \mathbb{R}^2 : |\theta_2 - \hat{\theta}_2| < \frac{\mu_\theta \nu_\theta}{M_1}\}, \quad (43)$$

$$D_\phi = \{(\phi_1 - \hat{\phi}_1, \phi_2 - \hat{\phi}_2) \in \mathbb{R}^2 : |\phi_2 - \hat{\phi}_2| < \frac{\mu_\phi \nu_\phi}{M_2}\}, \quad (44)$$

$$D_\psi = \{(\psi_1 - \hat{\psi}_1, \psi_2 - \hat{\psi}_2) \in \mathbb{R}^2 : |\psi_2 - \hat{\psi}_2| < \frac{\mu_\psi \nu_\psi}{M_3}\}, \quad (45)$$

siempre que

$$\nu_\theta > \max\{M_1, \mu_\theta M_1\}, \quad \nu_\phi > \max\{M_2, \mu_\phi M_2\}, \quad \nu_\psi > \max\{M_3, \mu_\psi M_3\}. \quad (46)$$

**Teorema 4** *Considérense los observadores de velocidad de estructura variable (37), (38) y (39) de las dinámicas de dirección y rotación (15), (16) y (17). Sean  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$  y  $M_3 > 0$ , las cotas superiores de las magnitudes de las perturbaciones externas  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  y  $w_3(t)$  que afectan a los sistemas (37), (38) y (39), conocidas a priori. Entonces, bajo las condiciones (46), impuestas en los parámetros  $\mu_\theta, \nu_\theta, \mu_\phi, \nu_\phi, \mu_\psi, \nu_\psi$  de los observadores, las dinámicas de los sistemas (37), (38) y (39) representan observadores de velocidad asintóticos de dirección y rotación, con una precisión  $\frac{\mu_\theta M_1}{\nu_\theta}$ ,  $\frac{\mu_\phi M_2}{\nu_\phi}$  y  $\frac{\mu_\psi M_3}{\nu_\psi}$ , respectivamente; estos observadores poseen dominios de atracción (43), (44) y (45) de los errores de estimación iniciales  $\theta_i(0) - \hat{\theta}_i(0)$ ,  $\phi_i(0) - \hat{\phi}_i(0)$ ,  $\psi_i(0) - \hat{\psi}_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ . Además, (37), (38) y (39) son observadores asintóticos globales del sistema no perturbado (15), (16) y (17).*

**Prueba** La línea de razonamiento usado para establecer la validación del Teorema 2 se aplica también aquí. Los detalles de la prueba del Teorema 4 entonces se omiten.  $\square$

## Capítulo IV

### Control de posición: solución al problema de estabilización.

En el presente capítulo se presentarán resultados numéricos y experimentales con respecto a la solución del problema de control de posición, caso particular de estabilización en el origen, para el sistema mecánico subactuado de 3-GDL. Inicialmente, se desarrollará la formulación del problema para posteriormente presentar propuestas de solución. Para ello, se plantean dos estrategias basadas en modos deslizantes diseñadas para los modelos dinámicos simplificado y de Newton. Ambas propuestas serán complementadas con su respectivo análisis de estabilidad y resultados numéricos. Al final del capítulo se encontrará una sección de discusión en el que se analizará la problemática, resultados y conclusiones obtenidas.

#### IV.1 Formulación del problema

El objetivo de control es resolver el problema de estabilización orbital para el helicóptero de 3-GDL. Se pretende que además, el controlador atenúe los efectos de las perturbaciones externas. Sea

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1(t), & \phi_1(t), & \psi_1(t) \end{bmatrix}^T \quad (47)$$

el vector de las posiciones del mecanismo donde  $\theta_1(t) \in \mathbb{R}$  corresponde al ángulo de elevación del helicóptero;  $\phi_1(t) \in \mathbb{R}$  es el ángulo de dirección y  $\psi_1(t) \in \mathbb{R}$  es el ángulo de rotación del mecanismo. Se propone diseñar una ley de control  $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t)\| = 0. \quad (48)$$

## IV.2 Control por modos deslizantes de segundo orden utilizando el modelo dinámico simplificado

De acuerdo al modelo simplificado (4) - (6), es posible identificar que la ecuación correspondiente al eje de elevación (4) constituye un subsistema independiente. La estrategia de control propuesta es el diseño de una ley de control  $\tau_1$  para el eje de elevación y posteriormente el diseño de otra ley de control  $\tau_2$  que estabilice asintóticamente el subsistema de los ejes de dirección  $\phi$  y de rotación  $\psi$ .

### IV.2.1 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para el ángulo de elevación

Con la finalidad de estabilizar globalmente de manera asintótica el eje de elevación, se propone la siguiente ley de control

$$\tau_1 = \frac{1}{a} [b - h\theta_1 - p\theta_2 - \alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\theta_2)] \quad (49)$$

extraída de (Orlov, 2009), condicionada a que tanto el ángulo de elevación  $\theta_1$  como la velocidad angular  $\theta_2$  se encuentran disponibles. Con esta ley de control, el sistema en lazo cerrado (4),(49) es estable globalmente en tiempo finito si se cumple que los valores paramétricos son tales que

$$h, p \geq 0, \alpha - M_1 > \beta > M_1 \quad (50)$$

para alguna  $M_1 > 0$ . Además, su estabilidad se mantiene sin importar la magnitud de las perturbaciones externas que afecten al sistema siempre que estén acotadas, esto es

$$\sup_t |w_1(t)| \leq M_1. \quad (51)$$

**Teorema 5** *Sea el sistema perturbado (4) controlado por (49) sujeto a las condiciones paramétricas (50) para alguna constante positiva  $M_1 > 0$ ; entonces el sistema en lazo cerrado (4), (49) es globalmente estable en tiempo finito, siempre que las perturbaciones externas  $w_1(t)$  cumplan con la condición (51) para la misma constante  $M_1$ .*

**Prueba** Sustituyendo (49) en (4), el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -h\theta_1 - p\theta_2 - \alpha\text{sign}(\theta_1) - \beta\text{sign}(\theta_2) + w_1(t)\end{aligned}\quad (52)$$

y aplicando [(Orlov, 2009), Teorema 4.4] al sistema (52) bajo las condiciones (50),(51), se establece la validez del Teorema 5.  $\square$

## IV.2.2 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para los ángulos de dirección y rotación

El siguiente objetivo es la estabilización asintótica del subsistema subactuado (5), (6) atenuando las perturbaciones externas denotadas por  $w_2, w_3$ . La estrategia de control consiste en dos pasos. En primer lugar, se propone una función basada en el sistema cuya dinámica cero sea globalmente asintóticamente estable mientras que la influencia de perturbaciones externas sean atenuadas. Posteriormente, se construye una entrada de control  $\tau_2$ , la cual en presencia de perturbaciones, lleve al sistema de forma local a la dinámica cero en tiempo finito.

Se propone entonces

$$s(\phi_1, \psi_2, \psi_2) = d \text{sen}(\phi_1) - \kappa_1 \psi_1 - \kappa_2 \psi_2 \quad (53)$$

con parámetros positivos  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  que permitan imponer las propiedades deseadas en la dinámica cero del subsistema. El ángulo de rotación, al restringir su movimiento

en  $s = 0$ , adquiere una dinámica gobernada por el sistema asintóticamente estable de forma interna

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\kappa_1\psi_1 - \kappa_2\psi_2 + w_3 \quad (54)$$

donde las perturbaciones  $w_3$  son atenuadas por una adecuada selección de valores para las ganancias  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  (véase por ejemplo (Doyle *et al.*, 1989)). En consecuencia, el ángulo de dirección también cumple con las mismas propiedades en su dinámica cero donde

$$d \operatorname{sen}(\phi_1) = \kappa_1\psi_1 + \kappa_2\psi_2. \quad (55)$$

Con la finalidad de asegurar que la variedad (55) sea alcanzada en tiempo finito se propone la siguiente ley de control

$$u_2 = \frac{1}{c \cos(\phi_1)} [\operatorname{sen}(\phi_1)\phi_2^2 - \kappa_1 \operatorname{sen}(\phi_1) - \kappa_2 \cos(\phi_1)\phi_2 - h_1 s - p_1 \dot{s} - \alpha_1 \operatorname{sign}(s) - \beta_1 \operatorname{sign}(\dot{s})] \quad (56)$$

con parámetros positivos  $h_1, p_1, \alpha_1, \beta_1$ . Obsérvese en (56), la necesidad de restringir el movimiento en el eje de dirección dentro de un dominio admisible  $\phi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Por tal motivo, la dinámica de este ángulo no debe superar estos puntos singulares y en consecuencia, la estabilización para este grado de libertad será local.

La idea de proponer (56) es llevar al sistema en lazo cerrado (5), (6), (56), en el subespacio de la salida  $s$ , a la forma cuasihomogénea

$$\ddot{s} = -d[h_1 s + p_1 \dot{s} + \alpha_1 \operatorname{sign}(s) + \beta_1 \operatorname{sign}(\dot{s})] + w \quad (57)$$

donde se ha supuesto que la perturbación externa  $w_3(t)$ , que afecta a la dinámica del eje de rotación, es diferenciable tal que  $w = d \cos(\phi_1)w_2 - \kappa_1 w_3 - \kappa_2 \dot{w}_3$ . Nuevamente, aplicando [(Orlov, 2009), Teorema 4.4], la ecuación (57) aparece como globalmente estable equiuniformemente (en  $w$ ) en tiempo finito, siempre que se cumpla que

$\sup_t |w(t)| \leq M$  para una constante  $M > 0$  y que los parámetros cumplan

$$h_1, p_2 \geq 0, \quad d\alpha_1 - M > d\beta_1 > M. \quad (58)$$

Suponiendo que las magnitudes de las perturbaciones externas  $w_2(t)$ ,  $w_3(t)$  y la derivada temporal  $w_4(t) = \dot{w}_3(t)$  están superiormente acotadas

$$\sup_t |w_i(t)| \leq M_i, \quad i = 2, 3, 4 \quad (59)$$

por constantes positivas  $M_2, M_3, M_4$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 6** *Considere el sistema en lazo cerrado (5), (6), (56) cumple con (58) y asumiendo (59) en las perturbaciones externas. Supóngase que se cumple con la condición (58) con  $M = dM_2 + \kappa_1 M_3 + \kappa_2 M_4$ . Entonces el sistema en lazo cerrado es llevado a la superficie (55) de la dinámica cero en tiempo finito, y posteriormente, su dinámica se encuentra gobernada por la ecuación de modos deslizantes (54). Además, la dinámica interna del sistema en lazo cerrado (5), (6), (56) es localmente asintóticamente estable.*

**Prueba** Dada que la proyección de (5), (6), (56) en el subespacio definido por la salida  $s$ , se encuentra descrito de forma local por la ecuación (57) y bajo las condiciones del teorema, esta ecuación es estable equiuniformemente en tiempo finito de acuerdo a [(Orlov, 2009), Teorema 4.4]. El sistema en lazo cerrado, a partir de un instante de tiempo finito  $T > 0$ , evoluciona en la dinámica cero descrita por (55). Por lo tanto, el sistema (5), (6), (56) se encuentra gobernado por la ecuación en modos deslizantes (54), la cual es internamente asintóticamente estable. Debido a la estabilidad en tiempo finito antes de los modos deslizantes y a la dinámica bien definida de modos deslizantes, se prueba una estabilidad asintótica interna del sistema en lazo cerrado.  $\square$

**Observación 1** *Dado que los parámetros  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , que determinan la dinámica cero (55), pueden ser seleccionados de forma arbitrariamente grandes, la influencia de las*



*perturbaciones externas en los modos deslizantes (54) puede ser atenuada a un nivel tan pequeño como se desee a través de una adecuada selección de parámetros.*

### IV.2.3 Síntesis con retroalimentación de salida

Los controladores con retroalimentación de salida  $\tau_1$  y  $\tau_2$  requieren mediciones tanto de las posiciones como de las velocidades del sistema; por lo tanto, la síntesis implica que las leyes de control propuestas

$$\tau_1 = \frac{1}{c} \left[ b - h\theta_1 - p\hat{\theta}_2 - \alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\hat{\theta}_2) \right] \quad (60)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{c \cos(\phi_1)} \left[ \text{sen}(\phi_1) \hat{\phi}_2^2 - \kappa_1 \text{sen}(\phi_1) - \kappa_2 \cos(\phi_1) \hat{\phi}_2 - h_1 \hat{s} - p_1 \dot{\hat{s}} - \alpha_1 \text{sign}(\hat{s}) - \beta_1 \text{sign}(\dot{\hat{s}}) \right] \quad (61)$$

que se obtienen al sustituir las variables observadas  $\hat{\theta}_2$ ,  $\hat{\phi}_2$  y  $\hat{\psi}_2$  estimadas por (18), (30), y (31), respectivamente, en las leyes de control (49), (56) en lugar de los estados  $\theta_2$ ,  $\phi_2$  y  $\psi_2$ . De igual manera,  $s(\phi_1, \psi_1, \hat{\psi}_2)$  está definido por  $\hat{s} = d \text{sen}(\phi_1) - \kappa_1 \psi_1 - \kappa_2 \hat{\psi}_2$ .

### IV.2.4 Resultados numéricos

A continuación, se presentan los resultados numéricos para evaluar el desempeño de los controladores basados en modos deslizante (60), (61) aplicados al modelo simplificado del helicóptero (4) – (6). Los parámetros del controlador son los que se muestran en el Capítulo II, en la Tabla I.

Las condiciones iniciales seleccionadas para las simulaciones fueron  $\theta_1(0) = 0.5[\text{rad}]$ ,  $\phi_1(0) = \psi_1(0) = 0.8$ , donde las velocidades iniciales son  $\theta_2(0) = \phi_2(0) = \psi_2(0) = 0$ .

Se presentan dos casos: sin perturbaciones y afectado por las perturbaciones definidas por  $w_1 = w_2 = 0.5 \cos(40t)$ ,  $w_3 = 0.2 \cos(50t)$ . Las ganancias seleccionadas para los controladores son  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $h = 5$ ,  $p = 6$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $h_1 = 0$ ,  $p_1 = 0$ ,

$\kappa_1 = 2$  y  $\kappa_2 = 3$ . Las condiciones iniciales establecidas para los observadores son  $\hat{\theta}(0) = \hat{\phi}(0) = \hat{\psi}_0 = 0$  y  $\dot{\hat{\theta}}(0) = \dot{\hat{\phi}}(0) = \dot{\hat{\psi}}(0) = 0$

Los resultados numéricos para el caso sin perturbaciones y para el caso perturbado, se muestran en las Figuras 4 y 5, respectivamente.

### IV.3 Control por modos deslizantes de segundo orden utilizando el modelo dinámico de Newton

De acuerdo a la dinámica modelada (15), (16) y (17), podemos observar que los ejes de elevación  $\theta$  y de dirección  $\phi$  corresponden a subsistemas completamente actuados; esto es, el ángulo de elevación puede ser controlado a través de la entrada de control  $\tau_1$  mientras que el de dirección depende solamente de la entrada de control  $\tau_2$ . Sin embargo, la dinámica que representa al ángulo de rotación  $\psi$  depende de ambas señales de control.

La estrategia de control elegida en este caso, consta de tres pasos: a) Formulación de una ley de control que estabilice el ángulo de elevación, b) Análisis de la dinámica cero obtenida de aplicar el controlador diseñado en el primer paso, y c) Formulación de una ley de control que estabilice los ángulos de dirección y rotación.

#### IV.3.1 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para el ángulo de elevación

Se propone la ley de control

$$\tau_1 = \frac{1}{a \cos(\phi_1)} [b \sin(\theta_1 + \theta_0) - h\theta_1 - p\theta_2 - \alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\theta_2)] \quad (62)$$

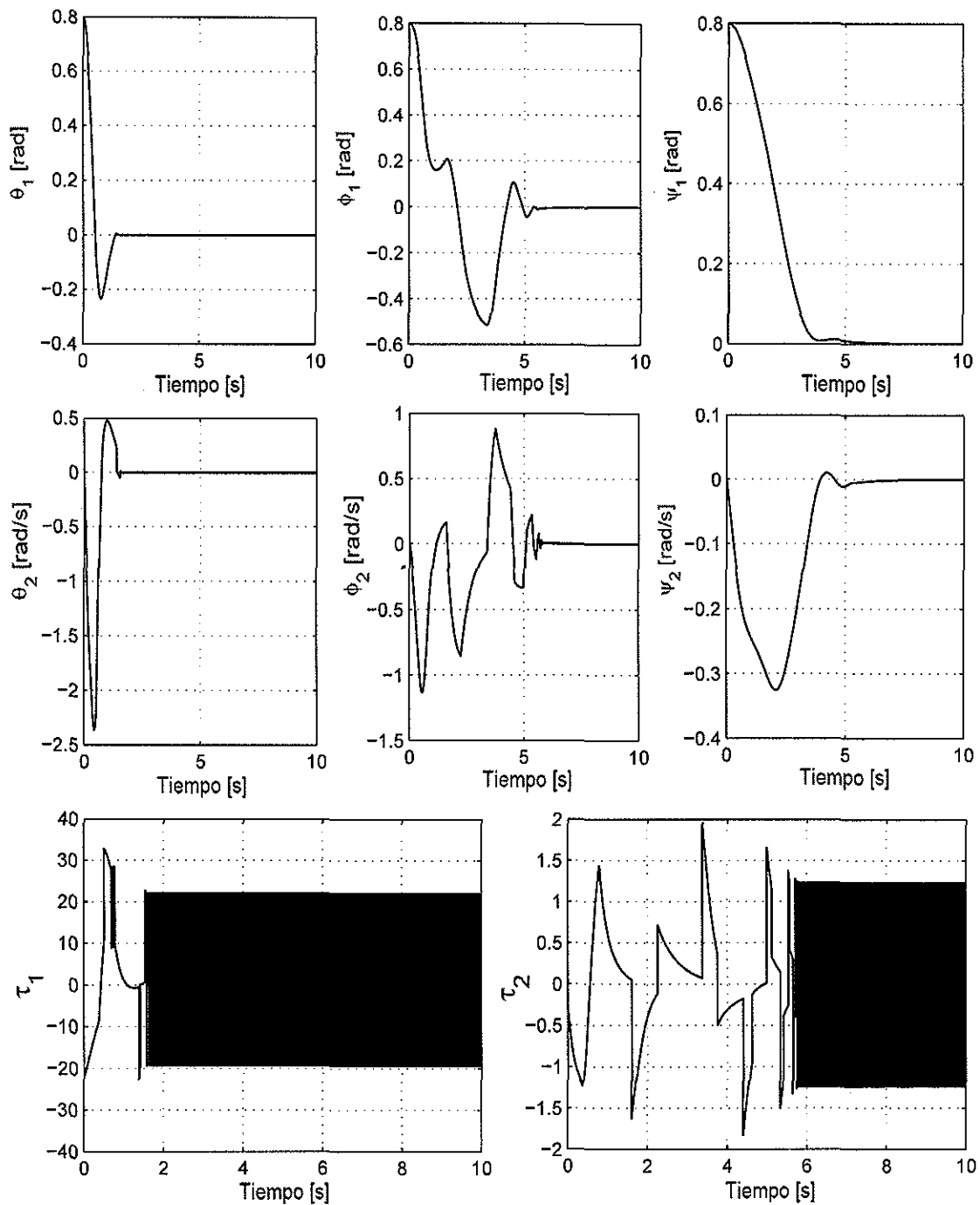


Figura 4. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (4) - (6) sin perturbaciones para estabilización en el origen.

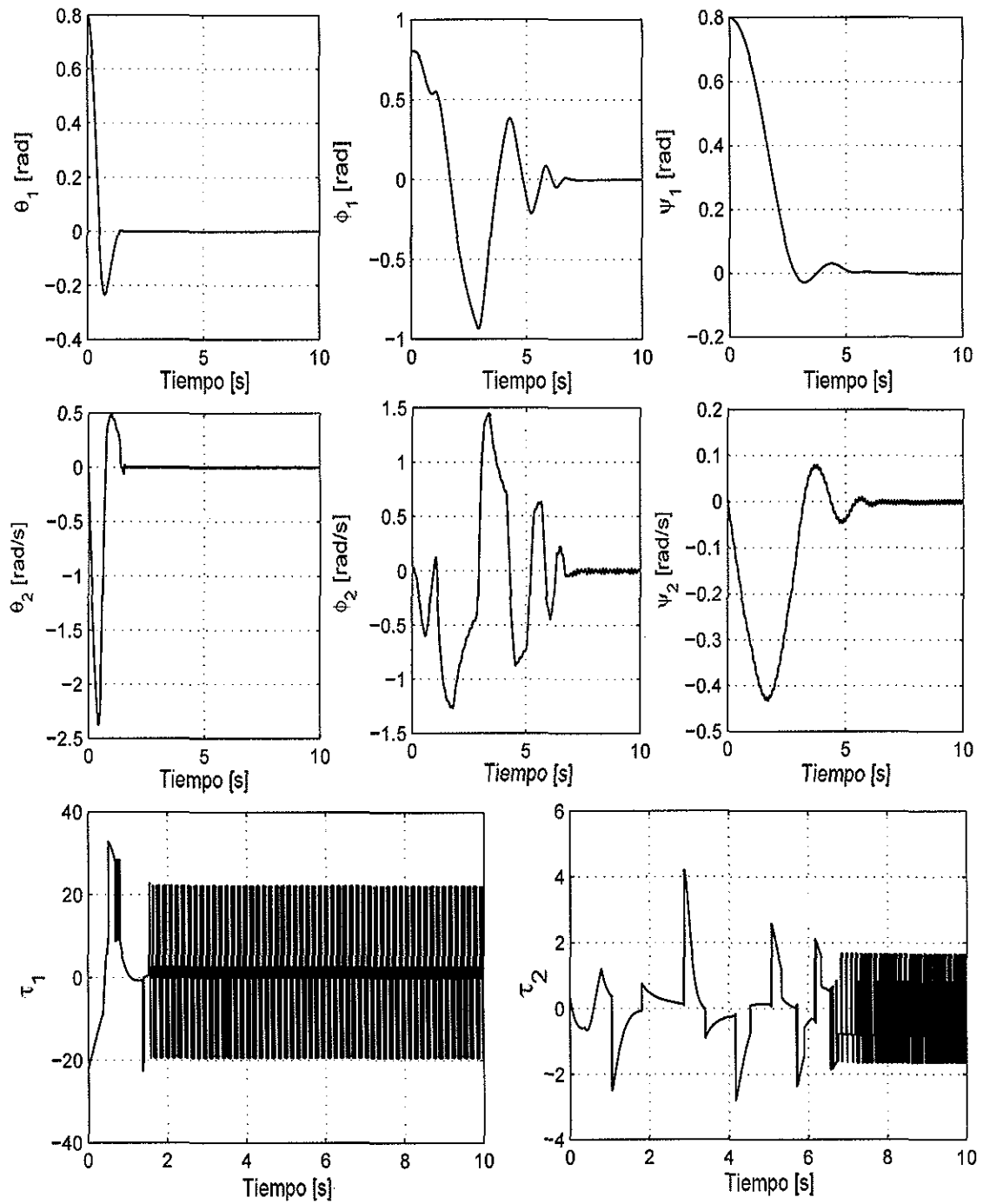


Figura 5. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (4) - (6) perturbado para estabilización en el origen.

extraída de (Orlov, 2009), condicionada a que tanto el ángulo de elevación  $\theta_1$  como la velocidad angular  $\theta_2$  se encuentren disponibles. Con esta ley de control, el sistema en lazo cerrado (15), (62) es estable globalmente en tiempo finito si se cumple que los valores paramétricos son tales que

$$h, p \geq 0, \alpha - M_1 > \beta > M_1 \quad (63)$$

para alguna  $M_1 > 0$ . Además, su estabilidad se mantiene sin importar la magnitud de las perturbaciones externas que afecten al sistema siempre que estén acotadas, esto es

$$\sup_t |w_1(t)| \leq M_1. \quad (64)$$

**Teorema 7** *Sea el sistema perturbado (15) controlado por (62) sujeto a las condiciones paramétricas (63) para alguna constante positiva  $M_1 > 0$ ; entonces el sistema en lazo cerrado (15), (62) es globalmente estable en tiempo finito, siempre que las perturbaciones externas  $w_1(t)$  cumplan con la condición (64) para la misma constante  $M_1$ .*

**Prueba** La validación del Teorema 7 sigue la línea del razonamiento aplicado al Teorema 5. □

### IV.3.2 Controlador por modos deslizantes de segundo orden para los ángulos de dirección y rotación

Suponiendo una estabilización asintótica del ángulo de elevación, se sustituye (62) en (16) y (17). La dinámica cero de este subsistema se encuentra definida por

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= c\tau_2 - d \operatorname{sen}(\phi_1) + w_2 \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -c_1(S + S' \operatorname{sen}(\phi_1))\psi_2^2 + c_2 \tan(\phi_1) \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_0) + w_3 \end{aligned} \quad (66)$$

donde  $c_1 = \rho \frac{L^2}{2}$  y  $c_2 = Mgl_\theta J_t^{-1}$ . Así, se selecciona la siguiente entrada

$$s(\theta_1, \phi_1, \psi_1, \psi_2) = -\kappa_1 \psi_1 - \kappa_2 \psi_2 - \kappa_3 \int_0^{t_f} \psi_1(t) dt + c_1 (S + S' \text{sen}(\phi_1)) \psi_2^2 - c_2 \tan(\phi_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_1 + \theta_0) \quad (67)$$

con parámetros positivos  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$ , los cuales son seleccionados adecuadamente para imponer las propiedades deseadas en la dinámica cero. Mientras se encuentra dentro de la variedad  $s = 0$ , la dinámica del estado  $\psi_1$  está gobernada por el sistema internamente asintóticamente estable

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\kappa_1 \psi_1 - \kappa_2 \psi_2 - \kappa_3 \int_0^{t_f} \psi_1(t) dt + w_3, \end{aligned} \quad (68)$$

mientras que la perturbación  $w_3$  es atenuada por la adecuada selección de las ganancias  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$  (véase por ejemplo (Doyle *et al.*, 1989)). De esta forma, mientras el ángulo de dirección evoluciona dentro de un dominio admisible  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , la variable de rotación cumple con las mismas propiedades en su dinámica cero donde

$$-\kappa_1 \psi_1 - \kappa_2 \psi_2 - \kappa_3 \int_0^{t_f} \psi_1(t) dt = c_1 (S + S' \text{sen}(\phi_1)) \psi_2^2 - c_2 \tan(\phi_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_1 + \theta_0) \quad (69)$$

Para asegurar que el sistema alcanza (69) en tiempo finito, se propone la siguiente ley de control

$$\tau_2 = \frac{\Gamma_1(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)}{\Gamma_2(\theta_1, \phi_1, \psi_2)} \quad (70)$$

con parámetros positivos  $\alpha_1, \beta_1, h_1, p_1$  y  $\Gamma_2(\theta_1, \phi_1, \psi_2) \neq 0$ . Los valores de las funciones  $\Gamma_1, \Gamma_2$  se muestran en la Tabla III en donde, por simplicidad, las expresiones  $c_x, s_x, t_x$  y  $\tilde{s}_x$  denotan  $\cos(x)$ ,  $\text{sen}(x)$ ,  $\tan(x)$  y  $\sec(x)$  respectivamente, donde  $x$  se refiere al ángulo correspondiente. Lo que se pretende con la síntesis propuesta es llevar a la proyección

Tabla III. Valores de las funciones  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  para la entrada de control  $\tau_2$ .

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 = & 6c_1^3 S^3 \psi_2^4 + 6c_1^3 S^2 S' s_{\phi_1} \psi_2^4 - 2c_1^2 S S' c_{\phi_1} \phi_2 \psi_2^3 + 2c_1^2 S S' c_{\phi_1} \phi_2 \psi_2^3 + 6c_1^3 S^2 S' s_{\phi_1} \psi_2^4 \\
& - 6c_1^3 c_2 S^2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2^2 + c_2 t_{\phi_1} s_{\theta_1} c_{(\theta_1+\theta_0)} \theta_2^2 + c_2 t_{\phi_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} c_{\theta_1} \theta_2^2 \\
& + 6c_1^3 S S'^2 s_{\phi_1}^2 \psi_2^4 - 6c_1^2 c_2 S S' s_{\phi_1} t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2^2 + 2\kappa_2 c_1 c_2 S t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2 \\
& + 6c_1^3 S S'^2 s_{\phi_1}^2 \psi_2^4 - c_2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} c_{(\theta_1+\theta_0)} [-\alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\theta_2) - h\theta_1 - p\theta_2] \\
& - 2c_1^2 c_2 S^2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2^2 - 2c_1^2 c_2 S S' t_{\phi_1} c_{\phi_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} s_{\phi_1} \psi_2^2 + \kappa_2 c_1 S' c_{\phi_1} \phi_2 \psi_2^2 \\
& + 2c_1 c_2 S t_{\phi_1} c_{\theta_1} c_{(\theta_1+\theta_0)} \theta_2 \psi_2 - 2c_1 c_2 S t_{\phi_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} s_{\theta_1} \theta_2 \psi_2 + c_2 s_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \tilde{s}_{\phi_1}^2 \theta_2 \phi_2 \\
& + 2c_1^2 S'^2 c_{\phi_1} s_{\phi_1} \phi_2 \psi_2^3 + 2c_1 c_2 S \tilde{s}_{\phi_1}^2 c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \phi_2 \psi_2 + 2c_1 c_2 S' t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} c_{\phi_1} \phi_2 \psi_2 \\
& + 2c_1 c_2 S' c_{\phi_1} t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \phi_2 \psi_2 + 2c_1 c_2^2 S t_{\phi_1}^2 c_{\theta_1}^2 s_{(\theta_1+\theta_0)} + 2c_1 c_2^2 S' s_{\phi_1} t_{\phi_1}^2 c_{\theta_1}^2 s_{(\theta_1+\theta_0)} \\
& - dc_1 S' s_{\phi_1} c_{\phi_1} \psi_2^2 - c_1 S' s_{\phi_1} \phi_2^2 \psi_2^2 + \kappa_1 c_1 S' s_{\phi_1} \psi_2^2 - 2c_1 c_2 S' s_{\phi_1} t_{\phi_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} s_{\theta_1} \theta_2 \psi_2 \\
& + 6c_1^3 S^2 S' s_{\phi_1} \psi_2^4 + 6c_1^3 S S'^2 s_{\phi_1}^2 \psi_2^4 + 6c_1^3 S'^3 s_{\phi_1}^3 \psi_2^4 - 6c_1^2 c_2 S S' s_{\phi_1} t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2^2 \\
& - 2\kappa_2 c_1^2 S'^2 s_{\phi_1}^2 \psi_2^3 + c_2 t_{\phi_1} s_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} [-\alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\theta_2) - h\theta_1 - p\theta_2] \\
& - 4c_1 S'^2 s_{\phi_1} c_{\phi_1} \phi_2 \psi_2^3 - 2c_1^2 S S' c_{\phi_1} \phi_2 \psi_2^3 + c_2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \theta_2^2 - 2\kappa_2 c_1^2 S^2 \psi_2^3 - \kappa_3 \psi_2 \\
& - 2c_1^2 c_2 S S' s_{\phi_1} t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2^2 - 2c_1 c_2 S'^2 s_{\phi_1}^2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2^2 - \kappa_1 c_2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \\
& + \kappa_1 c_1 S \psi_2^2 + dc_2 c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} s_{\phi_1} - 2\kappa_2 c_1^2 S S' s_{\phi_1} \psi_2^3 + 2\kappa_2 c_1 c_2 S' s_{\phi_1} t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2 \\
& - 2\kappa_2 c_1^2 S S' s_{\phi_1} \psi_2^3 - 6c_1^2 c_2 S'^2 s_{\phi_1}^2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \psi_2^2 + c_2 s_{(\theta_1+\theta_0)} \tilde{s}_{\phi_1}^2 s_{\theta_1} \theta_2 \phi_2 \\
& + c_2 t_{\phi_1} c_{(\theta_1+\theta_0)} s_{\theta_1} \theta_2^2 - c_2 c_{\theta_1} c_{(\theta_1+\theta_0)} \tilde{s}_{\phi_1}^2 \theta_2 \phi_2 - c_2 c_{\theta_1} \tilde{s}_{\phi_1}^2 c_{(\theta_1+\theta_0)} \theta_2 \phi_2 \\
& - \kappa_2 c_2 t_{\phi_1} c_{\theta_1} c_{(\theta_1+\theta_0)} \theta_2 + \kappa_2 c_2 t_{\phi_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} s_{\theta_1} \theta_2 - 2c_2 c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \tilde{s}_{\phi_1}^2 t_{\phi_1} \phi_2^2 \\
& + 2c_1 c_2 S' s_{\phi_1} c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \tilde{s}_{\phi_1}^2 \phi_2 \psi_2 - \kappa_2 c_2 c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \tilde{s}_{\phi_1}^2 \phi_2 + \alpha_1 \text{sign}(s) + \beta_1 \text{sign}(\dot{s}) \\
& + h_1 s + p_1 \dot{s} \\
\Gamma_2 = & -c(c_1 S' c_{\phi_1} \psi_2^2 - 2c_2 c_{\theta_1} s_{(\theta_1+\theta_0)} \tilde{s}_{\phi_1}^2)
\end{aligned}$$

del sistema en lazo cerrado (16), (17), (70) del subespacio definido por la salida  $s$ , a la forma cuasihomogénea

$$\ddot{s} = -[\alpha_2 \text{sign}(s) + \beta_2 \text{sign}(\dot{s}) + h_2 s + p_2 \dot{s}] + w \quad (71)$$

donde la perturbación externa  $w_3(t)$  que afecta la dinámica del ángulo de rotación se supone que es diferenciable, la notación

$$w = \xi_1(\theta_1, \phi_1)w_1 + \xi_2(\theta_1, \phi_1)w_2 + \xi_3(\theta_1, \phi_1, \phi_2, \psi_2)w_3 + \xi_4(\phi_1, \psi_2)\dot{w}_3 + \xi_5(\phi_1)w_3^2$$

ha sido utilizada y  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  están definidos por

$$\xi_1 = c_2 \tan(\phi_1)(\sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_0) - \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_0))$$

$$\xi_2 = c_1 S' \cos(\phi_1) \psi_2^2 - c_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_0) \sec^2(\phi_1)$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = & 4c_1 c_2 (S + S' \sin(\phi_1)) \tan(\phi_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_0) - 2c_1^2 (S + S' \sin(\phi_1))^2 \psi_2^2 - \kappa_1 \\ & + 2\kappa_2 c_1 (S + S' \sin(\phi_1)) \psi_2 - 12c_1^2 S S' \sin(\phi_1) \psi_2^2 - 6c_1^2 (S^2 + S'^2 \sin^2(\phi_1)) \psi_2^2 \\ & + 4c_1 S' \cos(\phi_1) \phi_2 \psi_2 \end{aligned}$$

$$\xi_4 = 2c_1 (S + S' \sin(\phi_1)) \psi_2 - \kappa_2$$

$$\xi_5 = 2c_1 (S + S' \sin(\phi_1))$$

Aplicando [(Orlov, 2009), Teorema 4.4], se observa que la ecuación (71) es globalmente estable de forma equiuniforme (en  $w$ ) en tiempo finito, siempre que se cumpla  $\sup_t |w(t)| \leq M$  para alguna constante  $M > 0$  y que los parámetros sean

$$h_1, p_1 \geq 0, \alpha_1 - M > \beta_1 > M. \quad (72)$$

Suponiendo que las magnitudes de las perturbaciones externas  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  y  $w_3(t)$  y que la derivada temporal  $w_4(t) = \dot{w}_3(t)$  y  $w_5(t) = w_3^2(t)$  estén acotadas superiormente

$$\sup_t |w_i(t)| \leq M_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (73)$$



por constantes positivas  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 8** *Considere el sistema en lazo cerrado (16), (17), (70) tal que se cumple (72) y suponiendo (73) en las perturbaciones externas. Sea cumplida la condición (72) con  $M = \xi_1 M_1 + \xi_2 M_2 + \xi_3 M_3 + \xi_4 M_4 + \xi_5 M_5$ . Entonces el sistema es lazo cerrado es llevado a la variedad con dinámica cero (69) en tiempo finito, y posteriormente, su comportamiento se encuentra gobernado por la ecuación en modos deslizantes (68). Además, las dinámicas internas del sistema en lazo cerrado (16), (17), (70) son localmente asintóticamente estables.*

**Prueba** La validación del Teorema 8 sigue la línea del razonamiento aplicado al Teorema 6. □

**Observación 2** *Dado que los parámetros  $\kappa_1, \kappa_2$  y  $\kappa_3$ , que determinan la dinámica cero (69), pueden ser seleccionados de forma arbitrariamente grandes, la influencia de las perturbaciones externas en los modos deslizantes (68) puede ser atenuada a un nivel tan pequeño como se desee a través de una adecuada selección de parámetros.*

### IV.3.3 Síntesis con retroalimentación de salida

Finalmente, los controladores con retroalimentación de salida  $\tau_1$  y  $\tau_2$  requieren mediciones tanto de las posiciones como de las velocidades del sistema; por lo tanto, la síntesis implica que las leyes de control propuestas

$$\tau_1 = \frac{1}{a \cos(\phi_1)} \left[ b \sin(\theta_1 + \theta_0) - h\theta_1 - p\hat{\theta}_2 - \alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\hat{\theta}_2) \right] \quad (74)$$

$$\tau_2 = \frac{\Gamma_1(\theta_1, \hat{\theta}_2, \phi_1, \hat{\phi}_2, \psi_1, \hat{\psi}_2)}{\Gamma_2(\theta_1, \phi_1, \hat{\psi}_2)} \quad (75)$$

que se obtienen al sustituir las variables observadas  $\hat{\theta}_2, \hat{\phi}_2$  y  $\hat{\psi}_2$  estimadas por (37), (38), y (39), respectivamente, en las leyes de control (62), (70) en lugar de los estados

$\theta_2$ ,  $\phi_2$  y  $\psi_2$ . De igual manera,  $s(\theta_1, \phi_1, \psi_1, \hat{\psi}_2)$  está definido por  $\hat{s} = -\kappa_1\psi_1 - \kappa_2\hat{\psi}_2 - \kappa_3 \int_0^{t_f} \psi_1(t)dt + c_1(S + S' \text{sen}(\phi_1))\hat{\psi}_2^2 - c_2 \tan(\phi_1) \cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_1 + \theta_0)$ .

#### IV.3.4 Resultados numéricos

Los resultados numéricos para evaluar el desempeño de los controladores basados en modos deslizante (60), (61) aplicados al modelo simplificado del helicóptero (4) - (6) se muestran en las Figuras 6 y 7, para los casos sin y con perturbaciones, respectivamente. Los parámetros del sistema son los que se muestran en el Capítulo II, en la Tabla II.

Las condiciones iniciales seleccionadas para las simulaciones fueron  $\theta_1(0) = 0.5$ ,  $\phi_1(0) = \psi_1(0) = 0.8$ , para el caso no perturbado y  $\theta_1(0) = \phi_1(0) = 0.5$ ,  $\psi_1(0) = 0.8$  para el caso perturbado, donde las velocidades iniciales son  $\theta_2(0) = \phi_2(0) = \psi_2(0) = 0$ .

Se presentan dos casos: sin perturbaciones y afectado por las perturbaciones definidas por  $w_1 = 0.5 \cos(40t)$ ,  $w_2 = 0.2 \cos(40t)$ ,  $w_3 = 0.1 \cos(40t)$ . Las ganancias seleccionadas para los controladores son  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $h = 3$ ,  $p = 3$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.05$ ,  $h_1 = 2$ ,  $p_1 = 2$ ,  $\kappa_1 = 6$ ,  $\kappa_2 = 10$  y  $\kappa_3 = 0$  en el caso no perturbado y  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $h = 3$ ,  $p = 3$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.05$ ,  $h_1 = 2$ ,  $p_1 = 2$ ,  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_2 = 6$  y  $\kappa_3 = 0$  para el caso perturbado. Las condiciones iniciales establecidas para los observadores son  $\hat{\theta}(0) = \hat{\phi}(0) = \hat{\psi}_0 = 0$  y  $\hat{\dot{\theta}}(0) = \hat{\dot{\phi}}(0) = \hat{\dot{\psi}}(0) = 0$ . Los resultados numéricos para el caso sin perturbaciones y para el caso perturbado, se muestran en las Figuras 6 y 7, respectivamente.

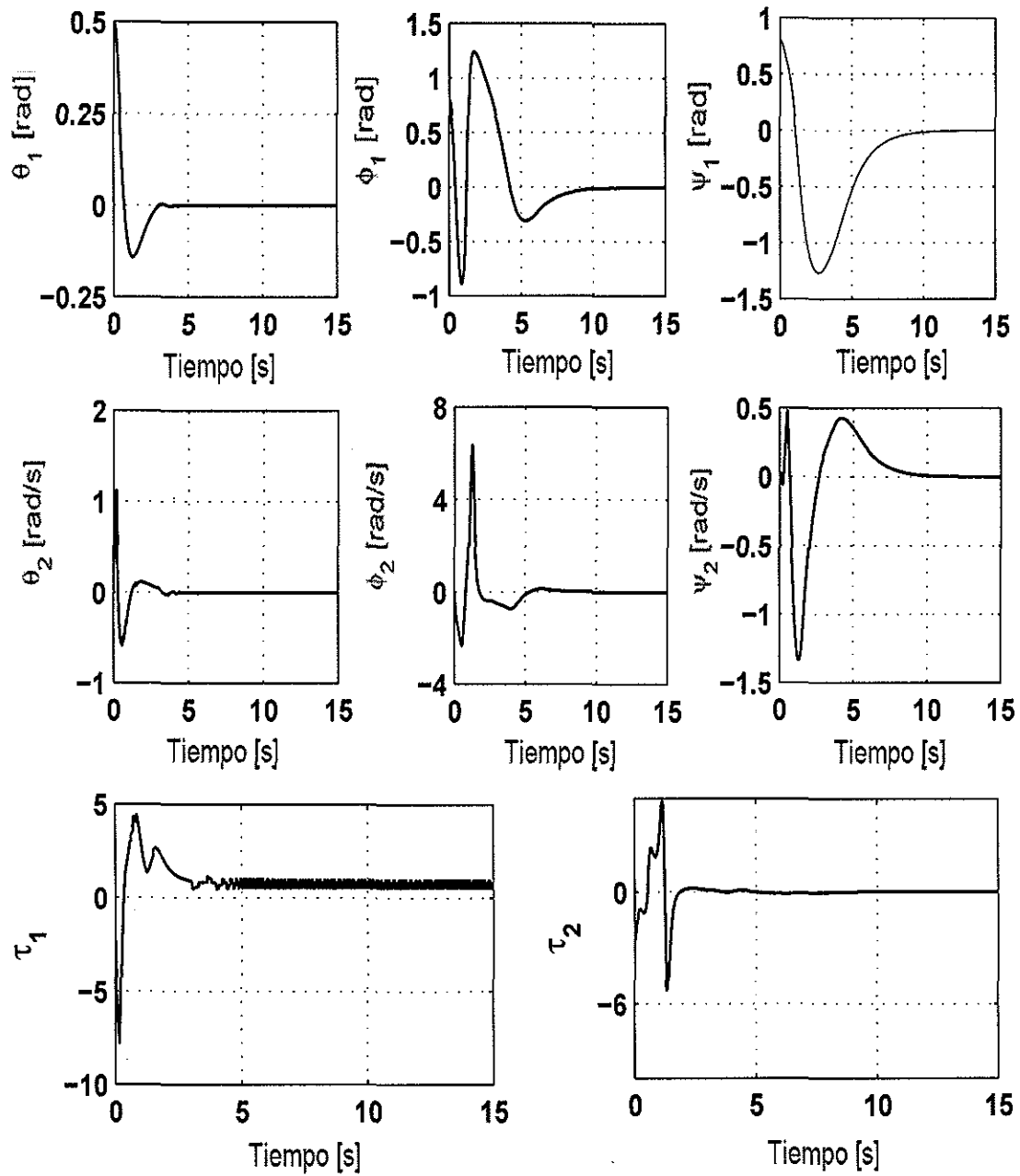


Figura 6. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (15) – (17) sin perturbaciones para estabilización en el origen.

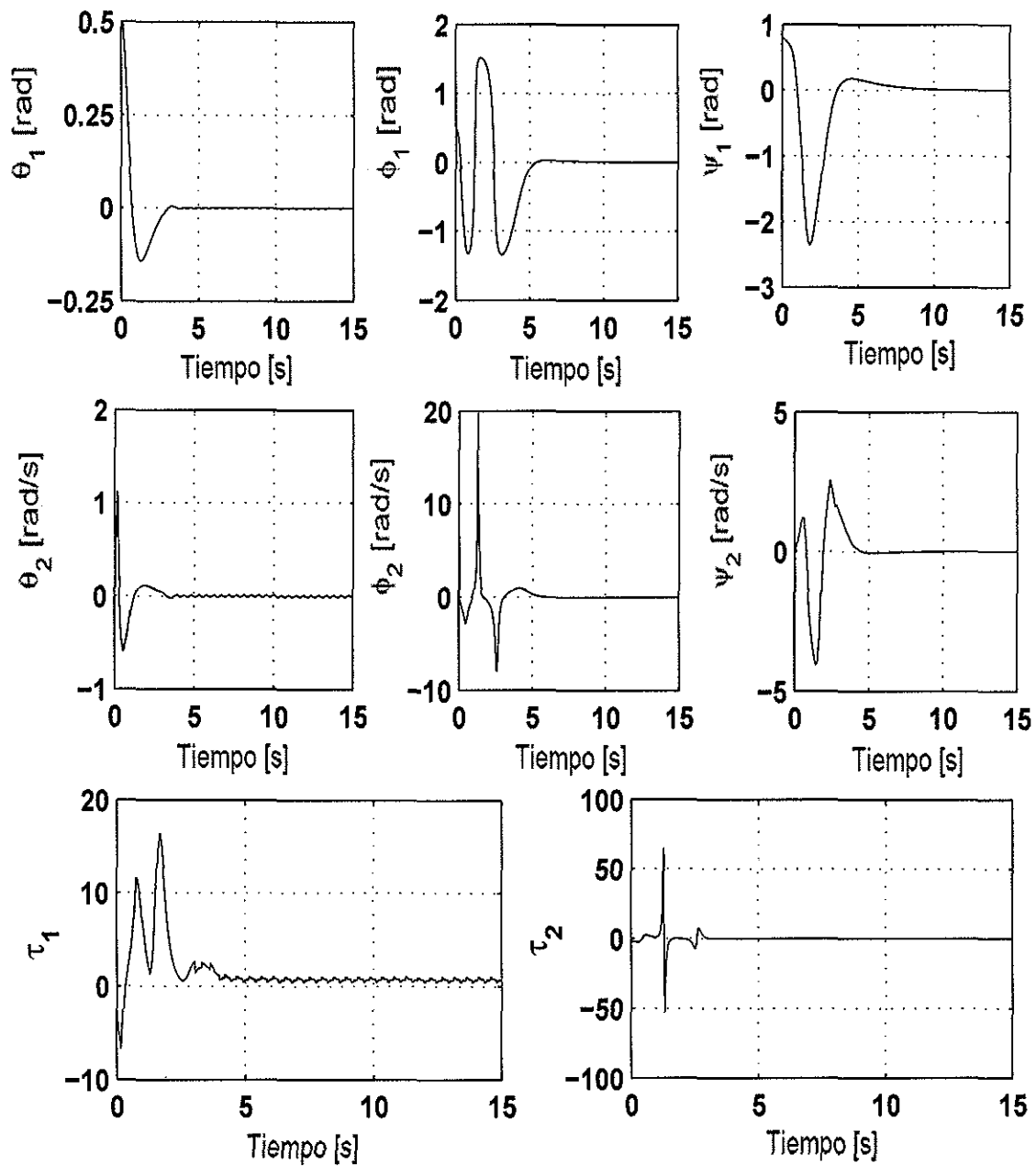


Figura 7. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3-GDL (15) – (17) perturbado para estabilización en el origen.

## Capítulo V

# Control de movimiento: seguimiento de trayectorias

La principal contribución del presente trabajo de tesis para la resolución del problema de seguimiento de trayectorias es la síntesis del control de seguimiento con trayectorias de referencia derivadas del método de restricciones virtuales holonómicas (véase (Shiriaev *et al.*, 2006)).

La solución propuesta consiste de dos etapas: 1) la planeación del movimiento deseado a través de restricciones virtuales holonómicas, y 2) la solución del problema de control de movimiento a través del diseño de un controlador robusto. La primera etapa permite seleccionar un comportamiento deseado factible a lo largo de una trayectoria encontrada a través del cálculo de una dinámica de orden reducido. La segunda etapa implica el diseño de un controlador robusto capaz de atenuar la presencia de perturbaciones para resolver el problema de seguimiento que garantice que el sistema cumplirá con el movimiento deseado.

En las siguientes secciones se presentan tres desarrollos para la resolución de este problema: a) Controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida para el modelo dinámico simplificado (4) - (6), b) Controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida para el modelo dinámico Newton-Euler (7), (8), y c) Controlador de modos deslizantes de segundo orden con retroalimentación de salida para el el modelo dinámico de Newton (15) - (17). Se considera que sólo se cuenta con mediciones de posición del sistema. Los desarrollos basados en la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$ , implican la construcción de una ley de control en donde se incluye, por diseño, un filtro que permite acceder a los estados del sistema.

---

De esta forma, en las formulaciones basadas en  $\mathcal{H}_\infty$ , no es necesario la utilización de observadores; sin embargo, para el desarrollo basado en control por modos deslizantes, se hará uso de los observadores correspondientes (37) - (39) expuestos en el Capítulo II, como parte de la síntesis de control.

En los diseños para los modelos dinámicos simplificado y de Newton, se presentarán resultados numéricos y experimentales; mientras que el control para el modelo dinámico de Newton-Euler, se presentarán solamente resultados numéricos. Finalmente, en la última sección del capítulo se presentará un resumen de lo expuesto y se discutirá la pertinencia de los resultados obtenidos.

## V.1 Control $\mathcal{H}_\infty$ con retroalimentación de salida utilizando el modelo simplificado

Consideremos una trayectoria factible para el sistema mecánico de tres grados de libertad (4) - (6), suponiendo que no existen señales de perturbación, i.e. con  $w_1 \equiv 0$ ,  $w_2 \equiv 0$ , y  $w_3 \equiv 0$ . Dada las coordenadas generalizadas  $q = (\theta, \phi, \psi)^T \in \mathbb{R}^3$ , defínanse las relaciones geométricas independientes

$$F(\mu) = \begin{bmatrix} f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \end{bmatrix}^T \quad (76)$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  son funciones suaves,  $\mu$  es uno de los estados del sistema y se supone que los otros dos estados restantes exhiben un comportamiento en función del estado seleccionado; esto es

$$q \equiv F(\mu). \quad (77)$$

Sustituyendo (76) en la ecuación diferencial correspondiente a la variable de estado seleccionada, sujeto a que la perturbación de este estado sea igual a cero, se obtiene

que la dinámica cero se puede escribir de la siguiente manera

$$\alpha(\mu)\ddot{\mu} + \beta(\mu)\dot{\mu}^2 + \gamma(\mu) = 0 \quad (78)$$

donde  $\mu$  es una nueva variable candidata de reparametrización relacionada a una de las coordenadas generalizadas y para el sistema (4) - (6),

$$\alpha(\mu) = f_3'(\mu), \beta(\mu) = f_3''(\mu), \gamma(\mu) = d \operatorname{sen}(f_2(\mu)). \quad (79)$$

La dinámica resultante de (4) - (6) que restringe a (76) es un sistema dinámico en una variedad definida por  $(\mu, \dot{\mu})$ , el cual es una ecuación diferencial de la forma (78). Los equilibrios de la dinámica de orden reducido (78) son solución de la ecuación

$$\gamma(\mu_0) = d \operatorname{sen}(f_2(\mu_0)) = 0.$$

Una característica particular de esta dinámica de orden reducido es que desaparece la dependencia del tiempo y que la solución puede ser órbitas cerradas de diferentes periodos y amplitudes. Además, la existencia de tales órbitas alrededor del equilibrio  $\mu = \mu_0$  se puede garantizar siempre y cuando (Shiriaev *et al.*, 2006)

$$\frac{\gamma'(\mu_0)}{\alpha(\mu_0)} = \frac{d \cos(f_2(\mu_0)) f_2'(\mu_0)}{f_3'(\mu_0)} > 0. \quad (80)$$

La ventaja más importante de este modelo reducido es que (78) tiene un movimiento integral general (Shiriaev *et al.*, 2006)

$$I(\mu, \dot{\mu}, \mu_0, \dot{\mu}_0) = \dot{\mu}^2 - \Psi(\mu_0, \mu) \left[ \dot{\mu}_0^2 - \int_{\mu_0}^{\mu} \Psi(s, \mu_0) \frac{2\gamma(s)}{\alpha(s)} ds \right] \quad (81)$$

donde

$$\Psi(\mu_0, \mu_1) = \exp \left( -2 \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \right) = \left( \frac{f_3'(\mu_0)}{f_3'(\mu_1)} \right)^2 \quad (82)$$

que conserva su valor a lo largo de la solución de (78)  $[\mu(t), \dot{\mu}(t)]$ , siempre y cuando las condiciones iniciales  $[\mu_0, \dot{\mu}_0]$  se seleccionen de manera apropiada y  $\alpha(\mu) \neq 0$ .

El objetivo entonces es el de resolver el problema de seguimiento de trayectorias para el helicóptero de 3GDL (4) - (6) aplicando el desarrollo que se acaba de presentar mediante la selección de una trayectoria deseada adecuada y el diseño de un controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida para imponer dichas trayectorias y atenuar los efectos de las perturbaciones externas. Se supondrá que las posiciones  $\theta_1(t), \phi_1(t), \psi_1(t)$  son la única información disponible medible del sistema.

### V.1.1 Trayectoria deseada

Seleccionemos la coordenada  $\psi$ , correspondiente al eje de rotación, como nuestra variable de interés con el fin de inducir el movimiento en nuestro sistema (4) - (6). Consecuentemente, dado  $q = [\theta, \phi, \psi]^T$ , las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$  se volverán restricciones virtuales holonómicas dependientes de  $\psi$ ; esto es,

$$F(\psi) = \begin{bmatrix} f_1(\psi), & f_2(\psi), & \psi \end{bmatrix}^T. \quad (83)$$

La dinámica de orden reducido del sistema de lazo cerrado se puede definir de la forma (78) con respecto a (83), donde

$$\alpha(\psi) = I_\psi, \quad \beta(\psi) = 0, \quad \gamma(\psi) = d \operatorname{sen}(f_2(\psi)) \quad (84)$$

siempre y cuando exista una entrada de control nominal  $\tau_d$  requerida para inducir una solución deseada  $\psi = \psi_d(t)$ .

Es posible obtener un modelo simplificado en la forma de (78) para diferentes movimientos especificando comportamientos deseados para la restricción virtual holonómica sustituida en su correspondiente dinámica reducida.

Observe que la dinámica descrita en (84) posee número infinito de equilibrios dado que estos son definidos por la solución de las ecuaciones  $\gamma(\psi_0) = 0$ . Entonces, seleccionando  $f_2(\psi) = \{0, n\pi\}$  y sustituyendo en (84), podemos obtener un nuevo sistema



dado por

$$I_\psi \ddot{\psi} = 0 \quad (85)$$

el cual lleva a una dinámica de orden reducido acotada y una velocidad angular constante  $\dot{\psi}$  a lo largo del movimiento. Ahora, procederemos a diseñar el controlador retroalimentado de salida y ejemplificar proponiendo movimientos específicos para el sistema (84) restringido en  $f_2(\psi)$ .

### V.1.2 Síntesis $\mathcal{H}_\infty$

Resultados teóricos referentes al material básico de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal para sistemas variantes en el tiempo (véase apéndice A) será ahora aplicado para resolver el objetivo de control, el cual consiste en diseñar un controlador que permita al sistema preservar el movimiento deseado  $F(\psi)$  impuesto al sistema mecánico de tres grados de libertad (4) - (6).

Ahora, se tomará la dinámica correspondiente de las variables dependientes  $\theta$  y  $\phi$  del modelo matemático para reformular el nuevo sistema

$$J\ddot{q}_c + \vartheta(q_c) = \tau \quad (86)$$

donde  $J = \text{diag}(\frac{1}{a}, \frac{1}{c})$  es la matriz de inercia,  $\vartheta = [\frac{b}{a}, 0]^T$ ,  $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$  es el vector de pares actuando en el mecanismo, y  $q_c = [\theta, \phi]^T$  son los ángulos para cada grado de libertad restringido del helicóptero.

Supóngase que el vector de trayectorias deseadas  $q_d = \text{col}\{q_{di}(t)\}$  para el mecanismo es continuamente diferenciable y las funciones  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{q}_d(t)$  son acotadas de manera uniforme en  $t$ . Note que tales condiciones se pueden satisfacer fácilmente seleccionando la restricción virtual holonómica de manera apropiada.

Si no existen perturbaciones externas, entonces el movimiento deseado se puede

forzar por el par externo

$$\tau_d = J\ddot{q}_d + \mathcal{V}(q_d) \quad (87)$$

en cualquier instante de tiempo  $t_0 \in \mathbb{R}$  (la ausencia de perturbaciones externas significa que  $q_c(t_0) = q_d(t_0)$ ,  $\dot{q}_c(t_0) = \dot{q}_d(t_0)$ ).

El objetivo es diseñar un controlador de la forma

$$\tau = \tau_d + u \quad (88)$$

que imponga en el movimiento del mecanismo libre de perturbaciones las propiedades de estabilidad deseadas alrededor de  $q_d(t) \in \mathbb{R}^2$  mientras que atenúe de manera local los efectos de perturbaciones  $w$ . Así, el controlador consiste del compensador de trayectorias (87) y el atenuador de perturbaciones  $u(t)$ , estabilizando de manera interna el sistema de lazo cerrado alrededor de la trayectoria deseada.

Para empezar, se introduce el vector de error  $x = (x_1, x_2)^T$  donde

$$x_1 = \left[ f_1(\psi) - \theta, f_2(\psi) - \phi \right]^T \quad (89)$$

es el error de posición con respecto a la trayectoria deseada  $q_d = [f_1(\psi), f_2(\psi)]^T$  y

$$x_2 = [f_1(\psi) - \dot{\theta}, f_2(\psi) - \dot{\phi}]^T \quad (90)$$

es el vector de error de velocidad con respecto a la velocidad deseada  $\dot{q}_d = [\dot{f}_1(\psi), \dot{f}_2(\psi)]^T$

Después de esto, reescribiendo la ecuación de estado (86)–(88) como

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = J^{-1}[\mathcal{V}(q_d - x_1) - \mathcal{V}(q_d) - u - w_1] \quad (91)$$

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_2 \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} u(t) \quad (92)$$

$$y = x_1 + w_0 \quad (93)$$

donde  $w = (w_0, w_1) \in \mathbb{R}^4$  son las perturbaciones externas. Dado que el lado derecho de las ecuaciones de error (91)–(93) son dos veces continuamente diferenciables en  $x$  de manera local alrededor del origen  $x = 0$  para toda  $t$ , el problema de control de seguimiento  $\mathcal{H}_\infty$  no es nada más que la aproximación de la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal de sistemas variantes en el tiempo abordada en el apéndice A con

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ J^{-1} [\vartheta(q_d - x_1) - \vartheta(q_d)] \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$g_1(x, t) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -J^{-1} \end{bmatrix}, \quad g_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ -J^{-1} \end{bmatrix}$$

$$h_1(x, t) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1,$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (95)$$

Aplicando el Teorema 10 presentado en el apéndice A a este sistema se deriva una solución local al ya mencionado problema de control de posición  $\mathcal{H}_\infty$ .

### V.1.3 Resultados numéricos

A continuación se presentarán resultados numéricos para evaluar el desempeño del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida desarrollado para el sistema mecánico helicóptero de 3GDL (4) - (6).

### Movimiento periódico en el eje rotacional $\psi$ imponiendo trayectorias constantes en elevación $\theta$ y dirección $\phi$

En este primer caso, considérese que las trayectorias deseadas para los ángulos de elevación  $\theta_d$  y dirección  $\phi_d$  están definidas por

$$\begin{aligned}\theta_d &= f_1(\psi) \equiv \kappa_1 \\ \phi_d &= f_2(\psi) \equiv \{0, n\pi\}.\end{aligned}\tag{96}$$

Ahora, seleccionese  $\psi_d(t) \in [0, 2\pi]$  [rad] como la trayectoria periódica con  $T = 12.57$  [s],  $\psi_d(0) = 0$  [rad] y  $\dot{\psi}_d(0) = 0.5$  [rad/s].

Las condiciones iniciales escogidas para las simulaciones están definidas por  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$ ,  $\phi_1(0) = 0$ ,  $\phi_2(0) = 0.5$ ,  $\psi_1(0) = 0$ ,  $\psi_2(0) = 0.6$  afectadas por las perturbaciones  $w_1(t) = 0.2 \cos(30t)$ ,  $w_2(t) = 0.1 \cos(50t)$ ,  $w_3(t) = 0.5 \cos(40t)$ . Los valores de las restricciones virtuales son  $f_1(\psi) = \kappa_1 = 1$  y  $f_2(\psi) = 0$ , y los valores de los parámetros para el controlador  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal están definidos por  $\rho = 1$ ,  $\gamma = 800$ , y  $\varepsilon = 1$ .

En la Figura 8, se observa que el controlador  $\mathcal{H}_\infty$  propuesto lleva al sistema al comportamiento deseado descrito por (96), así como también los voltajes aplicados a cada actuador (recuerde que  $\tau_1 = V_f + V_b$  y  $\tau_2 = V_f - V_b$ , en donde  $V_f$  y  $V_b$  son los voltajes aplicados a los motores *Front* y *Back*, respectivamente). El movimiento periodico está implícito por el hecho de que las condiciones iniciales y finales sobre el periodo son iguales, esto es,  $\psi_d(0) = \psi_d(T)$  y  $\dot{\psi}_d(0) = \dot{\psi}_d(T)$ .

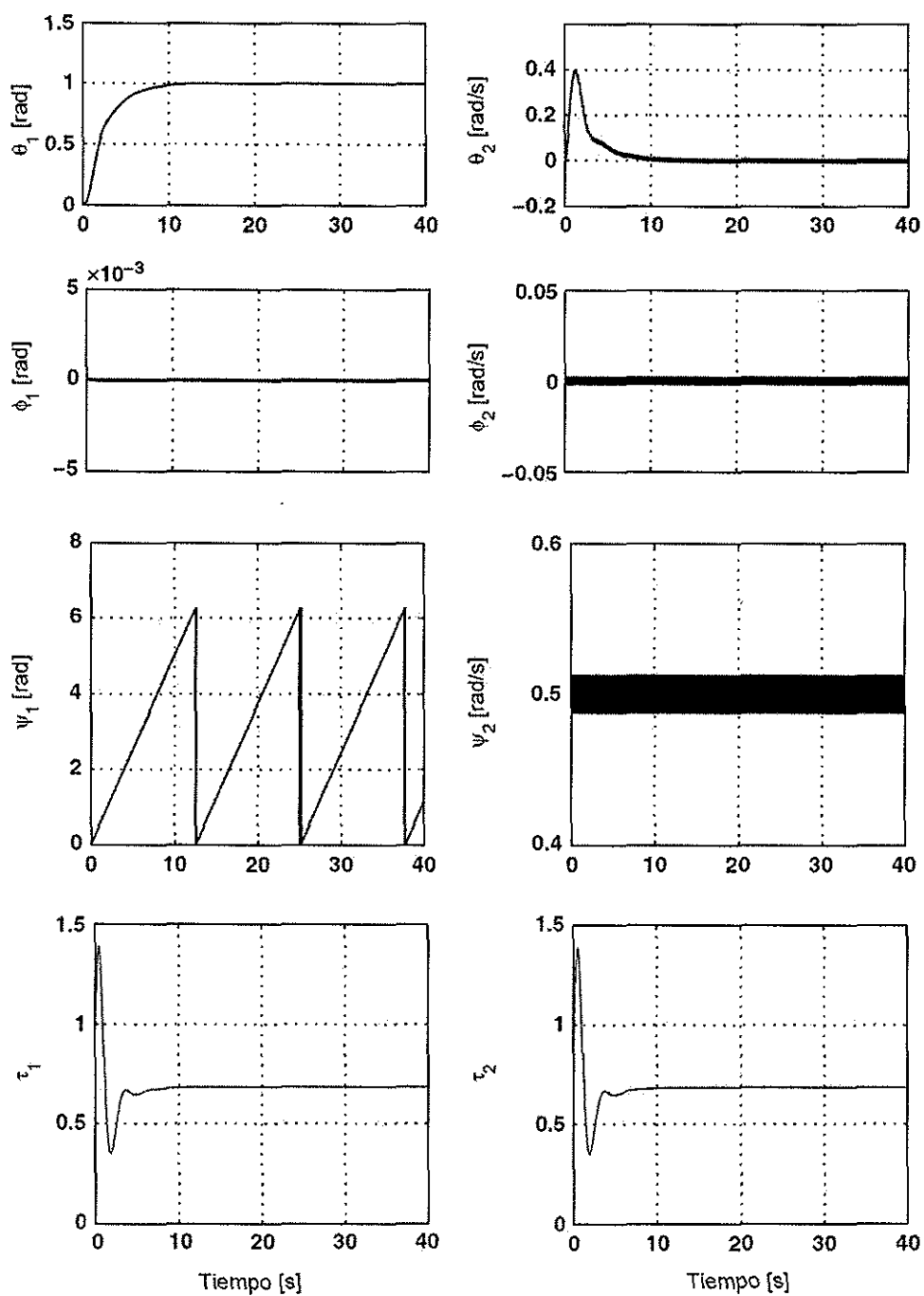


Figura 8. Simulación: Comportamiento del helicóptero de 3GDL (4)–(6) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (96) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = 1$  y  $f_2(\psi) = 0$ .

### Movimiento periódico en el eje rotacional $\psi$ imponiendo trayectoria cíclica en elevación $\theta$ y constante en dirección $\phi$

En este segundo caso, el ángulo de elevación deseado  $\theta_d$  es una función periódica de  $\psi$  mientras que el ángulo de dirección  $\phi_d$  permanece constante, esto es,

$$\begin{aligned}\theta_d &= f_1(\psi) \equiv \kappa_1 \cdot \text{sen}(\lambda\psi) \\ \phi_d &= f_2(\psi) \equiv \{0, n\pi\},\end{aligned}\tag{97}$$

donde  $\kappa_1$  y  $\lambda$  son constantes positivas. En este caso, se obtiene la misma dinámica de orden reducido que en el caso anterior,

$$J_t \ddot{\psi} = 0.\tag{98}$$

Nótese que el movimiento de dirección-rotación, de acuerdo al modelo simplificado (4)–(6), no tiene influencia en el movimiento inducido en el ángulo de elevación. De todas maneras, el controlador no lineal  $\mathcal{H}_\infty$  se aplica de la misma forma con la finalidad de imponer el comportamiento deseado (97) en el sistema.

Las condiciones iniciales utilizadas en las simulaciones son  $\theta_1(0) = \pi, \theta_2(0) = 0, \phi_1(0) = -0.1, \phi_2(0) = 0.1, \psi_1(0) = \pi, \psi_2(0) = 0.5$  con  $\kappa_1 = \lambda = 1$ , afectadas por las perturbaciones  $w_1(t) = 0.1 \cos(50t), w_2(t) = 0.2 \cos(70t), w_3(t) = 0.3 \cos(70t)$ .

Se utilizan los mismos valores para los parámetros del controlador que en el caso anterior y la trayectoria periodica obtenida en el ángulo de rotación es  $\psi_d(t) \in [0, 2\pi]$  [rad] para  $t \in [0, T]$  con  $T = 31.416$  [s],  $\psi_d(0) = 0$  [rad], y  $\dot{\psi}_d(0) = 0.2$  [rad/s]. Los resultados numéricos obtenidos se muestran en la Figura 9.

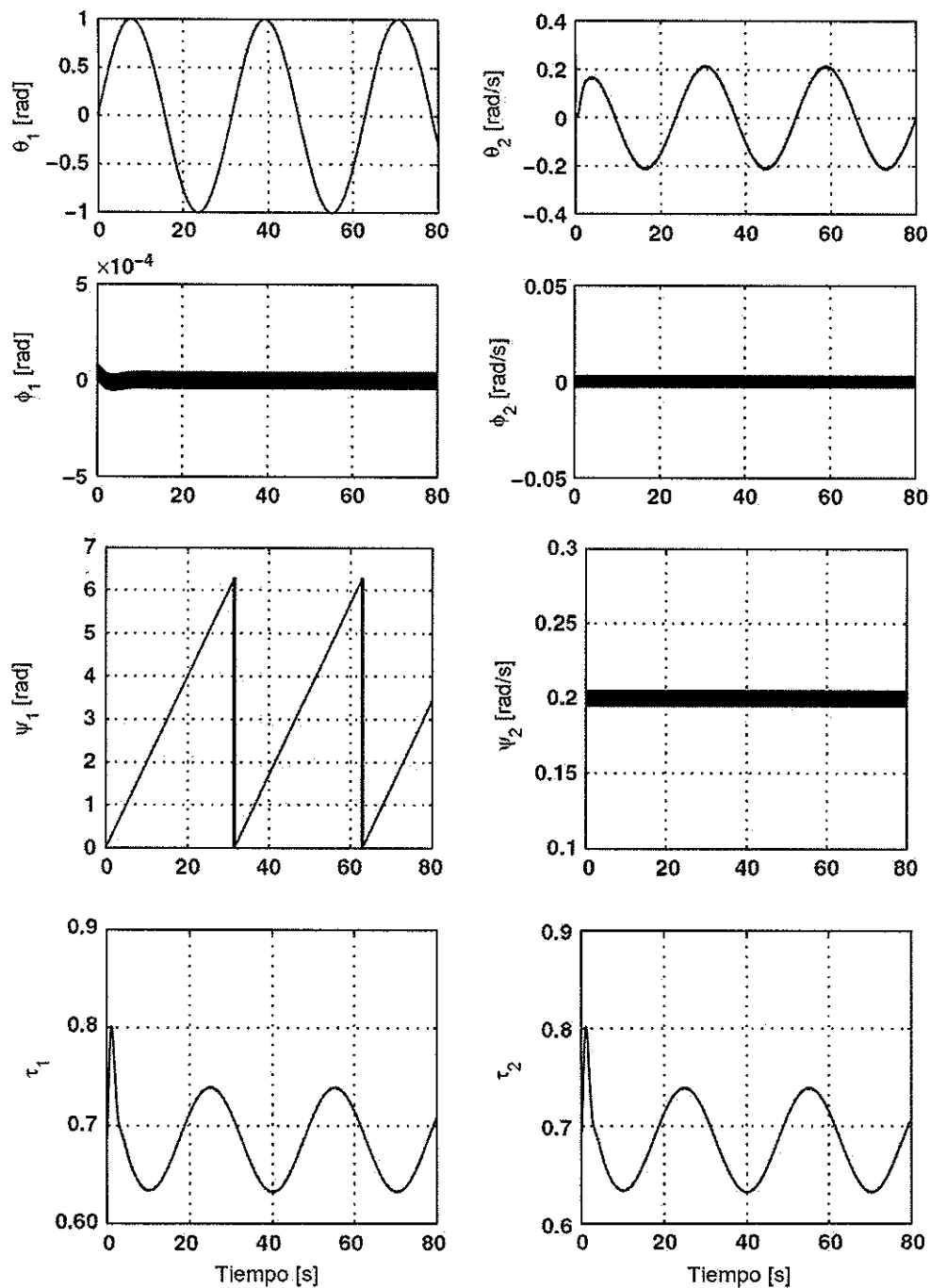


Figura 9. Simulación: Comportamiento del helicóptero de 3GDL (4)–(6) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (97) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = \text{sen}(\psi)$  y  $f_2(\psi) = 0$ .

## V.2 Control $\mathcal{H}_\infty$ con retroalimentación de salida utilizando el modelo de Newton-Euler

De manera similar al control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida utilizado para el modelo simplificado presentado en la sección anterior, el objetivo es resolver el problema de seguimiento de trayectorias para el helicóptero de 3GDL (7), (8) mediante la selección de una trayectoria deseada adecuada y el diseño de un controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida para imponer dichas trayectorias y atenuar los efectos de las perturbaciones externas. Se considerará que las posiciones  $\theta_1(t), \phi_1(t), \psi_1(t)$  son la única información medible del sistema.

### V.2.1 Trayectoria deseada

Definiendo el siguiente conjunto de restricciones virtuales

$$F(\psi) = \left[ \psi, f_1(\psi), f_2(\psi) \right]^T \quad (99)$$

donde el estado que corresponde al ángulo de rotación  $\psi$  es seleccionada como variable de referencia. La dinámica cero de (7), (8) con (99) sin señales de perturbación, esto es,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ , está descrita por

$$\alpha(\psi)\ddot{\psi} + \beta(\psi)\dot{\psi}^2 + \gamma(\psi)\psi = 0. \quad (100)$$



Las funciones correspondientes a los coeficientes escalares  $\alpha(\psi)$ ,  $\beta(\psi)$ , y  $\gamma(\psi)$  pueden ser calculadas siguiendo la prueba de la Proposición 2 de (Shiriaev *et al.*, 2005), como

$$\begin{aligned}\alpha(\psi) &= I_\psi(1 - f_2'(\psi) \operatorname{sen}(f_1(\psi))), \\ \beta(\psi) &= -I_\psi \operatorname{sen}(f_1(\psi)) f_2''(\psi) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\psi)(I_\phi - I_\theta) \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) \operatorname{sen}(\psi)(I_\phi - I_\theta) \cos^2(f_1(\psi)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_1'(\psi) \\ f_2'(\psi) \end{bmatrix}^2 \\ &\quad - ((I_\phi - I_\theta) \cos^2(\psi) + (I_\theta - I_\phi) \operatorname{sen}^2(\psi) + I_\psi \cos(f_1(\psi)) f_1'(\psi) f_2'(\psi)) \\ \gamma(\psi) &= 0.\end{aligned}$$

Finalmente, la trayectoria deseada puede ser definida a través de una adecuada selección de funciones para el conjunto de restricciones virtuales (99) y el cálculo de la dinámica cero correspondiente (100) para alcanzar el comportamiento deseado.

### V.2.2 Síntesis $\mathcal{H}_\infty$

Para el diseño del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida, se utiliza la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  desarrollada para sistemas no lineales variantes en el tiempo que se encuentra descrita en el apéndice A. Tal controlador permite que el sistema alcance el comportamiento deseado (114) impuesto para el sistema mecánico de 3GDL (7), (8).

Supóngase que el vector de trayectorias deseadas  $q_d = \operatorname{col}\{q_{di}(t)\}$  para el mecanismo es continuamente diferenciable y las funciones  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{q}_d(t)$  son acotadas de manera uniforme en  $t$ . Si no existen perturbaciones externas, entonces el movimiento deseado se puede forzar por el par externo

$$\tau_d = J(q_d)\ddot{q}_d + \vartheta(q_d, \dot{q}_d) \quad (101)$$

en cualquier instante de tiempo  $t_0 \in \mathbb{R}$  (la ausencia de perturbaciones externas significa que  $q_c(t_0) = q_d(t_0)$ ,  $\dot{q}_c(t_0) = \dot{q}_d(t_0)$ ).

El objetivo es diseñar un controlador de la forma

$$\tau = \tau_d + u \quad (102)$$

que imponga en el movimiento del mecanismo libre de perturbaciones las propiedades de estabilidad deseadas alrededor de  $q_d(t) \in \mathbb{R}^2$  mientras que atenúe de manera local los efectos de perturbaciones  $w$ . Así, el controlador consiste del compensador de trayectorias (101) y el atenuador  $u(t)$ , estabilizando de manera interna el sistema de lazo cerrado alrededor de la trayectoria deseada.

Para empezar, se introduce el vector de error  $x = (x_1, x_2)^T$  donde

$$x_1 = \begin{bmatrix} f_1(\psi) - \phi, & f_2(\psi) - \theta, & 0 \end{bmatrix}^T \quad (103)$$

es el error de posición con respecto a la trayectoria deseada  $q_d = [f_1(\psi), f_2(\psi), \psi]^T$  y

$$x_2 = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(\psi) - \dot{\phi}, & \dot{f}_2(\psi) - \dot{\theta}, & 0 \end{bmatrix}^T \quad (104)$$

es el vector de error de velocidad con respecto a la velocidad deseada  $\dot{q}_d = [\dot{f}_1(\psi), \dot{f}_2(\psi), \dot{\psi}]^T$ . Después de esto, reescribiendo la ecuación de estado (7), (8), (101), (102) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q}_d + J^{-1}(q_d - x_1)[\vartheta(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2) - \vartheta(q_d, \dot{q}_d) \\ &\quad - J(q_d)\ddot{q}_d - u - w_1] \end{aligned} \quad (105)$$

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} u(t) \quad (106)$$

$$y = x_1 + w_0 \quad (107)$$

donde  $w = (w_0, w_1) \in \mathbb{R}^6$  son las perturbaciones externas. Dado que el lado derecho de las ecuaciones de error (105)–(107) son dos veces continuamente diferenciables en  $x$  de manera local alrededor del origen  $x = 0$  para toda  $t$ , el problema de control de

seguimiento  $\mathcal{H}_\infty$  no es nada más que la aproximación de la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal de sistemas variantes en el tiempo abordada en el apéndice A con

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \ddot{q}_d + J^{-1}(q_d - x_1)[\vartheta(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1}(q_d - x_1)[\vartheta(q_d, \dot{q}_d) + J(q_d)\ddot{q}_d + u + w_1] \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$g_1(x, t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -J^{-1}(q_d - x_1) \end{bmatrix},$$

$$g_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ -J^{-1}(q_d - x_1) \end{bmatrix},$$

$$h_1(x, t) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1,$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (109)$$

Ahora, aplicando el Teorema 10 presentado en el apéndice A, a este sistema se deriva una solución local al ya mencionado problema de control de posición  $\mathcal{H}_\infty$ . Las propiedades de estabilizabilidad y detectabilidad de los sistemas de control están garantizadas por la existencia de las soluciones de las ecuaciones diferenciales sin perturbaciones de Riccati.

### V.2.3 Resultados numéricos

A continuación, se presentan resultados numéricos utilizando los controladores diseñados en esta sección para la resolución del problema de seguimiento de trayectorias aplicando control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida y restricciones virtuales holonómicas al helicóptero de 3-GDL (7), (8).

### Movimiento periódico en el eje rotacional $\psi$ imponiendo trayectorias constantes en elevación $\theta$ y dirección $\phi$ cíclica

Para este caso, se selecciona un conjunto de restricciones virtuales holonómicas como trayectorias deseadas definidas por

$$\theta_d = f_1(\psi) = \kappa_1, \quad \phi_d = f_2(\psi) = \kappa_2 \cos(\lambda_1 \psi) \quad (110)$$

con parámetros  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 1$ , y  $\lambda_1 = 1$ . Sustituyendo las trayectorias deseadas (110), se obtiene que el sistema de orden reducido que corresponde a la dinámica cero es descrita por

$$I_\psi \ddot{\psi} + (I_\theta - I_\phi) \cos(\psi) \sin^3(\psi) \dot{\psi}^2 = 0, \quad (111)$$

siempre y cuando exista una entrada de control nominal  $\tau_d$  necesaria para alcanzar la solución deseada  $\psi = \psi_d(t)$ .

Las condiciones iniciales del helicóptero seleccionadas para las simulaciones son  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$ ,  $\psi_1(0) = 0.2$ ,  $\psi_2(0) = 0.5$ ,  $\phi_1(0) = 0$ ,  $\phi_2(0) = 0.6$  afectado por las perturbaciones definidas por

$$\begin{aligned} w_1(t) &= 0.2 \cos(30t), & w_2(t) &= 0.5 \cos(40t), \\ w_3(t) &= 0.1 \cos(50t). \end{aligned}$$

El objetivo de control fue alcanzado utilizando un controlador  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal con valores paramétricos  $\rho = 1$ ,  $\gamma = 800$ , y  $\varepsilon = 1$ .

Se observa un buen desempeño del controlador propuesto y se concluye que el objetivo de control es alcanzado basados en los resultados mostrados en la Figura 10. El sistema cumple con el comportamiento deseado (110) y en consecuencia, el eje de rotación presenta un movimiento periódico. Los pares de control aplicados también se muestran en la Figura 10.

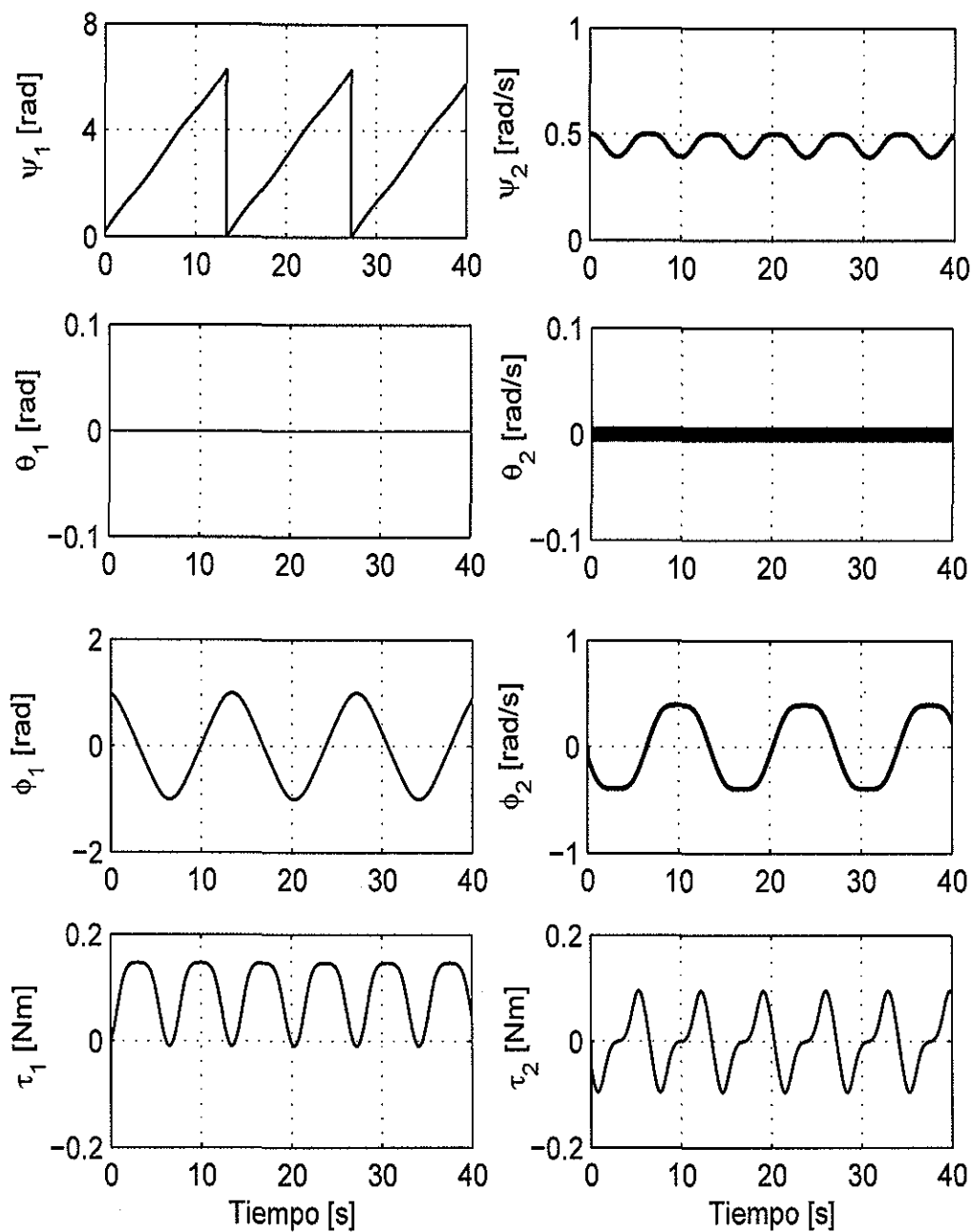


Figura 10. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (7), (8) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (110) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = 0$  y  $f_2(\psi) = \cos(\psi)$ .

### Movimiento periódico en el eje rotacional $\psi$ imponiendo trayectoria cíclica en elevación $\theta$ y constante en dirección $\phi$

Considérese ahora el caso en donde las trayectorias deseadas para los ángulos de elevación y dirección están definidas por

$$\theta_d = f_1(\psi) = \kappa_1 \cos(\lambda_1 \psi), \quad \phi_d = f_2(\psi) = \kappa_2 \quad (112)$$

con parámetros  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 0.5$ , y  $\lambda_1 = 1$ . Sustituyendo (112), la dinámica cero del sistema reducido (100) está descrita por

$$I_\psi \ddot{\psi} + \sin^3(\psi) \cos(\psi) (I_\phi - I_\theta) \dot{\psi}^2 = 0. \quad (113)$$

Las condiciones iniciales del sistema son  $\theta_1(0) = 1$ ,  $\theta_2(0) = 0$ ,  $\psi_1(0) = 0.2$ ,  $\psi_2(0) = 0.5$ ,  $\phi_1(0) = 0.5$ ,  $\phi_2(0) = 0$  y  $\kappa_1 = \lambda = 1$ , afectado por las perturbaciones

$$\begin{aligned} w_1(t) &= 0.1 \cos(50t), & w_2(t) &= 0.3 \cos(70t), \\ w_3(t) &= 0.2 \cos(70t). \end{aligned}$$

Los mismos valores paramétricos del caso anterior fueron utilizados. Los resultados de simulación demuestran un buen desempeño del sistema en lazo cerrado y se muestran en la Figura 11.

## V.3 Control por modos deslizantes de segundo orden utilizando el modelo de Newton

En esta sección se presenta el diseño de un control por modos deslizantes para el helicóptero de 3GDL (15) - (17). El objetivo es resolver el problema de seguimiento de trayectorias con la finalidad de que el sistema alcance el movimiento deseado en presencia de perturbaciones externas. Se supone que las posiciones  $\theta_1(t)$ ,  $\phi_1(t)$ ,  $\psi_1(t)$  son

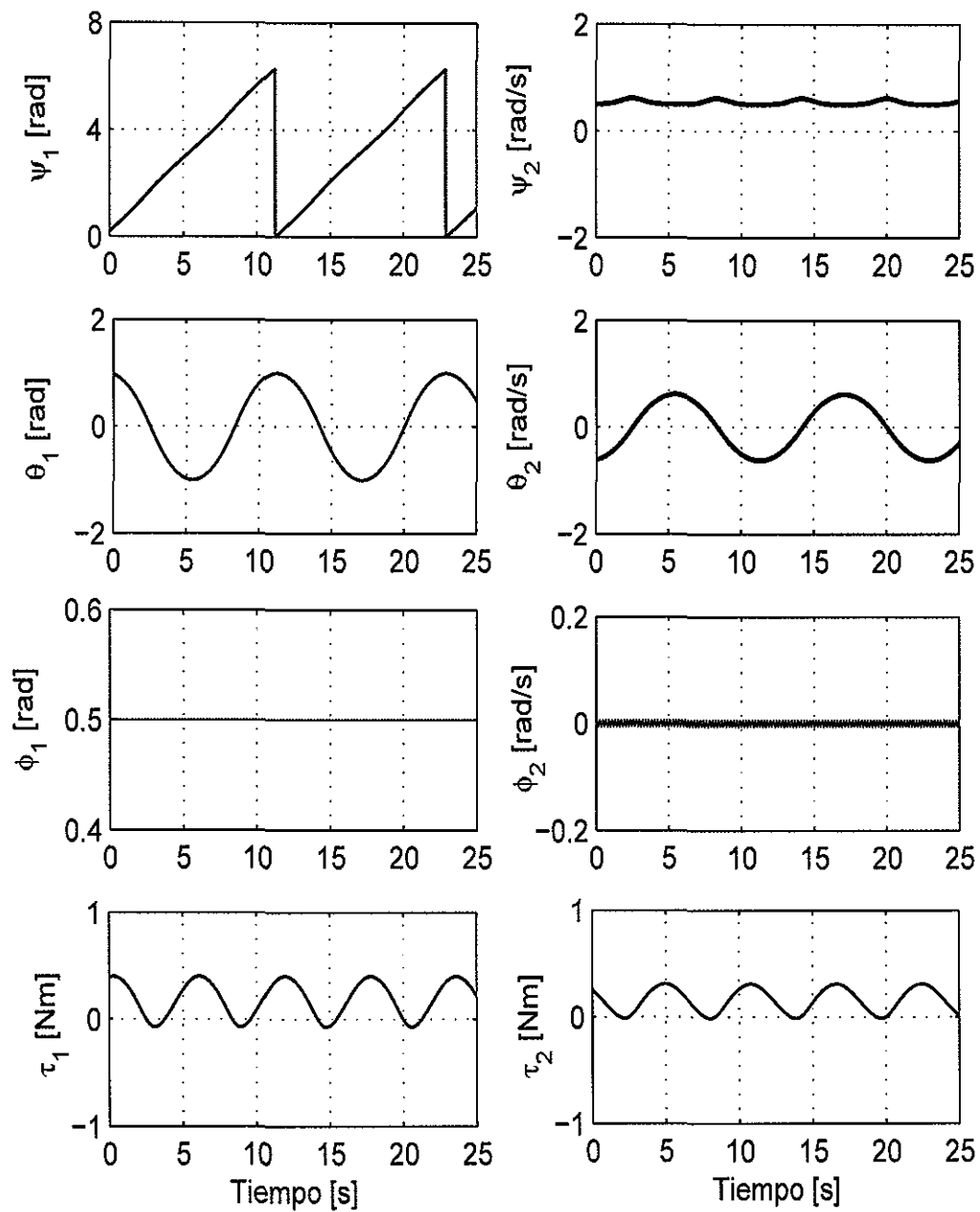


Figura 11. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (7), (8) con perturbaciones para las trayectorias deseadas (112) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = \cos(\psi)$  y  $f_2(\psi) = 0.5$

Tabla IV. Valores de las funciones  $\alpha(\psi)$ ,  $\beta(\psi)$  y  $\gamma(\psi)$  de la dinámica reducida (115)

$\alpha(\psi) = 1,$ $\beta(\psi) = -c_1(S + S' \text{sen}(f_2(\psi)))$ $\gamma(\psi) = -c_2 \tan(f_2(\psi)) \cos(f_1(\psi)) f_1''(\psi) + c_3 \tan(f_2(\psi)) \cos(f_1(\psi)) \text{sen}(f_1(\psi) + \theta_0)$ $+ c_4 \text{sen}(f_1(\psi)) \text{sen}(f_2(\psi)) f_2''(\psi) + c_5 \text{sen}(f_1(\psi)) \text{sen}^2(f_2(\psi))$
---

la única información disponible medible del sistema; en consecuencia, las velocidades serán estimadas por los observadores (37), (38) y (39) presentados en el capítulo III para el modelo dinámico de Newton (15) - (17).

### V.3.1 Trayectoria deseada

Definiendo el siguiente conjunto de restricciones virtuales

$$F(\psi) = \begin{bmatrix} f_1(\psi), & f_2(\psi), & \psi \end{bmatrix}^T \quad (114)$$

donde el estado que corresponde al ángulo de rotación  $\psi$  es seleccionada como variable de referencia.

La dinámica cero de (15) - (17) con (114) sin señales de perturbación, esto es,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ , está descrita por

$$\alpha(\psi)\ddot{\psi} + \beta(\psi)\dot{\psi}^2 + \gamma(\psi)\psi = 0. \quad (115)$$

Las funciones de los coeficientes escalares  $\alpha(\psi)$ ,  $\beta(\psi)$ , and  $\gamma(\psi)$ , que se muestran en la Tabla IV, fueron calculados de acuerdo a la prueba de la proposición 2 de (Shiriaev *et al.*, 2005) con  $c_1 = \rho \frac{L^2}{2}$ ,  $c_2 = J_p J_t^{-1}$ ,  $c_3 = M g l_\theta J_t^{-1}$ ,  $c_4 = J_r J_t^{-1}$  y  $c_5 = m g l_\phi J_t^{-1}$ .

Finalmente, la trayectoria deseada puede ser definida mediante la selección adecuada de funciones para el conjunto de restricciones virtuales (114) para los ángulos



de elevación  $\theta$  y dirección  $\phi$  como trayectorias deseadas  $q_d = [f_1(\psi), f_2(\psi)]^T$ . Como resultado, la diámica cero (115) obtenida de imponer dichas restricciones representan el comportamiento dinámico de la variable de estado escogida  $\psi$  cuando las trayectorias deseadas son impuestas en el sistema por el controlador.

### V.3.2 Control por modos deslizantes para los ángulos de elevación $\theta$ y dirección $\phi$

Definiendo  $\theta_1 = \theta$ ,  $\theta_2 = \dot{\theta}$ ,  $\phi_1 = \phi$ ,  $\phi_2 = \dot{\phi}$ ,  $\psi_1 = \psi$ , y  $\psi_2 = \dot{\psi}$ , además del vector de errores  $\hat{q} = (x, y)^T$  donde

$$x = \begin{bmatrix} f_1(\psi_1) - \theta_1, & f_2(\psi_1) - \phi_1 \end{bmatrix}^T \quad (116)$$

corresponde a el error de posición con respecto a las trayectorias deseadas  $q_d = [f_1(\psi_1), f_2(\psi_1)]^T$

y

$$y = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(\psi_1) - \theta_2, & \dot{f}_2(\psi_1) - \phi_2 \end{bmatrix}^T \quad (117)$$

es el error con respecto a las velocidades deseadas  $\dot{q}_d = [\dot{f}_1(\psi_1), \dot{f}_2(\psi_1)]^T$ .

Se obtiene la nueva descripción de los estados del sistema (15) - (17), (116), y (117) dados por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= a \cos(x_2 + f_2(\psi_1))\tau_1 - b \sin(x_1 + f_1(\psi_1) + \theta_0) \\ &\quad - \ddot{f}_1(\psi_1) + w_1 \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= c\tau_2 - d \sin(x_2 + f_2(\psi_1)) - \ddot{f}_2(\psi_1) + w_2 \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\
\dot{\psi}_2 &= e \cos(x_1 + f_1(\psi_1)) \sin(x_2 + f_2(\psi_1)) \tau_1 \\
&\quad - f \sin(x_1 + f_1(\psi_1)) \sin(x_2 + f_2(\psi_1)) \tau_2 \\
&\quad - \rho \frac{L^2}{2} (S + S' \sin(x_2 + f_2(\psi_1))) \psi_2^2 + w_3.
\end{aligned} \tag{120}$$

Finalmente, se proponen las siguiente leyes cuasihomogéneas de control basadas en modos deslizantes de segundo orden

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{1}{a \cos(x_2 + f_2(\psi_1))} [b \sin(x_1 + f_1(\psi_1) + \theta_0) + \ddot{f}_1(\psi_1) \\
&\quad - h_1 x_1 - p_1 y_1 - \alpha_1 \text{sign}(x_1) - \beta_1 \text{sign}(y_1)],
\end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{1}{c} [d \sin(x_2 + f_2(\psi_1)) + \ddot{f}_2(\psi_1) - h_2 x_2 - p_2 y_2 \\
&\quad - \alpha_2 \text{sign}(x_2) - \beta_2 \text{sign}(y_2)],
\end{aligned} \tag{122}$$

con  $x_2 + f_2(\psi_1) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , inspirada en (Orlov, 2009), con la finalidad de estabilizar asintóticamente de forma global los ángulos de elevación y dirección considerando que tanto las posiciones  $(x_1 + f_1(\psi_1), x_2 + f_2(\psi_1))$  como las velocidades angulares  $(y_1 + \dot{f}_1(\psi_1), y_2 + \dot{f}_2(\psi_1))$  están disponibles. Aplicando estas leyes de control, los subsistemas en lazo cerrado descrito por (118), (121) y (119),(122) son estables en tiempo finito de forma global mientras los valores de los parámetros sean tales que

$$h_1, p_1 \geq 0, \alpha_1 - M_1 > \beta_1 > M_1 \tag{123}$$

$$h_2, p_2 \geq 0, \alpha_2 - M_2 > \beta_2 > M_2 \tag{124}$$

para alguna  $M_1, M_2 > 0$ . Adicionalmente, esta estabilidad se mantiene sin importar la presencia de perturbaciones externas  $w_1, w_2$  de magnitud acotada afectando el sistema,

siempre y cuando se cumpla que

$$\sup_t |w_1(t)| \leq M_1 \quad (125)$$

$$\sup_t |w_2(t)| \leq M_2. \quad (126)$$

**Teorema 9** *Sea el sistema perturbado (118) retroalimentado con el controlador (121) sujeto a las condiciones (123) con una constante positiva  $M_1 > 0$ . Entonces el sistema en lazo cerrado (118), (121) es estable en tiempo finito de forma global condicionado a que las perturbaciones externas  $w_1(t)$  cumplan la cota superior (125) para la misma constante  $M_1$ .*

**Prueba** La validación del Teorema 9 sigue la línea del razonamiento aplicado al Teorema 5 presentado en el capítulo IV.  $\square$

De esta misma forma, se sigue el razonamiento presentado en el teorema anterior para probar que el sistema en lazo cerrado (119), (122) sujeto a (124) con una constante positiva  $M_2 > 0$  es estable en tiempo finito de forma global condicionado a que las perturbaciones externas  $w_2(t)$  cumplan la cota superior (126) para la misma constante  $M_2$ .

### V.3.3 Síntesis con retroalimentación de salida

Los controladores retroalimentados  $\tau_1$  y  $\tau_2$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \frac{1}{a \cos(x_2 + f_2(\psi_1))} [b \operatorname{sen}(x_1 + f_1(\psi_1) + \theta_0) + \ddot{f}_1(\psi_1) \\ & - h_1 x_1 - p_1 \hat{y}_1 - \alpha_1 \operatorname{sign}(x_1) - \beta_1 \operatorname{sign}(\hat{y}_1)], \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \frac{1}{c} [d \operatorname{sen}(x_2 + f_2(\psi_1)) + \ddot{f}_2(\psi_1) - h_2 x_2 - p_2 \hat{y}_2 \\ & - \alpha_2 \operatorname{sign}(x_2) - \beta_2 \operatorname{sign}(\hat{y}_2)], \end{aligned} \quad (128)$$

se obtiene al sustituir las variables observadas correspondientes  $\hat{y}_1, \hat{y}_2$  en las leyes de control (121), (122) por las variables de estado  $y_1, y_2$ .

### V.3.4 Resultados numéricos

A continuación, se muestran resultados numéricos aplicando los controladores basados en modos deslizantes de segundo orden (127), (128) al modelo dinámico de Newton (15) - (17).

#### Movimiento periódico de rotación $\psi$ con elevación $\theta$ y dirección $\phi$ constantes

Para este caso, selecciónese

$$\theta_d = f_1(\psi) = \kappa_1, \quad \phi_d = f_2(\psi) = \kappa_2 \quad (129)$$

con parametros  $\kappa_1 = 0.2$  y  $\kappa_2 = 0.1$ . Sustituyendo las funciones deseadas propuestas (129), la dinámica del sistema de orden reducido se define por

$$\ddot{\psi} - c_1(S + S' \sin(\kappa_2))\dot{\psi}^2 + c_3 \tan(\kappa_2) = 0, \quad (130)$$

siempre y cuando exista una entrada de control  $(\tau_1, \tau_2)^T$  que permita inducir la solución deseada  $\psi = \psi_d(t)$ .

El desempeño del controlador alcanzando los objetivos de control impuestos se muestran en la Figura 12 y se observa un movimiento periódico en el eje de rotación  $\psi$ ; esto es, el cuerpo del helicóptero gira sobre el pivote.  $(Voltage_{Front}, Voltage_{Backl})^T = (\tau_1, \tau_2)^T$  y se muestran en la Figura 12.

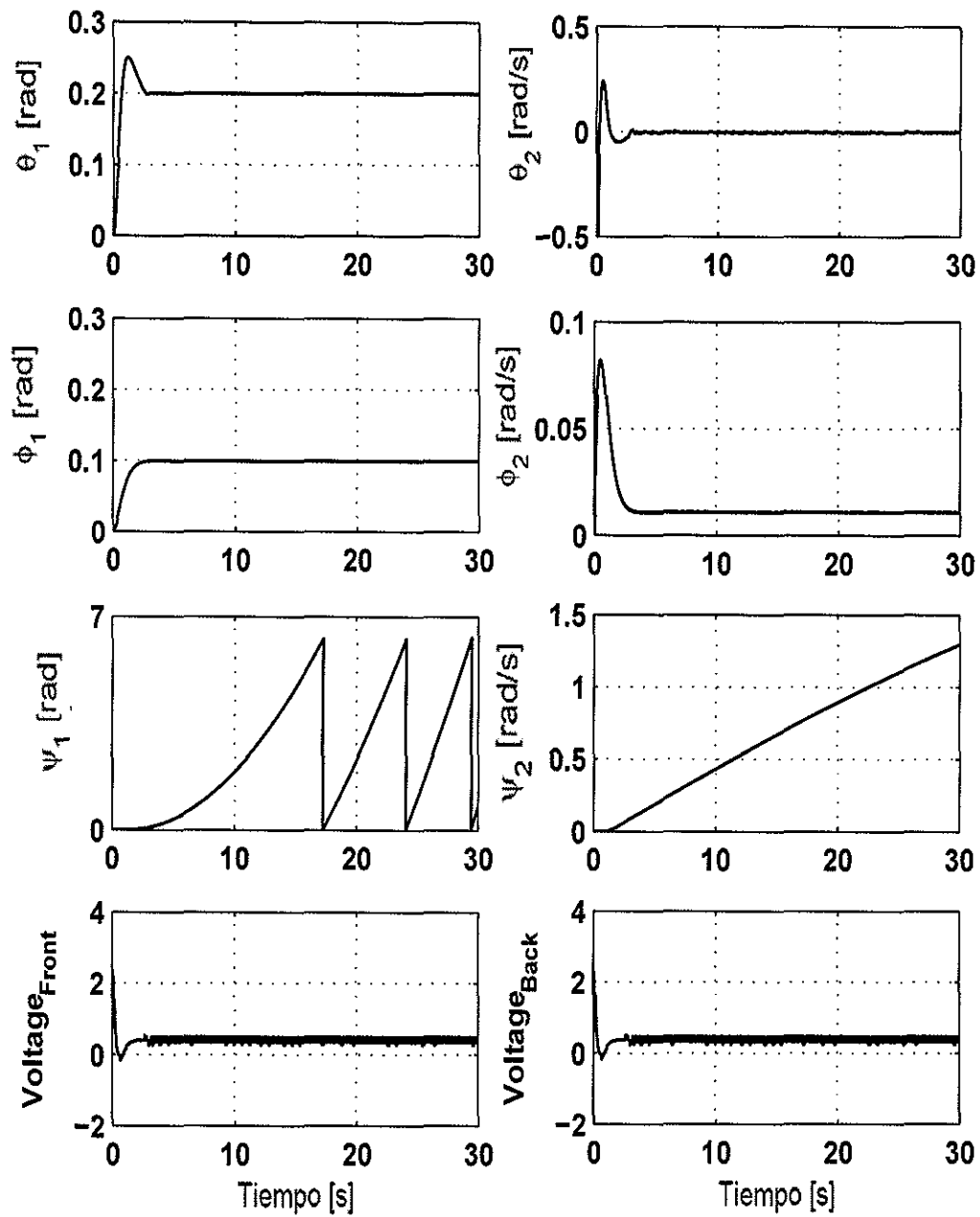


Figura 12. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (129) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = 0.2$  and  $f_2(\psi) = 0.1$ .

**Movimiento periódico en rotación  $\psi$  con elevación  $\theta$  constante y dirección  $\phi$  cíclica.**

Ahora, considérese el caso donde

$$\theta_d = f_1(\psi) = \kappa_1, \quad \phi_d = f_2(\psi) = \kappa_2 \cos(\lambda_2 \psi) \quad (131)$$

con parámetros  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 0.2$ , y  $\lambda_1 = 1$ . La dinámica de orden reducido correspondiente (115) está dada por

$$\ddot{\phi} - c_1(S + S' \sin(\kappa_2 \cos(\lambda_2 \psi)))\dot{\psi}^2 + c_3 \tan(\kappa_2 \cos(\lambda_2 \psi)) = 0. \quad (132)$$

Nuevamente, se verifica que el controlador alcanza el objetivo de control imponiendo las restricciones (131) al sistema; los resultados se muestran en la Figura 13. Aquí es importante señalar que se presenta un movimiento periódico en el ángulo de rotación diferente al caso anterior.  $(Voltage_{Front}, Voltage_{Backl})^T = (\tau_1, \tau_2)^T$  y se muestran en la Figura 13. Para ambas simulaciones, los valores de las ganancias de los controladores (127), (128) son  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\beta_1 = 0.05$ ,  $h_1 = 3$ ,  $p_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 0.05$ ,  $h_2 = 4$  y  $p_2 = 4$ . Además, las ganancias y condiciones iniciales de los observadores son  $\nu_\theta = 10$ ,  $\mu_\theta = 2$ ,  $\nu_\phi = 5$ ,  $\mu_\phi = 0.5$ ,  $\nu_\psi = 3$ ,  $\mu_\psi = 0.3$ ,  $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\phi}_1(0) = \hat{\psi}_1(0) = 0$ , y  $\hat{\theta}_2(0) = \hat{\phi}_2(0) = \hat{\psi}_2(0) = 0$ .

### V.3.5 Resultados experimentales

De acuerdo a los resultados numéricos obtenidos, podemos observar que cuando el ángulo de dirección  $\phi_1$  es diferente de cero (significa físicamente que el cuerpo del helicóptero está inclinado), existe un movimiento de periódico en el eje de rotación. A continuación, se presentan resultados donde se demuestra que el mecanismo físicamente presenta las mismas características.

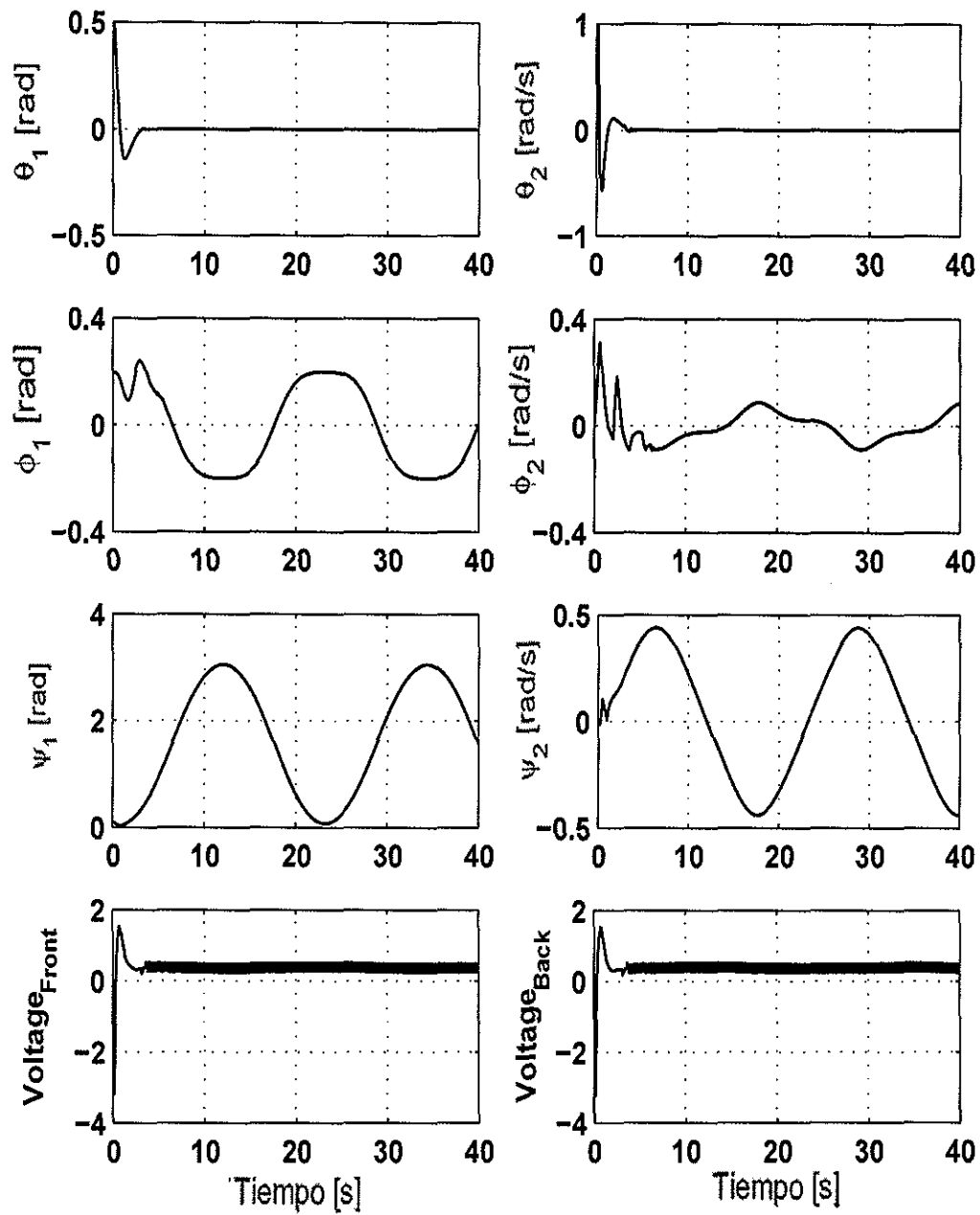


Figura 13. Simulación: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (131) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = 0$  y  $f_2(\psi) = 0.1 \cos(\psi_1)$ .

Selecciónese

$$\theta_d = f_1(\psi) = \kappa_1, \quad \phi_d = f_2(\psi) = \kappa_2 \quad (133)$$

La dinámica del sistema de orden reducido está definida por

$$\ddot{\psi} - c_1(S + S' \sin(\kappa_2))\dot{\psi}^2 + c_3 \tan(\kappa_2) = 0, \quad (134)$$

siempre y cuando exista una entrada de control  $(\tau_1, \tau_2)^T$  que permita inducir la solución deseada  $\psi = \psi_d(t)$ .

El desempeño del controlador alcanzando los objetivos de control impuestos se muestran en las Figuras 14 y 15 para  $(\kappa_1, \kappa_2) = (0.0, 0.5)$  y  $(\kappa_1, \kappa_2) = (0, 0.7)$ , respectivamente. Nótese como en ambos experimentos se observa un movimiento rotacional en el ángulo  $\psi$ ; esto es, el cuerpo del helicóptero gira sobre el pivote. Los voltajes aplicados  $(Voltage_{Front}, Voltage_{Back})^T = (\tau_1, \tau_2)^T$  también se muestran en la Figura correspondiente. Para ambas implementaciones, los valores de las ganancias son  $\alpha_1 = 0.05$ ,  $\beta_1 = 0.01$ ,  $h_1 = 18$ ,  $p_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_2 = 0.8$ ,  $h_2 = 200$  y  $p_2 = 150$ . Además, las ganancias y condiciones iniciales de los observadores son  $\nu_\theta = 6$ ,  $\mu_\theta = 1$ ,  $\nu_\phi = 10$ ,  $\mu_\phi = 2$ ,  $\nu_\psi = 6$ ,  $\mu_\psi = 1$ ,  $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\phi}_1(0) = \hat{\psi}_1(0) = 0$ , y  $\hat{\theta}_2(0) = \hat{\phi}_2(0) = \hat{\psi}_2(0) = 0$ .

## V.4 Resumen

En este capítulo se han desarrollado controladores basados en la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida para los modelos dinámicos simplificado (4)-(6) y de Newton-Euler (7),(8). En ambos casos, se presentan resultados numéricos. También se diseñaron controladores basados en modos deslizantes de segundo orden para el modelo dinámico de Newton (15)-(17). En este caso, se presentaron resultados numéricos y experimentales.



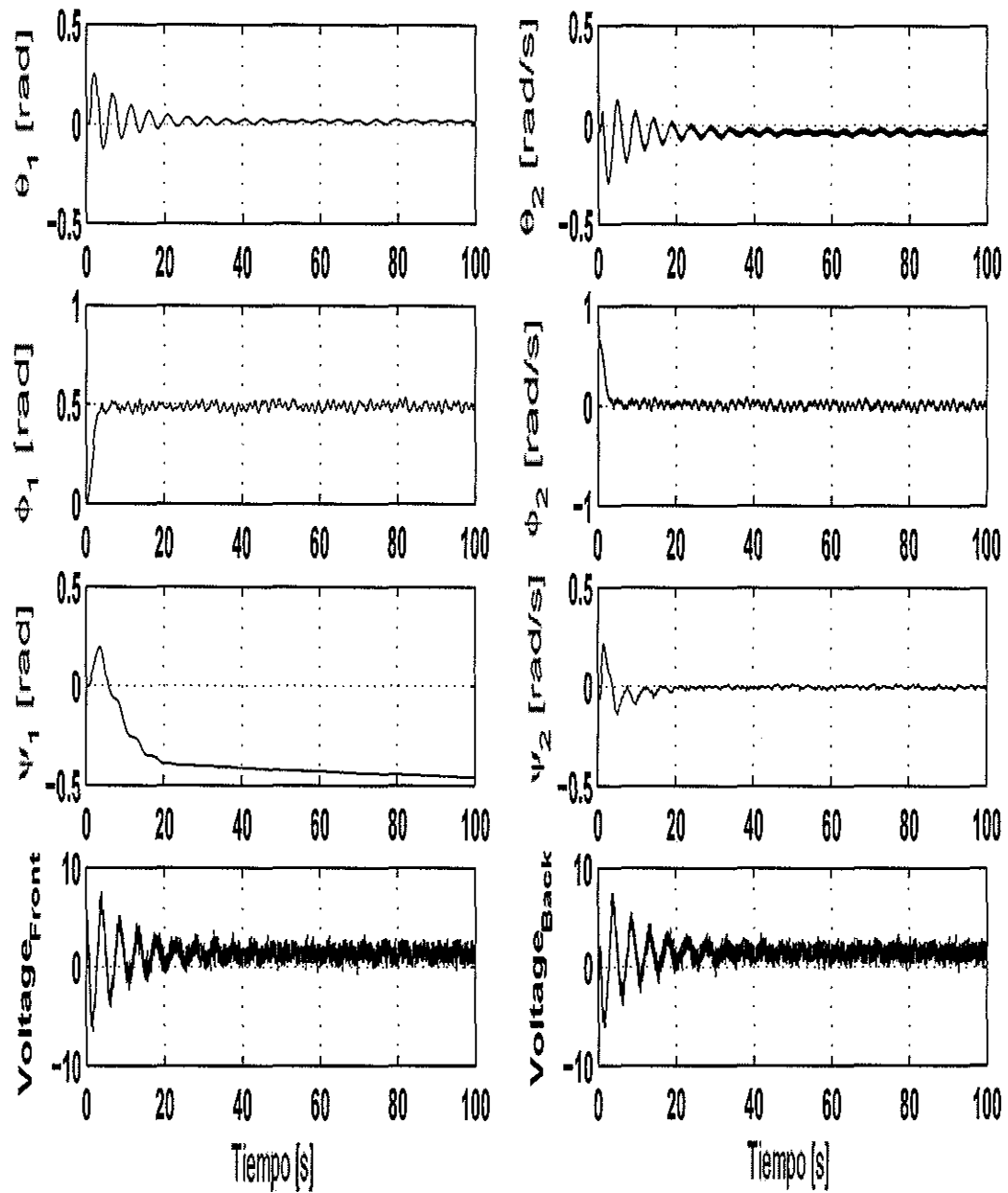


Figura 14. Experimento: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (133) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = 0$  and  $f_2(\psi) = 0.5$ .

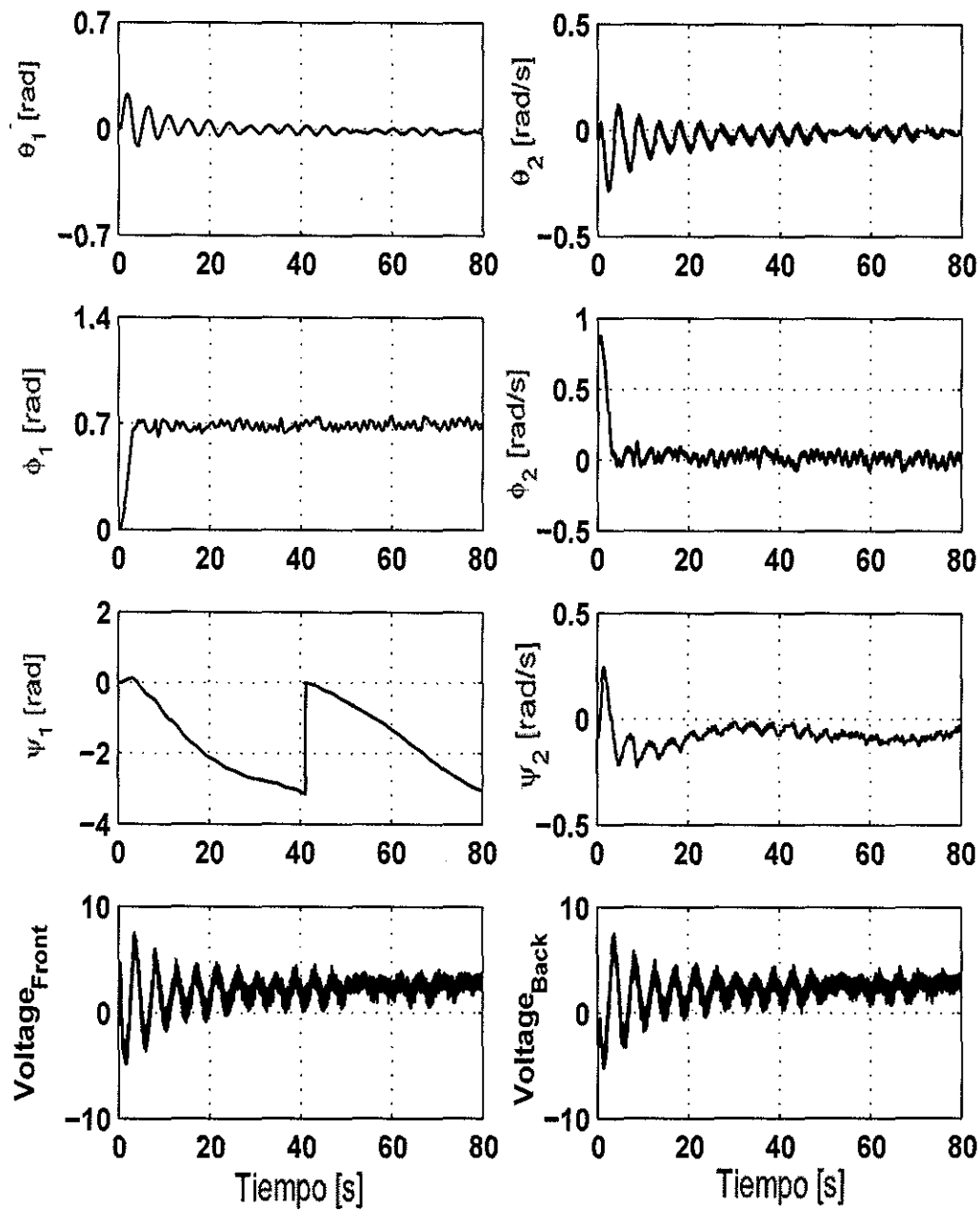


Figura 15. Experimento: comportamiento del helicóptero de 3GDL (15)-(17) para las trayectorias deseadas (133) en  $[\theta, \phi]^T$  con  $f_1(\psi) = 0$  and  $f_2(\psi) = 0.7$ .

## Capítulo VI

### Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se resolvió el problema de control de movimiento de un sistema mecánico subactuado de tres grados de libertad con dos entradas de control.

En el primer paso, se seleccionaron tres modelos ampliamente utilizados en el desarrollo de controladores dentro de la literatura. Pese a existir muchos resultados para este mecanismo en particular, el control de este sistema mecánico para los tres grados de libertad de forma integral se mantiene como un problema abierto. La motivación para utilizar modelos dinámicos obtenidos por otras fuentes nos permite abrir la discusión sobre la verdadera influencia de las deficiencias en el modelado para el control de un sistema de esta complejidad.

El primer problema a resolver corresponde al control de posición, particularmente, se definió como objetivo la estabilización del mecanismo en el origen. La metodología utilizada en el diseño de los algoritmos de control para este caso fue la de modos deslizantes debido a la robustez que posee ante incertidumbre paramétricas y perturbaciones externas. Los resultados de simulación demuestran esta característica al cumplir el objetivo de control (véanse Figuras 4, 5 para el modelo simplificado y 6, 7 para el modelo de Newton).

Algunas razones por las cuales la obtención de resultados experimentales no fue posible:

- En el caso del modelo simplificado, obsérvese que de acuerdo a las Figura 4 y 5, el ángulo de rotación  $\psi$  exhibe movimiento siempre que el ángulo de dirección  $\phi$  sea diferente de cero (esto es, exista inclinación del cuerpo del helicóptero);
-

físicamente, el sistema necesita vencer la fricción y la incertidumbre paramétrica en los coeficientes de inercia del mecanismo. Así pues, mientras se espera que el ángulo de rotación llegue al origen, la fuerza ejercida por la combinación de los otros dos grados de libertad no es suficiente para que esto suceda.

- En (Starkov *et al.*, 2008), se presentan resultados experimentales de estabilización aplicando control por modos deslizantes de primer y segundo orden. Para ello, se utilizaron ganancias suficientemente grandes para compensar las deficiencias en el modelo; de esta manera, el sistema exhibe dinámica de altas frecuencias (“chattering”) y la zona de conmutación por parte del controlador es bastante grande. Esta característica puede observarse en los resultados de simulación presentados en este trabajo de tesis, de manera muy clara en la salida de control  $\tau_2$  de la simulación para el modelo de Newton perturbado que se muestra en la Figura 7.

Para resolver el problema de control de movimiento, se define una estrategia de diseño que consiste en dos etapas. En la primera etapa, se aplican los resultados teóricos de la propuesta de Restricciones Virtuales Holonómicas (véase (Shiriaev *et al.*, 2005)). Esta etapa se describe en las secciones denominadas *Trayectorias deseadas* para cada desarrollo. Una vez que los objetivos de control se han establecido, la segunda etapa consiste en el diseño de algoritmos de control que impongan dicho comportamiento en el sistema. El presente trabajo de tesis se fundamenta en la aplicación de dos metodologías de control para esta segunda etapa: a) control por modos deslizantes aplicado al modelo dinámico de Newton (15)-(17), en donde se aplican controladores inspirados en la forma cuasihomogénea de (Orlov, 2009), y b) Control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida aplicado a los modelos dinámicos simplificado (4)-(6) y de Newton-Euler (7),(8), donde se derivan soluciones locales al problema de sistemas no lineales variantes en el tiempo (véase Apéndice A).

A pesar de la sencillez para derivar un controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida, con la ventaja de poseer en su estructura que reconstruye el estado y evita la necesidad de utilizar observadores de velocidad, tiene la desventaja de que necesita resolver ecuaciones diferenciales de Riccati en línea durante su implementación. Debido a la carga computacional que esta característica origina, no fue posible obtener resultados experimentales para estas formulaciones. Para el caso del diseño de controladores por modos deslizantes de segundo orden aplicados al modelo dinámico de Newton (15)-(17), se presentan tanto resultados numéricos como experimentales.

A partir de los resultados obtenidos, se desprenden las siguientes conclusiones:

- Obsérvese que de acuerdo a los resultados numéricos aplicando  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida al modelo simplificado (4)-(6), en Figuras 8 y 9, el ángulo  $\psi$  presenta un movimiento periódico de rotación cuando  $\phi = 0$ , esto es, cuando el cuerpo del helicóptero no se encuentra inclinado. Estos resultados no son consistentes con la dinámica que exhibe el sistema mecánico físicamente.
- En las Figuras 10 y 11 correspondientes al control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida aplicado al modelo de Newton-Euler (7),(8), se presenta un movimiento periódico rotacional en el ángulo  $\psi$  al imponer tanto un comportamiento constante como una oscilación periódica en el ángulo de dirección  $\phi$ . Físicamente, una oscilación del cuerpo del helicóptero derivaría en una oscilación en el ángulo rotacional  $\psi$  y un comportamiento constante en dirección  $\phi$  originaría un movimiento rotacional en  $\psi$ , siempre y cuando  $\phi \neq 0$ . Aquí también encontramos algunas inconsistencias en los resultados obtenidos.
- En contraste con el punto anterior, obsérvese como los resultados numéricos correspondientes al controlador por modos deslizante aplicados al modelo de New-

ton (15)-(17) es consistente con lo que se espera del sistema físico: exhibe un movimiento rotacional en  $\psi$  cuando dirección  $\phi$  es constante y un comportamiento periódico oscilatorio cuando  $\phi$  es periódico también (véanse Figuras 12 y 13).

- En los resultados experimentales, Figuras 14 y 15, donde se aplica el control por modos deslizantes al modelo de Newton (15)-(17), se observa cómo varía la velocidad de rotación del ángulo  $\psi$  del sistema. También podemos notar la presencia del fenómeno de “chattering” en el estado estable de las posiciones del mecanismo. Específicamente, en la Figura 14 se observa como el ángulo de dirección  $\phi$  presenta un “chattering” de menor amplitud que se refleja en la elevación  $\theta$ ; de igual forma, en la Figura 14 se presenta el fenómeno de “chattering” con una amplitud mayor y la perturbación que genera éste comportamiento dinámico se ver reflejado de manera más clara en el ángulo de elevación  $\theta$ .
- La presencia de perturbaciones en el ángulo sobre el cual no se aplica la ley de control, esto es, rotación  $\psi$ , se observa de manera clara en la Figura 15. Nótese como el comportamiento general se mantiene pero las velocidades varían de manera significativa.
- Para la obtención de resultados experimentales fue necesario la utilización de ganancias mucho más altas que las utilizadas en las simulaciones. Nótese también como el sistema ocupa mucho más tiempo para alcanzar el objetivo de control.

De lo anterior, podemos resaltar la importancia de trabajar con un modelo que, aunque posea dinámicas no modeladas, refleje al menos la dinámica esencial del mecanismo. Las discrepancias encontradas no pertenecen a la formulación del controlador sino más bien al modelo dinámico utilizado.

Basados en los resultados obtenidos, podemos concluir que el modelo dinámico de

Newton (15)-(17) describe de manera más adecuada la dinámica del sistema mecánico subactuado en comparación con los otros dos modelos, ya que

- Exhibe los dos comportamientos que físicamente ocurren en el sistema para el ángulo de rotación  $\psi$ : movimiento periódico rotacional y oscilación periódica cuando el ángulo de dirección  $\phi$  es periódico.
- Físicamente, el helicóptero tiene su equilibrio definido de la siguiente forma: a) en elevación  $\theta$ , el equilibrio es cero y corresponde a la posición horizontal que toma en reposo debido al contrapeso, b) en dirección  $\phi$ , idealmente el equilibrio es cero también, el cual no siempre es posible debido a la necesidad de que ambos actuadores sean exactamente iguales en forma y masa, y c) en rotación  $\psi$ , cualquier posición es equilibrio mientras la velocidad sea cero.

De acuerdo a lo anterior, ni el modelo simplificado (4) - (6), ni el modelo de Newton-Euler (7), (8) describen esta dinámica del equilibrio de rotación  $\psi$ . El modelo de Newton sí lo refleja debido al término  $-\rho \frac{L^2}{2} (S + S' \sin(\phi_1)) \psi_2^2$  definido en la dinámica de  $\psi$ .

## VI.1 Trabajo futuro

El diseño de controladores para sistemas subactuados corresponden a un compleja y extensa tarea. A lo largo del desarrollo del presente trabajo de tesis, surgieron diversos aspectos que no fueron contemplados al inicio de la investigación. Algunos fueron incluidos durante el desarrollo del trabajo de investigación y otros han quedado como cuestiones abiertas a discusión y merecen una mención como posibles extensiones al trabajo realizado. Estos son algunos:

- Diseño de un modelo dinámico que describa de una manera más adecuada el comportamiento del sistema. Este aspecto se vió reflejado en la falta de resultados experimentales debido a las grandes diferencias exhibidas al momento de implementar los controladores. Sería esencial aplicar la teoría para modelado de aeronaves que permitan incluir fenómenos propios de este tipo de sistemas.
  - Realizar un análisis del sistema mecánico físico con la finalidad de identificar fenómenos que repercutan directamente en la obtención de resultados, tales como: fricción, zona muerta y dinámica interna de los actuadores, histéresis, entre otros.
  - Analizar la posibilidad de utilizar otro tipo de metodologías para la definición de comportamiento deseado diferentes a las Restricciones Virtuales Holonómicas.
  - Diseño de un algoritmo o estrategia para la sintonización de ganancias en los controladores.
  - Análisis de la influencia de la dinámica interna de la etapa de potencia sobre el sistema. Por ejemplo, en el trabajo de tesis realizado, se utilizaron servoamplificadores diferentes a las recomendadas el fabricante. Como consecuencia, se tuvieron problemas en el funcionamiento y se presentaron interferencias en las lecturas de los decodificadores ópticos.
  - Análisis de la influencia del movimiento pendular del sistema como parte de su dinámica interna (véase (Ishutkina, 2004; Bayraktar, 2004)).
  - Analizar y aplicar funciones suavizadas de la función *signo* con la finalidad de evitar problemas mecánicos en la implementación.
  - Aplicar otras metodologías de control a la formulación de Restricciones Virtuales Holonómicas.
-



## Referencias

- Aguilar, L., Orlov, Y., y Acho, L. (2003). Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$ -control of nonsmooth time varying systems with application to friction mechanical manipulators. *Automatica*, **39**: 1531–1542.
- Ahmadi, M. y Buehler, M. (1997). Stable control of a simulated one-legged running robot with hip and leg compliance. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, **13**(1): 96–104.
- Allied-Electronics (2001). Datasheet – 9234S004 Lo-Cog<sup>®</sup> DC Motor. <http://www.alliedelec.com/Images/Products/Datasheets/BM/AMETEK.PITTMAN/388-0012.PDF>. [En línea; consultado el 24-Noviembre-2011].
- AMC (2011). Datasheet – Analog Servo Drive 16A20AC. <http://www.a-m-c.com/download/datasheet/16a20ac.pdf>. [En línea; consultado el 24-Noviembre-2011].
- Andrievsky, B., Fradkov, A., y Peaucelle, D. (2007). Adaptive control of 3dof motion for laas helicopter benchmark: design and experiments. En *American Control Conference ACC'07*, páginas 3312–3317, 11–13 Julio, Nueva York, EUA.
- Arai, H., Tanie, K., y Shiroma, N. (1998). Nonholonomic control of three-dof planar underactuated manipulator. *IEEE Trans. On Robotics and Automation*, **14**(5): 681–695.
- Arnold, V. I. (1991). *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, Massachusetts, EUA, tercera edición. Traducido por Richard A. Silverman, 290 pp.
- Avago-Technologies (2010). Datasheet – HEDS-9000/9100 Two Channel Optical Incremental Encoder Modules. <http://www.avagotech.com/docs/AV02-1867EN.PDF>. [En línea; consultado el 24-Noviembre-2011].
- Avila-Vilchis, J., Brogliato, B., Dzul, A., y Lozano, R. (2003). Nonlinear modelling and control of helicopters. *Automatica*, **39**: 1526–1530.
- Banavar, R. N. y Sankaranarayanan, V. (2006). *Switched Finite Time Control of a Class of Underactuated Systems*. Springer-Verlag, Berlín Heidelberg, Alemania, primera edición. 98 pp.
- Basar, T. y Bernhard, P. (1991).  *$H_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. Birkhäuser Verlag AG, Berlín, Alemania, segunda edición. 224 pp.
- Basar, T. y Olsder, G. (1999). *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press, Nueva York, EUA, segunda edición. 519 pp.

- Bayraktar, S. (2004). *Aggressive landing maneuvers for unmanned aerial vehicles*. Tesis de doctorado, 70 páginas, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, EUA.
- Berkemeier, M. D. y Fearing, R. S. (1999). Tracking fast inverted trajectories of the underactuated acrobot. *IEEE Trans. Robotics and Aut.*, **15**(4): 740–750.
- Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B., y Egeland, O. (2007). *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*. Springer-Verlag, Londres, Inglaterra, segunda edición. 576 pp.
- Canudas-de-Wit, C., Roussel, L., y Goswami, A. (1997). Periodic stabilization of a 1-DOF hopping robot on nonlinear compliant surface. En *Proc. IFAC Symp. Robot Control*, páginas 405–410, 3–5 Septiembre, Nantes, Francia.
- Canudas-de-Wit, C., Espiau, B., y Urrea, C. (2002). Orbital stabilization of underactuated mechanical systems. En *15th IFAC Triennial World Congress*, 21–26 Julio, Barcelona, España.
- Chevallereau, C. y Aoustin, Y. (2001). Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot. *Robotica*, **19**(5): 557–569.
- Chevallereau, C. y Sardain, P. (2000). Design and actuation optimization of a 4 axes biped robot for walking and running. En *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, páginas 3365–3370, 24–28 Abril, San Francisco, California, EUA.
- Chevallereau, C., Abba, G., Aoustin, Y., Plestan, F., Westervelt, E. R., de Wit, C. C., y Grizzle, J. W. (2003). Rabbit: A testbed for advanced control theory. *IEEE Control Syst. Mag.*, **23**(5): 57–79.
- Chevallereau, C., Formal'sky, A., y Djoudi, D. (2004). Tracking of a joint path for the walking of an underactuated biped. *Robotica*, **22**: 15–28.
- Do, K. D. y Pan, J. (2009). *Control of Ships and Underwater Vehicles – Design for Underactuated and Nonlinear Marine Systems*. Springer-Verlag, Londres, Inglaterra, primera edición. 400 pp.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., y B., F. (1989). State space solution to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, **34**(8): 831–846.
- Fantoni, I. y Lozano, R. (2002). *Non-linear Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer-Verlag, Londres, Inglaterra, primera edición. 281 pp.
- Fantoni, I., Lozano, R., y Spong, M. W. (2000). Energy based control of the pendubot. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **45**(4): 725–729.
- Francois, C. y Samson, C. (1998). A new approach to the control of the planar one-legged hopper. *Int. J. Robot. Res.*, **17**(11): 1150–1166.
-

- Fukuda, T. y Koditschek, D. E. (2000). A brachiating robot controller. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, **16**(2): 109–123.
- Fukuda, T. y Saito, F. (1996). Motion control of a brachiation robot. *Robot Autom. Syst.*, **18**: 83–93.
- García-Sanz, M., Elso, J., y Egaña, I. (2006). Control de ángulo de cabeceo de un helicóptero como benchmark de diseño de controladores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **3**(2): 111–116.
- Ishutkina, M. (2004). *Design and implementation of a supervisory safety controller for a 3DOF helicopter*. Tesis de doctorado, 80 páginas, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, EUA.
- Isidori, A. y Astolfi, A. (1992). Disturbance attenuation and  $\mathcal{H}_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, **37**(9): 1283–1293.
- Isidori, A., Marconi, L., y Serrani, A. (2003). Robust nonlinear motion control of a helicopter. *IEEE Trans. Autom. Control*, **48**(3): 413–426.
- Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer-Verlag, Londres, Inglaterra, primera edición. 426 pp.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, Nueva Jersey, EUA, tercera edición. 750 pp.
- Kiefer, T., Kugi, A., Graichen, K., y Zeitz, M. (2006). Feedforward and feedback tracking control of a 3DOF helicopter experiment under input and output constraints. En *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Control*, páginas 1586–1893, 13–15 Diciembre, Manchester, Inglaterra.
- Lopez, R., Galvao, R., Milhan, A., Becerra, V., y Yoneyama, T. (2006). Modelling and constrained predictive control of a 3DOF helicopter. En *XVI Congreso Brasileño de Automatica*, páginas 429–434, 3–6 Octubre, Salvador, Bahia, Brazil.
- Miyazaki, M., Sampei, M., Koga, M., y Takahashi, A. (2000). A control of underactuated hopping gait systems: Acrobot example. En *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, páginas 4797–4803, 12–15 Diciembre, Sydney, Australia.
- Miyazaki, M., Sampei, M., y Koga, M. (2001). Control of a motion of an acrobot approaching a horizontal bar. *Adv. Robot.*, **15**(4): 467–480.
- Nakanishi, J., Fukuda, T., y Koditschek, D. E. (1997). Preliminary studies of a second generation brachiation robot controller. En *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, páginas 2050–2056, 20–25 Abril, Albuquerque, Nuevo México, EUA.
- Olfati-Saber, R. (2000). Control of underactuated mechanical systems with two degrees of freedom and symmetry. En *Proc. Amer. Control Conf.*, páginas 4092–4096, 28–30 Junio, Chicago, Illinois, EUA.
-

- Ono, K., Yamamoto, K., y Imadu, A. (2001). Control of giant swing motion of a two-link horizontal bar gymnast robot. *Adv. Robot.*, **15**(4): 449–465.
- Orlov, Y. (2009). *Discontinuous systems - Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer Verlag, Londres, Inglaterra, primera edición. 320 pp.
- Orlov, Y., Acho, L., y Solis, V. (1999). Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$ -control of time varying systems. En *Proc. 38th Conference on Decision and Control*, páginas 3764–3769, 7–10 Diciembre, Phoenix, Arizona, EUA.
- Orlov, Y., Aguilar, L. T., y Acho, L. (2005). Model orbit robust stabilization (MORS) of pendubot with application to swing up control. En *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 6164–6169, 12–15 Diciembre, Sevilla, España.
- Ortega, R., Gomez-Estern, F., y Blankenstein, G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **47**: 1218–1233.
- Plestan, F., Grizzle, J., Westervelt, E. R., y Abba, G. (2003). Stable walking of a 7-dof biped robot. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, **19**(4): 653–668.
- Quanser (2002). Manuales: *Specialty - 3DOF Heli with Active Disturbance*. Sitio Web. <http://www.quanser.com>. [En línea; consultado el 24-Noviembre-2011].
- Raibert, M. (1986). *Legged Robots That Balance*. MA:MIT Press, Massachussets, EUA, primera edición. 233 pp.
- Ravi, R., Nagpal, K., y Khargonekar, P. (1991).  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear time-varying systems: a state-space approach. *SIAM Journal Control and Optimization*, **29**: 1394–1413.
- Riachy, S., Orlov, Y., Floquet, T., Santiesteban, R., y Richard, J. (2007). Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems i: Local stabilization with application to an inverted pendulum. *Int. J. of Robust and Nonlinear Ctrl.*, **18**(4-5): 529–543.
- Saito, F., Fukuda, T., y Arai, F. (1994). Swing and locomotion control for a two-link brachiation robot. *IEEE Control Syst. Mag.*, **14**(1): 5–12.
- Santiesteban, R., Floquet, T., Orlov, Y., Riachy, S., y Richard, J. (2007). Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems ii: Orbital stabilization of an inverted pendulum with application to swing up/balancing control. *Int. J. of Robust and Nonlinear Ctrl.*, **18**(4-5): 544–556.
- Sensoray (2004). Sensoray – Model 626 | Analog and Digital I/O. <http://www.sensoray.com/products/626.htm>. [En línea; consultado el 24-Noviembre-2011].

- Shan, J., Liu, H., y Nowotny, S. (2005). Synchronised trajectory-tracking control of multiple 3-dof experimental helicopters. *Control Theory and App., IEEE Proceedings* -, **152**(6): 683–692.
- Shiriaev, A., Perram, J., y Canudas-de-Wit, C. (2005). Constructive tool for an orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraint approach. *IEEE Trans. Automatic Control*, **50**(8): 1164–1176.
- Shiriaev, A., Robertsson, A., Perram, J., y Sandberg, A. (2006). Periodic motion planning for virtually constrained euler lagrange systems. *Systems and Control Letters*, **55**(11): 900–907.
- Shiriaev, A., Freidovich, R., Robertsson, A., Johansson, R., y Sandberg, A. (2007). Virtual-holonomic-constraints-based design of stable oscillations of furuta pendulum: Theory and experiments. *IEEE Trans. On Robotics*, **23**(4): 827–832.
- Siqueira, A. A. G., Terra, M. H., y Bergerman, M. (2011). *Robust Control of Robots – Fault Tolerant Approaches*. Springer-Verlag, Londres, Inglaterra, primera edición. 228 pp.
- Spong, M., Hutchinson, S., y Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. Wiley and Sons, Inc., Nueva Jersey, EUA, primera edición. 407 pp.
- Spong, M. W. (1995). The swing up control problem for the acrobot. *IEEE Control Syst. Mag.*, **15**(1): 49–55.
- Starkov, K. K., Aguilar, L., y Orlov, Y. (2008). Sliding mode control synthesis of a 3-dof helicopter prototype using position feedback. En *10th International Workshop on Variable Structure Systems*, 8–10 Junio, Antalya, Turquía.
- Tenenbaum, M. y Pollard, H. (1985). *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, Nueva York, EUA, primera edición. 818 pp.
- Tondel, P. y Johansen, T. A. (2002). Complexity reduction in explicit linear model predictive control. En *IFAC 15 th Triennial World Congress*, 21–26 Julio, Barcelona, España.
- Utkin, V. (1992). *Sliding modes in control optimization*. Springer Verlag, Berlín, Alemania y Nueva York, EUA. 286 pp.
- Wang-Sheng, M. y Jung-Shan, L. (2010). Nonlinear control design for a class of underactuated systems. páginas 1439 –1444, 8–10 Septiembre, Yokohama, Japón.
- Westerberg, S., Mettin, U., Shiriaev, A., Freidovich, L., y Orlov, Y. (2009). Motion planning and control of a simplified helicopter model based on virtual holonomic constraints. En *Proc. 14th Int. Conf. Adv. Robotics*, páginas 1–6, 22–26 Junio, Munich, Alemania.
-

- Westerberg, S., Mettin, U., y Shiriaev, A. (2010). Motion Planning and Control of an Underactuated 3DOF Helicopter. *IEEE/RSJ Int. Conf. on Int. Robots and Syst.*, páginas 3759–3764.
- Westervelt, E. R., Grizzle, J. W., Chevallereau, C., Choi, J. H., y Morris, B. (2007). *Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion*. CRC Press – Taylor & Francis Group, Nueva York, EUA, primera edición. 518 pp.
- Yamakita, M., Yonemura, T., Michitsuji, Y., y Luo, Z. (2002). Stabilization of acrobot in upright position on a horizontal bar. En *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, páginas 3093–3098, 11–15 Mayo, Washington, DC, EUA.
- Zheng, B. y Zhong, Y. (2011). Robust attitude regulation of a 3-dof helicopter benchmark: Theory and experiments. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, **58**(2): 660–669.
-

## Apéndice A

### Control $\mathcal{H}_\infty$ con retroalimentación de salida

Los algoritmos de control basados en Control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida que se presentan en este trabajo de tesis se resuelven de manera local dentro del marco teórico de los métodos de control no lineal de  $\mathcal{H}_\infty$  propuestos en (Isidori y Astolfi, 1992; Basar y Bernhard, 1991; Aguilar *et al.*, 2003), y (Ravi *et al.*, 1991). Esta síntesis tuvo sus orígenes basada en la teoría de juegos de (Basar y Olsder, 1999), y del análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$  propuesto en (Isidori y Astolfi, 1992). A partir de estas ideas, se utiliza el resultado presentado en (Orlov *et al.*, 1999) donde se establece que las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs correspondientes al sistema deben ser definidas negativas y no sólo semidefinidas. En contraste al análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$  propuesto por (Isidori y Astolfi, 1992), el procedimiento para el diseño de control  $\mathcal{H}_\infty$  no requiere que las condiciones de estabilizabilidad y detectabilidad sean verificadas. De hecho, bajo las suposiciones adecuadas, la existencia de soluciones a las ecuaciones diferenciales de Riccati que aparecen en el problema de control de  $\mathcal{H}_\infty$  para el sistema linealizado, establecen una condición suficiente y necesaria para que existe una solución local a este problema. De esta forma, lo que originalmente implica encontrar una solución global donde se plantean diversas dificultades teóricas y numéricas debido a la necesidad de resolver un par de ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs en derivadas parciales, se resume a seguir la línea de razonamiento propuesta por (Orlov *et al.*, 1999) para sistemas no lineales variantes en tiempo donde es posible resolver el problema de manera local a través de la resolución de ecuaciones diferenciales de Riccati para el sistema linealizado.

A continuación se describe la formulación de la solución al problema de control  $H_\infty$

para sistemas variantes en el tiempo aplicando ésta propuesta.

## A.1 Solución al problema de control $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas variantes en el tiempo

### A.1.1 Consideraciones básicas y enunciado del problema

Considérese un sistema no lineal de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u \\ z &= h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u \\ y &= h_2(x, t) + k_{21}(x, t)w \end{aligned} \tag{135}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de espacio de estados,  $t \in \mathbb{R}$  es el tiempo,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^r$  son las perturbaciones en el sistema,  $z \in \mathbb{R}^l$  es la salida desconocida a ser controlada,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la única medición disponible en el sistema. Se hacen las siguientes consideraciones

(A1) Las funciones  $f(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$ ,  $k_{12}(x, t)$ , y  $k_{21}(x, t)$  son continuas a tramos en  $t$  para todo  $x$ , de manera continua, y localmente Lipschitz en  $x$  para todo  $t$ .

(A2)  $f(0, t) = 0$ ,  $h_1(0, t) = 0$ , y  $h_2(0, t) = 0$  para todo  $t$ .

(A3)

$$\begin{aligned} h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) &= 0, & k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) &= I \\ k_{21}(x, t)g_1^T(x, t) &= 0, & k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) &= I. \end{aligned}$$

Estas consideraciones son tomadas de la teoría estándar de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal (Doyle *et al.*, 1989; Isidori y Astolfi, 1992) y se hacen por razones técnicas. La con-



sideración (A1) garantiza que sistema dinámico anterior esté bien planteado, mientras se vea forzado por entradas externas integrables. La consideración (A2) asegura que el origen sea un punto de equilibrio del sistema dinámico (135) no forzado ( $u = 0$ ) y libre de perturbaciones ( $w = 0$ ). La suposición (A3) se hace para simplificar la síntesis del controlador  $\mathcal{H}_\infty$ .

El compensador dinámico causal

$$u = \mathcal{K}(\xi, t) \quad (136)$$

$$\dot{\xi} = \eta(\xi, y, t) \quad (137)$$

con estado interno  $\xi \in \mathbb{R}^s$ , se dice que es un controlador admisible en forma global (local) si el sistema de lazo cerrado (135) - (137) es estable en forma asintótica y global (de manera uniforme) cuando  $w = 0$ .

Dado un número real  $\gamma > 0$ , se dice que el sistema (135) - (136) tiene una ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor que  $\gamma$  si la respuesta  $z$ , que resulta de  $w$  para la condición inicial  $x(t_0) = 0$ ,  $\xi(t_0) = 0$ , satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \quad (138)$$

para todo  $t_1 > t_0$  y toda función continua a tramos  $w(t)$ .

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  variante en el tiempo consiste en encontrar un controlador (136) - (137) admisible en forma global tal que la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema en lazo cerrado (135) - (137) sea menor que  $\gamma$ . Por otro lado, un controlador admisible en forma local (136) - (137) se dice que es una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  si existe una vecindad  $U$  alrededor del punto de equilibrio tal que la desigualdad (138) se satisfaga para todo  $t_1 > t_0$  y toda función continua a tramos  $w(t)$  para la cual la trayectoria del sistema en lazo cerrado que inicia en el punto  $(x(t_0), \xi(t_0)) = (0, 0)$  permanezca en  $U$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

### A.1.2 Solución local en espacio de estados

Las consideraciones (A1)–(A3) nos permite linealizar las desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs de (Aguilar *et al.*, 2003) que surgen del diseño por retroalimentación por inyección de salida logrando por lo tanto la solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas variantes en el tiempo. El subsecuente análisis local involucra el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  lineal de sistemas variantes en el tiempo para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \\ z &= C_1(t)x + D_{12}(t)u \\ y &= C_2(t)x + D_{21}(t)w\end{aligned}\tag{139}$$

donde

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, t), & B_1(t) &= g_1(0, t), & B_2(t) &= g_2(0, t) \\ C_1(t) &= \frac{\partial h_1}{\partial x}(0, t), & D_{12}(t) &= k_{12}(0, t), \\ C_2(t) &= \frac{\partial h_2}{\partial x}(0, t), & D_{21}(t) &= k_{21}(0, t).\end{aligned}\tag{140}$$

Tal problema ha sido bien entendido si el sistema lineal (139) es estabilizable y detectable desde  $u$  y  $y$ , respectivamente. Bajo estas consideraciones, las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que exista una solución (véase, por ejemplo, (Ravi *et al.*, 1991)):

*C1)* Debe existir una solución simétrica acotada y positiva semidefinida<sup>1</sup> de la ecuación

$$\begin{aligned}-\dot{P}(t) &= P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) \\ &+ P(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1(t)B_1^T(t) - B_2(t)B_2^T(t) \right] P(t)\end{aligned}\tag{141}$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - (B_2B_2^T - \gamma^{-2}B_1B_1^T)P](t)x(t)\tag{142}$$

---

<sup>1</sup>Una matriz  $P(t)$  de dimensión  $n \times n$  dependiente del tiempo es positiva semidefinida si y sólo si  $x^T P(t)x \geq 0$  para todo vector  $x$   $n$ -dimensional y para todo instante de tiempo  $t$  mientras que  $P(t)$  es positiva definida si y sólo si  $x^T P(t)x \geq mx^T x$  para todo  $x$  y  $t$ , y cualquier constante  $m > 0$ . De manera respectiva,  $P(t)$  es acotada si y sólo si  $\|P(t)\| \leq m_0$  para todo  $t$  y cualquier constante  $m_0 > 0$ .

sea exponencialmente estable;

C2) Debe existir una solución simétrica acotada positiva semidefinida de la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) = & \tilde{A}(t)Z(t) + Z(t)\tilde{A}^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ & + Z(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2}P(t)B_2(t)B_2^T(t)P(t) - C_2^T(t)C_2(t) \right] Z(t) \end{aligned} \quad (143)$$

donde  $\tilde{A}(t) = A(t) + \gamma^{-2}B_1(t)B_1^T(t)P(t)$ , tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)](t)x(t) \quad (144)$$

sea exponencialmente estable.

De acuerdo al lema de acotamiento real variante en el tiempo (Orlov *et al.*, 1999), las condiciones C1) y C2) aseguran que existe una constante positiva  $\varepsilon_0$  tal que las ecuaciones perturbadas de Riccati

$$\begin{aligned} -\dot{P}_\varepsilon = & P_\varepsilon(t)A(t) + A^T(t)P_\varepsilon(t) + C_1^T(t)C_1(t) \\ & + P_\varepsilon(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2}B_1(t)B_1^T(t) - B_2(t)B_2^T(t) \right] P_\varepsilon(t) + \varepsilon I, \end{aligned} \quad (145)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\varepsilon = & \tilde{A}(t)Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)\tilde{A}^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) + \varepsilon I \\ & + Z_\varepsilon(t) \left[ \frac{1}{\gamma^2}P(t)B_2(t)B_2^T(t)P(t) - C_2^T(t)C_2(t) \right] Z_\varepsilon(t), \end{aligned} \quad (146)$$

tengan una solución simétrica positiva definida  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  donde  $\tilde{A}(t) = A(t) + \gamma^{-2}B_1(t)B_1^T(t)P_\varepsilon(t)$ .

Las ecuaciones diferenciales (145) y (146) serán utilizadas para derivar una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal para el sistema no lineal (135). El siguiente resultado fue extraído de (Aguilar *et al.*, 2003).

**Teorema 10** *Supóngase que las condiciones C1) y C2) se satisfagan y sean  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  las correspondientes soluciones de (145), (146) bajo cualquier  $\varepsilon > 0$ . Entonces la*

*retroalimentación por salida*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = f(\xi, t) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t) g_1^T(\xi, t) - g_2(\xi, t) g_2^T(\xi, t) \right] P_\varepsilon(t) \xi \\ + Z_\varepsilon(t) C_2^T(t) [y - h_2(\xi, t)] \end{aligned} \quad (147)$$

$$u = -g_2^T(\xi, t) P_\varepsilon(t) \xi \quad (148)$$

*es una solución local al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .*