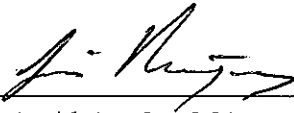


TESIS DEFENDIDA POR

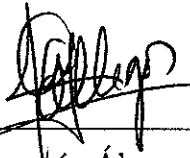
**Eduardo García Ramírez**

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



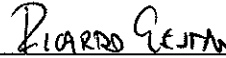
Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

*Director del Comité*



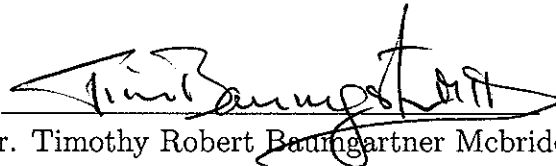
Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

*Miembro del Comité*



M.C. José Ricardo Cuesta García

*Miembro del Comité*



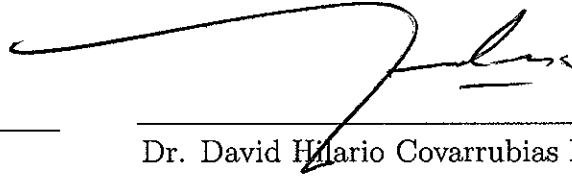
Dr. Timothy Robert Baumgartner McBride

*Miembro del Comité*



Dr. Roberto Conte Galván

*Coordinador del programa de  
posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*



Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

*Director de Estudios de Posgrado*

15 de diciembre de 2011

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

---

**EXTENSIÓN DE HERRAMIENTAS GEOMÉTRICAS PARA ANÁLISIS  
DE SISTEMAS NO LINEALES CON RETARDOS**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

Presenta:

**EDUARDO GARCÍA RAMÍREZ**

Ensenada, Baja California, México, Diciembre de 2011

---

**RESUMEN** de la tesis de **EDUARDO GARCÍA RAMÍREZ**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELEC-TRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES con orientación en INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL. Ensenada, Baja California, Diciembre de 2011.

**EXTENSIÓN DE HERRAMIENTAS GEOMÉTRICAS PARA ANÁLISIS DE SISTEMAS NO LINEALES CON RETARDOS**

Resumen aprobado por:



---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Director de Tesis

En este trabajo de tesis se presentan algoritmos desarrollados con la finalidad de determinar algunas propiedades de los sistemas no lineales con retardos (SNLR). Particularmente, se abordaron los temas de integrabilidad y equivalencia de un SNLR accesible con un sistema lineal. Dichos algoritmos se encuentran basados en herramientas generadas a partir del enfoque geométrico de control. Se presentan, además, resultados teóricos útiles para la construcción de algunas de las rutinas elaboradas. El trabajo realizado se ha implementado en el paquete de cálculo simbólico SAC (por sus siglas en inglés, Symbolic Analysis and Control). Este programa de distribución libre, regido por las normas GNU GPL, pretende ser una herramienta de gran utilidad para el análisis de sistemas dinámicos.

**Palabras Clave:** Sistemas con retardo, Corchete de Lie Extendido, Equivalencia lineal, Controlabilidad, Integrabilidad.

**ABSTRACT** of the thesis presented by **EDUARDO GARCÍA RAMÍREZ**, in partial requirements to obtain the **MASTER IN SCIENCES** degree in **ELECTRONIC AND TELECOMMUNICATIONS** with orientation in **CONTROL SYSTEMS AND INSTRUMENTATION**. Ensenada, Baja California, December 2011.

**EXTENSION OF GEOMETRICAL TOOLS FOR ANALYSIS OF  
NONLINEAR SYSTEMS WITH DELAYS**

This thesis presents algorithms developed to determine properties of nonlinear delay systems (NLDS). Specifically integrability and the equivalence of a NLDS that is accessible with a linear system. These algorithms are based on tools generated from a geometric control approach. We present theoretical results useful for the construction of some developed routines. This work has been implemented in computer algebra package SAC (Symbolic Analysis and Control) and is wholly free software for distribution, governed by the GNU GPL rules, intended to be a useful tool for the analysis of dynamic systems.

**Keywords:** Time-Delay systems, Extended Lie bracket, Linear equivalence, controllability, Integrability.

---

*Dedicada a mis padres*

*Miguel Ángel García y*

*María Elida Ramírez*

gracias por todo su apoyo y cariño.

*A la memoria de*

*Alain Kaishi Romero V.*

---

# Agradecimientos

A mi familia, mis padres Miguel Ángel García Jáquez y Maria Elida Ramírez Rodríguez y a mis hermanos Miguel, Marcela, Adrián y Citlali.

A los miembros de mi comité de tesis, el Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez, Dr. Joaquín Álvarez Gallegos, M.C. José Ricardo Cuesta García, Dr. Timothy Robert Baumgartner McBride, por la calidad de sus enseñanzas y observaciones.

A los profesores que me impartieron clase en mi estancia en el CICESE, particularmente al M.C. Moisés Castro Delgado por sus enseñanzas más allá del salón de clases y al Dr. Enrique Mitrani Abenchuchan por la calidad de su cátedra.

A Gerardo Hirata, Aarón Desiga y Luis Guerrero por su amistad invaluable y toda la ayuda incondicional que recibí de ustedes. Además, al resto de mis amigos y compañeros de generación: Ernesto Murillo, Liliana Castorena, Alejandro Gómez, Mauricio Mena, Joctán A. Gutiérrez, Alejandro Cabrera, Joege L. Ureña.

A todas las personas que me brindaron su amistad en ensenada, en especial a Araceli Gárate, Karen Ponce, Perla Y. Romero, Paúl Medina, Sandra Calleja, Cesar, Fernando Piñal, Carlos Bowman, Edgar Lara, Martín García, Yasmín Barrón, Rodrigo, Irak Quezada, Abimael Salcedo, David Hernández, Claudia Gil, Amalia Monzón, Ana Huaico, Pedro Valenzuela, Karla Pedraza, Guadalupe, Esther y Katrin Q.

A todos mis amigos, que siempre me han apoyado, especialmente a Jaime Escobar, Santiago Godínez, Francisco Ruvalcaba, Rene Rodríguez, Rut E. Pescador, Jazmín A. Martínez, Edith Fernández, Carlos Hernández, Carlos González, Javier Aviña, Aldo Curiel, Christian S. Alvarez, Julio C. Quiñónez, Marco A. Chavez y Carlos Castro.

Al CONACyT por el apoyo económico y al CICESE.

---

# Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
I.1 Antecedentes históricos . . . . .	2
I.2 Objetivo general . . . . .	5
I.3 Objetivos particulares . . . . .	5
I.4 Motivación . . . . .	6
I.5 Organización de la tesis . . . . .	6
<b>II. PRELIMINARES</b>	<b>8</b>
II.1 Maxima y SAC . . . . .	8
II.2 Ecuaciones diferenciales funcionales del tipo retardo . . . . .	10
II.2.1 Representación de espacio de estados . . . . .	11
II.3 Marco algebraico y operador retardo. . . . .	12
II.3.1 Sistemas de control . . . . .	16
II.4 Resumen . . . . .	18
<b>III. INTEGRABILIDAD</b>	<b>19</b>
III.1 Caso sin retardos . . . . .	19
III.1.1 Corchete de Lie . . . . .	20
III.1.2 Involutividad e integrabilidad . . . . .	21
III.2 Caso con retardos . . . . .	22
III.2.1 Corchete de Lie extendido . . . . .	23
III.2.2 Involutividad e integrabilidad . . . . .	27
III.3 Resumen . . . . .	32
<b>IV. EQUIVALENCIA A UN SISTEMA LINEAL CONTROLABLE</b>	<b>34</b>
IV.1 Controlabilidad . . . . .	35
IV.1.1 Caso sin retardos . . . . .	35

---

## Contenido (continuación)

	Página
IV.1.2 Caso con retardos . . . . .	38
IV.2 Accesibilidad . . . . .	40
IV.2.1 Sin retardos . . . . .	40
IV.2.2 Con retardos . . . . .	42
IV.3 Equivalencia a un sistema lineal con retardos débilmente controlable	46
IV.3.1 Forma de Smith y pre-forma de Smith . . . . .	48
IV.3.2 Segunda condición del Teorema 3 y aportación teórica . . . .	51
IV.3.3 Tercera condición del Teorema 3 . . . . .	57
IV.3.4 Cuarta condición del Teorema 3 . . . . .	59
IV.3.5 Algoritmo general . . . . .	62
IV.4 Equivalencia a un sistema con retardos fuertemente controlable . . .	66
IV.5 Equivalencia a un sistema lineal sin retardos completamente controlable	68
IV.6 Resumen . . . . .	69
<b>V. CONCLUSIONES</b>	<b>72</b>
V.1 Aportaciones . . . . .	72
V.2 Trabajo futuro . . . . .	73
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>75</b>
<b>A. Algunos elementos de álgebra</b>	<b>78</b>
<b>B. Formalismo algebraico</b>	<b>80</b>
<b>C. Conceptos de geometría diferencial</b>	<b>84</b>

---



# Lista de Figuras

Figura		Página
1	Módulos que conforman el SAC. . . . .	10
2	Modelo mecánico de un robot elástico. . . . .	12
3	Sistema no controlable. . . . .	38
4	Relación entre controlabilidad y accesibilidad con alcanzabilidad. . . . .	42
5	Función $C^\infty$ . . . . .	81
6	Función no analítica. . . . .	83
7	2-Variedad. . . . .	85
8	Espacio tangente y campo vectorial en una variedad. . . . .	86

---

# Lista de algoritmos

1	Corchete de Lie extendido. . . . .	26
2	Distribución $\Delta_k$ . . . . .	28
3	Distribución $\Delta'_k$ . . . . .	30
4	Prueba de integrabilidad de una distribución. . . . .	33
5	Submódulos de accesibilidad. . . . .	45
6	Identificando la dependencia de la variable de control. . . . .	48
7	Pre-forma de Smith. . . . .	56
8	Pertenencia de los coeficientes de un polinomio a los números reales. . .	60
9	Pertenencia al módulo generado por $R_n$ sobre un anillo polinomial. . .	61
10	Algoritmo del corchete de Lie extendido. . . . .	63
11	Equivalencia con un sistema lineal con retardos débilmente controlable. .	65
12	Equivalente a un sistema lineal con retardos fuertemente controlable. .	67
13	Pertenencia a los reales. . . . .	69
14	Equivalencia con un sistema lineal sin retardos controlable. . . . .	70

---

# Capítulo I

## INTRODUCCIÓN

El modelado matemático de sistemas dinámicos es una aproximación que permite estudiar matemáticamente dichos sistemas. Es necesario que esta abstracción se comporte lo más apegado a la realidad y en ocasiones es posible que este modelo sea muy sencillo. Un sistema lineal sin retardos en el tiempo, por ejemplo, puede resultar muy útil si en la vecindad del punto de operación elegido para trabajar las no linealidades del sistema son despreciables, y su evolución en el tiempo no depende en gran medida de su pasado. Diversos libros de ingeniería (Ogata, 2003; Dorf y Bishop, 2008) y matemáticas (Sontag, 1990; Padulo y Arbib, 1974) contienen un sinnúmero de herramientas para el análisis y control de estos sistemas. Sin embargo, esta idealización no siempre es adecuada y en esos casos es necesario utilizar técnicas distintas a las ya desarrolladas para los sistemas lineales. Libros clásicos de control (Isidori, 1995; Khalil, 2002) presentan formas de lidiar con una amplia variedad de sistemas no lineales sin retardos. El estudio de estos sistemas es vasto y en la actualidad se cuenta con múltiples resultados que pueden ser de mucha utilidad al tratar con ellos. Por otro lado, no contemplar el efecto que produce el estado pasado de un sistema o hacer aproximaciones erróneas en las ecuaciones que lo describen puede causar que este modelo sea inadecuado, así como lo indican Driver (1977); Dorf y Bishop (2008). Esta clase de sistemas son llamados sistemas con retardos y comúnmente los efectos de los retardos son a causa del tiempo que toma el sistema en reaccionar a una entrada, tiempo de computo o de fenómenos de transporte. Es posible encontrar aplicaciones de este tipo de sistemas que abarcan desde

---

sistemas biológicos tales como modelos de interacción neuronal, tiempo de maduración de insectos, tiempos de incubación epidemiológicos, maduración de células sanguíneas, modelos de crecimiento de población, etc. (MacDonald, 1989), sistemas industriales, como tanques de almacenamiento, sistemas robóticos, laminado de acero, control de temperatura, entre otras, y en muchas otras áreas tales como mecánica, química y óptica (Erneux, 2009). Es por esta razón que el estudio de los sistemas con retardo se ha vuelto de gran interés.

## I.1 Antecedentes históricos

Los antecedentes de los sistemas de álgebra computacional (Caviness, 1986) cuentan con contribuciones de grandes matemáticos como Newton y Gauss que introdujeron métodos computacionales importantes en el procesos de sus investigaciones (e.g. ajuste por mínimos cuadrados introducido por Gauss). Ya en el comienzo de la segunda mitad del siglo XX el auge de la computadora digital trajo consigo un creciente interés en este campo al abordarse soluciones a problemas como la búsqueda de algoritmos rápidos para el cálculo del máximo común divisor y la factorización de polinomios, procesos de decisión para teorías de lógica, integración y suma de términos finitos, creación de algoritmos para la solución de ecuaciones diferenciales en forma cerrada, etc. Todo esto, acompañado de un creciente desarrollo de un gran número de paquetes de software de cálculo computacional, entre los que destaca el programa MACSYMA, un sistema computacional que comenzó su desarrollo a finales de la década de 1960 (Pavelle y Wang, 1985) en el Instituto Tecnológico de Massachusetts basado en el lenguaje de programación LISP (acrónimo de list processor). En el año de 1982 se derivó de MACSYMA un sistema computacional llamado Maxima que ha crecido en gran medida

---

gracias a la liberación de su código fuente bajo la licencia general pública GNU.

En lo que respecta a la teoría de control, las primeras herramientas que surgieron con el fin de caracterizar sistemas dinámicos y diseñar herramientas de control encontramos los métodos de análisis de respuesta en frecuencia, desarrollados en el periodo de los años 1930 a 1940 por investigadores, ingenieros y científicos tales como Nyquist, Bode, Evans y Nichols, entre otros. En este tipo de procedimiento de análisis la frecuencia de la señal de entrada del sistema se varía en un intervalo establecido con el fin de estudiar la respuesta resultante. Con los modelos e información que se extraen de dicho análisis es posible utilizar los datos obtenidos de mediciones sobre el sistema físico sin necesidad de deducir su modelo matemático. Es posible en base al uso de gráficas y modelos frecuenciales establecer criterios de estabilidad, lo que permite diseñar sistemas de control para los sistemas estudiados. El análisis de la respuesta en frecuencia es la base para lo que conocemos hoy en día como teoría de control clásico, que sigue siendo uno de los instrumentos más importantes para el estudio de sistemas dinámicos en la ingeniería en general. Por otro lado, el diseño inicial de sistemas de control envuelve diversas simplificaciones seguida por el ajuste de parámetros a prueba y error y el resultado final no garantiza de ninguna forma ser el óptimo.

En las décadas de 1960 y 1970 el concepto de ecuaciones de estado fue introducido a la teoría de control, en gran medida por el trabajo pionero de R. E. Kalman. Entre algunas de las ventajas del acercamiento por espacio de estados encontramos que se adapta muy bien al análisis y diseño de métodos para sistemas de múltiple entrada múltiple salida y a la aplicación de la tecnología de las computadoras digitales. Por otra parte, las leyes de control son calculadas usando formulas analíticas, lo que a menudo optimiza el rendimiento particular de sistemas. Esta aproximación, que en un principio se aplicó a los sistemas lineales con gran éxito, fue naturalmente evolucionando

---

hasta extender sus resultados a los sistemas no lineales los cuales son, en cierto sentido, una generalización de los sistemas lineales.

El uso de las variables de estado condujo a un nuevo acercamiento en el análisis y diseño de sistemas de control, el enfoque geométrico (Wonham, 1985). Esta nueva aproximación fue introducida primeramente para sistemas lineales a principios de la década de 1970. Este enfoque involucra muchos cálculos concernientes a la teoría de álgebra lineal, para los cuales se han desarrollado rutinas basadas en programas como MATLAB<sup>®</sup> y Scilab. Durante las dos décadas siguientes a la aparición de este enfoque, se realizaron una extensa cantidad de trabajos para extender esta teoría al caso no lineal (Isidori, 1995; Nijmeijer y Schaft, 1990). Los conceptos fundamentales son casi los mismos, pero las matemáticas utilizadas aprovechan las herramientas de la geometría diferencial, como son estudio de variedades, tensores, derivada y corchetes de Lie, entre otras. Estas herramientas han llevado a resolver y tratar problemas tales como la determinación de la controlabilidad y observabilidad, desacoplo de perturbaciones, desacoplo-entrada salida, seguimiento asintótico de salida, equivalencia lineal, los cuales aparecen en aplicaciones variadas tales como el control de robots manipuladores, la estabilización del vuelo de aeronaves, controlar la trayectoria de vehículos, y más. En este caso, se requiere el uso de lenguajes de cálculo simbólico tales como Axiom, Maxima, Jasymca, SINGULAR, Yacas, entre otros. En la actualidad, se han desarrollado paquetes muy completos basados en programas como Mathematica<sup>®</sup> (Kotta y Tönso, 1998), y Maple<sup>®</sup> (Glumineau y Graciani, 1996). Sin embargo, cuando el sistema depende no solo de su estado actual, sino de su historia pasada debido a la presencia de retardos (retardos en mediciones, transporte, tiempo de reacción, etc) dichas herramientas no pueden ser aplicadas en forma directa, debido a que son sistemas cuya dimensión es infinita.

---

En trabajos previamente realizados (Califano *et al.*, 2010, 2011a) se ha expuesto una extensión de las herramientas usadas en el llamado enfoque geométrico para el análisis y control de sistemas no lineales con retardos. Los primeros resultados son prometedores, ya que se ha logrado resolver de manera efectiva problemas tales como integrabilidad de una distribución, la equivalencia a un sistema lineal accesible con y sin retardos, entre otros. Sin embargo, los cálculos involucrados son demasiado laboriosos, por lo que surge la necesidad de desarrollar programas de cómputo que los lleven a cabo. Finalmente, este trabajo tiene como antecedente directo el desarrollo del paquete de software SAC desarrollado en Maxima en el año 2006 (Garate-García, 2006; Gárate-García y Cuesta-García, 2006) con el objetivo de desarrollar algoritmos de control para el análisis y diseño de sistemas no lineales con retardo.

## I.2 Objetivo general

Desarrollar rutinas utilizando cálculo simbólico que realicen algoritmos útiles para resolver algunos problemas de control de sistemas no lineales con retardos (SNLR).

## I.3 Objetivos particulares

Programar los algoritmos siguientes

- Rutina para determinar la integrabilidad de una distribución.
  - Programa para determinar si existe equivalencia de un SNLR con un sistema lineal con retardo fuertemente controlable
  - Programa para determinar si existe equivalencia de un SNLR con un sistema lineal con retardo débilmente accesible
-

- Programa para determinar si existe equivalencia de un SNLR con un sistema lineal sin retardo controlable

## I.4 Motivación

Un problema con los métodos recientemente desarrollados, es que la cantidad de cálculos requeridos para comprobar si un sistema cuenta con ciertas propiedades es muy grande aun para sistemas que aparentemente son sencillos. Esto implica la necesidad de un sistema de cálculo simbólico que realice los cálculos necesarios.

## I.5 Organización de la tesis

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. El capítulo número dos trata de los preliminares necesarios para familiarizarse con las herramientas matemáticas utilizadas a lo largo de este trabajo y las características que llevaron a la elección del software utilizado. Entre los conceptos matemáticos que se tocan en este tema se tiene una ligera introducción a las ecuaciones diferenciales funcionales (EDF) y al marco algebraico utilizado. El capítulo tres habla de los algoritmos generados con la finalidad de revisar la integrabilidad de una distribución (Califano *et al.*, 2011a). Se explican someramente algunas definiciones del enfoque algebraico de control para los sistemas no lineales, entre las que se encuentran el concepto de variedad, de distribución y de campos vectoriales, con el objetivo de relacionar dichos conceptos con sus homólogos en los sistemas no lineales con retardos, cuyas definiciones también son revisadas. Los algoritmos son incluidos en formato de pseudocódigo, por considerarse un formato muy natural que puede facilitar la comprensión de estos. El capítulo cuatro presenta el

---



trabajo realizado para la construcción de algoritmos que revisan la equivalencia de un sistema no lineal con retardos a un sistema lineal con retardos o sin retardos (Califano *et al.*, 2010, 2011a). Se abordan los temas de accesibilidad y de forma canónica de Smith, temas fundamentales para la comprensión del trabajo realizado. Además de los algoritmos construidos se presenta una contribución teórica que emplea a la preforma de Smith como una herramienta para determinar si algunas de las condiciones propuestas en la literatura para determinar dicha equivalencia se cumplen. El capítulo cinco, expone las conclusiones finales y recomendaciones para trabajos posteriores de este trabajo de tesis.

---

## Capítulo II

# PRELIMINARES

La organización de este capítulo está dada de la siguiente forma: Se comienza en la Sección II.1 con una introducción al paquete SAC y se habla del motivo de la elección de Maxima, sobre otros programas de cálculo simbólico, para albergar a este paquete de software. Enseguida, en la Sección II.2 se da una breve introducción a los sistemas con retardo y a su representación matemática. Una descripción de las herramientas utilizadas en el enfoque algebraico diferencial se presenta en la Sección II.3, además de define el operador retardo y se describen algunas propiedades. En la Sección II.3.1 se definen algunas herramientas útiles al tratar con los sistemas de control considerados en este trabajo de tesis.

### II.1 Maxima y SAC

El programa SAC es un paquete de herramientas basado en el programa de cálculo simbólico Maxima <sup>1</sup>.

SAC fue pensado para ser creado como un módulo de algún lenguaje matemático de programación ya existente que cumpliera con ciertos requerimientos básicos establecidos por el usuario. Entre estos requerimientos se pide que el software generado sea

- Software de manejo simbólico.
- Programa de distribución libre.

---

<sup>1</sup><http://Maxima.sourceforge.net/>

- Multiplataforma (Linux, Windows<sup>®</sup>, MacOS<sup>®</sup>).
- Estructura modular (uso en forma individual de cada componente)
- Código estable.
- Fácil manejo

El lenguaje elegido fue Maxima, que cumple con las condiciones anteriores y que además, por ser de libre distribución regido por licencias GNU GPL (GNU General Public License). El usuario tiene acceso libre al código fuente por lo que puede estudiarlo, modificarlo de acuerdo a sus necesidades y publicar sus mejoras bajo la licencia GNU GPL. Por otro lado, Maxima (Maxima, 2010) permite correr programas generados en el lenguaje LISP, que es un lenguaje de programación especialmente diseñado para trabajar con listas de datos. Por estas razones, Maxima fue seleccionado sobre otros programas de cálculo simbólico, con la misma licencia GNU GPL, tales como Axiom, GAP, Jasymca, SINGULAR, Yacas, entre otros, y sobre software comercial como Maple<sup>®</sup>, MATLAB<sup>®</sup> y muPAD<sup>®</sup>.

Formalmente el programa SAC inició su desarrollo en el año 2006 (Garate-García, 2006; Gárate-García y Cuesta-García, 2006) considerando el análisis de problemas de control tales como:

- Accesibilidad.
  - Observabilidad.
  - Equivalencia con una forma triangular.
  - Linealización por inyecciones aditivas entrada/salida.
  - Rechazo de perturbaciones (parcialmente)
-

Para lograr estos objetivos de programación el trabajo de Garate-García (2006) generó una cantidad numerosa de algoritmos en un formato modular que permite hacer uso de ellos en programas nuevos. La Figura 1 muestra en la zona clara los módulos generados en el trabajo de Garate-García (2006) y en la zona sombreada los generados en este trabajo de tesis, englobando las funciones generales en una pirámide de dependencias. Las funciones de la base de la pirámide no dependen de las funciones del nivel superior ni de ninguna de su mismo nivel, pero los programas de niveles superiores dependen de programas de los niveles inferiores, así los programas en la punta de la pirámide necesitan de los niveles inferiores para poder funcionar.

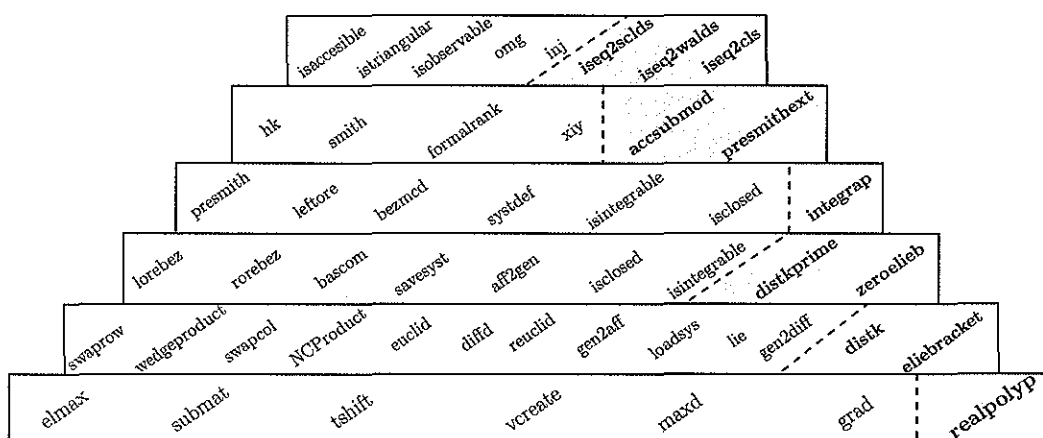


Figura 1. Módulos que conforman el SAC.

## II.2 Ecuaciones diferenciales funcionales del tipo retardo

Una ecuación diferencial funcional (o bien EDF) (Kolmanovskii y Nosov, 1986) es una ecuación que involucra una función incógnita  $x(t)$  de un argumento escalar, para el caso

de interés el tiempo  $t$ , y sus derivadas para diversos valores del argumento  $t$ . Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son  $\dot{x}(t) = x(t-3)$ ,  $\dot{x}(t) = x(t) - x(t/2) + \dot{x}(t-1)$ .

Un retardo (Dorf y Bishop, 2008) es el intervalo de tiempo entre el inicio de un evento en una parte de un sistema y la acción resultante en otro punto del mismo sistema. De acuerdo a esta definición, la dinámica del sistema está dada por un modelo de ecuaciones diferenciales que depende del estado pasado del sistema, i. e. ecuaciones del tipo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\cdot, \mathbf{x}(t-\tau_1), \mathbf{x}(t-\tau_2), \dots)$ , donde  $\tau_i$  con  $i = 1, 2, \dots$  son tiempos de retardo. Este tipo de ecuaciones son un tipo especial de EDF también conocidas como ecuaciones diferenciales con retardo. Su estudio se encuentra muy relacionado al modelado de los sistemas dinámicos con retardo como se verá en las secciones subsiguientes.

## II.2.1 Representación de espacio de estados

En un sistema dinámico en general, es posible definir tres importantes conjuntos de variables. El primero de ellos es el conjunto de entradas o de variables de control, que representan el estímulo que el sistema recibe del exterior, denotadas por  $u_1, u_2, \dots, u_r$ . El segundo grupo es el de las salidas, que son señales que el sistema genera y que pueden llegar a ser medidas y se denotan por  $y_1, \dots, y_n$ . El tercer y último grupo es llamado el estado, que es posible definir como (M. Malek-Avarej, 1897):

**DEFINICIÓN 1.** *El estado de un sistema en un tiempo  $t_0$  es una colección de información que junto con el conocimiento de la(s) entrada(s) para  $t \geq t_0$  es suficiente para determinar la(s) salida(s) y el estado del sistema para  $t \geq t_0$ .*

En otras palabras (Padulo y Arbib, 1974) el estado es alguna representación compacta de la actividad pasada de un sistema lo suficientemente completa como para permitirnos predecir, junto con las entradas, exactamente como serán las salidas, y

además el estado mismo.

A continuación se presenta un ejemplo (Stépán, 1989) de la representación en espacio de estados de un sistema con retardos en el tiempo.

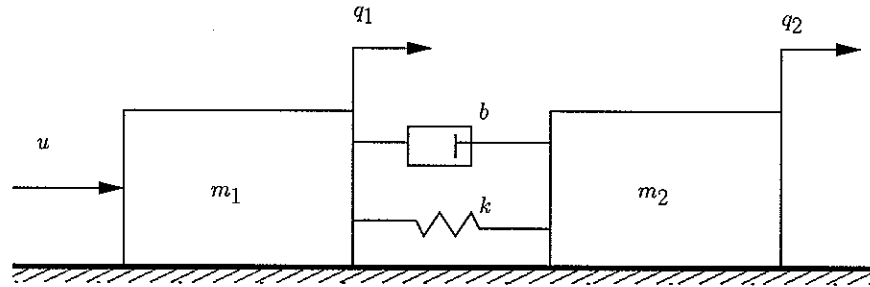


Figura 2. Modelo mecánico de un robot elástico.

**EJEMPLO 1.** En la Figura 2 se observa el modelo mecánico de un robot elástico con posición controlada  $q_1$ . La posición  $q_2$  se detecta directamente. El actuador, que actúa en  $m_1$ , genera una velocidad  $\dot{q} = -Kq_2(t - \tau)$ , donde  $K > 0$  es la ganancia del controlador y  $\tau$  es el tiempo de retardo en el control. Una representación posible de este sistema en espacio de estados es:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & -\alpha^2 & -2\kappa\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2K\kappa\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t - \tau) \\ q_2(t - \tau) \\ v(t - \tau) \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha = \sqrt{k/m_2}$  es la frecuencia natural del sistema sin controlar,  $\kappa = b/(2m_2\alpha)$  es el factor de amortiguamiento y  $v = \dot{q}_2$

## II.3 Marco algebraico y operador retardo.

A continuación se presentan algunos conceptos básicos empleados en el enfoque diferencial algebraico para sistemas con retardo. La notación empleada en esta tesis se basa

en Califano *et al.* (2011a), y la mayor parte de ésta se introduce a lo largo de lo que resta de este capítulo. Una descripción más precisa de los conceptos matemáticos que involucran las siguientes definiciones puede encontrarse en los apéndices A y B.

Se define a  $\mathcal{K}$  como el campo de funciones meromorfas, es decir, el conjunto de funciones que se pueden expresar como el cociente de dos funciones analíticas (véase la Definición 20 en el Apéndice B). Algunos ejemplos son las funciones  $f(x) = \tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ ,  $g(x) = \frac{x^2+4x+2}{x^3+5x^2+13}$ ,  $h(x) = 4$ . El campo  $\mathcal{K}$  es representado por el número finito de símbolos  $\{x(t-i), u(t-i), \dots, u^{(k)}(t-i), i, k \in \mathbb{N}\}$ .

Se nombra como  $\mathcal{E}$  al espacio vectorial generado por el conjunto de símbolos  $\{dx(t-i), du(t-i), \dots, du^{(k)}(t-i), i, k \in \mathbb{N}\}$ , los elementos de este espacio son conocidos como uno-formas. Como ejemplos se tienen  $dx_1(t) - dx_2(t) + du(t)$  y  $2x(t)x(t-2)dx(t-2) + x^2(t-2)dx(t)$ .

Dada una función  $f(\mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t-s))$  se utiliza la notación  $\mathbf{x}_{[s]} = (\mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t-s))$ , donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ . De manera similar se definen  $\mathbf{x}_{[s]}(-p) = (\mathbf{x}(t-p), \dots, \mathbf{x}(t-s-p))$ ,  $\mathbf{u}_{[s]}$ ,  $\mathbf{u}_{[s]}(-p)$ ,  $\mathbf{z}_{[s]}$  y  $\mathbf{z}_{[s]}(-p)$ . De acuerdo a esta notación, se define también  $f(\mathbf{x}_{[s]})|_{\mathbf{x}_{[s]}(-p)} \triangleq f(\mathbf{x}(t-p), \dots, \mathbf{x}(t-s-p))$ .

Se denota como  $d$  al operador diferencial el cual mapea a los elementos del conjunto  $\mathcal{K}$  al conjunto  $\mathcal{E}$ .

**EJEMPLO 2.** *Considérese la función meromorfa  $f(t) = x(t)\cos(x(t-3)) \in \mathcal{K}$ , el operador  $d$  actúa sobre ella de la siguiente manera.*

$$df(t) = \cos(x(t-3))dx(t) - x(t)\text{sen}(x(t-3))dx(t-3).$$

Se establece el operador retardo  $\delta$ , que opera en una función meromorfa  $f(t) \in \mathcal{K}$

de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\delta f(t)d\eta(t) &= f(t-1)\delta d\eta(t) = f(t-1)d\eta(t-1) & y \\ \delta^k f(t)d\eta(t) &= f(t-k)d\eta(t-k).\end{aligned}$$

De acuerdo a esto, se puede reescribir el resultado del Ejemplo 2 como

$$\begin{aligned}df(t) &= \cos(x(t-3))dx(t) - x(t)\text{sen}(x(t-3))\delta^3 dx(t) \\ &= (\cos(x(t-3)) - x(t)\text{sen}(x(t-3))\delta^3)dx(t).\end{aligned}$$

Este operador no es conmutativo ya que

$$\delta f(t) = f(t-1)\delta \neq f(t)\delta = \delta f(t+1). \quad (1)$$

En el caso del lado derecho de la desigualdad (1) la función que resulta no es causal, situación que se desea evitar ya que en caso de los sistemas de control se requeriría el uso de técnicas de control para sistemas no causales.

**EJEMPLO 3.** *En un sistema lineal es posible emplear este operador de forma tal que el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_2(t-\tau) + u(t-2\tau) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t-\tau) + u(t),\end{aligned}$$

donde  $\tau \in \mathbb{R}$  es la base del retardo. Puede ser representado como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \delta^2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

El anillo polinomial formado al utilizar al conjunto de los números reales como coeficientes, sobre la indeterminada  $\delta$ , se expresa como  $\mathbb{R}(\delta)$ . Por otro lado, es posible crear



un anillo polinomial sobre  $\delta$  como indeterminada utilizando a las funciones meromorfas, con la estructura de  $\mathcal{K}$ , como sus coeficientes. Debido a la naturaleza no conmutativa del operador  $\delta$  el anillo formado de esta manera no es conmutativo, sin embargo, es un anillo Euclidiano (Marquez-Martinez y Moog, 2004). Se denota a este anillo polinomial (por la izquierda) como  $\mathcal{K}(\delta)$ . Todo elemento de  $\mathcal{K}(\delta)$  puede escribirse de la forma  $\alpha(\delta) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\delta + \dots + \alpha_s(t)\delta_a^r$ ,  $\alpha_i \in \mathcal{K}$ . Se denota a  $gpol(\cdot)$  como el grado polinomial en  $\delta$  de su argumento, esto es, el grado polinomial de un elemento de  $\mathcal{K}(\delta)$  o de  $\mathbb{R}(\delta)$ . De acuerdo a la notación anterior, y asignando  $r_a = gpol(\alpha(\delta))$ , el producto y suma sobre el anillo  $\mathcal{K}(\delta)$  están definidos como:

$$\begin{aligned}\alpha(\delta) + \beta(\delta) &= \sum_{i=0}^{\max(r_a, r_b)} (\alpha_i(t) + \beta_i(t))\delta^i \\ \alpha(\delta)\beta(\delta) &= \sum_{i=0}^{r_a} \sum_{j=0}^{r_b} (\alpha_i(t)\beta_j(t-i))\delta^{i+j}\end{aligned}$$

Se define a  $\Delta = span_{\mathcal{K}^n(\delta)}\{\mathbf{r}_1(\cdot, \delta), \dots, \mathbf{r}_s(\cdot, \delta)\}$  como el módulo por la derecha generado sobre  $\mathcal{K}^n(\delta)$  por los elementos columna  $\mathbf{r}_1(\cdot, \delta), \dots, \mathbf{r}_s(\cdot, \delta) \in \mathcal{K}^n(\delta)$ .

**DEFINICIÓN 2.** Una matriz  $A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$  es llamada unimodular si  $A^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$ .

Ya que se trata de anillos no conmutativos no es posible obtener la matriz inversa de una matriz  $A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$  con los algoritmos clásicos como la eliminación por Gauss-Jordan, o el producto de la inversa del determinante con la matriz adjunta de  $A^t$ . Se utilizan, entonces, algoritmos como los presentados en Márquez-Martínez y Brizuela (2010). Estos algoritmos, ya implementados en el programa SAC, son empleados en los programas generados en este trabajo de tesis cuando se requiere obtener la inversa de una matriz.

### II.3.1 Sistemas de control

Los sistemas de control a considerar son los que pueden representarse de la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \dots, x(t-s)) + \sum_{j=0}^s G_j(x(t), \dots, x(t-s))u(t-j) \quad (2)$$

Donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$  y  $F$ ,  $G_j$  para  $j = 0, \dots, s$  son funciones meromorfas de sus argumentos. Esto es, los sistemas considerados son no lineales con retardos finitos y conmensurables. Ya que se trata de sistemas conmensurables no se pierde generalidad al escalar el tiempo para tener retardos enteros.

De acuerdo a la notación establecida en la sección anterior el sistema (2) se reescribe como

$$\dot{x}(t) = F(\mathbf{x}_{[s]}) + \sum_{j=0}^s G_j(\mathbf{x}_{[s]})u(t-j) \quad (3)$$

La forma diferencial, obtenida como resultado de utilizar el operador  $d$ , es un objeto matemático con diversas propiedades útiles para el propósito de este trabajo de tesis.

La forma diferencial del sistema (3) está dada por

$$d\dot{x}(t) = f(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta)dx + g(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)du, \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta) &= \sum_{i=0}^s \frac{\partial F(\mathbf{x}_{[s]})}{\partial x(t-i)} \delta^i + \sum_{j=0}^s \left( u(t-j) \sum_{i=0}^s \frac{\partial G_j(\mathbf{x}_{[s]})}{\partial x(t-i)} \delta^i \right) \\ g(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= \sum_{j=0}^s G_j(\mathbf{x}_{[s]}) \delta^j. \end{aligned}$$

Se espera que el siguiente ejemplo ilustre la forma en la que el operador  $d$  actúa sobre un sistema de la forma (3).

**EJEMPLO 4.** *Dado el siguiente sistema no lineal en su representación de espacio de*

estados

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2(t) - x_2(t-1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 2x_2(t-1) \\ 1 \end{pmatrix} u(t-1) + \\ &+ \begin{pmatrix} 2x_2(t-1) \\ 0 \end{pmatrix} u(t-2), \end{aligned}$$

su forma diferencial está dada por

$$d\dot{x}(t) = f(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta)dx + g(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)du,$$

de forma explícita:

$$d\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \delta + 2u(t-1)\delta + 2u(t-2)\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 2x_2(t-1)(\delta + 1)\delta \\ \delta + 1 \end{pmatrix} du.$$

El programa SAC cuenta con una función que calcula la forma diferencial de un sistema en el formato de la ecuación (3).

Al trabajar con un sistema como (3) el buscar un cambio de coordenadas es necesario cuando se habla de equivalencia con un sistema más simple. Sin embargo en el caso de sistemas con retardos, no tener cuidado al elegir un cambio de coordenadas puede dar como resultado que dicha transformación dependa de entradas futuras, o en otras palabras que no sea causal. Esto impide que se utilice el marco algebraico visto en la sección anterior. Es necesario, entonces, que las nuevas coordenadas de dicha transformación y su inversa sean causales. A esto se le conoce como cambio bicausal de coordenadas, cuya definición formal es la siguiente (Califano *et al.*, 2011a).

**DEFINICIÓN 3.** *Considérese la dinámica (3) con coordenadas de estado  $\mathbf{x}$ . Entonces  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}_{[\alpha]})$ ,  $\phi \in \mathcal{K}^n$  es un **cambio de coordenadas bicausal** para (3) si existe un entero  $l \in \mathbb{N}$  y una función  $\phi^{-1}(\mathbf{x}_{[l]}) \in \mathcal{K}^n$  tal que  $x(t) = \phi^{-1}(\mathbf{x}_{[l]})$ .*

A este cambio bicausal de coordenadas se asocia una representación en forma diferencial  $dz = T(\mathbf{x}_{[\alpha]}, \delta)dx$ . Algunas propiedades interesantes de  $T(\mathbf{x}_{[\alpha]}, \delta)$  pueden consultarse en (Califano *et al.*, 2010, 2011a).

**EJEMPLO 5.** *El cambio de coordenadas  $z(t) = x(t - 1)$  no es bicausal ya que su inversa  $x(t) = z(t + 1)$  no es causal.*

**EJEMPLO 6.** *El cambio de coordenadas*

$$\phi \begin{cases} z_1(t) = x_1(t) + x_2^2(t - 1) \\ z_2(t) = x_2(t) \end{cases} \quad \phi^{-1} \begin{cases} x_1(t) = z_1(t) - z_2^2(t - 1) \\ x_2(t) = z_2(t) \end{cases}$$

*es un cambio de coordenadas bicausal, ya que el cambio de coordenadas y su inversa son causales. Con  $dz = T(\mathbf{x}_{[\alpha]}, \delta)dx$  y  $dx = T^{-1}(\mathbf{x}_{[\alpha]}, \delta)dz$  respectivamente*

$$dz = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2(t-1) & \delta \\ 0 & 1 & \end{pmatrix} dx \quad dx = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2(t-1) & \delta \\ 0 & 1 & \end{pmatrix} dz.$$

## II.4 Resumen

En este capítulo se detallaron algunas herramientas importantes que se utilizan en los siguientes capítulos. El operador retardo, y las definiciones de los conjuntos sobre los que se trabaja, i.e. el conjunto de funciones meromorfas  $\mathcal{K}$ , el espacio formado por uno-formas  $\mathcal{E}$ , el anillo polinomial  $\mathcal{K}[\delta]$ , entre otros, se emplean a lo largo de todos los capítulos restantes de esta tesis. Por otro lado, tanto la definición del sistema (3) así como la definición de cambio de coordenadas bicausal son de especial interés en la teoría relacionada al Capítulo IV.

# Capítulo III

## INTEGRABILIDAD

En esta sección se abordará el concepto de integrabilidad, en una primera parte, su definición y caracterización para sistemas no lineales sin retardos. Enseguida, se tocará el tema del caso no lineal con retardos donde se presentará una extensión del corchete de Lie (Califano *et al.*, 2011a) para esta clase de sistemas. Esta herramienta tiene sus bases en el área de geometría diferencial, por lo que en el Apéndice C se ha incluido un resumen de algunos conceptos relacionados con esta sección. Por último, en este capítulo, se reportan las rutinas desarrolladas en este trabajo de tesis.

### III.1 Caso sin retardos

Para comenzar este tema, se hablará del concepto de campo vectorial. Un campo vectorial suave  $\mathbf{v}$ , definido en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , puede interpretarse como un mapeo suave que asigna un vector de dimensión  $n$ , que se denotará como  $\mathbf{v}(x)$ , a cada punto  $x$  del subconjunto  $U$ . Una explicación más amplia puede encontrarse en el Apéndice C. A continuación, se define una operación de gran importancia en el área de control geométrico, en particular cuando se habla de integrabilidad, denominada corchete de Lie.

---

### III.1.1 Corchete de Lie

Se define la operación de corchete de Lie como

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](x) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \mathbf{g}, \quad (5)$$

donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son dos campos vectoriales definidos en un subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y el resultado de la operación es otro campo vectorial. La notación de la aplicación recursiva de esta operación está definida como

$$\begin{aligned} ad_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}(x) &= [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}](x) \\ \text{con: } ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}(x) &= \mathbf{g}(x), \end{aligned}$$

así, esta notación sustituye a:

$$[\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \dots, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] \dots]. \quad (6)$$

El corchete de Lie tiene las siguientes propiedades

1. Bilinealidad sobre  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2, \mathbf{g}] &= \alpha_1 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}] + \alpha_2 [\mathbf{f}_2, \mathbf{g}], \\ [\mathbf{f}, \alpha_1 \mathbf{g}_1 + \alpha_2 \mathbf{g}_2] &= \alpha_1 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] + \alpha_2 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]. \end{aligned}$$

2. Conmutatividad asimétrica

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}].$$

3. Cumple con la identidad de Jacobi

$$[\mathbf{f}, [\mathbf{g}, \mathbf{h}]] + [\mathbf{g}, [\mathbf{h}, \mathbf{f}]] + [\mathbf{h}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] = 0. \quad (7)$$

En general, si se cumplen estas propiedades en un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  se denomina álgebra de Lie.

### III.1.2 Involutividad e integrabilidad

Supóngase ahora que se tienen  $d$  campos vectoriales  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$  linealmente independientes entre sí. En cada punto  $x$  que pertenece al subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , los vectores  $\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_d(x)$  generan un campo vectorial. Se identifica como distribución al conjunto de vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$  y se denota como

$$\Delta = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}.$$

Supóngase la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_d(x)) = 0 \quad (8)$$

donde  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$  es un vector fila y  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$  son funciones suaves reales. Se desean encontrar  $n - d$  soluciones a esta ecuación diferencial, donde los vectores fila  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \lambda_{n-d}}{\partial x}$  son independientes entre sí en  $x \in U$ . Al espacio formado por estos vectores fila se le conoce como aniquilador de la distribución  $\Delta$  y se denota como  $\Delta^\perp$ . En resumen, se desea saber cuando una distribución  $\Delta$  tiene un aniquilador  $\Delta^\perp$ , el cual es generado por diferenciales exactas.

**DEFINICIÓN 4.** (Isidori, 1995) *Una distribución  $\Delta$  no singular de dimensión  $d$ , definida en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , se dice completamente integrable si, por cada punto  $x^0 \in U$  existe una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  y  $n - d$  funciones suaves reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$  todas definidas en  $U^0$  tal que*

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\} = \Delta^\perp$$

en  $U^0$ .

El concepto que se presentará a continuación da pie a una forma de saber si una distribución es integrable. Una distribución  $\Delta$  es involutiva (Boothby, 1986) si existe

una base local  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  en una vecindad de cada punto tal que

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \mathbf{v}_k, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (9)$$

Esto es, que el campo vectorial resultante de la aplicación del corchete de Lie entre todos los elementos  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  pertenezca al espacio generado por  $\Delta$ .

El siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en Isidori (1995), da condiciones necesarias y suficientes para que una distribución sea completamente integrable

**TEOREMA 1.** *(Frobenius) Una distribución no singular es completamente integrable si y sólo si es involutiva.*

El Teorema 1 implica una forma de saber si una distribución es integrable o no, esta es, realizar los corchetes de Lie de todos los elementos de la distribución y que se cumpla con la condición establecida en la ecuación (9).

## III.2 Caso con retardos

Cuando se habla de integrabilidad en el caso de los sistemas no lineales con retardo no es posible utilizar directamente el análisis visto en los puntos anteriores, ya que es necesario tomar en cuenta la naturaleza de dimensión infinita de dichos sistemas. Recientemente se han obtenido diversos resultados en esta área. Sin embargo, la cantidad de cálculos requeridos es grande. En esta sección se presentan los algoritmos generados con la finalidad de realizar todos estos cálculos.

La siguiente notación se encuentra relacionada a los conceptos vistos en la Sección III.1. Se denota a  $\Delta = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\mathbf{r}_1(\cdot, \delta), \dots, \mathbf{r}_p(\cdot, \delta)\}$  como el módulo derecho generado



sobre  $\mathcal{K}[\delta]$  por los elementos columna  $\mathbf{r}_i(\cdot, \delta) \in \mathcal{K}^n[\delta]$  con  $i = 1, \dots, p$ . Cada elemento  $i$ -ésimo del submódulo  $\Delta$  puede ser representado de la forma  $\mathbf{r}_i(\cdot, \delta) = \sum_{k=0}^s \mathbf{r}_i^k(\cdot) \delta^k$ .

**DEFINICIÓN 5.** *Un submódulo  $\Delta = \text{span}_{\mathcal{K}[\delta]} \{\mathbf{r}_1(\cdot, \delta), \dots, \mathbf{r}_p(\cdot, \delta)\}$  se dice no singular localmente alrededor de  $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{x}^0(t)^T, \mathbf{x}^0(t-1)^T, \dots, \mathbf{x}^0(t-s)^T)$  si el rango de  $\Delta(\mathbf{x})$  es igual a un número  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$  un subconjunto denso y abierto de  $\mathbf{x}^0$ .*

### III.2.1 Corchete de Lie extendido

Ahora se hablará de una extensión del corchete de Lie que se revisó en la Sección III.1.1 (caso de sistemas no lineales sin retardos). Dicha extensión (Califano *et al.*, 2010, 2011a) propone abordar problemas hasta ahora abiertos para el caso de sistemas no lineales con retardos. A continuación se presenta la definición de la operación denominada como corchete de Lie extendido.

**DEFINICIÓN 6.** (Califano *et al.*, 2011a) Sean  $\mathbf{r}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta) = \sum_{j=0}^s \mathbf{r}_1^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \delta^j$  y  $\mathbf{r}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta) = \sum_{j=0}^s \mathbf{r}_2^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \delta^j$ . El corchete de Lie extendido  $[\mathbf{r}_1^k(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^l(\cdot, \mathbf{u})]_{E_i}$  en  $\mathbb{R}^{(i+1)n}$ ,  $i \geq 0$  se define como:

$$[\mathbf{r}_1^k(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^l(\cdot, \mathbf{u})]_{E_i} = \sum_{j=0}^{\min(k,l,i)} ([\mathbf{r}_1^{k-j}(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^{l-j}(\cdot, \mathbf{u})]_{E_0})^T \Big|_{(x(-j), \mathbf{u}(-j))} \frac{\partial}{\partial x(t-j)} \quad (10)$$

con:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_1^k(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^l(\cdot, \mathbf{u})]_{E_0} &= \sum_{i=0}^k \frac{\partial \mathbf{r}_2^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x(t-i)} \mathbf{r}_1^{k-i}(\mathbf{x}(-i), \mathbf{u}(-i)) \\ &\quad - \sum_{i=0}^l \frac{\partial \mathbf{r}_1^k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x(t-i)} \mathbf{r}_2^{l-i}(\mathbf{x}(-i), \mathbf{u}(-i)) \end{aligned}$$

donde  $l, k, i \in \{0, 1, \dots\}$ .

Esta extensión de la definición de corchete de Lie requiere igualmente una gran cantidad de cálculos, la cual crece en función de los retardos máximos que aparecen en la función.

Al tratar con sistemas con retardo, como se ha mencionado anteriormente, es necesario lidiar con un sistema de dimensión infinita. El siguiente lema indica que, a pesar de la situación antes mencionada, la cantidad de elementos a considerar para realizar la operación de corchete de Lie extendido está caracterizada por un número finito de elementos.

**LEMA 1.** (*Califano et al., 2011a*) *Considérese el submódulo  $\Delta = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\mathbf{r}_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, \mathbf{r}_p(\mathbf{x}, \delta)\}$  con  $\mathbf{r}_i(\mathbf{x}, \delta) = \sum_{k=0}^s \mathbf{r}_i(\mathbf{x}_{[\alpha]})\delta^k$ ,  $s = \max(\alpha, \text{gp}(\mathbf{r}_i(\mathbf{x}_{[\alpha]})))$ . Entonces para cualquier pareja de enteros  $l \leq k$ , y para enteros no negativos  $\gamma, \bar{\gamma}, p > 0$  tales que  $\gamma \geq l$  y  $\bar{\gamma} \geq l + ps$  las siguientes propiedades se mantienen*

$$(i) [\mathbf{r}_1^l(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^k(\cdot, \mathbf{u})]_{E_\gamma} = [\mathbf{r}_1^l(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^k(\cdot, \mathbf{u})]_{E_l}$$

$$(ii) [\mathbf{r}_1^{l+ps}(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^{k+ps}(\cdot, \mathbf{u})]_{E_{\bar{\gamma}}} = [\mathbf{r}_1^{l+ps}(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^{k+ps}(\cdot, \mathbf{u})]_{E_{l+ps}} = \\ \sum_{j=0}^{\min(k,j)} ([\mathbf{r}_1^{k-j}(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^{l-j}(\cdot, \mathbf{u})]_{E_0})_{\left[ \frac{\partial}{\partial x^{(-j-ps)}} \right]_{(x^{(-j-ps)})}}, \quad l \geq s$$

$$(iii) [\mathbf{r}_1^l(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^k(\cdot, \mathbf{u})]_{E_\gamma} = [\mathbf{r}_1^l(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^k(\cdot, \mathbf{u})]_{E_l} = 0, \quad k - l > 2s.$$

Con el fin de explicar este lema considérese una base de elementos que generan el submódulo  $\Delta = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\mathbf{r}_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, \mathbf{r}_j(\mathbf{x}, \delta)\}$ , cada elemento puede expresarse de la forma  $\mathbf{r}_i = \sum_{k=0}^s \mathbf{r}_i^k \delta^k$ . Ahora, se considera el siguiente arreglo tomando a los elementos

$R_j^k = \sum_{i=0}^{k-i} \mathbf{r}_j^{k-i}(\mathbf{x}(-i)) \frac{\partial}{\partial x(t-i)}$  definidos en un espacio de dimensión infinita de la forma

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} \mathbf{r}^0(\mathbf{x}) & \mathbf{r}^1(\mathbf{x}) & \mathbf{r}^2(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{r}^s(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{r}^0(\mathbf{x}(-1)) & \mathbf{r}^1(\mathbf{x}(-1)) & \dots & \mathbf{r}^{s-1}(\mathbf{x}(-1)) & \mathbf{r}^s(\mathbf{x}(-1)) & 0 & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{r}^0(\mathbf{x}(-2)) & \dots & \mathbf{r}^{s-2}(\mathbf{x}(-2)) & \mathbf{r}^{s-1}(\mathbf{x}(-2)) & \mathbf{r}^s(\mathbf{x}(-2)) & \ddots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{r}^0(\mathbf{x}(-s)) & \mathbf{r}^1(\mathbf{x}(-s)) & \mathbf{r}^2(\mathbf{x}(-s)) & \dots & \mathbf{r}^s(\mathbf{x}(-s)) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array} \right\}. \quad (11)$$

Donde  $\mathbf{r}^i(\mathbf{x}(-p)) = (\mathbf{r}_1^i(\mathbf{x}(-p)), \dots, \mathbf{r}_j^i(\mathbf{x}(-p)))$ . Si se realiza el corchete de Lie definido en la ecuación (5) de cada elemento con todos los elementos del arreglo infinito de la figura anterior, el resultado es la extensión del corchete de Lie de la Definición 6. El inciso (i) del Lema 1 indica que el codominio de un corchete de Lie extendido definido en  $\mathbb{R}^{(\gamma-1)n}$  es equivalente al de uno definido en  $\mathbb{R}^{(l-1)n}$  con  $l \leq \gamma$ , esto es, un codominio de dimensión igual o menor. Se puede observar en el arreglo (11) que el inciso (ii) expresa que realizar la operación entre los coeficientes  $l$  de  $\mathbf{r}_1(\mathbf{x}, \delta)$  y  $k$  de  $\mathbf{r}_2(\mathbf{x}, \delta)$  es equivalente a realizarla entre los coeficientes  $l + ps$  de  $\mathbf{r}_1(\mathbf{x}, \delta)$  y  $k + ps$  de  $\mathbf{r}_2(\mathbf{x}, \delta)$ , sólo que con coordenadas y tiempo recorridos  $ps$  veces. El inciso (iii) indica que si la diferencia (distancia entre elementos, tomando en cuenta el arreglo (11)) entre los superíndices  $l$  y  $k$  es mayor a  $s$ , el resultado de la operación del corchete de Lie extendido es igual a cero.

El algoritmo generado para realizar el corchete de Lie extendido se muestra en el Pseudocódigo 1. Este algoritmo realiza básicamente las operaciones definidas en la ecuación (10) tomando en cuenta las propiedades del Lema 1, lo que disminuye el número de operaciones realizadas.

Se hace notar que el corchete de Lie extendido cuenta con la propiedad de antisimetría

$$[\mathbf{r}_1^k(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^l(\cdot, \mathbf{u})]_{E_i} = -[\mathbf{r}_2^l(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_1^k(\cdot, \mathbf{u})]_{E_i}.$$

---

**Pseudocódigo 1.** Corchete de Lie extendido.
 

---

**Entrada:**

$\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ : vectores columna que pertenecen a  $\mathcal{K}(\delta]$  que pueden ser representados de la forma  $\mathbf{r}_l(\mathbf{x}_{[\alpha]}, \delta) = \sum_{j=0}^s \mathbf{r}_l^j(\mathbf{x}_{[\alpha]}) \delta^j$  donde  $s = \max(\alpha, \text{gpol}(\mathbf{r}_1(\mathbf{x}_{[\alpha]}, \delta)))$  con  $\{l \in 1, 2\}$ .

$k, l, i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

$\mathbf{x}(t)$ : variables de estado.

**Salida:**  $[\mathbf{r}_1^k, \mathbf{r}_2^l]_{E_i}$  es el corchete de Lie extendido que pertenece a  $\mathbb{R}^{(i+1)n}$ .

- 1:  $\gamma \leftarrow \min(l, k, i)$ ,  $\mu \leftarrow \max(l, k)$
  - 2: **si**  $|k - l| > s$  **entonces**
  - 3:   **devolver** vector  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(i+1)n}$
  - 4: **fin si**
  - 5: **si**  $k > 2s$  **o**  $l > 2s$  **entonces**
  - 6:    $\varsigma \leftarrow |k - l|$
  - 7:    $k \leftarrow k - \varsigma$ ,  $l \leftarrow l - \varsigma$
  - 8:    $[\mathbf{r}_1^k, \mathbf{r}_2^l]_{E_i} \leftarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times \varsigma}$
  - 9: **si no**
  - 10:    $\varsigma \leftarrow 0$
  - 11: **fin si**
  - 12:  $[\mathbf{r}_1^k, \mathbf{r}_2^l]_{E_i} \leftarrow \sum_{j=0}^{\min(k, j, i)} ([\mathbf{r}_1^{k-j}(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{r}_2^{l-j}(\cdot, \mathbf{u})]_{E_0})_{[(x(-j), \mathbf{u}(-j))]}^T \frac{\partial}{\partial x(t-j-\varsigma)}$  {si alguno de los vectores  $\mathbf{r}_i^p$  es cero, el jacobiano de la multiplicación correspondiente no se realiza y dicha multiplicación regresa como resultado un vector de ceros}
  - 13:  $[\mathbf{r}_1^k, \mathbf{r}_2^l]_{E_i} \leftarrow [\mathbf{r}_1^k, \mathbf{r}_2^l]_{E_i} |_{\mathbf{x}(-\varsigma)}$   $\{[\mathbf{r}_1^k, \mathbf{r}_2^l]_{E_i}$  retardado en el tiempo  $\varsigma$  veces}
-

Como última observación, si los elementos sobre los que se realiza el corchete de Lie extendido son de grado polinomial cero y no cuentan con retardos, la operación se reduce al caso sin retardos presentada en la Sección III.1.1.

### III.2.2 Involutividad e integrabilidad

Para el caso con retardos los conceptos de distribución, aniquilador, involutividad e integrabilidad son una extensión de sus homólogos para el caso sin retardos. Para comenzar, se presenta la definición de una distribución integrable  $\Delta$ .

**DEFINICIÓN 7.** (Califano et al., 2011a). *Un submódulo no singular  $\Delta$  localmente alrededor de un punto  $\mathbf{x}^0$  es integrable si existen  $n - j$  funciones independientes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-j}$  tales que el rango  $\frac{\partial \lambda(x)}{\partial x(t)} = n - j$  y*

$$\sum_{p=0}^{\gamma} \frac{\partial \lambda_l(\mathbf{x})}{\partial x(t-p)} \delta^p \sum_{k=0}^s r_l^k(\mathbf{x}) \delta^k = 0, \quad l \in [1, n-j], i \in [1, j] \quad (12)$$

La definición anterior, al igual que la Definición 4, pretende establecer la relación entre una distribución  $\Delta$  y un conjunto de vectores ortogonales a esta, los cuales son la forma diferencial de un conjunto de funciones  $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-n}$ .

Se define entonces (Califano et al., 2011a) un conjunto de distribuciones  $\Delta_k$  con  $k \geq 0$  en  $\mathbb{R}^{(k+1)n}$  considerando  $j$  elementos del submódulo  $\Delta$  de la forma  $\mathbf{r}_i(\mathbf{x}, \delta) = \sum_{l=0}^s \mathbf{r}_i^l(\mathbf{x}) \delta^l$ , con la propiedad de que  $P_j(\mathbf{x}, \delta) = (\mathbf{r}_1(\mathbf{x}) \delta^s, \dots, \mathbf{r}_j(\mathbf{x}) \delta^s) = \sum_{l=0}^s P_{jl}(\mathbf{x}) \delta^l$  y  $P_{j0}(\mathbf{x})$  son de dimensión  $j$ . Los campos vectoriales definidos sobre el espacio generado por las distribuciones  $\Delta_k$  son parametrizados por  $x(t-k-1), \dots, x(t-k-s)$ , esto es

$$\Delta_k = \text{span}_{\mathcal{K}} \left\{ \sum_{l=0}^{\gamma} (\mathbf{r}_i^{\gamma-l}(\mathbf{x}(-l)))^T \frac{\partial}{\partial x(t-l)}, i \in [1, j], \gamma = 0, \dots, k \right\}, k \geq 0. \quad (13)$$

El Pseudocódigo 2 genera la distribución  $\Delta_k$ , acomodando cada uno de los elementos de esta distribución en una matriz de dimensión  $(k+1)n \times (k+1)j$ .

---

**Pseudocódigo 2.** Distribución  $\Delta_k$ .
 

---

**Entrada:**
 $P_j(\mathbf{x}, \delta)$   $j$ : vectores  $(r_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, r_j(\mathbf{x}, \delta))$ .

 $k$ : escalar que define la  $k$ -ésima distribución.

**Salida:** Matriz  $\Delta_k$ .

 1: Obtener matrices  $P_{jr}(\mathbf{x})$  tal que  $P_j(\mathbf{x}, \delta) = \sum_{p=0}^s P_{jr}(\mathbf{x})\delta^r$ 

2: Agregar columnas y filas de tal manera que se obtenga la matriz

$$\Delta_k \leftarrow \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{k-s} \\ \left. \begin{array}{c} k+1 \\ \left( \begin{array}{ccccccc} P_{j0}(\mathbf{x}) & P_{j1}(\mathbf{x}) & \cdots & P_{js}(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{j0}(\mathbf{x}(-1)) & \cdots & P_{j(s-1)}(\mathbf{x}(-1)) & P_{js}(\mathbf{x}(-1)) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & P_{j(s-2)}(\mathbf{x}(-2)) & P_{j(s-1)}(\mathbf{x}(-2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{j0}(\mathbf{x}(-s)) & \cdots & P_{j(p-1)}(\mathbf{x}(-k)) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & P_{jp}(\mathbf{x}(-k)) \end{array} \right) \end{array} \right\} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{k+1} \end{array}$$

 3: devolver  $\Delta_k$ 


---

Se presenta a continuación otro conjunto de distribuciones más apegado a la solución del problema, donde se establece que  $\mathbf{r}_i^k = 0$  para  $k > s$ , tal que  $s$  es el máximo retardo en  $P(\mathbf{x}, \delta)$ . Este conjunto de distribuciones, denominado  $\Delta'_k$  se encuentra definido en  $\mathbb{R}^{(k+1)n}$  y sus campos vectoriales están parametrizados por  $x(t-k-1), \dots, x(t-k-s)$

$$\Delta'_k = \text{span}_{\mathcal{K}} \left\{ \sum_{l=0}^{\min(\gamma, k)} (\mathbf{r}_i^{\gamma-l}(\mathbf{x}(-l)))^T \frac{\partial}{\partial x(t-l)}, i \in [1, j], \gamma = [0, k+s], k \geq 0. \right. \quad (14)$$

La distribución  $\Delta'_k$  es generada por la rutina presentada en el Pseudocódigo 3. De acuerdo a las definiciones anteriores  $\Delta_k \subseteq \Delta'_k$ , por lo que, para generar  $\Delta'_k$  en el algoritmo del Pseudocódigo 3, se utiliza  $\Delta_k$  aumentando el número de columnas de  $\Delta_k$  de acuerdo a la definición de la distribución (14). El propósito de estos algoritmos (pseudocódigos 2 y 3) es obtener los vectores columna definidos para las distribuciones (13) y (14), es posible que algunos elementos columna de las matrices generadas por dichos algoritmos sean linealmente dependientes entre si (incluso ser cero), lo que no influye en el resultado de ningún algoritmo relacionado con las rutinas 2 y 3.

Sea  $\rho_i = \text{rango}(\Delta'_i)$  localmente alrededor de un punto  $\mathbf{x}^0$ , entonces  $\Delta_i = \text{span}\{\tau_l, l \in [1, \rho_i]\} \subset \mathbb{R}^{(i+1)n}$  mientras que sus elementos dependen de las variables  $\mathbf{x}_{[i+s]}$ . Considérese el desarrollo en series de  $\tau_l$  con respecto a los parámetros  $\mathbf{x}(-i-1)$  localmente alrededor del punto  $\mathbf{x}^0(-i-1)$ , que sin pérdida de generalidad se puede considerar como el origen, esto es

$$\begin{aligned} \tau_l(\mathbf{x}) = & \tau_{l,0}(\mathbf{x}_{[i]}) + \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha=1}^n \alpha_j \tau_{l,1}(\mathbf{x}_{[i]}) x_\alpha(-i-j) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^n \sum_{j,k=1}^s \alpha_j \beta_k \tau_{l,2}(\mathbf{x}_{[i]}) x_\alpha(-i-j) x_\beta(-i-k) + \dots \end{aligned}$$

---

**Pseudocódigo 3.** Distribución  $\Delta'_k$ .
 

---

**Entrada:**
 $P_j(\mathbf{x}, \delta)$ :  $j$  vectores  $(r_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, r_j(\mathbf{x}, \delta))$ .

 $k$ : escalar que define la  $k$ -ésima distribución.

**Salida:** Matriz  $\Delta'_k$ .

 1: Obtener matrices  $P_{jr}(\mathbf{x})$  tal que  $P_j(\mathbf{x}, \delta) = \sum_{r=0}^s P_{jr}(\mathbf{x})\delta^r$ 

2: Agregar columnas y filas de tal manera que se obtenga la matriz

$$\Delta'_k \leftarrow \begin{matrix} & & & & & \overbrace{\hspace{10em}}^k & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ k+1 \left\{ \begin{matrix} P_{j0}(\mathbf{x}) & P_{j1}(\mathbf{x}) & \cdots & P_{js}(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{j0}(\mathbf{x}(-1)) & \cdots & P_{j(s-1)}(\mathbf{x}(-1)) & P_{js}(\mathbf{x}(-1)) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & P_{j(s-2)}(\mathbf{x}(-2)) & P_{js}(\mathbf{x}(-2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{j0}(\mathbf{x}(-s)) & \cdots & P_{j(p-1)}(\mathbf{x}(-k)) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & P_{jp}(\mathbf{x}(-k)) \end{matrix} \right. \\ & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{k+s+1} & & \end{matrix}$$

{Se utiliza el algoritmo del Pseudocódigo 2 para obtener las primeras  $k+1$  columnas}

 3: devolver  $\Delta'_k$ 


---



Y considérese el conjunto, posiblemente infinito, de distribuciones

$$\begin{aligned}\Delta'_{i,0} &= \text{span}\{\tau_{l,0}, l \in [1, k]\} \\ \Delta'_{i,1} &= \text{span}\{\tau_{l,1}, l \in [1, k], j \in [1, s], \alpha \in [1, n]\} \\ &\vdots\end{aligned}\tag{15}$$

Una vez establecidas las definiciones anteriores es posible proseguir con el teorema más importante de este capítulo, que define condiciones necesarias y suficientes para que una distribución de la forma (14) sea integrable.

**TEOREMA 2.** (*Califano et al., 2011a*) *Considerese el submódulo definido como  $\Delta = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\mathbf{r}_1(\cdot, \delta), \dots, \mathbf{r}_p(\cdot, \delta)\}$  con  $\mathbf{r}_i(\mathbf{x}, \delta) = \sum_{l=0}^s \mathbf{r}_i^l(\mathbf{x}_{[\alpha]})\delta^l$ ,  $s = \max\{\text{gpol}(\mathbf{r}_i(\mathbf{x}, \delta)), i \in [1, j], \alpha\}$  y matrices  $P_j(\mathbf{x}, \delta) = (\mathbf{r}_1(\mathbf{x})\delta^s, \dots, \mathbf{r}_j(\mathbf{x})\delta^s) = \sum_{l=0}^s P_{jl}(\mathbf{x})\delta^l$  y  $P_{j0}(\mathbf{x})$  de rango  $j$ . Sean  $\Delta'_i$  y  $(\overline{\sum_{k \geq 0} \Delta_{ik}})$  conjuntos asociados de distribuciones definidas (14) y (15) respectivamente, las cuales se suponen no singulares localmente alrededor del punto  $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{x}^0(t)^T, \dots, \mathbf{x}^0(t-i)^T)^T$  con  $\rho_i = \text{rango} \Delta'_i$  y  $\rho_{i,0} = \text{rango}(\overline{\sum_{k \geq 0} \Delta_{ik}})$  (con  $\rho_{-i} = \rho_{-1,0} = 0$ ). Entonces  $\Delta$  es integrable si y sólo si existe un índice  $\gamma$  tal que las siguientes condiciones se satisfagan*

$$(a) \quad \forall l, k \in [1, j] \text{ y } q \leq p \leq i + s$$

$$[\mathbf{r}_l^q, \mathbf{r}_k^p]_{E_i} \in \Delta'_i, \quad i \in [0, \gamma]\tag{16}$$

$$(b) \quad \rho_\gamma - \rho_{\gamma-1} = j$$

$$(c) \quad \rho_{\gamma,0} - \rho_{\gamma-1,0} = j$$

Este teorema es equivalente al teorema de Frobenius establecido para el caso sin retardos en la Sección III.1.2. Entonces, el algoritmo que se desea generar como parte

de los objetivos de esta tesis debe de cumplir con las tres condiciones establecidas en el Teorema 2. El Pseudocódigo 4 se encarga de revisar si las condiciones del Teorema 2 se cumplen.

### III.3 Resumen

Se abordó, en este capítulo, el corchete de Lie como una herramienta para saber si una distribución es integrable. Esta herramienta ha sido de fundamental importancia en el estudio de los sistemas no lineales. Sin embargo, en diversos resultados, como el teorema de Frobenius, ésta no puede ser usada directamente en el caso de SNLR. En los últimos años se ha desarrollado una extensión del corchete de Lie, a partir de la cual se han establecido condiciones necesarias y suficientes para que una distribución, cuyos elementos dependen de estados pasados, sea integrable. Este corchete de Lie extendido cuenta con propiedades que permiten lidiar con un número finito de operaciones, a pesar de la naturaleza de dimensión infinita de los SNLR. A pesar de esto, el número de operaciones necesarias es grande y de complejidad elevada. Este es el motivo por el cual se decidió implementar dichas operaciones en algoritmos en un lenguaje de cálculo simbólico.

---

---

**Pseudocódigo 4.** Prueba de integrabilidad de una distribución.

---

**Entrada:**  $P_j(\mathbf{x}, \delta) = (r_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, r_j(\mathbf{x}, \delta))$ : elementos de la distribución  $\Delta$ .

**Salida:** verdadero si la distribución es integrable falso de otra forma.

```

1:  $s \leftarrow$  grado del polinomio en  $\delta$ 
2: para  $k = 0$  hasta  $2s$  hacer
3:    $\Delta'_k \leftarrow$  resultado del algoritmo del Pseudocódigo 3 con entrada  $P_j(\mathbf{x}, \delta)$ 
4:    $\rho_k \leftarrow$  rango de  $\Delta'_k$ 
5: fin para
6: para  $i:1$  hasta  $n$  hacer
7:   para  $j:1$  hasta  $n$  hacer
8:     para  $q:0$  hasta  $2s$  hacer
9:       para  $p:0$  hasta  $q$  hacer
10:         $M \leftarrow [\Delta_{\min(p,q)} : [r_i^p(\mathbf{x}), r_j^q(\mathbf{x})]_{E_{\min(p,q)}}]$  {agregando a  $\Delta_{\min(p,q)}$  el vector
        columna  $[r_i^p(\mathbf{x}), r_j^q(\mathbf{x})]_{E_{\min(p,q)}}$ }
11:        si  $\text{rango}(M) > \rho_{\min(p,q)}$  entonces
12:          devolver falso y salir del programa
13:        fin si
14:      fin para
15:    fin para
16:  fin para
17: fin para
18: devolver verdadero

```

---

## Capítulo IV

# EQUIVALENCIA A UN SISTEMA LINEAL CONTROLABLE

En este capítulo se aborda la equivalencia, mediante un cambio de coordenadas, de un SNLR a un sistema lineal. Formalmente el problema de equivalencia a un sistema lineal de un sistema 3 se establece como la búsqueda de un cambio de coordenadas  $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{x}_{[\alpha]})$ , con  $d\mathbf{z} = T(\mathbf{x}, \delta)d\mathbf{x}$  y  $T(\cdot)$  unimodular, tal que

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \sum_{j=1}^l A_j \mathbf{z}(t-j) + \sum_{j=1}^l B_j \mathbf{u}(t-j),$$

que puede establecerse de forma equivalente como

$$d\dot{\mathbf{z}}(t) = A(\delta)d\mathbf{z} + B(\delta)d\mathbf{u},$$

donde  $A(\delta), B(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$ . Tomando en cuenta que este cambio de coordenadas puede no existir, en trabajos como Califano *et al.* (2010, 2011a) se han establecido condiciones necesarias y suficientes para dicha existencia. Los resultados obtenidos en esta sección, tanto algoritmos como resultados teóricos, se basan en los trabajos citados anteriormente. Dichos trabajos emplean herramientas generadas para determinar la accesibilidad (Márquez-Martinez y Moog, 2001) y controlabilidad de sistemas con retardos, con la finalidad de obtener condiciones bajo las cuales un sistema de la forma (3) es equivalente a un sistema lineal con o sin retardo. Es por este motivo que, al escribir el presente trabajo de tesis, se consideró pertinente incluir los temas de accesibilidad y controlabilidad para sistemas con retardo. Se habla además de la interpretación de dichos conceptos para el caso sin retardos, a fin de relacionarlos con las herramientas

equivalentes para los sistemas con retardo. En los temas siguientes, se presentan las rutinas desarrolladas partiendo de los trabajos mencionados anteriormente. Se presentan, además, dos formas canónicas matriciales, la forma y la pre-forma de Smith utilizados en algunos resultados obtenidos.

## IV.1 Controlabilidad

### IV.1.1 Caso sin retardos

En esta sección se hablará del concepto de controlabilidad para sistemas lineales sin retardo en el tiempo y de su interpretación geométrica. Para comenzar se considerará el sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (17)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  son matrices de coeficientes y  $u \in \mathbb{R}$  es la señal de entrada.

Definiendo como  $\varphi(t, \mathbf{x}(t_0), u)$  a la solución completa de (17) se tiene:

$$\varphi(t, \mathbf{x}(t_0), u) = \mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (18)$$

**DEFINICIÓN 8.** (*Wonham, 1985*) *El estado  $\mathbf{x}$  es alcanzable desde  $\mathbf{x}(t_0)$  si existe  $t$ , con  $t_0 < t < \infty$ , y si es posible construir una señal de control  $\mathbf{u}$  que transfiera un estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  a cualquier estado final  $\mathbf{x}(t)$ , i.e.  $\varphi(t, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}) = \mathbf{x}$ . Se denota como  $R_0$  al conjunto de puntos alcanzables desde el punto  $\mathbf{x}(t_0) = 0$ . Este subespacio  $R_0 \subset \mathbb{R}^n$  es el subespacio controlable del sistema (17). Si  $R_0$  abarca la totalidad de  $\mathbb{R}^n$  se dice que el sistema (17) es completamente controlable o simplemente, controlable.*

La ecuación (18) representa la evolución de los estados del sistema a través del tiempo. Para el siguiente análisis se toma el caso  $u \in \mathbb{R}$ , y además sin pérdida de

generalidad se considera al tiempo inicial  $t_0 = 0$  y el origen como estado final, por lo que la solución para  $0 \leq t \leq t_1$  está dada por:

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0} = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (19)$$

Después de algunas consideraciones algebraicas (Ogata, 2003) que involucran el teorema de Cayley-Hamilton se obtiene

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}(0) + [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} \alpha_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^{t_1} \alpha_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^{t_1} \alpha_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix} \quad (20)$$

de donde se deduce que el sistema será completamente controlable si la matriz de dimensión  $n \times n$

$$R_n = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (21)$$

es de rango igual a  $n$ , o en otras palabras que los vectores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  sean linealmente independientes.  $R_n$  es conocida como matriz de controlabilidad. Este resultado se extiende al caso en el que  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ . En este caso,  $R_n$  es de dimensión  $n \times nm$  y la controlabilidad es completa si es de rango  $n$  o en otras palabras que esté formada por  $n$  vectores independientes.

Los siguientes ejemplos tienen como finalidad ilustrar la definición anterior.

**EJEMPLO 7.** *Sea el sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 2x_3(t) + u(t) \end{aligned}$$

que puede representarse también como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

cuya matriz de controlabilidad es:

$$R_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

que es de rango completo, por lo que el sistema cumple con la condición de controlabilidad completa. Esto quiere decir que, sin importar el valor de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0)$ , será posible construir una ley de control que lleve al sistema a otro estado  $\mathbf{x}(t_1)$  en un tiempo finito  $t_1$ .

**EJEMPLO 8.** Sea el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

La matriz de controlabilidad es la siguiente:

$$R_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las dos columnas de la derecha son linealmente dependientes, por lo que el sistema no es completamente controlable.

La Figura 3 representa la evolución en el tiempo del sistema del Ejemplo 8 con una entrada de control  $u = 1.4x_2$  y condiciones iniciales  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 4$  y  $x_3(0) = 4.5$ .

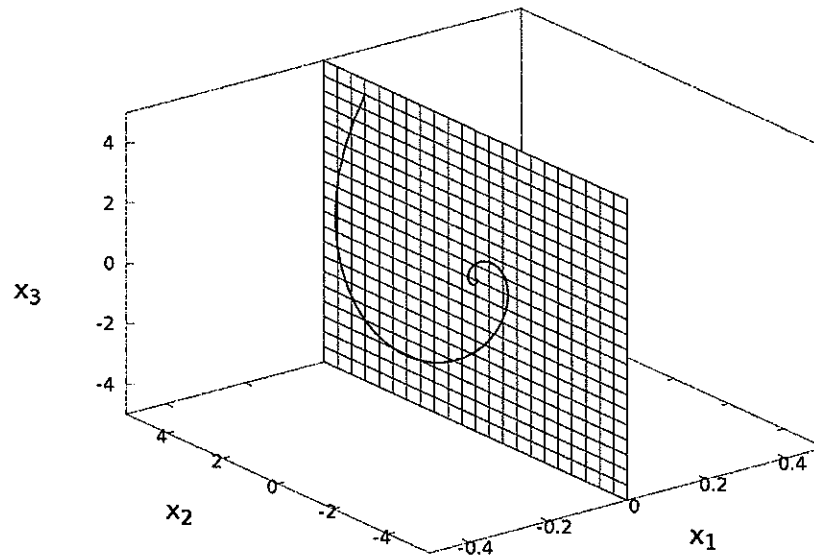


Figura 3. Sistema no controlable.

La entrada de control fue propuesta para llevar al sistema al estado  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ , sin embargo, si  $x_1(0) \neq 0$  el punto  $(0, 0, 0)$  es imposible de alcanzar sin importar la ley de control que se imponga. Esto es, porque el espacio de soluciones del sistema está “confinado” a la superficie del hiperplano  $x_2, x_3$  con  $x_1$  una constante (la condición inicial) para todo tiempo  $t$ .

#### IV.1.2 Caso con retardos

En el caso de sistemas lineales con retardo, la controlabilidad no tiene una interpretación geométrica como la vista para el caso sin retardos. Sin embargo, existen herramientas equivalentes a las presentadas en la sección anterior. Considérese la siguiente representación general en espacio de estados de los sistemas de control lineales con retardos



en el tiempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^s A_i \mathbf{x}(t-i) + \sum_{j=0}^s B_j \mathbf{u}(t-j), \quad (22)$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  con  $i = 1, \dots, s$  y  $j = 1, \dots, s$ . Utilizando el operador retardo es posible escribir (22) de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\delta)\mathbf{x}(t) + B(\delta)\mathbf{u}(t), \quad (23)$$

para el cual la matriz de controlabilidad está dada por:

$$R_n = [B(\delta) \ A(\delta)B(\delta) \ A(\delta)^2B(\delta) \ \dots \ A(\delta)^nB(\delta)]. \quad (24)$$

Cuando se habla exclusivamente de los sistemas lineales, los elementos que forman a las matrices  $A(\delta)$  y  $B(\delta)$  son parte de un anillo conmutativo y ya que el teorema de Cayley-Hamilton también es válido para este caso (Conte y Perdon, 2000) la ecuación (24) indica cuándo es posible alcanzar todos los estados construyendo una señal de entrada en un periodo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

**DEFINICIÓN 9.** *Sea la ecuación (23) la representación de un sistema lineal con retardos con coeficientes en  $\mathbb{R}[\delta]$ . Se dice que este sistema es:*

- *Débilmente controlable si la dimensión de la imagen de  $R_n$  es igual a la dimensión de  $\mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$ .*
- *Fuertemente controlable si la imagen de  $R_n$  es igual a  $\mathbb{R}^{n \times n}[\delta]$ .*

La controlabilidad débil ocurre cuando la matriz  $R_n$  de la ecuación (24) es de rango completo. Por otro lado, la condición de controlabilidad fuerte requiere la condición, más exigente, de que  $R_n$  sea unimodular.

EJEMPLO 9. Considérese el siguiente sistema, cuya dinámica de estado está dada por

$$\dot{x}(t) = u(t - 1) = \delta u(t).$$

Su matriz de controlabilidad es  $R_n = (\delta)$  con una matriz inversa  $R_n^{-1} = (\frac{1}{\delta}) \notin \mathcal{K}(\delta)$ .  $R_n^{-1}$  no pertenece a  $\mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$  pero es de rango completo por lo que el sistema es débilmente controlable.

EJEMPLO 10. Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} u(t),$$

cuya matriz de controlabilidad es

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & \delta^2 + 1 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es

$$\begin{pmatrix} \delta^2 + 1 & -\delta \\ -\delta & 1 \end{pmatrix}$$

pertenece a  $\mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$ , por lo que el sistema es fuertemente controlable.

## IV.2 Accesibilidad

### IV.2.1 Sin retardos

En los sistemas no lineales la noción de controlabilidad no es una propiedad estructural como en el caso de los sistemas lineales, en los que se tienen subespacios controlables y no controlables. A continuación se muestran tres definiciones (Conte *et al.*, 2007) para sistemas no lineales, entre las que se encuentra una generalización del concepto de

controlabilidad visto anteriormente. Se consideraran los sistemas no lineales sin salida de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (25)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathcal{K}$

**DEFINICIÓN 10.** (*Alcanzabilidad*). Para un sistema no lineal de la forma (25), el estado  $\mathbf{x}$ , se dice alcanzable desde el estado  $\mathbf{x}_0$  si existe un tiempo finito  $t_1$  y una función  $\mathbf{u}(t) : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t_1) = \mathbf{x}_1$ .

**DEFINICIÓN 11.** (*Controlabilidad*). Un sistema no lineal de la forma (25) se dice controlable en  $\mathbf{x}_0$  si existe una vecindad  $V$  de  $\mathbf{x}_0$ , tal que cualquier estado en  $V$  sea alcanzable.

**DEFINICIÓN 12.** (*Accesibilidad*). Un sistema no lineal de la forma (25) se dice accesible en  $\mathbf{x}_0$  si el conjunto de puntos alcanzables desde  $\mathbf{x}_0$  contiene un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Para ilustrar estas definiciones supóngase el sistema (Conte *et al.*, 2007)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (26)$$

En la Figura 4 (Garate-García, 2006) se ilustra el comportamiento del sistema (26). La área sombreada de la Figura 4(a) muestra el conjunto de puntos alcanzables del espacio de estados del sistema (26), que consta de los puntos del semiplano a la derecha de  $\mathbf{x}_0$ . Este sistema no es controlable debido a que, sin importar cuan pequeña sea la vecindad  $V$ , no es posible alcanzar los puntos a la izquierda de  $\mathbf{x}_0$ , como se ilustra en la Figura 4(b). Por otro lado, los puntos a la derecha de la recta que divide al espacio de estados en dos semiplanos forman un conjunto abierto (Figura 4(c)) en  $\mathbb{R}^2$ , lo que satisface la Definición 12 de accesibilidad.

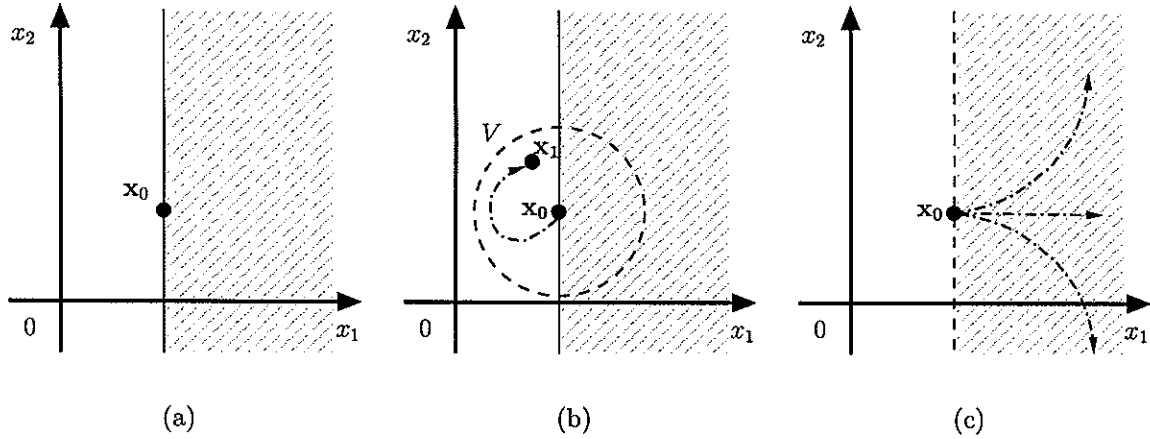


Figura 4. Relación entre controlabilidad y accesibilidad con alcanzabilidad.

## IV.2.2 Con retardos

Las definiciones y resultados (Conte *et al.*, 2007; Márquez-Martinez y Moog, 2001) que se presentan a continuación permiten saber de una manera formal cuándo un sistema es accesible o no.

**DEFINICIÓN 13.** Se dice que una uno-forma  $w$  en  $\mathcal{X} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx_i, i = 1, \dots, n\}$  es un elemento autónomo del sistema (3) si existe un entero  $v$  y coeficientes  $\alpha_i \in \mathcal{K}$ , para  $i = 1, \dots, v$ , tales que

$$a_1 w + \dots + a_v w^{(v)} = 0.$$

**DEFINICIÓN 14.** Se dice que una función  $\varphi$  es autónoma si  $d\varphi$  es un elemento autónomo para el sistema (3).

**DEFINICIÓN 15.** El grado relativo  $r$  de una uno-forma  $w \in \mathcal{X}$  está dado por

$$r = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{span}_{\mathcal{K}}\{w, \dots, w^{(k)}\} \not\subset \mathcal{X}\}. \quad (27)$$

**DEFINICIÓN 16.** Se dice que un sistema de la forma (3) es accesible si no existe ninguna función autónoma  $\phi(\varphi^k, \varphi^{k-1}, \dots, \dot{\varphi}, \varphi) \equiv 0$ .

**PROPOSICIÓN 1.** (*Conte et al., 2007*) *Una uno-forma  $w \in \mathcal{X}$  es un elemento autónomo si y sólo si tiene un grado relativo infinito.*

El grado relativo de una función es una forma de medir la dependencia del estado con respecto a la entrada de control  $u$ , y en consecuencia, es un indicador de su autonomía.

Se define entonces una filtración del espacio  $\mathcal{E}$  (Sección II.3.1), dada por una secuencia de subespacios  $\{\mathcal{H}_k\} \subset \mathcal{E}$  tal que cada  $\mathcal{H}_k$  es el conjunto de todas las uno-formas que cuentan con grado relativo al menos  $k$ . Dicha secuencia está definida como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx, du\} \\ \mathcal{H}_j &= \{w \in \mathcal{H}_{j-1} \mid \dot{w} \in \mathcal{H}_{j-1}\}\end{aligned}$$

que es una secuencia descendiente que converge a  $\mathcal{H}_\infty$  donde  $\mathcal{E} \supset \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \dots \supset \mathcal{H}_\infty$ . La accesibilidad de un sistema implica que no tiene elementos autónomos lo cual es equivalente a que  $\mathcal{H}_\infty = 0$

Una manera alterna de saber si un sistema de la forma (3) es accesible, es obteniendo los llamados submódulos de accesibilidad, definidos como

$$\mathcal{R}_i = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta)\} \quad (28)$$

con los generadores de submódulos  $\mathbf{g}_i$  definidos recursivamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &\triangleq \mathbf{g}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \\ \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta) &= \tilde{f}(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta) - \dot{\mathbf{g}}_{k-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta),\end{aligned}$$

ya que  $\mathcal{H}_k = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{k-1}]^\perp$  tal como se indica en Márquez-Martinez y Moog (2001).

La siguiente proposición es un indicador de que la secuencia de submódulos converge.

**PROPOSICIÓN 2.** (*Califano et al., 2011a*). *Si  $\mathbf{g}_{i+1} \in \mathcal{R}_i$  entonces  $\forall j \geq 1$ , se tiene que  $\mathbf{g}_{i+j} \in \mathcal{R}_i$ .*

Se llama matriz de accesibilidad a:

$$R_n(x) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta)). \quad (29)$$

La condición de accesibilidad está dada a continuación.

**LEMA 2.** (*Márquez-Martinez y Moog, 2001*). *El sistema (3) es accesible si y sólo si cualquiera de las condiciones siguientes se satisface:*

(i)  $\mathcal{H}_\infty = 0$ .

(ii)  $[\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n]^\perp = 0$ .

(iii)  $\text{rango}_{\mathcal{K}(\delta)}(R_n) = n$  (por filas).

De acuerdo a lo anterior se ha generado el algoritmo mostrado en el Pseudocódigo 5, el cual calcula la matriz de accesibilidad y el elemento  $\mathbf{g}_{n+1}$ , esto, tomando en cuenta la Proposición 2.

En el caso de los sistemas lineales con retardo en el tiempo, la matriz de accesibilidad (29) se reduce a la matriz de controlabilidad (24), esto es

$$(B(\delta) AB(\delta) \dots A^{n-1}B(\delta)) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}_{[s]}, \delta)). \quad (30)$$

Se finalizará esta sección presentado un resultado importante (Califano *et al.*, 2011a), que habla acerca de la transformación de los elementos de los módulos de accesibilidad de la forma diferencial de un cambio de coordenadas.

**LEMA 3.** (*Califano et al., 2011a*). *Bajo un cambio de coordenadas  $z = \phi(\mathbf{x}_\alpha)$ , con  $dz = T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)dx$  los elementos de los módulos de accesibilidad  $\tilde{\mathbf{g}}_j(\cdot)$  son transformados como*

$$\tilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{[s]}, \delta) = [T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_j(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}, \delta)]_{\mathbf{x}_{[s]}=\varphi^{-1}(\mathbf{z})}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

---

**Pseudocódigo 5.** Submódulos de accesibilidad.
 

---

**Entrada:**  $dx = f(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) + g(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{u}(t)$  donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ .

**Salida:**

$\mathbf{R}_n$ : matriz de dimensión  $n \times n$ .

$\mathbf{g}_{n+1}$ : vector de  $n$  elementos.

- 1:  $\mathbf{g}_n \leftarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$
  - 2:  $\zeta \leftarrow 0$  {número de columnas de la matriz  $\mathbf{R}_n$  (se inicia en cero)}
  - 3:  $\rho \leftarrow 0$  {rango del vector  $\mathbf{g}_n$  (se inicia en cero)}
  - 4: **mientras**  $\zeta < n$  **hacer**
  - 5:    $\rho \leftarrow \text{rango}(\mathbf{g}_n)$
  - 6:    $\mathbf{R}_{n\_temp} \leftarrow$  primera columna de  $\mathbf{g}_n$
  - 7:   **mientras**  $\text{rango}(\mathbf{R}_{n\_temp}) < \rho$  **hacer**
  - 8:      $\beta \leftarrow 2$
  - 9:     **si** columna  $\beta$  de  $\mathbf{g}_n$  es linealmente independiente de las columnas de  $\mathbf{R}_{n\_temp}$  **entonces**
  - 10:        $\mathbf{R}_{n\_temp} \leftarrow$  columna  $\beta$  de  $\mathbf{g}_n$  agregada a la derecha de  $\mathbf{R}_{n\_temp}$
  - 11:     **fin si**
  - 12:   **fin mientras**
  - 13:    $\mathbf{R}_n \leftarrow [\mathbf{R}_n : \mathbf{R}_{n\_temp}]$  {agregando a  $\mathbf{R}_n$  las columnas de  $\mathbf{R}_{n\_temp}$ }
  - 14:    $\mathbf{g}_n \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_n - \dot{\mathbf{g}}_n$
  - 15: **fin mientras**
  - 16: **devolver**  $\mathbf{R}_n, \mathbf{g}_n$  {La última corrida del ciclo principal guarda en  $\mathbf{g}_n$  el submodulo  $\mathbf{g}_{n+1}$ }
-

COROLARIO 1. (Califano et al., 2011a). Bajo un cambio de coordenadas bicausal  $z = \phi(\mathbf{x}_\alpha)$ , se tiene que

$$\mathcal{R}_i = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}), \dots, \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}, \delta)\} \equiv \tilde{\mathcal{R}}_i = \text{span}_{\mathcal{K}(\delta)}\{\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}_{[s]}), \dots, \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \mathbf{u}, \delta)\}.$$

### IV.3 Equivalencia a un sistema lineal con retardos débilmente controlable

Supóngase que se desea hacer un cambio de coordenadas  $\varphi(\mathbf{z})$  de un sistema no lineal con retardos a uno lineal sin retardos, de acuerdo al Lema 3 y a la igualdad (30) la transformación de cada elemento está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_1 = B(\delta) &= [T(\mathbf{x}, \delta)\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta)]_{\mathbf{x}=\varphi^{-1}(\mathbf{z})}, \\ \tilde{\mathbf{g}}_2 = A(\delta)B(\delta) &= [T(\mathbf{x}, \delta)\mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta)]_{\mathbf{x}=\varphi^{-1}(\mathbf{z})}, \\ &\vdots \\ \tilde{\mathbf{g}}_n = A(\delta)^{n-1}B(\delta) &= [T(\mathbf{x}, \delta)\mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta)]_{\mathbf{x}=\varphi^{-1}(\mathbf{z})}. \end{aligned}$$

Por lo que la matriz de controlabilidad del sistema lineal es

$$[B(\delta), A(\delta)B(\delta), \dots, A^{n-1}(\delta)B(\delta)] = [T(\mathbf{x}, \delta)[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta)]]_{\mathbf{x}=\varphi^{-1}(\mathbf{z})}$$

y la matriz de accesibilidad del sistema no lineal es

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta)] &= [T(\mathbf{x}, \delta)^{-1}][B(\delta), A(\delta)B(\delta), \dots, A^{n-1}(\delta)B(\delta)], \\ &= T(\mathbf{x}, \delta)^{-1}Q(\delta). \end{aligned} \quad (31)$$

El siguiente teorema indica las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia a un sistema lineal con retardos



**TEOREMA 3.** (Califano et al., 2011a) *Un sistema de la forma (3) es equivalente, bajo un cambio de coordenadas bicausal, a un sistema lineal con retardos controlable débilmente si y sólo si existe una matriz unimodular  $T^{-1}(\mathbf{x}, \delta)$  y una matriz de rango completo  $Q(\delta)$  tal que:*

(i) *para  $1 \leq i \leq n$ , el vector  $\mathbf{g}_i$  es independiente de  $u$ , es decir  $\mathbf{g}_i(\cdot) = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \delta)$ .*

(ii)  $R_n(x) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \delta)) = T^{-1}(\mathbf{x}, \delta)Q(\delta)$ .

(iii)  $\mathbf{g}_{n+1} \in \text{span}_{\mathbb{R}(\delta)}\{\mathbf{g}_{n+1}, \dots, \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}, \delta)\}$ , esto es  $\mathbf{g}_{n+1} \triangleq \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}, \delta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \delta)c_i(\delta)$ .

(iv) Denotando por  $\bar{s} \leq ns$  el retardo máximo en  $R_n(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}_0$ , para  $i, j \in [1, n]$  y  $r \leq \beta \in [0, 2\bar{s}]$ , la siguiente relación se satisface:

$$[\mathbf{g}_j^\beta(\mathbf{x}), \mathbf{g}_i^r(\mathbf{x})]_{E_{2s}} = 0$$

$$\text{con } \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \delta) = \mathbf{g}_i^0(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_i^1(\mathbf{x})\delta + \dots + \mathbf{g}_i^k(\mathbf{x})\delta^k.$$

El objetivo de esta sección es desarrollar algoritmos que permitan saber si las condiciones del Teorema 3 se cumplen. Se comenzará describiendo el algoritmo generado para el punto (i) del citado teorema, el cual requiere que los elementos de los submódulos de accesibilidad  $g_i(\cdot)$  para  $i = 1, \dots, n$  sean independientes de la variable de control  $u(t)$ . Esta condición es necesaria ya que la matriz de controlabilidad de un sistema lineal  $(B(\delta), A(\delta)B(\delta), \dots, A^{n-1}(\delta)B(\delta))$  no depende de la variable  $u(t)$ . El algoritmo generado se presenta en el Pseudocódigo 6.

Gracias a la flexibilidad que presenta Maxima en el manejo de listas de objetos, la cantidad de líneas de código requeridas para la implementación del Pseudocódigo 6 es pequeña y se decidió no generar un módulo independiente en el programa SAC.

---

**Pseudocódigo 6.** Identificando la dependencia de la variable de control.

---

**Entrada:**

$R_n(\cdot, x, \delta)$ : matriz de accesibilidad.

$x, u$ : variables de estado y de control, respectivamente.

**Salida:** verdadero si  $R_n$  depende de  $u(t)$  y falso en caso contrario.

- 1:  $\nu \leftarrow$  vector de variables que conforman a  $R_n(\cdot, x, \delta)$
  - 2: **si** algún elemento de  $\nu = u(t)$  **entonces**
  - 3:   **devolver falso**
  - 4: **si no**
  - 5:   **devolver verdadero**
  - 6: **fin si**
- 

El algoritmo generado para inciso (ii) del Teorema 3 no es tan directo como el obtenido para el inciso (i) y para su comprensión se requieren algunos conceptos teóricos adicionales. Estos conceptos se presentan en la siguiente sección.

### IV.3.1 Forma de Smith y pre-forma de Smith

En esta sección se hablará de dos formas canónicas de gran importancia para este trabajo de tesis. La primera es la forma canónica de Smith cuya representación es la que sigue

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1(\delta) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2(\delta) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n(\delta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Donde  $\alpha_i(\delta)$  son polinomios con indeterminada  $\delta$ .

---

**DEFINICIÓN 17.** (Gantmacher, 1964). Una matriz polinomial rectangular es llamada matriz canónica diagonal (o forma de Smith) si se encuentra en la forma (32), donde

- a) los polinomios  $\alpha_i(\delta)$ , con  $i = 1, \dots, n$ , son diferentes de cero,  
 b) cada polinomio  $\alpha_i(\delta)$ , con  $i = 2, \dots, n$ , es divisible por su predecesor.

Toda matriz  $A(\delta)$ , puede llevarse a esta forma mediante las siguientes **operaciones elementales**:

- i) Multiplicación de una fila (columna) por un elemento de  $\mathcal{K}$ .  
 ii) Suma de una fila (columna) con el producto de otra fila (columna) y un elemento de  $\mathcal{K}$ .  
 iii) Intercambio de una fila (columna) por otra.

Estas operaciones elementales son equivalentes al producto por la izquierda (derecha) de  $A(\delta)$  con las llamadas matrices elementales, definidas como

$$i) E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & c(\mathbf{x}_{[s]}) & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii) E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & b(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$iii) E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & & \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son unimodulares de dimensiones apropiadas.

DEFINICIÓN 18. Dos matrices  $A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$ ,  $B(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  son llamadas equivalentes si

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= P_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \cdots P_k(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) Q_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \cdots Q_l(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \\ &= P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) Q(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \end{aligned}$$

donde  $P_i(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$ ,  $Q_j(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta]$ , con  $j = 1, \dots, l$  y  $i = 1, \dots, k$ , son matrices elementales, y  $P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = P_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \cdots P_k(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  y  $Q(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = Q_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \cdots Q_l(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  son unimodulares.

En anillos conmutativos, como en el caso de  $\mathbb{R}(\delta)$ , siempre es posible llegar a esta forma. Sin embargo, si sus elementos pertenecen a un anillo no conmutativo, como  $\mathcal{K}(\delta]$ , esto no siempre es factible. Para ilustrar esta situación, se presenta el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11. Supóngase la matriz

$$A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \begin{pmatrix} 1 & x_2(t)\delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Es posible llevar a la matriz  $A$  a la forma canónica de dos formas

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} = A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) Q(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \begin{pmatrix} \delta & x_2(t)\delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x_2(t+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \begin{pmatrix} 1 & -x_2(t)\frac{1}{\delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & x_2(t)\delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pero  $P(\cdot)$  contiene elementos que no están en  $\mathcal{K}(\delta]$  y  $Q(\cdot)$  no es causal, por lo que, ninguna de estas dos matrices puede ser usada.

Este tipo de ejemplos motivaron a la definición de la llamada pre-forma de Smith (Garate-García, 2006). Ésta, es una matriz con la siguiente estructura

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x_{[s]}, \delta) & \alpha_{12}(x_{[s]}, \delta) & \dots & \alpha_{1m}(x_{[s]}, \delta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}(x_{[s]}, \delta) & \dots & \alpha_{2m}(x_{[s]}, \delta) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{mm}(x_{[s]}, \delta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Donde  $\alpha_{ij}(x_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}[\delta]$  con  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . En Garate-García (2006) se pueden encontrar algoritmos para obtener las matrices  $S(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$ ,  $\bar{S}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$ ,  $P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  y  $Q$ .

El algoritmo propuesto en Garate-García (2006) sugiere encontrar a la matriz  $\bar{S}$  realizando multiplicaciones por la derecha con matrices elementales que no dependen de  $\mathbf{x}$ , es decir  $Q$ , y por la izquierda con matrices  $P(\mathbf{x}, \delta) \in \mathcal{K}[\delta]$ , esto, hasta llegar a una matriz como la que se encuentra en (34). Esto es,

$$\bar{S}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)A(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q \quad (35)$$

donde  $P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  y  $Q$  se obtienen a partir de matrices elementales.

### IV.3.2 Segunda condición del Teorema 3 y aportación teórica

En el inciso (ii) del Teorema 3 se busca que  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)) = T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q(\delta)$ , donde  $T^{-1}(\mathbf{x}, \delta)$  es una matriz unimodular y  $Q(\delta)$  una matriz de rango completo. Una forma de saber si esta condición se cumple, utilizando la forma de Smith, se ilustra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 12.** *Considérese la dinámica siguiente*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t-1) + x_1(t)u(t-1), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t).\end{aligned}$$

*La matriz de accesibilidad de este sistema es*

$$R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \begin{pmatrix} x_1(t) \delta & \delta - x_2(t-1) \delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Utilizando lo visto en la sección anterior*

$$\begin{aligned}P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q &= S(\cdot, \delta) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x_2(t-1)-1} & \frac{x_1(t)\delta}{x_2(t-1)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \delta & \delta - x_2(t-1) \delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

*Ahora, cambiando el nombre de la matriz  $P$  a  $T$  y multiplicando por la izquierda en ambos lados por su inversa  $T^{-1}$ , y tomando en cuenta que  $Q = \mathbb{I}$ , se tiene*

$$\begin{aligned}R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)S(\cdot, \delta) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1(t) \delta & \delta - x_2(t-1) \delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \delta & 1 - x_2(t-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

*Con lo que se muestra que la matriz de accesibilidad es equivalente al producto de dos matrices:  $T^{-1}$  (que es unimodular por construcción) y  $S$  (que es de rango completo y que no depende de  $\mathbf{x}$ ).*

Sin embargo, de la sección anterior, se sabe que existen matrices que no son equivalentes a la forma de Smith. Es necesario entonces, usar de apoyo a la pre-forma de Smith utilizando el algoritmo dado en (Garate-García, 2006), así es posible obtener

$$P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\bar{Q} = \bar{S}(\cdot).$$

Tras un poco de álgebra y cambiando de nombre las matrices, se obtiene

$$\begin{aligned} Rn(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= \underbrace{P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)^{-1}} \underbrace{\bar{S}(\cdot) \bar{Q}^{-1}}. \\ &= T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)^{-1} Q(\cdot) \end{aligned} \quad (36)$$

Se sabe, por construcción, que  $P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  es unimodular, así como lo pide el inciso (ii) del Teorema 3, y que además  $\bar{Q}^{-1}$  es unimodular (por el mismo motivo que  $P$ ) y que no depende de  $\mathbf{x}$ , por lo tanto, si  $\bar{S}(\cdot)$  es de rango completo y no depende de  $\mathbf{x}$  dicha condición se satisface.

En Garate-García (2006) se presentaron ejemplos para los cuales su definición de pre-forma de Smith es suficiente para determinar si el inciso (ii) del Teorema 3 se satisface. Sin embargo, durante este trabajo de tesis, se generaron contraejemplos que demuestran que dicha definición no es suficiente para saber si la condición establecida por el inciso (ii) del Teorema 3 se satisface, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 13.** *Supóngase la siguiente matriz de controlabilidad*

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2(t-2)\delta^2 + \delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

*Esta matriz ya se encuentra en la pre-forma de Smith por lo que el algoritmo propuesto en Garate-García (2006) regresa como resultado*

$$PR_n \bar{Q}(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2x_2(t-2)\delta^2 + \delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{S} = R_n.$$

*De acuerdo a (36), esta matriz no cumple con las condiciones del inciso (ii) del Teorema 3. Sin embargo, existe una matriz elemental que multiplicada por la izquierda de  $R_n$  da como resultado*

$$\bar{S}(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2(t-2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2x_2(t-2)\delta^2 + \delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Esto es

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2(t-2)\delta^2 + \delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2(t-2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}$$

que si satisface el inciso (ii) Teorema 3.

Debido a ejemplos como el anterior, se determinó que era necesario modificar la definición de pre-forma de Smith.

**DEFINICIÓN 19.** Se dice que una matriz se encuentra en la pre-forma de Smith  $\hat{S}(\cdot, \delta)$  si cuenta con la siguiente estructura:

1. Tiene la forma (34).
2. Los elementos que forman a la diagonal principal son polinomios mónicos, esto es, su coeficiente principal es 1.
3. El grado de los polinomios no nulos que se encuentran en la diagonal principal es mayor al de cualquier otro elemento de la columna a la que pertenecen. Esto es, tomando en cuenta a la matriz que aparece en (34),  $gpol(\alpha_{ii}(\delta)) > gpol(\alpha_{ji}(\delta))$  con  $i, j \in [1, m]$  y  $j < i$ .

El siguiente resultado da una idea de la estructura de las matrices elementales con las que se puede llegar a la pre-forma de Smith.

**TEOREMA 4.** Cualquier matriz  $Q(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$  de rango pleno, puede ser llevada a la pre-forma de Smith por medio de la multiplicación de matrices elementales a la izquierda y matrices de intercambio de columnas a la derecha.



**Prueba.** Por el Teorema 1 de (Gantmacher (1964), p. 135) toda matriz polinomial cuadrada puede ser llevada a la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\delta) & a_{12}(\delta) & a_{13}(\delta) & \dots & a_{1n}(\delta) \\ 0 & a_{22}(\delta) & a_{23}(\delta) & \dots & a_{2n}(\delta) \\ 0 & 0 & a_{33}(\delta) & \dots & a_{3n}(\delta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}(\delta) \end{pmatrix} \quad (37)$$

donde  $gpol(a_{ii}(\delta)) > gpol(a_{ki}(\delta))$  para  $k < i$ , mediante operaciones por la izquierda. Ahora, suponiendo que  $gpol(a_{ii}(\delta)) > gpol(a_{jj}(\delta))$  con  $i < j$  entonces dichos elementos pueden ser intercambiados, por medio de la pre y post multiplicación por una matriz de intercambio apropiada (de la forma  $E_3$ ). Repitiendo el proceso inicial, se puede llevar nuevamente a la forma (37), teniendo ahora que  $gpol(a_{ii}(\delta)) \leq gpol(a_{jj}(\delta))$ . Se continua este proceso hasta llegar a la pre-forma de Smith. ■

Un algoritmo para obtener las matrices  $\bar{S}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$ ,  $P(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  y  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , bajo esta nueva definición y tomando en cuenta el Teorema 4, se muestra en el Pseudocódigo 7. Se denotará a la matriz en la pre-forma de Smith obtenida de este algoritmo como  $\hat{S}(\cdot, \delta)$ , por lo que, si  $\hat{S}(\cdot, \delta)$  es de rango completo y no depende de  $\mathbf{x}(t)$  el requisito (ii) se cumple.

**TEOREMA 5.** Sea  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times m}(\delta)$ . Existen matrices unimodulares  $T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$ ,  $Q(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$  tales que

$$R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \bar{Q}(\delta) \quad (38)$$

si y sólo si la pre-forma de Smith de  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  pertenece a  $\mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$ .

**Prueba.** Para la suficiencia, sea  $R_n = \hat{P} \hat{S} \hat{Q}$ , calculada con el Algoritmo 7, donde  $\hat{S}$  es la pre-forma de Smith, de acuerdo a dicho algoritmo  $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dado que sólo se

---

**Pseudocódigo 7. Pre-forma de Smith.**


---

**Entrada:**  $M(\cdot, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times m}(\delta)$ : matriz.

**Salida:**

$S(\cdot, \delta)$ ,  $P(\cdot, \delta)$ ,  $Q$ : matrices que pertenecen a  $\mathcal{K}^{n \times m}(\delta)$  tales que  $PMQ = S$  con  $P$  y  $Q$  creadas a partir de la multiplicación de matrices elementales.

- 1: Obtener matrices  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{S}$  tal que  $\bar{P}M\bar{Q} = \bar{S}$  {donde  $\bar{S}$  se encuentra en la forma de la ecuación (34)}
  - 2:  $E_1 \leftarrow \mathbb{I}$ ,  $E_2 \leftarrow \mathbb{I}$
  - 3: **para**  $j = 2$  **hasta**  $n$  **hacer**
  - 4:   **para**  $i = 1$  **hasta**  $j - 1$  **hacer**
  - 5:      $c \leftarrow$  resultado del algoritmo de Euclides entre  $\alpha_{j,j}$  y  $\alpha_{i,j}$  donde  $\alpha_{ij} = ca_{jj} + r$
  - 6:     (filas  $i$  de  $\bar{S}$ )  $\leftarrow c * (\text{filas } j \text{ de } \bar{S}) + (\text{filas } i \text{ de } \bar{S})$
  - 7:      $E_1 \leftarrow E_1$  agregando  $c$  en la posición  $ij$
  - 8:   **fin para**
  - 9: **fin para**
  - 10: **para**  $i = 1$  **hasta**  $n$  **hacer**
  - 11:    $\gamma \leftarrow$  coeficiente principal de  $a_{ii}$
  - 12:    $\bar{S} \leftarrow \frac{1}{\gamma} * (\text{filas } i \text{ de } \bar{S})$
  - 13:    $E_2 \leftarrow \frac{1}{\gamma} * (\text{filas } i \text{ de } E_2)$
  - 14: **fin para**
  - 15: **devolver**  $P \leftarrow E_2 E_1 \bar{P}$ ,  $S$ ,  $Q \leftarrow \bar{Q}$
-

hacen operaciones de intercambio de columnas por la derecha, entonces se tiene (38) con  $T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \hat{P}$  y  $\bar{Q}(\delta) = \hat{S}\hat{Q}$ .

Para la necesidad, suponga que se cumple (38) y que

$$\hat{S} \notin \mathbb{R}^{n \times n}(\delta) \quad (39)$$

por el Teorema 4,  $R_n = T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\bar{P}\bar{S}\bar{Q}$  con  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$  es la pre-forma de Smith de  $Q(\delta)$  y  $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$  es unimodular. Sin embargo,  $\bar{S}$  también es la pre-forma de Smith de  $R_n$ , dado que  $R_n = (T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\bar{P})\bar{S}\bar{Q}$  lo cual es una contradicción con (39). ■

### IV.3.3 Tercera condición del Teorema 3

La condición (iii) del Teorema 3, pide que el elemento  $\mathbf{g}_{n+1}$  sea parte del módulo generado por los elementos columna  $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$ , así,

$$\mathbf{g}_{n+1} \triangleq \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)c_i(\delta). \quad (40)$$

Esta condición está directamente relacionada con la Proposición 2 (página 43), ya que, si  $\mathbf{g}_{n+1}$  pertenece al módulo generado por los elementos columna de la matriz  $R_n$ , también  $\mathbf{g}_{n+k}$  con  $k = 2, 3, \dots$  pertenecen a él.

Es necesario hacer notar que la multiplicación de los coeficientes  $c_i(\delta)$  se realiza por la derecha, recordando así que  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)c_i(\delta) \neq c_i(\delta)\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$ , por lo que el orden en el que se realizan los cálculos debe ser respetado.

Ahora, es posible reescribir (40) como

$$\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)) \begin{pmatrix} c_1(\delta) \\ \vdots \\ c_n(\delta) \end{pmatrix} = R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{c}(\delta). \quad (41)$$

Ya que el inciso (ii) del Teorema 3 es una condición necesaria se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q(\delta)\mathbf{c}(\delta), \\ T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= Q(\delta)\mathbf{c}(\delta).\end{aligned}$$

De acuerdo a esto y tomando en cuenta que una matriz polinomial arbitraria en  $\mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$ , en este caso  $Q(\delta)$ , siempre puede ser llevada a la forma de Smith, entonces

$$T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = P(\delta)S(\delta)\bar{Q}(\delta)\mathbf{c}(\delta)$$

donde  $P(\delta)$  y  $\bar{Q}(\delta)$  son matrices unimodulares y  $S(\delta)$  es la forma de Smith de  $Q(\delta)$ .

Definiendo  $\bar{Q}(\delta)\mathbf{c}(\delta) = \bar{\mathbf{c}}$ , la ecuación anterior puede formularse como

$$P^{-1}(\delta)T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = S(\delta)\bar{\mathbf{c}}(\delta) \quad (42)$$

donde el producto  $P^{-1}(\delta)T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  da como resultado un vector columna, y  $S(\delta)$  se encuentra en la forma de Smith de la Definición 17. Así la igualdad (42) cuenta con la estructura

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\delta) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \alpha_{jj}(\delta) & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{nn}(\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_1(\delta) \\ \vdots \\ \bar{c}_j(\delta) \\ \vdots \\ \bar{c}_n(\delta) \end{pmatrix}. \quad (43)$$

**TEOREMA 6.** *Supóngase los submódulos  $R_n = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$  y  $\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^n(\delta)$  obtenidos a través del algoritmo que se encuentra en el Pseudocódigo 5, y que además existen matrices  $T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$ , unimodular, y  $Q(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$ , de rango completo, tales que*

$$R_n = T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q(\delta) = T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)P(\delta)S(\delta)\bar{Q}(\delta) \quad (44)$$

donde  $P(\delta)$  y  $\bar{Q}(\delta)$  son matrices unimodulares y  $S(\delta)$  es la forma de Smith de  $Q(\delta)$ , esto es, se cumple el inciso (ii) del Teorema 3. Entonces,

$$\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) c_i(\delta)$$

se cumple si y sólo si para 43 los elementos  $\beta_i$  son divisibles sin residuo entre los elementos  $\alpha_{ii}(\delta)$ , respectivamente para  $i = 1, \dots, n$ .

**Prueba.** Tomando como base a (43) se tiene que  $\beta_i = \alpha_{ii}(\delta)\bar{c}_i$  por lo que la división euclídea definida por  $\beta_i = \alpha_{ii}(\delta)c + r$  tiene como residuo  $r = 0$ . ■

Para implementar el teorema en un algoritmo, es necesario saber si los elementos de la matriz  $Q(\delta)$  pertenecen a  $\mathbb{R}^{n \times n}(\delta)$ , el Pseudocódigo 8 revisa esta condición.

El algoritmo en el Pseudocódigo 9 revisa la condición establecida por el Teorema 6, lo que permite saber si el inciso (iii) del Teorema 3 se satisface.

#### IV.3.4 Cuarta condición del Teorema 3

La condición (iv) del Teorema 3 pide la aplicación del corchete de Lie extendido entre todos los vectores que conforman a la matriz  $R_n$ , esto debido al Teorema 2 el cual indica si la distribución que conforma a  $R_n$  es integrable. Esta condición va un poco más lejos, al pedir que el resultado de la operación sea cero y no sólo un elemento del módulo generado por la distribución, esto es porque el corchete de Lie extendido de los elementos de la distribución formada por una matriz de controlabilidad siempre da este resultado.

El código generado es muy directo y consta de un algoritmo iterativo que se muestra en el Pseudocódigo 10. Si al realizar la operación del corchete de Lie extendido, el resultado es un vector diferente de cero, el algoritmo indica que la condición no se

---

**Pseudocódigo 8.** Pertenencia de los coeficientes de un polinomio a los números reales.

---

**Entrada:**

$M(\cdot, \delta)$ : puede ser una matriz polinomial, un polinomio escalar o una lista.

$\delta$ : variable.

**Salida:** verdadero si los coeficientes de  $M(\cdot, \delta)$  son reales o falso en caso contrario.

1:  $M_i \leftarrow \text{coef}(M(\cdot, \delta))$  {coeficientes con respecto a la variable  $\delta$  i.e.  $M(\cdot, \delta) = \sum_{i=0}^s M_i \delta^i$  }

2: para  $i = 0$  hasta  $s$  hacer

3: si  $\text{real}(M_i) = M_i$  entonces

4: devolver verdadero {esto es, que la parte real de  $M_i$  sea igual a  $M_i$ }

5: si no

6: devolver falso

7: fin si

8: fin para

---

---

**Pseudocódigo 9.** Pertenencia al módulo generado por  $R_n$  sobre un anillo polinomial.

---

**Entrada:**

$R_n \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$ : matriz {compuesta por los submódulos de accesibilidad

$(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)) \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$ .

$\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathcal{K}^n(\delta)$ : vector {submódulo  $(n+1)$ -ésimo}.

**Salida:** verdadero si  $\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \text{span}_{\mathbb{R}(\delta)}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \delta)\}$  o falso en caso contrario.

1:  $T^{-1}, \hat{S}, \hat{Q} \leftarrow$  pre-forma de Smith Algoritmo 7

2:  $\beta \leftarrow$  resultado del Algoritmo 8

3: **si**  $\beta = \text{falso}$  **entonces**

4:   desplegar “La preforma de Smith depende de  $\mathbf{x}_{[s]}$ ”

5:   **devolver falso**

6: **fin si**

7:  $P, S, \bar{Q} \leftarrow$  forma de Smith {Algoritmo incluido en SAC}

8: **para**  $i : 1$  **hasta**  $n$  **hacer**

9:    $r \leftarrow$  algoritmo de euclídes tal que  $\beta_i = \alpha_{ii}c + r$  donde  $\beta_i$  es un elemento de

$P^{-1}Tg_{n+1}$  y  $\alpha_{ii}$  un elemento de la diagonal principal de  $S$

10:   **si**  $r \neq 0$  **entonces**

11:     **devolver falso**

12:   **fin si**

13: **fin para**

14: **devolver verdadero**

---

cumple. Si por el contrario el resultado de todas las operaciones es cero, el algoritmo indica que sí se satisface.

### IV.3.5 Algoritmo general

Para finalizar esta sección, el Pseudocódigo 11 (página 65) muestra el algoritmo diseñado para comprobar si el Teorema 3 se satisface. Éste, utiliza los algoritmos vistos hasta ahora en este capítulo. El siguiente ejemplo, ilustra la manera en que este algoritmo funciona.

**EJEMPLO 14.** *Considérese la dinámica siguiente*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_3^2(t-1) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_2(t-2)x_3(t-1) - 2x_3^2(t-3)x_3(t-1), \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t-1) + x_3^2(t-2).\end{aligned}$$

*Su matriz de accesibilidad está dada por*

$$R_3 = [g_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), g_2(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), g_3(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2x_3(t-1)\delta^2 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad g_4(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*que no depende de la variable de entrada  $u$ , por lo que cumple con el inciso (i) del Teorema 3. Se observa que  $R_3$  ya se encuentra en la pre-forma de Smith definida en Garate-García (2006). De acuerdo al Teorema 5 es posible saber si se cumple con el inciso (ii) del Teorema 3. Utilizando el algoritmo descrito en el Pseudocódigo 7 se tiene*

$$R_3 = T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2x_3(t-1)\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$



---

**Pseudocódigo 10.** Algoritmo del corchete de Lie extendido.
 

---

**Entrada:**

$R_n \in \mathcal{K}^{n \times n}(\delta)$ : matriz con los submódulos a los que se aplicara el corchete de Lie extendido.

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ : vector de estados.

**Salida:** falso si alguna de las operaciones realizadas del corchete de Lie extendido es diferente de cero y verdadero en caso contrario.

- 1:  $s \leftarrow$  grado del polinomio en  $\delta$
  - 2: para  $i : 1$  hasta  $n$  hacer
  - 3:   para  $j : 1$  hasta  $n$  hacer
  - 4:     para  $k : 1$  hasta  $2s$  hacer
  - 5:       para  $r : 1$  hasta  $k$  hacer
  - 6:         si  $[\mathbf{g}_i^r(\mathbf{x}), \mathbf{g}_j^k(\mathbf{x})]_{E_{2s}} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(2k-1)n}$  entonces
  - 7:         devolver falso
  - 8:         salir del programa
  - 9:       fin si
  - 10:     fin para
  - 11:   fin para
  - 12: fin para
  - 13: fin para
  - 14: devolver verdadero
  - 15: salir del programa
-

donde  $T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  es unimodular y  $Q(\delta)$  no depende de  $\mathbf{x}$ , por lo que, se cumple el inciso (ii) del Teorema 3. El inciso (iii) se cumple ya que  $\mathbf{g}_4$  es linealmente dependiente de  $\mathbf{g}_2$ , esto se verifica utilizando el algoritmo del Pseudocódigo 8. Con el fin de revisar el inciso (iv) del Teorema 3, se realiza el corchete de Lie extendido  $[g_j^\beta(\mathbf{x}), g_i^r(\mathbf{x})]_{E_{2\bar{s}}}$  con  $\bar{s} = 2$ ,  $i, j \in [1, 3]$  y  $r \leq k \in [0, 4]$  de

$$\begin{aligned} g_1^0 &= \frac{\partial}{\partial x_1(t)}, & g_2^0 &= \frac{\partial}{\partial x_2(t)}, & g_3^0 &= \frac{\partial}{\partial x_1(t)}, \\ g_3^1 &= \frac{\partial}{\partial x_3(t-1)}, & g_3^2 &= -2x_3(t-1) \frac{\partial}{\partial x_2(t-2)}. \end{aligned}$$

Se puede verificar, utilizando el Algoritmo 10, que estas operaciones dan como resultado cero, por lo que la matriz  $T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  define un cambio de coordenadas

$$dz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x_3(t-1)\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dx$$

definido como

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1(t), \\ z_2 &= x_2(t) + x_3^2(t-1), \\ z_3 &= x_3(t), \end{aligned}$$

que lleva al sistema equivalente lineal:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2(t) + u(t), \\ \dot{z}_2 &= z_1(t), \\ \dot{z}_3 &= z_2(t-1). \end{aligned}$$

---

**Pseudocódigo 11.** Equivalencia con un sistema lineal con retardos débilmente controlable.

---

**Entrada:**  $dx = f(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) + g(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{u}(t)$ , donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ .

**Salida:** falso si alguna de las condiciones establecidas en el Teorema 3 falla, matriz

$T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  en caso contrario.

- 1:  $R_n, \mathbf{g}_{n+1} \leftarrow$  matriz de accesibilidad y elemento  $n + 1$  de los submódulos de accesibilidad respectivamente {obtenidos del algoritmo propuesto en el Pseudocódigo 5}
  - 2:  $\beta_1 \leftarrow$  resultado del algoritmo del Pseudocódigo 6 {variable booleana}
  - 3:  $P, S, Q, \rho \leftarrow$  Matrices y rango obtenidos del algoritmo del Pseudocódigo 7 con entrada la matriz  $R_n$
  - 4:  $Q \leftarrow SQ$
  - 5:  $\beta_2 \leftarrow$  resultado del algoritmo presentado en el Pseudocódigo 8 al resultado de  $Pg_{n+1}$
  - 6:  $\beta_3 \leftarrow$  resultado del algoritmo del Pseudocódigo 10
  - 7: si  $\beta_1 = \text{verdadero}$  o  $\rho \neq n$  o  $Q$  depende de  $\mathbf{x}$  o  $\beta_2 = \text{falso}$  o  $\beta_3 = \text{falso}$  entonces
  - 8:   **devolver falso**
  - 9:   El sistema no es equivalente a un sistema lineal con retardos débilmente controlable
  - 10: **si no**
  - 11:   **devolver**  $T \leftarrow P$
  - 12: **fin si**
-

## IV.4 Equivalencia a un sistema con retardos fuertemente controlable

Como se mencionó anteriormente, la condición de controlabilidad fuerte en un sistema lineal con retardos requiere que la inversa de la matriz de controlabilidad sea unimodular. Ahora, supóngase que  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q(\delta)$  cumple las condiciones del Teorema 3 y de acuerdo a la ecuación (31),  $Q(\delta)$  representa la matriz de controlabilidad del sistema equivalente lineal, entonces, si el sistema (3) es equivalente a un sistema lineal fuertemente controlable, la matriz  $Q(\delta)$  debe ser unimodular, y como consecuencia  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  también tiene que serlo tomando en cuenta que  $T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  lo es. Este punto se expresa en el Teorema 7.

**TEOREMA 7.** *(Califano et al., 2010) Un sistema de la forma (3) es equivalente, bajo un cambio de coordenadas bicausal, a un sistema lineal con retardo fuertemente controlable si y sólo si cumple con (i), (iii) y (iv) del Teorema 3 y además:*

*(ii')  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta))$  es unimodular.*

Del teorema anterior, surge entonces el algoritmo mostrado en el Pseudocódigo 12. En este algoritmo, se revisa si la matriz  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  es unimodular. Si el sistema cumple con todas las condiciones del Teorema 7 el algoritmo regresa como salida la matriz  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)^{-1}$ .

---

**Pseudocódigo 12.** Equivalente a un sistema lineal con retardos fuertemente controlable.

---

**Entrada:**  $dx = f(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) + g(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{u}(t)$ , donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ .

**Salida:** falso si alguna de las condiciones establecidas en el Teorema 3 falla, matriz  $T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  en caso contrario.

- 1:  $R_n$ ,  $\mathbf{g}_{n+1} \leftarrow$  matriz de accesibilidad y elemento  $n + 1$  de los submódulos de accesibilidad respectivamente obtenidos del algoritmo propuesto en el Pseudocódigo 5
  - 2:  $\beta_1 \leftarrow$  resultado del algoritmo del Pseudocódigo 6 {variable booleana} con  $R_n$  como entrada
  - 3:  $\beta_2 \leftarrow$  resultado del algoritmo presentado en el Pseudocódigo 8 al resultado de  $R_n \mathbf{g}_{n+1}$
  - 4:  $\beta_3 \leftarrow$  resultado del algoritmo del Pseudocódigo 10
  - 5: **si**  $\beta_1 = \text{verdadero}$  **o**  $R_n$  no es unimodular **o**  $\beta_2 = \text{falso}$  **o**  $\beta_3 = \text{falso}$  **entonces**
  - 6:   **devolver falso**
  - 7:   El sistema no es equivalente a un sistema lineal con retardos débilmente controlable
  - 8: **si no**
  - 9:   **devolver**  $T \leftarrow R_n^{-1}$
  - 10: **fin si**
-

## IV.5 Equivalencia a un sistema lineal sin retardos completamente controlable

Ahora se tratará la equivalencia de un sistema no lineal con retardos con un sistema lineal sin retardos cuya matriz de controlabilidad es de rango completo. Esto implica que en dichos sistemas sea posible el uso de numerosas técnicas de control lineal.

**TEOREMA 8.** (*Califano et al., 2011a*). *Un sistema de la forma (3) es equivalente, bajo un cambio de coordenadas bicausal, a un sistema lineal sin retardo si y sólo si cumple con (i), (iv) y (ii') de los teoremas 3 y 7 respectivamente, y además:*

(iii')  $g_{n+1}(\cdot) \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\}$ , esto es

$$\mathbf{g}_{n+1}(\cdot) \triangleq \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) c_i \quad (45)$$

con  $c_i \in \mathbb{R}$ .

El inciso (iii') cuenta con un algoritmo muy similar al del inciso (iii) del Teorema

3. En este caso es posible escribir (45) como

$$\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \mathbf{c} \quad (46)$$

donde  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . Ya que (ii') se cumple, la matriz  $R_n$  tiene inversa y además puede ser usada como matriz de transformación, por lo que  $R_n = T$ ; asimismo, por el inciso (i) del Teorema 3 y la ecuación (41) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \mathbf{c} \\ T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) &= \mathbf{c} \end{aligned} \quad (47)$$

lo que implica que si  $T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  pertenece a  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathbf{g}_{n+1}$  es parte del módulo generado a la derecha por los vectores  $(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{[s]}, \delta), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta))$ .

El siguiente pseudocódigo presenta el algoritmo que revisa si  $T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{g}_{n+1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) \in \mathbb{R}^n$ , con el fin de saber si el Teorema 8 se cumple.

---

**Pseudocódigo 13.** Pertenencia a los reales.

---

**Entrada:**

$M(\cdot)$ : puede ser una matriz, un escalar o una lista.

$x$ : variable.

**Salida:** **verdadero** si los coeficientes de  $M(\cdot)$  son reales y **falso** en caso contrario.

- 1: **si** la parte real de  $(M(\cdot)) = M(\cdot)$  **entonces**
  - 2:   **devolver verdadero**
  - 3: **si no**
  - 4:   **devolver falso**
  - 5: **fin si**
- 

Por último, el Pseudocódigo 14 utiliza algunos de los algoritmos previamente revisados para comprobar si un sistema es equivalente a un sistema lineal controlable.

## IV.6 Resumen

La accesibilidad para los sistemas no lineales es el equivalente estructural de la controlabilidad, en el sentido de que el estado puede descomponerse en un subsistema completamente accesible, es decir uno en el que cualquier parte del estado es afectada por una señal de control, y otro subsistema autónomo, totalmente independiente de la señal de control. En años recientes, algunas herramientas desarrolladas con la finalidad

---

---

**Pseudocódigo 14.** Equivalencia con un sistema lineal sin retardos controlable.

---

**Entrada:**  $dx = f(\mathbf{x}_{[s]}, \delta) + g(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)\mathbf{u}(t)$ , donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ .

**Salida:** falso si alguna de las condiciones establecidas en el Teorema 3 falla, matriz  $T(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  en caso contrario.

- 1:  $R_n$ ,  $\mathbf{g}_{n+1} \leftarrow$  matriz de accesibilidad y elemento  $n + 1$  de los submódulos de accesibilidad respectivamente obtenidos del algoritmo propuesto en el Pseudocódigo 5
  - 2:  $\beta_1 \leftarrow$  resultado del algoritmo del Pseudocódigo 6 {variable booleana}
  - 3:  $\beta_2 \leftarrow$  resultado del algoritmo presentado en el Pseudocódigo 13 al resultado de  $R_n \mathbf{g}_{n+1}$
  - 4:  $\beta_3 \leftarrow$  resultado del algoritmo del Pseudocódigo 10 con  $R_n$  como entrada
  - 5: **si**  $\beta_1 = \text{verdadero}$  **o**  $R_n$  no es unimodular **o**  $\beta_2 = \text{falso}$  **o**  $\beta_3 = \text{falso}$  **entonces**
  - 6:   **devolver falso**
  - 7:   El sistema no es equivalente a un sistema lineal con retardos débilmente controlable
  - 8: **si no**
  - 9:   **devolver**  $T \leftarrow R_n^{-1}$
  - 10: **fin si**
-



de saber si un SNLR satisface las condiciones de accesibilidad, se han utilizado como base de resultados que establecen condiciones necesarias y suficientes para determinar si un SNLR es equivalente a un sistema lineal controlable con o sin retardos. Estos resultados son de gran utilidad en la teoría de control, puesto que permiten determinar la existencia de un cambio bicausal de coordenadas, a un sistema en el que es posible utilizar numerosos resultados concernientes a la teoría de sistemas lineales. En esta sección, se reportaron aportaciones teóricas que contribuyeron a la generación de algoritmos, que realizan los numerosos cálculos requeridos para determinar la existencia de dicho cambio de coordenadas.

---

# Capítulo V

## CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se abordaron distintos problemas concernientes al estudio de los sistemas no lineales con retardos en el tiempo, tales como integrabilidad y equivalencia a un sistema lineal. Con el fin de esclarecer su explicación, se expusieron los conceptos básicos de dichos problemas relacionándolos con sus homólogos en el caso sin retardos, ésto bajo una interpretación geométrica. Se da continuidad al programa SAC, del cual se espera tenga un impacto muy favorable en el análisis y diseño de sistemas ya sean lineales, no lineales con o sin retardos.

### V.1 Aportaciones

En este trabajo se generaron algoritmos que revisan las condiciones necesarias y suficientes para saber si una distribución, cuyos elementos cuentan con retardos en el tiempo, es integrable. Estas condiciones son una extensión de algunas herramientas ya existentes, generadas a partir de un punto de vista geométrico. Para el caso de los sistemas sin retardo, dichas herramientas no son las más eficientes (considerando el tiempo de cómputo) para llevar a cabo los cálculos necesarios, sin embargo, en el caso con retardos éste es el único método conocido.

Se construyeron, también, algoritmos para lidiar con los problemas de equivalencia de un SNLR accesible a un SLR débilmente controlable, a uno fuertemente controlable y un sistema lineal controlable sin retardos. Las condiciones que son verificadas por estos algoritmos, indican si es posible realizar una transformación bicausal de coorde-

---

nadas del sistema a prueba a uno más sencillo, sobre el cual pueden utilizarse diversas técnicas de control que no podrían emplearse directamente en el SNLR. Por otro lado, esta tesis trajo consigo algunas aportaciones teóricas. La más importante de ellas establece que llevar a la matriz de accesibilidad  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  a la representación de la pre-forma de Smith definida en Garate-García (2006), no es suficiente para determinar si dicha matriz cumple con la segunda condición de equivalencia a un sistema lineal débilmente controlable con retardos. Por este motivo, se generó la necesidad de extender la definición, ya existente, de la pre-forma de Smith. El Teorema 5, se apoya en dicha definición con el fin establecer condiciones necesarias y suficientes para saber si una matriz  $R_n(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)$  puede representarse de la forma  $T^{-1}(\mathbf{x}_{[s]}, \delta)Q(\delta)$ . Otras aportaciones teóricas se presentan en los teoremas 4 y 6.

Los algoritmos presentados aumentan las herramientas con las que cuenta el programa SAC para lidiar con problemas de control, en particular sistemas con retardo, lo que permite utilizar de manera práctica los resultados reportados en Califano *et al.* (2010, 2011a) y evita realizar manualmente la gran cantidad de cálculos requeridos.

Se espera que las contribuciones generadas en este trabajo de tesis sirvan de apoyo para aquellas personas interesadas en el estudio de los sistemas dinámicos.

## V.2 Trabajo futuro

Existen diversos resultados que pueden ser implementados en el programa SAC. Algunos de estos resultados, relacionados a los problemas de control revisados en esta tesis son:

- Equivalencia de un sistema lineal con retardos a un sistema lineal sin retardos y reducción de retardos (Gárate-García *et al.*, 2011).

- Equivalencia de un SNLR a un sistema lineal débilmente observable con retardos (Califano *et al.*, 2011b).

El corchete de Lie cumple con las condiciones para ser un álgebra de Lie, su extensión (Califano *et al.*, 2011a) cumple con la condición de conmutatividad asimétrica, surge entonces el interés de investigar si el corchete de Lie extendido cumple con las dos condiciones restantes (bilinealidad y satisfacer la identidad de Jacobi) para ser un álgebra de Lie. No sólo esto, el corchete de Lie extendido es una herramienta nueva cuyo estudio puede derivar en el descubrimiento de otras propiedades. Además, el corchete de Lie cuenta con una interpretación geométrica bien definida, lo que ha despertado el interés de profundizar en la interpretación que su extensión pueda tener.

## Referencias bibliográficas

- Boothby, W. M. (1986). An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Academic Press. 2<sup>nd</sup> Ed. 430 p.
- Califano, C., Marquez-Martinez, L. A., y Moog, C. H. (2010). *On Linear Equivalence for Time-Delay Systems*. 2010 American Control Conference, páginas 6567–6572.
- Califano, C., Marquez-Martinez, L. A., y Moog, C. H. (2011a). *Extended Lie Brackets for Nonlinear Time-Delay Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, **56**(9): 2213–2218.
- Califano, C., Marquez-Martinez, L. A., y Moog, C. H. (2011b). *On the observer canonical form for nonlinear time-delay systems*. páginas 3855–3860, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, Italy.
- Caviness, B. F. (1986). *Computer algebra: past and future*. Journal of Symbolic Computation, **2**(3): 217–236.
- Conte, G. y Perdon, A. M. (2000). *Systems over rings: geometric theory and applications*. Annual Reviews in Control, **24**: 113–124.
- Conte, G., Moog, C. H., y Perdon, A. M. (2007). Algebraic methods for nonlinear control systems. Springer. 2<sup>nd</sup> Ed. 178 p.
- Dorf, R. C. y Bishop, R. H. (2008). Modern Control Systems. Person Prentice Hall. 11<sup>th</sup> Ed. 1056 p.
- Driver, R. D. (1977). Ordinary and delay differential equations. Springer-Verlag. 514 p.
- Erneux, T. (2009). Applied Delay Differential Equations. Springer. 204 p.
- Gantmacher, F. R. (1964). Matrix Theory, Vol. 1. Chealsea. 441 p.
- Garate-García, A. (2006). Análisis y control de sistemas no lineales con retardos mediante cálculo simbólico. Tesis de maestría, Centro de investigación científica y de educación superior de Ensenada, Ensenada, Baja California, México. 171 p.
- Gárate-García, A. y Cuesta-García, J. R. (2006). SAC Manual. 63 p.
- Gárate-García, A., Márquez-Martínez, L. A., y Moog, C. H. (2011). *Equivalence of linear time-delay systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, **56**(3): 666–670.
-

- Glumineau, A. y Graciani, L. (1996). Symbolic nonlinear analysis and control package. Vol. F, páginas 295–298, San Francisco, California, USA.
- Isidori, A. (1995). Nonlinear Control Systems. Springer. 3<sup>rd</sup> Ed. 549 p.
- Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems. Prentice Hall. 3<sup>rd</sup> Ed. 750 p.
- Kolmanovskii, V. B. y Nosov, V. R. (1986). Stability of functional differential equations. Academic Press. 217 p.
- Kotta, S. N. U. y Tönso, M. (1998). Towards a symbolic computation toolbox for transforming a generalized state equations into a classical form. páginas 121–128, Wroclaw, Poland.
- Lang, S. (2002). Algebra. Springer. 3<sup>rd</sup> Ed. 912 p.
- M. Malek-Avarej, M. J. (1897). Time-Delay Systems. Analysis, Oprimization and Applications. Elsevier Science Publishers B. V. 504 p.
- MacDonald, N. (1989). Biological delay systems: linear stability theory. Cambridge University Press. 235 p.
- Márquez-Martínez, L. A. y Brizuela, C. A. (2010). *Efficient inversion of matrices over a non-commutative ring*. Vol. 9, Prague, Czech Republic. 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems.
- Márquez-Martínez, L. A. y Moog, C. H. (2001). *Accessibility of nonlinear time-delay systems*. páginas 4622–4627, Orlando, Florida, USA.
- Marquez-Martinez, L. A. y Moog, C. H. (2004). *New insights on the analysis of nonlinear time-delay systems*. Vol. Dic, páginas 4533–4537, Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- Maxima (2010). *Maxima Manual v. 5.25.0*. 1026 p.
- Nijmeijer, H. y Schaft, A. J. v. d. (1990). Nonlinear dynamical control systems. Springer-Verlag. 492 p.
- Ogata, K. (2003). Ingeniería de Control Moderna. Pearson educación S. A. 4<sup>ta</sup> Ed. 965 p.
- Padulo, L. y Arbib, M. A. (1974). System theory. A unified state-space approach to continuous and discrete systems. W. B. Saunders Company. 779 p.
- Pavelle, R. y Wang, P. S. (1985). *MACSYMA form F to G*. Journal of Symbolic Computation, 1(1): 69–100.
- Schutz, B. F. (1980). Geometrical methods of mathematical physics. Cambridge University Press. 250 p.
-

- Sontag, E. D. (1990). *Mathematical Control Theory*. Springer-Verlag. 396 p.
- Spivak, M. (1999). *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. 1. Publish or Perish. 3<sup>rd</sup> Ed. 489 p.
- Stépán, G. (1989). *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. Longman Group. 151 p.
- Wonham, W. M. (1985). *Linear multivariable control. A geometric approach*. Springer-Verlag. 3<sup>rd</sup> Ed. 334 p.
-

## Apéndice A

### Algunos elementos de álgebra

Las siguientes definiciones de álgebra son una guía que indica que operaciones se pueden realizar sobre el conjunto y el operador con los que se trabaja. Si se desea profundizar en el estudio de estas definiciones, se pueden consultar en Lang (2002).

#### Operación binaria.

Se define como  $a \diamond b = c$  si  $c \in S \forall (a, b) \in S \times S$  donde  $\diamond : S \times S \rightarrow S$ .

#### Semigrupo.

Operación binaria asociativa  $a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$ .

#### Monoide.

$(S, \diamond, u)$  semigrupo dotado de elemento neutro "u"  $a \diamond u = u \diamond a = a \forall a \in S$ .

#### Grupo.

$(S, \diamond, u, \hat{a})$  monoide donde cada elemento tiene inverso  $\hat{a}$   $a \diamond \hat{a} = \hat{a} \diamond a = u$ .

#### Grupo Abeliano.

Grupo donde la operación es conmutativa.  $a \diamond b = b \diamond a \forall (a, b) \in S \times S$ .

#### Anillo.

$(S, \diamond, u, \hat{a}, *, 1)$  conjunto  $S$  con dos operaciones:  $\diamond$  y  $*$  donde:

- $(S, \diamond, u, \hat{a})$  forma un grupo abeliano (suma).
- $(S, *, 1)$  forma un monoide (producto).



- $\star$  es asociativo sobre  $\diamond$

$$a \star (b \diamond c) = a \star b \diamond a \star c$$

### Campo.

$(S, \diamond, u, \hat{a}, \star, 1)$  conjunto  $S$  con dos operaciones:  $\diamond$  y  $\star$  donde:

- $(S, \diamond, u, \hat{a})$  forma un grupo abeliano (suma).
- $(S, \star, 1)$  forma un grupo abeliano (producto).

- $\star$  es asociativo sobre  $\diamond$ .

$$a \star (b \diamond c) = a \star b \diamond a \star c.$$

### Módulo.

$(V, \diamond, R, \star)$  es:

- Un grupo abeliano de  $(V, \diamond)$  (vector, suma).
- Un anillo  $R$  (escalares) y una operación  $\star : R \times V \rightarrow V$  (multiplo escalar).

### Espacio Vectorial

$(V, \diamond, F, \star)$  es un módulo donde  $F$  es un campo.

## Apéndice B

### Formalismo algebraico

El formalismo algebraico con el que se trabaja en esta tesis es requerido con la finalidad de tener una visión más precisa de las funciones con las que se trabaja y las operaciones permitidas de acuerdo al marco algebraico elegido. En las publicaciones citadas (Conte *et al.*, 2007; Califano *et al.*, 2010, 2011a) se ha optado por buscar herramientas válidas para un conjunto importante de sistemas que mantienen diversas propiedades genéricas que, en términos matemáticos, se pueden definir como propiedades que permanecen en subconjuntos abiertos y densos de dominios de definición adecuados, dado que se mantienen en algunos puntos de dicho dominio. Esto restringe la cantidad de sistemas con los que se puede trabajar a cambio de la posibilidad de acceder a un número significativo de herramientas que permiten alcanzar los objetivos de control deseados. Es importante, entonces, considerar sistemas que compartan propiedades validas alrededor de un punto  $x_0$ .

Es de interés recordar al conjunto de funciones diferenciables o  $C^r$  las cuales tienen  $r$  derivadas continuas. Si la función es diferenciable para toda  $r$ , entonces se dice que pertenece a las funciones suaves o  $C^\infty$ . El conjunto de funciones  $C^\infty$  es muy general, sin embargo, no cuenta con algunas de las propiedades genéricas de interés.

Se desea construir (Conte *et al.*, 2007) un campo cociente denominado  $\mathcal{K}_r$  el cual consta de pares de funciones  $(f, g)$ , tal que  $g \neq 0$ , que cumple la relación de equivalencia  $(f, g) \sim (f', g')$  si y sólo si  $fg' = gf'$ . Eligiendo a un representante de esta relación de equivalencia, un elemento de  $\mathcal{K}_r$  se escribirá  $f/g$ . La suma (+) y el producto ( $\cdot$ ) de dos

elementos  $f_1/g_1$  y  $f_2/g_2$  de este campo se definen respectivamente como

$$\begin{aligned} (f_1, g_1) + (f_2, g_2) &\triangleq (f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1, g_1 \cdot g_2) \\ (f_1, g_1) \cdot (f_2, g_2) &\triangleq (f_1 \cdot f_2, g_1 \cdot g_2) \end{aligned} \quad (48)$$

donde la parte derecha de (48) pertenece a  $\mathcal{K}_r$  siempre que  $g_1 \cdot g_2 \neq 0$

Para que la condición anterior se cumpla es necesario que el conjunto con el que se crea este campo forme un anillo integral, esto es, que no cuente con divisores por cero. Desgraciadamente esto no se logra si el anillo está formado por el conjunto de las funciones  $C^\infty$ . Como un ejemplo de esta afirmación se presentan las funciones de la Figura 5 (Conte *et al.*, 2007), aunque ambas son diferentes de cero y  $C^\infty$ , el producto punto a punto entre ambas da como resultado la función cero.

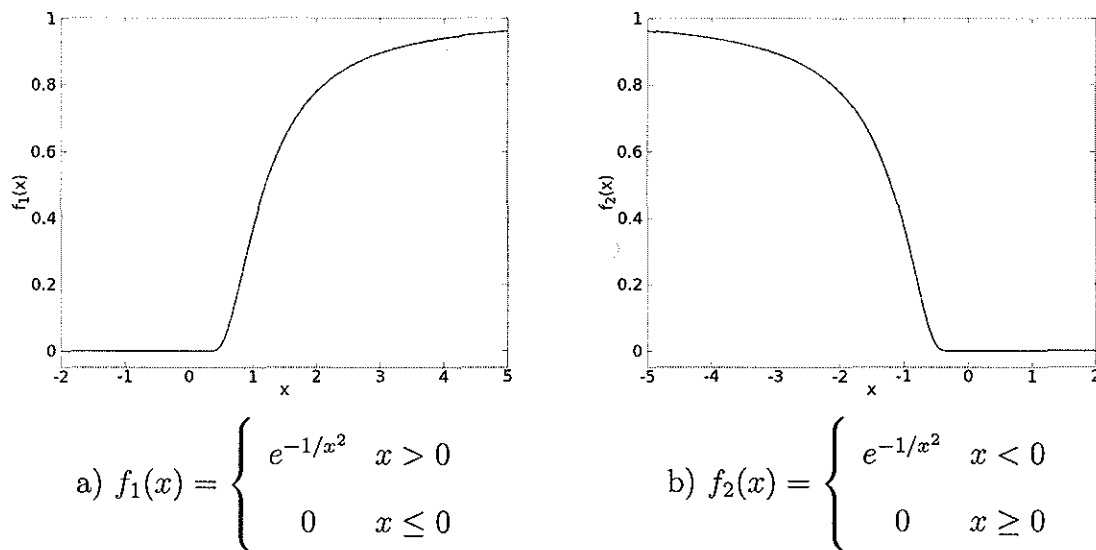


Figura 5. Función  $C^\infty$ .

Por este y algunos otros motivos se ha propuesto (Conte *et al.*, 2007) utilizar un conjunto de funciones denominadas meromorfas. Con la finalidad de explicar qué tipo de funciones y mencionar algunas propiedades genéricas de las que se habla, se comenzará

dando la definición de una función analítica para el caso multivariable considerando un dominio abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**DEFINICIÓN 20.** Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se llama analítica en  $D$  si coincide con su expansión en series de Taylor en una vecindad de cada punto  $x_0 \in D$ .

Cabe destacar que las funciones analíticas son un subconjunto del conjunto de las funciones  $C^\infty$ . Sobre las funciones analíticas se tienen las siguientes propiedades (Conte *et al.*, 2007)

**PROPOSICIÓN 3.** Sea  $D \subseteq \mathbb{R}$  un dominio abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función analítica en  $D$ , entonces

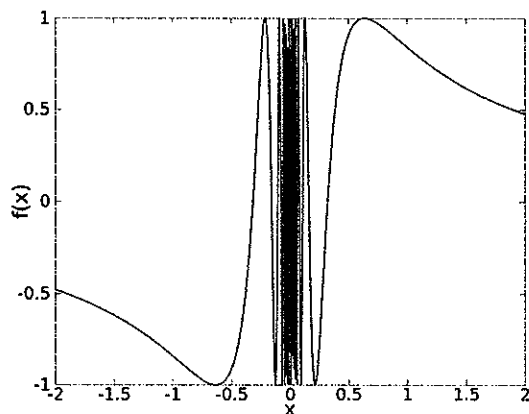
1.  $f \equiv 0$  en  $D$ , o
2. El conjunto de ceros de  $f$  en  $D$  tiene un interior vacío.

La Proposición 3 indica que las funciones analíticas distintas de cero definidas en  $\mathbb{R}^n$  son diferentes de cero en los puntos de un subconjunto abierto y denso de  $\mathbb{R}^n$ . Como ejemplos se tienen a las funciones polinomiales que tienen un número finito de ceros aislados y funciones como el  $\text{sen}(x)$  que tienen un número infinito de ceros aislados cada  $x = n\pi$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Esto, a diferencia de algunas funciones  $C^\infty$  como la de la Figura 5 que cuenta con un continuo de ceros o como en la Figura 6 (Conte *et al.*, 2007) la cual tienen un punto de acumulación de ceros.

Debido a la Proposición 3 se tiene la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 21.** Dada una matriz cuyos elementos son funciones analíticas, el rango genérico es la máxima submatriz cuadrada con determinante distinta de cero.

Como la determinante es una función analítica, el rango genérico coincide con el rango de la matriz en los puntos de un subconjunto abierto y denso de  $\mathbb{R}^n$ .



$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Figura 6. **Función no analítica.**

Ahora bien, si una función  $f(x)$  es analítica, la función  $1/f(x)$  no necesariamente lo es. Sin embargo, usando la noción de la inversa multiplicativa de una función analítica distinta de cero, es posible construir un anillo integral necesario para cumplir las condiciones del marco algebraico elegido. En otras palabras, una función analítica  $f(x)$  multiplicada por el inverso multiplicativo de una función analítica  $g(x)$  puede ser identificada con los elementos del campo cociente  $\mathcal{K}_r$ . A estos elementos se les conoce con el nombre de "funciones meromorfas".

## Apéndice C

### Conceptos de geometría diferencial

En esta sección, se incluyen algunos conceptos que pueden ser útiles para interpretación de varios temas tratados en este trabajo de tesis. Dichos conceptos pueden revisarse con profundidad en Schutz (1980); Boothby (1986); Spivak (1999), entre otros. Se comienza exponiendo una idea global del concepto de variedad, que es un objeto matemático con una definición estricta.

Se llama  $n$ -variedad, donde  $n$  indica la dimensión de la variedad, a un conjunto de puntos  $M$ , si cada punto  $q$  de  $M$  cuenta con una vecindad abierta  $U$  sobre la que es posible definir un homeomorfismo  $\varphi$  de ésta vecindad a  $\mathbb{R}^n$ . Al par  $U, \varphi$  se le conoce como “carta” o “mapa”. Se asignan las  $n$  coordenadas  $x_1(q), \dots, x_n(q)$  a la imagen  $\varphi(q) \in \mathbb{R}^n$  de  $q$ , donde cada  $x_i(q)$  es una función real evaluada en  $U$ . Si el punto  $q \in M$  se encuentra en la intersección  $U \cap V$  de dos cartas  $U, \varphi$  y  $V, \psi$ ; existe un homeomorfismo  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  ya que  $\varphi$  y  $\psi$  también son homeomorfismos, si además,  $\psi \circ \varphi^{-1}$  y  $\varphi \circ \psi^{-1}$  son funciones  $C^k$  con  $k \geq 1$ , esto es,  $C^k$ -difeomorfismos, se dice que estos mapas son  $C^k$ -compatibles, si  $k = \infty$  se dice que son  $C^\infty$ -compatibles (Figura 7). Si es posible construir un sistema completo de cartas tal que cada punto  $q \in M$  se encuentra en al menos una vecindad  $C^k$ -compatible con todas las cartas con las que tiene intersecciones no nulas. Al conjunto de cartas que cubren a toda la variedad  $M$  se le conoce como atlas. Se dice que  $M$  es una variedad  $C^k$  o  $k$ -diferenciable cuando  $k \geq 1$ ; si  $k = \infty$  se conoce simplemente como variedad diferenciable o suave.

Supóngase una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , es posible definir sobre cada punto  $p$

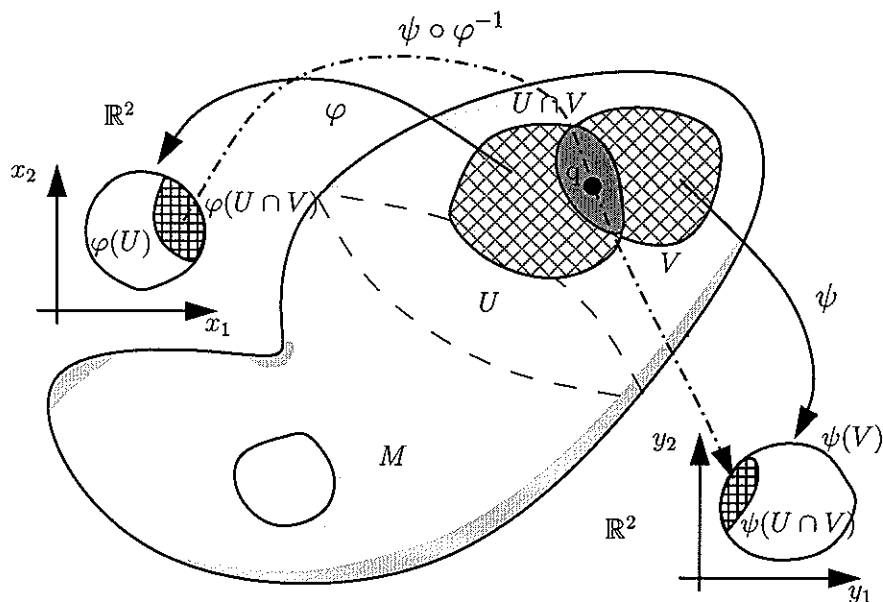


Figura 7. 2-Variedad.

de esa variedad un espacio vectorial denominado espacio tangente  $T_p(M)$ . Este espacio tiene como base,  $n$  vectores tangentes,  $v_{1p}, \dots, v_{np}$  en cada punto de la variedad  $M$  (Figura 8(a)).

Un campo vectorial es una asignación de un elemento  $v_p \in T_p(M)$  a cada punto  $p$  de  $M$ , esto es, asigna un vector que pertenece al espacio tangente a un punto de la variedad  $M$  (Figura 8(b)).

Supongase ahora una variedad  $M$  de dimensión  $m = n + k$ , en la que a cada uno de sus puntos se le asigna un subespacio de dimensión  $n$  denominado  $\Delta(x) \subset T_p(M)$ , definido como

$$\Delta(x) = \text{span}\{v_1(x), \dots, v_n(x)\},$$

además, que sobre una vecindad de esta variedad existen  $n$  campos vectoriales  $v_1, \dots, v_n$  linealmente independientes que forman una base de  $\Delta(x)$  para todo punto  $p$  de esta vecindad, entonces, se dirá que  $\Delta$  es una distribución de dimensión  $n$  sobre la variedad

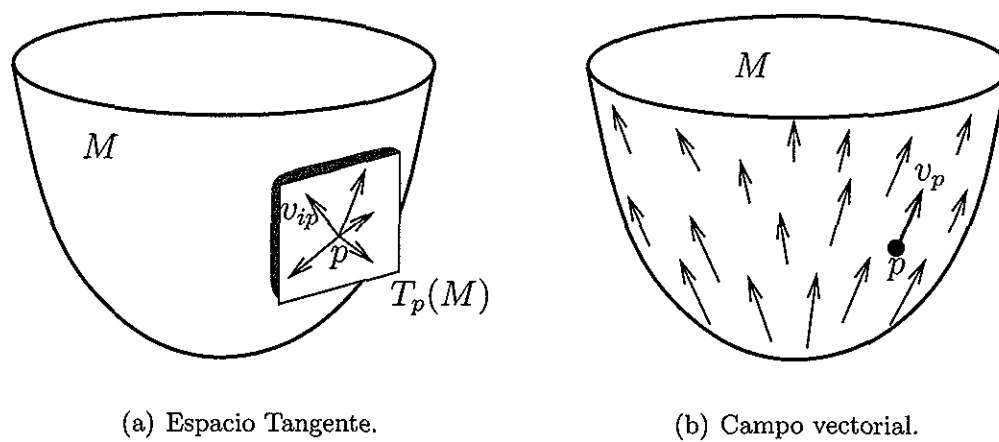


Figura 8. **Espacio tangente y campo vectorial en una variedad.**

$M$ , y  $v_1, \dots, v_n$  una base local de  $\Delta$ .