Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

---

Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

---

Generación de oscilaciones en sistemas seccionalmente lineales

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Edwin Alejandro Villavicencio Jáuregui

Ensenada, Baja California, México
2018

Tesis defendida por

Edwin Alejandro Villavicencio Jáuregui

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director de tesis

M.C. Ricardo Francisco Núñez Pérez

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Dr. Daniel Sauceda Carvajal
Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Edwin Alejandro Villavicencio Jáuregui como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control .

Generación de oscilaciones en sistemas seccionalmente lineales

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de tesis

En esta memoria se presenta un análisis del comportamiento oscilatorio de sistemas seccionalmente lineales. Se consideran modelos que corresponden a sistemas de interés práctico y se les aplican herramientas analíticas para generar oscilaciones de diversa índole. El estudio y diseño de osciladores es de gran importancia para aplicaciones en la electrónica; sin embargo, la persistencia de oscilaciones requiere que se contemplen elementos no lineales para lograr oscilaciones sostenidas. Estos elementos, para este trabajo de investigación en particular, son las funciones que definen a los sistemas seccionalmente lineales (piecewise-linear systems en inglés). La primera herramienta teórica para el estudio de comportamientos oscilatorios es el método de Melnikov, empleado para la predicción de ocurrencia de órbitas caóticas. Se proponen y estudian un par de casos, para después ilustrar uno de ellos experimentalmente por medio de un circuito oscilador. El segundo método está basado en el concepto de pasividad para sistemas retroalimentados, considerando que se contemplan sistemas disipativos con interés práctico (circuitos y mecanismos). Se propone un modelo clásico de control como base para aplicar un procedimiento en donde se busca asegurar la propiedad de pasividad en el sistema, para después, mediante variaciones paramétricas, proporcionar una condición de semipasividad al lazo de control y generar un escenario oscilatorio. Los resultados del método son ilustrados numéricamente en un modelo normalizado del convertidor Buck y experimentalmente en un mecanismo torsional.

Palabras clave: oscilaciones, sistemas seccionalmente lineales, método de Melnikov, pasividad, semipasividad

Abstract of the thesis presented by Edwin Alejandro Villavicencio Jáuregui as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Sciences in Electronics and Telecomunications with orientation in instrumentation and control.

Generation of oscillations in piecewise-linear systems

Abstract approved by:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Thesis Director

In this report, an analysis of the oscillatory behavior of piecewise-linear systems is presented. Models of practical interest are considered, to which analytical techniques are applied to generate oscillations of various kinds. The research and design of oscillators is of great importance for applications of electronics. However, the persistence of oscillations requires that non-linear elements are taken into account to achieve sustained oscillations. These non-linear elements, for this research work in particular, are the functions that define the piecewise-linear systems. The first theoretical tool for the study of oscillatory behaviors, is Melnikov's method, a method used for the prediction of the occurrence of chaotic orbits. A couple of case studies are proposed and illustrated in an oscillator circuit. The second method is based on the concept of passivity for feedback systems, considering that dissipative systems are of as practical interest (circuits and mechanisms). A classic model of control is proposed as the basis for applying a procedure in which the passivity property is sought in the system, for later, through parametric variations, providing a semi-passivity condition to the control loop and generating an oscillatory scenario. The results of the method are illustrated numerically in a normalized model of the buck converter and experimentally in a torsional mechanism.

Keywords: Oscillations, piecewise-linear systems, Melnikov method, passivity, semi-passivity

Dedicatoria

A mis queridos padres, Emilio y Rosa, por ser los pilares de mi vida y ser un apoyo incondicional, estaré eternamente agradecido con ustedes. A mis amigos, hermanos y parientes, por su amistad y confianza.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por la confianza y oportunidad de cursar los estudios de maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Me gustaría patentar mi más grande agradecimiento al director de esta tesis, al Dr. Joaquín Álvarez, por brindarme la oportunidad de trabajar a su lado, estar siempre con la disposición de ayudarme y compartirme sus sabios consejos, que sin duda voy a recordarlos el resto de mi vida.

Al instructor y experimentalista Ricardo Nuñez, quien desde que tuve la dicha de conocerlo me ha dado seguimiento para brindarme la mejor preparación posible en mi estancia en el posgrado. El circuito oscilador que se presenta en la tesis fue una contribución suya y resultó fundamental para ilustrar las dinámicas que se perseguían. Lo considero una persona experta en el tema, le agradezco el compartir sus conocimientos y consejos.

Al doctor L. Alejandro Márquez por estar siempre dispuesto a ayudarme en mi formación, brindarme sus consejos y sus comentarios que enriquecieron al trabajo.

Al doctor Carlos Brizuela por brindarme el honor de formar parte de mi comité de tesis, siempre tuve en cuenta sus acertados comentarios de cada avance que contribuyeron a mi mejora profesional.

A los encargados de los laboratorios, René Torres de electrónica y Ricardo Cuesta de control. También a los profesores de cada materia que cursé, a todos mis compañeros; en especial a Jessica, Rene, Gerardo y Eduardo.

Tabla de contenido

Página

Tabla de contenido (continuación)

Lista de figuras

Figura Página

Lista de figuras (continuación)

Figura | Página

Lista de figuras (continuación)

Figura Página

Lista de figuras (continuación)

Figura Página

Nomeclatura

SSS Sistemas seccionalmente suave

SSL Sistema seccionalmente lineal

DC Direct current

KYP Kalman-Yabubovich-Popov

CNN Cellular neural networks

Capítulo 1. Introducción

El estudio de sistemas dinámicos ha brindado la capacidad de entender una inmensa cantidad de problemas, el cual es una herramienta sumamente poderosa. Además, existe un enfoque bien desarrollado de sistemas dinámicos que describen fenómenos físicos, por ejemplo, sistemas biológicos, dinámicas que experimentan fluidos, deformaciones elásticas y sistemas ópticos. Sin embargo, en muchas ocasiones dicho estudio excluye sistemas muy significativos que contienen términos que no son funciones suaves, los cuales se presentan en la práctica. Sistemas de este tipo se encuentran habitualmente en la mayoría de los problemas de ingeniería. Algunos ejemplos que pueden mencionarse son:

- Circuitos eléctricos con presencia de interruptores o relevadores.
- Dispositivos mecánicos que presentan algún arreglo de engranes o simplemente fricción.
- Sistemas de control digital.
- Modelos sociales y financieros.

Los casos mencionados se caracterizan por estar asociados a modelos que generalmente utilizan funciones seccionalmente suaves (piecewise-smooth), donde la suavidad es referida a cada sección. Sin embargo, la suavidad puede perderse por la presencia de eventos “instantáneos”, al considerar una escala de tiempo larga; el más claro ejemplo es el de accionar un interruptor de un circuito.

Estos sistemas presentan dinámicas fascinantes con una aplicación práctica importante y una estructura matemática bien definida. Comúnmente, son omitidas en la teoría de la dinámica de los sistemas normales porque estrictamente no se habla de la existencia de sistemas seccionalmente suaves y que en realidad todos los sistemas físicos son suaves en todas partes, pero esa conjetura puede resultar engañosa. Las escalas de tiempo en las que ocurren un impacto en un sistema mecánico o un interruptor de un circuito electrónico pueden ser notablemente pequeñas si se compara con la escala de tiempo de toda la dinámica; por lo tanto el modelo de manera global, se considera discontinuo en una escala de tiempo macroscópica por la presencia de un evento instantáneo.

Un ejemplo clásico de los sistemas seccionalmente suaves es el de un sistema doméstico de calefacción. Es bien sabido que el dispositivo intenta mantener la temperatura a un valor deseado θ. Si la temperatura deseada se excede, un termostato hace que la calefacción se apague para evitar seguir aumentando la temperatura; el sistema se mantiene apagado hasta que la temperatura cae por debajo de la temperatura deseada. En este punto las dinámicas del sistema cambian, ya que la calefacción se vuelve a encender y la evolución del sistema es gobernada por un conjunto diferente de reglas. Por lo tanto, si se observa el proceso de conmutación con una duración infinitesimalmente corto, en comparación con las fases de calentamiento y enfriamiento, podemos ver la dinámica de la temperatura $T(t)$ como una dinámica continua suave por partes, o por secciones: dos regímenes diferentes de dinámicas suaves que describen los estados apagado y encendido, con el cambio que ocurre cuando las dinámicas cruzan el límite $T(t) = \theta$, entre ellos. El comportamiento anterior puede conducir a que el sistema presente oscilaciones de diversa naturaleza, comportamiento que no necesariamente se presentaría si no existiera el elemento de conmutación (Bernardo *et al.* (2008)).

Por otra parte, los comportamientos oscilatorios en sistemas dinámicos son un fenómeno muy particular pero bastante común en la naturaleza de mecanismos físicos como el de un péndulo, las reacciones químicas como las de Belousov-Zhabotingsky, casos biológicos como la propagación eléctrica en el tejido cardíaco descrito por Wiener y Rosenblueth, la resonancia del sonido, etc. (F. Rosales, 2010)

A continuación se describe un ejemplo de sistemas osciladores seccionales, seguido de la motivación del estudio de dichos sistemas, de los objetivos que se plantean. Y finalmente, de la organización de la memoria de tesis.

1.1. Osciladores seccionales

Para analizar los osciladores con presencia de funciones seccionales se plantea un caso de estudio: sistemas de control por relevador. La idea de utilizar una acción de conmutación (o de relevador) ha sido extensamente empleada por la industria del control desde mediados del siglo XIX. En efecto, el control por relevador es la idea principal en el ejemplo mencionado anteriormente (el sistema doméstico de calefacción) y se puede observar en un gran número de aplicaciones, por ejemplo, servomecanismos, controladores de procesos industriales (Bennett S., 1993). Es decir, los sistemas con relevadores son una aplicación muy importante en la teoría de controladores de estructura variable. A pesar de que los sistemas con relevadores han sido estudiados por un período de tiempo largo, la dinámica de esos sistemas no está completamente entendida.

Es bien sabido que sistemas con relevadores tiene una tendencia oscilatoria si son usados en el punto de operación adecuado. Incluso hay métodos bien definidos para estimar la amplitud y la frecuencia de dichas oscilaciones. Por otra parte, también ha sido demostrado que hasta sistemas con reveladores de orden inferior pueden exhibir oscilaciones complejas (ya sea periódicas, cuasiperiódicas o caóticas), mientras incluyan segmentos de deslizamiento (Bernardo M. D., Johansson K. H. y Vasca F., 2001).

Considere un simple sistema lineal, invariante en el tiempo, con un control de tipo relevador retroalimentado. Dicho sistema puede ser escrito de la forma general:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= C^T x \\ u &= -sgn(y), \end{aligned} \tag{1}$$

donde la función $sgn(y)$ se define como

$$sgn(y) = \begin{cases} -1 & si\ y < 0, \\ 0 & si\ y = 0, \\ 1 & si\ y > 0. \end{cases} \tag{2}$$

El vector $x \in \mathbb{R}^n$ representa los estados del sistema, la salida $y \in \mathbb{R}$ es una medida escalar y la entrada de control $u \in \{-1, 1\}$ es una variable discreta. También, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $C^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ son matrices constantes. Además, las matrices del sistema están dadas en una forma canónica observable; i.e.

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T. \tag{3}$$

Se analiza el sistema con relevador para el caso particular de tres dimensiones, la Figura 1 muestra los resultados de la simulación numérica de las trayectorias. La solución de la Figura 1a es un atractor para todas las condiciones iniciales del sistema en los valores de los parámetros definidos. Este representa un ciclo límite simétrico. En capítulos posteriores se explicará como influye en la dinámica el conjunto de conmutación $\{y = 0\}$ (o superficie de conmutación).

Ahora la Figura 1b muestra el atractor del mismo sistema (1) bajo pequeñas modificaciones en los valores de los parámetros. Las curvas más “sombreadas” puede ser un indicativo para determinar que se trata de un atractor caótico. Esto significa que diferentes trayectorias pasan muy cercanas entre si, casi sobrepuestas. Este fenómeno no es transitorio; si la simulación numérica continúa, el atractor parecerá verse cada vez más relleno de trayectorias. Ese tipo de fenómenos con dinámicas enriquecidas u oscilaciones complejas, son los que se explican y analizan en la presente tesis.

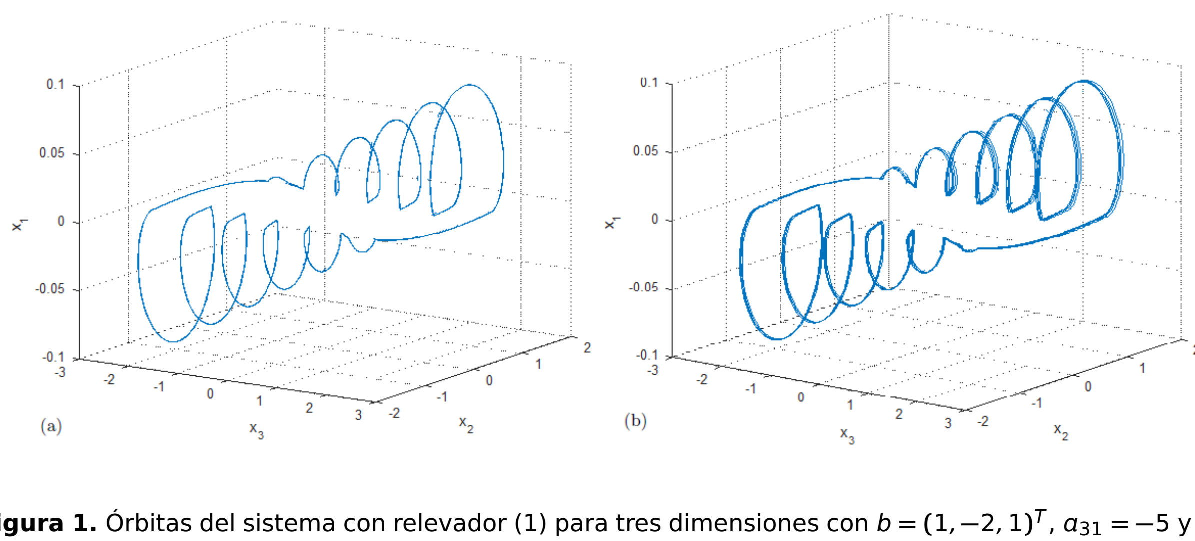


Figura 1. Órbitas del sistema con relevador (1) para tres dimensiones con $b = (1, -2, 1)^T$, $a_{31} = -5$ y (a) $a_{11} = 1.206$, $a_{11} = -99.9372$ y (b) $a_{11} = 1.35$ $a_{21} = -99.93$.

1.2. Motivación

El tema de los sistemas oscilatorios se ha estudiado y desarrollado desde hace algunos siglos. Desde el principio se analizaban sistemas que evolucionaban en el tiempo. Fenómenos sencillos pero significativos como el movimiento de un péndulo estudiado por Galileo en el siglo XVI, abrieron una brecha inmensa de conocimiento para encontrarle un sentido a los fenómenos físicos que se observaban. Sin embargo, a últimas fechas, un tema interesante para investigación ha sido contemplar funciones no lineales en el estudio de sistemas dinámicos. Algunas no linealidades empleadas dan lugar a los sistemas seccionalmente suaves, los cuales resultan bastante prácticos por el manejo de k sistemas que dominan solo en su sección correspondiente en el espacio de estados, donde cada sección puede describir características diferentes dependiendo el sistema que gobierne. Bajo esas propiedades es posible hacer diseños de osciladores o de controladores y tener beneficios en la construcción de circuitos. Una rama de la electrónica que claramente ha explotado este tipo de sistemas ha sido la electrónica de potencia, obteniendo beneficios como hacer dispositivos más pequeños y más eficientes energéticamente.

La electrónica se ha inmiscuido en la sociedad en gran medida desde su aparición. Las personas de hoy en día cuentan con dispositivos electrónicos que utilizan tanto en el trabajo como en la vida diaria, en ocasiones, aunque un usuario no utilice ningún dispositivo electrónico, al estar rodeado de una sociedad moderna que sí los emplea, lo afecta de manera directa. Una vez planteada la importancia de dicha área en la actualidad, se pueden establecer dos grandes aplicaciones de la electrónica de manera general. La primera, es la del procesamiento de señales en las que se encuentra contenida la información. Este uso es la base del funcionamiento de la mayoría de los dispositivos con los que se interactúa directamente. Y en segundo, pero no menos importante, es el de cambiar las características de la energía eléctrica. Desde la forma en que se entrega a los dispositivos hasta la forma en la que es requerida por la carga, básicamente es controlar la energía eléctrica para ser utilizada según sean los requerimientos. Por lo regular la energía que se procesa en el segundo uso es de mayor potencia, por lo que se refiere como electrónica de potencia (Cortés Rodríguez D., 2004). Dicha rama de la electrónica engloba a los convertidores de potencia, dispositivos que basan su funcionamiento en la conmutación casi instantánea de configuraciones lineales; es decir, emplean funciones seccionalmente lineales. La familia de convertidores DC-DC (e.g., Buck, Boost, Buck-Boost) son empleados en el 80 % de la electrónica de potencia actual; es por eso la importancia de estudiar sistemas que empleen funciones seccionales.

Es importante mencionar que en ocasiones hay fenómenos relativamente simples, pero que al ser considerados desde el punto de vista de sistemas seccionales, resultan ser límites naturales a escenarios mucho más complejos. Precisamente de esta característica especial de los sistemas seccionales deriva el objetivo general de la presente tesis, el cual es analizar el comportamiento de sistemas seccionales lineales al ser sometidos a condiciones en las que se exhiban oscilaciones irregulares.

1.3. Objetivo

El objetivo general de esta tesis es analizar el comportamiento dinámico de sistemas seccionalmente lineales al ser sometidos a perturbaciones o alguna ley de control, con la finalidad de obtener oscilaciones de diversa índole e ilustrarlas con resultados tanto en simulación como experimentales.

Los sistemas oscilatorios se dividen en de segundo y de tercer orden, para los cuales se utilizarán diferentes herramientas de estudio, como la teoría de Melnikov y el teorema de pasividad, respectivamente. Se analizarán las oscilaciones periódicas, cuasiperiódicas y los comportamientos caóticos, bajo variaciones de diversos parámetros y distintas funciones seccionales.

1.3.1. Objetivos particulares

- Analizar los comportamientos oscilatorios de sistemas seccionalmente lineales mediante las técnicas planteadas en la tesis.
- Presentar resultados numéricos de forma analítica y en simulación.
- Ilustrar resultados en dispositivos físicos, tanto en modelos de circuitos osciladores como en mecanismos.

1.4. Organización de la tesis

En el Capítulo 2, se presentan fundamentos teóricos, los cuales son esenciales para el desarrollo teórico a lo largo de la memoria de la tesis. El método de Melnikov es una herramienta analítica para establecer un criterio a partir del cual un sistema empieza a generar un oscilación caótica. Por otra parte, el concepto de pasividad se utiliza de una forma singular, creando un escenario propicio para que las oscilaciones irregulares se den en los sistemas a partir de un criterio paramétrico.

En el Capítulo 3, se muestran casos de sistemas seccionalmente lineales de segundo orden con naturaleza oscilatoria. Se hace un análisis de los sistemas tanto autónomos como también cuando se encuentran perturbados por alguna señal externa. El método que se utiliza en este capítulo es el de la teoría de Melnikov para sistemas perturbados. Se presentan las órbitas por simulación de los casos de estudio, para finalizar con un circuito oscilador que ilustra los resultados obtenidos en simulación.

En el Capítulo 4, se contemplan sistemas de tercer orden por lo que se emplea como herramienta analítica para estudiar dichos sistemas, el concepto de pasividad. Se establece un modelo clásico de control de manera general, para después ser el modelo base empleado para aplicar el método. Se utiliza el modelo normalizado del circuito Buck para ilustrar la generación de oscilaciones mediante el método, como también para un mecanismo torsional basado en una planta real existente en el laboratorio de Control del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones de CICESE.

Por último, el Capítulo 5 presenta las conclusiones de los resultados que se obtienen a lo largo de la memoria de la tesis y se comentan problemáticas que quedaron sin resolver, con posibilidad de trabajos a futuro.

La parte posterior al capítulo de conclusiones contiene la literatura consultada y los anexos.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

Para la presente tesis se hace uso de diversas herramientas matemáticas. En esta sección se definen conceptos teóricos que se utilizan a lo largo del trabajo. Primero se introducen los sistemas seccionalmente suaves, sus características, clasificación y estabilidad. La segunda sección describe el método de Melnikov para sistemas seccionalmente suaves, herramienta utilizada para proponer un criterio a partir del cual el sistema comienza a oscilar de manera irregular. Por último, la tercera sección describe el concepto de pasividad para sistemas retroalimentados, el cual es frecuentemente empleado como método de control para sistemas disipativos, como lo pueden llegar a ser aquellos que modelan circuitos o mecanismos. Se presentan propiedades que derivan del concepto de pasividad, en particular la propiedad de semipasividad, con la cual se pueden diseñar sistemas oscilatorios con dinámica acotada, comportamientos que son de interés en esta tesis.

2.1. Sistemas seccionalmente suaves

Un sistema seccionalmente suave (SSS) puede describirse por un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x} \;\; = \;\; f_i(x), \;\; x \in D_i \subset \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

donde x representa el estado del sistema; los conjuntos D_i, para $i = 1, 2, \ldots, k$, son regiones abiertas y disjuntas entre sí, separadas por superficies de dimensión $n-1$, conocidas como superficies de conmutación. Dicha superficie está formada por la intersección $\Sigma_{ij} := \bar{D}_i \cap \bar{D}_j$ incluyendo los límites de D_i y D_j, definidos por $\partial\, D_i$ y $\partial\, D_j$(Colombo , di Bernardo, Hogan y Jeffrey,2012). Cada campo vectorial $f_i(x,\mu)$ es suave tanto en el estado x, y definen un flujo suave (diferenciable) $\Phi_i(x,t)$ dentro del conjunto abierto $U \supset D_i$. En particular, cada flujo Φ_i es bien definido en ambos lados de la superficie de conmutación.

El grado de diferenciabilidad en un punto x_0 en una superficie de conmutación Σ_{ij} de un SSS es el orden más alto r tal que la expansión de las series de Taylor de $\Phi_i(x_0,t)$

y $\Phi_j(x_0,t)$ con respecto a t, evaluada en $t=0$, corresponda a los términos de $O(t^{r-1})$. Esto es, la primera derivada parcial distinta de cero con respecto a t de la diferencia $[\Phi_i(x_0,t)-\Phi_j(x_0,t)]_{t=0}$ es de orden r (Bernardo *et al.* (2008)).

Ahora considérese un SSS con una discontinuidad en Σ_{12} que puede ser escrito como

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), \; si\, x \in D_1 \\ f_2(x), \; si\, x \in D_2 \end{cases} , \tag{5}$$

donde f_1 genera una solución Φ_1, f_2 una solución Φ_2. Se tiene entonces

$$\left.\frac{\partial \Phi_i(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = f_i(x), \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi_i(x,t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = f_{i,x} f_i(x), \tag{7}$$

donde un segundo subíndice x significa una derivada parcial con respecto a x. Del mismo modo

$$\left.\frac{\partial^3 \Phi_i(x,t)}{\partial t^3}\right|_{t=0} = f_{i,xx} f_i^2(x) + f_{i,x}^2 f_i(x), \tag{8}$$

y así sucesivamente. Entonces, si f_1 y f_2 difieren en una m-ésima derivada parcial con respecto al estado x, se encontrará que los flujos Φ_1 y Φ_2 difieren en su $(m+1)$-ésima derivada parcial con respecto a t.

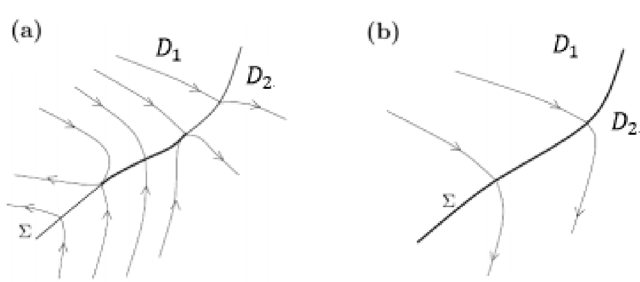


Figura 2. Bosquejo del espacio de estados de las dos clases de sistemas que se consideran.(a) Sistemas discontinuos seccionalmente suaves (Filippov). (b) Sistemas continuos seccionalmente suaves.

Por lo tanto, si $f_1 \neq f_2$ para un punto $x \in \Sigma_{12}$, entonces se tiene un grado de diferenciabilidad igual a uno ahí. Se dice que sistemas con grado uno son de tipo Filippov, la Figura 2a ilustra escenarios que podrían experimentar los sistemas Filippov. Este tipo de sistemas son los que modelan por ejemplo: controladores con relevadores, osciladores con fricción o convertidores DC-DC. Otra alternativa, se da si $f_1 = f_2$ pero hay una diferencia en la derivadas jacobianas $f_{1,x} \neq f_{2,x}$ en x, entonces se dice que el grado de diferenciabilidad es 2. Una diferencia en la segunda derivada $f_{1,x,x} \neq f_{2,x,x}$ da grado de diferenciabilidad 3, etc. Sistemas con grados de diferenciabilidad igual o superior a dos, se les puede llamar sistemas continuos seccionalmente suaves (ver Figura 2b). Estos tipos de sistemas modelan circuitos osciladores o amplificadores, ya que las no linealidades que se utilizan son linealizaciones por secciones. De esa manera se aproxima una no linealidad continua y es posible tener modelos más representativos de fenómenos complicados .

Una superficie de conmutación Σ_{ij} se dice que es uniformemente discontinua en algún dominio S si el grado de diferenciabilidad del sistema es el mismo para todos los puntos $x \in \Sigma_{ij} \cap S$. Se dice que la discontinuidad es uniforme con grado m si la m-ésima derivada parcial de $f_i - f_j$ evaluada en Σ_{ij} no es cero, se dice entonces que es de orden $m-1$. Además, el grado de diferenciabilidad es uno si $f_i(x) - f_j(x) \neq 0$ para $x \in \Sigma_{ij} \cap S$.

De hecho, la propuesta de discontinuidades uniformes impone una gran restricción en la forma que $f_i - f_j$ puede tomar. Por ejemplo, se considera un sistema continuo seccionalmente suave con una única superficie de conmutación Σ que puede ser escrita como el conjunto cero de una función suave H

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), H(x) > 0, \\ f_2(x), H(x) < 0, \end{cases} , \tag{9}$$

donde $f_1(x) = f_2(x)$ si $H(x) = 0$. Se supone que el flujo es uniformemente discontinuo con grado m tal como se definió anteriormente. Entonces, la región $H = 0$ se puede escribir como:

$$f_2(x) = f_1(x) + J(x)H(x)^{m-1}, \tag{10}$$

para alguna función diferenciable $J(x) \in \mathbb{R}^n$. Note que H puede ser localmente elegida como una de las coordenadas cercanas al límite de la superficie de conmutación y que un coeficiente diferente de cero de $H(x)^k$ en la expansión de las series de Taylor de $f_2 - f_1$, para $k < m-1$, significa que la k-ésima derivada de $f_2 - f_1$ no desaparece en Σ. Por lo tanto H^{m-1} debe ser un factor de $f_2 - f_1$.

2.1.1. Sistemas Filippov

El caso de sistemas con grado uniforme de diferenciabilidad debe ser tratado con especial detenimiento ya que brinda la posibilidad de un movimiento deslizante. Para definir deslizante es útil pensar en el sistema (9), con un límite discontinuo entre dos regiones definidas por el conjunto cero de una función suave $H(x) = 0$ (ver Figura 3).

La región de deslizamiento del conjunto discontinuo de un sistema de la forma (9) con grado uniforme de diferenciabilidad está dada por esa porción del límite de $H(x)$ para el cual

$$(H_x f_1) \cdot (H_x f_2) < 0. \tag{11}$$

Esto implica que $H_x f_1$ (el componente de f_1 normal a H) tiene signo opuesto a $H_x f_2$. Así, el límite es atractor (o repulsor) simultáneamente por ambos lados.

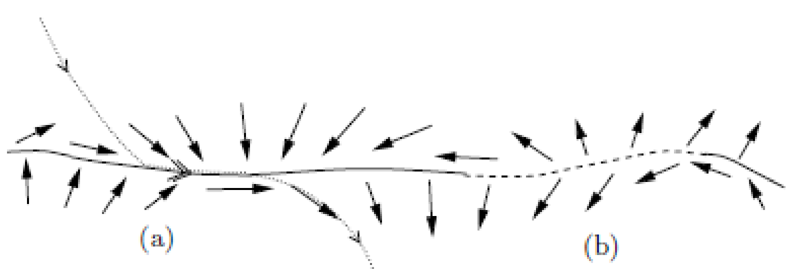


Figura 3. Sistema de Filippov (a) Región deslizante atractora; (b) Región deslizante repulsora. (Bernardo *et al.* (2008))

El caso de interés es cuando la región de deslizamiento es atractora, como se puede observar en la Figura 3a. El deslizamiento repulsor no puede ser alcanzado siguiendo el flujo del sistema hacia adelante en el tiempo, en cambio, el deslizamiento atractor puede alcanzarlo en un tiempo finito. Algo importante de mencionar con los movimientos de deslizamiento es que por ejemplo en la Figura 3 se observa una trayectoria en la que entran a la región de deslizamiento por diferentes puntos, pero salen por el mismo punto, lo que significa que pueden venir con diferentes condiciones iniciales en el pasado, pero evolucionar idénticamente en el futuro.

En la literatura hay dos enfoques para la formulación de las ecuaciones para los flujos deslizantes cuando se escriben de la forma general (9). Estos son: el método de control equivalente de Utkin (Utkin V. I.,2013) y el método convexo de Filippov (Filippov A. F., 2013). El método de Utkin supone que el sistema fluye acorde al vector de deslizamiento f_{12}, el cual es el promedio de los dos campos vectoriales f_1 (en la región D_1) y f_2 (en la región D_2) más un control $\beta(x) \in [-1, 1]$ en la dirección de la diferencia entre los campos vectoriales:

$$f_{12}(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} + \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2}\beta(x). \tag{12}$$

Específicamente el control equivalente se define

$$\beta(x) = -\frac{H_x(x)f_1 + H(x)f_2}{H_x(x)f_2 - H(x)f_1}. \tag{13}$$

En cambio, el método de Filippov toma una combinación simple convexa de los dos campos vectoriales

$$f_{12}(x) = (1-\alpha)f_1 + \alpha f_2 \tag{14}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$, donde

$$\alpha(x) = \frac{H_x f_1}{H_x(f_1 - f_2)}. \tag{15}$$

En ocasiones, sin perder la generalidad, se puede escribir

$$f_{ij} = f_d, \tag{16}$$

para representar el campo vectorial deslizante.

Ambos métodos se vuelven algebraicamente equivalentes con la expresión $\beta = 2\alpha - 1$ (Utkin V. I.,2013). Además, es sencillo demostrar en ambos casos que el campo vectorial f_d es ortogonal a la dirección del gradiente H_x y tangente a Σ. El método de Utkin tiene la interpretación que β es precisamente el control que es necesario para hacer que el flujo se oriente en dirección tangente a Σ, como lo indica la Figura 4a. Otra interpretación, la cual corresponde al método de Filippov, es que la combinación convexa de los campos vectoriales es necesaria para obtener que el campo vectorial resultante f_d tienda a Σ, dicha interpretación se ilustra en la Figura 4b. El último escenario se puede obtener separando un ϵ los límites de las regiones D_1 y D_2 dentro de un lazo de histéresis; ver Figura 4c. Esto es, una condición inicial en la región D_1 evoluciona bajo el flujo de f_1 hasta que atraviesa la pequeña distancia ϵ en D_2, entonces el sistema evoluciona bajo el flujo de f_2 hasta pasar otra vez Σ a una distancia ϵ del otro lado. Se considera a α proporcional al tiempo que permanece la trayectoria en la región D_1, en el límite $\epsilon \to 0$.

Retomando el caso de deslizamiento perfecto, si el control es $\beta(x) = -1$ el flujo solo es influenciado por f_1, el cual es por definición tangente a la superficie Σ en un punto dado; además, esto implica que $\alpha = 0$. De manera similar, para $\beta = 1$ $(\alpha = 1)$ el flujo solo lo gobierna f_2 tangente a Σ. En definición, esto se puede expresar como

$$\hat{\Sigma} := \{x \in \Sigma : \ -1 \leq \beta \leq 1\}, \tag{17}$$

y los límites de la región de deslizamiento como

$$\partial\hat{\Sigma}^{\pm} := \{x \in \Sigma : \ \beta = \pm 1\}, \tag{18}$$

con tangencia de un campo vectorial u otro ocurriendo en los dos tipos de límites.

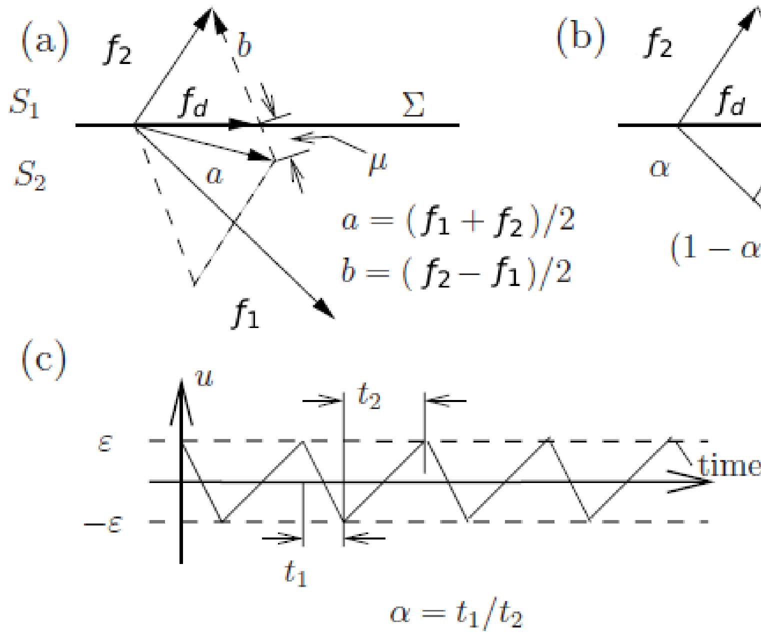


Figura 4. Las definiciones equivalentes del flujo deslizante, (a) método Utkin, (b) método de Filippov, (C) la variable u está en dirección H_x ortogonal a Σ (Bernardo *et al.* (2008)).

2.1.2. Estabilidad asintótica

Es en particular una tarea un tanto pesada proporcionar condiciones necesarias y suficientes que garanticen la estabilidad asintótica de un conjunto invariante de sistemas seccionalmente suaves si ese conjunto se extiende por el límite entre dos regiones D_i y D_j. Para esto se tratará con sistemas seccionalmente lineales (SSL), los cuales son utilizados a lo largo de la memoria de tesis por la simplicidad que implica manejar sistemas lineales. Sin embargo, no dejan de ser sistemas con características especiales.

Considere el SSL

$$\dot{x} = \begin{cases} A^{-}x, \ si\, C^{T}x \leq 0, \\ A^{+}x, \ si\, C^{T}x \geq 0 \end{cases} , \tag{19}$$

donde $A^{\pm} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n}$. Se supone que el campo vectorial general es continuo a través del hiperplano $\left\{x : C^{T}x = 0\right\}$, pero el grado de diferenciabilidad es uno uniformemente. Esto significa que

$$A^{-} - A^{+} = EC^{T}, \tag{20}$$

para algún $E \in \mathbb{R}^n$. En el caso plano, i.e., $n = 2$, una teoría que puede mostrar que el punto de equilibrio $x = 0$ de (19) es asintóticamente estable bajo ciertas condiciones estrictas, puede ser la propiedad de observabilidad usualmente empleada en la teoría de control.

Teorema 2.1 ***(Camlibel M. K., Heemels W. P. M. H. y Schumacher J. M., 2003)*** *Considere el sistema (19) con n = 2. Asumiendo que el par (C^T,A^-) es observable, entonces:*

1. *El origen es asintóticamente estable si y solo si*

   a) *Ni A^- ni A^+ tienen un valor propio con parte real positiva o cero, y*

   b) *si ambas matrices A^- y A^+ tienen valores propios con parte real positiva o cero, entonces $\sigma^-/\omega^- + \sigma^+/\omega^+ < 0$, donde $\sigma^\pm \pm i\omega^\pm(\omega^\pm > 0)$ son los valores propios de $A^\pm$.*

2. *El sistema (19) tiene una solución periódica si y solo si A^- y A^+ tienen valores propios no reales y $\sigma^-/\omega^- + \sigma^+/\omega^+ = 0$, donde $\sigma^\pm \pm i\omega^\pm(\omega^\pm > 0)$ son los valores propios de $A^\pm$. Además, si hay una solución periódica, entonces todas las otras soluciones son también periódicas. Además, cualquier solución periódica tiene período igual a $\pi/\omega^- + \pi/\omega^+$.*

En dimensiones superiores, el problema se vuelve considerablemente más difícil. Una situación aparentemente paradójica puede ocurrir en donde el origen de los sistemas individuales $\dot{x} = A^- x$ y $\dot{x} = A^+ x$ es asintóticamente estable, pero inestable para el sistema combinado (19).

Considérese como ejemplo el sistema (19) con

$$A^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1.28 & 0 & -1 \\ -0.624 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A^+ = \begin{pmatrix} -3.2 & -1 & 0 \\ 25.61 & 0 & -1 \\ -75.03 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

y

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Los valores propios de A^{-} son $-0.2 \pm i$ y -0.6, mientras que los valores propios de A^{+} son $-0.1 \pm 0.5i$ y -3. Ambos conjuntos están estrictamente en el semiplano izquierdo, lo que implica estabilidad al origen de cada sistema lineal de forma individual. Ahora los sistemas combinados (en forma SSL) tienen trayectorias que tienden a ∞; ver Figura 5.

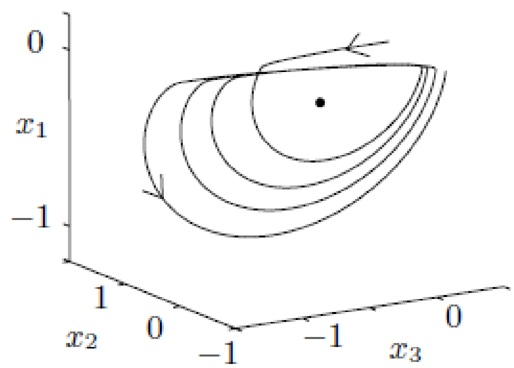


Figura 5. Trayectoria de SSL del sistema (19) con (21)-(22) (Carmona V., Freire E., Ponce E. y Torres F., 2004).

En esencia, esta paradoja se causa por la relación geométrica entre los valores propios de A^{-} y A^{+}. Claramente si los vectores propios de las dos matrices estuvieran perfectamente alineados, entonces la estabilidad de las matrices A^{-} y A^{+} sería suficiente para establecer estabilidad en el sistema seccionalmente lineal. De hecho, en casos especiales, es posible establecer condiciones para estabilizar sistemas de la forma (19) en tres dimensiones.

Teorema 2.2 ***(Carmona V., Freire E., Ponce E. y Torres F., 2004)*** *Considere el sistema (19) con $n = 3$. Se supone que el par (C^{T}, A^{-}) es observable. Supóngase que $A^{\pm}$ y C están dados de la siguiente forma*

$$A^{\pm} = \begin{pmatrix} t^{\pm} & -1 & 0 \\ m^{\pm} & 0 & -1 \\ d^{\pm} & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(llamada forma canónica observable), y que los valores propios de las matrices $A^{\pm}$ son $\lambda^{\pm} \in \mathbb{R}$ y $\sigma^{\pm} \pm i\omega^{\pm}$, donde $\omega^{\pm} > 0$. Supóngase también

$$(\sigma^{-} - \lambda^{-})(\sigma^{+} - \lambda^{+}) < 0 \text{ y } (t^{+} - t^{-})(\sigma^{+} - \lambda^{+}) \leq 0.$$

Entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable si, y sólo si, λ^{+} y λ^{-} son negativos.

En la literatura de teoría de control, una herramienta más general que ha sido propuesta para el análisis de estabilidad de sistemas seccionalmente suaves, es encontrar un función candidata de Lyapunov. Esto es, una función $V(x)$ que sea Lyapunov (definida positiva y decreciente a lo largo de las trayectorias) para uno de los campos vectoriales que definen las dinámicas del sistema en cada una de las regiones del espacio de estados. Sin embargo, encontrar en la práctica dichas funciones es un verdadero reto.

2.2. Método de Melnikov

Una vez definidas las características de los SSS, lo siguiente es definir métodos con los cuales se pueda tener escenarios oscilatorios. En esta sección se describe el método de Melnikov, el cual es empleado para determinar si un sistema presenta caos homoclínico.

Las condiciones necesarias para poder aplicar el método de Melnikov es que un sistema seccionalmente lineal, por ejemplo, debe poderse descomponer en un sistema hamiltoniano perturbado; además, que el sistema sin perturbaciones tenga un punto de equilibrio hiperbólico con una órbita homoclínica (ver Figura 6) que encierre a un conjunto de órbitas periódicas colocadas alrededor de un punto de equilibrio tipo centro. Para este ejemplo se puede decir que la órbita homoclínica separa en el espacio de estado una región de órbitas periódicas de otras órbitas inestables. Un detalle a considerar es que los sistemas en los cuales se puede demostrar la existencia de una órbita homoclínica son escasos.

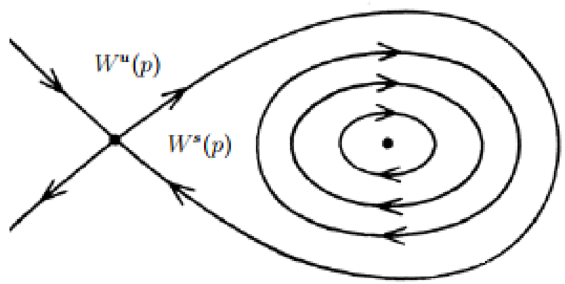


Figura 6. Representación de órbita homoclínica (Wiggins S., 2003).

La variedad estable, denotada por $W^s(p)$, Está asociada a un punto de equilibrio p es un subconjunto máximo del espacio de estado para el cual toda trayectoria que inicie en él tiende hacia el equilibrio conforme $t \to \infty$. La variedad inestable $W^u(p)$, al igual que la variedad estable, se asocia al punto p. Es el subconjunto máximo del espacio de estado en donde toda trayectoria que inicie en el tiende al equilibrio conforme $t \to -\infty$. El punto p donde las variedades estable e inestable se intersecan de manera transversal es llamado punto homoclínico transversal.

Una vez definido algunos conceptos en el ejemplo anterior, se describirá la teoría de Melnikov como una herramienta analítica utilizada para determinar las intersecciones transversales de las variedades estables e inestables de un punto homoclínico en un sistema sometido a pequeñas perturbaciones. La existencia de intersecciones transversales genera un mapeo de Poincaré equivalente al mapeo de Smale, el cual ya está demostrado que presenta una dinámica caótica (Wiggins,1990). Por lo tanto, es posible establecer condiciones suficientes para inducir al sistema una dinámica compleja una vez que se hayan determinado las intersecciones transversales de las variedades mencionadas.

Considere el sistema seccionalmente suave en el plano, con $k = 2$, periódicamente perturbado, de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g_1(x,t), \ si\, x \in D_1 \\ f_2(x) + \epsilon g_2(x,t), \ si\, x \in D_2 \end{cases} \tag{23}$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, las funciones g_i son periódicas en t, con periodo T. El espacio de estado $\mathbb{R}^2$ es dividido en dos secciones D_1 y D_2 por una superficie de conmutación Σ, los cuales se definen de la siguiente manera:

$$D_1 = x \in \mathbb{R}^2 : h(x) < 0 \tag{24}$$

$$D_2 = x \in \mathbb{R}^2 : h(x) > 0 \tag{25}$$

$$\Sigma = x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0 \tag{26}$$

La normal a la superficie de conmutación Σ está dada por $n = n(x) = \nabla(h(x)), x \in \Sigma$, donde la función h es seleccionada de tal manera que $n(x) \neq 0$.

La principal base del método de Melnikov/Smale es el siguiente teorema de Smale-Birkhoff de órbitas homoclínicas (Parker y Chua,1989).

Teorema 2.3 *Sea $P : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ un difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico $x*$. Si $W^s(x*)$ y $W^u(x*)$ se intersecan transversalmente en otro punto distinto a $x*$, entonces P actúa como un mapeo de Smale.*

El método de Melnikov aplica a sistemas que se puedan descomponer en un sistema hamiltoniano perturbado de la forma:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{x_2}(x_1, x_2) + \epsilon g_1(x_1, x_2, t, \epsilon) \tag{27}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{x_1}(x_1, x_2) + \epsilon g_2(x_1, x_2, t, \epsilon) \tag{28}$$

donde $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ y $(g_1, g_2)^T \in \mathbb{R}^2$. El sistema anterior puede ser descrito de manera vectorial:

$$\dot{x} = J \cdot DH(x) + \epsilon g(x,t) \tag{29}$$

con $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$, $DH = (\frac{\partial H}{x_1}, \frac{\partial H}{x_2})^T$, $g = (g_1, g_2)^T$ y $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Se debe considerar que el campo vectorial del sistema hamiltoniano tiene que ser suficientemente diferenciable y g debe ser periódica con respecto al tiempo t con un periodo $T = 2\pi/\omega$. Por lo tanto el sistema nominal cuando $\epsilon = 0$ es descrito por la siguiente expresión:

$$\dot{x} = J \cdot DH(x) \tag{30}$$

Si el sistema (23) es perturbado con una pequeña señal periódica $\epsilon g_1(x, t)$, la órbita homoclínica se destruye pudiendo dar lugar a intersecciones transversales. Una función que proporciona la información acerca de las modificaciones que puede sufrir la forma de la órbita es la llamada Integral de Melnikov, que se define de la siguiente manera:

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(x_h(t))g(t, x_h(t))dt \tag{31}$$

Dado que la integral de Melnikov proporciona la información sobre la modificación que sufre la órbita homoclínica ante una pequeña perturbación, dicha integral puede ser utilizada para mostrar la existencia de puntos homoclínicos transversales, por lo cual se enuncia el siguiente teorema sobre la teoría de Melnikov:

Teorema 2.4 *Considere el sistema perturbado* (23). *Si existe algún valor de θ, denotado por $\bar{\theta}$, tal que se cumple lo siguiente*

$$M(\bar{\theta}) = 0 \ \ y \ \ \left.\frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\bar{\theta}} \neq 0 \tag{32}$$

entonces, para un ϵ lo suficientemente pequeño, las variedades estable e inestable del sistema perturbado se intersecan una con otra de manera transversal y es posible la existencia de un conjunto invariante caótico. Más aún, si

$$M(\theta) \neq 0 \ \forall \theta, \tag{33}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$, entonces las dos variedades no se intersecan en ningún punto.

Gracias al teorema Smale-Birkhoff es posible predecir la existencia de un mapeo de Poincaré del sistema que sea equivalente al de Smale, por lo que es posible utilizar el teorema de Melnikov para comprobar si un sistema presenta comportamiento caótico.

2.3. Método de pasividad

Los sistemas pasivos son una clase de procesos que disipan cierto tipo de energía física o virtual, descritos por funciones de Lyapunov. La teoría de pasividad ha sido una de las piedras angulares del control no lineal desde hace casi 50 años (Willems,1972). Sin embargo, su aplicación en procesos de control ha aparecido más recientemente. Definido como una propiedad de entrada-salida de sistemas, el concepto de pasividad es particularmente útil en el análisis de estabilidad de sistemas interconectados. Por ejemplo, un sistema estrictamente pasivo retroalimentado negativamente con otro sistema pasivo es estable. Para un sistema dado, su “exceso” o “escasez” de pasividad puede ser compensado por el del otro sistema para mantener la estabilidad en el lazo cerrado. Esto es lo que motiva al diseño de control basado en pasividad.

2.3.1. Concepto de pasividad

Gran parte de los términos que se discuten en esta sección está relacionado con la estabilidad del sistema. Por lo tanto, se comienza con un breve repaso de la estabilidad de sistemas no lineales. Considere el siguiente sistema:

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{34}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ y $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ son las variables de estado y el vector de entrada, respectivamente. La estabilidad de este sistema está relacionada con sus trayectorias libres cuando la entrada es igual a cero ($u = 0$). Entonces se denota

$$f^*(x) = f(x,0), \tag{35}$$

donde el vector $f^*(x)$ de dimensión n, es localmente Lipschitz, i.e., $f^*(x)$ satisface la siguiente condición. Si $x_0 \in X$, entonces

$$\|f^*(x_1) - f^*(x_2\| \leq L\|x_1 - x_2\| \tag{36}$$

para todo x_1, x_2 en una vecindad de x_0, donde L es una constante positiva y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana (i.e., $\|x\| = \sqrt{x^T x}$). La condición de Lipschitz garantiza que

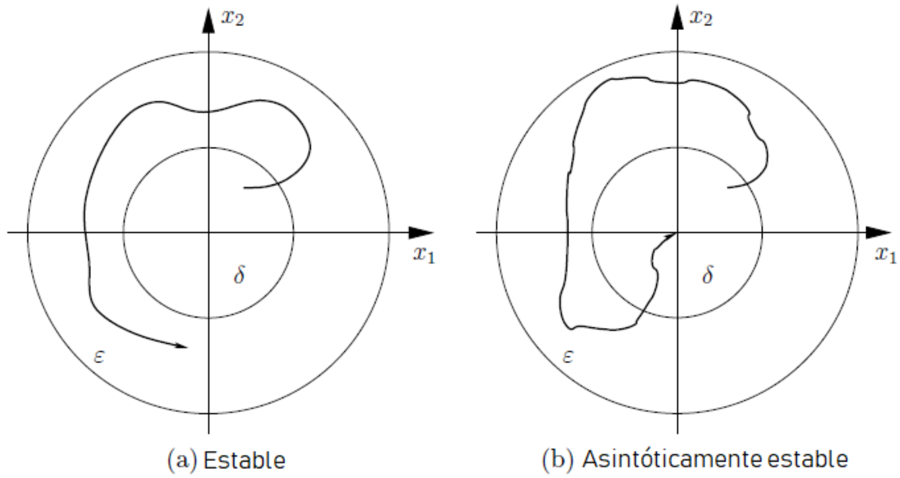


Figura 7. Estabilidad de Lyapunov.

$$\dot{x} = f^*(x) \tag{37}$$

tiene una única solución con la condición inicial $x(0) = x_0$. Un punto $x^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un punto de equilibrio de (37) si $f^*(x^*) = 0$. El punto de equilibrio $x = 0$ es estable si para cada ϵ existe, $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|x(0)| < \delta$ implica que $|x(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$ (como se muestra la Figura 7a para $X \subset \mathbb{R}^2$). Este punto de equilibrio se dice que es asintóticamente estable si es estable y se puede elegir δ tal que $|x(0)| < \delta$ implique que $x(t)$ se acerque al origen cuando t tiende al infinito (como se observa en la Figura 7)b. Cuando el origen es asintóticamente estable, la región de atracción es definida como el conjunto de valores iniciales $x(0)$ tal que la solución de (37) se aproxime al origen cuando t tiende a infinito. Si la región de atracción es todo el espacio de estado X, entonces el origen es global y asintóticamente estable. A diferencia de los sistemas lineales simples, un sistema no lineal (como son considerados los sistemas seccionalmente suaves de manera general) pueden tener múltiples puntos de equilibrio, de los cuales algunos son estables y otros inestables.

Una condición suficiente para la estabilidad de un punto de equilibrio está dada por el criterio de estabilidad de Lyapunov, el cual puede ser usado para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio sin necesidad de resolver la ecuación de estado. Sea

$V(x)$ una función escalar continuamente diferenciable (también denotada C^1) definida en X que contiene al origen. Una función $V(x)$ se dice que es definida positiva si

$$V(0) = 0 \ y \ V(x) > 0, \ \forall \, x \neq 0. \tag{38}$$

Se dice que es semidefinida positiva si

$$V(x) \geq 0, \ \forall \, x. \tag{39}$$

Similarmente, una función $V(x)$ se dice que es definida negativa si $V(x) = 0$ y $V(x) < 0$ para $x \neq 0$ y semidefinida negativa si $V(x) \leq 0$ para toda x.

Teorema 2.5 ***(Khalil, 1996)***.*Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de un sistema descrito por (37). La función f^* es Lipschitz localmente y X contiene al origen. El origen es estable si existe una función C^1 definida positiva, $V(x) : X \to \mathbb{R}^+$, tal que $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa y es asintóticamente estable si $\dot{V}(x)$ es definida negativa, donde $\dot{V}(x)$ es la derivada a lo largo de la trayectoria de (37), i.e.,*

$$\begin{gathered} \dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f^*(x), \\ \dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \in x_1, \\ \dot{V} = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

La función $V(x)$ del teorema anterior, si existe, se le llama función de Lyapunov.

El concepto original de sistemas pasivos surgió en el contexto de la teoría de circuito eléctricos (Popov,1973). Una conexión que considera solo componentes pasivos (e.g., inductores, resistencias y capacitores), no genera energía y por lo tanto es estable. A principios de 1970 se desarrolló un enfoque sistemático para el estudio de sistemas disipativos, incluyendo sistemas pasivos, introduciendo la notación de función de almacenamiento y tasa de suministro (Willems, 1972).

Considere el siguiente sistema no lineal:

$$H: \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u), \end{cases} , \tag{41}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ son las variables de estado, la entrada y la salida, respectivamente, y X, U y Y son los espacios de estados, entrada y salida, respectivamente. La representación $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u)$ es usada para denotar el estado en el tiempo t alcanzado por el estado inicial x_0 al tiempo t_0, aplicando una entrada u.

La tasa de suministro $\omega(t) = \omega(u(t), y(t))$ es un a función de valor real definida en $U \times Y$, tal que para cualquier $u(t) \in U$, $x_0 \in X$ y $y(t) = h(\phi(t, t_0, x_0, u))$, $\omega(t)$ satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} |\, \omega(t) \,|\, dt < \infty \tag{42}$$

para toda $t_1 \geq t_0 \geq 0$.

El sistema (41) con una tasa de suministro $\omega(t)$ se dice que es disipativo si existe una función real semidefinida positiva $S(x) : X \to \mathbb{R}^+$, llamada función de almacenamiento, tal que para toda $t_1 \geq t_0 \geq 0$, $x_0 \in X$ y $u \in U$,

$$S(x_1) - S(x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} \omega(t) dt, \tag{43}$$

donde $x_1 = \phi(t, t_0, x_0, u)$ y $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de números reales positivos.

Las condiciones anteriores indican que un sistema es disipativo si su incremento en energía (función de almacenamiento) durante el intervalo (t_0, t_1) no es mayor que la energía que se le suministra (tasa de suministro). Si la función de almacenamiento es diferenciable, i.e., es C^1, entonces (43) se puede escribir como

$$\dot{S} \leq \omega(t). \tag{44}$$

La interpretación es que la tasa de incremento de energía no es mayor que la potencia de entrada. Así que una función de almacenamiento tiene que ser semidefinida positiva, mientras que la tasa de suministro puede ser cualquier función definida en el espacio de entrada y salida que satisfaga (42).

Un sistema se dice que es pasivo si es disipativo con respecto a la siguiente tasa de suministro:

$$\omega(u(t), y(t)) = u^T(t)y(t), \tag{45}$$

y la función de almacenamiento $S(x)$ satisface $S(0) = 0$ (C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems,1991).

Dos casos extremos de sistemas pasivos son los sistemas sin pérdidas y los estrictamente pasivos.

Un sistema pasivo H con función de almacenamiento $S(x)$ se dice que es sin pérdidas si para toda $t_1 \leq t_0 \leq 0$, $x_0 \in X$ y $u \in U$,

$$S(x) - S(x_0) = \int_{t_0}^{t_1} y^T(t)u(t)dt. \tag{46}$$

Un sistema pasivo H con una función de almacenamiento $S(x)$ se dice que es estrictamente pasivo si existe un función definida positiva $V : X \to \mathbb{R}^+$ tal que para toda $t_1 \leq t_0 \leq 0$, $x_0 \in X$ y $u \in U$,

$$S(x) - S(x_0) = \int_{t_0}^{t_1} y^T(t)u(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} V(x(t))dt. \tag{47}$$

2.3.2. Estabilidad de sistemas pasivos

Se puede ver que el concepto de pasividad implica estabilidad si una función definida positiva es usada, porque la función de almacenamiento solo requiere ser semidefinida positiva por definición, pero estabilidad no siempre asegura pasividad. Por ejemplo, si un sistema tiene dos estados $x = [x_1, x_2]^T$ y la función de almacenamiento es semidefinida positiva (e.g., $S(x) = \frac{1}{2}x_1^2$), entonces la pasividad con esta función de almacenamiento no implica la estabilidad de x_2. En este caso, se requieren condiciones de observabilidad y detectabilidad del estado cero.

El sistema (41) es observable al estado cero si para cualquier $x \in X$,

$$y(t) = h(\phi(t, t_0, x, 0)) = 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0,\ implica\, x = 0, \tag{48}$$

y el sistema es localmente observable al estado cero si existe una vencidad X_n de 0, tal que para todo $x \in X_n$, (48) se mantenga. El sistema es detectable al estado cero si para cualquier $x \in X$,

$$y(t) = h(\phi(t, t_0, x, 0)) = 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0,\ implica\ \lim_{t\to\infty} \phi(t, t_0, x, 0) = 0, \tag{49}$$

y el sistema es localmente detectable al estado cero si existe una vencidad X_n de 0, tal que para todo $x \in X_n$, (49) se mantenga.

Con la definición de la detectabilidad al estado cero, la conexión entre la pasividad y la estabilidad de Lyapunov puede establecerse por el siguiente teorema:

Teorema 2.6 ***(R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic,2012)***. *Considere un sistema dado por (41), pasivo con una función C^1 de almacenamiento $S(x)$ y que $h(x,u)$ sea C^1 en u para toda $x \in X$. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

1. *Si $S(x)$ es definida positiva, entonces el equilibrio $x = 0$ de H con $u = 0$ es estable.*
2. *Si H es detectable en el estado cero, entonces el equilibrio $x = 0$ de H con $u = 0$ es estable.*
3. *Si además de la condición 1 o 2, $S(x)$ es radialmente acotado (i.e., $S(x) \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$), entonces el equilibrio $x = 0$ es globalmente estable.*

Se puede también encontrar que si el sistema H es estrictamente pasivo, con una función de almacenamiento definida positiva, entonces el equilibrio $x = 0$ con $u = 0$ es asintóticamente estable. Lo acotado de la función de almacenamiento implica que las variables de estado estén igualmente acotadas.

2.3.3. Lema de Kalman-Yacubovich-Popov

Considere un sistema de control (caso especial de (41)):

$$H: \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) + g(x)u \\ y = h(x), \end{cases} \quad , \tag{50}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, la entrada $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ y la salida $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$. Se dice que posee la propiedad Kalman-Yacubovitch-Popov (KYP) si existe una función C^1 positiva $S(x): X \to \mathbb{R}^+$, con $S(0) = 0$ tal que

$$L_f S(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x) \leq 0 \tag{51}$$

$$L_g S(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x) = h^T(x) \tag{52}$$

para cada $x \in X$ (C. I. Byrnes, A. Isidori, y J. C. Willems, 1991).

Un sistema H que cuenta con la propiedad KYP es pasivo, con una función de almacenamiento $S(x)$, y la inversa, un sistema pasivo que tiene una función C^1 de almacenamiento tiene la propiedad KYP.

Para el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, existe una función de almacenamiento $S(x) = x^T P x$ (con una matriz P definida positiva), el cual lleva a otra versión de la propiedad KYP.

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Dx \end{aligned} \quad . \tag{53}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}^m$. Este sistema es pasivo si y solo si existen las matrices $P, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con $P > 0$, $L > 0$, (definidas positivas) tal que

$$\begin{array}{c} A^T P + PA = -Q^T Q - L \\ B^T P - C = -W^T Q \\ W^T W = D + D^T. \end{array} . \tag{54}$$

Para sistemas con grado relativo 0 (i.e., $D \neq 0$), la condición anterior puede ser representada usando una matriz lineal desigual, lo cual regularmente es referido como el lema real positivo:

Un sistema lineal invariante en el tiempo estable (53) con $D \neq 0$ es pasivo si y solo si existe una matriz P definida positiva tal que:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D - D^T \end{bmatrix} < 0. \tag{55}$$

Donde, con $D = 0$, la condición anterior se reduce a

$$\begin{array}{c} A^T P + PA < 0, \\ B^T P = CQ \end{array} . \tag{56}$$

Las ecuaciones (55) y (56) son la versión lineal de (51) y (52), respectivamente.

2.3.4. Semipasividad

Se representa un sistema en general como:

$$\begin{array}{c} \dot{x} = f(x) + B(u) \\ y = Cx \end{array} , \tag{57}$$

donde el estado $x \in \mathbb{R}^n$, la entrada $u \in \mathbb{R}$ y la salida $y \in \mathbb{R}$. Además, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow$ es un campo vectorial C^1 suave y las matrices B y C son de las dimensiones apropiadas.

Entonces se define que el sistema (57) es llamado

i. pasivo en $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ si existe una función semidefinida positiva $S : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+, \mathcal{D}$ es abierto, conexo e invariante bajo la dinámica de (57), $S(0) = 0$, tal que la siguiente desigualdad disipativa

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x}(f(x) + Bu) \leq y^T u \tag{58}$$

se mantiene; si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ el sistema es llamado pasivo;

ii. semipasivo en $\mathcal{D}$ si existe una función semidefinida positiva $S : \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $\mathcal{D}$ es abierto, conexo e invariante bajo (57), $V(0) = 0$, tal que

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x}(f(x) + Bu) \leq y^T u - H(x), \tag{59}$$

donde la función $H : \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es positiva fuera de la bola $\mathcal{B}$ con radio ρ

$$\exists \rho > 0, \|x\| \geq \rho \Rightarrow H(x) \geq \varrho(\|x\|), \tag{60}$$

con alguna función continua semidefinida positiva $\varrho(\cdot)$ definida para toda $\|x\| \geq \rho$; si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ el sistema se dice que es semipasivo.

iii. estrictamente semipasivo (en $\mathcal{D}$) si la función $H(\cdot)$ es positiva fuera de la bola $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$.

Un sistema semipasivo se comporta similar a un sistema pasivo para $\|x\|$ suficientemente grande. Por lo tanto un sistema semipasivo que está conectado por una retroalimentación $u = \varphi(y)$ satisfaciendo $y^T\varphi(y) \leq 0$ tiene soluciones finalmente acotadas, lo cual permite tener un escenario oscilatorio independientemente de cuáles condiciones iniciales fueron elegidas, cada solución en lazo cerrado del sistema entra a un conjunto compacto en un tiempo finito y se queda ahí, ver Figura 8. Es decir, este conjunto compacto no depende de la elección de condiciones iniciales (Steur-Tyukin-Nijmeijer,2009).

Una ley fundamental establece que la conexión en retroalimentación de dos sistemas pasivos da como resultado un sistema pasivo, teorema utilizado en diversos trabajos de diseño de controladores basados en pasividad (Khalil, 1996). Ahora considérese la conexión de un sistema pasivo Σ_1 con el sistema semipasivo Σ_2 (ver Figura

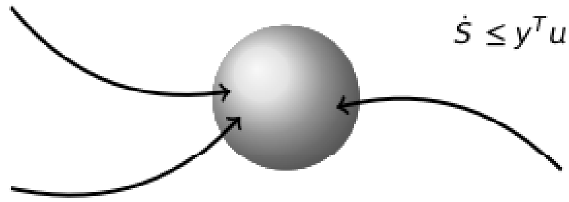


Figura 8. Semipasividad; cada solución entra en la bola $\|x\| \leq \rho$ en tiempo finito y se quedan ahí a medida que aumenta el tiempo.

9). Esto es, si Σ_1 tiene la entrada u_1 y la salida y_1, y es pasivo, entonces hay una función de almacenamiento S_1 y una función $H_1 \geq 0$ tal que

$$y_1^T u_1 \geq \dot{S}_1 + H_1(x_1) \tag{61}$$

y si Σ_2 es semipasivo, su entrada u_2 y su salida y_2, entonces hay una función de almacenamiento S_2 y una función H_2, semidefinidas positivas para $x \leq \rho$, tal que

$$y_2^T u_2 \geq \dot{S}_2 + H_2(x_2). \tag{62}$$

Si Σ_1 es retroalimentado por Σ_2, u es la entrada para el sistema conectado, y y la salida, entonces $u = u_1 - y_2$ y $y = y_1 = u_2$. Por lo tanto

$$y^T u \geq \dot{S}_1 + H_1(x_1) + \dot{S}_2 + H_2(x_2) = \dot{S} + H(x) \tag{63}$$

donde $x = (x_1, x_2)$, $S = S_1 + S_2$, $H(x) = H_1(x_1) + H_2(x_2)$, y $H(x) \leq 0$ para $\|x\| \geq \delta$ para algun $0 < \delta < \rho$.

En resumen, una conexión en retroalimentación de un sistema pasivo con un sistema semipasivo es un sistema semipasivo en general (Khalil,1996).

2.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se ha introducido los fundamentos teóricos necesarios para definir conceptos que se manejan en los siguientes capítulos de esta memoria de tesis. Pri-

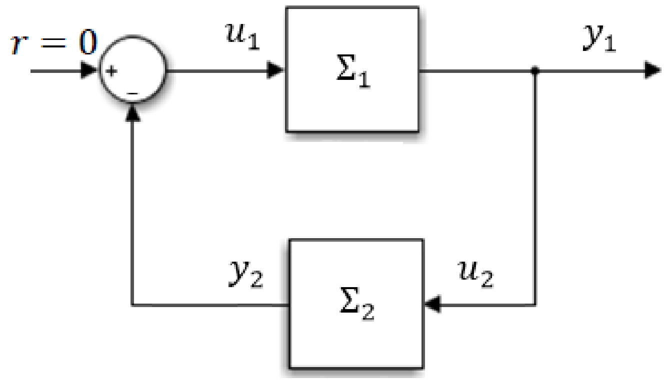


Figura 9. Conexión de retroalimentación de sistema semipasivo Σ_1 y Σ_2 .

mero se definieron los sistemas seccionales, ya que son la base de la cual se realiza la investigación. Posteriormente se definen dos métodos diferentes que serán utilizados para generar las oscilaciones en los sistemas seccionales. Por una parte, el método de Melnikov para sistemas perturbados de segundo orden. Para sistemas de orden superior es necesario el uso de otra herramienta analítica, por eso se propone el método de pasividad, el cual con base en una de sus propiedades y teoremas fundamentales de sistemas retroalimentados, se emplea para generar oscilaciones.

Capítulo 3. Oscilaciones de sistemas seccionalmente lineales de segundo orden

En capítulos anteriores se describieron las principales características de los sistemas seccionales lineales y herramientas analíticas para el diseño de oscilaciones en dichos sistemas, el objetivo de este capítulo es mostrar que un sistema de este tipo puede presentar una dinámica compleja bajo ciertas condiciones. Se sabe que los sistemas lineales por secciones pueden describir dinámicas de sistemas continuos no lineales, como en el caso de las conexiones globales o las órbitas homoclínicas o heteroclínicas; estas son fundamentales para poder generar las dinámicas complejas. En este capítulo, se mostrará que existe una técnica para lograr que sistemas lineales presenten comportamientos complejos, dicha técnica consiste en: “construir” una órbita homoclínica concatenando la sección de la variedad inestable de un equilibrio silla, de un sistema lineal, con una órbita periódica de otro sistema lineal y la variedad estable del primer sistema (64). El sistema que se presenta cumple con las características mencionadas y un escenario propicio para el comportamiento caótico con una adecuada elección en los valores de los parámetros. Cabe mencionar que si se tiene más de dos estructuras en el concatenamiento de órbitas se hace más fácil la visualización de comportamiento caótico.

El presente capítulo se desglosa de la siguiente manera: primero se va a presentar un par de sistemas autónomos seccionalmente lineales, sus puntos de equilibrio, la estabilidad de los mismos y el cálculo analítico de la órbita homoclínica. Después los sistemas se perturban y se utiliza la teoría de Melnikov descrita en el capítulo anterior para obtener los parámetros necesarios para que el sistema se encuentre en una región propicia para el comportamiento caótico. Al final del capítulo se comparan los resultados analíticos en experimentos provenientes de la construcción de un circuito electrónico.

3.1. Análisis de sistema con dos secciones

Un caso en donde los sistemas seccionalmente lineales presentan dos secciones se representa en (5). Se trata de un caso bien establecido en donde se analiza el sistema seccionalmente lineal con la finalidad de mostrar las oscilaciones que puede presentar al ser perturbado. Los sistemas de dos secciones se pueden ver representados en el comportamiento de un relevador eléctrico o un sistema de calefacción, en donde se tienen dos dinámicas distintas y existe una condición que hace que el sistema conmute de una dinámica a otra. Para este caso de interés se tiene un sistema que conmuta de un oscilador lineal estable, a un oscilador lineal inestable.

3.1.1. Sistema autónomo

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -|x_1| + 1 \end{aligned} . \tag{64}$$

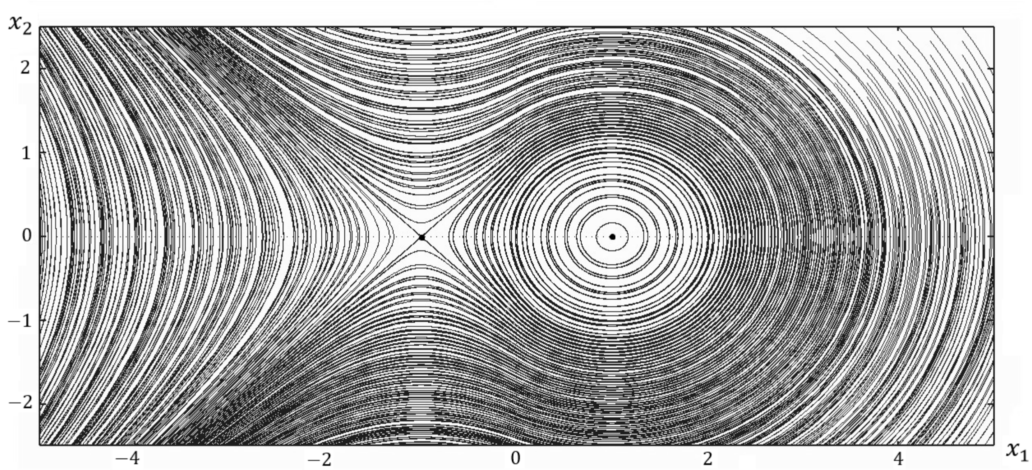


Figura 10. Retrato de fase de sistema (64), simulación con diversas condiciones iniciales en programa Xming. Representa gran parte de la dinámica significativa del sistema.

El sistema (64) es autónomo, pues no cuenta con ningún tipo de perturbación. La dinámica natural del sistema se muestra en la Figura 10; el caso perturbado se presenta posteriormente.

Se reescribe el sistema (64) de la forma seccional como se presenta en (5):

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), \text{ si } x \in D_1 \\ f_2(x), \text{ si } x \in D_2 \end{cases} , \tag{65}$$

donde $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$ y $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 1 \end{pmatrix}$;

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}, D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}.$$

Estas regiones están separadas por la superficie de conmutación:

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}.$$

Es importante mencionar que el sistema (65) es hamiltoniano, y su función hamiltoniana está definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_D(x) = \frac{x_2^2}{2} + V(x_1), \tag{66}$$

donde

$$V(x_1) = x_1 \left(\frac{1}{2} |x_1| - 1 \right), \tag{67}$$

o bien

$$V(x_1) = \begin{cases} \frac{-x_1^2}{2} - x_1, \text{ si } x_1 < 0 \\ \frac{x_1^2}{2} - x_1, \text{ si } x_1 > 0 \end{cases} .$$

Eso significa que el sistema cumple con las condiciones de Melnikov para sistemas no suaves (Castro,2014). Dichas condiciones también están ligadas a los puntos de equilibrio, por lo cual se procede a determinarlos.

3.1.1.1. Puntos de equilibrio

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema (65) es necesario resolver $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2$ en sus respectivos dominios. Para el dominio definido como D_1, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{68}$$

Mientras que para el dominio D_2 se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1+1 \end{pmatrix} = 0. \tag{69}$$

Es decir, existe un punto de equilibrio en la región D_1 dado por $(-1,0)$, en cambio, la región D_2 contiene el punto de equilibro $(1,0)$.

3.1.1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

El cálculo de los valores propios del sistema (64) da como resultado que para el caso cuando $x_1 < 0$ se tengan valores propios en ± 1, mientras que para $x_1 > 0$ los valores propios sean $\pm i$. En la Figura 10 se pueden observar los dos puntos de equilibrio que contiene el sistema. El punto (-1,0) de tipo silla, mientras que el punto (1,0) ubicado en la otra región, es de tipo centro. Del hamiltoniano (66) se tiene que el punto tipo silla en (-1,0) tiene asociada una órbita homoclínica. La órbita se ubica del lado derecho del punto silla y está representada por la siguiente ecuación:

$$\kappa(t) = \begin{cases} \left(e^t - 1, e^t\right), \; si \; -\infty < t \leq 0 \\ (sen(t) - cos(t) + 1, sen(t) + cos(t)), \; si \; 0 < t \leq \frac{3\pi}{2} \\ \left(e^{-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)} - 1, -e^{-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)}\right), \; si \; \frac{3\pi}{2} < t < \infty \end{cases} . \tag{70}$$

En la Figura 11 se muestra la órbita homoclínica del sistema autónomo (64).

3.1.2. Sistema perturbado

Considere que el sistema (64) es sometido a una perturbación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -|x_1| + 1 + \tilde{\delta} x_2 + \tilde{\alpha}\, sen\,(\omega t) \end{aligned} . \tag{71}$$

Se tiene entonces una forma propicia para aplicar la teoría de Melnikov para sistemas dinámicos perturbados, con el propósito de encontrar algún criterio paramétrico

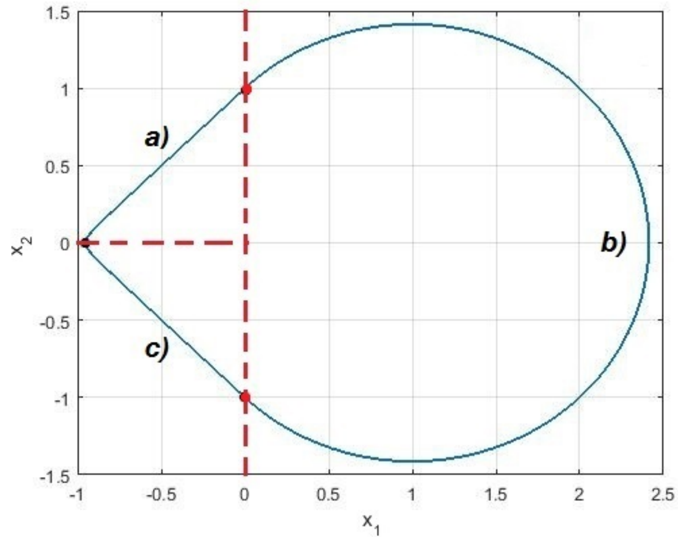


Figura 11. Órbita homoclínica de sistema autónomo (65), con los intervalos a) $-\infty < t \leq 0$ b) $0 < t \leq \frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{2} < t < \infty$.

que fuerce al sistema a un comportamiento caótico. Los parámetros $\tilde{\delta}$ y $\tilde{\alpha}$ deben ser suficientemente pequeños para que sea posible aplicar el método de Melnikov (Castro,2014). Se reescribe entonces el sistema (71) de la forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) + \ g(x,t), \text{si}\, x \in D_1 \\ f_2(x) + \ g(x,t), \text{si}\, x \in D_2 \end{cases}, \tag{72}$$

donde $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$, $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 1 \end{pmatrix}$ y $g(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\delta} x_2 + \tilde{\alpha}\, sen\,(\omega t) \end{pmatrix}$.

3.1.2.1. Función de Melnikov

Se tiene que el sistema autónomo (65) contiene una órbita homoclínica. Se procede a obtener una función de Melnikov para la órbita. Esto implica que se determinará una función de Melnikov $M_1(\theta)$ para la órbita $\kappa(t)$ definida en (70). Entonces, tomando en cuenta al sistema perturbado (72) la función de Melnikov $M_1(\theta)$ se define como:

$$M_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_2(t)\,[\delta \kappa_2(t) + sen(\omega(t+\theta))]\, dt. \tag{73}$$

Al sustituir la componente de la órbita $\kappa(t)$ descrita en la ecuación (70), resolver la integral de Melnikov y simplificar, se tiene como resultado:

$$M_1(\theta) = -\frac{\delta 3\pi + 4}{2} + \frac{2\alpha}{\omega^4 - 1}\left(cos\frac{3\pi\omega}{2} - \omega sen\frac{3\pi\omega}{2} - 1\right)sen(\omega\theta) \tag{74}$$

$$+ \frac{2\alpha}{\omega^4 - 1}\left(\omega cos\frac{3\pi\omega}{2} + sen\frac{3\pi\omega}{2} + \omega\right)cos(\omega\theta).$$

Para tener ceros simples en $M_1(\theta)$ se debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{2}(2\alpha)}{\delta(3\pi/2 + 2)(\omega^4 - 1)}\sqrt{1 + \omega^2 + (\omega - 1)cos\frac{3\pi}{2} + 2\omega sen\frac{3\pi}{2}} > 1. \tag{75}$$

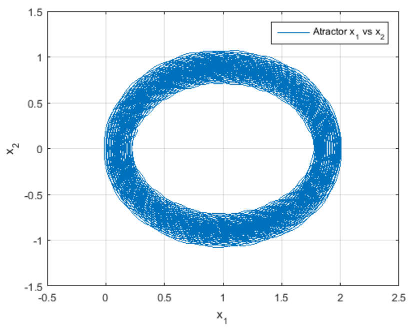
Por lo tanto, se tiene la condición de Melnikov para el sistema perturbado (72) si se satisface la desigualdad (75). Mientras los parámetros cumplan la desigualdad el sistema estará en condiciones de presentar un comportamiento caótico.

3.1.3. Simulación de sistema oscilatorio

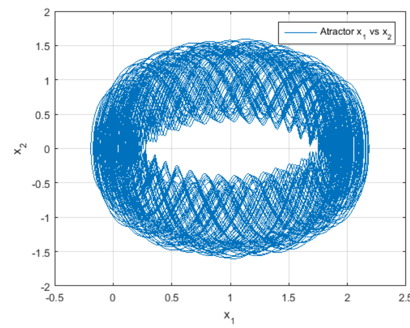
Para ilustrar las dinámicas que presenta el sistema de dos secciones (71) se procede a generar las oscilaciones que se presentan al variar algún parámetro de la señal de perturbación que se está introduciendo al sistema seccionalente lineal. Los parámetros que se varían son la amplitud α y la frecuencia ω. Para un análisis adecuado se pretende fijar parámetros e ir variando en amplitud o en frecuencia.

3.1.3.1. Variación en amplitud

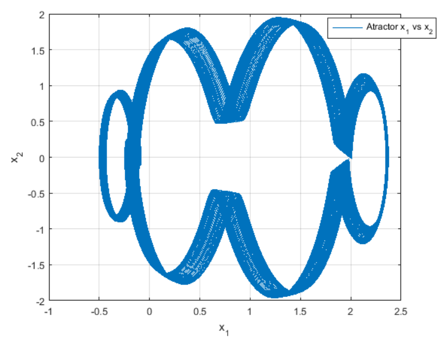
Las órbitas que se obtienen al hacer las simulaciones del sistema están ilustradas en la Figura 12. La Figura 12a exhibe un comportamiento oscilatorio bastante regular con disipación, este es un caso en el que no se cumple la condición de Melnikov (75) para este sistema. En cambio, la Figura 12b es un caso en donde se cumple con dichas condiciones y se puede observar un comportamiento bastante irregular de la oscilación; según la teoría de Melnikov en esta oscilación se podría tener la presencia de caos. Por último, la Figura 12c representa la forma de órbita cuasiperiódica, con oscilaciones sostenidas de una forma determinada.



(a)



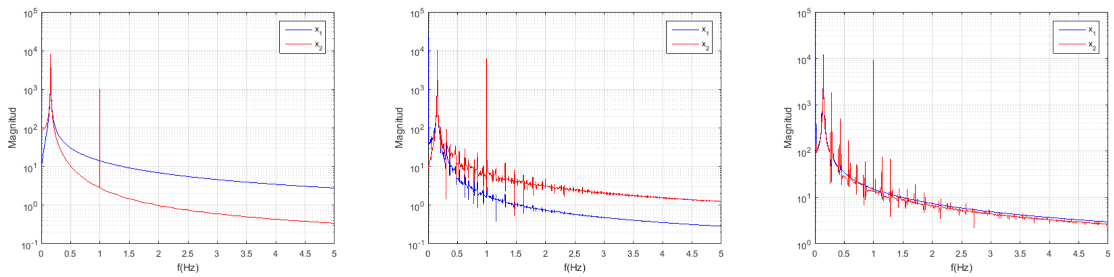
(b)



(c)

Figura 12. Retratos de fase x_1, x_2 simulados con los parámetros $\epsilon = 1$, $\delta = 0.001$ y $\omega = 2\pi$. El parámetro a variar es α del sistema de dos secciones perturbado (71). a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = 3$ y c) $\alpha = 4.5$.

Se considera muy pertinente el análisis en frecuencia de las oscilaciones pues los espectros pueden dar más información de como se está comportando la oscilación. Para el caso de variación en amplitud del sistema de dos secciones, la Figura 13a muestra que una variación pequeña en amplitud genera una oscilación regular. Al entrar a la zona paramétrica calculada con Melnikov, el espectro de la Figura 13b tiene un mayor número de frecuencias que intervienen en la oscilación. Por último, el espectro 13c tiene frecuencias dominantes bien definidas, lo cual le da la forma característica mostrada en su retrato de fase. Las tres órbitas tienen en común que se tratan de órbitas cuasiperiódicas.



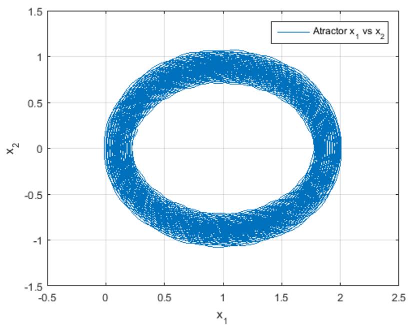
(a) (b) (c)

Figura 13. Espectros de frecuencia de las variables x_1 y x_2 al variar α del sistema dos secciones perturbado (71). Considerando: a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = 3$ y c) $\alpha = 4.5$

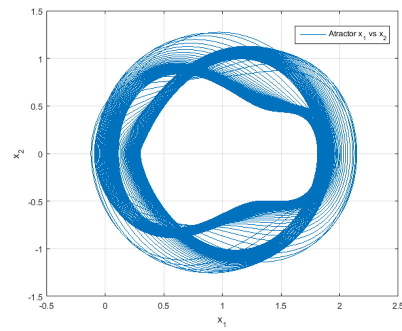
3.1.3.2. Variación en frecuencia

La Figura 14 muestra las órbitas generadas por el sistema al ser modificado en su parámetro de frecuencia ω. En 14a se observa exactamente la misma combinación de parámetros que en el caso de 12a, se trata del caso en el que no se cumplen las condiciones de Melnikov. La Figura 14b ya exhibe una oscilación más complicada, una forma que no se observa al variar amplitud. La tercer órbita 14c, al igual que 14b, cumplen con la condición de Melnikov para comportamiento complejo. Ambas órbitas, por la dinámica que se observa, son cuasiperiódicas, tienen un transitorio bastante irregular pero converge a una forma especifica de órbita y permanece oscilando.

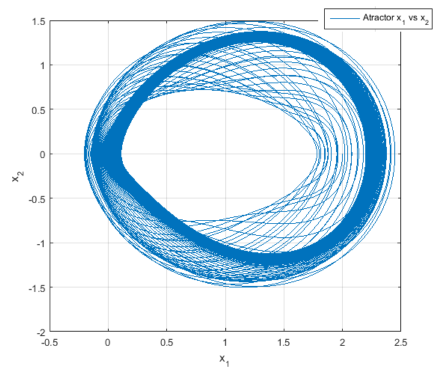
Los espectros de la Figura 15 demuestran lo anteriormente mencionado, al entrar en la región paramétrica en la que se cumple la desigualdad calculada mediante Melnikov se tienen oscilaciones más irregulares, donde intervienen un número mayor de frecuencias, lo que significa que las órbitas exhiben dinámicas más complejas.



(a)

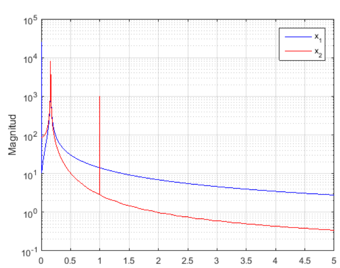


(b)

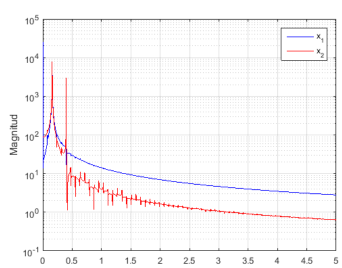


(c)

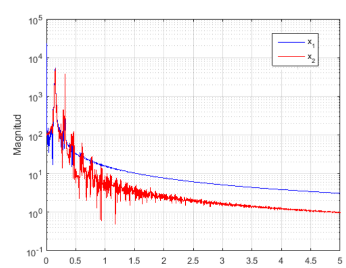
Figura 14. Retratos de fase x_1, x_2 simulados con los parámetros $\epsilon = 1$, $\delta = 0.001$ y $\alpha = 0.5$. El parámetro a variar es ω del sistema dos secciones perturbado (71). Considerando: a) $\omega = 2\pi$, b) $\omega = 2.5$ y c) $\omega = 2$



(a)



(b)



(c)

Figura 15. Espectros de frecuencia de las variables x_1 y x_2 al variar ω del sistema dos secciones perturbado (71). Considerando: a) $\omega = 2\pi$, b) $\omega = 2.5$ y c) $\omega = 2$

3.2. Análisis de un sistema de tres secciones

El siguiente caso de sistemas seccionalmente lineales analizado en esta tesis, es una variación del caso anterior. En esta sección se analiza un caso en donde se tienen tres secciones en el sistema, es decir, tres dinámicas distintas bajo dos condiciones de conmutación. La estructura es similar a (64) pues están basados en estructuras que presentan sistemas físicos significativos. Se analiza el sistema de forma similar como se hizo para el caso de dos secciones.

3.2.1. Sistema autónomo

Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= |x_1+1| - |x_1-1| - x_1 \end{aligned} . \tag{76}$$

Se tiene un sistema de segundo orden que presenta una no linealidad de dos valores absolutos. En el sistema anterior (64) se presentaba solo un valor absoluto, lo cual definía solo dos regiones de análisis. La dinámica que presenta el sistema (76) se puede observar en la Figura 16 (c.f., la figura 10).

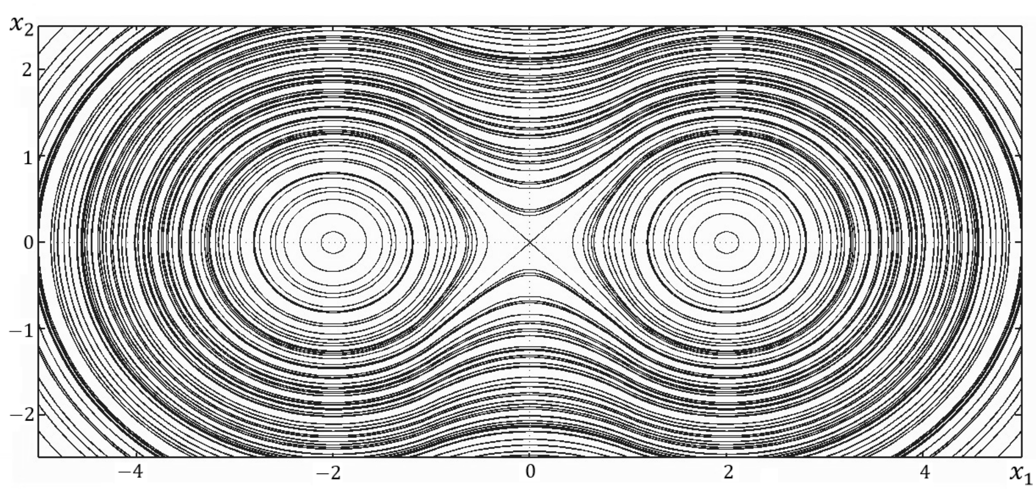


Figura 16. Retrato de fase de sistema (76), simulación con diversas condiciones iniciales en programa Xming. Representa gran parte de la dinámica significativa del sistema.

Se reescribe el sistema (76) de manera que se muestran las tres regiones en las que el sistema está dividido:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), \, \text{si}\, x \in D_1 \\ f_2(x), \, \text{si}\, x \in D_2 \\ f_3(x), \, \text{si}\, x \in D_3 \end{cases}, \tag{77}$$

donde: $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2 \end{pmatrix}$, $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ y $f_3(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 2 \end{pmatrix}$.

Se definen tres secciones o regiones del sistema como:

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x_1 < -1\},$$

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1\},$$

$$D_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 < \infty\},$$

las regiones están separadas por las superficies:

$$\Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 1 = 0\},$$

$$\Sigma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 1 = 0\}.$$

El sistema (77) es un sistema hamiltoniano y la función hamiltoniana se describe de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_D(x) = \frac{x_2^2}{2} + V(x_1), \tag{78}$$

dónde:

$$V(x_1) = \begin{cases} \frac{-x_1^2}{2} - 2x_1, \, \text{si} -\infty < x_1 < -1 \\ \frac{x_1^2}{2}, \, \text{si} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ \frac{-x_1^2}{2} + 2x_1, \, \text{si}\, 1 < x_1 < \infty \end{cases}.$$

El sistema cumple con las condiciones de Melnikov para sistemas no suaves (Castro,2014). Se procede entonces a determinar los puntos de equilibrio.

3.2.1.1. Puntos de equilibrio

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema (77) es necesario resolver $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, 3$ en sus respectivos dominios. Para el dominio definido como D_1, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2 \end{pmatrix} = 0. \tag{79}$$

Mientras que para el dominio D_2 se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0. \tag{80}$$

El dominio D_3 presenta:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 2 \end{pmatrix} = 0. \tag{81}$$

Por lo tanto, se tiene un punto de equilibrio en la región D_1 dado por $(-2, 0)$, otro en la región D_2 ubicado en el origen, y por último, en la región D_3 hay un uno más en $(2, 0)$.

3.2.1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Los tres puntos de equilibrio se pueden observar en la Figura 16, la cual representa el retrato de fase del sistema. El punto ubicado en (-2,0) y el otro en (2,0) son puntos de equilibrio tipo centro, los dos con valores propios de $\pm i$. El punto que existe en el origen (0,0) con valores propios en ± 1, es el que tiene asociado dos órbitas homoclínicas, una de su lado izquierdo y otra simétrica al lado derecho. Como se está tratando un sistema similar al primer caso en donde había dos secciones, el análisis es prácticamente el mismo; incluso, se trata de la misma forma de la órbita homoclínica. La diferencia radica en que el punto silla se encuentra desplazado al origen y con dos centros a los costados genera las dos órbitas idénticas. La solución para la órbita asociada al punto de equilibrio en el origen por el lado izquierdo es:

$$\kappa_a(t) = \begin{cases} \left(-e^{-t}, e^{-t}\right), \; si \; -\infty < t \leq 0 \\ (cos(t) - sen(t) - 2, sen(t) + cos(t)), \; si \; 0 < t \leq \frac{3\pi}{2} \\ \left(-e^{\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)}, -e^{\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)}\right), \; si \; \frac{3\pi}{2} < t < \infty \end{cases} . \tag{82}$$

Con expresiones muy similares, las siguientes ecuaciones describen a la órbita asociada al punto de equilibrio por la derecha.

$$\kappa_b(t) = \begin{cases} \left(e^{t}, e^{t}\right), \; si \; -\infty < t \leq 0 \\ (sen(t) - cos(t) + 2, sen(t) + cos(t)), \; si \; 0 < t \leq \frac{3\pi}{2} \\ \left(e^{-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)}, -e^{-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)}\right), \; si \; \frac{3\pi}{2} < t < \infty \end{cases} . \tag{83}$$

La representación de las órbitas homoclínicas asociadas al punto de equilibrio en el origen se muestra en la Figura 17, cabe mencionar que no es posible simular de manera exacta una órbita homoclínica, teóricamente son órbitas que una vez iniciadas tardan un tiempo infinito en llegar al mismo punto, sin embargo, es posible obtener representaciones de órbitas aproximadas muy cercanas a la órbita homoclínica.

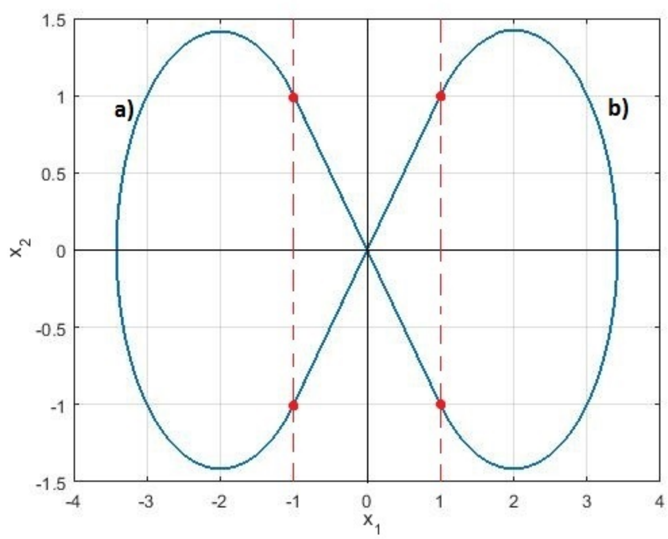


Figura 17. Órbitas homoclínicas de sistema autónomo (77). a) órbita izquierda, b) órbita derecha.

3.2.2. Sistema perturbado

El sistema de tres secciones (76) es sometido a una perturbación, reescribiéndose como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= |x_1+1| - |x_1-1| - x_1 + \epsilon\left[-\delta x_2 + a\, sen\,(\omega t)\right]. \end{aligned} \tag{84}$$

Al igual como se hace para el sistema de dos secciones, una vez definido el sistema bajo una perturbación es posible aplicar la teoría de Melnikov para sistemas dinámicos perturbados de segundo orden. Se expresa el sistema (84) de forma seccional como sigue:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon\, g(x,t), \text{ si } x \in D_1 \\ f_2(x) + \epsilon\, g(x,t), \text{ si } x \in D_2 \\ f_3(x) + \epsilon\, g(x,t), \text{ si } x \in D_3 \end{cases}, \tag{85}$$

dónde: $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2 \end{pmatrix}$, $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 2 \end{pmatrix}$ y

$$g(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta x_2 + a\, sen\,(\omega t) \end{pmatrix}.$$

3.2.2.1. Función de Melnikov

El sistema (77) tiene dos órbitas simétricas, por lo tanto es necesario hacer el cálculo de la función de Melnikov por lo menos a una de las dos órbitas. La función de Melnikov $M_1(\theta)$ corresponde a la órbita $\kappa_a(t)$ dada por (82), mientras que para la órbita $\kappa_b(t)$ (descrita en (83)) le corresponde la función $M_2(\theta)$. Se define entonces:

$$M(\theta) = \begin{cases} M_1(\theta), \text{ si } \kappa_a(t) \\ M_2(\theta), \text{ si } \kappa_b(t) \end{cases}. \tag{86}$$

Esto significa que el sistema (77) puede exhibir comportamiento caótico para los valores de los parámetros que cumplan cualquiera de las dos desigualdades que se generaran por el método de Melnikov.

Como se tiene una órbita (83) que es prácticamente igual a la órbita (70) calculada para dos secciones, entonces el cálculo de la función de Melnikov para $M_2(\theta)$ es el mismo previamente calculado. Se expresa de la siguiente manera:

$$M_2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_{b2}(t)\left[\delta\kappa_{b2}(t) + sen(\omega(t+\theta))\right] dt, \tag{87}$$

donde $k_b(t) = (k_{b1}(t), k_{b2}(t))$.

Al sustituir la componente de la órbita $\kappa_{b2}(t)$, descrita en la ecuación (83), se resuelve la integral de Melnikov, se simplifica y se tiene como resultado:

$$M_2(\theta) = -\frac{\delta 3\pi + 4}{2} + \frac{2a}{\omega^4 - 1}\left(cos\frac{3\pi\omega}{2} - \omega sen\frac{3\pi\omega}{2} - 1\right) sen(\omega\theta) \tag{88}$$

$$+ \frac{2a}{\omega^4 - 1}\left(\omega cos\frac{3\pi\omega}{2} + sen\frac{3\pi\omega}{2} + \omega\right) cos(\omega\theta).$$

Para tener ceros simples en $M_2(\theta)$ se debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{2}(2a)}{\delta(3\pi/2+2)(\omega^4-1)}\sqrt{1+\omega^2+(\omega-1)cos\frac{3\pi}{2}+2\omega sen\frac{3\pi}{2}} > 1. \tag{89}$$

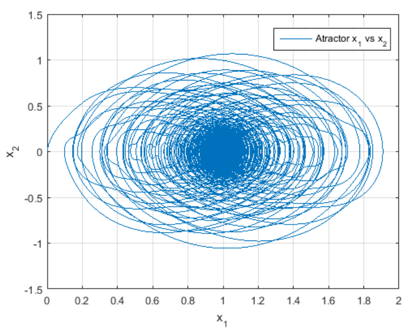
Por lo tanto, se tiene una de las condiciones de Melnikov para que el sistema perturbado (77) cumpla con la desigualdad (89) y se encuentre en una región donde se puedan obtener oscilaciones de diversa índole.

3.2.3. Simulación del sistema oscilatorio

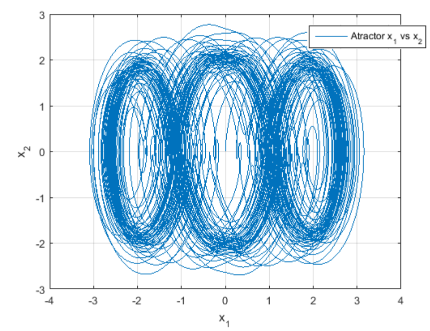
El objetivo principal de la presente tesis es precisamente la generación de las oscilaciones que presentan los sistemas aquí estudiados. Este sistema seccionalmente lineal de tres secciones (76) cuenta con un margen de estabilidad mayor que el caso de dos secciones (64). Esto se puede comprobar en sus retratos de fase; se puede observar que el sistema de tres secciones no presenta ninguna zona en donde la solución se escape, el sistema se mantiene oscilando. Al perturbar el sistema se tienen determinadas dinámicas que se estudian en esta sección.

3.2.3.1. Variación en amplitud

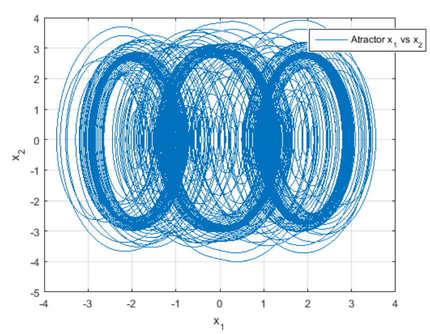
El rango de variación en amplitud es pequeño, de 0.5 hasta 3.5. Las oscilaciones que se muestran en la Figura 18 ilustran algunos resultados al variar la amplitud. La Figura 18a muestra un caso cuando no se cumple la condición de Melnikov. En cambio, para las oscilaciones de las figuras 18b y 18c, los parámetros se encuentran en la región deseada. Los espectros de la Figura 19 pueden ilustrar de igual manera que se tiene una mayor riqueza frecuencial en las oscilaciones que cumplen con la condición Melnikov (ecuación (89)).



(a)



(b)

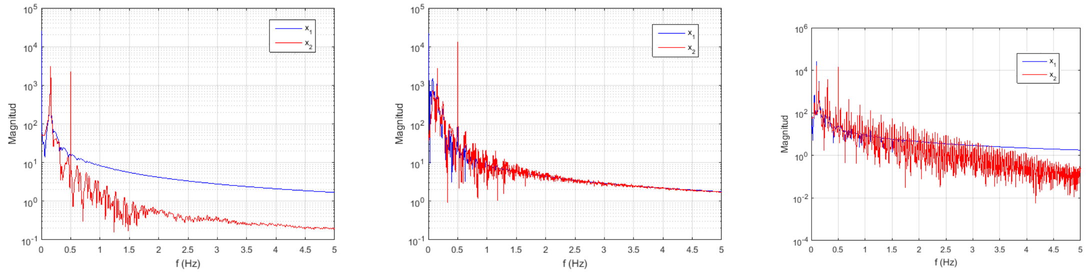


(c)

Figura 18. Retratos de fase x_1, x_2 simulados con los parámetros $\epsilon = 1$, $\delta = 0.01$ y $\omega = 2.7$. El parámetro a variar es α del sistema tres secciones perturbado (84). Considerando: a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = 3$ y c) $\alpha = 3.5$

3.2.3.2. Variación en frecuencia

Para el caso en donde se fija la amplitud de la perturbación ($\alpha = 1$) y se varía la frecuencia, se tienen las oscilaciones de la Figura 20. Con la misma tendencia a



(a) (b) (c)

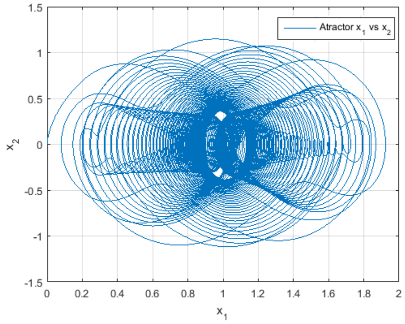
Figura 19. Espectros de frecuencia de las variables x_1 y x_2 al variar α del sistema tres secciones perturbado (84). Considerando: a) $\alpha = 0.5$, b) $\alpha = 3$ y c) $\alpha = 3.5$

los casos anteriores se presenta una oscilación que no está en la región paramétrica deseada (no cumple Melnikov), esta se observa en la Figura 20a. En la Figura 20b se observa un comportamiento distinto y más complicado que para la primera variación. De todos los atractores que se presentan en esta sección es el que tiene una riqueza dinámica mayor y esto se puede comprobar en su espectro frecuencial, Figura 21b. La respuesta mostrada en la Figura 20c es de una órbita cuasiperiódica con una forma muy característica; se mantiene oscilando de una región a otra haciendo una especie de vórtice en cada salto a la otra zona. Ese caso se da cuando se tienen valores de frecuencia muy bajos.

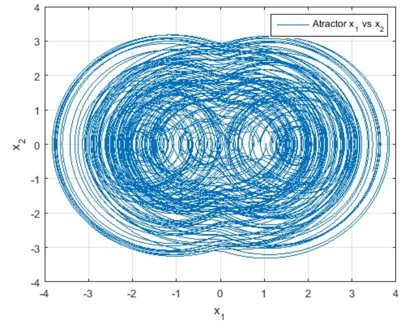
De las dos variaciones que se presentan, la variación en frecuencia presenta una mayor variedad de dinámicas. Por lo tanto, para la siguiente sección en la que se tratarán de ilustrar los resultados de las simulaciones mediante un circuito electrónico, se hace una variación en frecuencia, dado que es con este parámetro que se tienen mejores resultados para este tipo de sistemas.

3.3. Aplicación en un circuito electrónico

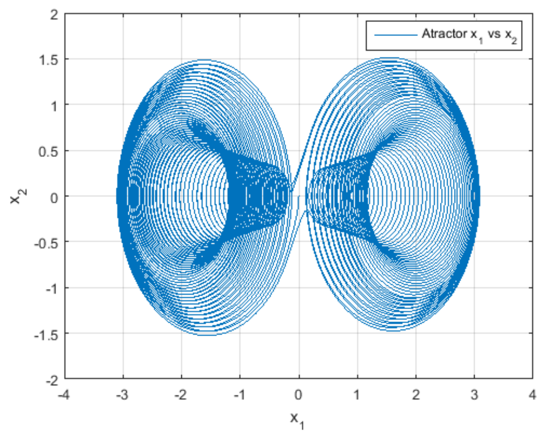
En esta sección, se describe la construcción de un circuito electrónico capaz de ilustrar los resultados hasta este punto expuestos, siguiendo con la premisa de que los sistemas seccionalmente lineales presentan dinámicas caóticas, o complicadas, al ser excitados por una señal externa de tipo senoidal. Se procede a tomar el caso en donde el sistema presenta tres secciones, tal y como se plantea en (76). Se selecciona un oscilador seccionalmente lineal presentado en (Pokrovskii,2007), el cual se describe



(a)

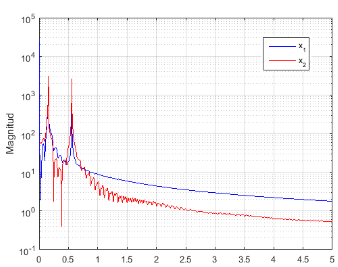


(b)

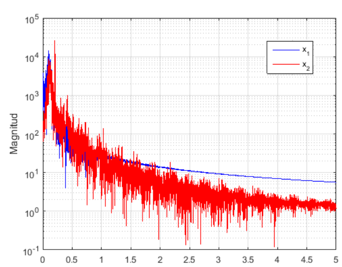


(c)

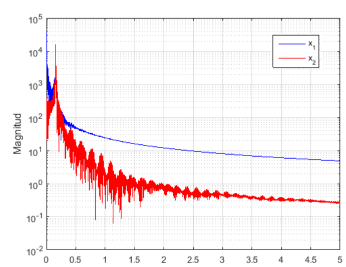
Figura 20. Retratos de fase x_1, x_2 que se generan al modificar el parámetro α del sistema tres secciones perturbado (84). Considerando: a) $\omega = 3.5\pi$, b) $\omega = 1.3$ y c) $\omega = 0.1$



(a)



(b)



(c)

Figura 21. Espectros de frecuencia de las variables x_1 y x_2 al variar ω del sistema tres secciones perturbado (84). Considerando: a) $\omega = 3.5\pi$, b) $\omega = 1.3$ y c) $\omega = 0.1$

mediante el modelo (90) y corresponde a un sistema de segundo orden similar en estructura al estudiado en esta sección, lo cual lo hace bastante conveniente de analizar y comparar con los resultados obtenidos.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - a_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= -b x_1 - a_2 x_2 + a_3 sen\,(\omega t) + s(x), \end{aligned} \tag{90}$$

donde: $s(x) = (1/2)(|\beta x_1 + 1| - |\beta x_1 - 1|)$.

Considérese el cambio de coordenadas

$$y_1 = 2x_1,\ y_2 = 2(x_2 - a_1 x_1). \tag{91}$$

Entonces el sistema (90) puede describirse por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= x_2 \\ \dot{y}_2 &= -\tilde{a} y_1 - \tilde{b} y_2 + (\left|\tilde{\beta} y_1 + 1\right| - \left|\tilde{\beta} y_1 - 1\right| + a_3 sen(\omega t) \end{aligned}\ , \tag{92}$$

donde $\tilde{a} = a_1 a_2 + b$, $\tilde{b} = a_1 + a_2$, $\tilde{\beta} = \beta/2$.

Esto corresponde al sistema (84) con:

$$\tilde{a} = 1,\ \tilde{b} = \epsilon\delta,\ a_3 = \epsilon\alpha \tag{93}$$

por lo que ambos sistemas son equivalentes.

El sistema (90) considera el uso de una función de tres secciones al igual que (84) pero de distinta forma. Esta forma se define por una función de saturación produce un OP-AMP y de la cual no se cuenta con la posibilidad de configurar sus parámetros, ya que depende de la configuración que haga el fabricante. Eso significa que no se considera la posibilidad de poder modificar parámetros de la función seccionalmente lineal para buscar mejores resultados, por lo menos para el caso del circuito.

Es posible representar físicamente el sistema seccionalmente lineal (90) basándose en el concepto de estado controlado por una red celular no lineal (SC-CNN, por sus siglas en inglés). Una red celular no lineal (CNN) es un sistema de procesamiento analógico de señales basado en la interacción entre sistemas no lineales de primer orden. Tal como se plantea en (Buscarino,2007) se utiliza el concepto de CNN para tener un circuito con elementos pasivos y amplificadores operacionales, lo cual facilita la construcción del circuito, ya que un sistema CNN es de primer orden, se requieren un par de células CNN interconectadas para poder representar el sistema (90).

3.3.1. Modelo del circuito

Basado en sistemas CNN para la construcción del circuito, se llega a un modelo equivalente, el cual tomando las consideraciones físicas de los circuitos integrados se puede expresar como en (94). Dado que el modelo equivalente oscila dentro de los límites del voltaje de la fuente de alimentación, se necesita hacer un escalamiento de las variables, el cual va a permitir una rápida y mejor observación del comportamiento del sistema. Las variables serán escaladas por un factor de 1/2 y la variable del tiempo por un factor $k = 3000$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= k\left(\frac{R_{f4}R_{f5}}{R_6R_7}y - \frac{1}{kR_{f4}C_2}x\right) \\ \frac{dy}{d\tau} &= k\frac{R_{f2}R_{f3}}{R_4R_5}\left(-\frac{R_{f1}R_{f5}}{R_1R_7}x + \frac{R_{f1}}{R_2}sen(\Omega\tau) - \frac{R_{f1}}{R_3}V_{sat} - \frac{1}{kR_{f2}C_1}y\right) \end{aligned} \tag{94}$$

donde $\Omega = k\omega$ y $V_{sat} = (1/2)(|\beta x_1 + 1| - |\beta x_1 - 1|)$.

Bajo este nuevo modelo se procede a la construcción del circuito electrónico, el cual no requiere más que el uso de seis OP-AMP's, el arreglo de resistencias adecuado y un par de capacitores. La función seccionalmente lineal está dada por la configuración exclusiva que ofrece un OP-AMP, expresada por la variable V_{sat}.

3.3.2. Descripción del circuito oscilador

Las ecuaciones que se expresan en (94), como se mencionó, pueden realizarse mediante el circuito mostrado en la Figura 22, donde se describen los respectivos valores de resistencias y de capacitores necesarios para la construcción. Las variables X e Y están asociadas a los voltajes a través de los capacitores C_1 y C_2, respectivamente, mientras que la no linealidad V_{sat} está implementada por el OP-AMP U_6. Los otros operacionales U_2 y U_4 actúan como integradores de $\dot{X}$ y $\dot{Y}$. U_3 y U_5 son inversores y U_1 es un sumador. El circuito finalizado para la parte experimental se muestra en la Figura 23.

Es importante mencionar que en la construcción del circuito se utilizaron valores aproximados en los componentes, lo más cercanos posible al descrito en la Figura 22. Se utilizaron componentes comerciales y el circuito fue armando como prototipo.

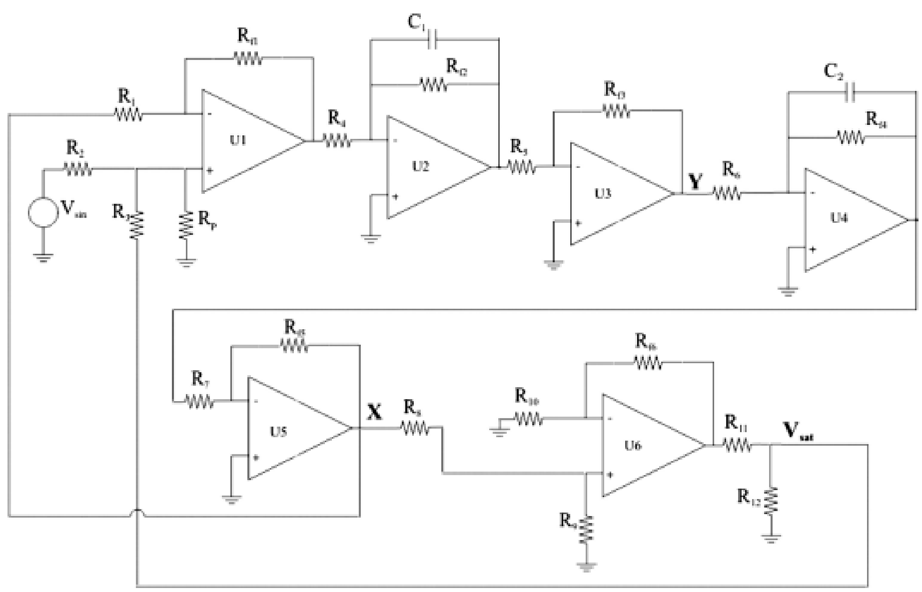


Figura 22. Circuito oscilador representado por el sistema (94) reportado en (Buscarino,2007). Los valores de las resistencias son: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $R_3 = 2k\Omega$, $R_4 = 3.3k\Omega$,$R_5 = 1k\Omega$, $R_6 = 3.3k\Omega$, $R_7 = 1k\Omega$, $R_8 = 5k\Omega$, $R_9 = 470k\Omega$, $R_{10} = 5k\Omega$, $R_{11} = 16.5k\Omega$, $R_{12} = 2k\Omega$, $R_{f1} = 1k\Omega$, $R_{f2} = 330k\Omega$,$R_{f3} = 1k\Omega$, $R_{f4} = 330k\Omega$, $R_{f5} = 1k\Omega$, $R_{f6} = 470k\Omega$, $R_p = 1k\Omega$, $C_1 = 100nF$, $C_2 = 100nF$.

3.3.3. Oscilaciones generadas por simulación

La parte importante que se desea analizar del circuito son el efecto de las variaciones en los parámetros de la perturbación, tal como se hizo en la parte teórica del sistema oscilatorio de tres secciones (84). Como se comprobó teóricamente, resultaba más conveniente hacer una variación en frecuencia para observar las dinámicas de los sistemas de tres secciones, se procede a hacer lo mismo para el modelo equivalente del circuito (94).

Las oscilaciones generadas por medio de simulaciones numéricas están ilustradas

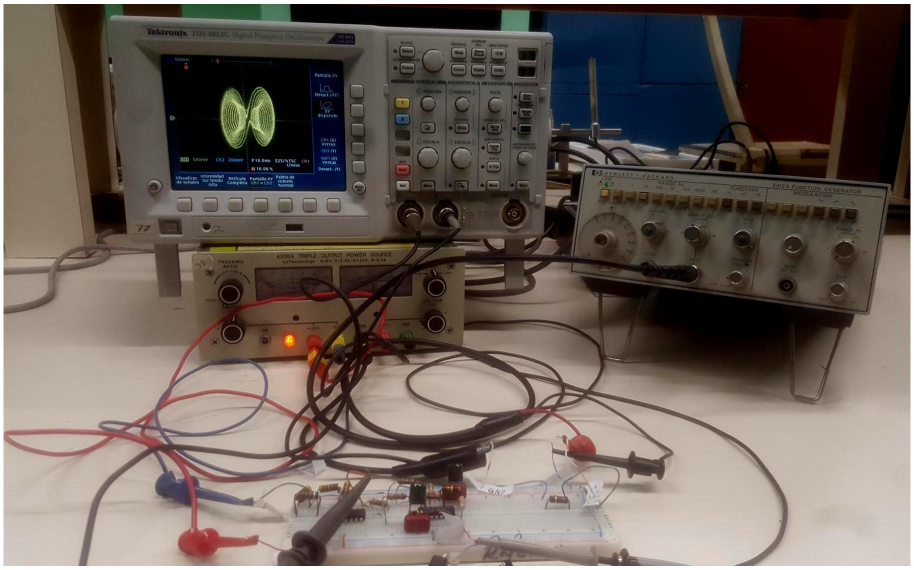


Figura 23. Circuito oscilador en prototipo de laboratorio, mostrando uno de los atractores generados (ver Figura 25a).

en la Figura 24. Se puede observar que se tienen algunas respuestas similares a las que se presentan en el caso de tres secciones analizado anteriormente (20). También coinciden en una forma de atractor característico de este tipo de sistemas: es una forma oscilatoria por secciones, en donde las trayectorias se desenvuelven en determinado espacio y después regresan para continuar oscilando en la región previa. La Figura 24b es la que presenta más claramente una dinámica irregular, mientras que las figuras 24c y 24d muestran una parte transitoria irregular, pero después de determinado tiempo forman una órbita cuasiperiódica. Es por eso que se forma una parte más sombreada en las figuras, formando una especie de “esqueleto” en el atractor.

Lo siguiente es obtener los retratos de fase que genere el circuito construido y comparar los resultados simulados. Si se logra encontrar cierta similitud entre los atractores es posible asociarlo a lo teóricamente estudiado, las oscilaciones irregulares que se forman al perturbar los sistemas, según la teoría de Melnikov para sistemas perturbados en presencia de comportamiento caótico (Wiggins,1990).

3.3.4. Oscilaciones generadas por el circuito

El circuito se alimenta por con $\pm 12V$, la señal de perturbación es añadida mediante un generador de funciones para hacer la variación en frecuencia en el circuito, dejando fijo el parámetro de amplitud en $A = 1$. La frecuencia se varía de $15Hz$ a $700Hz$. Se

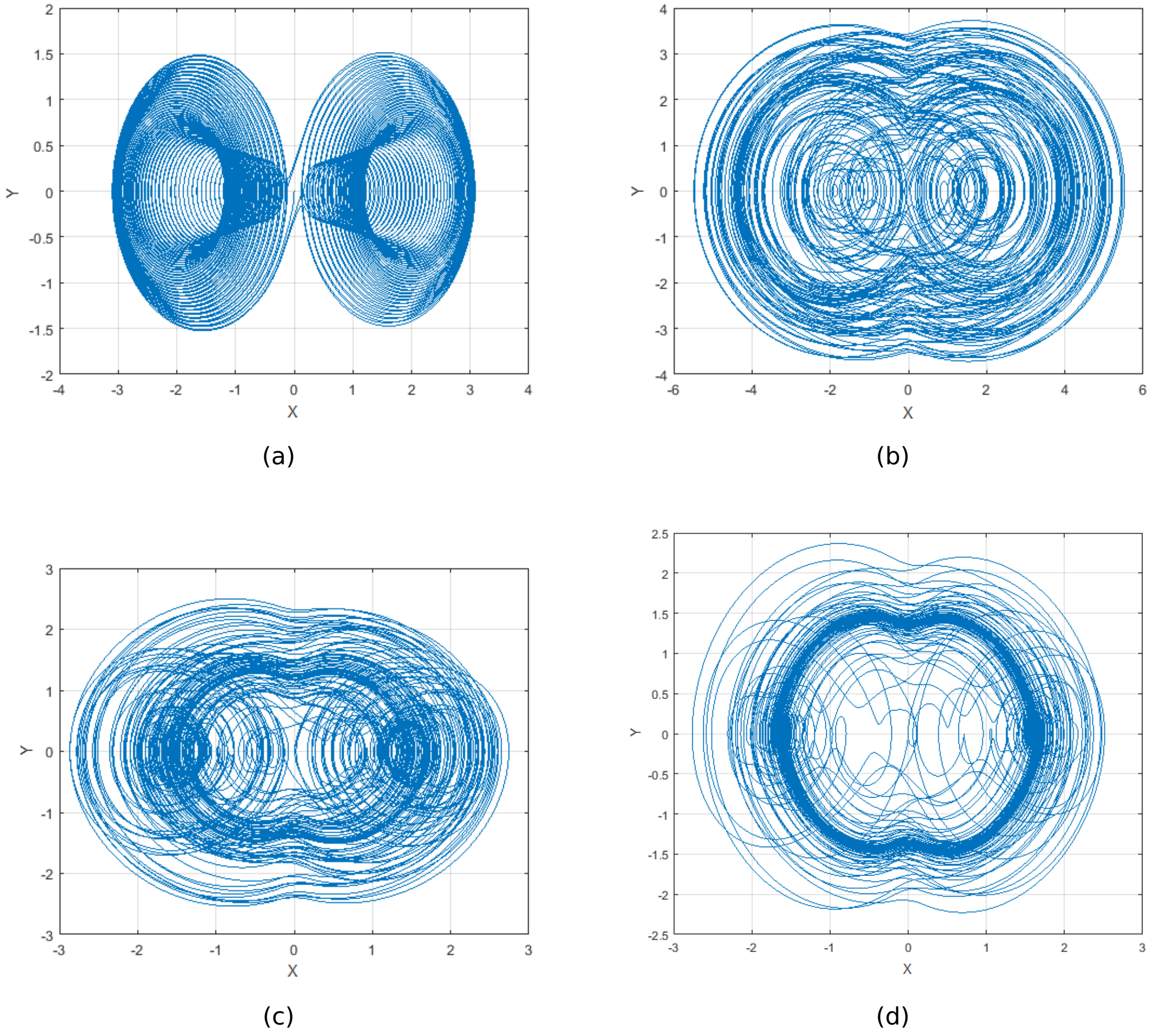


Figura 24. Retratos de fase generados mediante simulación en Matlab, donde se varía el parámetro ω del modelo del circuito (94). Considerando: a) $\omega = 0.01$, b) $\omega = 0.5$, c) $\omega = 1.5$ y d)$\omega = 2$

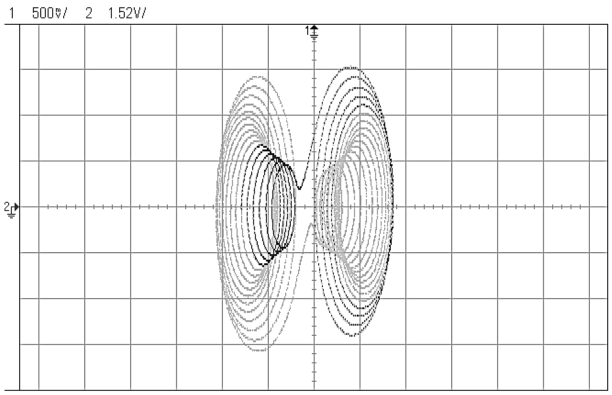
habían manejado valores concretos de ω a lo largo del estudio de los sistemas, pero como se sabe, el generador de funciones requiere valores de frecuencia en Hertz, por lo tanto solo basta definir el valor de frecuencia como $f = \omega/2\pi$.

Las mediciones se hacen mediante un osciloscopio Aligent Techonologies DSO-X, se toman capturas de pantalla de los retratos de fase X, Y para cada valor de frecuencia, se establecen aproximadamente los valores de ω que se utilizaron en las simulaciones. Las capturas de dichas mediciones se muestran en la Figura 25, las formas que se generan son similares a las formas que se obtuvieron en la simulación.

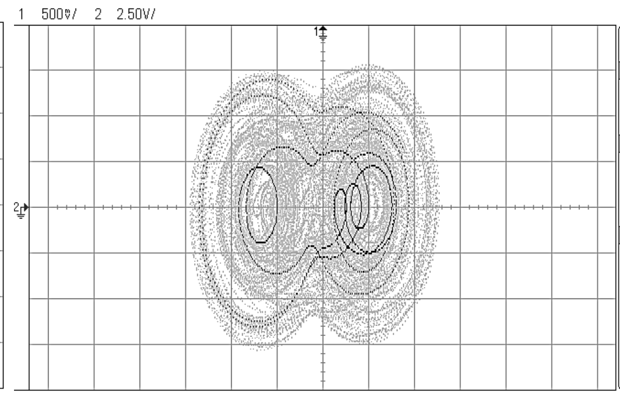
La primera forma de la Figura 25a es el atractor característico que se ha observado anteriormente en este tipo de sistemas. Se pueden obtener variaciones del mismo cuando se manejan frecuencias bajas, aproximadamente menores a $40Hz$. Después, a frecuencias un poco mayores, se pierde la forma característica del atractor oscilador en dos espacios para formar una órbita cuasiperiódica en forma de esqueleto, como se observa en la Figura 25b. Aumentando la frecuencia el atractor va creciendo en magnitud y dinámica, hasta llegar a los $500Hz$, en que se obtiene el mayor espacio definido en donde el comportamiento del sistema es completamente irregular en su estado estacionario. Aunque en la Figura 25c se puede observar también una especie de esqueleto al atractor, es solo la visualización de la captura pues el sistema está en movimiento constante en tiempo real. Esta forma irregular se asocia a la obtenida en simulación de la Figura 24b. Una órbita bien definida se forma al alcanzar valores de frecuencia superiores, tal y como se exhibe en la Figura 25d, con $f = 700Hz$.

3.4. Resumen del capítulo

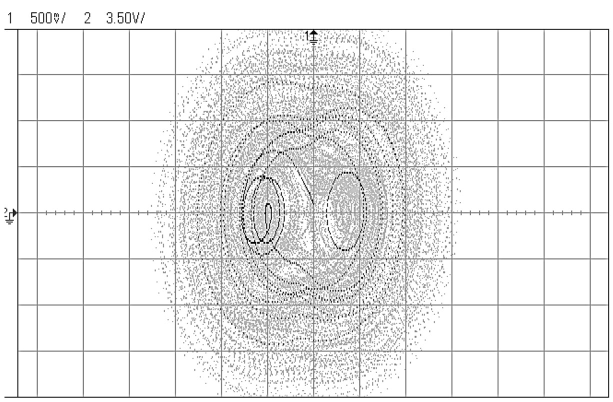
Este capítulo presenta importantes resultados de la memoria de tesis, tanto resultados analíticos mostrados en simulaciones, como también, resultados de simulaciones validados con un experimento físico. Primero se analizaron dos casos específicos de sistemas oscilatorios seccionalmente lineales, los cuales contaban con la presencia de conexiones globales en su sistema autónomo, por lo cual cumplían los requisitos para aplicar la teoría de Melnikov para sistemas perturbados. Esto da como resultado una desigualdad que establece que mientras se cumpla, habrá comportamiento caótico, variando los parámetros se realizaron simulaciones en ambos sistemas con resultados



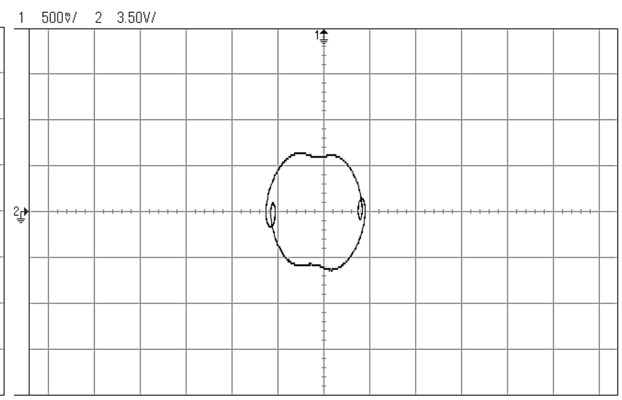
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 25. Resultados experimentales del circuito oscilador construido, se expresan en retratos de fase X, Y. Considerando: a) $f = 15Hz$, b) $f = 65Hz$, c) $f = 500Hz$ y d)$f = 700Hz$

muy cercanos al límite establecido por la desigualdad. Los mejores resultados son del sistema de tres secciones, obteniendo órbitas oscilatorias bien definidas al cumplir la desigualdad y órbitas irregulares acotadas al no satisfacer la desigualdad. Se buscó un sistema equivalente que representara las oscilaciones experimentalmente, encontrando así un modelo basado en un circuito oscilador que ilustró lo que en casos teóricos se había obtenido. Los resultados experimentales ilustraron las dinámicas expuestas en los diversos casos estudiados, mostrando así que con sistemas sencillos, como lo son los sistemas seccionalmente lineales, se pueden lograr dinámicas oscilatorias caóticas, las cuales, ya está bien definido en la actualidad su relevancia en el ámbito de la investigación de sistemas dinámicos.

Capítulo 4. Oscilaciones de sistemas seccionalmente lineales de tercer orden

En esta sección se abordan sistemas oscilatorios de tercer orden, en específico los que han sido de estudio en la presente tesis, los sistemas seccionalmente lineales. Ya quedó comprobado que los SSL's de segundo orden pueden presentar dinámicas muy diversas cuando son excitados con una señal externa. La siguiente parte del trabajo probará si los sistemas seccionales de tercer orden pueden exhibir comportamiento oscilatorio de tipo caótico, sin necesidad de una perturbación externa mediante el método propuesto y posteriormente si es posible ilustrarlo en un dispositivo físico.

Hasta la fecha hay un gran número de estudios de sistemas seccionales que presentan comportamiento caótico; este fenómeno se presenta en circuitos convertidores de voltaje tal y como lo reporta Jonathan R. Wood en |989. Pero lo que se plantea en esta sección es diseñar sistemas oscilatorios bajo el concepto de pasividad, o más bien semipasividad, persiguiendo el objetivo de la tesis de generar oscilaciones en sistemas seccionales y analizar sus comportamientos.

El procedimiento propuesto consiste, en general, en descomponer el sistema en lazo cerrado en un pasivo Σ_1 en la trayectoria directa, retroalimentado negativamente por un semipasivo Σ_2.

En consecuencia, el sistema en lazo cerrado será semipasivo. Partiendo de este escenario, un reajuste en los parámetros del controlador puede conducir a un escenario oscilatorio.

Se inicia este capítulo proponiendo un modelo de base de un sistema de control clásico para aplicar el método. Posteriormente, se describe el método de pasividad que se emplea para lograr un escenario oscilatorio. Una vez que se calculan los valores donde podría existir un comportamiento oscilatorio se simulan las órbitas generadas por el sistema. El crear un modelo de base permite analizar casos con un enfoque físico afín a esa forma y aplicar el método. El primer caso es el del circuito convertidor Buck, para el cual se utiliza un modelo normalizado. Por último se presenta un sistema torsional basado en una planta existente en el laboratorio, se le aplica el método y se describen los resultados obtenidos.

4.1. Sistema de control clásico

Siguiendo con el análisis de sistemas oscilatorios se presenta el esquema (Figura 26) de un sistema de control clásico mostrado en diagrama de bloques, frecuentemente aparece en los diagramas de tuberías e instrumentación (DTI) de cualquier proceso industrial.

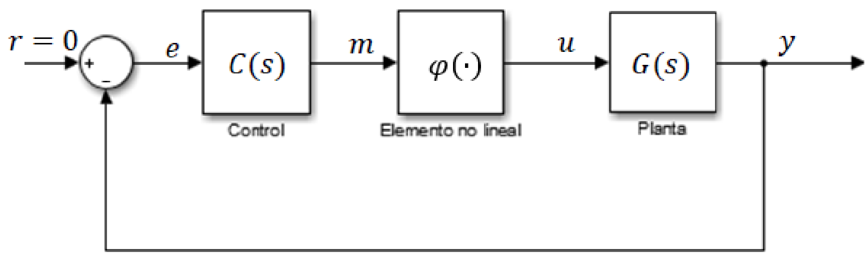


Figura 26. Representación en diagrama de bloques de sistema de control clásico.

La planta $G(s)$ es lineal de segundo orden, el orden mínimo para tener una respuesta oscilatoria. Sistemas de este orden dan una buena aproximación de los procesos industriales que operan alrededor de un punto de operación y exhiben oscilaciones. La introducción de un controlador clásico proporcional-integral (PI), que es el controlador más empleado en la industria, incluso más que el PID. Este se caracteriza por el bloque $C(s)$ de la Figura 26. En dicha figura, el bloque no lineal $\varphi(\cdot)$ denota al actuador, que en general tiene un comportamiento no lineal (i.e., saturación, zona muerta, histéresis, etc). En los casos de estudio que se presentan se supondrá que tienen una forma seccionalmente lineal.

La estructura representa, a grandes rasgos, a un sistema lineal que al ser controlado se le añade una no linealidad o linealidad por secciones (e.g., una saturación). Eso es muy útil en la práctica para evitar daños en los actuadores; en ocasiones hay valores picos que sobrepasan los límites del equipo, por lo que añadir una función saturación es fundamental para la prevención de daños; de ahí la gran utilidad de este bloque en la práctica.

El modelo de la planta está descrito por las ecuaciones diferenciales (95), cuya función de transferencia está dada por (96). La frecuencia de oscilación natural del sistema ω_n se considera unitaria, en el caso que no sea unitaria siempre es posible transformarla a este valor mediante un escalamiento en el tiempo.

$$\begin{gathered} \ddot{y} + \delta\dot{y} + y = k_g u \\ \delta > 0, k_g > 0 \end{gathered} \tag{95}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{k_g}{s^2 + \delta s + 1} \tag{96}$$

La señal de referencia r es considerada cero, es decir, el análisis se hace alrededor de un punto de operación. A la entrada del controlador $C(s)$ según el diagrama de bloques de la Figura 26, se tiene la señal de error $e(t)$, la cual es el resultado de restar la referencia a la salida ($e = r - y$). La función de transferencia del controlador está dada por la ecuación:

$$C(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s}. \tag{97}$$

4.1.1. Modelo equivalente del sistema clásico en lazo cerrado

Se obtiene un modelo equivalente al sistema representado por el diagrama de bloques de la Figura 26, de manera que el numerador de $C(s)$ pueda integrarse a la planta $G(s)$, obteniendo así una nueva planta $\tilde{G}(s)$ definida por la ecuación (98), la que se diseñará para que sea pasiva.

$$\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{Y}(s)}{U(s)} = k_g \frac{k_p s + k_i}{s^2 + \delta s + 1} \tag{98}$$

Este paso es fundamental para aplicar el método, ya que el grado relativo para que un sistema sea pasivo no debe ser mayor a 1. Entonces, dado que se tiene dos polos en el denominador de $\tilde{G}(s)$ y un cero en el numerador, el grado relativo de la planta virtual $\tilde{G}(s)$ es igual a 1. Por otra parte, la no linealidad $\varphi(\cdot)$ se desplaza a la trayectoria de la retroalimentación como $-\varphi(\cdot)$. Entonces en la retroalimentación queda un bloque del integrador seguido de la no linealidad, como se muestra en la Figura 27.

La planta $\tilde{G}(s)$ se modela como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - \delta y_2 + k_g u \ . \\ \tilde{y} &= k_i y_1 + k_p y_2 \end{aligned} \tag{99}$$

Entonces el lazo de retroalimentación de la Figura 27 se modela:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -\tilde{y} \\ v &= \varphi(w) \end{aligned} \tag{100}$$

y el control $u = -v = \varphi(w)$.

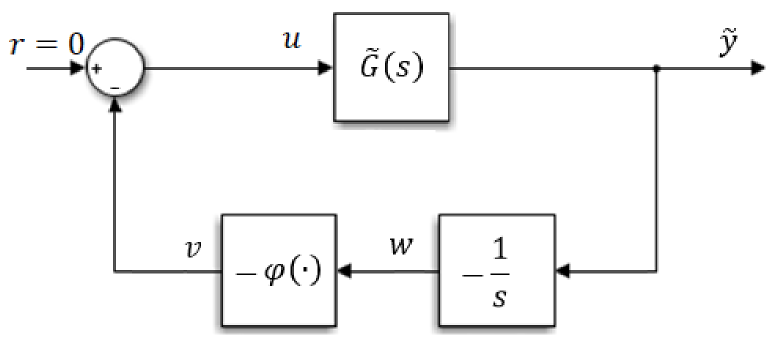


Figura 27. Representación en diagrama de bloques del sistema equivalente.

Sea $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ y $x_3 = w$, el sistema equivalente en lazo cerrado se muestra en su representación de espacios de estados por el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \delta x_2 + k_g \varphi(x_3) \\ \dot{x}_3 &= -k_i x_1 - k_p x_2 \end{aligned} \tag{101}$$

4.1.2. Método de semipasividad para generar oscilaciones acotadas

El método que se propone en esta sección se basa en un concepto ya muy definido y estudiado como lo es el concepto de pasividad descrito en el Capítulo 2. Se comienza por definir dos subsistemas en base al sistema que se propone, en este caso el sistema de control clásico. Tal como se ilustra en la Figura 28, el subsistema Σ_1 con entrada u y salida $\tilde{y}$ es un sistema lineal, cuya función de transferencia $\tilde{G}(s)$ está descrita por (98).

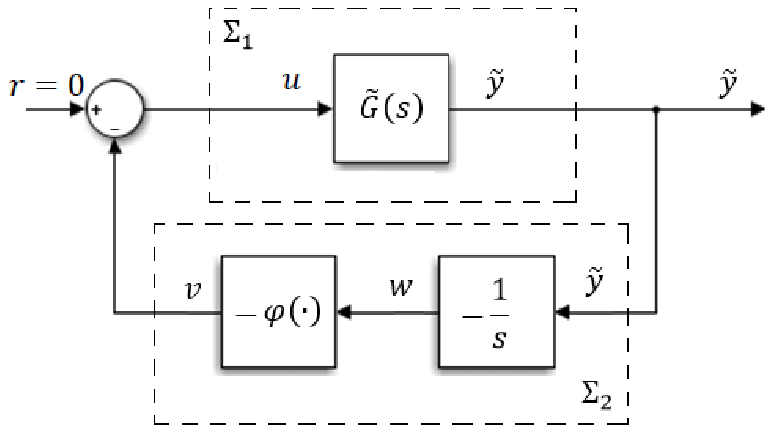


Figura 28. Representación en diagrama mostrando trayectorias Σ_1 y Σ_2.

El segundo subsistema Σ_2, ubicado en la trayectoria de retroalimentación, con entrada $\tilde{y}$ y salida v, está compuesto por un integrador $-1/s$ en serie con una función no lineal (seccionalmente lineal) $-\varphi(\cdot)$.

Puesto que Σ_1 es retroalimentado negativamente por Σ_2, es posible utilizar las propiedades de sistemas pasivos y tomar en cuenta que la conexión puede ser:

- Estrictamente pasiva, si ambos subsistemas son estrictamente pasivos.
- Solamente pasiva, si uno es pasivo y el otro es pasivo o estrictamente pasivo.
- Semipasiva, si uno es semipasivo y el otro es estrictamente pasivo, pasivo o semipasivo.
- Estrictamente semipasiva, si uno es estrictamente semipasivo y el otro es pasivo o semipasivo.

Es decir, se tiene la posibilidad de ajustar los dos subsistemas tomando en cuenta sus características de pasividad, con el fin de lograr distintos escenarios de comportamiento en el sistema retroalimentado. Recordando que el objetivo del trabajo es lograr comportamientos oscilatorios de diversa índole, se busca tener el escenario donde se tenga semipasividad en el sistema retroalimentado, ya que ese escenario brinda trayectorias sostenidas acotadas. Entonces, para lograr dichos comportamientos oscilatorios, es necesario sintonizar el controlador PI, i.e., calcular los parámetros k_p y k_i tales que la función de transferencia $\tilde{G}(s)$ sea función pasiva (no estrictamente pasiva), además de caracterizar la no linealidad $-\varphi(\cdot)$ de manera que el subsistema Σ_2 sea semipasivo. Logrando esas dos condiciones, como se menciona anteriormente, se tiene un sistema retroalimentado semipasivo.

4.1.2.1. Pasividad de la planta Σ_1

Una de las condiciones para lograr el escenario de semipasividad, es que la planta sea pasiva. Es importante aclarar que no conviene que la planta sea estrictamente pasiva, sino solo pasiva. Entonces se prosigue a aplicar el lema KYP (sección 2.3.3) al subsistema Σ_1 el cual se modela como sigue:

$$\begin{array}{c} \dot{\hat{y}} = A\hat{y} + bu \\ \tilde{y} = c\hat{y} \end{array}, \tag{102}$$

donde $\hat{y} = (y, \dot{y})^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ k_g \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} k_i & k_p \end{pmatrix}$ y con $\delta > 0$.

Entonces Σ_1 es pasivo si y sólo si, existen matrices $P > 0$, $Q \geq 0$ tales que se cumplan las condiciones:

$$\begin{array}{c} A^T P + PA = -Q \\ Pb = c^T \end{array}. \tag{103}$$

Utilizando las matrices definidas anteriormente, se propone una matriz $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y se obtienen los siguientes resultados:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \delta + 1/\delta & 1 \\ 1 & 1/\delta \end{pmatrix}$$
$$Pc = \begin{pmatrix} \frac{k_g}{2} \\ \frac{k_g}{2\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_k \\ k_p \end{pmatrix} . \tag{104}$$

$$k_i = k_g/2, k_p = k_g/2\delta$$

4.1.2.2. Semipasividad del subsistema Σ_2

Una vez planteadas las condiciones para que el subsistema en lazo abierto de la planta Σ_1 sea pasivo, se procede a brindarle las propiedades de semipasividad al subsistema Σ_2. Esta es la parte de retroalimentación del sistema original como se puede observar en la Figura 28. El sistema es modelado como se expresa en (105)

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -\tilde{y} \\ v &= -\varphi(x_w) \end{aligned} \tag{105}$$

Por definición de pasividad, se dice que la integral de la potencia del sistema en un tiempo determinado debe ser positiva (106). En términos energéticos eso significa, que la energía que almacena el sistema no es mayor a la energía que le es suministrada. Esa definición da un panorama intuitivo del porqué los sistemas pasivos no se inestabilizan y permite mantenerlo acotado.

$$\int_0^T \tilde{y}v \, d\tau = \int_0^T \dot{w}\varphi(w) \, d\tau = \int_0^{w(T)} \varphi(w) \, dw > 0 \tag{106}$$

Lo que se busca para Σ_2 es la propiedad de semipasividad, que es la que brindará la dinámica irregular a las oscilaciones. Esto se logra definiendo un punto ρ a partir del cual la integral de pasividad es definida positiva, siendo negativa para $|w| < \rho$ lo anterior se empresa en la ecuación (107).

$$\int_0^{w(T)} \varphi(w) \, dw < 0 \;\; si \; w < \rho \tag{107}$$

Por lo tanto, se sugiere que la función $\varphi(x_3)$ tenga determinadas características; como las ilustradas en la Figura 29.

La forma general sugerida se presenta en la Figura 29a. En el caso de SSL puede tener la forma mostrada en la Figura29b.

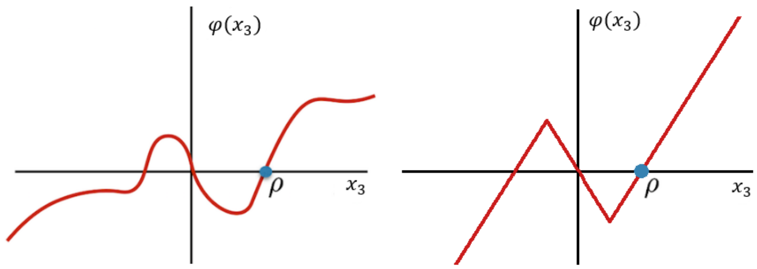


Figura 29. Funciones φ propuestas

4.1.3. Puntos de equilibrio en lazo cerrado

Para el sistema clásico de control en lazo cerrado (101) se tienen puntos de equilibrio en:

$$\bar{x} = (0, 0, \bar{x}_3) \tag{108}$$

donde $\bar{x}_3$ es raíz de la función $\varphi(x_3)$.

4.1.3.1. Estabilidad local de puntos equilibrio

Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio se necesita el polinomio característico del sistema (101), el cual se representa como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\delta & k_g\varphi(\bar{x}_3) \\ -k_i & -k_p & 0 \end{pmatrix}, \qquad . \tag{109}$$

$$p_A = \lambda^3 + \delta\lambda^2 + (k_g k_p \varphi'(\bar{x}_3) + 1)\lambda + k_g k_i \varphi'(\bar{x}_3)$$

Por lo tanto, utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, se tendrán equilibrios estables si:

$$\begin{array}{c} k_g k_i \varphi'(\bar{x}_3) > 0, \\ k_g k_i \varphi'(\bar{x}_3)/\delta > k_g k_p \varphi'(\bar{x}_3) + 1 > 0 \end{array} . \qquad (110)$$

Se sabe que $k_i = k_g/2$ y $k_p = k_g/2\delta$, entonces la condición de estabilidad de los equilibrios es:

$$0 < k_g^2 \varphi'(\bar{x}_3)/2\delta < k_g^2 \varphi'(\bar{x}_3)/2\delta + 1 \ . \qquad (111)$$

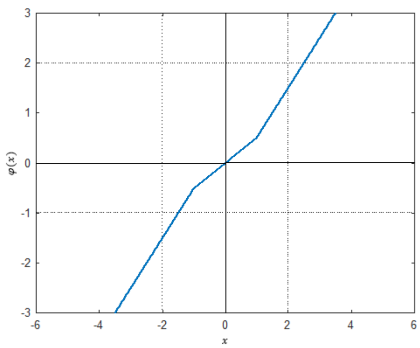
Es decir, si $\varphi'(\bar{x}_3) > 0$, el equilibrio $(0, 0, \bar{x}_3)$ es localmente estable, al considerar la forma sugerida en la Figura 29 se tendrá equilibrios estables, alternados con equilibrios inestables. Dado que δ siempre es mayor a 0 siempre se cumple la condición y se tendrá convergencia a alguno de sus equilibrios.

4.1.4. Función φ seccionalmente lineal

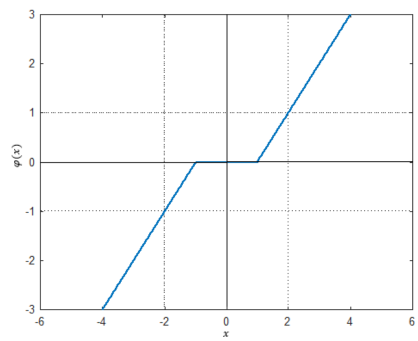
La función no lineal $\varphi(\cdot)$ del sistema clásico del cual se parte al inicio del capítulo, se planteó con una forma sugerida para contar con las propiedades particulares de semi-pasividad, tal como se observa en la Figura 29a. La aproximación lineal es un concepto muy utilizado en la práctica para aproximar funciones con formas complicadas con formas lineales. En la Figura 29b se propone por ejemplo, una forma seccionalmente lineal para cumplir con las características que se describen, dicha función puede tener la forma:

$$\varphi(x) = x - k_\varphi(|\beta_\varphi x + 1| - |\beta_\varphi x - 1|) \ . \qquad (112)$$

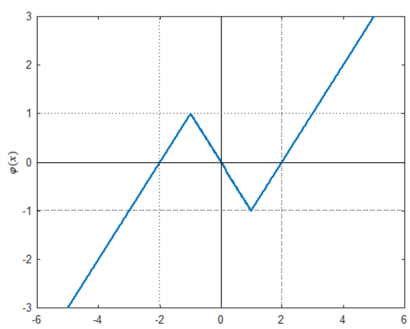
La función contiene los parámetros k_φ y β_φ para modificarla y tener la oportunidad de generar distintas formas. La Figura 30a corresponde a los parámetros $k_\varphi = 0.25$ y $\beta_\varphi = 1$, semejando una forma característica del diodo de Chua. Para las siguientes formas el parámetro k_φ. Para 30b se utiliza un valor de $k_\varphi = 0.5$ y se forma la llamada



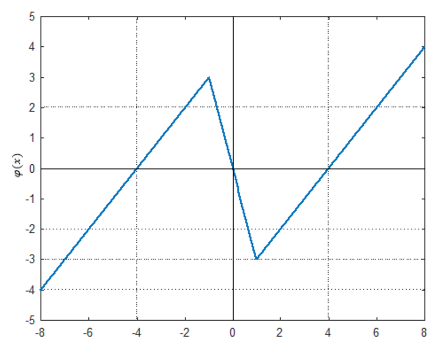
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 30. Modificaciones de función $\varphi(x)$ variando el parámetro k_φ . a) $k_\varphi = 0.25$, b) $k_\varphi = 0.5$, c) $k_\varphi = 1$ y d)$k_\varphi = 2$

zona muerta. Los casos 30c y 30d corresponden a $k_\varphi = 1$ y $k_\varphi = 2$, respectivamente, formando así la forma de “zig-zag”, donde a medida que se aumenta el valor de k_φ aumenta el valor máximo de la parte lineal del centro. Al aumentar β_φ aumenta la pendiente de la línea central, a tal grado que un valor suficientemente grande puede aproximar la discontinuidad de la función signo.

4.1.5. Dinámica del sistema de control clásico

Una vez definidas las condiciones en donde se puede presentar escenarios como los que se pretenden en la presente tesis, desde oscilaciones regulares hasta comportamientos más enredados y complicados (de tipo caóticos), lo siguiente es calcular valores de los parámetros del sistema (101), para obtener los comportamientos oscilatorios de interés.

En el primer conjunto de parámetros mostrados en el pie de la Figura 31 se definen la mayoría de las variables paramétricas. Lo que se pretende variar es la ganancia del control integral k_i evitando que el sistema converja a un punto de equilibrio; es decir, que el sistema se mantenga oscilando en un espacio acotado.

Se pueden observar en la Figura 31 los atractores que resultan al simular el sistema (101) con los parámetros definidos. La Figura 31a muestra un ciclo límite para el caso en donde se tiene una ganancia $k_i = 1$. El espectro frecuencial de las variables de estado pueden ser observadas en el espectro que muestra la Figura 32a. Al aumentar $k_i = 1.5$ la órbita periódica duplica su periodo deformando la forma en que evoluciona (ver Figura 31b). Para el caso en donde $k_i = 2$, el sistema oscila en dos espacios determinados, conmutando de un espacio a otro irregularmente, este comportamiento lo dota de una dinámica irregular, de naturaleza caótica (ver Figura 32c).

El segundo conjunto de parámetros modifica el valor de ganancia proporcional k_p a un valor pequeño y de igual manera que el primer conjunto, se varia el parámetro de ganancia integral k_i.

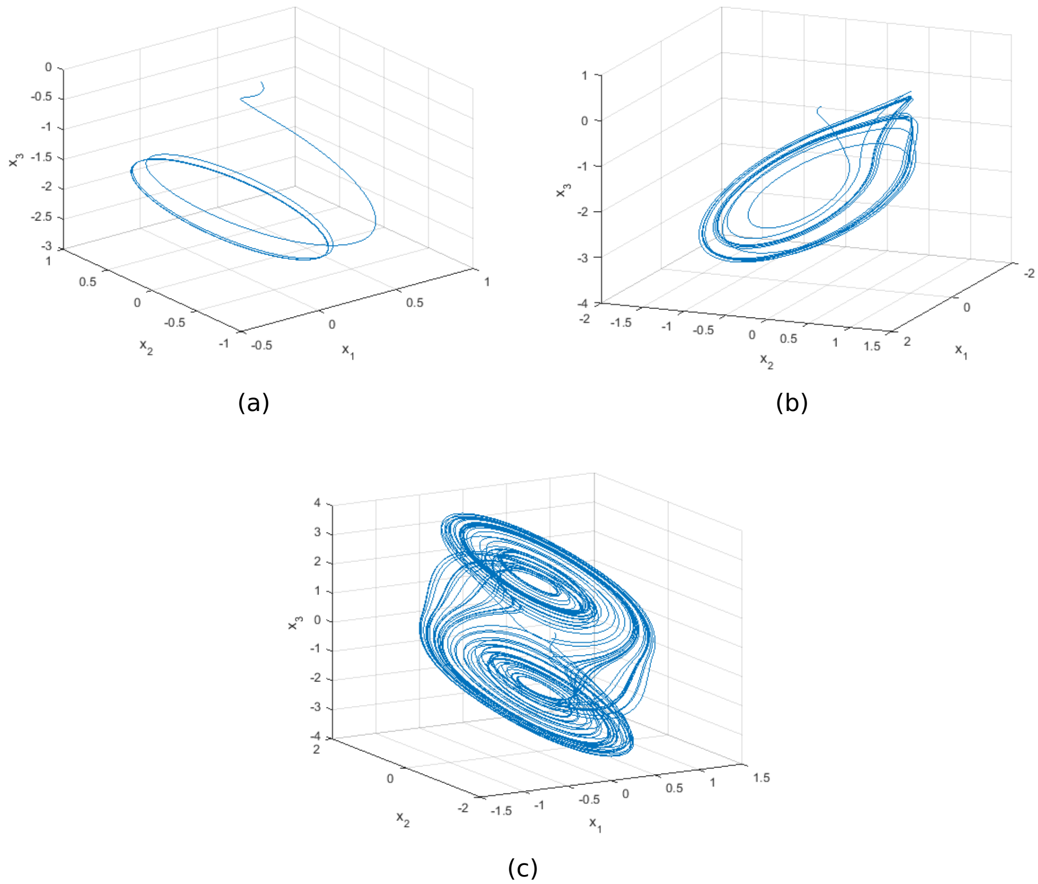


Figura 31. Atractores que resultan del sistema (101), simulados bajo los parámetros $k_g = 1$, $\delta = 0.5$, $k_{\varphi} = 2$,, $p = 1$, $\beta = 1$, a) $k_i = 1$, b) $k_i = 1.5$ y c) $k_i = 2$

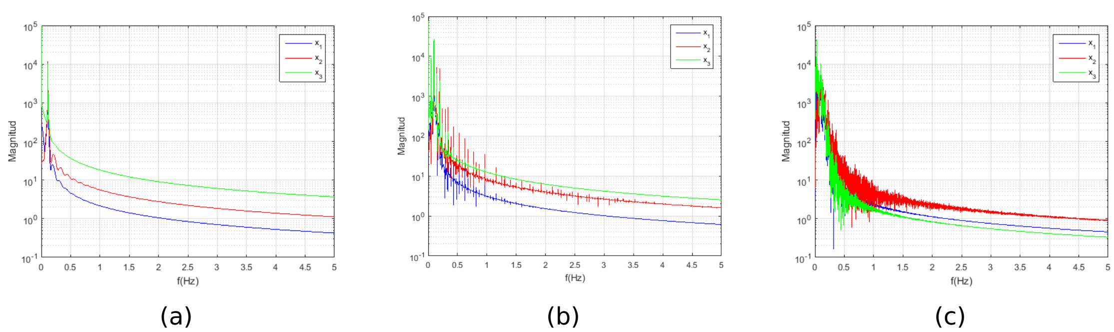
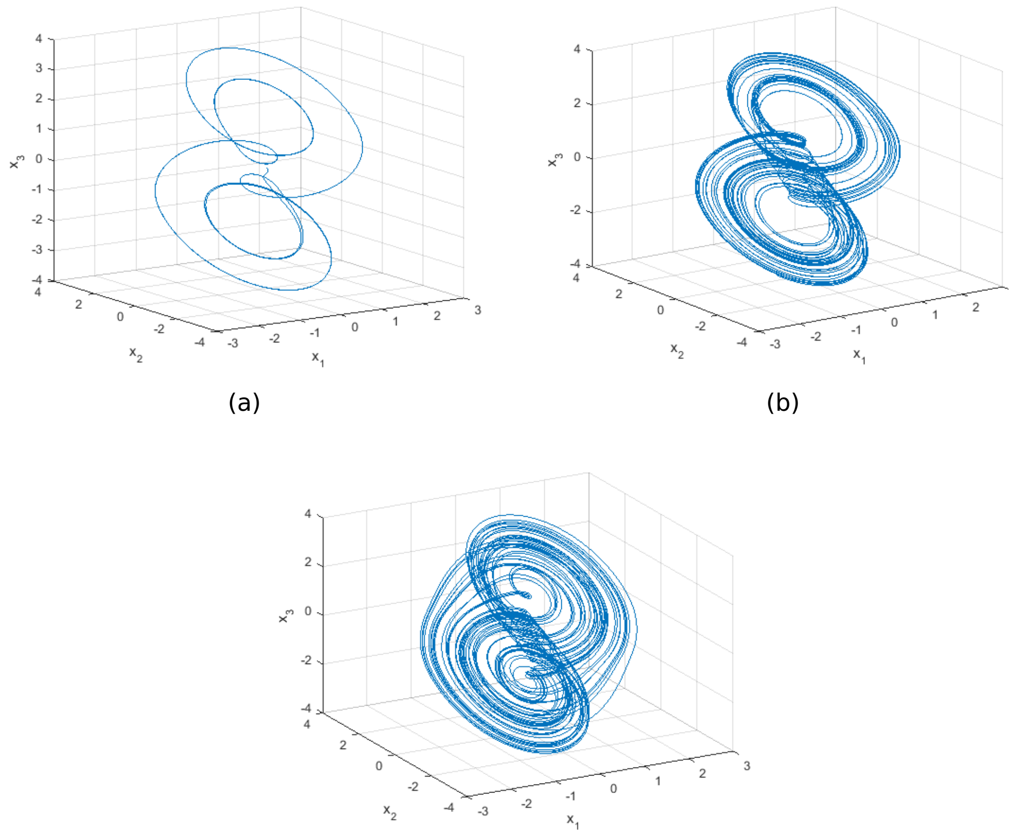


Figura 32. Espectros de frecuencia para las variables x_1, x_2 y x_3. Simulados bajo los parámetros $k_g = 1$, $\delta = 0.5$, $k_{\varphi} = 2$,, $p = 1$, $\beta = 1$, a) $k_i = 1$, b) $k_i = 1.5$ y c) $k_i = 2$

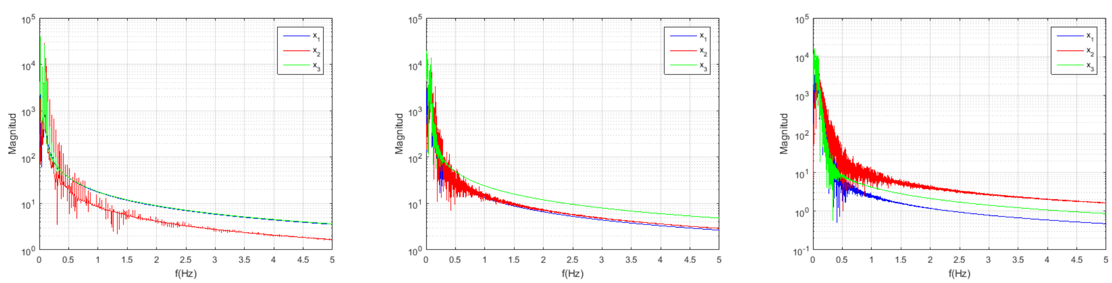
Los atractores que se obtienen para el segundo conjunto de parámetros se presentan en la Figura 33. La forma que exhibe la Figura 33a es una órbita bien definida, un comportamiento que de igual manera se observa en los sistemas de segundo orden, estudiados anteriormente. La forma que sigue, Figura 33b, ya muestra una órbita con



(a) (b)

(c)

Figura 33. Atractores que resultan del sistema (101), simulados bajo los parámetros $k_g = 1$, $\delta = 0.5$, $k_{\varphi} = 2$, $p = 0.05$, $\beta = 1$, a) $k_i = 1$, b) $k_i = 1.1$ y c) $k_i = 1.5$



(a) (b) (c)

Figura 34. Espectros de frecuencia para las variables x_1, x_2 y x_3.Simulados bajo los parámetros $k_g = 1$, $\delta = 0.5$, $k_{\varphi} = 2$, $p = 0.05$, $\beta = 1$, a) $k_i = 1$, b) $k_i = 1.1$ y c) $k_i = 1.5$

dinámica más complicada. Además, se forma un vórtice en medio, distinto al que se exhibe en la anterior Figura 31c. Para el último caso de la Figura 33c, se tiene una dinámica irregular cuyo espectro se muestra en la Figura 34.

4.2. Sistema del circuito convertidor Buck

Los circuitos conmutados, como el Buck, son ampliamente utilizados en la práctica para regular niveles de voltaje según sea el requerimiento del equipo eléctrico. Sin embargo, la naturaleza discontinua de estos mismos los dota de dinámicas especiales, exhibiendo diversos comportamientos que pueden ser desde puntos de equilibrio hasta oscilaciones caóticas (Banerjee y Verghese, 2001; Di Bernando et al. 1998; Miranda y Álvarez, 2009).

En la actualidad podemos encontrar este tipo de circuitos en fuentes de alimentación, es decir, básicamente en cualquier cargador de algún dispositivo electrónico actual. También son utilizados en aplicaciones industriales donde se requiera estabilizar la tensión de salida a un valor deseado, por ejemplo en un arreglo de paneles solares que alimenta a un dispositivo o en un satélite que orbita alrededor de la tierra.

El funcionamiento de los convertidores está basado principalmente en la conmutación entre dos o más configuraciones lineales, en otras palabras, se tratan de sistemas seccionalmente lineales, donde la conmutación entre un comportamiento lineal a otro distinto está dado mediante un control conmutado. El dispositivo de control es un interruptor que normalmente es un transistor que opera en encendido o apagado. La conmutación incrementa la eficiencia de la conversión, sin embargo, introduce efectos adversos no previstos. La Figura 35 representa al convertidor DC-DC más simple, sin embargo, es el que más se utilizan en la práctica, se trata del reductor de voltaje llamado Buck.

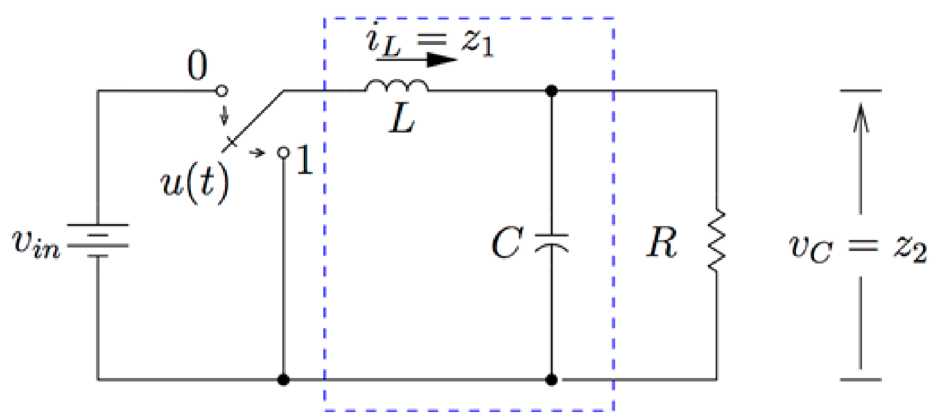


Figura 35. Diagrama básico de convertidor Buck.

El modelo discontinuo del circuito Buck se presenta en (113). El funcionamiento simplemente se basa en identificar al inductor y al capacitor como un filtro pasa bajas, el voltaje de entrada es troceado por el interruptor (0 o 1) generando un voltaje pulsante que depende directamente de la relación entre el tiempo que en el interruptor esté cerrado y el tiempo que esté abierto. A esa relación se le llama ciclo de trabajo. El filtro LC elimina los componentes de alta frecuencia del voltaje pulsante dejando pasar, en teoría, sólo el componente de DC. Entonces, modificando el ciclo de trabajo del interruptor, se puede controlar la energía que se entrega a la carga.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{v_{in}}{L}(1-u) - \frac{z_2}{L}u \\ \dot{z}_2 &= \frac{z_1}{C}u - \frac{z_2}{RC} \end{aligned} \tag{113}$$

4.2.1. Modelo equivalente normalizado de circuito Buck

Una vez entendido el sencillo modelo discontinuo que representa al convertidor Buck, se procede a obtener un modelo normalizado. Un modelo normalizado se utiliza para analizar el sistema con un número reducido de parámetros, la normalización de un convertidor de alta frecuencia de conmutación es ampliamente usado para analizar los circuitos, pero en la mayoría de los casos en el que se plantea un diseño de control se emplean modelos sin normalizar, como puede ser un modelo promedio o el modelo discontinuo anteriormente descrito.

Considerando el modelo discontinuo del Buck (113) como base, se utiliza el proceso de normalización tal como se hizo en (Cortés, 2004). Aplicando una transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{v_{in}\sqrt{C/L}} z_1, \\ \beta_2 &= \frac{1}{v_{in} z_2}, \end{aligned} \tag{114}$$

entonces del modelo discontinuo se obtiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{LC}\dot{\beta}_1 &= u - \beta_2 \\ \sqrt{LC}\dot{\beta}_2 &= \beta_1 - \frac{\sqrt{L/C}}{R}\beta_2 \end{aligned} . \tag{115}$$

Después se hace un escalamiento en tiempo:

$$x_i(\tau) = \beta_1(t),\ i = 1, 2 \tag{116}$$

con

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}. \tag{117}$$

Finalmente se obtiene el modelo normalizado para el convertidor Buck:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - r x_2 \end{aligned}\ , \tag{118}$$

donde $u = 0.5[1 + sign(\sigma(x))]$, r es la variable que contiene los parámetros físicos del circuito ($r = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$) y $\sigma(x)$ es el criterio de control. El voltaje que se desea controlar está dado por x_2, el cual es un valor constante $0 < x_{d2} < 1$.

Lo siguiente es hacer un cambio de coordenadas al modelo normalizado del Buck (118) utilizando el criterio expresado en (119) y de esa manera expresar un modelo en variables de fase tal como se muestra en (120).

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 - x_{d2} \\ y_2 &= x_1 - r x_2 \end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - r y_2 - x_{d2} + u \end{aligned} \tag{120}$$

La estrategia de control para $\sigma(x)$ contenida en u, se define con un control PI de tal manera que $\sigma = k_p(y_d - y) + k_i \int_0^t (y_d - y) d\tau$. Al agregar un integrador puro al control, se aumenta el grado relativo del sistema definiendo $y_3 = \sigma$, entonces el sistema controlado por el PI se representa en espacio de estados por:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - r y_2 + \varphi(y_3) \\ \dot{y}_3 &= -k_i y_1 - k_p y_2 \end{aligned}\ , \tag{121}$$

con $\varphi(y_3) = 0.5 - x_{d2} + 0.5 sign(y_3)$, función seccionalmente lineal que cumple con las condiciones de pasividad mencionadas en la sección (4.1.2). La forma de φ se muestra en la Figura 36.

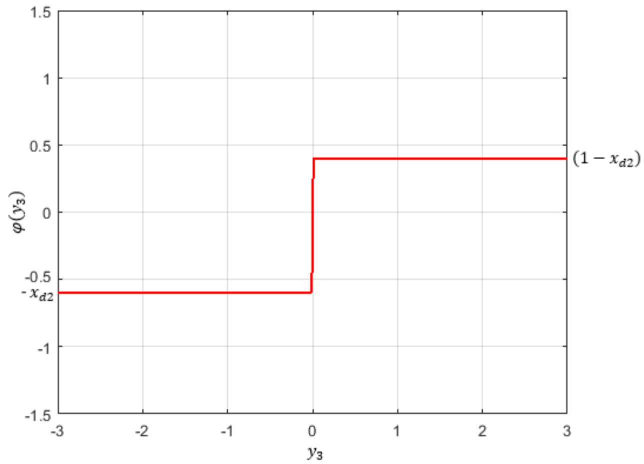


Figura 36. Forma de $\varphi(y_3)$ para sistema controlado (121).

4.2.2. Puntos de equilibrio del modelo equivalente normalizado

El circuito Buck normalizado presenta una forma similar al que se presenta en el modelo del sistema clásico planteado, por lo que sus puntos de equilibrio de igual forma están definidos por:

$$\bar{y} = (0, 0, \bar{y}_3) \tag{122}$$

donde $\bar{y}_3$ es la raíz de la función $\varphi(y_3)$.

4.2.2.1. Estabilidad local de puntos equilibrio

Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio se necesita el polinomio característico del sistema (121), el cual se representa por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -r & \varphi(\bar{y}_3) \\ -k_i & -k_p & 0 \end{pmatrix}, \tag{123}$$
$$p_A = \lambda^3 + r\lambda^2 + (k_p\varphi'(\bar{y}_3) + 1)\lambda + k_i\varphi'(\bar{y}_3).$$

Por lo tanto, se tendrán equilibrios estables si:

$$\begin{gathered} k_g k_i \varphi'(\bar{y}_3) > 0, \\ k_g k_i \varphi'(\bar{y}_3)/\delta > k_g k_p \varphi'(\bar{y}_3) + 1 > 0 \end{gathered} \tag{124}$$

Se sabe que $k_i = k_g/2$ u $k_p = k_g/2\delta$, entonces la condición de estabilidad de los equilibrios es:

$$0 < k_g^2 \varphi'(\bar{y}_3)/2\delta < k_g^2 \varphi'(\bar{y}_3)/2\delta + 1 \tag{125}$$

Es decir, si $\varphi'(\bar{y}_3) > 0$, el equilibrio $(0, 0, \bar{y}_3)$ es localmente estable. Al considerar la forma sugerida en la Figura 29 se tendrá equilibrios estables, alternados con equilibrios inestables. Dado que δ siempre es mayor a 0 siempre se cumple la condición y se tendrá convergencia a alguno de sus equilibrios.

4.2.3. Dinámica del sistema normalizado Buck.

El sistema del Buck normalizado que se presenta en (121), es simulado en Matlab. El voltaje x_2 es la variable que se desea controlar en el circuito, por lo tanto, el parámetro x_{d2} representa al voltaje deseado. La variable r depende de los valores físicos del circuito, mientras que los parámetros k_i y k_p son los parámetros del controlador PI, el valor k_p se mantiene fijo con la finalidad de variar k_i en busca de oscilaciones.

La dinámica que muestra el modelo Buck normalizado es ilustrada en la Figura 37. Las secciones de las figuras 37a y 37b ilustran el mismo atractor, corresponden al caso $ki = 0.7$. El sistema evoluciona en el tiempo en forma de órbita cuasiperiódica, vista en el espacio de tres dimensiones parece una forma cóncava hacia abajo. El siguiente par de secciones 37c y 37d describen el caso $k_i = 1$. El sistema forma una órbita más regular. Es posible hacer la comparación entre los espectros de frecuencias de la Figura 38; el espectro de la Figura 38b tiene más definido las frecuencias que para la órbita cuasiperiodica con espectro a la Figura 38a. El último par de figuras 37c y 37d muestran al atractor con la dinámica más complicada, el valor que se utiliza para este caso es $k_i = 10$.

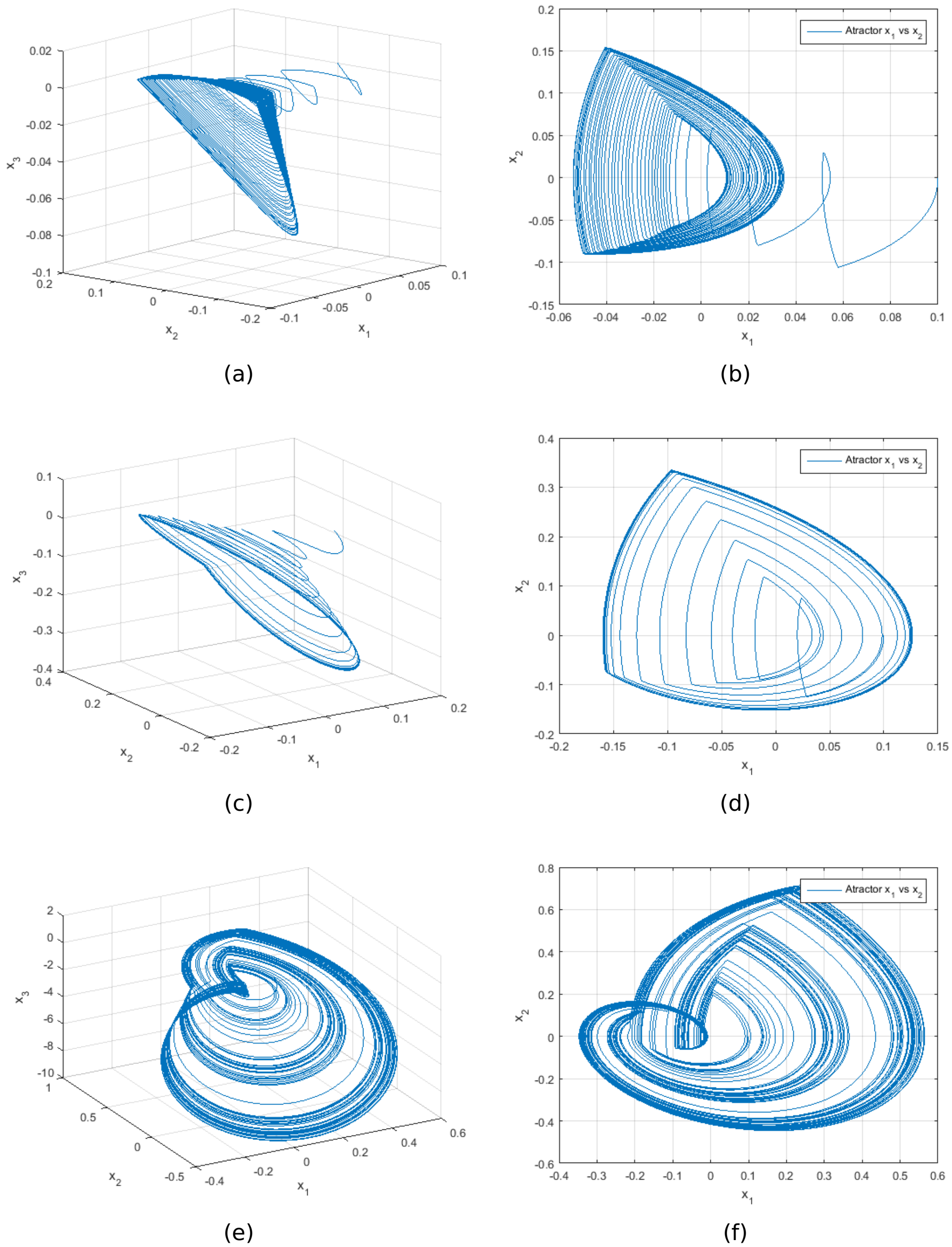
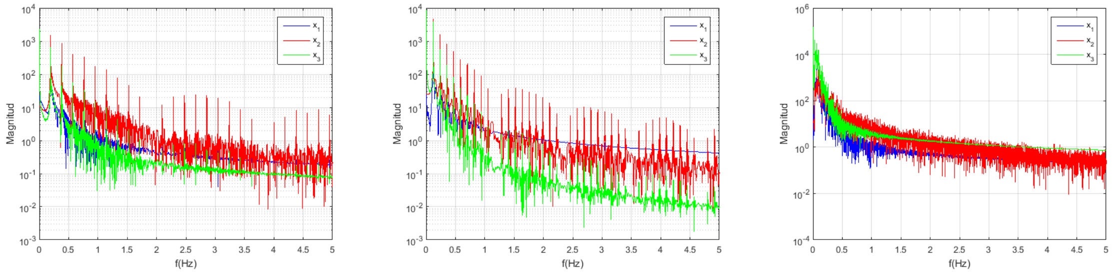


Figura 37. Atractores que resultan del modelo normalizado buck 121, simulados bajo los parámetros $x_{d2} = 0.1$, $r = 0.6$, $k_p = 1$, a)-b) $k_i = 0.7$, c)-d) $k_i = 1$ y e)-f) $k_i = 10$



(a) (b) (c)

Figura 38. Espectros de frecuencia para las variables x_1, x_2 y x_3. Simulados bajo los parámetros $x_{d2} = 0.1$, $r = 0.6$, $k_p = 1$, a) $k_i = 0.7$, b) $k_i = 1$ y c) $k_i = 10$

4.3. Aplicación en un mecanismo

En esta sección se muestra la aplicación de la metodología propuesta a un sistema mecánico, en específico a un sistema torsional. Esta clase de sistemas físicos son importantes y tienen bastante aplicación en el diseño de controladores para regular posición y velocidad. Ejemplos de esta clase de sistemas pueden ser desde los ejes de transmisión de un vehículo automotor hasta un sistema de posicionamiento para una antena con el objetivo de rastrear satélites. Una ventaja de modelar sistemas rotatorios es que diseñado un controlador e implementado con éxito en una planta de torsión, se puede utilizar fácilmente en otros sistemas torsionales (Trivedi C.,2011).

El sistema torsional utilizado como planta para las pruebas físicas se muestra en la Figura 39. Este mecanismo se encuentra en el Laboratorio de Control del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE. Es una planta bastante flexible pues es posible configurarla de diferentes maneras. Cuenta con un eje vertical, tres discos y tres "encoder" para medir la posición de cada disco. El eje vertical es accionado por un servomotor de DC conectado a través de una banda rígida a un sistema de poleas con relación de velocidad de 3 a 1. El encoder que se encuentra en la base mide la posición angular del disco. Es posible agregar pesas metálicas para modificar el momento de inercia de las masas de los discos.

4.3.1. Modelo del sistema torsional

La configuración para la planta torsional contemplada para las pruebas es con solo un disco en la base y el eje sujeto hasta la parte superior; la configuración se ilustra

Figura 39. Mecanismo de planta torsional ECP Modelo 205 con los tres discos de inercia.

en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 40. Basándose en el diagrama de cuerpo libre y aplicando la segunda ley de Newton para la rotación, se obtiene la siguiente ecuación diferencial que describe al sistema torsional:

$$T(t) - J\ddot{\theta}(t) - b\dot{\theta}(t) - k\theta(t) = 0. \tag{126}$$

Se trata de un sistema de segundo orden en donde $T(t)$ es la entrada o el torque del motor, $\theta(t)$ es la salida e indica la posición angular del disco al cual se le está aplicando el par, J es el momento de inercia total del disco. El coeficiente k es la constante de elasticidad del resorte, mientras que la variable b es el coeficiente de fricción viscosa que experimenta el disco de manera natural. Por lo tanto la planta en el dominio de Laplace se expresa como:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1/J}{s^2 + \frac{b}{J}s + \frac{k}{J}}. \tag{127}$$

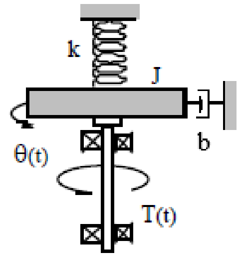


Figura 40. Diagrama de cuerpo libre de la configuración empleada en la planta torsional.

$G(s)$ tiene la misma forma que la ecuación (96), por lo tanto es posible aplicar el método de pasividad para generar oscilaciones. Tal y como se expresa en el diagrama a bloques de la Figura 26, se busca mediante un control $C(s)$ y una función seccionalmente lineal φ aprovechar el teorema de semipasividad para asegurar una dinámica acotada.

Siguiendo el procedimiento descrito para el modelo base de sistema de control clásico, se obtiene el sistema en representación de estados (128), considerando el modelo equivalente de la planta torsional (127), tal como se hace en el diagrama a bloques de la Figura 27. Se emplea la misma función seccionalmente lineal propuesta $\varphi(x) = x - k_{\varphi}(|\beta_{\varphi}x + 1| - |\beta_{\varphi}x - 1|)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tfrac{1}{J}\left(-k\,x_1 - b\,x_2 + \varphi(x_3)\right) \\ \dot{x}_3 &= -k_i x_1 - k_p x_2 \end{aligned} \tag{128}$$

4.3.2. Oscilaciones generadas

Siguiendo con el objetivo de generar oscilaciones se procede a simular en computadora el sistema (128). Al manejar una referencia igual a 0 ($r = 0$) se deben utilizar unas condiciones distintas de cero para evitar que el sistema se quede en el punto de equilibrio del origen. Para ello basta con agregar un valor inicial a la posición angular ($\theta = x_1$) pequeño solo para que sea distinto de cero.

El método de semipasividad para este tipo de sistemas realmente ofrece la capacidad de poder diseñar el tipo de oscilaciones que se desea, variando los parámetros de ganancia del controlador y de la función seccional en forma de zig-zag (ver Figura 29). Se puede aumentar o disminuir la amplitud las oscilaciones, así lograr aumentar o disminuir la frecuencia. Los parámetros que se utilizan para la simulación están expresados en el pie de la Figura 41, los que refieren a los parámetros físicos propios de la planta fueron obtenidos directamente del manual del fabricante, mientras que las ganancias del controlador y parámetros de la función seccional fueron propuestos pensando en llevar el caso a la parte experimental.

El parámetro del controlador k_i es el que se elige para variar el tipo de oscilaciones. Con un valor suficientemente bajo el sistema se mantiene estable y converge al equilibrio en el origen. Al aumentar la ganancia k_i se llega un punto en donde el sistema comienza a oscilar. Posteriormente se llega a determinado valor donde el sistema empieza a comportarse de manera irregular, comenzando a oscilar pero no de forma periódica. Se debe tener cuidado de no aumentar demasiado la ganancia porque se puede llegar a un punto en donde el sistema se inestabiliza, lo cual que se debe evitar si se considera pasar a la parte experimental.

Los tres casos analizados se presentan en la Figura 41. El primer caso es para un valor de $k_i = 1$; se puede observar que la oscilación no logra mantenerse, el sistema busca su punto de equilibrio al origen, el atractor y la gráfica de la posición angular del disco (x_1) es posible observarse en las figuras 41a y 41b, respectivamente. El segundo caso de las figuras 41c y 41d es para un valor de $k_i = 6$. Se puede observar ya la forma de una órbita cuasiperiódica y una oscilación que se mantiene a lo largo del tiempo. En cambio, el último caso de estudio corresponde a un valor de $k_i = 12$. Los resultados se pueden observar en las figuras 41e y 41f. Se trata de una dinámica irregular, una oscilación que carece de repetitividad, es este comportamiento lo que se puede considerar caótico. La dinámica que exhibe este último caso expuesto es característico de los sistemas seccionalmente lineales que se han empleado a lo largo de la tesis, oscilan en una zona y conmutan a otra zona para oscilar irregularmente, dan un número indeterminado de vueltas y regresan al otro espacio en donde antes oscilaban para continuar haciéndolo, toda esta dinámica siempre en un espacio confinado.

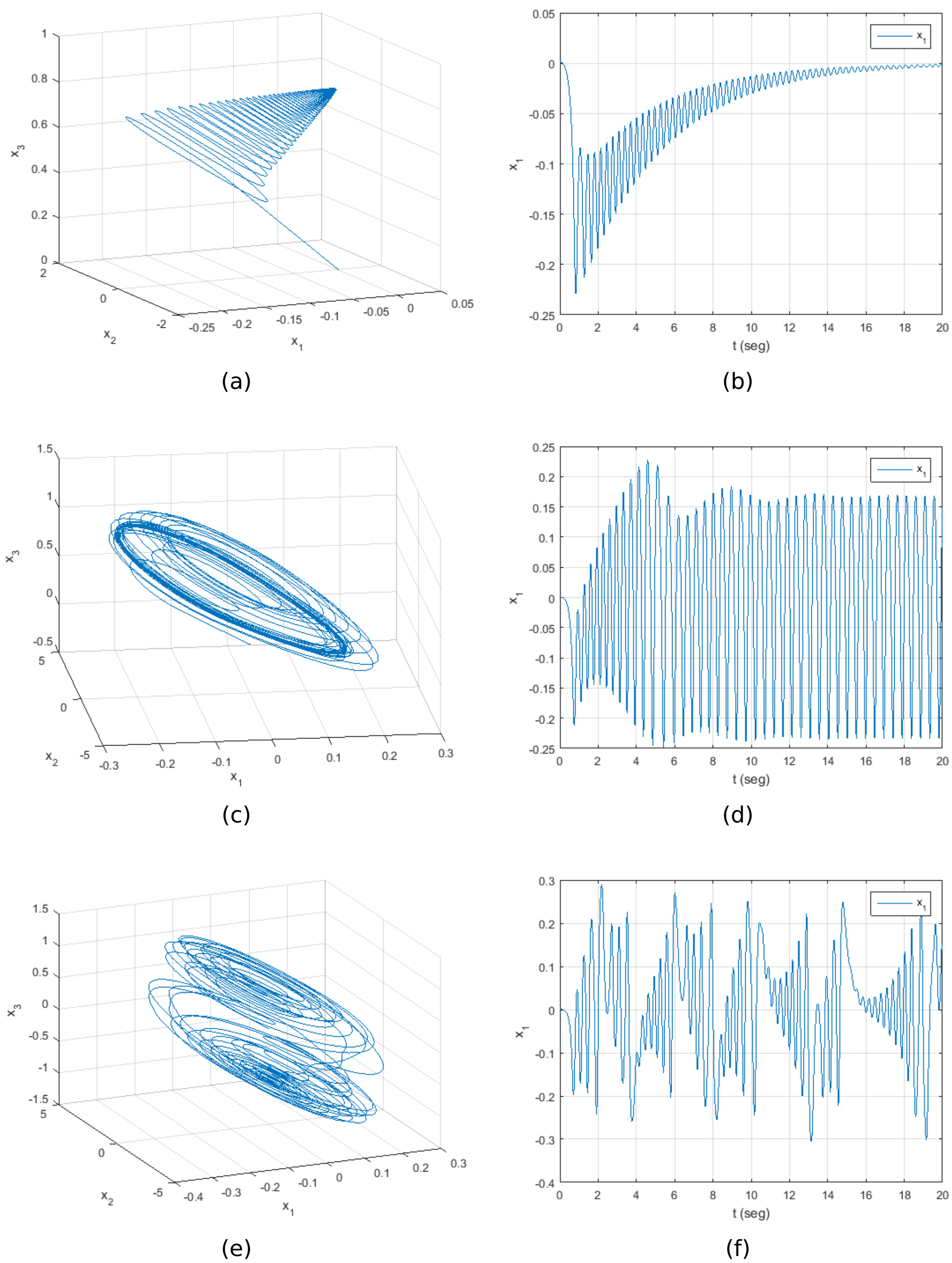


Figura 41. Resultados de simulación para sistema torsional, tres casos de estudio compuestos por atractor en tres dimensiones y la gráfica de posición angular de disco(x_1). Simulación bajo los parámetros $J = 0.0108\ kg.m^2$, $k = 1.37\ N/rad$, $b = 0.007\ kg/seg$, $k_p = 3$, $k_\varphi = 0.8$, $B_\varphi = 2$, a)-b) $k_i = 1$, c)-d) $k_i = 6$, e)-f) $k_i = 12$

4.3.3. Oscilaciones experimentales

Llevar a la práctica lo planteado en teoría conlleva a tener en cuenta que los parámetros que se utilizan en simulaciones presentan cierto grado de incertidumbre con respecto a los valores reales que el sistema físico experimenta, lo que significa que los valores de las ganancias empleados en la sección de la simulación no son los mismos para la parte experimental. Se debe tener especial cuidado por lo ya mencionado anteriormente; al aumentar el valor de la ganancia k_i del controlador se corre el riesgo de llegar al límite en donde el sistema se vuelve inestable, lo que podría producir daños irreversibles para el equipo empleado; por ello es importante establecer cotas o limitaciones en las señales generadas como medidas de seguridad.

El programa empleado para la parte experimental utiliza los mismos parámetros empleados en la simulación. Los resultados que se obtienen se exponen en la Figura 42. Los resultados experimentales son similares a los obtenidos en la simulación. Se tienen tres casos de comportamiento para el sistema para tres variaciones del parámetro k_i; el primer caso, presentado en la Figura 42a, exhibe que el sistema es llevado al punto de equilibrio en el origen. La Figura 42b, a diferencia la simulación, llega más rápido, posiblemente debido a una irregularidad en la identificación del parámetro de fricción, el cual no es fácil de identificar pero para los objetivos que se persiguen se considera aproximado. El segundo caso se trata de un comportamiento oscilatorio sostenido; es posible observar la órbita que se forma en la Figura 42c. Esta resulta muy similar a la obtenida en la simulación. La gráfica de posición angular está dada por la Figura 42d, revela la parte transitoria antes de que el sistema se estabilice en la oscilación. La oscilación que se muestra en la Figura 42e es un atractor característico de sistemas seccionalmente lineales (oscilaciones en espacios confinados). Además, que se obtuvo un atractor similar en la parte de simulación. La Figura 42f muestra el desplazamiento angular que manifiesta el disco en sus oscilaciones.

Es importante mencionar que las pruebas experimentales, inician con condiciones iniciales en cero porque el “encoder” del mecanismo así lo establece, basta con aplicar una pequeña perturbación para iniciar el experimento; por eso las gráficas tienen un tiempo muerto al inicio.

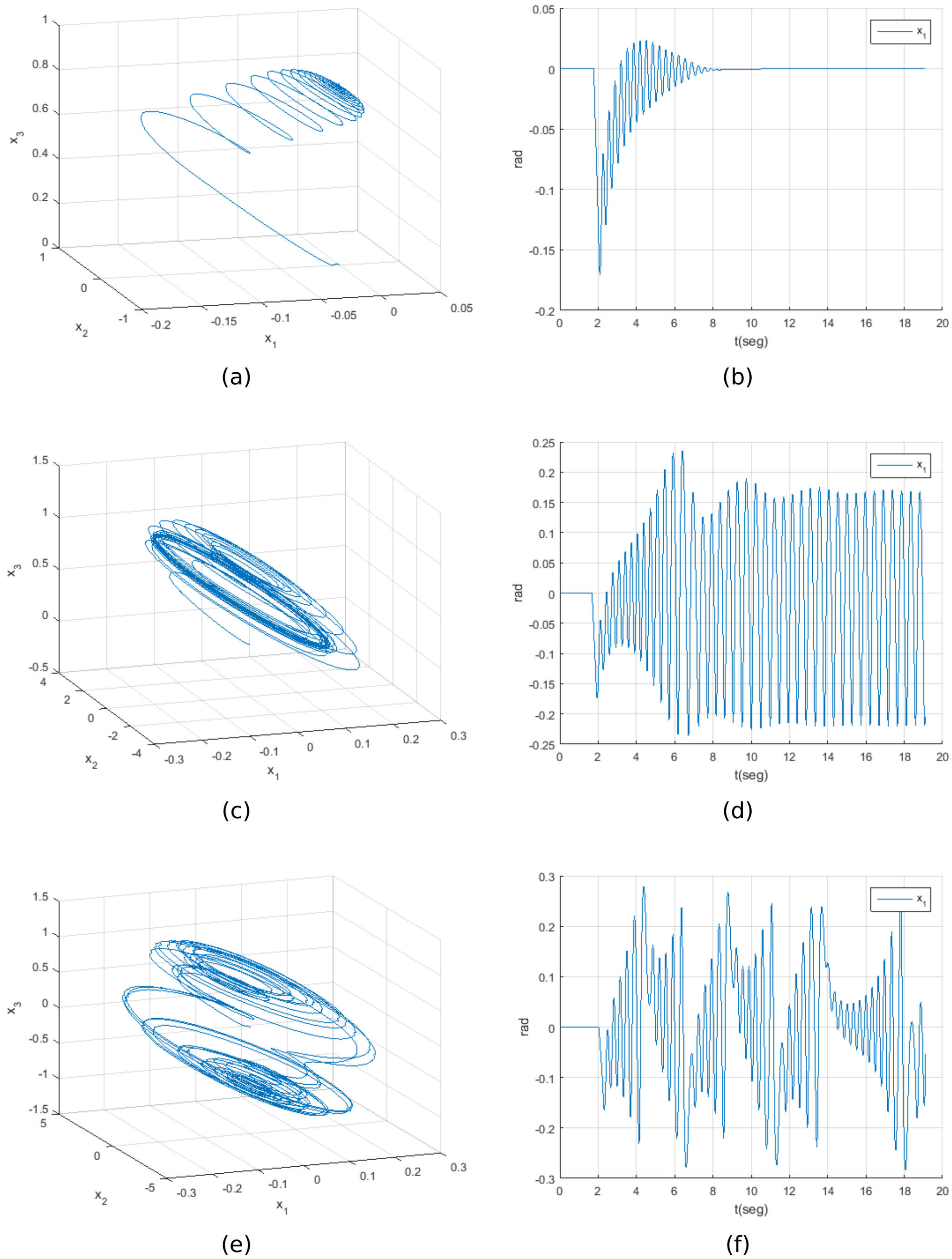


Figura 42. Resultados experimentales para sistema torsional, tres casos de estudio compuestos por atractor en tres dimensiones y la gráfica de posición angular de disco(x_1). Programa bajo los parámetros $J = 0.0108\ kg.m^2$, $k = 1.37\ N/rad$, $b = 0.007\ kg/seg$, $k_p = 3$, $k_\varphi = 0.8$, $B_\varphi = 2$, a)-b) $k_i = 6$, c)-d) $k_i = 10$, e)-f) $k_i = 12.5$

4.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se establece otro procedimiento para generar oscilaciones en sistemas seccionales basado en el concepto de pasividad. Se presenta un modelo muy empleado en el diseño de controladores: un lazo de retroalimentación conformado por una planta de segundo orden, un control PI y una linealidad por secciones que representa el actuador, modelo que describe un sin número de aplicaciones de control. Se plantea con este modelo utilizar el concepto de pasividad para garantizar estabilidad. Se requiere un modelo equivalente donde se manejen dos bloques en retroalimentación. Una vez logrado, se pueden aplicar las propiedades de semipasividad para lograr generar trayectorias acotadas en forma de oscilaciones. Se plantearon dos casos, como en el capítulo anterior, para aplicarle el método. El primero se trata de un modelo normalizado del circuito convertidor Buck, del cual se obtuvieron resultados representativos, ilustrando dinámicas pretendidas en la tesis. El segundo caso de estudio es el de un mecanismo torsional, el cual está disponible en el laboratorio de control del departamento. Se utilizó el método planteado y se obtuvieron oscilaciones sostenidas, generando comportamientos similares a los obtenidos en simulación numérica.

Capítulo 5. Conclusiones

El trabajo de investigación presentado en esta memoria de tesis ha sido enfocado a generar oscilaciones en sistemas seccionalmente lineales mediante dos técnicas. La primera, es una herramienta analítica para sistemas perturbados llamada teoría de Melnikov (Parker y Chua,1989). La segunda, es una adaptación de un concepto con un enfoque energético, como lo es la pasividad (Willems,1972).

Los resultados han sido comentados al final de cada capítulo; sin embargo, se hace un resumen a continuación de lo más importante.

Se plantean dos métodos para la generación de oscilaciones, el de Melnikov para sistemas de segundo orden y el de pasividad para sistemas de tercer orden. Es por eso que el trabajo se divide en dos secciones distintas, pero con el mismo objetivo, el de generar de diversas formas oscilaciones, ilustrarlas en simulación y experimentalmente.

El análisis de sistemas oscilatorios seccionalmente lineales de segundo orden se planteó en dos casos de estudio, ambos con presencia de conexiones globales, por lo cual eran candidatos al método de Melnikov para sistemas perturbados. Esta herramienta teórica, produce una desigualdad que depende de los parámetros del sistema; si esta se cumple la teoría dice que se tienen oscilaciones irregulares a caóticos. El hecho de que la desigualdad dependa solo de los parámetros del sistema y de la perturbación permite establecer criterios de diseño para la generación de oscilaciones. Se presenta un circuito oscilador equivalente a uno de los sistemas estudiados, obteniendo resultados que ilustran que el método tiene aplicaciones físicas que lo respaldan. Los resultados más importantes de ese capítulo son representados por la Figura 43, donde se muestra una comparativa de resultados; primero la simulación del caso de estudio, después la simulación del circuito que se pretende armar con los valores reales de componentes, y en tercer plano las mediciones reales en diagrama de fase. Se muestran atractores muy similares, uno que no cumple con las condiciones que el método de Melnikov establece (atractores superiores de Figura 43), mientras que otro sí cumple y exhibe comportamiento más irregular, de naturaleza caótica (atractores inferiores de Figura 43).

El segundo método planteado, a diferencia del de Melnikov, no requiere perturba-

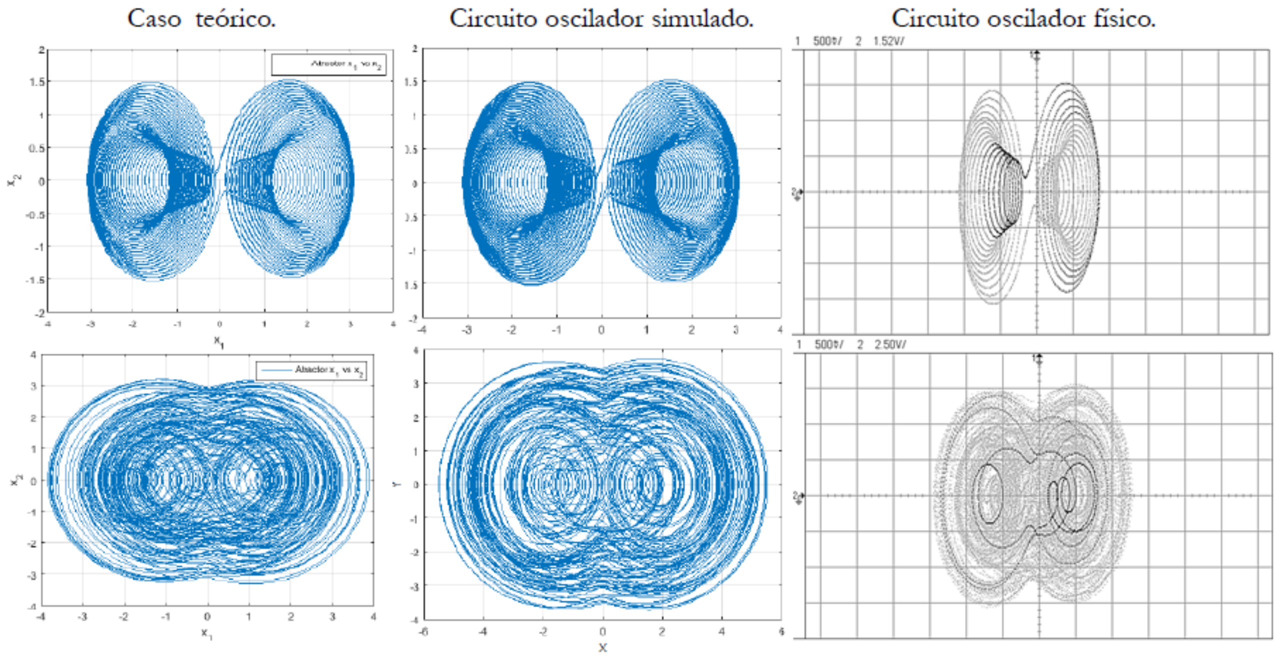


Figura 43. Comparativa de resultados del capítulo 3 (simulación de caso teórico-circuito simulado- mediciones del circuito).

ciones externas. El concepto de pasividad se utiliza por las propiedades que ofrece en sistemas retroalimentados. Se analiza un sistema de control clásico que constituye un esquema estándar en ingeniería de control. El método consiste en llevar al sistema a la forma de control clásico (un bloque pasivo retroalimentado negativamente con otro bloque semipasivo), con la finalidad de definir un sistema semipasivo de forma general. Las trayectorias de un sistema semipasivo están acotadas en un espacio; bajo esa premisa se contempla como método para generar oscilaciones. El primer sistema al cual se le aplica el método es un convertidor Buck, dando como resultado oscilaciones que generan atractores con formas muy singulares para tratarse de un simple convertidor. El siguiente sistema se basó en un mecanismo torsional con el que se cuenta en el Laboratorio de Control del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE; se modeló y aplicó el método de pasividad para generar oscilaciones. Los resultados de simulación y experimentales mostraron respuestas muy similares, mostrando que el método tiene aplicación en sistemas físicos.

Las figuras 44 y 45 son los resultados más ilustrativos de ese capítulo. Corresponden a respuestas del sistema torsional; se muestra posición angular del disco que se está girando y el atractor que se genera del retrato de fase de las tres variables de estado (ecuación (128)). La Figura 44 muestra el caso en donde los parámetros son

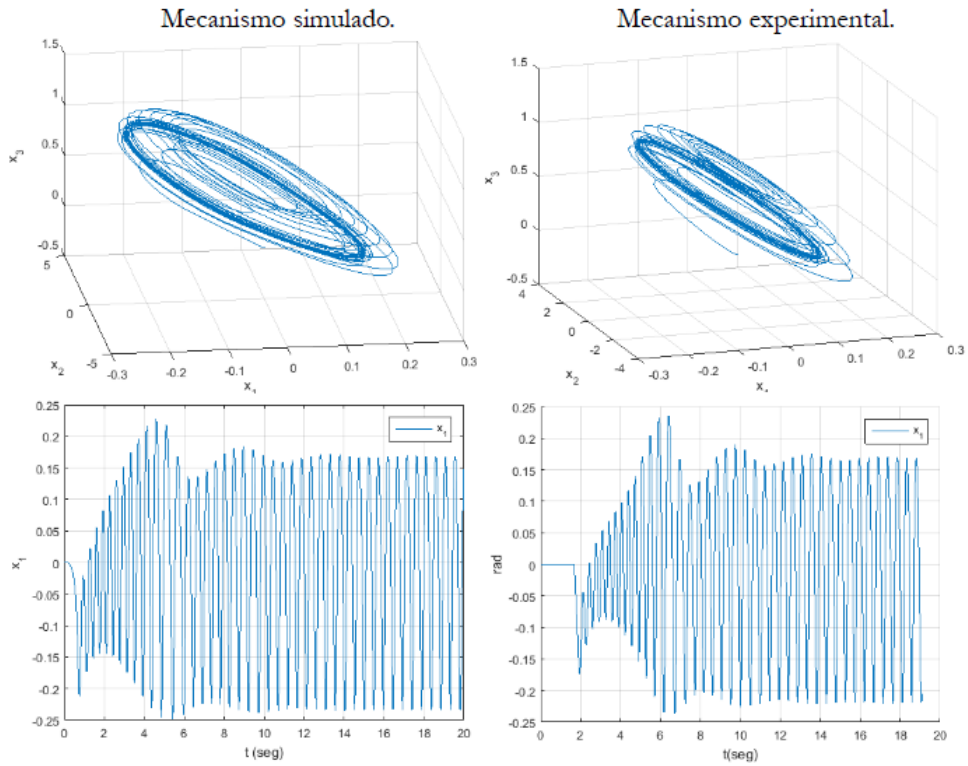


Figura 44. Comparativa de resultados de mecanismo torsional simulado contra mediciones de experimento, bajo los parámetros adecuados se obtuvo una órbita periódica.

ajustados para que el sistema comience a oscilar. Como se menciona anteriormente, se calculan valores para los cuales el sistema es pasivo y se garantiza la estabilidad al punto de equilibrio en el origen. Posteriormente se va variando la ganancia integral del controlador hasta obtener oscilaciones periódicas. Al seguir aumentado la ganancia las oscilaciones se vuelven más irregulares, de naturaleza caótica; es el caso de la Figura 45. El método se puede percibir un tanto empírico al ir aumentado la ganancia integral del controlador indiscriminadamente hasta obtener las oscilaciones. Sin embargo, se parte de una condición de estabilidad en donde no se corre riesgo de daños al equipo y eso, para consideraciones de diseño, es muy importante en la práctica. Además, se logra el objetivo de no solo generar las oscilaciones, sino de tener la capacidad de diseñar oscilaciones mediante la variación adecuada de parámetros, e.g., los parámetros de la no linealidad (lineal por secciones) que contiene el sistema clásico.

5.1. Trabajo a futuro

El objetivo general definido en la tesis planteó algunos estudios que al final se concretaron, pero cuyos resultados plantearon problemas que quedaron abiertos o sin

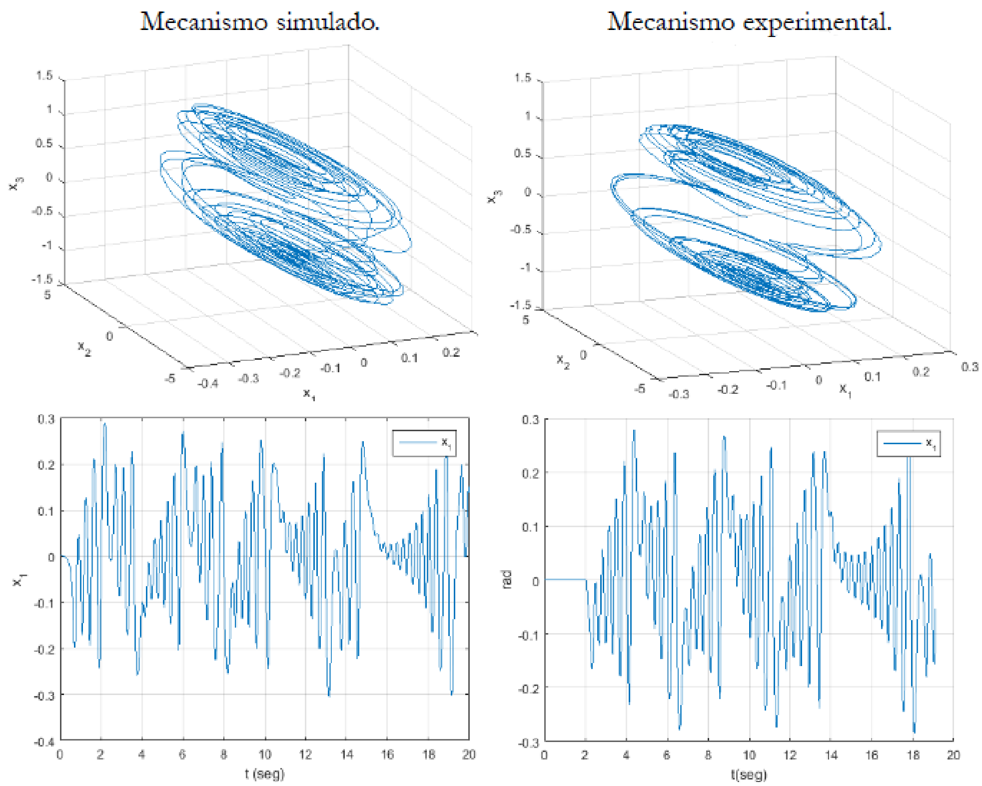


Figura 45. Comparativa de resultados de mecanismo torsional simulado contra mediciones de experimento, bajo los parámetros adecuados se obtiene un atractor con oscilaciones irregulares.

tratar; de ahí surgen temas de investigación que se sugieren trabajos futuros.

1. El método de Melnikov para sistemas perturbados basa su teorema en conexiones globales. Sin embargo, la existencia de estas órbitas es un tema bastante reciente. No existen herramientas matemáticas bien definidas para comprobar la existencia de conexiones globales en todos los sistemas, solo es posible calcularlas en sistemas que cumplan con determinadas características. Al principio de la tesis se tenía contemplado el aplicar una herramienta matemática para comprobar la existencia de conexiones globales en sistemas seccionalmente lineales (Castillo, Verduzco, 2015), en específico sistemas que modelan convertidores DC-DC (e.g., Buck, Boost y Buck-Boost). Sin embargo, los resultados no fueron los esperados al comprobar que la teoría matemática no aplicaba para dichos sistemas, por lo tanto no fue posible el utilizar el método de Melnikov para los modelos normalizados de los convertidores, ya que no se pudo calcular y comprobar la existencia de órbitas homoclínicas o heteroclínicas. Queda el problema abierto para futuras investigaciones el comprobar la existencia de dichas conexiones y aplicar el método descrito

en esta tesis.

2. El circuito oscilador utilizado para representar uno de los sistemas seccionales de segundo orden (Buscarino,2007), resultó ser un circuito bastante interesante por su construcción sencilla y sus dinámicas. Solo se describió de manera superficial su funcionamiento dado que no era el objetivo de la tesis enfocarse en un circuito oscilador en particular. No obstante, se sugiere una investigación sobre el mismo, utilizando componentes de precisión para obtener versiones alternas y de sincronización.

3. Aplicar el método basado en pasividad para un modelo normalizado del convertidor Buck dio como resultados oscilaciones con características especiales. Podría aplicarse en el modelo de un Buck real o en la familia completa de convertidores. Realizar una investigación completa de generación de oscilaciones en convertidores DC-DC basado en pasividad es un tema que se sugiere para trabajo a futuro, con la relevancia de manejar circuitos que son ampliamente usados en la electrónica de potencia actual.

4. El método descrito para generar oscilaciones por medio del concepto de pasividad depende en gran medida de la función seccionalmente lineal (no linealidad) elegida. Queda abierta la idea de utilizar funciones alternas, como una función tipo saturación en distintos modelos, por mencionar alguna.

Literatura citada

Alvarez, J. y Curiel, L. E. (1997). Bifurcations and chaos in a linear control system with saturated input. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **7**(08): 1811–1822.

Andronov, A. A., Vitt, A. A., y Khaikin, S. E. (2013). *Theory of Oscillators: Adiwes International Series in Physics*, Vol. 4. Elsevier.

Arena, P., Baglio, S., Fortuna, L., y Manganaro, G. (1995). Chua's circuit can be generated by cnn cells. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **42**(2): 123–125.

Ball, R. y Holmes, P. (2007). Dynamical systems, stability, and chaos. En: *Frontiers in Turbulence and Coherent Structures*. World Scientific, pp. 1–27.

Banerjee, S., Giaouris, D., Imrayed, O., Missailidis, P., Zahawi, B., y Pickert, V. (2011). Nonsmooth dynamics of electrical systems. En: *Circuits and Systems (ISCAS), 2011 IEEE International Symposium on*. IEEE, pp. 2709–2712.

Bao, J., Lee, P. L., y Ydstie, B. E. (2010). *Process control: the passive systems approach*.

Bennett, S. (1993). *A history of control engineering, 1930-1955*. Número 47. IET.

Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A. R., y Kowalczyk, P. (2008). *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, Vol. 163. Springer Science & Business Media.

Bernardo, M. D., Johansson, K. H., y Vasca, F. (2001). Self-oscillations and sliding in relay feedback systems: Symmetry and bifurcations. *International Journal of Bifurcation and chaos*, **11**(04): 1121–1140.

Buscarino, A., Fortuna, L., y Frasca, M. (2009). A new cnn-based chaotic circuit: experimental results. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **19**(08): 2609–2617.

Byrnes C. I., A. I. y Willems, J. C. (1991). Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **36**(11): 352–393.

Camlibel, M., Heemels, W., y Schumacher, J. (2003). Stability and controllability of planar bimodal linear complementarity systems. En: *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*. IEEE, Vol. 2, pp. 1651–1656.

Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., y Torres, F. (2004). Invariant manifolds of periodic orbits for piecewise linear three-dimensional systems. *IMA Journal of applied Mathematics*, **69**(1): 71–91.

Carmona, V., Fernández-Sánchez, F., García-Medina, E., y Teruel, A. E. (2010). Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **20**(1): 013124.

Castillo, J., Verduzco, F., y Femat, R. (2015). Conexiones globales en una clase de sistemas lineales por pedazos. *AMCA*.

Castro Lugo, J. G. (2014). *Dinámica caótica en sistemas discontinuos en el plano*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Chintan, T. (2011). *Implementation of an Advanced Controller on a Torsional Mechanism*. Tesis de doctorado, Cleveland State University.

Colombo, A., Di Bernardo, M., Hogan, S., y Jeffrey, M. (2012). Bifurcations of piecewise smooth flows: Perspectives, methodologies and open problems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **241**(22): 1845–1860.

Cortés Rodríguez, D. d. J. (2004). *Generación de voltajes de CA mediante convertidores de alta frecuencia de conmutación*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Danca, M.-F. (2015). Continuous approximations of a class of piecewise continuous systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **25**(11): 1550146.

Fernández Rosales, Y. I. (2010). Fundamentos de sistemas dinámicos oscilatorios. *Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla*.

Filippov, A. F. (2013). *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, Vol. 18. Springer Science & Business Media.

Khalil, H. K. (1996). Noninear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, **2**(5): 5–1.

Llibre, J., Novaes, D. D., y Teixeira, M. A. (2015). Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, **82**(3): 1159–1175.

Miranda Velasco, M. M. (2009). *Dinámica compleja en el convertidor reductor ("buck")*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Nagy, I. (2001). Nonlinear phenomena in power electronics. *Automarika-Zagreb-*, **42**(3/4): 117–132.

Ogata, K. y Yang, Y. (2002). *Modern control engineering*, Vol. 4. Prentice-Hall India.

Parker, T. S. y Chua, L. (2012). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Science & Business Media.

Sepulchre, R., Jankovic, M., y Kokotovic, P. V. (2012). *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media.

Slotine, J.-J. E., Li, W., *et al.* (1991). *Applied nonlinear control*, Vol. 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.

Steur, E., Tyukin, I., y Nijmeijer, H. (2009). Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **238**(21): 2119–2128.

Utkin, V. I. (2013). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media.

Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Vol. 2. Springer Science & Business Media.

Willems, J. C. (1972). Dissipative dynamical systems part ii: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for rational mechanics and analysis*, **45**(5): 352–393.

Wood, J. R. (1989). Chaos: a real phenomenon in power electronics. En: *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 1989. APEC'89. Conference Proceedings 1989., Fourth Annual IEEE*. IEEE, pp. 115–124.

Zhusubaliyev, Z. T. y Mosekilde, E. (2003). *Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems*. World Scientific.

Anexos

Diagrama de circuito oscilador

Se agrega un diagrama eléctrico del circuito oscilador montado en la tableta de pruebas, del cual se reportan las mediciones. Cabe mencionar que se hicieron aproximaciones en los valores de resistencias con valores cercanos, también se hicieron arreglos de capacitores. Las variables de interés están ubicadas en la salida de los OP-AMPs: U3C y U5D, de la Figura 46.

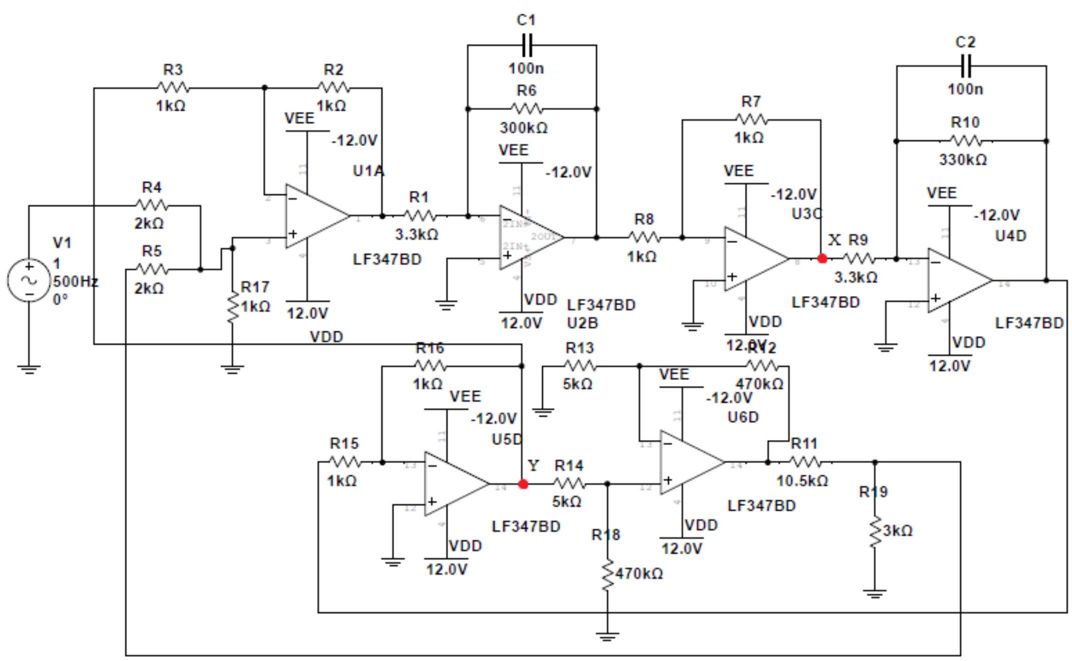


Figura 46. Diagrama eléctrico circuito oscilador (Buscarino,2007).

Mecanismo torsional

La configuración empleada para el experimento del mecanismo se muestra en la Figura 47, se habilita el disco de la parte inferior, se retira el disco central y se ancla el disco superior para que no forme parte de la planta.

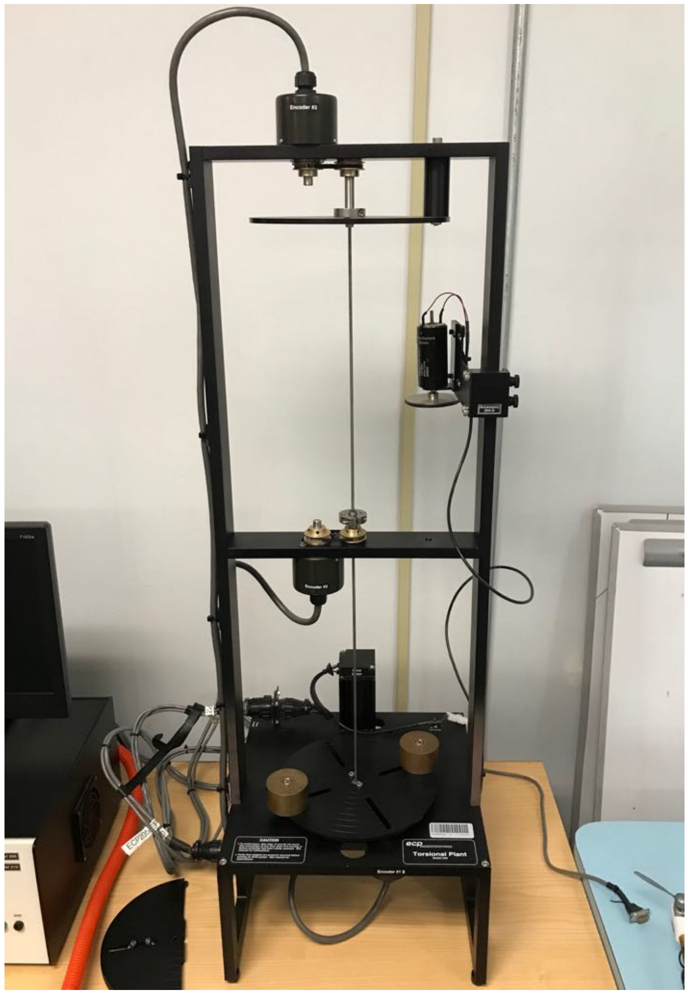


Figura 47. Fotografía de planta torsional montada en laboratorio.

El resorte central es una varilla metálica bastante rígida, que permite al disco girar aproximadamente 25 grados antes de llegar al límite de resistencia. Las masas están fijas al disco a una distancia de 9*cm* del punto central del disco, una distancia distinta altera el momento de inercia del disco. En la Figura 48 se muestra el disco que experimenta las oscilaciones que fueron generadas por el método de pasividad.

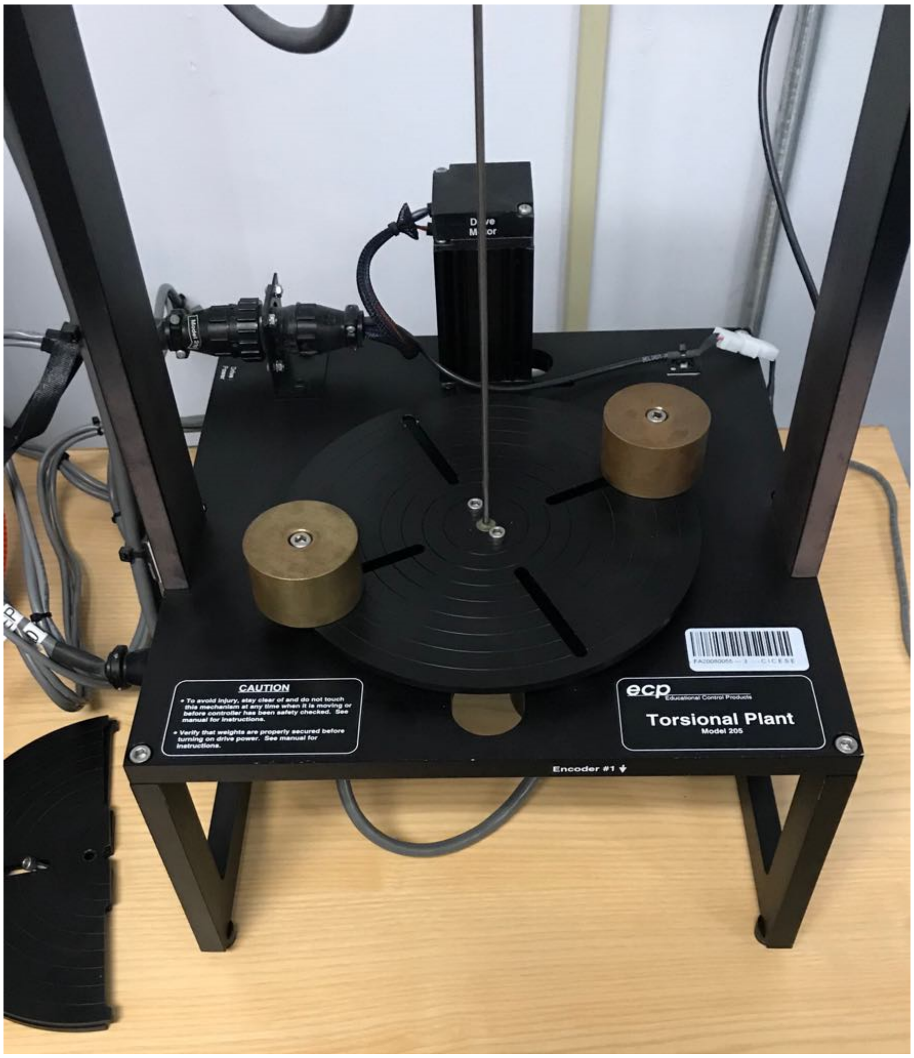


Figura 48. Fotografía de planta torsional montada en laboratorio. Acercamiento al disco que se le aplica control.