

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación
en Instrumentación y Control**

**Sincronización de sistemas vía acoplamientos
dinámicos**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Eduardo García Montes

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por

Eduardo García Montes

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Director de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Dr. José Ricardo Cuesta García

Dr. Adrián Arellano Delgado

Dr. Josué Álvarez Borrego



Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Eduardo García Montes © 2018

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Eduardo García Montes como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Sincronización de sistemas vía acoplamientos dinámicos

Resumen aprobado por:

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Director de tesis

En la literatura actual, existen diferentes esquemas de interconexión para inducir sincronización en sistemas dinámicos. Por ejemplo, se tiene el acoplamiento estático maestro-esclavo, el acoplamiento difuso, el acoplamiento bidireccional, entre otros. Sin embargo, para algunos sistemas, estos esquemas de sincronización tienen dos limitaciones importantes: 1) inducen sincronización para un intervalo muy pequeño de valores de la llamada fuerza de acoplamiento, 2) para ciertos sistemas es imposible inducir sincronización usando estos esquemas. En esta tesis, se presenta un esquema de sincronización que remueve las limitaciones antes mencionadas. En particular, se considera un esquema de sincronización dinámico maestro-esclavo, donde el sistema esclavo interactúa de manera indirecta con el sistema maestro, a través de un sistema dinámico descrito por ecuaciones diferenciales lineales, el cual puede ser de primer o segundo orden. La estabilidad de la solución síncrona es investigada usando la teoría de Lyapunov para sistemas perturbados, el enfoque de la función maestra de estabilidad, y el máximo exponente transversal de Lyapunov. Los resultados analíticos obtenidos se ilustran mediante simulaciones numéricas y se validan de forma experimental, usando circuitos electrónicos. Como ejemplos particulares, se consideran las dinámicas de osciladores mecánicos armónicos y osciladores de Rössler caóticos. Finalmente, el esquema de sincronización aquí propuesto se extiende al caso de redes de sistemas acoplados y se demuestra que este permite sincronizar un número arbitrariamente grande de nodos en una red para la cual los esquemas clásicos de sincronización fallan. En resumen, esta tesis presenta una nueva metodología de sincronización para sistemas dinámicos, la cual remueve las limitaciones observadas en esquemas clásicos de sincronización. Esto se demuestra de manera analítica, numérica y experimental.

Palabras clave: sincronización, acoplamiento dinámico, oscilador caótico

Abstract of the thesis presented by Eduardo García Montes as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunicatios with orientation in Instrumentation and Control.

Synchronization of systems via dynamic couplings

Abstract approved by:

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Thesis Director

There exist different synchronization schemes for inducing synchronization in dynamical systems. For example, the well-known master-slave configuration, diffusive coupling, bidirectional coupling, just to mention a few. However, for certain systems, these schemes have some limitations: 1) synchronization is induced in a very narrow interval of coupling strength values, and 2) for certain systems, these schemes cannot induce synchronization at all. In this thesis, a novel synchronization scheme, which removes the aforementioned limitations, is presented. In particular, a modified master-slave scheme, in which the interaction between the master and slave systems is indirect via a first or second order dynamical system, is considered. The stability of the synchronous solution is investigated by using the Lyapunov theory for perturbed systems, the master stability function approach and the largest transverse Lyapunov exponent. The obtained analytic results are illustrated by means of computer simulations and experimentally validated by using electronic circuits. As particular examples, the dynamics of a harmonic mechanical oscillator and the dynamics of the chaotic Rossler system are considered. Finally, the synchronization scheme presented here is extended to the case of networks. In particular, it is demonstrated that the proposed scheme allows synchronizing an arbitrarily large number of nodes in a network, for which a traditional coupling scheme fails. In summary, this thesis presents a novel methodology for synchronizing dynamical systems, which removes the limitations observed in other synchronization schemes reported in the literature. The performance of the proposed scheme is analytically, numerically, and experimentally demonstrated.

Keywords: synchronization, dynamical coupling, chaotic oscillator

Dedicatoria

***A mi familia, gracias por todo su amor, apoyo
y motivación.***

***A la memoria de mi padre,
Eduardo García Pérez.***

Agradecimientos

A mi familia, por estar conmigo en los momentos más difíciles y también en los más alegres de mi vida. Gracias por tanto amor.

A los miembros del comité de tesis: Jonatán Peña, Joaquín Álvarez, Ricardo Cuesta, Adrián Arellano y Josué Álvarez, por sus instrucciones a lo largo de este trabajo, consejos y aportaciones. En especial a mi director Jonatán Peña por permitirme trabajar con él en esta tesis, además por ser una gran persona y brindarme todo el conocimiento posible, así como alentarme a superarme e intentar nuevos retos.

A mis amigos más cercanos de casi toda la vida y a mis nuevos amigos de CICESE: Gerardo, Fernando, Jessica, Edwin, René, Adán, Edén, Gustavo, Ernesto y Víctor. Gracias por su amistad.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por darme la oportunidad de formar parte de la familia CICESE y superarme académicamente.

Por último, a mi país México, por brindarme el apoyo económico a través del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) para realizar mis estudios de maestría.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xi
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Historia de la sincronización	2
1.2. Definiciones formales de sincronización	3
1.3. Esquemas clásicos de sincronización	4
1.4. Panorama general de esta tesis	6
1.4.1. Motivación	6
1.4.2. Objetivo general	7
1.4.3. Objetivos específicos	7
1.4.4. Contribuciones	7
1.4.5. Productos generados	8
1.4.6. Estructura de la tesis	8
Capítulo 2. Esquema de sincronización maestro-esclavo clásico y sus limitaciones	
2.1. Configuración maestro-esclavo con acoplamiento estático	9
2.2. Análisis de estabilidad usando la teoría de Lyapunov	10
2.3. Función maestra de estabilidad	11
2.4. Ejemplos	12
2.4.1. Ejemplo 1: Oscilador armónico	12
2.4.2. Ejemplo 2: Oscilador caótico	14
2.5. Conclusión	16
Capítulo 3. Sincronización maestro-esclavo vía acoplamiento dinámico de primer orden	
3.1. Esquema de sincronización propuesto	17
3.2. Sintonización de los parámetros del acoplamiento dinámico	18
3.3. Función Maestra de Estabilidad	19
3.4. Ejemplos de aplicación	19
3.4.1. Ejemplo 1: revisión del oscilador armónico	20
3.4.2. Ejemplo 2: revisión del oscilador caótico de Rössler	21
3.5. Limitaciones del acoplamiento dinámico	29
3.6. Resultados experimentales	29
3.7. Conclusión	34

Tabla de contenido (continuación)

Capítulo 4. Sincronización maestro-esclavo vía acoplamiento dinámico de segundo orden

4.1. Sintonización de los parámetros del acoplamiento dinámico de segundo orden	36
4.2. Función Maestra de Estabilidad	36
4.3. Ejemplos de aplicación	37
4.3.1. Ejemplo 1: revisión del oscilador armónico	37
4.3.2. Ejemplo 2 revisión del oscilador caótico de Rössler	39
4.3.3. Resultados experimentales	47
4.4. Discusión	50

Capítulo 5. Sincronización de Redes

5.1. Sincronización de redes mediante acoplamientos estáticos	53
5.1.1. Función Maestra de Estabilidad	54
5.2. Sincronización de redes mediante acoplamientos dinámicos	56
5.2.1. Análisis de estabilidad: Función Maestra de Estabilidad	57
5.3. Ejemplos: Sincronización de redes	59
5.3.1. Ejemplo 1: Sincronización mediante un acoplamiento estático de una red de osciladores armónicos	59
5.3.2. Ejemplo 2: Sincronización mediante un acoplamiento dinámico de una red de osciladores armónicos	61
5.3.3. Ejemplo 3: Sincronización mediante un acoplamiento estático de una red de osciladores caóticos	63
5.3.4. Ejemplo 4: Sincronización mediante un acoplamiento dinámico de una red de osciladores caóticos	68

Capítulo 6. Conclusiones

Literatura citada	75
Anexo	77

Lista de figuras

Figura	Página
1. Christiaan Huygens.	2
2. Dibujo original de Christiaan Huygens donde ilustra su experimento con dos relojes de péndulo colocados en un mismo soporte.	2
3. Ilustración del robot Da Vinci y su centro de control.	5
4. Ilustración esquemática del experimento de combustión sincronizada. (a) Una vela en combustión constante. (b) Tres velas en combustión oscilatoria. (c) Dos grupos de tres velas en combustión sincronizada. Link: https://www.youtube.com/watch?v=ndNBSgUd-vU	6
5. Representación esquemática de la configuración maestro-esclavo con acoplamiento estático.	10
6. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	16
7. Esquema de la configuración propuesta maestro-esclavo con acoplamiento dinámico.	18
8. Resultados numéricos del ejemplo de dos osciladores armónicos con acoplamiento dinámico, véase (87)-(41). En <i>a</i>) se muestra la posición del sistema maestro y del esclavo. En <i>b</i>) se muestra la dinámica del acoplamiento dinámico propuesto.	21
9. <i>Configuración 2</i> \rightarrow 1. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	24
10. <i>Configuración 1</i> \rightarrow 2. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	27
11. λ_{max}^\perp calculado en función de la fuerza de acoplamiento k . Esquema clásico (línea punteada) vs esquema propuesto (línea sólida).	28
12. Fotografía de la implementación.	30
13. Diagrama electrónico del sistema (57)-(59).	31
14. Atractor caótico del circuito de Rössler maestro en el plano (\bar{x}_m, \bar{y}_m)	32
15. Sistemas desacoplados. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s	32
16. Sistemas acoplados y sincronizados. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s	32
17. Plano de fase (\bar{y}_m, \bar{y}_s)	33
18. Señal de acoplamiento h cuando los sistemas están desacoplados.	33
19. Señal de acoplamiento h cuando $\bar{y}_m \approx \bar{y}_s$	33

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
20. Simulación del ejemplo de dos osciladores armónicos interconectados mediante el acoplamiento dinámico de segundo orden descrito en las Ecs. (67)-(69). En <i>a</i>) se muestra la posición del sistema maestro y del esclavo. En <i>b</i>) se muestra la dinámica del segundo estado h_2 del acoplamiento dinámico de orden 2 propuesto, el cual es el que se utiliza para acoplar los dos sistemas.	39
21. λ_{max}^\perp en función de la fuerza de acoplamiento k para la <i>configuración</i> $1 \rightarrow 1$. La línea punteada representa λ_{max}^\perp para el esquema estático. La línea sólida muestra λ_{max}^\perp para el esquema dinámico maestro-esclavo de segundo orden.	43
22. <i>Configuración</i> $1 \rightarrow 2$. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	44
23. <i>Configuración</i> $2 \rightarrow 1$. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	45
24. <i>Configuración</i> $2 \rightarrow 2$. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k	46
25. Diagrama electrónico de la implementación del sistema (90)-(92) con circuitos electrónicos.	48
26. Sistemas desacoplados. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s	49
27. Sistemas acoplados y sincronizados con $k = 20$. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s	49
28. Plano (\bar{y}_m, \bar{y}_s)	49
29. Señal de acoplamiento h_2 cuando los sistemas están desacoplados.	50
30. Señal de acoplamiento h_2 cuando $\bar{y}_m \approx \bar{y}_s$	50
31. λ_{max}^\perp calculado en función de k . Esquema dinámico de primer orden vs esquema dinámico de segundo orden.	51
32. λ_{max}^\perp calculado en función de k . Esquema dinámico de primer orden (línea gris) vs esquema dinámico de segundo orden (línea negra).	52
33. Esquema gráfico: Cadena direccional con acoplamientos estáticos	60
34. Esquema gráfico: Cadena direccional con acoplamientos dinámicos.	61
35. Simulación del ejemplo de una red de 10 osciladores armónicos interconectados mediante acoplamientos dinámicos de segundo orden. En <i>a</i>) se muestra la posición. En <i>b</i>) se muestra la dinámica del segundo estado h_2 de los acoplamientos dinámicos de segundo orden.	63

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
36. Esquema gráfico: Topología en estrella con acoplamientos estáticos.	63
37. λ_{max}^{\perp} con respecto a la fuerza de acoplamiento k . La línea punteada representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 2 nodos acoplados. La línea sólida representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 25 nodos acoplados.	67
38. Ampliación de la Figura 37.	67
39. Esquema gráfico: Topología en estrella con acoplamientos dinámicos.	68
40. λ_{max}^{\perp} con respecto a la fuerza de acoplamiento k . La línea sólida clara representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 2 nodos acoplados. La línea punteada representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 25 nodos acoplados. La línea sólida oscura representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 50 nodos acoplados.	71

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Configuraciones posibles de entradas y salidas del sistema.	25
2. Ecuaciones variacionales.	26
3. Configuraciones posibles.	40

Capítulo 1. Introducción

Sincronización se refiere a la *acción y efecto de sincronizar* y a su vez sincronizar se define como *hacer que coincidan en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos* (Real Academia Española, 2014). La palabra sincronización se deriva de los vocablos griegos *χρόνος* (cronos) y *σύν* (sin) que significan tiempo y al mismo, respectivamente. Entonces, la palabra *síncrono* significa al mismo tiempo.

El fenómeno de sincronización es ampliamente encontrado en la naturaleza. Algunos ejemplos son: el reloj biológico del cuerpo humano el cual se sincroniza a los ciclos de luz y oscuridad, el comportamiento sincronizado de las aves al batir sus alas, el aplauso coordinado de una audiencia, la velocidad sincronizada de la Luna al girar sobre su propio eje y al trasladarse alrededor de la Tierra, luciérnagas emitiendo pulsos coordinados de luz, violinistas en una orquesta tocando al unísono, las células que controlan los latidos del corazón, entre otros. Ya sea de manera microscópica o macroscópica, el fenómeno de sincronización está presente en la vida cotidiana de cada uno de los seres vivos.

En el párrafo anterior, solo se han mencionado algunos ejemplos en que la sincronización ocurre de forma natural. Sin embargo, el fenómeno de sincronización puede ser inducido de manera artificial por medio de una acción de control. Algunos ejemplos en los que se puede observar sincronización controlada son: los sistemas de telecomunicaciones, cuyos sistemas de transmisión y recepción deben operar de manera sincronizada, las líneas autónomas de producción, circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, entre otros.

El ingrediente clave para que exista el fenómeno de sincronización, es que debe de existir un medio, llamado *acoplamiento* a través del cual los sistemas se transfieren energía entre sí hasta lograr que sus ritmos se ajusten (Pikovsky *et al.*, 2003).

1.1. Historia de la sincronización

Las primeras notas históricas que hablan sobre el fenómeno de sincronización se deben al trabajo del científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695), Figura 1, quien realizó contribuciones importantes en astronomía, óptica, y diseño de relojes de péndulo y telescopios. Christiaan Huygens fue el primero en observar que dos relojes de péndulo colgados sobre el mismo soporte (una barra de madera), Figura 2, mostraban sincronización en fase contraria, es decir, los péndulos oscilaban a la misma frecuencia pero en direcciones opuestas. Es interesante mencionar que la primera mención del descubrimiento de Huygens se puede encontrar en una carta que él mismo le escribió a su padre el 26 de febrero de 1665, en la cual no solo escribió detalladamente una descripción del fenómeno que observó en sus relojes, sino que dió una excelente descripción cualitativa del fenómeno de sincronización. Aunque en ese tiempo Huygens no contaba con herramientas matemáticas de análisis, si pudo descubrir que el secreto detrás de la *simpatía* de sus relojes eran las pequeñas vibraciones que se transmitían de un reloj a otro a través del soporte donde estaban colocados (Pena, 2013; Pikovsky *et al.*, 2003).

Huygens se refirió a este fenómeno como la "*simpatía de los relojes*".



Figura 1. Christiaan Huygens.

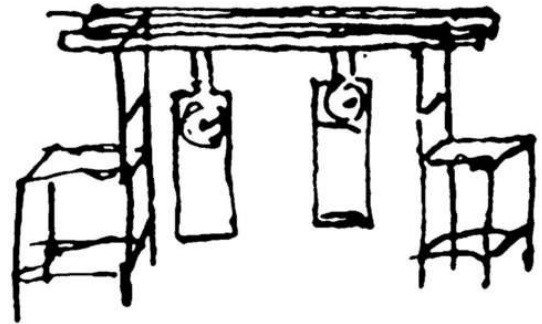


Figura 2. Dibujo original de Christiaan Huygens donde ilustra su experimento con dos relojes de péndulo colocados en un mismo soporte.

1.2. Definiciones formales de sincronización

La palabra sincronización se encuentra a lo largo de este trabajo. Por lo tanto, es importante remarcar que en realidad se está hablando de sincronización completa, es decir, que dos osciladores acoplados presenten la misma dinámica oscilatoria al mismo tiempo.

Entonces, es importante definir formalmente lo anterior, (Pena, 2013). Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{Bz}, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (3)$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ son los vectores de estado, las funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ son suficientemente suaves y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es un vector de entrada. Nótese que las ecuaciones (1) y (2) representan un par de sistemas idénticos (osciladores), donde el sistema esclavo es influenciado por el sistema maestro mediante la dinámica del sistema (3), el cual es el acoplamiento dinámico.

Se derivaron las siguientes definiciones:

Definición 1.1 *Respecto a los sistemas (1) y (2) se dice que exhiben sincronización asintótica y completa si las soluciones $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ del sistema (1)-(3) con condiciones iniciales $\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0)$ satisfacen*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) := \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = 0. \quad (4)$$

Experimentalmente es imposible tener dos sistemas (1) y (2) idénticos y por ese motivo no es posible cumplir con (4), por lo que, para el caso experimental, se plantea el concepto de sincronización práctica, (Pena, 2013).

Definición 1.2 Con respecto a los sistemas (1) y (2) se dice que exhiben sincronización práctica si las soluciones $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ del sistema (1)-(3) con condiciones iniciales $\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0)$ satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{e}(t)| := |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \epsilon, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{z}(t)| \leq \tau. \quad (5)$$

para $\epsilon, \tau > 0$.

1.3. Esquemas clásicos de sincronización

En la literatura actual, se pueden encontrar diversas técnicas para la sincronización de sistemas dinámicos. Por ejemplo, el acoplamiento estático maestro-esclavo, el acoplamiento difuso, el acoplamiento a través del ambiente, entre otros (Pikovsky *et al.*, 2003). Un factor importante a considerar es la fuerza y naturaleza del acoplamiento, porque de esto depende la existencia de diferentes fenómenos de sincronización como lo son: la sincronización en fase, sincronización en contra fase y sincronización completa, entre otros (Resmi *et al.*, 2010). Para el caso de redes de sistemas dinámicos, además del acoplamiento, se debe de considerar la topología de la red, la cual define la forma en que los elementos de la red interactúan entre sí. La configuración de estrella, de anillo o de mundo pequeño, son algunos ejemplos de topología de red.

Dos esquemas que son de particular importancia por su aplicabilidad y relativamente fácil implementación son el esquema maestro-esclavo y el esquema de acoplamiento indirecto, los cuales se detallan a continuación.

Un acoplamiento maestro-esclavo es aquel donde interactúan dos o más sistemas (circuitos, mecanismos, por mencionar algunos) y un sistema toma el papel del sistema maestro, el cual dicta la dinámica/comportamiento que se busca para los sistemas esclavos acoplados. Un ejemplo ilustrativo es el robot quirúrgico Da Vinci, Figura 3, el cual es un robot esclavo que recibe órdenes de una computadora/controlador a distancia que es operada por un médico cirujano. Lo interesante de dividir en dos sistemas a este robot quirúrgico, es la posibilidad de realizar operaciones complicadas a distancia, lo cual es muy conveniente en especial para las zonas rurales aisladas o zonas con pocos especialistas en esta área de la medicina.



Figura 3. Ilustración del robot Da Vinci y su centro de control.

Por otra parte, existe el llamado acoplamiento a través del ambiente, el cual se presenta en Katriel (2008). En este esquema, los sistemas tienen una interacción indirecta a través de un sistema dinámico. Además, se supone que la interacción de los sistemas con el acoplamiento dinámico es débil. Este tipo de acoplamiento tiene diversas aplicaciones. Por ejemplo, en Resmi *et al.* (2010), se muestra un estudio en el cual se utiliza un acoplamiento indirecto a través del ambiente, donde presentan sincronización de sistemas caóticos, además de encontrar diferentes comportamientos de sincronización, por ejemplo, en fase o contra fase.

Un ejemplo ilustrativo de sincronización en sistemas que interactúan de manera indirecta es el desarrollado en Kitahata *et al.* (2009). En dicha referencia se presenta un estudio sobre la combustión sincronizada observada en un arreglo de velas, Figura 4. El estudio revela que una sola vela exhibe una combustión estable. Sin embargo, si se agrupan tres velas, la combustión de éstas será oscilatoria. Y finalmente, si se consideran dos grupos de tres velas cada uno, la combustión en las velas será oscilatoria y sincronizada. Dependiendo de la distancia entre los grupos de velas, la combustión será sincronizada en fase o contra fase. Lo interesante de este estudio es que el ambiente, es decir, lo que rodea a las velas y hace que se sincronicen, está actuando indirectamente. Nótese que el aire entre las velas actúa de igual manera que la barra de madera en el experimento de Huygens.

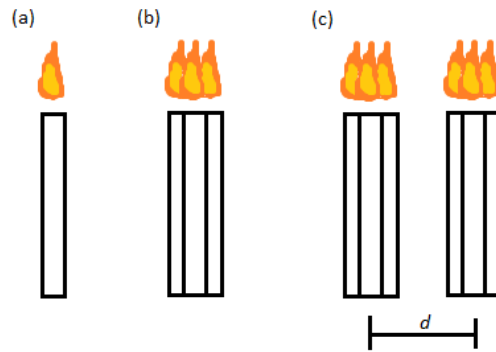


Figura 4. Ilustración esquemática del experimento de combustión sincronizada. (a) Una vela en combustión constante. (b) Tres velas en combustión oscilatoria. (c) Dos grupos de tres velas en combustión sincronizada. Link: <https://www.youtube.com/watch?v=ndNBSgUd-vU>.

1.4. Panorama general de esta tesis

1.4.1. Motivación

Aunque los acoplamientos y topologías antes mencionados inducen sincronización en cierto tipo de sistemas, véase por ejemplo (Pecora y Carroll, 1990; Dörfler *et al.*, 2013; Strogatz, 2000), se ha encontrado que para ciertos sistemas, como por ejemplo algunos sistemas caóticos, dichos acoplamientos y topologías exhiben al menos dos limitaciones importantes: 1) inducen sincronización para un intervalo muy pequeño de valores de la llamada fuerza de acoplamiento, 2) para ciertos sistemas es imposible inducir sincronización usando estos esquemas. Además, existen topologías de red con acoplamientos estáticos, en las cuales la sincronización se pierde cuando el número de osciladores en la red es "grande".

Por lo tanto, en esta tesis se busca remover las limitaciones antes mencionadas, por medio de diseñar acoplamientos dinámicos de primer y segundo orden.

Una de las potenciales aplicaciones de la tesis propuesta es en redes con topología cambiante y en redes donde el número de nodos en la red es arbitrariamente grande. Tal es el caso de las redes de energía eléctrica, donde la sincronización de los generadores que componen la red es de vital importancia (Motter *et al.*, 2013).

Por último, el interés de investigar la dinámica de sistemas acoplados se puede resumir en la posibilidad de describir comportamientos realistas de procesos físicos, químicos, económicos, biológicos, entre otros (Mosekilde *et al.*, 2002). En cuanto a

las aplicaciones tecnológicas, la sincronización es de suma importancia en líneas de producción de ensamble (coordinación de mecanismos y/o procesos), en la sincronización de redes de distribución eléctrica, y en comunicaciones móviles, por mencionar algunos (Pena Ramirez *et al.*, 2016; Wang *et al.*, 2016).

1.4.2. Objetivo general

Diseñar acoplamientos dinámicos, es decir, acoplamientos descritos por ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden que permitan sincronizar sistemas dinámicos que no son sincronizables con técnicas actuales.

1.4.3. Objetivos específicos

- Diseñar acoplamientos dinámicos, los cuales estarán inspirados en el llamado “acoplamiento a través del ambiente” (Katriel, 2008), el cual es descrito por una ecuación diferencial de primer orden y también el acoplamiento tipo Huygens (Pena Ramirez *et al.*, 2014), el cual es de segundo orden. Dichos acoplamientos se utilizarán para sincronizar pares y redes de sistemas con el objetivo de determinar las ventajas y desventajas de estos acoplamientos con respecto a los acoplamientos estáticos.
- Probar analíticamente que los acoplamientos dinámicos inducen sincronización en sistemas acoplados y en redes con topologías arbitrarias, donde los acoplamientos tradicionales no pueden inducir sincronía o lo hacen en un intervalo pequeño.
- Validar experimentalmente los resultados analíticos y numéricos obtenidos.

1.4.4. Contribuciones

Este trabajo de tesis presenta un esquema de sincronización aplicable a sistemas dinámicos con dinámica oscilatoria, el cual permite inducir sincronización aún en casos donde los esquemas actuales fallan.

1.4.5. Productos generados

A lo largo del trabajo de tesis, se escribieron y sometieron los siguientes artículos:

- Los resultados del acoplamiento dinámico de primer orden se sometieron a la revista científica *International Journal of Control* bajo el título de *Master-slave synchronization via dynamic control*. Actualmente está en segunda revisión.
- Los resultados del acoplamiento dinámico de segundo orden se presentarán en el congreso *Analysis and Control of Chaotic Systems - 5th CHAOS 2018* de IFAC (*International Federation of Automatic Control*), a celebrarse del 31 de Octubre al 2 de Noviembre de 2018, en Eindhoven Holanda, bajo el título de *Indirect Master-Slave synchronization: experimental results*.

1.4.6. Estructura de la tesis

En el presente trabajo se realiza un estudio de manera analítica, numérica y experimental, sobre la aplicación de acoplamientos dinámicos para la sincronización de sistemas. La tesis está estructurada de la siguiente manera.

En el capítulo 2, se presenta la configuración maestro-esclavo clásico y sus limitaciones.

Después, en el capítulo 3, se propone el diseño de un acoplamiento dinámico maestro-esclavo de primer orden y se obtiene una ecuación variacional para estudiar la estabilidad de la solución síncrona.

Posteriormente, en el capítulo 4, se introduce un nuevo esquema de sincronización maestro-esclavo con acoplamiento dinámico. Se muestra, por medio de ejemplos particulares, que al incrementar el orden del acoplamiento se favorece la aparición de sincronización.

Luego, en el capítulo 5, se investiga el desempeño del acoplamiento dinámico de segundo orden presentado en el Capítulo 4, en el contexto de redes. En particular, se presenta un estudio comparativo para una red en estrella, primero con acoplamientos estáticos y después con acoplamientos dinámicos.

Finalmente, en el capítulo 6 se tiene una sección de discusiones y conclusiones.

Capítulo 2. Esquema de sincronización maestro-esclavo clásico y sus limitaciones

En este capítulo se presenta el esquema maestro-esclavo con acoplamiento estático y se introducen las herramientas de análisis utilizados para estudiar la estabilidad de la solución síncrona. Además, por medio de dos ejemplos, se muestran algunas de las limitaciones que tiene este esquema de sincronización.

2.1. Configuración maestro-esclavo con acoplamiento estático

El esquema maestro-esclavo clásico con acoplamiento estático se muestra en la Figura 5. Este esquema de sincronización está descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones, ver (Brown *et al.*, 1994),

$$\text{Maestro : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \\ y_m = \mathbf{C}\mathbf{x}_m, \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Esclavo : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) + \mathbf{B}u_s, \\ y_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s, \end{cases} \quad (7)$$

donde $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de estado del sistema maestro y esclavo, respectivamente, la función \mathbf{F} se supone que es suficientemente suave y, en general, no lineal, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entrada del sistema esclavo y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es el vector de salida. Por último, $y_m, y_s \in \mathbb{R}$ son las salidas *escalares* de los sistemas, y la señal escalar de control $u_s \in \mathbb{R}$ es definida como

$$u_s = k(y_m - y_s) = k\mathbf{C}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (8)$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$ es la fuerza de acoplamiento.

Dados los vectores de entrada \mathbf{B} y de salida \mathbf{C} , el problema se reduce a obtener un valor para la fuerza del acoplamiento k que garantice que el sistema maestro y esclavo se sincronicen en el sentido de la Definición 1.1, es decir, la fuerza de acoplamiento k debe ser elegida tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m(t) - \mathbf{x}_s(t) = 0. \quad (9)$$

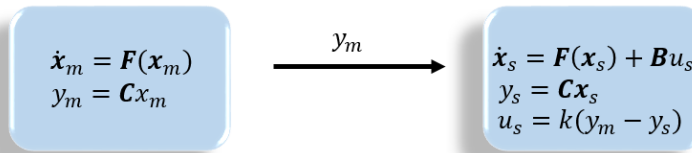


Figura 5. Representación esquemática de la configuración maestro-esclavo con acoplamiento estático.

2.2. Análisis de estabilidad usando la teoría de Lyapunov

Para analizar la estabilidad de la solución síncrona (9), se define el error de sincronización $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$. Usando (6)-(8), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - k\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{e}. \quad (10)$$

A continuación, se considera que la función \mathbf{F} se puede separar en una parte lineal y una no lineal, es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \quad i = m, s, \quad (11)$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de constantes y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ es un vector que contiene las no linealidades. Sustituyendo la Ec.(11) en la Ec.(10), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}} = \underbrace{(\mathbf{A} - k\mathbf{B}\mathbf{C})}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{e} + \mathbf{g}(t, \mathbf{e}), \quad (12)$$

donde $\mathbf{g}(t, \mathbf{e}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_m - \mathbf{e})$. Se supone que alrededor de la solución síncrona, es decir, alrededor de $\mathbf{e} = 0$, el término $\mathbf{g}(t, \mathbf{e})$ puede ser visto como una perturbación desvaneciente que satisface

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{e})\| \leq \gamma\|\mathbf{e}\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathbf{D}, \quad (13)$$

donde γ es una constante no negativa y $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $\mathbf{e} = 0$. Como se presenta en el Capítulo 9 en (Khalil, 2002), la cota γ está dada por

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})}, \quad (14)$$

donde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la solución a la ecuación de Lyapunov $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$, donde \mathbf{Q} es la matriz identidad $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y λ_{\min} , λ_{\max} denotan el valor propio mínimo y máximo,

respectivamente. Finalmente, si el término de perturbación satisface Ec.(13) con γ dada en Ec.(14), entonces una condición suficiente para la estabilidad local del sistema (12), es que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ debe ser Hurwitz, (Khalil, 2002).

2.3. Función maestra de estabilidad

Otro método de análisis comúnmente usado para estudiar la estabilidad de la solución sincrona en sistemas acoplados es la Función Maestra de Estabilidad (MSF por sus siglas en inglés), véase (Pecora y Carroll, 1998).

Como primer paso en el análisis, el sistema esclavo se linealiza alrededor de la trayectoria \mathbf{x}_m del sistema maestro dado en Ec.(6). Por lo tanto, el sistema esclavo (7) se reescribe como

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{DF}(\mathbf{x}_m)(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s) + k\mathbf{BC}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (15)$$

donde $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_m)}{\partial \mathbf{x}_m}$ es el Jacobiano de la función \mathbf{F} evaluado en una trayectoria \mathbf{x}_m del sistema maestro. El siguiente paso es la definición de los errores de sincronización, es decir, $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$. Entonces, utilizando las ecuaciones (6) y (15), se obtiene la siguiente ecuación variacional

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) - k\mathbf{BC}] \mathbf{e}. \quad (16)$$

El análisis numérico de estabilidad local de (16) se realiza usando el máximo exponente transverso de Lyapunov, (Pikovsky *et al.*, 2003), el cual es definido de la siguiente manera

$$\lambda_{max}^{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\ln |\mathbf{e}(t)|}{\ln |\mathbf{e}(0)|}. \quad (17)$$

En particular, se tienen las siguientes condiciones:

- Si $\lambda_{max}^{\perp} < 0$, la solución sincrona es estable.
- Si $\lambda_{max}^{\perp} > 0$, la solución sincrona es inestable.

2.4. Ejemplos

A continuación, se presentan dos ejemplos, los cuales muestran algunas de las limitaciones que tiene el esquema maestro-esclavo clásico.

2.4.1. Ejemplo 1: Oscilador armónico

Un ejemplo simple pero ilustrativo, es el caso de dos osciladores lineales armónicos acoplados. Primero, se define la dinámica del oscilador armónico, la cual está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\mathbf{x}, \quad (18)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (19)$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ es el vector de estados, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son la posición y velocidad del oscilador respectivamente, $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema. Además,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}_+$ es la frecuencia natural del oscilador y \mathbf{C} indica que solamente se tiene acceso a la posición del oscilador. A continuación, se mostrará que para el oscilador lineal armónico dado en (18)-(20), el esquema estático maestro-esclavo no puede inducir sincronización. Como primer paso, considere el esquema maestro-esclavo clásico (6)-(8) con

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{E}\mathbf{x}_i, \quad u_s = k(y_m - y_s) = k\mathbf{C}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (21)$$

para $i = m, s$. Considerando que el oscilador esclavo solamente puede ser afectado en el segundo estado, se considera el siguiente vector de entrada

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Después, se obtiene la dinámica del error (12), la cual está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = \underbrace{(\mathbf{A} - k\mathbf{B}\mathbf{C})}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{e}, \quad (23)$$

con

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - k & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Por último, se obtienen los valores propios de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dada en (24), los cuales son

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-(\omega^2 + k)}. \quad (25)$$

De la Ec.(25) es claro ver que se tienen tres escenarios posibles para los valores que k puede tener:

- si $k > -\omega^2$ los valores propios (25) son complejos conjugados con parte real 0, por lo que la dinámica del error es oscilatoria.
- si $k = -\omega^2$ ambos valores propios (25) son 0, por lo que la dinámica del error es constante.
- y por último, si $k < -\omega^2$ los valores propios (25) son reales, uno positivo y otro negativo, por lo que la dinámica del error es inestable.

Como conclusión, no existe valor para la fuerza de acoplamiento k con la cual la dinámica del error (23) sea asintóticamente estable. Por lo tanto, el esquema maestro-esclavo clásico con acoplamiento estático no puede inducir sincronización en el oscilador esclavo.

2.4.2. Ejemplo 2: Oscilador caótico

Otro sistema para el cual la configuración maestro-esclavo clásica no induce sincronización, es el sistema caótico de Rössler, el cual está descrito por las siguientes ecuaciones (Rössler, 1976)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + a y, \\ \dot{z} &= b + (x - c) z,\end{aligned}\tag{26}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ son las variables de estado y a , b y c son parámetros positivos. Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, en (Huang *et al.*, 2009), se hace un estudio acerca de varios tipos de osciladores caóticos acoplados, donde se muestra que existen configuraciones de entrada y salida con las cuales no es posible llegar a una solución síncrona para dos sistemas Rössler acoplados utilizando el esquema maestro-esclavo clásico con acoplamiento estático.

Para mostrar esto, considere un par de sistemas de Rössler en configuración maestro-esclavo y suponga que la salida de cada oscilador es la variable y . Por otra parte, considere el caso en que el oscilador esclavo puede ser actuado solamente en su primera ecuación. Entonces, el par de osciladores de Rössler con acoplamiento maestro-esclavo estático puede escribirse en la forma (6)-(7) con

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} -y_i - z_i, \\ x_i + a y_i, \\ b + (x_i - c) z_i, \end{bmatrix}, \quad i = m, s, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\tag{27}$$

En este punto es conveniente reescribir la función $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ dada en Ec.(27) de la siguiente forma (véase Ec.(11))

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_i + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i z_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad i = m, s.\tag{28}$$

El siguiente paso es definir los errores de sincronización $e_x = x_m - x_s$, $e_y = y_m - y_s$ y $e_z = z_m - z_s$. Consecuentemente, la dinámica del error puede escribirse en la forma de

la Ec.(12) con $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -(k+1) & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_m e_z + z_m e_x - e_x e_z \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Por último, se obtiene el polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dada en Ec.(29), el cual está dado por

$$P(\lambda) := \det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}) = (c + \lambda)(\lambda^2 - a\lambda + k + 1) = 0. \quad (30)$$

De este polinomio característico se puede ver claramente que no existe valor para la fuerza de acoplamiento k que pueda hacer que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz, dado que el parámetro a del sistemas Rössler es siempre positivo.

Adicionalmente, se estudia la estabilidad local utilizando la Función Maestra de Estabilidad. El primer paso es obtener la ecuación variacional (16), la cuál para el ejemplo bajo consideración está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -(k+1) & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_m & 0 & (x_m - c) \end{bmatrix} \mathbf{e}. \quad (31)$$

Dado que la Función Maestra de Estabilidad es un cálculo numérico, se toman los siguientes valores $a = b = 0.2$ y $c = 5.7$, (Rössler, 1976). El máximo exponente transverso de Lyapunov, denotado por λ_{max}^\perp se calcula mediante una variante modificada del algoritmo de Wolf (Wolf *et al.*, 1985). En la Figura 6 se muestra el λ_{max}^\perp en función de la fuerza de acoplamiento k , donde se ve claramente que el λ_{max}^\perp se mantiene positivo sin importar el valor de k , por lo tanto, la solución síncrona de los sistemas acoplados es inestable.

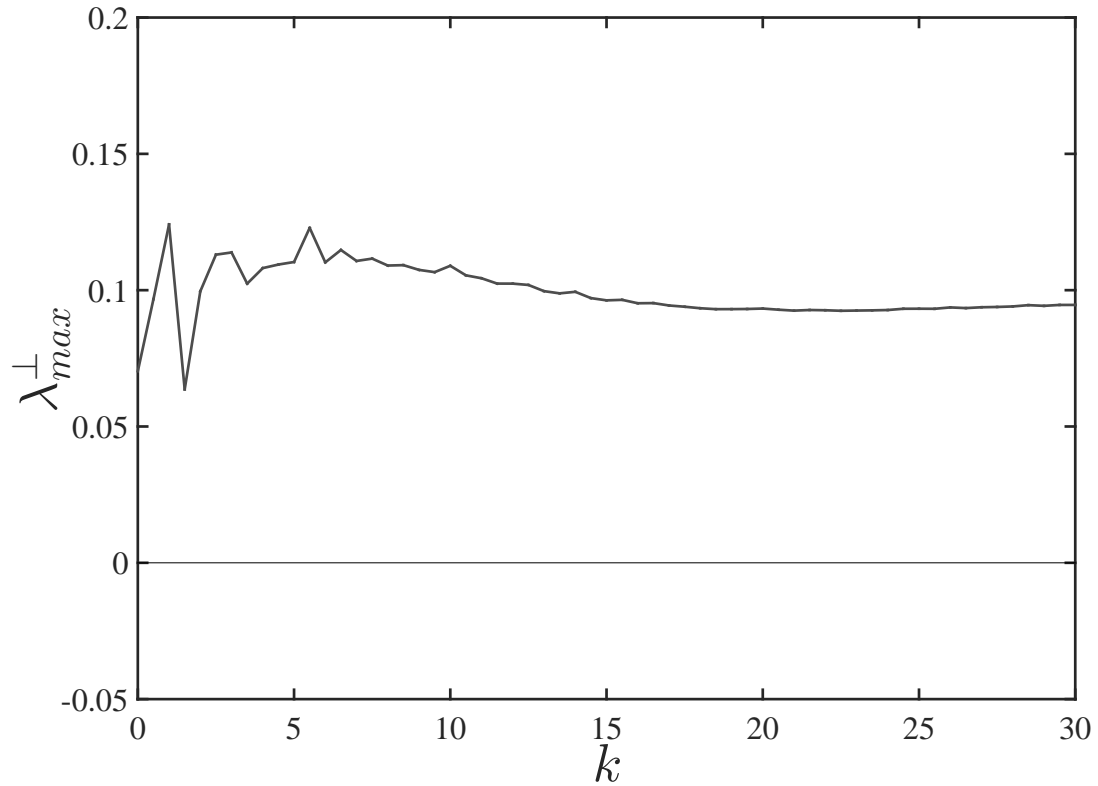


Figura 6. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^{\perp} , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

2.5. Conclusión

En conclusión, se ha demostrado mediante los ejemplos aquí presentados que el esquema clásico falla al inducir sincronización para ciertos casos.

Capítulo 3. Sincronización maestro-esclavo vía acoplamiento dinámico de primer orden

En este capítulo se propone una solución potencial para combatir las limitaciones que presenta la configuración maestro-esclavo con retroalimentación estática de salida (6)-(8). En particular, se presenta una estrategia de sincronización en la que el acoplamiento estático clásico es reemplazado por un acoplamiento dinámico de primer orden.

Se mostrará que el esquema de sincronización propuesto permite sincronizar sistemas que no son sincronizables usando un esquema clásico de sincronización, donde el acoplamiento es estático.

3.1. Esquema de sincronización propuesto

El siguiente esquema de acoplamiento dinámico de primer orden es propuesto

$$\text{Maestro} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \\ y_m = \mathbf{C}\mathbf{x}_m, \end{cases} \quad (32)$$

$$\text{Esclavo} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - \mathbf{B}h, \\ y_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s, \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{Acoplamiento Dinámico} : \begin{cases} \dot{h} = -\alpha h + u_s, \end{cases} \quad (34)$$

donde $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de estado de los sistemas maestro y esclavo, respectivamente, y $h \in \mathbb{R}$ es el estado del acoplamiento dinámico. Los vectores $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ así como la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se definieron anteriormente, véase la Ec. 7 y u_s está definida en la Ec.(8) con $k \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

La configuración maestro-esclavo con acoplamiento dinámico propuesta se puede visualizar de manera gráfica en Figura 7.

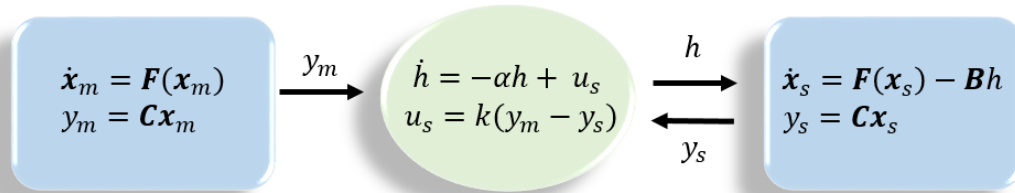


Figura 7. Esquema de la configuración propuesta maestro-esclavo con acoplamiento dinámico.

3.2. Sintonización de los parámetros del acoplamiento dinámico

Como en el caso estático, véase la Sección 2.2, se utiliza la teoría de Lyapunov para sistemas perturbados con el propósito de sintonizar los parámetros del acoplamiento dinámico (34).

Como primer paso, se definen los errores de sincronización: $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$ y h . Notar que h es considerada como un error porque la variable h se debería desvanecer cuando los sistemas acoplados están sincronizados.

Usando las Ecs. (32)-(34) con $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$, $i = m, s$, definida en (11), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -k\mathbf{C} & -\alpha \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ h \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}(t, \mathbf{e}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})}, \quad (35)$$

donde $\mathbf{g}(t, \mathbf{e}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_m - \mathbf{e})$, ver (12), $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \ h]^T$ y el término $\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})$ es una perturbación desvaneciente ya que alrededor de la solución síncrona, es decir, alrededor de $\tilde{\mathbf{e}} = 0$, satisface

$$\|\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})\| \leq \gamma \|\tilde{\mathbf{e}}\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{e}} \in \mathbf{D}, \quad (36)$$

donde $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $\tilde{\mathbf{e}} = 0$. Por lo tanto, los valores de los parámetros k y α , correspondientes al acoplamiento dinámico deben escogerse tal que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ en (35) sea una matriz Hurwitz.

3.3. Función Maestra de Estabilidad

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, ver Sección 2.3, la Función Maestra de Estabilidad se utiliza como una alternativa para el estudio de la solución síncrona de los sistemas acoplados.

De acuerdo al procedimiento descrito en Pecora y Carroll (1998), el primer paso es linealizar el sistema esclavo alrededor de la solución síncrona, es decir,

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{DF}(\mathbf{x}_m)(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s) - \mathbf{B}h, \quad (37)$$

donde $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_m)}{\partial \mathbf{x}_m}$ es el Jacobiano de la función evaluado en la trayectoria \mathbf{x}_m del sistema maestro.

El siguiente paso es la definición de los errores de sincronización, $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$ y h . Entonces, utilizando las ecuaciones (32), (37) y (34), se obtiene la siguiente ecuación variacional

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) & \mathbf{B} \\ -k\mathbf{C} & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ h \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Finalmente, la estabilidad local es determinada por el máximo exponente transversal de Lyapunov λ_{max}^\perp , véase la Ec.(17), el cual es calculado de la ecuación variacional (38).

- Si $\lambda_{max}^\perp < 0$, entonces la solución síncrona $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s$, $h = 0$ en el sistema (32)-(34) es localmente estable.
- Si $\lambda_{max}^\perp > 0$, entonces la solución síncrona es inestable.

3.4. Ejemplos de aplicación

En esta sección se presentan dos ejemplos de aplicación del esquema propuesto de sincronización. Además, los resultados obtenidos se comparan con el método estático clásico. En primer lugar, se presenta un ejemplo de dos osciladores armónicos simples, donde debido a que la dinámica del error es lineal se pueden encontrar condiciones que garanticen que la solución síncrona es globalmente asintóticamente estable. En el

segundo ejemplo, un par de osciladores caóticos Rössler acoplados mediante el esquema propuesto es analizado mediante la teoría de Lyapunov para sistemas perturbados y la Función Maestra de Estabilidad. Los ejemplos considerados son los mismos mostrados en la Sección 2.4 para los cuales se mostró que el esquema clásico no induce sincronización.

3.4.1. Ejemplo 1: revisión del oscilador armónico

Considere nuevamente el ejemplo 2.4.1 correspondiente a un oscilador armónico. Aplicando el esquema propuesto (32)-(34), los osciladores con acoplamiento dinámico están descritos por

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{E}\mathbf{x}_m, \quad (39)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{E}\mathbf{x}_s - \mathbf{B}h, \quad (40)$$

$$\dot{h} = -\alpha h - k\mathbf{C}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (41)$$

donde \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{C} se definieron en (20) y (22). Si se define el error de sincronización $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$ y h , se tiene que la dinámica del error está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{B} \\ -k\mathbf{C} & -\alpha \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ h \end{bmatrix}. \quad (42)$$

El polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ está dado por

$$p(\lambda) := \det(\lambda\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}) = (\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda\omega^2 + \alpha\omega^2 + k) = 0. \quad (43)$$

Aplicando el criterio de estabilidad Routh-Hurwitz para polinomios de tercer orden, se pueden encontrar condiciones que aseguren que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz. Dichas condiciones son

$$\alpha > 0 \quad \text{y} \quad -\alpha\omega^2 < k < 0, \quad (44)$$

donde la ganancia α y la fuerza de acoplamiento k son parámetros de diseño del esquema propuesto de sincronización. Cabe mencionar que para este ejemplo la fuerza de acoplamiento k es negativa. Dado que la dinámica del error es lineal, véase la Ec.

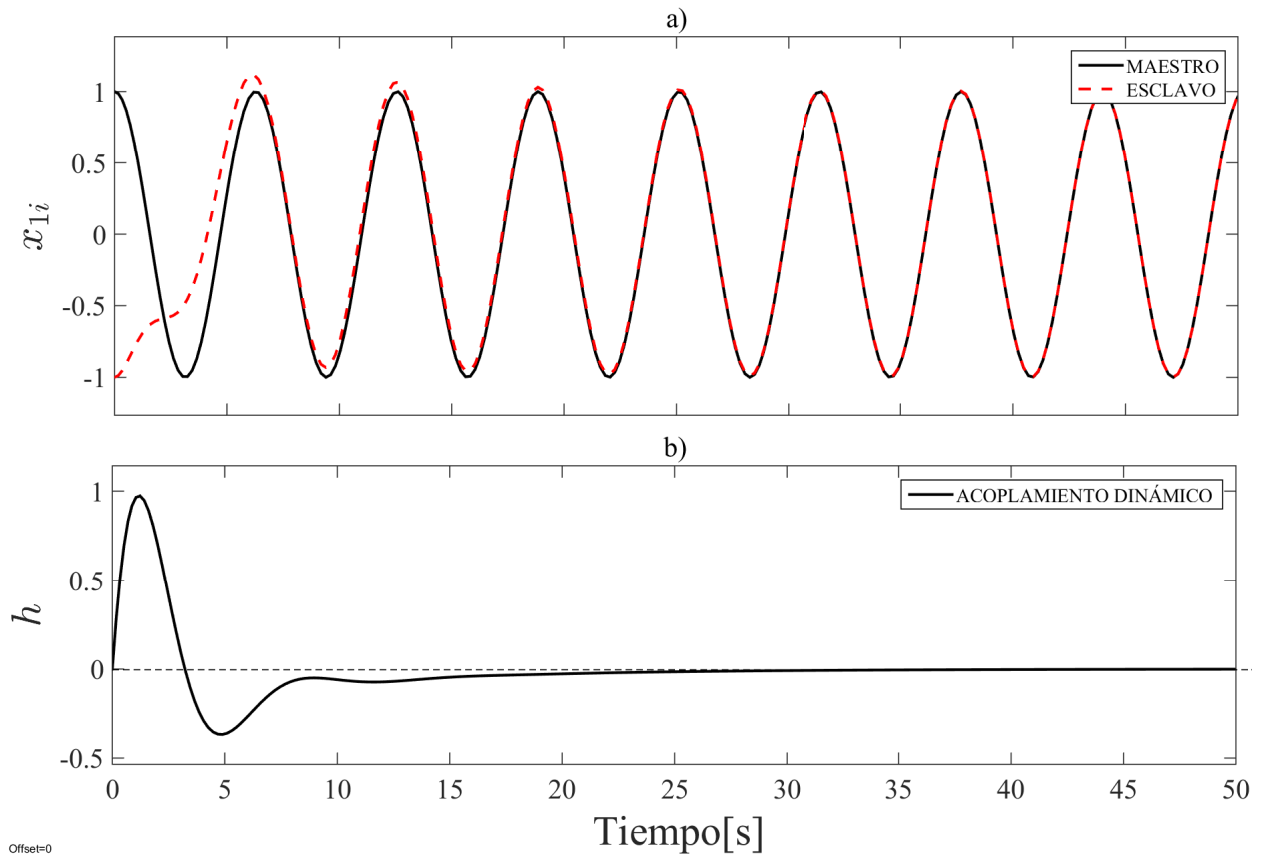


Figura 8. Resultados numéricos del ejemplo de dos osciladores armónicos con acoplamiento dinámico, véase (87)-(41). En *a*) se muestra la posición del sistema maestro y del esclavo. En *b*) se muestra la dinámica del acoplamiento dinámico propuesto.

(42), las condiciones (44) son condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad global de los sistemas acoplados, es decir, los sistemas maestro y esclavo eventualmente se sincronizarán para cualquier condición inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. En la Figura 8, se muestra una simulación para dos osciladores armónicos acoplados dinámicamente. Para generar estos resultados numéricos, se integró numéricamente el sistema (39)-(41) con \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{C} dadas en (20), (22) y los siguientes parámetros: $\omega = 1$, $\alpha = 1$, $k = -0.9$. Y las condiciones iniciales para ambos sistemas son $\mathbf{x}_m(0) = [1 \ 0]$ y $\mathbf{x}_s(0) = [-1 \ 0]$.

3.4.2. Ejemplo 2: revisión del oscilador caótico de Rössler

Ahora se considera el ejemplo 2.4.2 correspondiente al oscilador caótico de Rössler. Sustituyendo $\mathbf{F}(x_i), i = m, s$, \mathbf{B} y \mathbf{C} como están dados en la Ec.(27) en el esquema de sincronización propuesto dado en Ecs.(32)-(34), se obtiene

$$\text{Maestro : } \begin{cases} \dot{x}_m = -y_m - z_m, \\ \dot{y}_m = x_m + ay_m, \\ \dot{z}_m = b + (x_m - c) z_m, \end{cases} \quad (45)$$

$$\text{Esclavo : } \begin{cases} \dot{x}_s = -y_s - z_s - h, \\ \dot{y}_s = x_s + ay_s, \\ \dot{z}_s = b + (x_s - c) z_s, \end{cases} \quad (46)$$

$$\text{Acoplamiento Dinámico : } \begin{cases} \dot{h} = -\alpha h - k(y_m - y_s). \end{cases} \quad (47)$$

La dinámica del error de sincronización $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \ h]^T$ con $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$, donde $e_x = x_m - x_s$, $e_y = y_m - y_s$, $e_z = z_m - z_s$ puede ser escrita de la forma (35) con

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -k & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_m e_3 + z_m e_1 - e_1 e_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

El polinomio característico de $\tilde{\mathbf{A}}$ es definido por

$$\bar{P}(\lambda) := \det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}) = (c + \lambda)(\lambda^3 + (\alpha - a)\lambda^2 + (1 - a\alpha)\lambda + \alpha + k) = 0. \quad (49)$$

Utilizando el criterio de estabilidad Routh-Hurwitz, se pueden encontrar condiciones que aseguren que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz, las cuales son las siguientes

$$\alpha > -a, \quad -\alpha < k < a\alpha(a - \alpha) - a. \quad (50)$$

Por lo tanto es posible escoger valores para los parámetros de diseño α y k del acoplamiento dinámico tales que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ en (48) sea Hurwitz. Además, si la perturbación $\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})$, véase (48), satisface (36), entonces la solución síncrona $\mathbf{e} = 0$, $\mathbf{h} = 0$ es localmente estable.

La cota γ en el término de perturbación $\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})$, puede ser calculada por el procedimiento presentado en el Capítulo 9 en (Khalil, 2002). Para el ejemplo aquí presentado, los parámetros utilizados en el sistema de Rössler son: $a = b = 0.2$, $c = 5.7$, y además,

si se escoge $\alpha = 2$ y $k = -1.4$. Nótese que con estos valores se satisface (50) y la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ es Hurwitz. Entonces, γ es dada por

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})}, \quad (51)$$

donde $\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) = 1$ y $\lambda_{\max}(\mathbf{P}) = 31.25$, por lo tanto,

$$\gamma < 0.016, \quad (52)$$

Finalmente, si es posible encontrar condiciones iniciales suficientemente cercanas a la solución síncrona $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s$, donde el término de perturbación $\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})$ satisface (36), con γ que satisface (52), entonces es posible garantizar localmente sincronización entre el sistema maestro y el esclavo.

El siguiente paso es estudiar la estabilidad local utilizando la Función Maestra de Estabilidad para la solución síncrona $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s$ en los osciladores Rössler acoplados para ambos esquemas tanto para el dinámico propuesto como para el estático clásico. Para iniciar, se debe obtener la ecuación variacional para ambos esquemas de sincronización (dinámico y estático).

La ecuación variacional para el esquema maestro-esclavo estático, véase la Ec.(16), con $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, \mathbf{B} y \mathbf{C} dadas en (27), es la siguiente

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -(1+k) & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ z_m & 0 & (x_m - c) \end{bmatrix} \mathbf{e}. \quad (53)$$

En contraste, la ecuación variacional para el esquema maestro-esclavo dinámico propuesto, véase Ec.(38), con $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, \mathbf{B} y \mathbf{C} dadas en (27), es definida por

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ z_m & 0 & (x_m - c) & 0 \\ 0 & -k & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}, \quad (54)$$

donde $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \ h]^T$. Como la Función Maestra de Estabilidad es un cálculo numérico,

es necesario dar valores numéricos a las ecuaciones variacionales (53) y (54). Los parámetros de los osciladores acoplados son: $a = b = 0.2$, $c = 5.7$. Estos valores se obtuvieron de Rössler (1976). Además, se escoge $\alpha = 2$ y la fuerza de acoplamiento k se varía en el intervalo $[-2, 2]$. Nótese que el valor α utilizado satisface (50).

En el análisis, el máximo exponente transverso de Lyapunov, λ_{max}^\perp , es calculado como función de la fuerza de acoplamiento k . En la Figura 9 se muestran los resultados obtenidos. La línea punteada es calculada utilizando la ecuación variacional del esquema estático maestro-esclavo dada en (53). Claramente, se puede ver que λ_{max}^\perp se mantiene positivo todo el tiempo, lo cual representa que la solución síncrona es inestable. Por otro lado, la línea sólida es calculada utilizando la ecuación variacional del esquema maestro-esclavo dinámico propuesto dada en (54), donde se puede ver que existe un intervalo de k dado por $[-1.86 < k < -0.89]$ donde λ_{max}^\perp es negativo y por lo tanto, para estos valores de k la solución síncrona de los sistemas acoplados (45)-(47) es localmente estable.

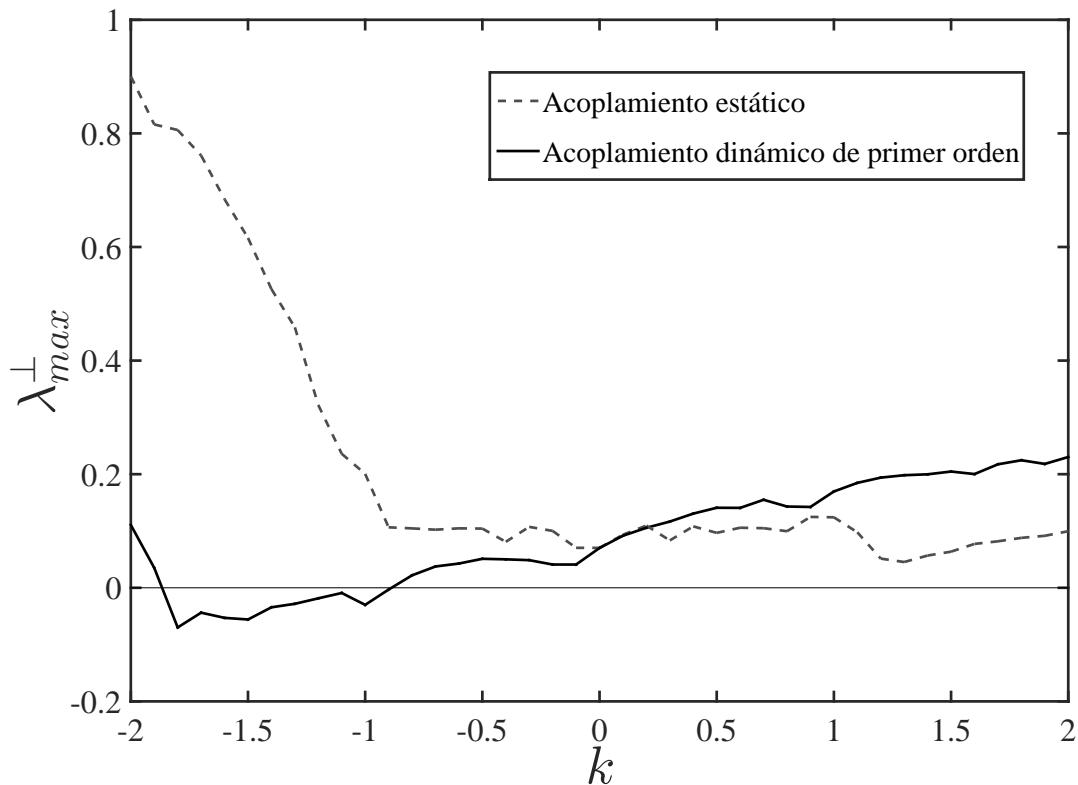


Figura 9. Configuración 2 \rightarrow 1. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

El ejemplo que se analizó corresponde a la *configuración* $2 \rightarrow 1$. Nótese que esta *configuración* es una de las nueve posibles configuraciones, las cuales son: $1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 3$. En la Tabla 1, se observan las configuraciones utilizadas en este trabajo con sus respectivos vectores de entrada y salida.

Tabla 1. Configuraciones posibles de entradas y salidas del sistema.

Configuración	B	C
$1 \rightarrow 1$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[1 \ 0 \ 0]$
$1 \rightarrow 2$	$[0 \ 1 \ 0]^T$	$[1 \ 0 \ 0]$
$1 \rightarrow 3$	$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[1 \ 0 \ 0]$
$2 \rightarrow 1$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ 1 \ 0]$
$2 \rightarrow 2$	$[0 \ 1 \ 0]^T$	$[0 \ 1 \ 0]$
$2 \rightarrow 3$	$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[0 \ 1 \ 0]$
$3 \rightarrow 1$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[0 \ 0 \ 1]$
$3 \rightarrow 2$	$[0 \ 1 \ 0]^T$	$[0 \ 0 \ 1]$
$3 \rightarrow 3$	$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[0 \ 0 \ 1]$

Es importante explicar que cuando se habla de *configuración* $i \rightarrow j$, $i, j = 1, 2, 3$, es una combinación de entradas y salidas de los osciladores acoplados, es decir, el primer número representa la variable de estado a utilizar y el segundo número representa a la ecuación del sistema esclavo donde se introducirá el acoplamiento. Por lo tanto, la *configuración* $2 \rightarrow 1$ se refiere a que en el acoplamiento se usa la variable y , y que el término del acoplamiento será aplicado a la primera ecuación del oscilador esclavo.

A continuación, en la Tabla 2, se muestran las ecuaciones variacionales para las configuraciones $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 1$ y $2 \rightarrow 2$, tanto para el esquema clásico como para el esquema propuesto.

Tabla 2. Ecuaciones variacionales.

Configuración	Esquema Clásico	Esquema Propuesto
$1 \rightarrow 2$	$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1-k & a & 0 \\ z_m & 0 & (x_m - c) \end{bmatrix} \mathbf{e}$	$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ z_m & 0 & (x_m - c) & 0 \\ -k & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}$
$1 \rightarrow 1$	$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} -k & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_m & 0 & (x_m - c) \end{bmatrix} \mathbf{e}$	$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ z_m & 0 & (x_m - c) & 0 \\ -k & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}$
$2 \rightarrow 2$	$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a-k & 0 \\ z_m & 0 & (x_m - c) \end{bmatrix} \mathbf{e}$	$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ z_m & 0 & (x_m - c) & 0 \\ 0 & -k & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}$

Los resultados para la *configuración* $1 \rightarrow 2$ se muestran en la Figura 10. La línea punteada indica λ_{max}^\perp para el esquema estático, donde se puede ver claramente que no existe solución síncrona ya que λ_{max}^\perp siempre es positivo. Por otro lado, la línea sólida representa el cálculo de λ_{max}^\perp para el esquema maestro-esclavo propuesto. Nótese que existe un pequeño intervalo para la fuerza de acoplamiento dado por $0.89 < k < 1.86$ en que $\lambda_{max}^\perp < 0$, y por lo tanto la solución síncrona es localmente estable.

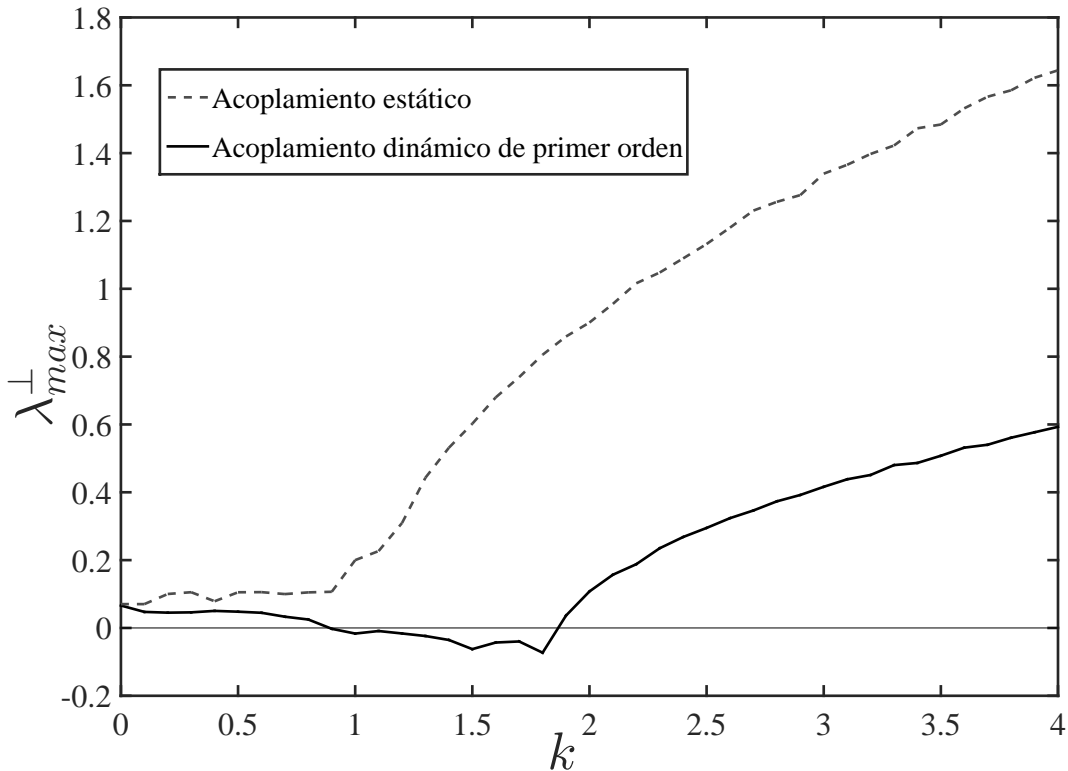


Figura 10. Configuración 1 → 2. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^{\perp} , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

La Figura 11 a), corresponde a los resultados obtenidos para la configuración 1 → 1 donde se puede observar que para ambos esquemas de acoplamiento, existe un intervalo para la fuerza de acoplamiento k donde λ_{max}^{\perp} es negativo, lo que significa que la solución síncrona es localmente estable en ese intervalo de k . La línea punteada representa a λ_{max}^{\perp} utilizando el esquema clásico, donde se observa un intervalo para k de $[0.18, 4.6]$ en el cual $\lambda_{max}^{\perp} < 0$. En contraste, la línea sólida muestra a λ_{max}^{\perp} usando el esquema propuesto, donde se muestra un intervalo para k de $[0.51, 8.9]$ en el cual $\lambda_{max}^{\perp} < 0$, pero existe un punto clave muy importante a considerar, ya que dependiendo del valor escogido para el parámetro α el intervalo para la fuerza de acoplamiento k puede incrementar tanto como se necesite.

En la Figura 11 b), se muestra el resultado para la configuración 2 → 2. Para ambos esquemas de acoplamiento se tiene un buen desempeño, ya que después de un cierto valor positivo de la fuerza de acoplamiento k , la solución síncrona de los sistemas acoplados es localmente estable.

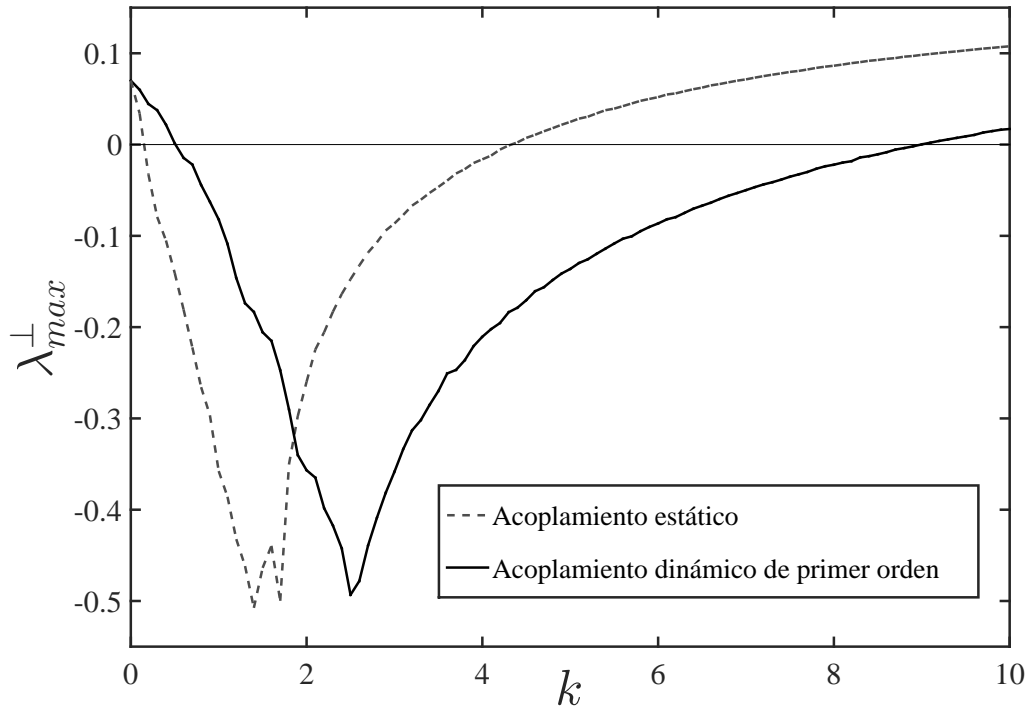
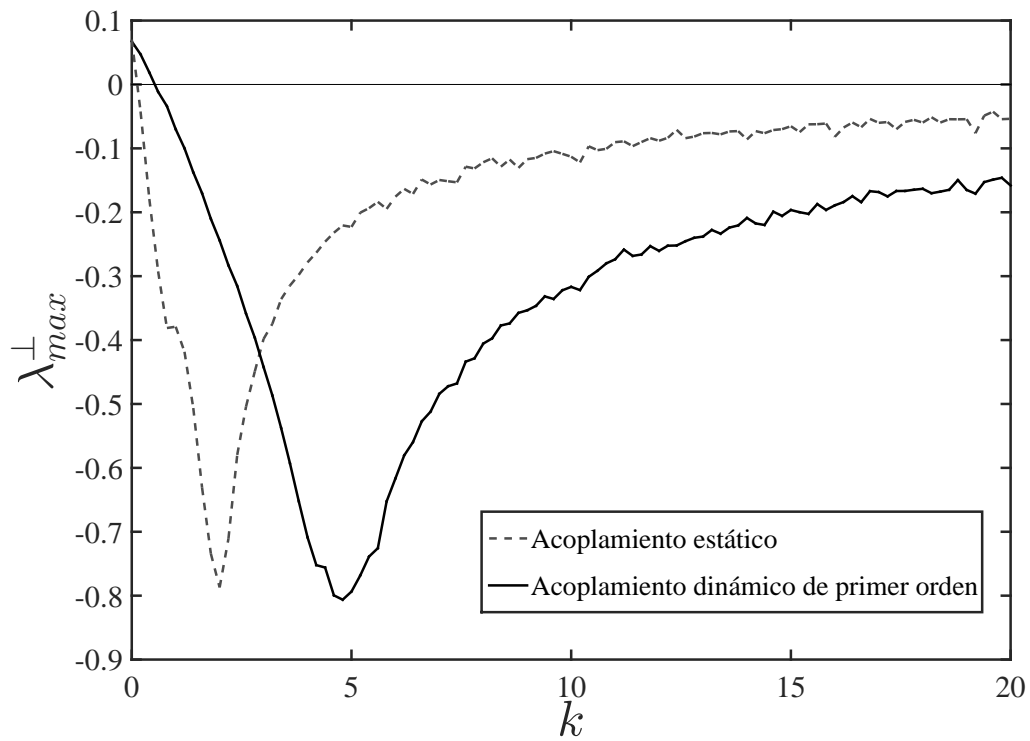
(a) Configuración 1 \rightarrow 1.(b) Configuración 2 \rightarrow 2.

Figura 11. λ_{max}^{\perp} calculado en función de la fuerza de acoplamiento k . Esquema clásico (línea punteada) vs esquema propuesto (línea sólida).

3.5. Limitaciones del acoplamiento dinámico

Existen configuraciones para los cuales el esquema propuesto no induce sincronización en los osciladores Rössler acoplados, las cuales son las siguientes: $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 3$, cuyas matrices de entrada y salida están dadas en la Tabla 1. Un ejemplo muy visual es para el caso de la configuración $3 \rightarrow 1$. Para esta configuración, la dinámica del error puede escribirse en la forma (35) con

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -k & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_m e_3 + z_m e_1 - e_1 e_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

El polinomio característico de $\tilde{\mathbf{A}}$ es

$$\bar{P}(\lambda) := (\alpha + \lambda)(c + \lambda)(\lambda^2 - a\lambda + 1) = 0, \quad (56)$$

de donde claramente se puede ver que no existe valor para la fuerza de acoplamiento k que haga que $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz, ya que el parámetro a es un parámetro positivo intrínseco del sistema de Rössler.

3.6. Resultados experimentales

En esta sección, el acoplamiento dinámico de primer orden propuesto es validado experimentalmente utilizando circuitos electrónicos. Es decir, el sistema (45)-(47) el cual representa dos osciladores caóticos Rössler interactuando entre ellos mediante un acoplamiento maestro-esclavo dinámico es implementado de manera analógica con circuitos electrónicos.

Se tomaron algunas consideraciones, pero la más importante es que para prevenir saturación en los amplificadores operacionales utilizados, el sistema (45)-(47) se escaló en magnitud, por lo cual se hizo el siguiente cambio de coordenadas: $\bar{x}_i = \frac{x_i}{2}$, $\bar{y}_i = \frac{y_i}{2}$, $\bar{z}_i = \frac{z_i}{2}$ para $i = m, s$ y $\bar{h} = \frac{h}{2}$. Además, También se realizó un escalamiento en tiempo $\tau = \omega_c t$, donde $\omega_c = RC$, $R = 100k\Omega$ y $C = 22nF$.

Con las consideraciones antes mencionadas, el sistema (45)-(47) toma la siguiente forma

$$\text{Maestro : } \begin{cases} \omega_c \dot{\bar{x}}_m = -\bar{y}_m - \bar{z}_m, \\ \omega_c \dot{\bar{y}}_m = \bar{x}_m + \alpha \bar{y}_m, \\ \omega_c \dot{\bar{z}}_m = b/2 + (2\bar{x}_m - c) \bar{z}_m, \end{cases} \quad (57)$$

$$\text{Esclavo : } \begin{cases} \omega_c \dot{\bar{x}}_s = -\bar{y}_s - \bar{z}_s - \bar{h}, \\ \omega_c \dot{\bar{y}}_s = \bar{x}_s + \alpha \bar{y}_s, \\ \omega_c \dot{\bar{z}}_s = b/2 + (2\bar{x}_s - c) \bar{z}_s. \end{cases} \quad (58)$$

$$\text{Acoplamiento Dinámico : } \begin{cases} \omega_c \dot{\bar{h}} = -\alpha \bar{h} - k(\bar{y}_m - \bar{y}_s), \end{cases} \quad (59)$$

donde los parámetros de diseño del acoplamiento dinámico se escogen como sigue: $\alpha = 2$ y $k = -1.4$. Nótese que estos valores satisfacen (73) y además, para estos valores, $\lambda_{max}^\perp < 0$, como se muestra en la Figura 9. Por último, se utilizan los parámetros del sistema de Rössler como en la Sección 2.4.2 anterior: $a = b = 0.2$ y $c = 5.7$.

Para la implementación del sistema (57)-(59) se utilizaron amplificadores operacionales TL074, multiplicadores AD734AN, y capacitores y resistencias de valores apropiados. En la Figura 12, se muestra una fotografía de la implementación en el laboratorio.

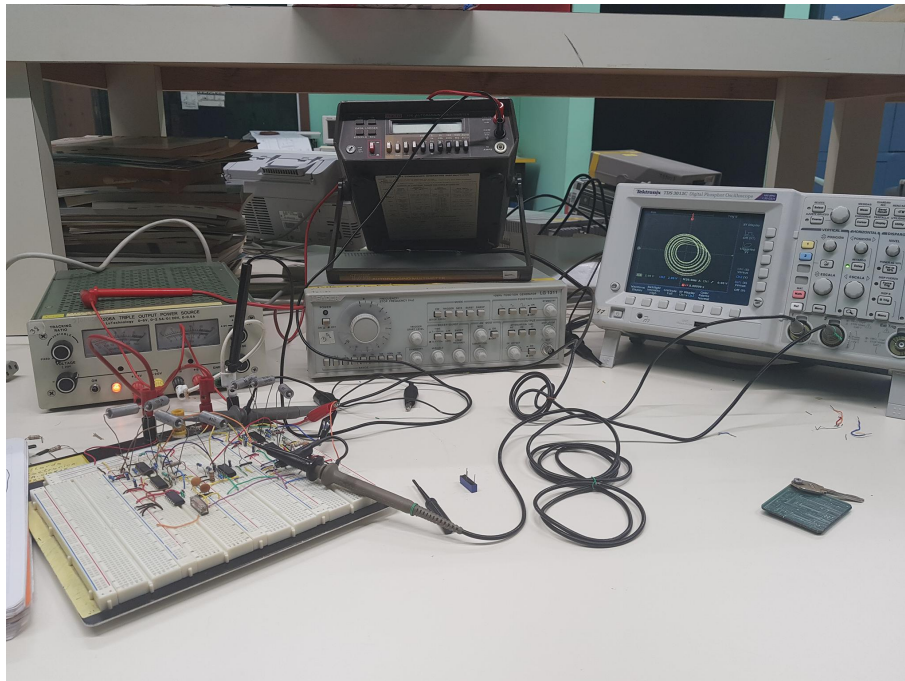


Figura 12. Fotografía de la implementación.

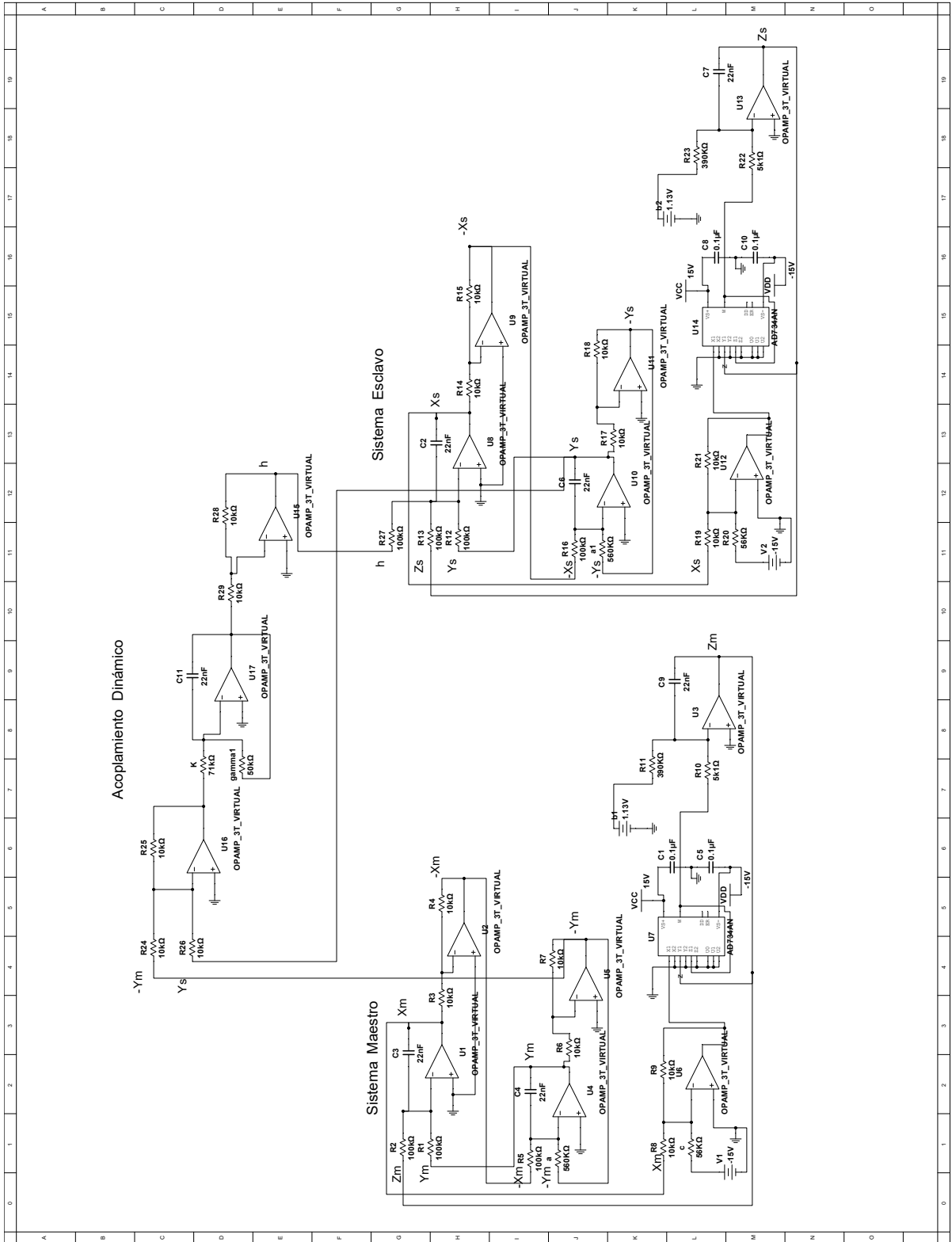


Figura 13. Diagrama electrónico del sistema (57)-(59).

El diagrama electrónico simulado en MULTISIM 14.0 se puede ver en la Figura 13, en el cual se muestran los valores específicos de resistencias y capacitancias que se utilizaron. Para adquirir las señales se utilizó el osciloscopio digital TDS 3012C de Tektronix.

Primero, el atractor caótico del circuito de Rössler maestro, proyectado en el plano \bar{x}_m, \bar{y}_m es presentado en Figura 14.

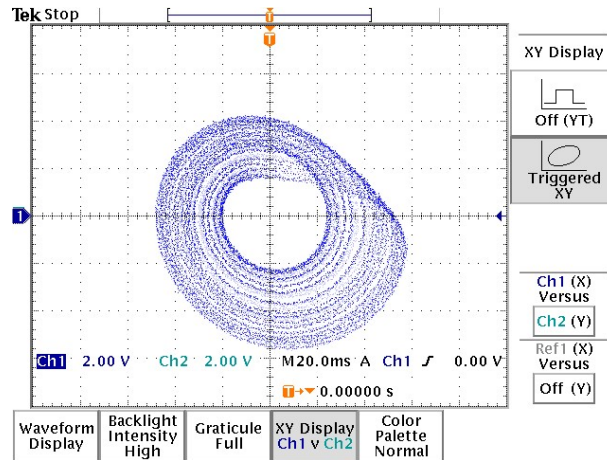


Figura 14. Atractor caótico del circuito de Rössler maestro en el plano (\bar{x}_m, \bar{y}_m) .

Después, en la Figura 15, se puede apreciar la serie en el tiempo del sistema maestro y esclavo, las cuales obviamente no están sincronizadas cuando $k = 0$. Sin embargo, cuando $k = -1.4$, se puede observar que los sistemas se sincronizan, véase la Figura 16.

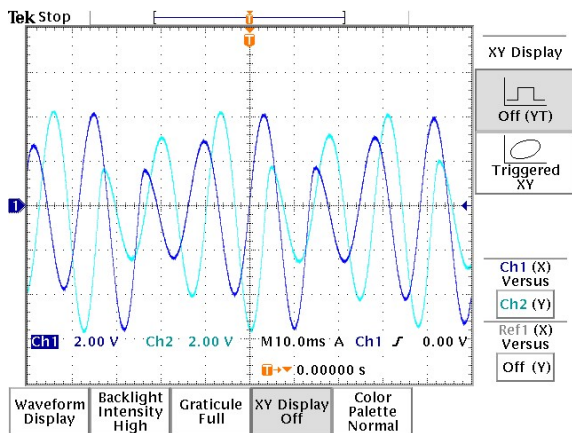


Figura 15. Sistemas desacoplados. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s .

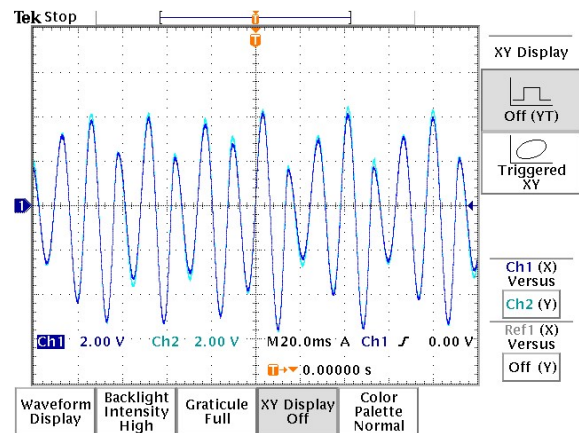


Figura 16. Sistemas acoplados y sincronizados. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s .

En la Figura 17, se presenta el plano (\bar{y}_m, \bar{y}_s), donde se puede notar una línea recta a 45 grados que indica sincronización. Cabe mencionar que en realidad sería una sincronización práctica, ya que existen pequeñas pero inevitables variaciones entre los circuitos eléctricos maestro y esclavo.

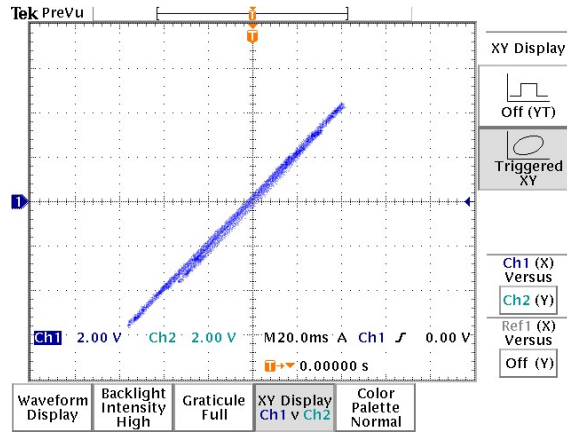


Figura 17. Plano de fase (\bar{y}_m, \bar{y}_s).

Finalmente, en las Figuras 18 y 19 tenemos la señal de acoplamiento $h(t)$, véase Ec.(59). Cuando los sistemas no están sincronizados la señal de acoplamiento presenta una dinámica oscilatoria, (Figura 18). Por otro lado, cuando los sistemas están sincronizados la dinámica del acoplamiento casi se desvanece, tal y como se puede apreciar en la Figura 19.

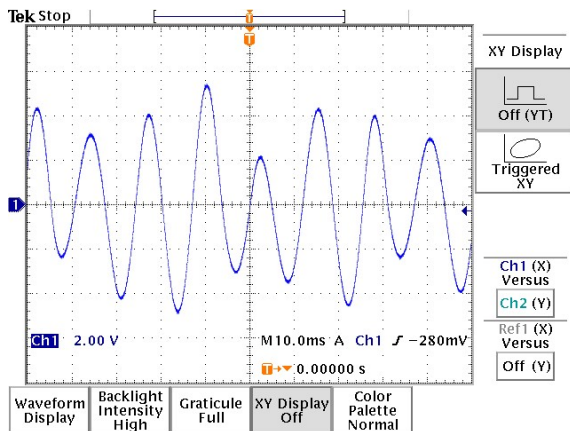


Figura 18. Señal de acoplamiento h cuando los sistemas están desacoplados.

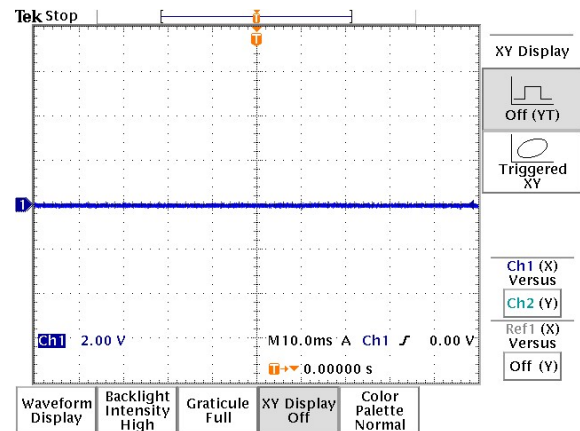


Figura 19. Señal de acoplamiento h cuando $\bar{y}_m \approx \bar{y}_s$.

3.7. Conclusión

En conclusión, se ha demostrado mediante los ejemplos aquí presentados que el esquema propuesto induce sincronización incluso en casos donde un esquema clásico falla. Además, no solo se presentó un estudio analítico y numérico, sino también se presentó un caso experimental donde se muestra que efectivamente el esquema propuesto puede ser implementado físicamente.

Capítulo 4. Sincronización maestro-esclavo vía acoplamiento dinámico de segundo orden

En el capítulo anterior se pudo observar al acoplamiento dinámico de primer orden. Ahora se estudiará el desempeño de acoplamiento dinámico de segundo orden.

El esquema dinámico maestro-esclavo de segundo orden está descrito por las siguientes ecuaciones

$$\text{Maestro : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \\ y_m = \mathbf{C}\mathbf{x}_m, \end{cases} \quad (60)$$

$$\text{Esclavo : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - \mathbf{B}y_h, \\ y_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s, \end{cases} \quad (61)$$

$$\text{Acoplamiento dinámico : } \begin{cases} \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{G}\mathbf{h} - \mathbf{B}_h u_s, \\ y_h = \mathbf{C}_h \mathbf{h}, \end{cases} \quad (62)$$

donde $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de estado de los sistemas maestro y esclavo, respectivamente. $\mathbf{h} = [h_1, h_2]^T$, $h_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, son los estados del acoplamiento dinámico, \mathbf{B}, \mathbf{C} y \mathbf{F} fueron definidas con anterioridad, véase Ecs.(6)-(7), y u_s esta definido en (8).

Además, se agrega un nuevo par de vectores $\mathbf{B}_h \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\mathbf{C}_h \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ que indican las entradas y salidas respectivamente, del acoplamiento dinámico. A lo largo de este trabajo se consideran que estos vectores están dados por

$$\mathbf{C}_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

El vector \mathbf{B}_h indica que la señal de control u_s es aplicada a la segunda ecuación del acoplamiento dinámico, y el vector \mathbf{C}_h indica que el segundo estado del acoplamiento dinámico, es decir, la variable h_2 , es la salida del acoplamiento dinámico, la cual será aplicada al sistema esclavo.

Por último, la matriz $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ del acoplamiento dinámico (62) está dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

donde α , γ_1 y γ_2 son parámetros de diseño.

4.1. Sintonización de los parámetros del acoplamiento dinámico de segundo orden

Los parámetros de la matriz \mathbf{G} se obtienen siguiendo el procedimiento usado en la Sección 3.2 para el caso de acoplamiento dinámico de primer orden. Como primer paso se obtiene la dinámica del error, la cual está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_h \\ -k\mathbf{B}_h\mathbf{C} & \mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}(t, \mathbf{e}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})}, \quad (65)$$

donde \mathbf{A} está definida en (11), $\mathbf{g}(t, \mathbf{e}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_m - \mathbf{e})$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es el vector nulo y el término $\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})$ es considerado como una perturbación que se desvanece y cumple con la condición (36). Por último, una condición suficiente para asegurar la estabilidad local del sistema acoplado es que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz.

4.2. Función Maestra de Estabilidad

Siguiendo la metodología presentada en la Sección 3.3, y después de haber definido los errores de sincronización, se obtiene la siguiente ecuación variacional

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_m) & \mathbf{B}\mathbf{C}_h \\ -k\mathbf{B}_h\mathbf{C} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

la cual se utilizará para el cálculo del máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp , dado en Ec.(17). Como ya se ha mencionado en este trabajo, si λ_{max}^\perp es positivo entonces la solución síncrona de los sistemas acoplados es inestable. Por otro lado, si λ_{max}^\perp

es negativo la solución síncrona de los sistemas acoplados es estable localmente, lo cual significa que el sistema esclavo se sincroniza con el sistema maestro.

4.3. Ejemplos de aplicación

En la siguiente sección se presentan algunos ejemplos para ilustrar la efectividad del esquema propuesto en este capítulo. Se utilizarán los mismos ejemplos usados en los Capítulos 2 y 3, los cuales corresponden a un par de osciladores armónicos y un par de osciladores caóticos.

4.3.1. Ejemplo 1: revisión del oscilador armónico

El oscilador armónico está descrito por las ecuaciones (18)-(20). Sustituyendo esta dinámica en las ecuaciones (60)-(62). Se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{E}\mathbf{x}_m, \quad (67)$$

$$y_m = \mathbf{C}\mathbf{x}_m,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{E}\mathbf{x}_s - \mathbf{B}\mathbf{h}, \quad (68)$$

$$y_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s,$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{G}\mathbf{h} + \mathbf{B}_h u_s, \quad (69)$$

$$y_h = \mathbf{C}_h \mathbf{h},$$

donde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

y \mathbf{B}_h y \mathbf{C}_h están dadas en la Ec.(63).

Para obtener la dinámica del error es necesario seguir el método descrito en la Sección 4.1. Para este ejemplo, la dinámica del error está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{BC}_h \\ -k\mathbf{B}_h\mathbf{C} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

El polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (\alpha + \gamma_2)\lambda^3 + (\omega^2 + \gamma_1 + \alpha\gamma_2)\lambda^2 + (k + \alpha\omega^2 + \gamma_2\omega^2)\lambda + \alpha k + \gamma_1\omega^2 + \alpha\gamma_2\omega^2. \quad (72)$$

Usando el criterio de estabilidad Routh-Hurwitz es posible mostrar que si los parámetros del acoplamiento y la fuerza de acoplamiento se escogen de la siguiente manera

$$\alpha = 1, \gamma_1 = k, \gamma_2 = 1, k > 2 + 2\omega^2, \quad (73)$$

entonces la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ es Hurwitz. Esto a su vez garantiza que la solución síncrona $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s, \mathbf{h} = 0$ en el sistema (67)-(69) es asintóticamente estable globalmente.

En la Figura 20 se presenta una simulación del ejemplo que se acaba de desarrollar, en el cual se puede ver que en efecto, los sistemas se sincronizan cumpliendo con las condiciones que se plantearon en (73). Para generar esta figura se integró numéricamente el sistema (67)-(69) con parámetros $\omega = 1, \alpha = 1, \gamma_1 = k, \gamma_2 = 1, k = 15$ con condiciones iniciales $\mathbf{x}_1(0) = [1 \ 0]$ y $\mathbf{x}_2(0) = [-1 \ 0]$. En conclusión, el esquema propuesto logró sincronizar dos osciladores armónicos acoplados, los cuales no se pueden sincronizar utilizando el esquema clásico.

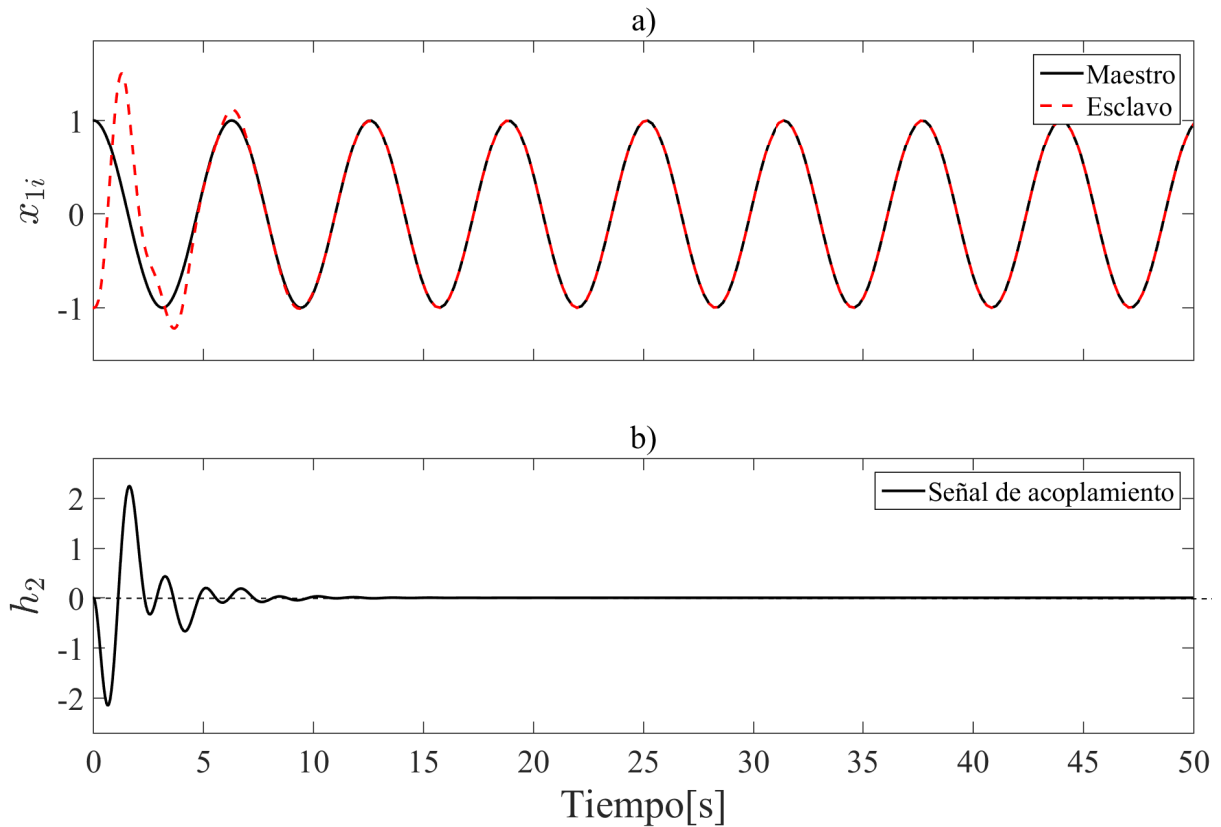


Figura 20. Simulación del ejemplo de dos osciladores armónicos interconectados mediante el acoplamiento dinámico de segundo orden descrito en las Ecs. (67)-(69). En *a*) se muestra la posición del sistema maestro y del esclavo. En *b*) se muestra la dinámica del segundo estado h_2 del acoplamiento dinámico de orden 2 propuesto, el cual es el que se utiliza para acoplar los dos sistemas.

4.3.2. Ejemplo 2 revisión del oscilador caótico de Rössler

Como en el capítulo anterior, se estudiará el efecto del acoplamiento dinámico de segundo orden propuesto en este capítulo sobre dos osciladores caóticos de Rössler. En particular se buscarán condiciones analíticas bajo las cuales es posible sincronizar dichos sistemas caóticos y además, se busca determinar si existe alguna ventaja en aplicar este esquema en lugar de un esquema estático. Además, se estudia la estabilidad local de la solución síncrona de forma analítica y numérica, utilizando la teoría de Lyapunov para sistemas perturbados y la Función Maestra de Estabilidad. Finalmente, los resultados analíticos y numéricos obtenidos se validan experimentalmente con circuitos electrónicos que emulan las dinámica del oscilador de Rössler.

Se inicia con la *configuración* $1 \rightarrow 1$ para la cual los vectores \mathbf{B} y \mathbf{C} se muestran en la Tabla 2.

Tabla 3. Configuraciones posibles.

Configuración	B	C
1 → 1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 → 2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 → 3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2 → 1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
2 → 2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
2 → 3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
3 → 1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3 → 2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3 → 3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces, sustituyendo \mathbf{F} , $i = m, s$ dada en (27), \mathbf{B}_h y \mathbf{C}_h dadas en (63), se obtiene

$$\text{Maestro: } \begin{cases} \dot{x}_m = -y_m - z_m, \\ \dot{y}_m = x_m + ay_m, \\ \dot{z}_m = b + x_m z_m - cz_m, \end{cases} \quad (74)$$

$$\text{Esclavo: } \begin{cases} \dot{x}_s = -y_s - z_s - h_2, \\ \dot{y}_s = x_s + ay_s, \\ \dot{z}_s = b + x_s z_s - cz_s, \end{cases} \quad (75)$$

$$\text{Acoplamiento dinámico de segundo orden: } \begin{cases} \dot{h}_1 = -\alpha h_1 + h_2, \\ \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_m - x_s). \end{cases} \quad (76)$$

El siguiente paso es obtener la dinámica del error $\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})$, y la cual está dada como en (65) con

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_m e_3 + z_m e_1 - e_1 e_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (77)$$

donde $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \ \mathbf{h}]^T$ y $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$, $e_x = x_m - x_s$, $e_y = y_m - y_s$, $e_z = z_m - z_s$.

Posteriormente, se obtiene el polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dada en (77), el cual es el siguiente

$$p(\lambda) = d_4 \lambda^4 + d_3 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_0, \quad (78)$$

donde,

$$\begin{aligned} d_4 &= 1, \\ d_3 &= \alpha - a + \gamma_2, \\ d_2 &= \gamma_1 + k - a\alpha - a\gamma_2 + \alpha\gamma_2 + 1, \\ d_1 &= \alpha + \gamma_2 + \alpha k - a k \alpha \gamma_1 - \alpha \gamma_2 a, \\ d_0 &= \gamma_1 + \alpha \gamma_2 - a \alpha k. \end{aligned} \quad (79)$$

Para que el polinomio (78) sea Hurwitz, se deben cumplir las siguientes condiciones

$$d_4, d_3, d_0 > 0 \quad b_1 = d_3 d_2 - d_1 > 0 \quad b_1 d_1 - d_3 d_0 > 0, \quad (80)$$

Para satisfacer las condiciones antes mencionadas, los parámetros del acoplamiento dinámico se escogen de la siguiente manera

$$\alpha = a, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = k. \quad (81)$$

Tomando en cuenta que el valor de parámetro del sistema Rössler es $a = 0.2$, se encuentra la siguiente condición para la fuerza de acoplamiento k ,

$$k > 0.4. \quad (82)$$

Entonces, si los parámetros del acoplamiento se escogen como en (81) y la fuerza de acoplamiento satisface (82) y además, se asume que la perturbación $\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{e}})$ se desvanece, podemos asegurar la estabilidad local de la solución síncrona en los sistemas acoplados (74)-(76).

A continuación, se estudia la estabilidad local mediante la Función Maestra de Estabilidad para el caso anterior, en el cual ya se obtuvieron los valores de los parámetros del acoplamiento. El primer paso es definir la ecuación variacional para el sistema (74)-(76), la cual de acuerdo a la Ec.(66), está dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & x-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}, \quad (83)$$

donde $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \ \mathbf{h}]^T$. Dado que este análisis es numérico, es necesario dar valores a las constantes del sistema y a los parámetros de acoplamiento. Se utilizaron los siguientes parámetros para el sistema de Rössler: $a = b = 0.2$, $c = 5.7$. Los parámetros del acoplamiento se escogen de acuerdo a (81) y la fuerza de acoplamiento k será variada en el intervalo $k \in [0, 20]$.

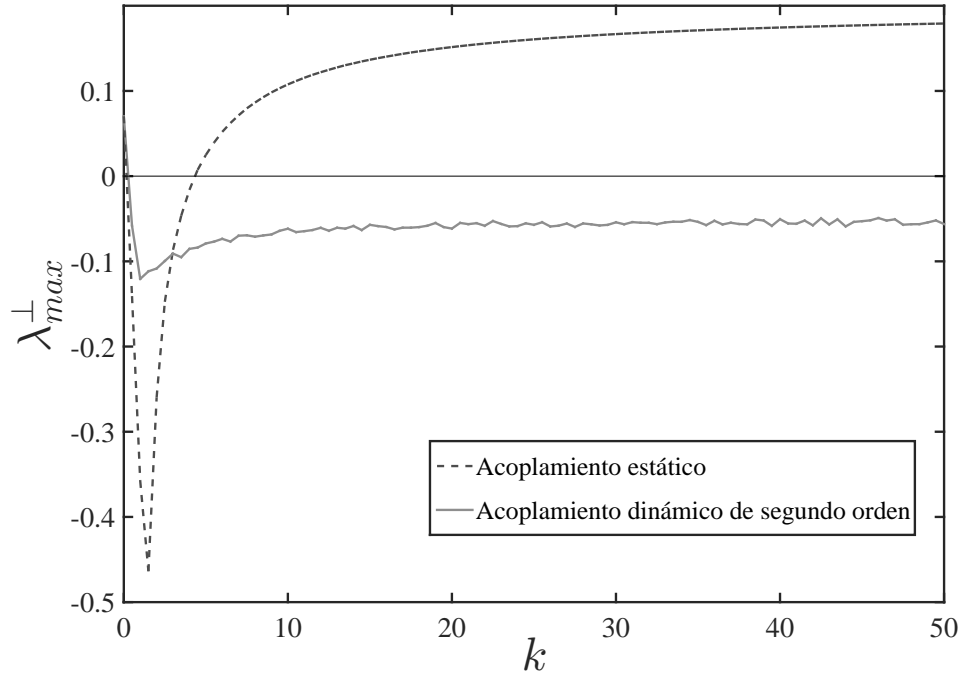


Figura 21. λ_{max}^{\perp} en función de la fuerza de acoplamiento k para la configuración $1 \rightarrow 1$. La línea punteada representa λ_{max}^{\perp} para el esquema estático. La línea sólida muestra λ_{max}^{\perp} para el esquema dinámico maestro-esclavo de segundo orden.

En la Figura 21, se puede ver en la línea sólida, el máximo exponente transversal de Lyapunov calculado de la Ec. (83), el cual es negativo para $k > 0.4$. Es importante decir que el acoplamiento dinámico de segundo orden muestra una mejoría notoria en comparación a los resultados obtenidos mediante un acoplamiento estático clásico (línea punteada). En particular, nótese que el esquema estático muestra un intervalo $0.15 < k < 4.6$ en el cual $\lambda_{max}^{\perp} < 0$, por otro lado, el esquema dinámico tiene como única cota $k > 0.4$.

Las configuraciones $1 \rightarrow 2$ y $2 \rightarrow 1$ son casos bastante interesantes, ya que como se ha visto en el Capítulo 2 el acoplamiento estático clásico no logra sincronizar dos sistemas Rössler acoplados sin importar el valor de la fuerza de acoplamiento k ya que el valor del máximo exponente transversal de Lyapunov siempre es positivo. Por otro lado, a continuación veremos cómo se desempeña el acoplamiento dinámico de segundo orden bajo estas configuraciones. Primero se obtiene la ecuación variacional

de cada configuración, empezando con la *configuración 1* \rightarrow 2

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & x-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}. \quad (84)$$

y después se obtiene la ecuación variacional de la *configuración 2* \rightarrow 1, la cual está dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & x-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -k & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}, \quad (85)$$

donde en ambos casos $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \mathbf{h}]^T$. Utilizando las ecuaciones variacionales (84) y (85), se calcula el máximo exponente transversal de Lyapunov para ambos casos, los cuales se ilustran en la Figuras 22 y 23.

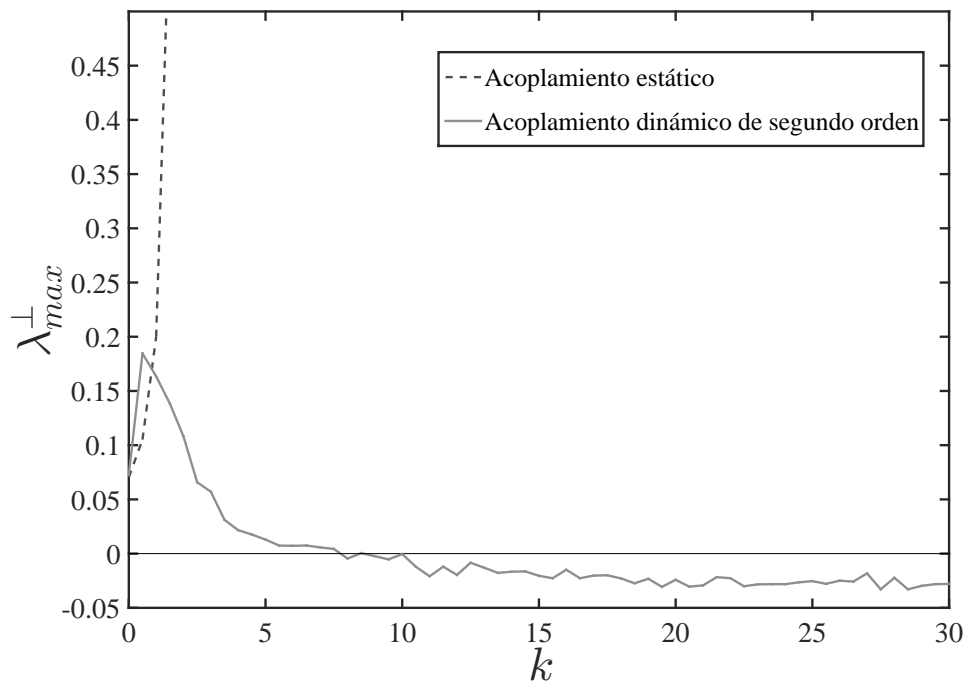


Figura 22. Configuración 1 \rightarrow 2. Máximo exponente transversal de Lyapunov λ_{max}^{\perp} , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

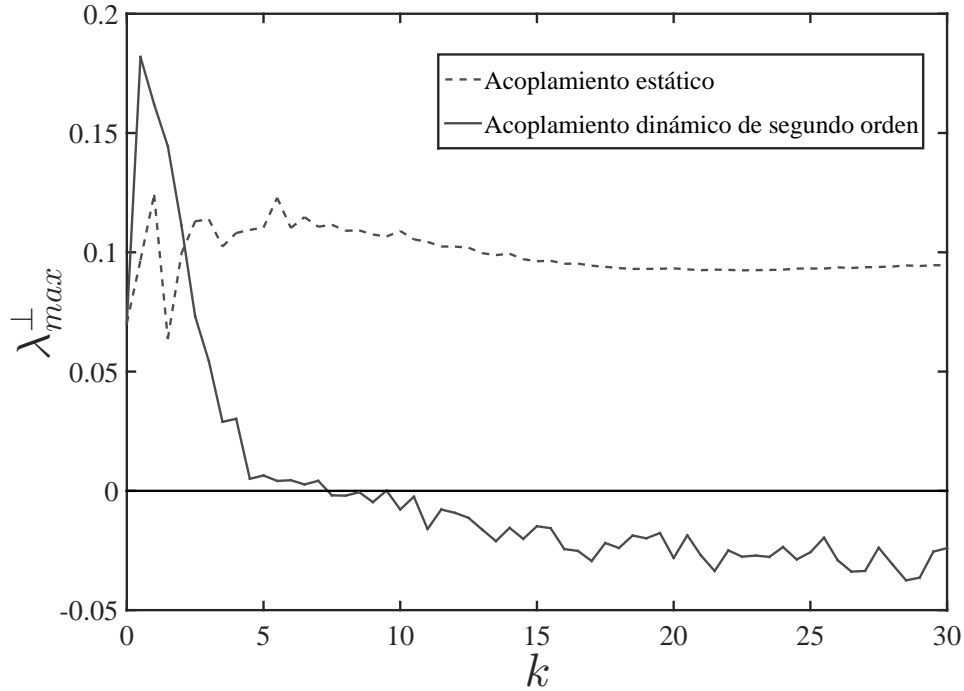


Figura 23. Configuración 2 → 1. Máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^{\perp} , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

En ambas figuras, se puede notar que para el acoplamiento estático (línea punteada) sin importar los valores de la fuerza de acoplamiento k , no existe solución síncrona de los sistemas acoplados ya que todos los λ_{max}^{\perp} son positivos para todo valor de k . Lo más notorio aquí, es que el acoplamiento dinámico de segundo orden en ambos casos logra inducir sincronización ya que sus λ_{max}^{\perp} son negativos después de un cierto valor positivo de la fuerza de acoplamiento k . Cabe mencionar que ambas configuraciones muestran respuestas muy parecidas, en el sentido que con un valor de $k \geq 10$ se puede asegurar que los λ_{max}^{\perp} son negativos.

Por último, se estudia la configuración 2 → 2 de igual manera, donde sus ecuación variacional es la siguiente

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & x-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -k & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}, \quad (86)$$

donde $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \ \mathbf{h}]^T$. Usando (86) se calcula el máximo exponente transversal de Lyapunov. En la Figura 24, se puede observar el desempeño de ambos acoplamientos, tanto el estático (punteada) como el dinámico de segundo orden (sólida). Ambos acoplamientos muestran que después de un cierto valor positivo de la fuerza de acoplamiento k , los λ_{max}^\perp son negativos, lo que nos demuestra que la solución síncrona para los sistemas acoplados es localmente estable.

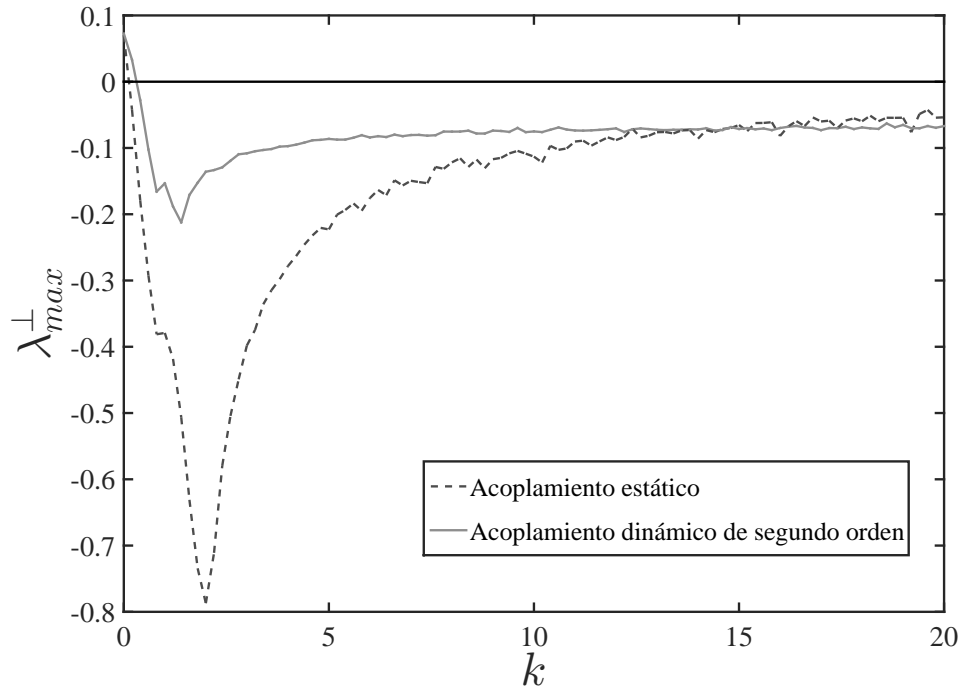


Figura 24. Configuración $2 \rightarrow 2$. Máximo exponente transversal de Lyapunov λ_{max}^\perp , calculado en función de la fuerza de acoplamiento k .

En conclusión, el esquema propuesto maestro-esclavo con acoplamiento dinámico de segundo orden logra inducir sincronización. Los casos más notables es en las configuraciones $1 \rightarrow 2$ y $2 \rightarrow 1$, donde un acoplamiento estático no logra inducir sincronización, ya que los exponentes transversales de Lyapunov son positivo en todo momento, y el acoplamiento dinámico propuesto sí logra hacer que los máximos exponentes de Lyapunov sean negativos después de un cierto valor positivo de la fuerza de acoplamiento k .

4.3.3. Resultados experimentales

A continuación, se presenta un estudio experimental con el cual se validan los resultados analíticos y numéricos obtenidos. El experimento se realizó para varias configuraciones, pero solo se mostrarán los resultados obtenidos para la configuración $2 \rightarrow 1$, la cual está dada por

$$\text{Maestro: } \begin{cases} \dot{x}_m = -y_m - z_m, \\ \dot{y}_m = x_m + ay_m, \\ \dot{z}_m = b + x_m z_m - cz_m, \end{cases} \quad (87)$$

$$\text{Esclavo: } \begin{cases} \dot{x}_s = -y_s - z_s - h_2, \\ \dot{y}_s = x_s + ay_s, \\ \dot{z}_s = b + x_s z_s - cz_s, \end{cases} \quad (88)$$

$$\text{Acoplamiento dinámico de segundo Orden } \begin{cases} \dot{h}_1 = -\alpha h_1 + h_2, \\ \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(y_m - y_s). \end{cases} \quad (89)$$

De igual manera que en el experimento mostrado en el Capítulo 3, se toman consideraciones importantes para evitar saturación en los amplificadores operacionales que se utilizan en la implementación, por lo que el sistema (87)-(89) se escaló en magnitud, realizando el siguiente cambio de coordenadas: $\bar{x}_i = \frac{x_i}{2}$, $\bar{y}_i = \frac{y_i}{2}$, $\bar{z}_i = \frac{z_i}{2}$ para $i = m, s$ y $\bar{h}_j = \frac{h_j}{2}$ para $j = 1, 2$. Además, se introdujo una variable de tiempo $\tau = \omega_c t$, donde $\omega_c = RC$, $R = 100k\Omega$ y $C = 22nF$. Dado estas consideraciones, el sistema (87)-(89) toma la forma

$$\text{Maestro : } \begin{cases} \omega_c \dot{\bar{x}}_m = -\bar{y}_m - \bar{z}_m, \\ \omega_c \dot{\bar{y}}_m = \bar{x}_m + a\bar{y}_m, \\ \omega_c \dot{\bar{z}}_m = b/2 + (2\bar{x}_m - c) \bar{z}_m, \end{cases} \quad (90)$$

$$\text{Esclavo : } \begin{cases} \omega_c \dot{\bar{x}}_s = -\bar{y}_s - \bar{z}_s - \bar{h}_2, \\ \omega_c \dot{\bar{y}}_s = \bar{x}_s + a\bar{y}_s, \\ \omega_c \dot{\bar{z}}_s = b/2 + (2\bar{x}_s - c) \bar{z}_s. \end{cases} \quad (91)$$

$$\text{Acoplamiento Dinámico : } \begin{cases} \omega_c \dot{\bar{h}}_1 = -\alpha \bar{h}_1 + \bar{h}_2, \\ \omega_c \dot{\bar{h}}_2 = -\gamma_1 \bar{h}_1 - \gamma_2 \bar{h}_2 - k(\bar{y}_m - \bar{y}_s). \end{cases} \quad (92)$$

Se utilizan los parámetros de acoplamiento dados en (81), y de los resultados presentados en la Figura 23, el valor de la fuerza de acoplamiento se fija en $k = 20$.

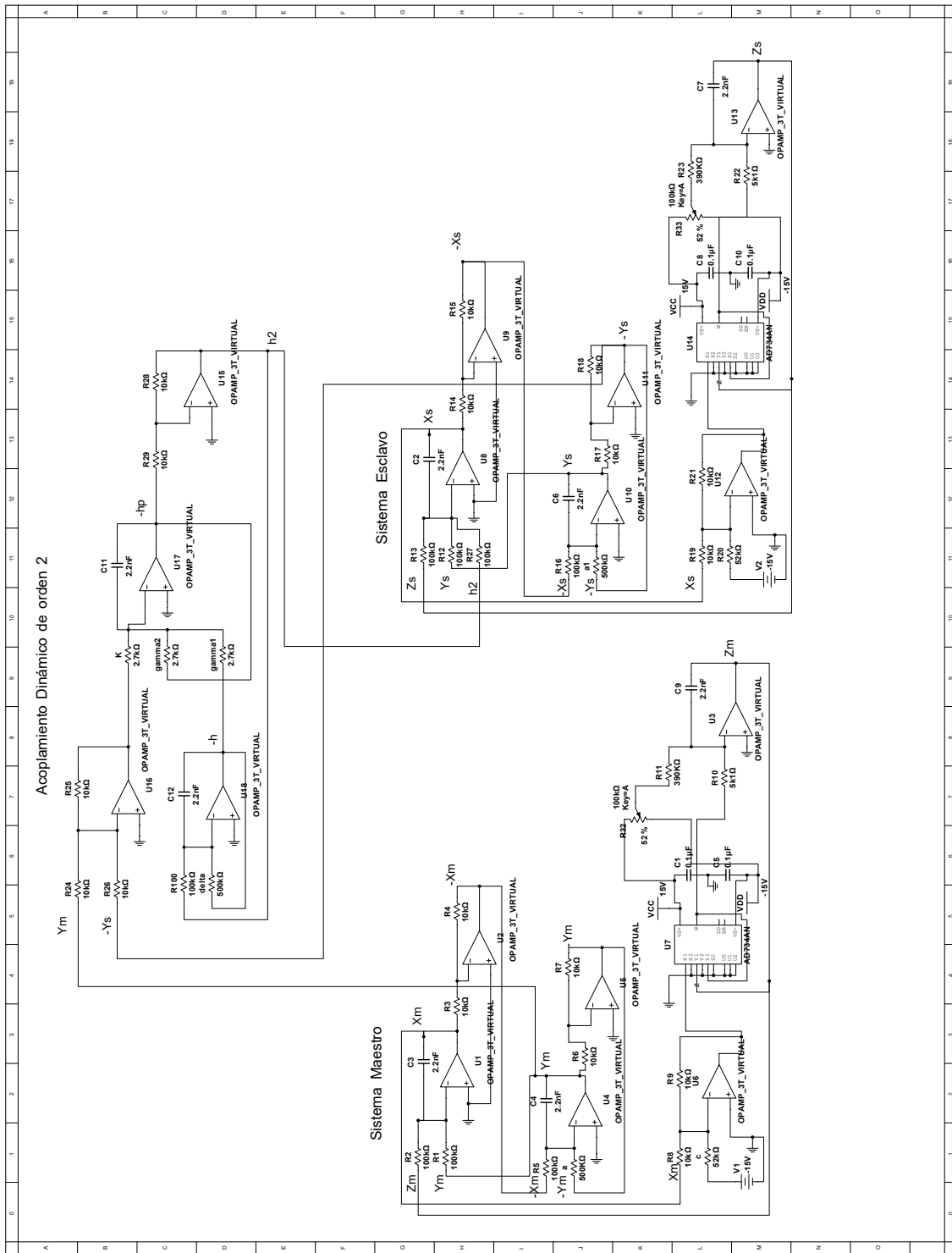


Figura 25. Diagrama electrónico de la implementación del sistema (90)-(92) con circuitos electrónicos.

El diagrama electrónico simulado en MULTISIM 14.0 se muestra en la Figura 25, donde se pueden ver los valores de resistencias y capacitancias que se utilizaron.

En la Figura 26, se presenta la dinámica de los sistemas maestro (azul) y esclavo (cian) los cuales están desacoplados y se puede ver que obviamente no se sincronizan. Por otro lado, en la Figura 27 se puede ver la señal de ambos sistemas acoplados mediante un acoplamiento dinámico de segundo orden, donde claramente se puede ver que el sistema esclavo esta sincronizado al sistema maestro.

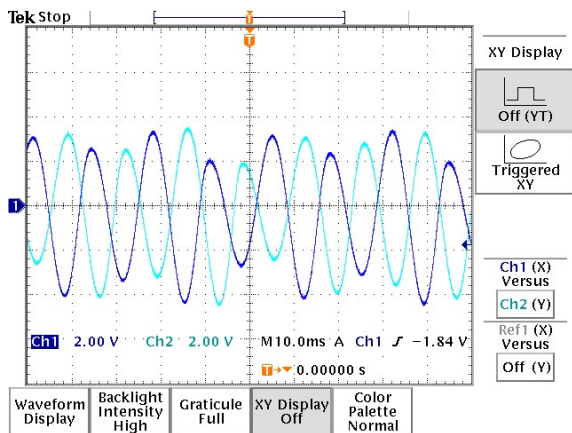


Figura 26. Sistemas desacoplados. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s .

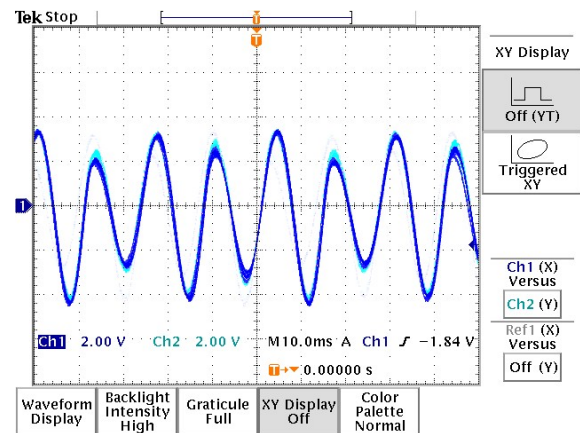


Figura 27. Sistemas acoplados y sincronizados con $k = 20$. Azul: \bar{y}_m . Cian: \bar{y}_s .

Además, en la Figura 28, se presenta el plano (\bar{y}_m, \bar{y}_s) en el cual se aprecia una línea a 45 grados que nos indica sincronización.

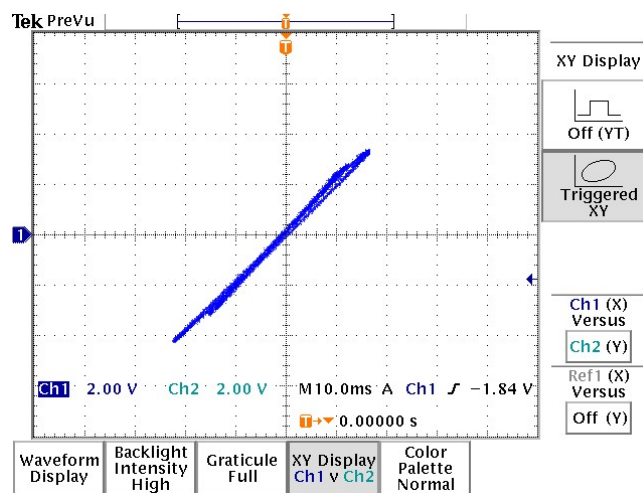


Figura 28. Plano (\bar{y}_m, \bar{y}_s).

Es importante notar que la dinámica del acoplamiento dada por h_2 , se muestra en las Figuras 29 y 30, donde se puede ver que la dinámica del acoplamiento es sinusoidal y de gran amplitud cuando los sistemas no están sincronizados y es casi 0 cuando los sistemas están sincronizados.

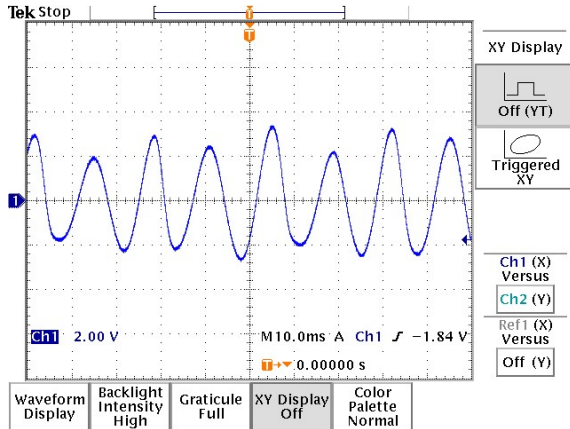


Figura 29. Señal de acoplamiento h_2 cuando los sistemas están desacoplados.

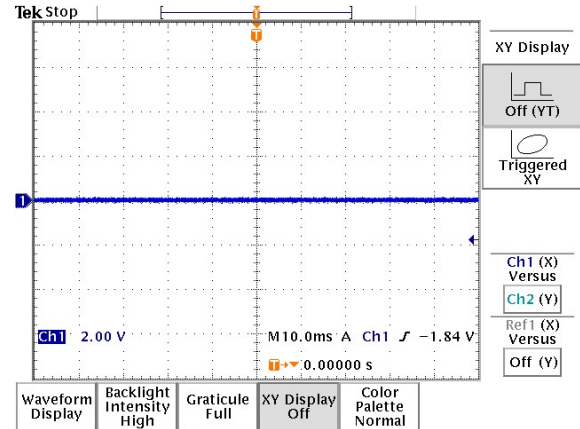


Figura 30. Señal de acoplamiento h_2 cuando $\bar{y}_m \approx \bar{y}_s$.

4.4. Discusión

Como se ha mostrado en el presente capítulo y en el capítulo 3, los acoplamientos dinámicos logran inducir sincronización incluso en casos donde un esquema clásico falla. Pero, ¿cuál de los dos esquemas propuestos es mejor?

En los ejemplos donde se estudiaron dos osciladores armónicos, el esquema dinámico de primer orden presentó condiciones de los parámetros de acoplamiento mostrados en (44), donde se observa que el valor de la fuerza de acoplamiento k debe de ser negativo. Por otra parte, para el esquema dinámico de segundo orden las condiciones de los parámetros se pueden observar en (73), donde se obtuvo que la fuerza de acoplamiento k debe de ser positiva. Por lo tanto, para el acoplamiento de segundo orden se observa que el esquema dinámico de segundo orden presenta mayor flexibilidad para la fuerza de acoplamiento k .

Respecto al caso del ejemplo del sistema de Rössler, para la configuración $1 \rightarrow 1$ en la Figura 31 se muestra que para el esquema dinámico de primer orden (línea gris) existe un intervalo para k de $[0.51, 8.9]$ en el cual $\lambda_{max}^{\perp} < 0$. Por otra parte, para el esquema dinámico de segundo orden se tiene que cumplir que $k > 0.4$ para que

$\lambda_{max}^\perp < 0$. Por lo tanto, se observa una gran mejora en la flexibilidad para escoger la fuerza de acoplamiento k , lo que se puede interpretar como que el esquema dinámico de segundo orden induce de manera más fácil sincronización.

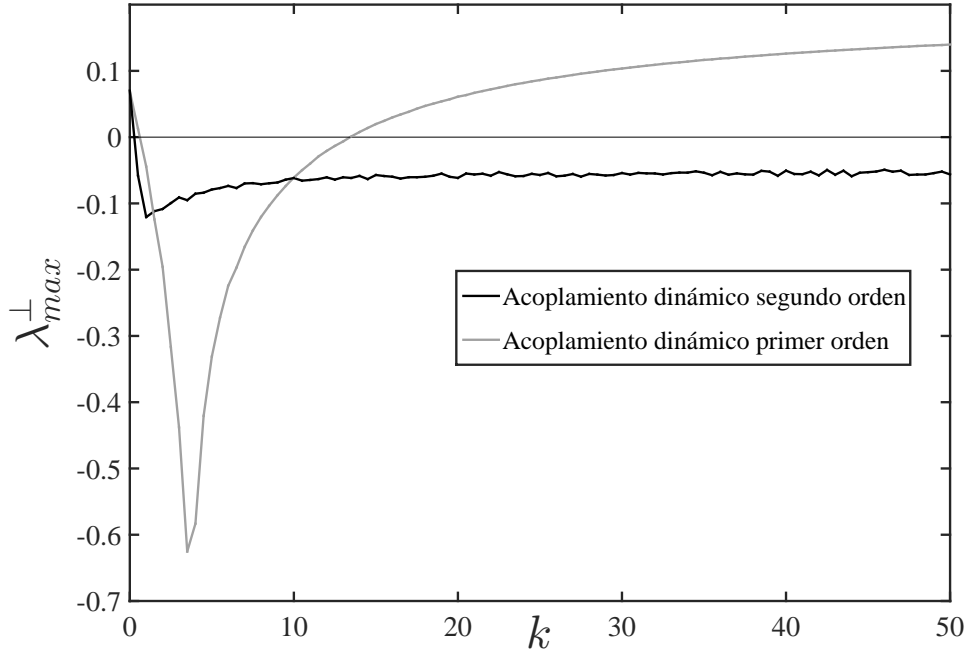


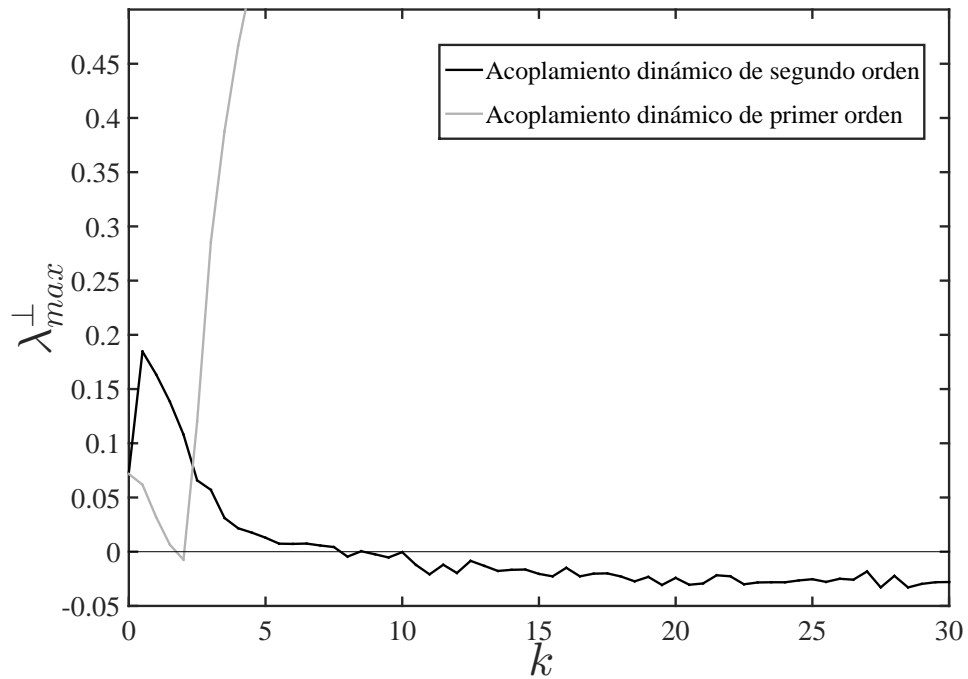
Figura 31. λ_{max}^\perp calculado en función de k . Esquema dinámico de primer orden vs esquema dinámico de segundo orden.

En la *configuración 1 → 2*, véase Figura 32 a), se observa nuevamente que el esquema dinámico de primer orden presenta un intervalo, para este caso uno muy pequeño, para la fuerza de acoplamiento k en el cual $\lambda_{max}^\perp < 0$. En contraste, cuando se aplica un acoplamiento dinámico de segundo orden se observa que cuando $k > 10$ el $\lambda_{max}^\perp < 0$. Otra vez se observa una gran mejora en el intervalo en el que k puede ser escogido.

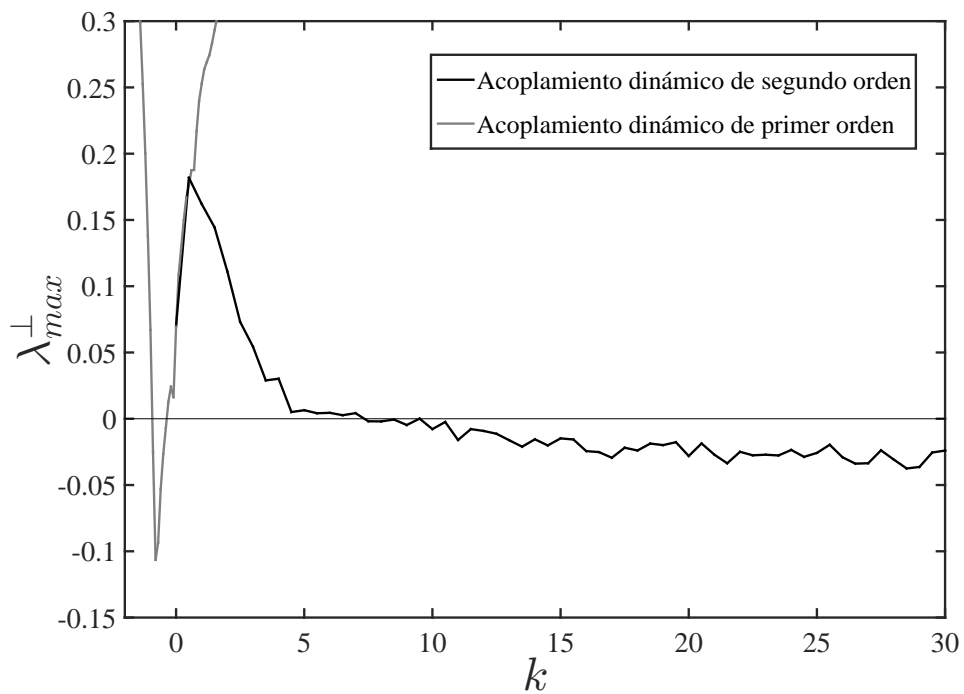
Por último, la Figura 32 b) muestra la *configuración 2 → 1*. Se observa que para el esquema dinámico de primer orden presenta un intervalo para k de $[-1.86, -0.89]$ para el cual $\lambda_{max}^\perp < 0$, en este caso el intervalo es negativo. Por otro lado, para el esquema dinámico de segundo orden se obtiene un valor para $k > 11$. Por lo tanto, se presenta una gran mejora en los valores posibles de la fuerza de acoplamiento k cuando se usa un acoplamiento de segundo orden.

En conclusión, el esquema dinámico de segundo orden presenta un intervalo ma-

yor con respecto a la fuerza de acoplamiento k , lo cual puede ser conveniente para aplicaciones físicas.



(a) Configuración 1 → 2.



(b) Configuración 2 → 1.

Figura 32. λ_{max}^{\perp} calculado en función de k . Esquema dinámico de primer orden (línea gris) vs esquema dinámico de segundo orden (línea negra).

Capítulo 5. Sincronización de Redes

En el presente capítulo, se estudia sincronización en redes de sistemas dinámicos con acoplamientos estáticos y acoplamientos dinámicos.

5.1. Sincronización de redes mediante acoplamientos estáticos

Considere una red de sistemas dinámicos de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) - k \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^j), \quad (93)$$

donde $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del nodo correspondiente, la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe la dinámica de un nodo aislado, \mathbf{L}_{ij} determina la interacción entre los nodos i y j , la función $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe las variables usadas en el acoplamiento y por último se tiene la fuerza de acoplamiento $k \in \mathbb{R}$. Definiendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^1) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{L}_{ij}], \quad (94)$$

la Ec.(93) puede ser escrita en la forma compacta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k \mathbf{L} \otimes \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}), \quad (95)$$

donde el símbolo \otimes denota el producto de Kronecker.

Se consideran las siguientes suposiciones con respecto a la matriz de conectividad \mathbf{L} :

A – 1 La suma de cada fila en la matriz de conectividad \mathbf{L} es igual a cero y los elementos fuera de la diagonal no pueden ser positivos, es decir

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_{ij} \leq 0 \quad \text{para} \quad i \neq j. \quad (96)$$

A – 2 La matriz de conectividad \mathbf{L} tiene un valor propio igual a cero y $N - 1$ valores propios positivos, los cuales pueden ser ordenados de la siguiente forma

$$\sigma_1 = 0 < \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \dots \leq \sigma_N. \quad (97)$$

Además, se supone que $\omega(\mathbf{x}^i)$ es una función lineal de la forma

$$\omega(\mathbf{x}^i) = \mathbf{C}\mathbf{x}^i, \quad (98)$$

donde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de constantes. Entonces, la Ec. (95) toma la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k\mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (99)$$

Una solución para la Ec. (99) es llamada una *solución síncrona* si satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^2(t) = \dots = \mathbf{x}^N(t) = \mathbf{s}(t), \quad (100)$$

donde $\mathbf{s}(t)$ corresponde a la solución de un nodo aislado, es decir

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}), \quad (101)$$

y además, $\mathbf{s}(t)$ es una solución exacta para la Ec. (99).

5.1.1. Función Maestra de Estabilidad

La estabilidad local de la solución síncrona, ver Ec. (100), puede ser investigada mediante la Función Maestra de Estabilidad. El primer paso es linealizar la Ec. (93) alrededor de $\mathbf{s}(t)$. Lo que conduce a

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \omega(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \frac{\partial \omega(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^j} (\mathbf{x}^j - \mathbf{s}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (102)$$

Reemplazando (98) en (102) y considerando (96), se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \mathbf{C}(\mathbf{x}^j - \mathbf{s}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (103)$$

El próximo paso es definir el error de sincronización

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{x}^i - \mathbf{s}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (104)$$

Utilizando Ec. (101) y Ec. (103), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \dot{\mathbf{x}}^i - \dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} \mathbf{e}^i - k \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \mathbf{C} \mathbf{e}^j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (105)$$

La Ec. (105) puede ser escrita de la forma compacta

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k\mathbf{L} \otimes \mathbf{C}] \mathbf{e}, \quad (106)$$

donde $\mathbf{e} = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^N]^T$, $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad, y $\mathbf{Df}(\mathbf{s})$ es el jacobiano de la función \mathbf{f} evaluado en la solución síncrona $\mathbf{s}(t)$, véase Ec.(100).

La Ec. (106), puede ser diagonalizada en bloques mediante el uso de la siguiente transformación

$$\mathbf{e} = [\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n] \bar{\mathbf{e}}, \quad (107)$$

donde $\bar{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{nN}$ es un nuevo vector de estado, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de vectores propios asociada con la matriz de conectividad \mathbf{L} , $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Aplicando la transformación Ec. (107) y utilizando algunas propiedades del producto de Kronecker, se obtiene la siguiente dinámica del error diagonalizada en bloques

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}, \quad (108)$$

donde $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ es la matriz diagonal que contiene los valores propios σ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ de la matriz de conectividad \mathbf{L} . Por lo tanto, es fácil ver que la dinámica del error Ec. (108) consiste de N bloques de la forma

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^i = [\mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k\sigma_i \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (109)$$

Esta última ecuación es tomada como la ecuación variacional. Por último, el i -ésimo máximo exponente transverso de Lyapunov es calculado mediante la i -ésima ecuación variacional (109)

$$\lambda_i^{\perp \max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\bar{\mathbf{e}}^i(t)| - \ln |\bar{\mathbf{e}}^i(0)|}{t}. \quad (110)$$

Entonces, se obtienen las siguientes condiciones de estabilidad local de la solución síncrona (100)

- Si $\lambda_i^{\perp max} < 0$ para todo $i = 2, \dots, N$, la solución síncrona es estable localmente.
- Si $\lambda_i^{\perp max} > 0$ para al menos un $i = 2, \dots, N$, la solución síncrona es inestable.

5.2. Sincronización de redes mediante acoplamientos dinámicos

Considere la siguiente red de nodos con acoplamientos dinámicos, la cual está descrita por

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}^i, \quad (111)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{G} \mathbf{h}^i - k \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (112)$$

donde $\mathbf{h}^i \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado del acoplamiento dinámico, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ y $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ son los vectores de acoplamiento. $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz que contiene los parámetros de control del acoplamiento dinámico, la cual es definida como

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (113)$$

donde α , γ_1 y γ_2 son parámetros de diseño. Definiendo \mathbf{x} , \mathbf{F} , \mathbf{L} como en el caso estático, véase Ec. (94), y $\mathbf{h} = [\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N]^T$, se obtiene la siguiente forma compacta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \mathbf{h}, \quad (114)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G} \mathbf{h} - k \mathbf{L} \otimes \mathbf{B}_2 \mathbf{x}, \quad (115)$$

donde $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad. Las ecuaciones (114) y (115) describen una red de N nodos interactuando vía acoplamientos dinámicos. La solución síncrona para la red (114)-(115) está dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^2(t) = \dots = \mathbf{x}^N(t) = \mathbf{s}(t), \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{h}^1(t) = \mathbf{h}^2(t) = \dots = \mathbf{h}^N(t) = \mathbf{0} \quad (116)$$

donde $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es el vector nulo.

5.2.1. Análisis de estabilidad: Función Maestra de Estabilidad

Como en el caso estático, la estabilidad de la solución síncrona (116) es investigada mediante el uso de la Función Maestra de Estabilidad.

El primer paso es linealizar la Ec. (111) alrededor de la solución síncrona (116), de donde se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}^i, \quad (117)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{G} \mathbf{h}^i - k \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_{ij} \mathbf{B}_2 (\mathbf{x}^j - \mathbf{s}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (118)$$

A continuación, se definen los siguientes errores de sincronización

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{x}^1 - \mathbf{s}, \mathbf{e}^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{s}, \dots, \mathbf{e}^N = \mathbf{x}^N - \mathbf{s}, \quad \text{y} \quad \mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N. \quad (119)$$

Nótese que todos los estados \mathbf{h}^i , $i = 1, 2, \dots, N$, correspondientes a los acoplamientos dinámicos, son considerados como errores, ya que cuando la red se sincronice, las señales de acoplamiento se desvanecerán. Entonces, utilizando las ecuaciones (117) y (101), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} \mathbf{e}^i + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}^i, \quad (120)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{G} \mathbf{h}^i - k \sum_{j=1}^N \mathbf{D}_{ij} \mathbf{B}_2 \mathbf{e}^j. \quad (121)$$

Si se supone que todos los nodos de la red son idénticos, entonces, todos los Jacobianos \mathbf{f} evaluados en la solución síncrona $\mathbf{s}(t)$ son idénticos, es decir

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^1} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^2} = \dots = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^N}. \quad (122)$$

Por lo tanto, la dinámica del error se puede escribir de la siguiente forma compacta

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k \mathbf{D} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}. \quad (123)$$

Además, $\mathbf{e} = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^N]^T$ y $\mathbf{h} = [\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N]^T$. A continuación, definimos la

siguiente transformación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{h}} \end{bmatrix}, \quad (124)$$

donde $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de la matriz de conectividad \mathbf{L} , $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{I}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son matrices identidad, $\mathbf{O}_1 \in \mathbb{R}^{nN \times 2N}$ y $\mathbf{O}_2 \in \mathbb{R}^{2N \times nN}$ son matrices de ceros. Después de aplicar la transformación (124), la Ec. (123) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{h}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{h}} \end{bmatrix}, \quad (125)$$

donde $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad y $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz diagonal que contiene los valores propios σ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, de la matriz de conectividad \mathbf{L} . La Ec. (125) es una matriz compuesta por N bloques idénticos en su diagonal, los cuales tienen la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}^i} \\ \dot{\bar{\mathbf{h}}^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Df}(\mathbf{s}) & \mathbf{B}_1 \\ -k\sigma_i \mathbf{B}_2 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^i \\ \bar{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (126)$$

Esta última ecuación se toma como la ecuación variacional. Por último, el i -ésimo máximo exponente transverso de Lyapunov es calculado mediante la i -ésima ecuación variacional (126)

$$\lambda_i^{\perp max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\bar{\mathbf{e}}^i(t)| - \ln |\bar{\mathbf{e}}^i(0)|}{t}. \quad (127)$$

con $\bar{\mathbf{e}}^i = [\bar{\mathbf{e}}^i, \bar{\mathbf{h}}^i]^T$. Entonces, se obtienen las siguientes condiciones de estabilidad local de la solución síncrona (116)

- Si $\lambda_i^{\perp max} < 0$ para todo $i = 2, \dots, N$, la solución síncrona es localmente estable.
- Si $\lambda_i^{\perp max} > 0$ para al menos un $i = 2, \dots, N$, la solución síncrona es inestable.

5.3. Ejemplos: Sincronización de redes

A continuación, se analizan ejemplos de sincronización de redes de sistemas dinámicos con acoplamientos estáticos y dinámicos.

5.3.1. Ejemplo 1: Sincronización mediante un acoplamiento estático de una red de osciladores armónicos

Considere una red de osciladores armónicos en topología de cadena direccional, véase Figura 33. Cada nodo está descrito por la Ec. (18) y la dinámica de la red está descrita por la siguiente ecuación (véase la Ec. (99))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k\mathbf{L} \otimes \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (128)$$

donde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $n = 2$, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N = 10$, son descritas como en Ec.(94). Además,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}\mathbf{x}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{10} \end{bmatrix}, \quad (129)$$

La matriz de conectividad \mathbf{L} , se obtiene de la topología de cadena direccional. Para este ejemplo, la matriz \mathbf{L} está dada por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (130)$$

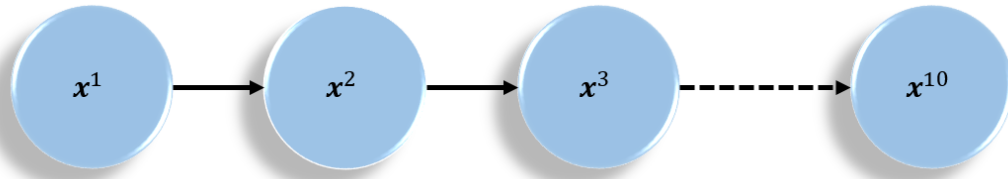


Figura 33. Esquema gráfico: Cadena direccional con acoplamientos estáticos

A continuación, se define el error de sincronización $\mathbf{e}^i = \mathbf{x}^i - \mathbf{s}$, $i = 1, 2, \dots, 10$, Ec. (104) y también se define $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N]^T$. En consecuencia la dinámica del error escrita en forma compacta, está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E} - k\mathbf{D} \otimes \mathbf{C}]\mathbf{e}. \quad (131)$$

La Ec. (131), puede ser diagonalizada en bloques mediante el uso de la transformación $\mathbf{e} = [\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n]\bar{\mathbf{e}}$, ver Ec.(107), y se obtiene

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{E} - k\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{C}]\bar{\mathbf{e}}. \quad (132)$$

Dada la Ec. (132), se puede ver que la dinámica del error consiste de N bloques de la forma

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^i = [\mathbf{E} - k\sigma_i\mathbf{C}]\bar{\mathbf{e}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (133)$$

como σ_i son los valores propios de la matriz de conectividad \mathbf{L} , la cual solo tiene dos distintos valores propios los cuales son 1 y 0. Por lo tanto, solo es necesario analizar dos casos:

- Si $\sigma = 0$, no existe acoplamiento y se trata de la dinámica de un nodo aislado.
- Si $\sigma = 1$, es el mismo caso que ya se presentó en la Sección 2.4.1, donde se llegó a la conclusión que el sistema acoplado es inestable para cualquier k .

5.3.2. Ejemplo 2: Sincronización mediante un acoplamiento dinámico de una red de osciladores armónicos

A continuación, se estudia el ejemplo anterior pero con la diferencia de que el acoplamiento estático es reemplazado por un acoplamiento dinámico de segundo orden.

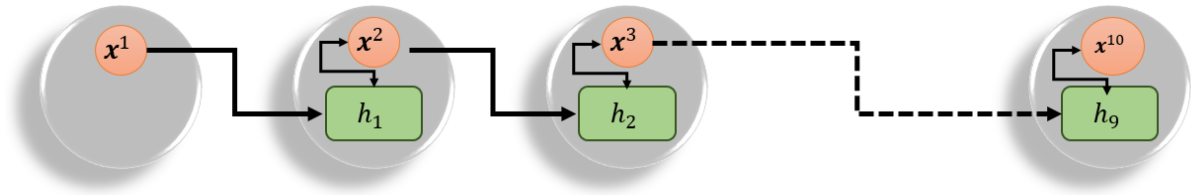


Figura 34. Esquema gráfico: Cadena direccional con acoplamientos dinámicos.

Considere la red de osciladores armónicos mostrada en la Figura 34, la cual está descrita por las ecuaciones (111) y (112). Si se definen los errores mostrados en la Ec. (119), entonces se obtiene la siguiente dinámica del error escrita en forma compacta

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E} & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k\mathbf{L} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (134)$$

donde,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (135)$$

Además, la matriz de conectividad \mathbf{L} es la misma utilizada en el ejemplo anterior, ver Ec. (130).

Como siguiente paso, se aplica la transformación descrita en la Ec. (124), lo cual deja la siguiente matriz diagonalizada por bloques

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{h}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E} & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix}. \quad (136)$$

La matriz de la Ec.(136) está conformada por N bloques idénticos, por lo que se puede

analizar la red separando dichos bloques de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}^i \\ \dot{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{B}_1 \\ -k\sigma_i\mathbf{B}_2 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^i \\ \bar{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (137)$$

Entonces se obtiene la siguiente dinámica de cada bloque aislado

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}^i \\ \dot{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k\sigma_i & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^i \\ \bar{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (138)$$

Dado que los valores propios de la matriz de conectividad \mathbf{D} son 1 y 0, solo es necesario estudiar el caso para cuando $\sigma = 1$. Por lo tanto, se obtiene el polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$, con $\sigma = 1$. El polinomio característico está dado por

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (\alpha + \gamma_2)\lambda^3 + (\omega^2 + \gamma_1 + \alpha\gamma_2)\lambda^2 + (k + \alpha\omega^2 + \gamma_2\omega^2)\lambda + \gamma_1\omega^2 + \alpha k + \alpha\omega^2\gamma_2. \quad (139)$$

Si

$$\alpha = 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_1 = k + 1, \quad k > 0, \quad (140)$$

entonces la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dada en (138), es Hurwitz.

En la Figura (35), se muestra una simulación de la red de 10 osciladores armónicos acoplados, donde se utilizaron los siguientes valores de parámetros: $\omega = 0.1$, $\alpha = 0$, $\gamma_1 = k + 1$, $\gamma_2 = 1$, $k = 1$ con condiciones iniciales de todos los nodos de la red variados entre $[-0.5, 0.5]$. Se puede ver que con el acoplamiento dinámico propuesto y con las condiciones de los parámetros obtenidos, se obtiene una solución síncrona estable de los sistemas acoplados.

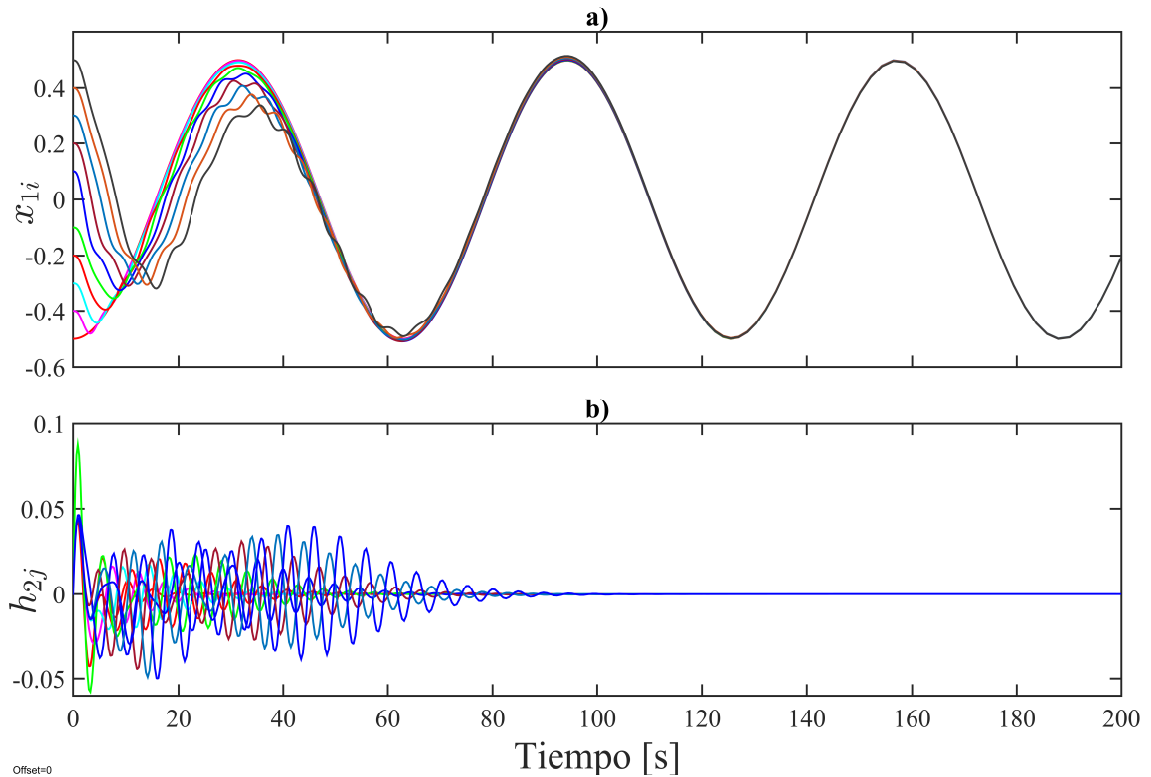


Figura 35. Simulación del ejemplo de una red de 10 osciladores armónicos interconectados mediante acoplamientos dinámicos de segundo orden. En *a)* se muestra la posición. En *b)* se muestra la dinámica del segundo estado h_2 de los acoplamientos dinámicos de segundo orden.

5.3.3. Ejemplo 3: Sincronización mediante un acoplamiento estático de una red de osciladores caóticos

A continuación, se analiza una red de N osciladores caóticos de Rössler interconectados mediante acoplamientos estáticos, en *configuración 1* \rightarrow 1. Además, se utiliza una topología de estrella, la cual se puede ver gráficamente en la Figura 36.

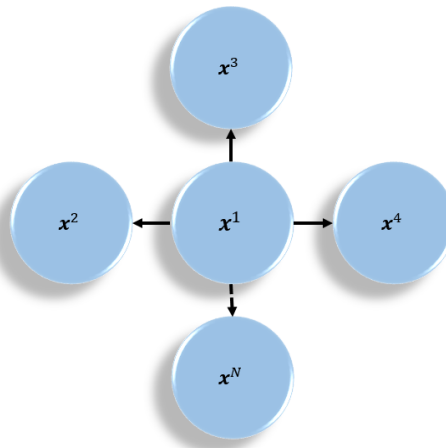


Figura 36. Esquema gráfico: Topología en estrella con acoplamientos estáticos.

Considerando una red de N osciladores caóticos de Rössler, ver Ec. (27), de la forma presentada en Ec. (93), siguiendo los pasos presentados en la Sección 5.1, se obtiene la dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - k\mathbf{L} \otimes \mathbf{C}]\mathbf{e}, \quad (141)$$

donde \mathbf{L} es la matriz de conectividad de la topología mostrada en la Figura 36, la cual tiene la siguiente forma

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (142)$$

donde los valores propios de dicha matriz, están dados por

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0, \\ \sigma_m &= 1, \\ \sigma_N &= N, \end{aligned} \quad (143)$$

para $m = 2, \dots, N-1$. El siguiente paso es aplicar la transformación de la Ec. (107), para obtener la siguiente dinámica del error diagonalizada por bloques

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} - k\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{C}]\bar{\mathbf{e}}, \quad (144)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{C} están dados por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (145)$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente dinámica del error separada en bloques idénticos

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^i = \begin{bmatrix} -k\sigma_i & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (146)$$

Como se pudo ver en la Ec.(143), solo existen dos casos de estudio y es cuando $\sigma_i = 1$ y $\sigma_i = N$. Si $\sigma_i = 1$, entonces

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \underbrace{\begin{bmatrix} -k & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{\bar{e}}^i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (147)$$

El polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dada en (147) es

$$P(\lambda) = (c + \lambda)(\lambda^2 + (k - a)\lambda - ak + 1), \quad (148)$$

las condiciones que se deben cumplir para que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz son: $k - a > 0$ y $1 - ak > 0$. Por lo tanto,

$$k > a \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} > k. \quad (149)$$

Dado que a es un parámetro intrínseco del sistema Rössler, ver Ec. (26), el cual tiene como valor 0.2, obtenemos

$$k > 0.2 \quad \text{y} \quad k < 5. \quad (150)$$

Por lo que si existe valor de la fuerza de acoplamiento k que haga que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz.

Por otra parte, si $\sigma_i = N$, entonces la ecuación (146) toma la forma

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \underbrace{\begin{bmatrix} -kN & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{\bar{e}}^i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (151)$$

El polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dada en (154), es el siguiente

$$P(\lambda) = (c + \lambda)(\lambda^2 + (kN - a)\lambda - akN + 1). \quad (152)$$

Las condiciones para las cuales la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ es Hurwitz son

$$kN > a \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} > kN. \quad (153)$$

Claramente, se puede observar que existe un intervalo de valores para la fuerza de acoplamiento k para los cuales la solución síncrona en la red es localmente estable. Si tomamos $a = 0.2$ y consideramos el hecho que el valor mínimo que puede tomar k es $k > 0.2$, véase (153), se obtiene el número de nodos (N) que puede tener la red,

$$N \geq 1 \quad \text{y} \quad N \leq 25. \quad (154)$$

Por lo tanto, se puede ver que el número máximo de nodos en una red con acoplamientos estáticos es de 25.

A continuación, se analiza la estabilidad de la red mediante la Función Maestra de Estabilidad y mediante el cálculo del máximo exponente transverso de Lyapunov. El uso de la Función Maestra de Estabilidad es muy parecido al usado en el análisis anterior, con la diferencia de que ya no se consideran como perturbaciones desvanecientes las no linealidades de los sistemas. Tomando en consideración lo anterior, los N bloques están descritos por

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \begin{bmatrix} -k\sigma_i & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_1 & 0 & x_1 - c \end{bmatrix} \mathbf{e}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (155)$$

donde, como se vio en el análisis anterior, σ_i puede tomar los valores de 1 y N . Además, la Ec. (155) es la i -ésima ecuación variacional. Entonces, se continúa con el cálculo del máximo exponente transverso de Lyapunov.

En la Figura 37, se muestran los λ_{max}^\perp para cuando σ_i es igual a 1 y 25 mediante una línea punteada y una sólida, respectivamente. Lo interesante de dicha figura, es la intersección de las líneas, es decir, la pequeña región de la fuerza de acoplamiento k que satisface que en ambos casos el exponente transverso de Lyapunov sea negativo. En la Figura 38, se tiene una ampliación de la Figura 37 para una mejor apreciación.

En conclusión, una red de osciladores caóticos de Rössler interconectados mediante acoplamientos estáticos en un topología de estrella, únicamente habrá una solución síncrona localmente estable cuando se conecten 25 nodos o menos en la red.

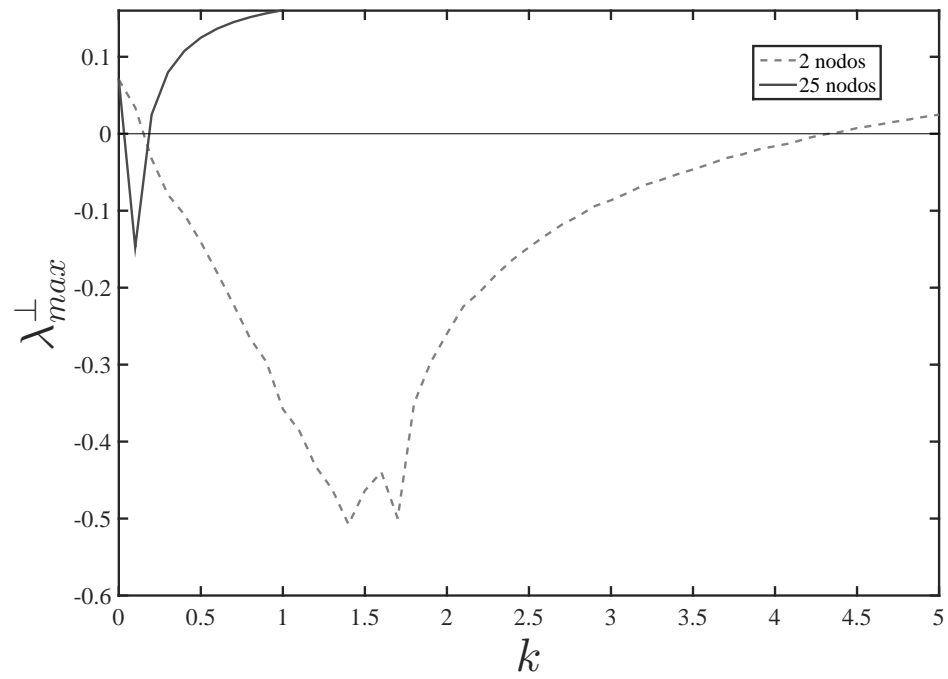


Figura 37. λ_{max}^{\perp} con respecto a la fuerza de acoplamiento k . La línea punteada representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 2 nodos acoplados. La línea sólida representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 25 nodos acoplados.

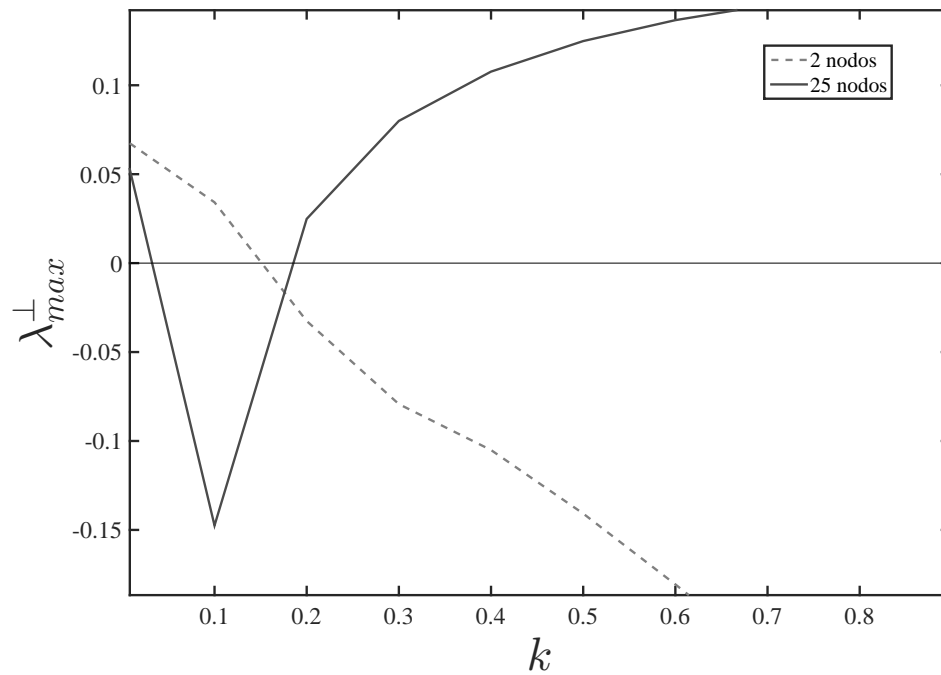


Figura 38. Ampliación de la Figura 37.

5.3.4. Ejemplo 4: Sincronización mediante un acoplamiento dinámico de una red de osciladores caóticos

Se retoma el ejemplo de la Sección 5.3.3, donde de igual manera se considera una red de osciladores caóticos de Rössler con la misma topología de red, pero con el cambio de acoplamientos estáticos por acoplamientos dinámico de segundo orden, (Figura 39).

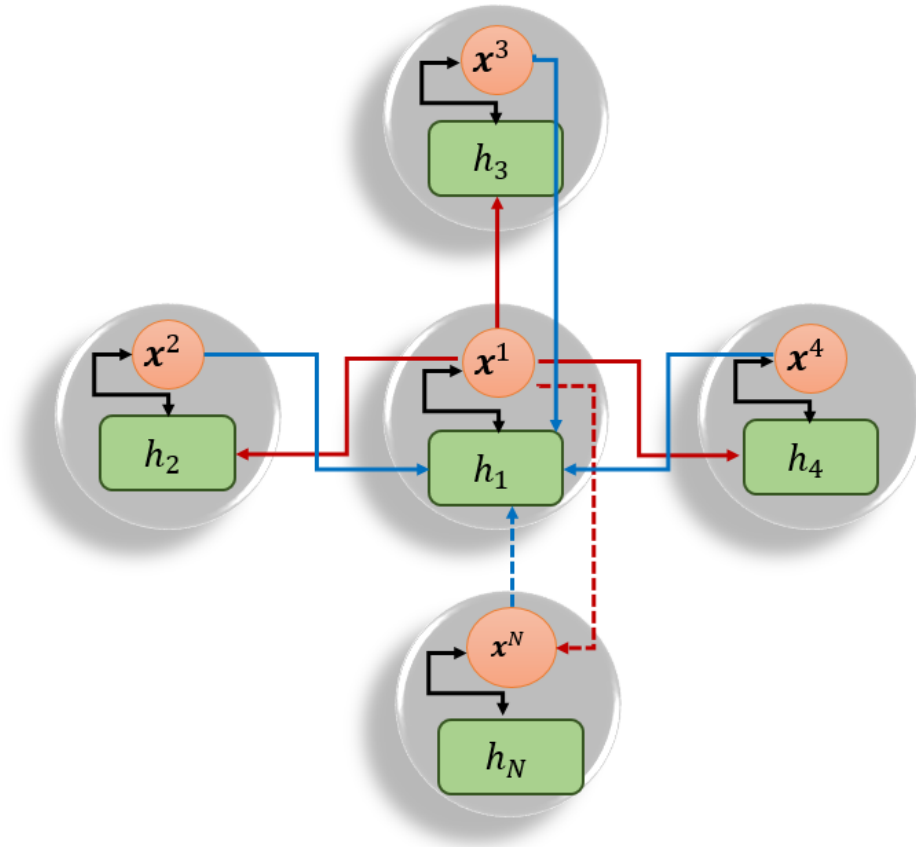


Figura 39. Esquema gráfico: Topología en estrella con acoplamientos dinámicos.

Considere una red de N osciladores caóticos Rössler, Ec.(26), de la forma presentada en las ecuaciones (111) y (112). Se definen los errores de sincronización propuestos en Ec.(119), entonces se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k\mathbf{L} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}. \quad (156)$$

El siguiente paso es aplicar la transformación propuesta en la Ec.(124), por lo tanto

obtenemos la siguiente dinámica del error diagonalizada en bloques

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{h}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{h}} \end{bmatrix}, \quad (157)$$

La Ec.(157) es una matriz compuesta por N bloques idénticos en su diagonal, los cuales tienen la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}^i} \\ \dot{\bar{\mathbf{h}}^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ -k\sigma_i \mathbf{B}_2 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^i \\ \bar{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (158)$$

donde,

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (159)$$

y las matrices \mathbf{A} y \mathbf{G} son definidas como en las ecuaciones (145) y (113), respectivamente. Dado que la matriz de conectividad \mathbf{L} es la misma que en el ejemplo de acoplamientos estáticos, se sabe que los valores propios σ_i serán los mostrados en Ec.(143), por lo tanto, de igual manera se analiza la estabilidad para cuando σ_i toma los valores de 1 y N . Como el caso donde $\sigma_i = 1$ ya fue estudiado en el Capítulo 4, solo se recordará que las condiciones de estabilidad para los parámetros del acoplamiento son las siguientes, ver Ec.(81),

$$\alpha = a, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = k. \quad (160)$$

Entonces, se analizan las condiciones de estabilidad para los parámetros del acoplamiento dinámico para el caso cuando $\sigma_i = N$, por lo tanto, la dinámica del error dada en (159) toma la forma

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -kN & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\mathbf{e}}, \quad (161)$$

el siguiente paso es obtener el polinomio característico de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dada en (161), el cual está dado por

$$p(\lambda) = d_4\lambda^4 + d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0, \quad (162)$$

donde,

$$\begin{aligned} d_4 &= 1, \\ d_3 &= \alpha - a + \gamma_2, \\ d_2 &= \gamma_1 + kN - a\alpha - a\gamma_2 + \alpha\gamma_2 + 1, \\ d_1 &= \alpha + \gamma_2 - a\gamma_1 - akN + \alpha kN - a\alpha\gamma_2, \\ d_0 &= \gamma_1 + \alpha\gamma_2 - a\alpha kN, \end{aligned} \quad (163)$$

Las condiciones que se buscan cumplir son: $d_4, d_3, d_0 > 0$, $b_1 = d_3d_2 - d_1 > 0$ y $b_1d_1 - d_3d_0 > 0$. Entonces, se encuentran las condiciones para los parámetros del acoplamiento que hagan que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ sea Hurwitz, los cuales son

$$\alpha = a, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = kN. \quad (164)$$

Dado que no se encontraron condiciones analíticas que condicionen el número de nodos posibles en la red, se concluye que no existe límite en el número de nodos que pueden conectarse a la red.

Por último, se analiza numéricamente la estabilidad de la red mediante el uso de la Función Maestra de Estabilidad y el Máximo exponente transversal de Lyapunov. Se obtiene la ecuación variacional de un bloque aislado de la dinámica del error diagonalizada por bloques, ver Ec.(125), la cual es la siguiente

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & x_1 - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k\sigma_i & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \mathbf{\bar{e}}. \quad (165)$$

Utilizando la ecuación variacional (165), se calculan los λ_{max}^\perp , para los casos cuando σ_i es igual a 1 y N .

En la Figura (40), se pueden ver los λ_{max}^\perp con respecto a la fuerza de acoplamiento

k para cuando la red tiene 2, 25 y 50 nodos. Donde se observa que existe solución síncrona de la red dado que existen valores de la fuerza de acoplamiento k que hace $\lambda_{max}^{\perp} < 0$ para los 3 casos graficados. Solo se debe respetar la cota obtenida de $k > 0.4$ descrita en la Ec.(82).

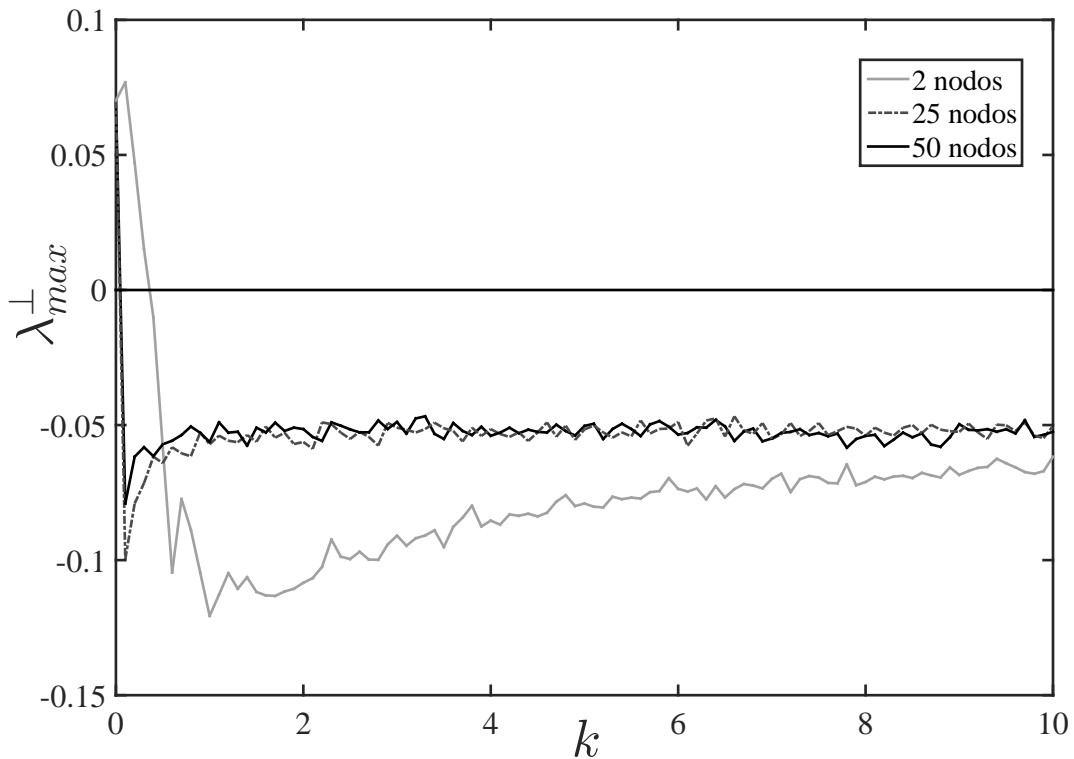


Figura 40. λ_{max}^{\perp} con respecto a la fuerza de acoplamiento k . La línea sólida clara representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 2 nodos acoplados. La línea punteada representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 25 nodos acoplados. La línea sólida oscura representa los λ_{max}^{\perp} de una red de 50 nodos acoplados.

Por lo tanto, se llega a la conclusión de que los acoplamientos dinámicos muestran mejor desempeño que los acoplamientos estáticos, hablando del número de nodos que permite la red sin desestabilizar la solución síncrona.

Capítulo 6. Conclusiones

En este trabajo de tesis se realizó una investigación sobre sincronización de sistemas dinámicos, que interactúan a través de acoplamientos dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. Como ejemplos de aplicación, se consideraron osciladores armónicos y osciladores caóticos.

Se demostró la efectividad de los acoplamientos aquí propuestos de manera analítica, numérica y experimental.

A lo largo del Capítulo 3, se presentó el esquema propuesto de un acoplamiento dinámico de primer orden. Se observó que para dos osciladores armónicos, se puede inducir sincronización mediante el esquema dinámico, algo que no se puede lograr con un acoplamiento estático clásico. Además, se consideró otro caso más interesante, el cual fue la sincronización de dos osciladores caóticos de Rössler, donde se obtuvo que el esquema dinámico facilita la solución síncrona de los osciladores acoplados incluso mejor que en el esquema estático clásico, véase Figura (9). No solo se analizó de manera analítica y numérica el rendimiento del esquema dinámico, también se aplicó de manera experimental utilizando circuitos electrónicos para simular la dinámica caótica de Rössler y la dinámica del acoplamiento, y como se vio en los resultados, el acoplamiento dinámico funciona satisfactoriamente en experimentos físicos.

Aunque el acoplamiento dinámico de primer orden propuesto muestra ventaja en comparación con un acoplamiento estático clásico, el esquema dinámico de orden 2 propuesto en el Capítulo 4 mostro ser más flexible con los parámetros de diseño para inducir sincronización en los sistemas considerados a lo largo de este trabajo de tesis. Por ejemplo, para el caso de dos osciladores caóticos de Rössler, se pudo observar una gran mejora en el rango posible para la fuerza de acoplamiento k , véase Figura 32 a), la cual es clave para la existencia de la solución síncrona.

La razón por la cual el esquema dinámico de segundo orden presenta mejora en los valores posibles de la fuerza de acoplamiento k en comparación con el esquema dinámico de primer orden propuesto y con el esquema clásico, es que existen más parámetros de diseño, lo cuales pueden ser escogidos de forma conveniente para obtener una solución síncrona estable de los sistemas acoplados. Cabe mencionar que existen muchas posibilidades a la hora de escoger dichos parámetros de diseño del

acoplamiento. Además, se probaron los resultados obtenidos de manera experimental con circuitos electrónicos, donde se obtuvieron excelentes resultados.

Dado que el esquema dinámico de segundo orden propuesto muestra ventaja sobre el esquema dinámico de primer orden, se optó por utilizarlo para la sincronización de redes. Primeramente, se analizó una red de osciladores armónicos con una topología en cadena, utilizando acoplamientos estáticos y dinámicos. El resultado fue predecible, ya que incluso para dos osciladores armónicos acoplados el acoplamiento estático clásico no logró inducir una solución síncrona estable. Por otro lado, el acoplamiento dinámico si logro sincronizar dos nodos interconectados e incluso una red de N nodos, ver Figura (35). Nótese que el acoplamiento dinámico, el cual tiene su propia dinámica, logra sincronizar sistemas dinámicos los cuales presentan una dinámica diferente a la del acoplamiento.

De igual manera, otro caso interesante considerado fue el de la sincronización de una red de osciladores caóticos de Rössler, los cuales están interconectados mediante acoplamientos estáticos y dinámicos con una topología en estrella. Se eligió una configuración en la cual el esquema estático clásico si lograra inducir sincronización en la red, para poder tener una buena comparación en cuanto a ventajas y desventajas. Primero, se analizó la red con acoplamientos estáticos, donde se llegó a la conclusión de que la red puede tener como máximo 25 nodos, si se desea tener una solución síncrona estable. Por otro lado, utilizando acoplamientos dinámicos, se llegó a la conclusión de que teóricamente no existe límite en el número de nodos que tenga la red para tener una solución síncrona estable. Estos resultados se pueden ver de manera gráfica mediante los máximos exponentes transversos de Lyapunov en las Figuras (37) y (40).

Los esquemas de sincronización propuestos no son infalibles, se encontraron casos en que ni el acoplamiento estático ni el acoplamiento dinámico pueden inducir sincronización, muchas veces es debido a la dinámica intrínseca de algunos sistemas dinámicos.

Se observó que al aumentar el orden del acoplamiento dinámico facilita la aparición de sincronización en los sistemas acoplados, queda estudiar cómo se comportaría un acoplamiento de mayor orden para observar ventajas y desventajas del mismo.

Como conclusión general, los acoplamientos dinámicos mostraron una gran ventaja al inducir sincronización a sistemas dinámicos acoplados, en comparación a los acoplamientos estáticos. Las piezas clave son los parámetros de diseño de los acoplamientos dinámicos, lo cuales, si son sintonizados adecuadamente, logran inducir sincronización en pares y en redes de sistemas dinámicos, como ya se mostró a lo largo de esta tesis.

Literatura citada

- Blekhman, I. I., Fradkov, A. L., Nijmeijer, H., y Pogromsky, A. Y. (1997). On self-synchronization and controlled synchronization. *Syst. Control Lett.*, **31**(5): 299–305.
- Brown, R., Rulkov, N. F., y Tracy, E. R. (1994). Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data. *Phys. Rev. E*, **49**: 3784–3800.
- Dörfler, F., Chertkov, M., y Bullo, F. (2013). Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110**(6): 2005–2010.
- Huang, L., Chen, Q., Lai, Y.-C., y Pecora, L. M. (2009). Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. E*, **80**: 036204.
- Katriel, G. (2008). Synchronization of oscillators coupled through an environment. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**(22): 2933 – 2944.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems; 3(rd) ed.*. Prentice-Hall. Upper Saddle River, NJ.
- Kitahata, H., Taguchi, J., Nagayama, M., Sakurai, T., Ikura, Y., Osa, A., Sumino, Y., Tanaka, M., Yokoyama, E., y Miike, H. (2009). Oscillation and synchronization in the combustion of candles. *The Journal of Physical Chemistry A*, **113**(29): 8164–8168. PMID: 19606893.
- Mosekilde, E., Maistrenko, Y., Maistrenko, I., y Postnov, D. (2002). *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*. Series on Nonlinear Science. World Scientific.
- Motter, A., A. Myers, S., Anghel, M., y Nishikawa, T. (2013). Spontaneous synchrony in power-grid networks.
- Ogata, K. (2001). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall PTR, cuarta edición. Upper Saddle River, NJ, USA.
- Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, **64**: 821–824.
- Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, **80**: 2109–2112.
- Pena, J. (2013). *Huygens' synchronization of dynamical systems : beyond pendulum clocks*. Tesis de doctorado, Department of Mechanical Engineering.
- Pena Ramirez, J., Aihara, K., Fey, R., y Nijmeijer, H. (2014). Further understanding of huygens' coupled clocks: The effect of stiffness. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **270**: 11 – 19.
- Pena Ramirez, J., Cuesta Garcia, R., y Alvarez, J. (2016). Synchronization of two inverted pendula via dynamic coupling. En: *2016 Australian Control Conference (AuCC)*, Nov. pp. 87–92.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press.

- Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española*. Real Academia Española. Recuperado en Enero de 2018.
- Resmi, V., Ambika, G., y Amritkar, R. E. (2010). Synchronized states in chaotic systems coupled indirectly through a dynamic environment. *Phys. Rev. E*, **81**: 046216.
- Rössler, O. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, **57**(5): 397 – 398.
- Strogatz, S. H. (2000). From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **143**(1): 1 – 20.
- Wang, B., Suzuki, H., y Aihara, K. (2016). Enhancing synchronization stability in a multi-area power grid. *Scientific reports*, **6**: 26596.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., y Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16**(3): 285 – 317.

Anexo

Se presenta la versión final del artículo ya aceptado en el congreso *Analysis and Control of Chaotic Systems - 5th CHAOS 2018* de IFAC (*International Federation of Automatic Control*), a celebrarse del 31 de Octubre al 2 de Noviembre de 2018, en Eindhoven Holanda, bajo el título de *Indirect Master-Slave synchronization: experimental results*.

Indirect master-slave synchronization: experimental results^{*}

Eduardo García Montes^{*} Jonatan Pena Ramirez^{**}

^{*} Center for Scientific Research and Higher Education at Ensenada,
Applied Physics Division, Carr. Ensenada-Tijuana 3918, CP 22860,
Ensenada B.C., Mexico (e-mail: eduardogarcia@cicese.edu.mx)

^{**} CONACYT-CICESE, Applied Physics Division, Electronics and
Telecommunications Department, Carr. Ensenada-Tijuana 3918, CP
22860 Ensenada, B.C., Mexico (e-mail: jpena@cicese.mx)

Abstract: An indirect master-slave configuration, in which two Rössler systems are *indirectly* connected, is considered. Opposite to the classical case, in which the slave system is connected to the master through common signals, in the scheme discussed here the slave interacts to the master via a second order linear system. By using the Master Stability Function formalism, it is demonstrated that the onset of synchronization is enhanced when the interaction is indirect. Furthermore, the performance of the indirect master-slave scheme is experimentally validated by using electronic circuits, which emulate the chaotic dynamics of Rössler system.

Keywords: Dynamic coupling, Master-slave synchronization, Master Stability Function, Rössler system, electronic circuits.

1. INTRODUCTION

Coupled systems, independent of their nature, —e.g. biological, physical, mechanical—may exhibit synchronization, i.e. their dynamic behaviors coincide in time (Pikovsky et al., 2003; Mosekilde et al., 2002).

The coupling between the systems can be static or dynamic. For the case of static coupling, we can mention the well-known diffusive coupling (Brown et al., 1994), in which the systems interact to each other through common signals, e.g. through their outputs. On the other hand, dynamic coupling refers to the case where the connection between the systems is through a dynamical system, as it is the case in environmental coupling (Katriel, 2008; Resmi et al., 2010).

Furthermore, the coupling schemes can also be classified according to their topology: unidirectional coupling, e.g. master-slave scheme (Balmforth et al., 1997), and bidirectional or mutual coupling (Lebrun et al., 2017).

In this paper, we consider a dynamic master-slave synchronization scheme, in which the slave interacts to the master through a second order dynamical system. The stability of the synchronous solution is investigated by using the Master Stability Function approach and the largest transverse Lyapunov exponent. Furthermore, the performance of the classical master-slave scheme is compared to the performance of the proposed dynamic master-slave configuration, for the particular case of the chaotic Rössler system. Additionally, the obtained results are experimentally validated by using electronic circuits.

Ultimately, the obtained results indicate that master-slave synchronization is enhanced when the static coupling is replaced by a dynamic interconnection.

The outline of this paper is as follows. First, Section 2 presents the static and dynamic master-slave schemes and the corresponding tools for analyzing the stability of the synchronous solution. Then, in Section 3, the performance of the static and dynamic master-slave schemes, for the particular case of the chaotic Rössler system, is compared. Then, an experimental study is conducted in Section 4 using electronic Rössler circuits. Finally, a discussion of the obtained results and some conclusions are presented in Section 5.

2. PRELIMINARIES

In this section the static and dynamic master-slave configurations are presented. Additionally, a suitable variational equation is derived using the Master Stability Function approach. The resulting variational equations are used in the upcoming analysis for determining the stability of the synchronous solutions in both configurations.

In the notation, bold symbols indicate matrices or vectors, whereas normal symbols denote scalar variables or scalar parameters.

2.1 Static master-slave configuration

Consider the classic master-slave scheme with static coupling, which is described by (Brown et al., 1994)

^{*} This work has been partially supported by CONACYT, Mexico.
Corresponding author: J. Pena Ramirez

$$\text{Master: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \\ y_m = \mathbf{C}\mathbf{x}_m, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Slave: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) + \mathbf{B}u_s, \\ y_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s, \end{cases} \quad (2)$$

where $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ are the state vectors of the master and slave systems, respectively, function \mathbf{F} is assumed to be sufficiently smooth and nonlinear, vectors $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ are the corresponding input and output vectors, respectively. On the other hand, $y_i \in \mathbb{R}$, $i = m, s$ are the corresponding *scalar* outputs, and the *scalar* control input $u_s \in \mathbb{R}$ to the slave system is given by

$$u_s = k(y_m - y_s) = k\mathbf{C}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s), \quad (3)$$

where $k \in \mathbb{R}_+$ is the coupling strength.

Using the Master Stability Function approach, see e.g. (Pecora and Carroll, 1998; Huang et al., 2009), the following *variational equation* is defined

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) - k\mathbf{BC}] \mathbf{e}, \quad (4)$$

where $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$ and $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_m}$ is the Jacobian of the vector function \mathbf{F} evaluated on a (bounded) trajectory \mathbf{x}_m of the master system.

2.2 Dynamic master-slave configuration

Recently, a dynamic master-slave synchronization scheme has been proposed in (Pena Ramirez et al., 2018). In this scheme, the master and slave have an indirect interaction through a second order dynamical system. The scheme is described by the following set of equations

$$\text{Master: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{F}(\mathbf{x}_m), \\ y_m = \mathbf{C}\mathbf{x}_m, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Slave: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{F}(\mathbf{x}_s) - \mathbf{B}y_h, \\ y_s = \mathbf{C}\mathbf{x}_s, \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Dynamic coupling: } \begin{cases} \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{G}\mathbf{h} - \mathbf{B}_h u_s, \\ y_h = \mathbf{C}_h \mathbf{h}, \end{cases} \quad (7)$$

where $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ are the state vectors of the master and slave, respectively, $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$, $h_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, are the state variables of the dynamic coupling, \mathbf{B}, \mathbf{C} and \mathbf{F} are as defined before, and u_s is as given in (3).

On the other hand, $\mathbf{B}_h \in \mathbb{R}^2$ and $\mathbf{C}_h \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ are the input and output vectors of the second order dynamic coupling, respectively. Through this paper, it will be assumed that these vectors are given by

$$\mathbf{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{C}_h = [0 \ 1]. \quad (8)$$

The assumption on \mathbf{B}_h indicates that the control input u_s is applied to the second equation of the dynamic coupling, whereas the assumption on \mathbf{C}_h reveals that the second state variable of the dynamic coupling, i.e. h_2 , is assumed to be the output of the dynamic coupling, to be applied to the slave system.

Finally, matrix $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ in (7) is given by

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where γ_1, γ_2 , and α are positive constants, to be chosen.

Again, using the Master Stability Function formalism, the following variational equation is derived

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) & \mathbf{BC}_h \\ -k\mathbf{B}_h\mathbf{C} & \mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

where $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$ and $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m)$ is as defined in (4).

By defining $\mathbf{e} := (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{h})$, the variational equation Eq. (10) is rewritten as follows

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_m)\mathbf{e}. \quad (11)$$

2.3 Local stability analysis

The local stability of the synchronous solution in both the static and dynamic master-slave schemes can be investigated by looking at the largest transverse Lyapunov exponent, which is defined as follows (Pikovsky et al., 2003)

$$\lambda_{max}^\perp = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\mathbf{e}(t)|}{|\mathbf{e}(0)|}. \quad (12)$$

For the case of the static configuration, λ_{max}^\perp is computed from the variational equation (4), whereas for the dynamic scheme, λ_{max}^\perp is computed from the variational equation (11) with $\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)$ as defined in (10).

If $\lambda_{max}^\perp < 0$, the synchronous solution $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s$ is locally stable. On the other hand, if $\lambda_{max}^\perp > 0$, the synchronous solutions is unstable (Pikovsky et al., 2003).

3. APPLICATION TO THE RÖSSLER SYSTEM

The Rössler oscillator is a three dimensional system. Although it does not have a direct physical interpretation, it is commonly used as a benchmark in the study of chaos. Furthermore, for certain initial conditions, this system exhibits unbounded solutions.

The dynamic behavior of the Rössler system is governed by the following equation (Rössler, 1976)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -y - z, \\ x + ay, \\ b + (x - c)z, \end{bmatrix}, \quad (13)$$

where a, b , and c are positive constant parameters.

In what follows, the performance of the classical master-slave scheme (1)-(2) is compared to the performance obtained with the dynamic scheme (5)-(7), for the particular case of Rössler system (13). Specifically, the largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^\perp (12) is computed for each scheme for different coupling matrices. In the analysis, a master system with *bounded trajectories*, is considered and the following parameter values are used, for which chaotic behavior is expected: $a = b = 0.2$ and $c = 5.7$. Finally, λ_{max}^\perp is computed, as a function of the coupling strength, by using the Wolf algorithm (Wolf et al., 1985).

3.1 Rössler systems with static master-slave coupling

Consider a pair of Rössler systems interacting via the *static* master-slave configuration (1)-(3). Assume that the output of each system is the x variable and moreover, consider the case in which the control input u_s is applied to the

first equation of the slave system. Therefore, the input and output vectors \mathbf{B} and \mathbf{C} are given by

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]. \quad (14)$$

Hence, the coupled Rössler systems with static master-slave coupling (1)-(3) are described by

$$\text{Master: } \begin{cases} \dot{x}_m = -y_m - z_m, \\ \dot{y}_m = x_m + ay_m, \\ \dot{z}_m = b + x_m z_m - cz_m, \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{Slave: } \begin{cases} \dot{x}_s = -y_s - z_s + k(x_m - x_s), \\ \dot{y}_s = x_s + ay_s, \\ \dot{z}_s = b + x_s z_s - cz_s. \end{cases} \quad (16)$$

The stability of the synchronous solution in the coupled Rössler systems (15)-(16) is investigated by using the variational equation (4). As a first step, note that the Jacobian $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m)$ for the Rössler system (13) is given by

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}_m) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_m & 0 & x_m - c \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Replacing (14) and (17) into (4), yields to the following variational equation

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} -k & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_m & 0 & x_m - c \end{bmatrix} \mathbf{e}. \quad (18)$$

Next, the largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^\perp , see (12) is computed—as a function of the coupling strength k —from (18). The obtained results are depicted in Figure 1, see the dashed line. Clearly, λ_{max}^\perp is negative within the narrow interval $0.18 < k < 4.6$. For these values of coupling strength synchronization is expected to be locally stable cf. (Huang et al., 2009).

3.2 Rössler systems with dynamic master-slave coupling

Now, consider the case where the coupling between the master and slave Rössler systems is dynamic.

By replacing (3), (8)-(9) and (13)-(14) into (5)-(7), yields to the following set of equations, describing the dynamic behavior of a pair of Rössler systems with dynamic master-slave interconnection

$$\text{Master: } \begin{cases} \dot{x}_m = -y_m - z_m, \\ \dot{y}_m = x_m + ay_m, \\ \dot{z}_m = b + x_m z_m - cz_m, \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{Slave: } \begin{cases} \dot{x}_s = -y_s - z_s - h_2, \\ \dot{y}_s = x_s + ay_s, \\ \dot{z}_s = b + x_s z_s - cz_s, \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{Dynamic coupling: } \begin{cases} \dot{h}_1 = -\alpha h_1 + h_2, \\ \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_m - x_s). \end{cases} \quad (21)$$

Following (Pena Ramirez et al., 2018), the parameters for the dynamic coupling (21) are chosen as follows

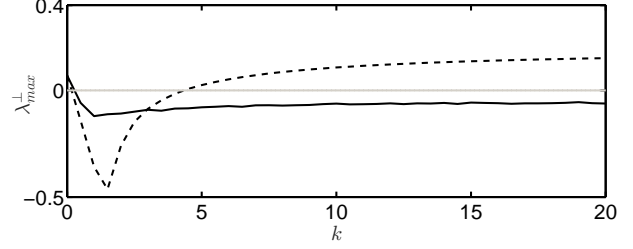


Fig. 1. λ_{max}^\perp as a function of k . Dashed line: λ_{max}^\perp for the master-slave configuration with *static* coupling (15)-(16). Solid line: λ_{max}^\perp for the master-slave configuration with *dynamic* coupling (19)-(21). From this figure it is evident that synchronization is enhanced when the interconnection between the master and the slave systems is dynamic.

$$\alpha = a, \quad \text{and} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = k. \quad (22)$$

The stability of the synchronous solution $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s$ and $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, in the coupled systems (19)-(21) is again investigated by using the Master Stability Function formalism.

This requires to compute matrix $\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)$ in the variational equation (10), which for the present case is given by

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_m) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & x - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

The next step is to determine λ_{max}^\perp , as a function of the coupling strength k , from the variational equation (11) with $\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)$ as given in (23). The parameter values of the Rössler systems are as used before and the parameters of the dynamic coupling are as given in (22). The obtained results are presented in Figure 1, where λ_{max}^\perp is indicated by the solid line. From the figure, it can be seen that for $k > 0.4$, $\lambda_{max}^\perp > 0$ and consequently, synchronization is expected to occur in the coupled Rössler systems (19)-(21), provided that the coupling strength satisfies $k > 0.4$.

The results presented in Figure 1 are in clear contrast: when the Rössler systems are statically coupled, see (15)-(16), synchronization may be induced in a *narrow* interval of coupling strengths, as shown by the dashed line in Figure 1. However, if the Rössler systems are indirectly connected via a dynamic coupling, see Eqs. (19)-(21), then synchronization may be achieved for *arbitrarily large* coupling strengths, see the solid line in Figure 1.

These results suggest that master-slave synchronization may be enhanced by replacing the static coupling by a dynamic interconnection.

3.3 Synchronization for other input-output configurations

Now we consider two additional cases, for which the dynamic scheme (5)-(7) achieves synchronization, whereas the static scheme (1)-(3) fails to synchronize the systems.

Configuration 1 \rightarrow 2 Assume that the output of the master and slave Rössler systems is the x variable and

also, assume that the input to the slave system can only be applied to the second equation. Here, this input-output combination is referred to as *configuration 1* \rightarrow 2. Under these assumptions, the input and output vectors for the Rössler slave system, are given by

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]. \quad (24)$$

Next, the variational equation—for the static master-slave scheme—can be obtained by replacing (17) and (24) into (4). This yields

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1-k & a & 0 \\ z_m & 0 & x_m - c \end{bmatrix} \mathbf{e}. \quad (25)$$

On the other hand, the variational equation, for the indirect master-slave scheme, is as given in (11) with $\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)$ obtained by replacing (8)-(9), (17), and (24) into (10). This yields

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_m) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ z_m & 0 & x_m - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ -k & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Now, the largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^\perp is computed, as a function of the coupling strength k . For the case of the static master-slave scheme, λ_{max}^\perp is computed from the variational equation (25), whereas for the dynamic master-slave configuration λ_{max}^\perp is computed from the variational equation (11), with $\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)$ as given in (26). In both cases, the parameter values for the Rössler systems are as used before and the parameter values of the dynamic coupling are as given in (22). The obtained results are shown in Figure 2. The dashed line corresponds to λ_{max}^\perp for the static master-slave scheme, whereas the solid line indicates λ_{max}^\perp for the proposed dynamic configuration. For the sake of easy comparison, λ_{max}^\perp for the static scheme (dashed line) has been scaled by a factor 0.1. From this figure it is easy to see that for the case of the static coupling, λ_{max}^\perp stays always positive and consequently, the synchronous solution is unstable. In contrast, for the dynamic configuration, $\lambda_{max}^\perp < 0$ for $k > 8.57$. Therefore, the synchronous solution is expected to be stable for sufficiently large coupling strengths ($k > 8.57$).

Configuration 2 \rightarrow 1 Another input-output combination, for which the classical master-slave scheme with static coupling fails to synchronize the systems is when the output of the master and slave Rössler systems is the y variable and the input is assumed to be applied at the first equation of the slave system. This configuration is referred to as *configuration 2* \rightarrow 1. In this case, the input and output vectors for the slave Rössler system are

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0]. \quad (27)$$

Following the same procedure used for the previous configurations, the corresponding variational equations are

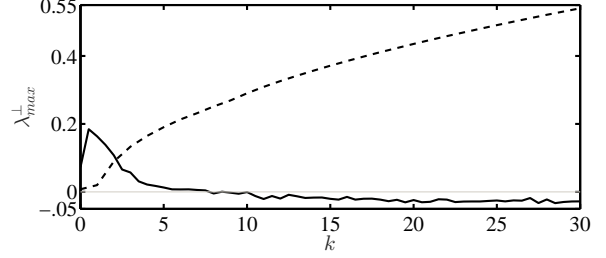


Fig. 2. Largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^\perp , as a function of the coupling strength k , for *configuration 1* \rightarrow 2. Dashed line: static coupling. Solid line: proposed dynamic coupling. Clearly, when the coupling is static $\lambda_{max}^\perp > 0$, i.e. the synchronous solution is unstable. On the other hand, when the interaction between the systems is indirect (through a dynamic coupling), λ_{max}^\perp is negative for $k > 8.57$ and consequently, the synchronous solution is locally stable for ‘sufficiently large’ coupling strengths ($k > 8.57$).

obtained. For the case of the static master-slave scheme, the variational equation is

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -1-k & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_m & 0 & x_m - c \end{bmatrix} \mathbf{e}, \quad (28)$$

whereas the corresponding variational equation for the proposed dynamic master-slave coupling is as given in (11) with $\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)$ given by

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_m) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ z_m & 0 & x_m - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -k & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Figure 3 shows λ_{max}^\perp for the static and dynamic configurations. The dashed line corresponds to λ_{max}^\perp for the static master-slave scheme and it has been computed from the variational equation (28). On the other hand, the solid line indicates λ_{max}^\perp for the dynamic master-slave scheme, which is computed from (11) with $\mathbf{A}(\mathbf{x}_m)$ as given in (29). From the figure it becomes evident that $\lambda_{max}^\perp < 0$ for $k > 9.51$ for the dynamic coupling and consequently, the synchronous solution is expected to be locally stable. However, for the static master-slave scheme, λ_{max}^\perp is always positive, which indicates that for this scheme the synchronous solution is unstable.

4. EXPERIMENTAL RESULTS

In this section, the performance of the proposed dynamic coupling is experimentally validated. In particular, two electronic circuits, which emulate the chaotic dynamics of the Rössler system, are constructed as identical as possible, using operational amplifiers TL074, multipliers AD734AN, and other basic components such as resistors and capacitors. Furthermore, in order to avoid saturation in the operational amplifiers, the following change of coordinates is applied: $X_i = x_i/2$, $Y_i = y_i/2$, $Z_i = z_i/2$, para $i = m, s$ and $H_j = h_j/2$. In addition, the time is ‘accelerated’ by introducing the dimensionless time variable $\tau = \omega_c t$, with $\omega_c = RC$, $R = 100k\Omega$ y $C = 22nF$.

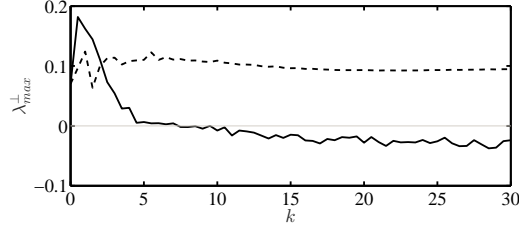


Fig. 3. Largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^{\perp} as a function of the coupling strength k for *configuration 2* \rightarrow 1. Dashed line: λ_{max}^{\perp} for the classical master-slave scheme. Solid line: λ_{max}^{\perp} for the proposed scheme with dynamic coupling. The static coupling fails to synchronize the coupled systems, whereas the dynamic coupling induces synchronization for $k > 9.51$.

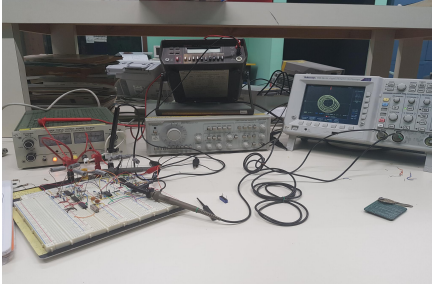


Fig. 4. Photo of the experimental setup.

As a particular example, we consider the configuration 1 \rightarrow 2, see Subsection 3.3.

Taking into account the above considerations, the behavior of the coupled Rössler systems, in configuration 1 \rightarrow 2 with dynamic coupling, is described by the (scaled) equations

$$\text{Master : } \begin{cases} \omega_c \dot{X}_m = -Y_m - Z_m, \\ \omega_c \dot{Y}_m = X_m + aY_m, \\ \omega_c \dot{Z}_m = \frac{b}{2} + (2X_m - c)Z_m, \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{Slave : } \begin{cases} \omega_c \dot{X}_s = -Y_s - Z_s, \\ \omega_c \dot{Y}_s = X_s + aY_s - H_2, \\ \omega_c \dot{Z}_s = \frac{b}{2} + (2X_s - c)Z_s, \end{cases} \quad (31)$$

$$\text{Dynamic coupling : } \begin{cases} \omega_c \dot{H}_1 = -\alpha H_1 + H_2, \\ \omega_c \dot{H}_2 = -\gamma_1 H_1 - \gamma_2 H_2 - k(X_m - X_s). \end{cases} \quad (32)$$

This system is implemented in electronic circuits. Prior to the physical implementation, the corresponding electronic diagram has been verified by using Multisim V.14. The parameter values are $a = b = 0.2$, $c = 5.7$, the parameters α , γ_1 , and γ_2 are as given in (22), and the coupling strength is $k = 20$. In the experiments the measurements have been acquired by using a digital oscilloscope, model TDS 3012C from Tektronix. The complete experimental setup is depicted in Figure 4. The experimental results are shown in Figures 5 to 9. First, the chaotic attractor of the master system in the (X_m, Y_m) -plane, is presented in Figure 5 and a time series of the uncoupled systems is presented in Figure 6. Obviously, the systems are not synchronized.

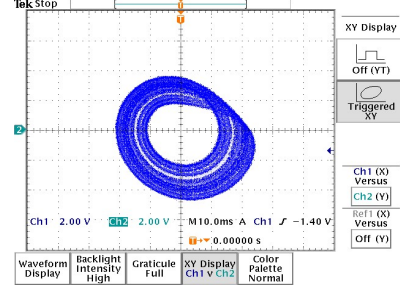


Fig. 5. Chaotic attractor of the master Rössler circuit on the (X_m, Y_m) -plane.

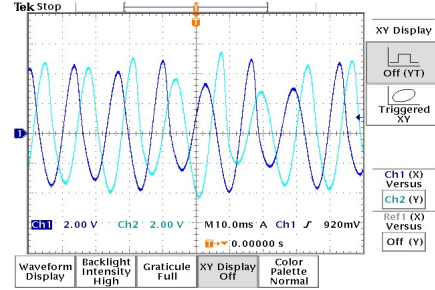


Fig. 6. Uncoupled systems. Blue: X_m . Cyan: X_s .

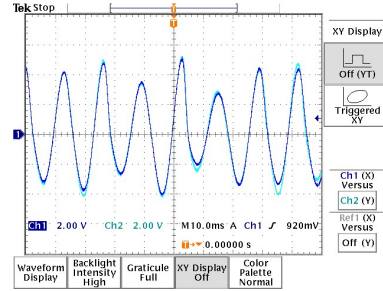


Fig. 7. Synchronized Rössler systems. Blue: X_m . Cyan: X_s .

Then, the systems are coupled with coupling strength $k = 20$. For this value of k , synchronization is expected to occur, see the solid line in Figure 2 in the coupled systems (30)-(32). This is further confirmed by the experimental results presented in Figure 7, from which it is evident that the master and slave Rössler systems are synchronized. For further illustration, we also present the projection of the time series of the master and slave systems (without transient behavior) onto the (X_m, X_s) -plane, see Figure 8. From this figure it is clear to see that the systems are practically synchronized.

Finally, Figures 9 and 10 show the time series corresponding to the coupling signal H_2 , see (31). When the systems are unsynchronized, the coupling signal is oscillatory with relatively large amplitude, as depicted in Figure 9. However, when the systems are practically synchronized, the coupling signal almost vanishes, as shown in Figure 10. Ideally, the coupling signal should vanish, but due to the inherent differences between the systems, it keeps oscillating with a very small amplitude (in the order of millivolts).

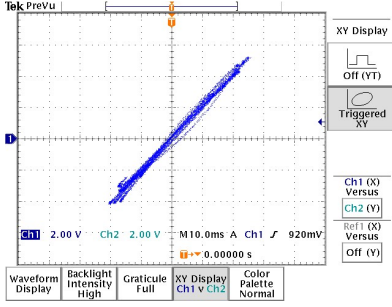


Fig. 8. ‘Phase-plane’ (X_m, X_s).

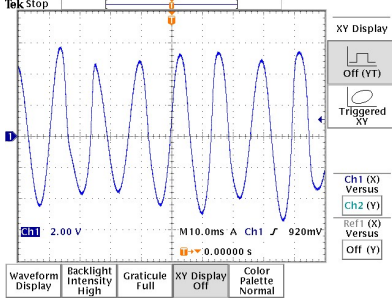


Fig. 9. Coupling signal H_2 when $X_m \neq X_s$.

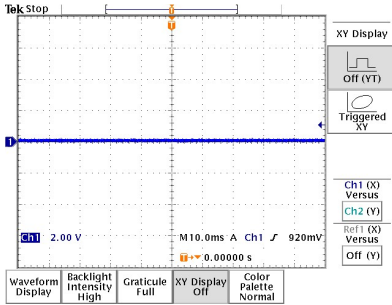


Fig. 10. Coupling signal H_2 when $X_m \approx X_s$.

5. CONCLUSION

A comparison between the classical master-slave scheme and a novel configuration, in which the systems have an indirect interaction, has been presented.

The obtained results have shown that the proposed master-slave scheme with dynamic coupling, see Eqs. (5)-(7), enhances the onset of synchronization with respect to the classical master slave scheme with static coupling given in Eqs. (1)-(2).

In particular, two important improvements have been observed: **1)** the proposed dynamic coupling allows to induce synchronization for arbitrarily large coupling strengths in the coupled systems in cases where the classical configuration is applicable only within a narrow interval of coupling strengths, see Figure 1. **2)** The proposed coupling scheme induces synchronization in the coupled systems in cases where the classical static interconnection fails to synchronize the systems, as shown in Figures 2 and 3. Furthermore, the applicability of the dynamic master-slave scheme has been experimentally validated.

In the proposed scheme, the master and slave systems interact through a second order dynamical system. However, it would be interesting to see if a dynamic coupling with lower or higher order can be used to induce synchronization and also, to eventually determine the ‘optimal’ order in the dynamic interconnection. This is the topic of our ongoing research.

Finally, one of the potential applications of the proposed scheme presented here is in the design of controllers to induce synchronization in dynamical systems, for which a classical static and diffusive controller fails.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been partially supported by the Mexican Council for Science and Technology, CONACYT.

REFERENCES

- Balmforth, N., Tresser, C., Worfolk, P., and Wu, C.W. (1997). Master-slave synchronization and the lorenz equations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(3), 392–394.
- Brown, R., Rulkov, N.F., and Tracy, E.R. (1994). Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data. *Phys. Rev. E*, 49, 3784–3800.
- Huang, L., Chen, Q., Lai, Y.C., and Pecora, L.M. (2009). Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 80, 036204.
- Katriel, G. (2008). Synchronization of oscillators coupled through an environment. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(22), 2933–2944.
- Lebrun, R., Tsunegi, S., Bortolotti, P., Kubota, H., Jenkins, A.S., Romera, M., Yakushiji, K., Fukushima, A., Grollier, J., Yuasa, S., and Cros, V. (2017). Mutual synchronization of spin torque nano-oscillators through a long-range and tunable electrical coupling scheme. *Nature Communications*, 8, 15825.
- Mosekilde, E., Maistrenko, Y., Maistrenko, I., and Postnov, D. (2002). *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*. Series on Nonlinear Science. World Scientific.
- Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80, 2109–2112.
- Pena Ramirez, J., Arellano-Delgado, A., and Nijmeijer, H. (2018). Enhancing master-slave synchronization: the effect of using a dynamic coupling. *Submitted*.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J. (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press.
- Resmi, V., Ambika, G., and Amritkar, R.E. (2010). Synchronized states in chaotic systems coupled indirectly through a dynamic environment. *Phys. Rev. E*, 81, 046216.
- Rössler, O. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397 – 398.
- Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., and Vastano, J.A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285 – 317.