

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Oceanografía Física**

**El efecto de la torsión en la estructura de un vórtice
helicoidal**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Felipe Vinicio Caro Gutiérrez

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por

Felipe Vinicio Caro Gutiérrez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Director de tesis

Dr. José Luis Ochoa de la Torre

Dr. Enrique Gómez Treviño



Dr. José Gómez Valdés
Coordinador del Posgrado en Oceanografía Física

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Felipe Vinicio Caro Gutiérrez © 2018

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Felipe Vinicio Caro Gutiérrez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física .

El efecto de la torsión en la estructura de un vórtice helicoidal

Resumen aprobado por:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Director de tesis

El efecto de la torsión en la estructura de un vórtice helicoidal ha sido escasamente examinado. En esta tesis analizamos el efecto de la torsión en el campo de velocidad y el campo de vorticidad de un vórtice helicoidal. Para obtener el campo de velocidad, escribimos las ecuaciones de Euler y de conservación de masa en un sistema de coordenadas helicoidal y utilizamos el método de las expansiones asintóticas, en otras palabras, expresamos las variables dependientes como series de potencias de dos parámetros $\epsilon = a\kappa$ y $\eta = a\tau$, (a es el radio de la sección transversal del vórtice, κ y τ son la curvatura y la torsión, respectivamente) colectamos los términos de primer orden en dichos parámetros y obtenemos una ecuación cuya solución describe el campo de velocidad de un vórtice helicoidal. Observamos que, debido a la curvatura, el centro del vórtice de Rankine se desplaza en dirección contraria al centro de curvatura. Para nuestros casos de estudio, estos desplazamientos toman valores entre 0 y 0.18% del radio del vórtice. La curvatura es responsable de que la vorticidad varíe linealmente con la distancia al centro de curvatura; debido a la torsión obtenemos una expresión analítica arbitraria para la componente axial del vector de velocidad. Si dicha expresión es cero entonces las componentes del vector de vorticidad, en la sección transversal del vórtice, son nulas. Si es una función cuadrática del radio de la sección transversal del vórtice, entonces las componentes del vector de vorticidad son diferentes de cero.

Palabras clave: Vórtice helicoidal, vórtice de Rankine, flujo secundario, expansiones asintóticas

Abstract of the thesis presented by Felipe Vinicio Caro Gutiérrez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master of Science .

The effect of torsion on the structure of a single helical vortex

Abstract approved by:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Thesis Director

The effect of torsion on the structure of helical vortices has been poorly examined. We analyze the effect of torsion in the velocity and vorticity fields of a helical vortex. To obtain the velocity field, we write the Euler and mass conservation equations in a helical coordinate system and we use the matched asymptotic expansions method, in other words, we express the dependent variables as power series of two parameters $\epsilon = a\kappa$ and $\eta = a\tau$, (a is the cross-section radius of the vortex, κ and τ are the curvature and the torsion, respectively) we collect the terms of first order in these parameters and we obtain an equation whose solution describes the velocity field of a helical vortex. We observe that, due to the curvature, the center of the Rankine vortex moves in the opposite direction to the center of curvature. For our case studies, these displacements take values between 0 and 0.18% of the vortex radius. The curvature is responsible for the vorticity to vary linearly with the distance to the center of curvature; due to the torsion we obtain an arbitrary analytical expression for the axial component of the velocity vector. If this expression is zero then the components of the vorticity vector, in the cross-section of the vortex, are zero. If it is a quadratic function of the radius of the vortex cross-section, then the components of the vorticity vector are not null.

Keywords: Helical vortex, Rankine vortex, secondary flow, matched asymptotic expansions

Dedicatoria

A mi hermana ...

Luz Divina Caro Gutiérrez ...

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) por darme la oportunidad de estudiar un posgrado. Ha sido una de las mejores etapas de mi vida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico a través de su programa de posgrados (ref. 615343).

A mi director de tesis *Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes* por aceptarme como su estudiante, por su tiempo para resolver una cantidad no numerable de dudas y por su infinita paciencia.

Al *Dr. Enrique Gómez Treviño* por formar parte de mi comité de tesis bajo un panorama bastante peculiar, por convertir su oficina en un lugar muy agradable y por su tiempo y observaciones para enriquecer este trabajo.

Al *Dr. José Luis Ochoa de la Torre* por su tiempo para resolver dudas, por sus comentarios para enriquecer este trabajo y por convertir su oficina en un verdadero recinto del conocimiento.

Al *Dr. Carlos Yee Romero* por darme la oportunidad de recorrer nuevamente el maravilloso y abstracto sendero de las matemáticas.

A la *Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Baja California Unidad Ensenada* y a su personal docente por su calidez humana y amabilidad.

A *Mireya M. Montaña Orozco* y a *Eduardo E. Velázquez Pérez* por su invaluable amistad y compañerismo durante mi estancia en Ensenada B.C.

A *Alberto Gabriel Ramos Salvio* por su gran amistad y apoyo en momentos muy difíciles de mi vida, me llevo un gran tesoro a casa.

A Paulino Meneses González y a David Pineda García por su gran amistad y compañerismo, por esas tardes de fútbol indispensables para sobrevivir al posgrado.

A Fernando Eder Campos Gonzales por su amistad, compañerismo y por compartir su conocimiento técnico de programación en Matlab para enriquecer este trabajo.

A Paul Yolotzin Mendoza Anguiano por más de 20 años de amistad y por su invaluable apoyo en la parte gráfica de esta tesis.

A José Luis Rodríguez Solís por su amistad y apoyo económico a mi llegada a la ciudad de Ensenada B.C.

A Juan Jesús López García por casi 10 años de amistad y por su apoyo económico a mi llegada a la ciudad de Ensenada B.C.

A Adams Sherman Hill por su gran amistad e invaluable apoyo a través de los últimos años.

A Karla Cecilia Caro Nuñez y a su familia por el apoyo durante todo este tiempo, por todo el cariño y por todos esos momentos sin igual.

A Azucena H. Durán Colmenares por el apoyo, la amistad y el cariño de los últimos meses.

A mi amada madre Esperanza Gutiérrez Montes por su infinito amor.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	x
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Justificación	5
1.4. Objetivos	6
Capítulo 2. Teoría General	
2.1. Introducción	7
2.2. Notación de índice y la convención de la suma	7
2.3. Coordenadas curvilíneas	8
2.4. Vectores base asociados con sistemas coordenados curvilíneos	10
2.5. La métrica fundamental de un espacio Euclideo	13
2.6. Expresiones en términos de coordenadas curvilíneas	14
2.7. Ecuaciones de movimiento y de conservación de masa	17
2.8. Vórtices tubulares curvados y torcidos	18
Capítulo 3. Vórtices Toroidales	
3.1. El método de las expansiones asintóticas	24
3.2. La función de corriente de orden ϵ	25
3.3. Las velocidades de orden ϵ	34
3.4. La vorticidad de orden ϵ	35
Capítulo 4. Vórtices Helicoidales	
4.1. La seudo función de corriente de orden η	37
4.2. La componente axial del vector de velocidad	43
4.3. La vorticidad de orden η	44
4.4. Los campos de velocidad y de vorticidad	47
Capítulo 5. Resultados	
5.1. La función de corriente de orden ϵ y la seudo función de corriente de orden η	48
5.2. La componente axial del vector de velocidad	52

Tabla de contenido (continuación)

5.3. El vector de vorticidad	53
5.3.1. Vorticidad de orden ϵ	53
5.3.2. Vorticidad de orden η	53
Capítulo 6. Conclusiones	
Literatura citada	56
Anexo	58

Lista de figuras

Figura	Página
1. (a) Remolinos en la estela detrás de las alas de un colibrí. Tomada y modificada de Ortega-Jimenez <i>et al.</i> (2016); (b) remolinos en la atmósfera de Júpiter. Publicada recientemente en el portal web de la Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio de EE.UU. (NASA, por su acrónimo en inglés).	1
2. Figura tomada y modificada de Larrabee (1980). Hélice.	2
3. Figura tomada de Velasco Fuentes (2018a). Velocidad de un vórtice helicoidal, \mathbf{u} , representada como la suma de las componentes azimutal y axial (u_θ y u_z , respectivamente) o las componentes tangencial y binormal (u_t y u_b , respectivamente).	4
4. Coordenadas rectangulares cartesianas z^k y coordenadas curvilíneas χ^k	10
5. Segmento de hélice circular con tamaño de paso L y radio R . (r, θ, z) representan los ejes del sistema de coordenadas cilíndricas.	20
6. Vectores relacionados a la línea central de un vórtice tubular. Notamos que el vector normal \mathbf{n} apunta al eje de la hélice.	21
7. Representación geométrica de un vórtice toroidal con sección transversal de radio a	23
8. Segmento de un vórtice helicoidal. El vórtice se extiende indefinidamente en ambas direcciones y su línea central es una hélice de tamaño de paso L	36
9. Valores de los parámetros ϵ y η en función del tamaño de paso adimensional P para un valor dado del radio del vórtice $\alpha = 0.1$	38
10. Función de corriente de orden ϵ y pseudo función de corriente de orden η : (a) ψ_ϵ la función de corriente asociada sólo a la curvatura; (b) ψ_η la pseudo función de corriente asociada sólo a la torsión.	48
11. Campos vectoriales del flujo secundario: (a) flujo secundario asociado sólo a la curvatura; (b) flujo secundario asociado sólo a la torsión.	49
12. $\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_\epsilon + \eta \psi_\eta$ para diferentes valores del paso de la hélice ($P = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$, de arriba hacia abajo) y del radio del remolino ($\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$, de izquierda a derecha). Los valores de los parámetros adimensionales ϵ y η son mostrados en la Tabla 1.	51
13. Desplazamiento del valor máximo de la función de corriente ψ_0 en función de ϵ	52
14. Componente axial del vector de velocidad w_η : $H(r) = -r^2$, $\eta = 0.0297$	52
15. Componente axial del vector de vector de vorticidad $\omega_{s\epsilon}$	53
16. Campo de vorticidad de orden η en la sección transversal del vórtice helicoidal. El eje de la hélice está en la dirección positiva del eje x	54

Lista de tablas

Tabla

Página

1. Valores de los parámetros ϵ y η 50

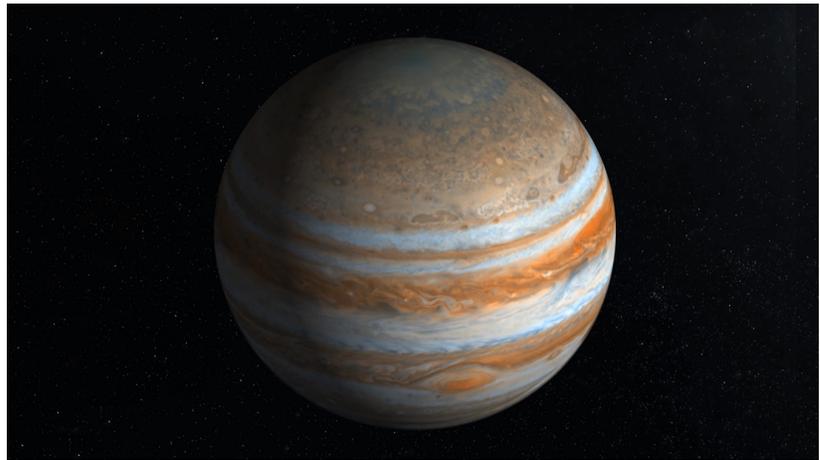
Capítulo 1. Introducción

1.1. Introducción

Un vórtice puede ser definido como el movimiento giratorio de una multitud de partículas materiales alrededor de un eje común. Los vórtices o remolinos son fenómenos fascinantes que ocurren en una gran variedad de situaciones. Hay vórtices que tienen diámetros de milímetros y que pueden existir por algunos segundos. En contraste, también existen vórtices que tienen diámetros de kilómetros y pueden existir por siglos. Los remolinos que se generan en la estela detrás de las alas de un colibrí son ejemplos de vórtices que tienen diámetros de milímetros y existen durante unos segundos. Por otro lado, hay remolinos colosales y longevos, como los de la atmósfera de Júpiter, que tienen diámetros de kilómetros y pueden existir por siglos (Velasco Fuentes, 2003). En la Figura 1 mostramos este par de fenómenos.



(a)



(b)

Figura 1. (a) Remolinos en la estela detrás de las alas de un colibrí. Tomada y modificada de Ortega-Jimenez *et al.* (2016); (b) remolinos en la atmósfera de Júpiter. Publicada recientemente en el portal web de la Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio de EE.UU. (NASA, por su acrónimo en inglés).

Los vórtices que se generan en las atmósferas planetarias son aproximadamente bidimensionales, mientras que los generados en la estela detrás de las alas de un colibrí son considerados como tridimensionales. Los vórtices tubulares son ejemplos de estos últimos. Podemos definir un vórtice tubular como una región tubular de fluido en rotación alrededor de una línea central. Un caso particular son los llamados vórtices

filiformes, los cuales están caracterizados por tener un grosor muy pequeño, es decir, podemos considerarlos como infinitamente delgados.

Los casos de estudio de vórtices filiformes más relevantes son: los vórtices rectilíneos, los vórtices anulares y los vórtices helicoidales. Los vórtices rectilíneos están caracterizados por tener curvatura y velocidad de traslación nulas (Helmholtz, 1858). Por otro lado, los vórtices anulares están caracterizados por tener curvatura constante y torsión nula, es decir, estos vórtices se cierran sobre sí mismos en forma de círculo. El humo que exhalan los fumadores en forma de dona es un ejemplo de este tipo de vórtices. Thomson (1867) estableció que estos vórtices se trasladan normalmente al plano que los contiene. Finalmente, los vórtices helicoidales, los cuales están caracterizados por tener curvatura y torsión constantes diferentes de cero, es decir, su línea central es una hélice en el sentido matemático. Mientras que los vórtices anulares sólo se trasladan, los vórtices helicoidales se trasladan y rotan. Estos últimos pueden ser generados detrás de las aspas de una hélice. Un vórtice helicoidal se desprende de cada una de los extremos de las aspas que forman la hélice (ver Figura 2).

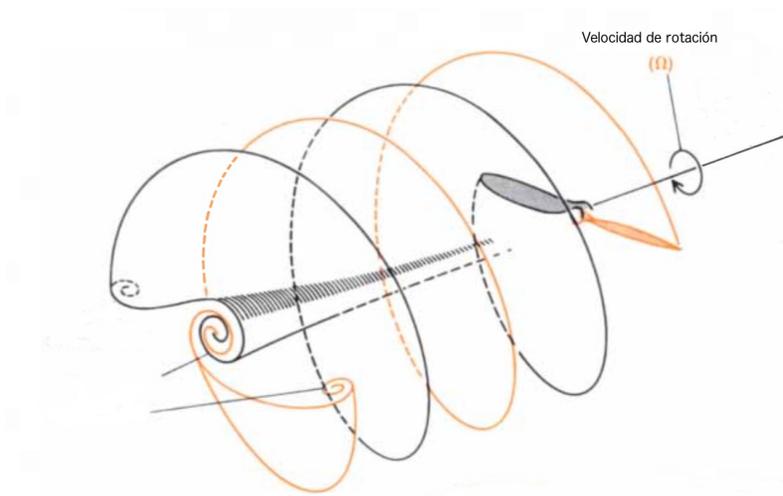


Figura 2. Figura tomada y modificada de Larrabee (1980). Hélice.

A principios del siglo anterior, Joukowsky (1912) mostró que un vórtice helicoidal se traslada y rota uniformemente sin cambiar de forma, a partir de ese momento muchos intentos han sido realizados para calcular estas velocidades. Por ejemplo, Widnall (1972) obtuvo expresiones correctas para la velocidad pero sólo para un rango muy limitado de los valores de los parámetros que definen el problema. Por otro lado, Velasco Fuentes (2018a) obtuvo las expresiones correctas de la velocidad a primer orden

para cualquier valor de los parámetros del problema.

Dado que las suposiciones hechas por Velasco Fuentes (2018a) no consideraron los cambios en el campo de velocidad y en la distribución de vorticidad iniciales debido a la geometría local, en esta tesis estudiamos cómo cambia el campo de velocidad y la distribución de vorticidad debido a la geometría local a partir de un campo de velocidad y una distribución de vorticidad iniciales.

Por ejemplo, consideremos un vórtice tubular con sección transversal circular y distribución de vorticidad uniforme. Dotemos a dicho vórtice con curvatura constante y torsión nula, es decir, perturbemos su geometría, entonces este nuevo vórtice tiene que cambiar ligeramente la distribución de vorticidad inicial (uniforme) en la sección transversal. Esta modificación es debida al cambio en la geometría del vórtice tubular dado inicialmente.

Dean (1927, 1928) estudió por primera vez el flujo en un tubo con curvatura constante, torsión nula y sección transversal circular utilizando un sistema de coordenadas toroidal y mostró que el efecto de la curvatura es el desarrollo de un par de vórtices simétricos y contra rotatorios en la sección transversal del tubo. Desde entonces muchos autores han utilizado el sistema de coordenadas propuesto por Dean (1927, 1928) para investigar distintos aspectos del flujo en un tubo toroidal.

1.2. Antecedentes

Thomson (1880) encontró que un modo de vibración de un vórtice de Rankine es una onda que deforma el eje del vórtice en una hélice de radio pequeño y tamaño de paso grande, es decir, una hélice delgada y alargada. Años más tarde, Levy y Forsdyke (1928) consideraron el caso de hélices con tamaño de paso pequeño.

En los últimos treinta años diversos autores han estudiado la cinemática de los vórtices helicoidales (Ricca, 1994; Mezić *et al.*, 1998; Kuibin y Okulov, 1998; Boersma y Wood, 1999). La mayoría de estos trabajos se han concentrado en la componente binormal del vector de velocidad y han despreciado la componente tangencial. Esto conduce a un error que puede ser insignificante cuando el vórtice tiene tamaño de paso grande y puede ser significativo cuando el vórtice tiene tamaño de paso pequeño

ya que la componente tangencial del vector de velocidad es alrededor de un tercio de la componente binormal. Velasco Fuentes (2018a) analizó el movimiento de un vórtice helicoidal en un fluido incompresible e inviscido bajo la aproximación de vorticidad uniforme (Joukowsky, 1912; Da Rios, 1916; Levy y Forsdyke, 1928; Widnall, 1972; Ricca, 1994) y paralela a la línea central del vórtice tubular y obtuvo expresiones más precisas para la velocidad angular y de traslación del vórtice en un rango más amplio de valores del tamaño de paso de la hélice. La Figura 3 muestra la velocidad de traslación de un vórtice helicoidal, \mathbf{u} , representada como la suma de las componentes azimutal y axial o como la suma de las componentes tangencial y binormal.

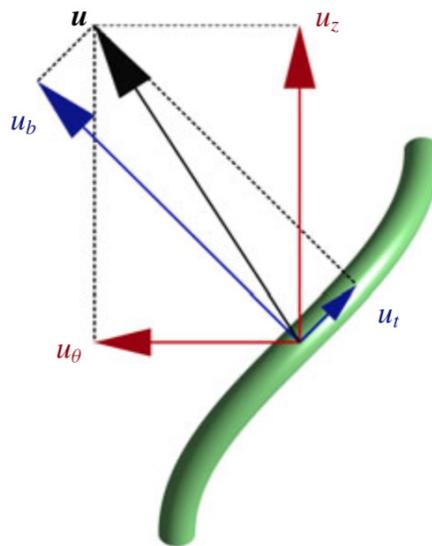


Figura 3. Figura tomada de Velasco Fuentes (2018a). Velocidad de un vórtice helicoidal, \mathbf{u} , representada como la suma de las componentes azimutal y axial (u_θ y u_z , respectivamente) o las componentes tangencial y binormal (u_t y u_b , respectivamente).

Los autores mencionados anteriormente analizaron la cinemática del vórtice sin tomar en cuenta cómo cambian el campo de velocidad y la distribución de vorticidad en la sección transversal debido a la geometría local. Por otro lado, hay autores (Dean, 1927, 1928; Wang, 1981; Murata *et al.*, 1981; Germano, 1982; Kao, 1987; Tuttle, 1990; Bolinder, 1996b) que estudiaron flujos en tubos helicoidales y analizaron cómo cambia el campo de velocidad debido a la geometría local en la sección transversal del tubo a partir de un flujo dado: el flujo de Poiseuille. En otras palabras, a partir de un flujo de Poiseuille perturbado. En esta tesis tomamos en cuenta estos trabajos para determinar cómo cambia el campo de velocidad y la distribución de vorticidad de un vórtice de Rankine debido a la geometría local, es decir, a partir de un vórtice de Rankine

perturbado obtenemos una expresión que describe el flujo secundario de un vórtice helicoidal.

1.3. Justificación

Mientras que el efecto de la curvatura ha sido ampliamente estudiado, el efecto de la torsión ha sido escasamente examinado. Sólo muy pocos trabajos han tomado en cuenta la torsión. En esta tesis obtenemos una expresión que describe cómo cambian el campo de velocidad y la distribución de vorticidad de un vórtice tubular dado con valores de curvatura y torsión constantes diferentes de cero. En otras palabras, tomamos el vórtice de Rankine y lo dotamos con curvatura y torsión constantes para analizar cómo cambian el campo de velocidad y la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice. Como mencionamos anteriormente, el cambio en el campo de velocidad debido a la geometría local es también conocido como flujo secundario.

Para obtener dicha expresión aplicamos el método de las expansiones asintóticas a las ecuaciones dadas por Bolinder (1996b) y suponemos el caso inviscido. Estas ecuaciones fueron desarrolladas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, con la usual condición de frontera de no deslizamiento, para analizar los efectos de la curvatura y la torsión en un flujo a través de un tubo helicoidal de sección transversal rectangular. Debido a la geometría particular de la sección transversal, las ecuaciones fueron expresadas en un sistema de coordenadas (s, x, y) . En esta tesis utilizamos este sistema de coordenadas a pesar de que el sistema de coordenadas (s, r, θ) se ajusta mejor a la geometría de los vórtices estudiados en este trabajo.

Los primeros autores que analizaron el efecto de la torsión en flujos a través de tubos helicoidales fueron Murata *et al.* (1981); Wang (1981); Germano (1982). Los primeros dos utilizaron un sistema de coordenadas no ortogonal y desarrollaron las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de coordenadas helicoidal aplicando el análisis clásico tensorial. Germano (1982), por otro lado, introdujo un sistema de coordenadas ortogonal, dedujo las ecuaciones gobernantes utilizando factores de escala y concluyó que el efecto de la torsión en un flujo a través de un tubo helicoidal es de segundo orden. En esta tesis aplicamos el análisis clásico tensorial para escribir las ecuaciones

de Euler y de conservación de masa en un sistema de coordenadas helicoidal y analizamos el efecto de la torsión en la estructura de un vórtice helicoidal.

1.4. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es obtener el campo de velocidad y la distribución de vorticidad de un vórtice helicoidal para analizar el efecto de la torsión en la estructura de los vórtices helicoidales. Para esto, expresamos las variables dependientes como series de potencias de los parámetros $\epsilon = a\kappa$ y $\eta = a\tau$, con ϵ el parámetro adimensional asociado a la curvatura, η el parámetro adimensional asociado a la torsión y a el radio de la sección transversal del vórtice, las sustituimos en las ecuaciones dadas por Bolinder (1996b) y tomamos en cuenta los términos de primer orden en ϵ y η para obtener una ecuación cuya solución describe el campo de velocidad de un vórtice helicoidal, además obtenemos la distribución de vorticidad tomando el rotacional de dicho campo.

Los resultados obtenidos por Hardin (1982); Kuibin y Okulov (1998); Fukumoto (2002) son conocidos como solución exterior, mientras que los resultados de esta tesis como solución interior. Ambas soluciones pueden ser empalmadas para obtener una expresión que describa la cinemática de un vórtice helicoidal con mayor precisión.

En el siguiente capítulo definimos conceptos básicos del análisis clásico tensorial para escribir las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos inviscidos e incompresibles en un sistema de coordenadas helicoidal.

Capítulo 2. Teoría General

2.1. Introducción

En el análisis de problemas de fluidos, es deseable contar con un sistema de coordenadas que mejor se ajuste a las fronteras del dominio del flujo ya que las condiciones de frontera pueden ser aplicadas más fácilmente. En este capítulo presentamos las definiciones básicas para deducir las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos inviscidos e incompresibles en términos de las coordenadas empleadas por Bolinder (1996b) y las componentes físicas del vector de velocidad.

En el estudio de vectores, encontramos dos diferentes tipos de componentes de un vector en coordenadas curvilíneas: uno es llamado conjunto de componentes covariantes, denotado por v_k , y el otro tipo es llamado conjunto de componentes contravariantes, denotado por v^k . En general, estos dos tipos de componentes no son iguales y surgen en problemas descritos en sistemas de coordenadas curvilíneas, tales como cilíndricos, esféricos, elípticos, helicoidales y toroidales. En un sistema de coordenadas cartesianas no existe distinción entre componentes covariantes y contravariantes.

Dado que el sistema de coordenadas helicoidal no es ortogonal, empleamos conceptos del análisis tensorial para deducir las ecuaciones gobernantes, dichos conceptos son presentados a continuación. El lector interesado puede consultar los detalles en el anexo de esta tesis.

2.2. Notación de índice y la convención de la suma

Los tensores son objetos matemáticos sumamente útiles. Éstos se definen en un espacio, variedad o sistema de coordenadas. Existen dos tipos de notación para denotar a los tensores. La primera es conocida como la notación directa, la cual es similar a la utilizada en el análisis de vectores y matrices, la segunda es conocida como la notación de índices, la cual consiste de superíndices y subíndices adjuntos a letras llamadas kernel. La segunda es utilizada generalmente en la deducción detallada componente a componente de las ecuaciones que gobiernan problemas físicos en un sistema de coordenadas elegido apropiadamente.

El concepto de la convención de sumación fue introducido por Albert Einstein en 1916 y está definido como sigue: si un índice ocurre en forma monomial como un subíndice y exactamente como un superíndice, entonces se implica la suma sobre ese índice a través del rango de sus valores. Ilustremos la convención de la suma con el siguiente ejemplo. Expresemos con la notación sigma de la suma lo siguiente

$$\sum_{k=1}^3 a^k b_k = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3,$$

y empleando la convención de la suma, escribamos simplemente

$$a^k b_k = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 \quad \text{para } k = 1, 2, 3.$$

2.3. Coordenadas curvilíneas

Denotemos con \mathbb{E}^3 al sistema Euclideo de tres dimensiones y sean z^k , $k = 1, 2, 3$, las usuales coordenadas cartesianas rectangulares. Consideremos cada punto de \mathbb{E}^3 como la intersección de tres planos mutuamente perpendiculares $z^k = c^k$, c una constante real y $k = 1, 2, 3$, respectivamente, paralelos a las superficies coordenadas $z^k = 0$. Por otro lado, consideremos cada punto localizado en \mathbb{E}^3 como la intersección de tres únicas superficies curvilíneas en lugar de tres superficies planas. Estas tres superficies curvilíneas pueden ser especificadas por sus respectivas ecuaciones referidas a las coordenadas rectangulares dadas. Entonces sean z^k , $k = 1, 2, 3$, las usuales coordenadas cartesianas rectangulares que dependen de un conjunto de tres variables χ^k , $k = 1, 2, 3$, en \mathbb{E}^3 , esto es

$$z^k = f^k(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

donde las funciones f^k de las tres variables χ^k son de clase C^r , con $r \geq 1$ (esto es, son funciones continuas con derivadas parciales continuas hasta de orden r) y están definidas en alguna región de \mathbb{E}^3 . Cabe mencionar que es común utilizar la notación $z^k(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ para denotar $f^k(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$. Definimos entonces al conjunto de ecuaciones (1) como transformación de coordenadas.

Para determinar bajo que condiciones el conjunto de ecuaciones (1) tiene solución única para χ^k , como función de z^k , $k = 1, 2, 3$, tal que podamos considerar a los dos

conjuntos de ecuaciones z^k y χ^k como uno a uno o biyectivos, enunciaremos a continuación un teorema del cálculo el cual no demostraremos. Una demostración del teorema puede ser consultada en Narasimhan (1993).

Teorema 2.1 (Teorema de la función implícita) Sean

$$z^k = z^k(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \quad \text{con } k = 1, 2, 3 \quad (2)$$

un conjunto de funciones de clase C^r , donde $r \geq 1$, definido en una vecindad $N = \{ \chi^k - \chi_0^k \mid < \delta \}$, centrada en el punto χ_0^k , en el espacio de las variables χ^k , y $\delta > 0$. Entonces el conjunto de funciones z^k en (2) tendrá una inversa única, dada por el conjunto de funciones

$$\chi^j = \chi^j(z^1, z^2, z^3) \quad \text{con } j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

en una vecindad $M = \{ z^k - z_0^k \mid < \varepsilon \}$, con $\varepsilon > 0$, centrada en el punto z_0^k en el espacio de las variables z^k , si y sólo si el Jacobiano de (2), definido por

$$J = \det \left(\frac{\partial z^k}{\partial \chi^l} \right)$$

no se anula en el conjunto abierto N .

Ahora por el teorema enunciado anteriormente tenemos que

$$z^k = z^k(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \quad \text{con } k = 1, 2, 3,$$

$$\chi^k = \chi^k(z^1, z^2, z^3) \quad \text{con } k = 1, 2, 3,$$

son mutuamente inversos entre sí en cada punto de sus dominios de definición si y sólo si el Jacobiano no se anula.

Supongamos que z^k y χ^k son mutuamente inversos entre sí en cada punto de sus dominios de definición y que el Jacobiano no se anula. Asignemos algunos valores reales arbitrarios α^k a χ^k , entonces

$$\chi^k(z^1, z^2, z^3) = \alpha^k \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

representa un conjunto de tres superficies curvilíneas, en general. Como (4) tiene una

única solución para z^k , entonces estas tres superficies se intersectan en un punto, digamos p , como en la Figura 4.

Estas tres superficies $\chi^k = \alpha^k$ son definidas como superficies coordenadas curvilíneas. Los valores de χ^k dados en la expresión (4) son definidos como las coordenadas curvilíneas del punto p . Entonces, el punto p en \mathbb{E}^3 puede ser localizado ya sea por sus coordenadas rectangulares z^k o por sus coordenadas curvilíneas χ^k (ver Figura 4).

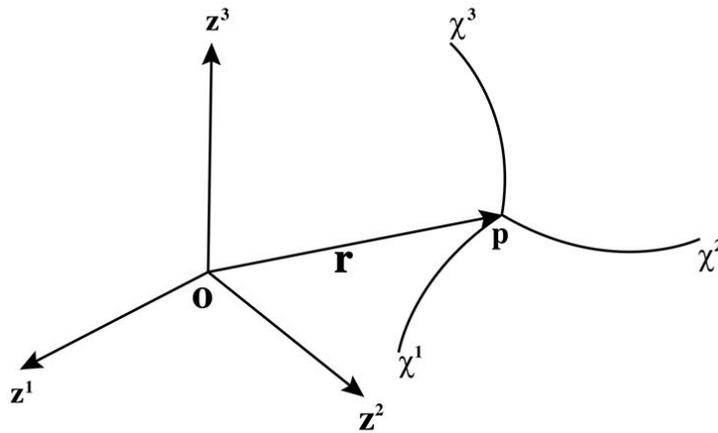


Figura 4. Coordenadas rectangulares cartesianas z^k y coordenadas curvilíneas χ^k .

2.4. Vectores base asociados con sistemas coordenados curvilíneos

Sean χ^1, χ^2, χ^3 las coordenadas curvilíneas de un punto p en \mathbb{E}^3 , cuyas coordenadas rectangulares cartesianas son z^1, z^2, z^3 , entonces el vector de posición r del punto p es el segmento de línea que inicia en el origen del sistema coordenado Cartesiano (ver Figura 4). Ahora, sean i_1, i_2, i_3 un conjunto de vectores base ortonormales (esto es, vectores mutuamente perpendiculares y unitarios) del sistema Cartesiano rectangular z^k . El vector de posición del punto p está denotado por r referido al sistema de coordenadas Cartesiano rectangular. Entonces expresamos

$$r = r(\chi^1, \chi^2, \chi^3) = i_m z^m.$$

Por el teorema de la función implícita tenemos que el vector r no sólo es función de z^1, z^2, z^3 , también es función de χ^1, χ^2, χ^3 y tenemos

$$r(z^1, z^2, z^3) = \hat{r}(\chi^1, \chi^2, \chi^3).$$

Utilizamos la notación $\mathbf{r}(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ para denotar $\hat{\mathbf{r}}(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ aunque $\hat{\mathbf{r}}(\chi^1, \chi^2, \chi^3)$ es una función de χ^1, χ^2, χ^3 diferente de $\mathbf{r}(z^1, z^2, z^3)$. Esta elección de notación es hecha por conveniencia.

Los vectores base \mathbf{i}_m , $m = 1, 2, 3$, del sistema de coordenadas rectangular Cartesiano son las derivadas parciales del vector de posición $\mathbf{r}(z^1, z^2, z^3)$, entonces definimos la base ortonormal \mathbf{i}_m .

Definición 1 La base ortonormal \mathbf{i}_m está dada por

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{i}_m(z^1, z^2, z^3) = \frac{\partial \mathbf{r}(z^1, z^2, z^3)}{\partial z^m} \quad \text{con } m = 1, 2, 3.$$

Definimos ahora, una base análoga a la base ortonormal, los vectores base \mathbf{a}_k .

Definición 2 Las derivadas parciales del vector de posición son los vectores base \mathbf{a}_k , es decir,

$$\mathbf{a}_k(\chi^1, \chi^2, \chi^3) = \frac{\partial \mathbf{r}(\chi^1, \chi^2, \chi^3)}{\partial \chi^k} \quad \text{para } k = 1, 2, 3 \quad (5)$$

y el diferencial $d\mathbf{r}$ del vector \mathbf{r} está dado por

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^k} d\chi^k = \mathbf{a}_k d\chi^k. \quad (6)$$

Los vectores \mathbf{a}_k en \mathbb{E}^3 forman un conjunto de tres vectores linealmente independientes. Los vectores \mathbf{a}_k forman una base para \mathbb{E}^3 . Llamaremos a esta base, base natural.

A continuación definimos la relación entre la base ortonormal \mathbf{i}_m y la base \mathbf{a}_k .

Definición 3 Definimos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^k} = \mathbf{a}_k(\chi^1, \chi^2, \chi^3) = \mathbf{i}_m \frac{\partial z^m}{\partial \chi^k} \quad \text{para } k = 1, 2, 3,$$

la relación anterior expresa \mathbf{a}_k en términos de \mathbf{i}_m .

De forma análoga podemos expresar los vectores \mathbf{i}_m en términos de \mathbf{a}_k , entonces definimos la siguiente relación.

Definición 4 *Definimos*

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{a}_k \frac{\partial \chi^k}{\partial z^m},$$

entonces la relación anterior expresa \mathbf{i}_m en términos de \mathbf{a}_k .

El producto interior de \mathbb{E}^3 da lugar al conjunto de nueve funciones llamado los coeficientes métricos fundamentales, a saber

$$g_{kl}(\chi^1, \chi^2, \chi^3) = \mathbf{a}_k(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \bullet \mathbf{a}_l(\chi^1, \chi^2, \chi^3) \text{ para } k = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto

$$(g_{kl}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

es el tensor métrico fundamental, el cual es simétrico. A continuación definimos un conjunto de vectores recíprocos a los vectores \mathbf{a}_k .

Definición 5 *Un conjunto de vectores \mathbf{a}^k con $k = 1, 2, 3$, en \mathbb{E}^3 , es recíproco al conjunto \mathbf{a}_k con $k = 1, 2, 3$, si*

$$\mathbf{a}^k \bullet \mathbf{a}_m = \delta^k_l \text{ para } k = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, 3. \quad (7)$$

δ^k_l es la llamada delta de Kronecker y está definida como sigue:

Definición 6 (Delta de Kronecker)

$$\delta^k_l = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l. \end{cases} \quad (8)$$

Entonces el conjunto de los vectores \mathbf{a}^k está dado por la siguiente expresión

$$\mathbf{a}^k = g^{kl} \mathbf{a}_l,$$

donde

$$(g^{kl}) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}$$

es simplemente la inversa del tensor métrico fundamental.

Los vectores \mathbf{a}^k también forman una base para \mathbb{E}^3 . Llamaremos a esta base, base recíproca.

2.5. La métrica fundamental de un espacio Euclideo

Consideremos el espacio Euclideo tridimensional \mathbb{E}^3 , además una curva C en \mathbb{E}^3 dada por la ecuación paramétrica

$$C : \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}, \quad t \in [a, b]$$

donde t es un parámetro en el intervalo cerrado $[a, b]$, y a y b son números reales tales que $b > a$. Sean P y Q dos puntos consecutivos sobre la curva C con vectores de posición \mathbf{r} y $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, respectivamente, relativos al origen de algún sistema de coordenadas Cartesiano. Entonces $\overline{PQ} = d\mathbf{r}$. Denotemos a la longitud de arco PQ a lo largo de la curva C por ds . Si el punto P se aproxima al punto Q a lo largo de la curva C , la diferencia entre la magnitud de $d\mathbf{r}$ y la longitud de arco ds se aproxima a cero en el límite. Por lo tanto, el elemento de línea ds puede ser tomado igual a la magnitud del vector infinitesimal $d\mathbf{r}$, además suponemos que en nuestro sistema coordenado curvilíneo el cuadrado del elemento de línea puede ser escrito como una forma cuadrática general, y está dado por la siguiente expresión:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora, sea

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_k d\chi^k$$

entonces

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= dr \bullet dr \\
 &= \mathbf{a}_k d\chi^k \bullet \mathbf{a}_l d\chi^l \\
 &= (\mathbf{a}_k \bullet \mathbf{a}_l) d\chi^k d\chi^l \\
 &= g_{kl} d\chi^k d\chi^l.
 \end{aligned}$$

La expresión anterior es llamada la métrica fundamental del espacio o sistema coordenado. A continuación definimos la condición de ortogonalidad.

Definición 7 Decimos que un sistema χ^k , inducido en \mathbb{E}^3 , es un sistema ortogonal si

$$g_{kl} = \mathbf{a}_k \bullet \mathbf{a}_l = 0 \quad \forall k \neq l. \quad (9)$$

Si la condición anterior se cumple entonces (Narasimhan, 1993)

$$(g_{kl}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

2.6. Expresiones en términos de coordenadas curvilíneas

Las componentes de un vector \mathbf{v} expresadas en la base natural son llamadas contravariantes mientras que las componentes expresadas en la base recíproca son llamadas componentes covariantes, entonces tenemos

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{a}_k,$$

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{a}^k.$$

Notemos que la convención de la suma, definida anteriormente, ha sido empleada en estas definiciones.

Si las bases natural y recíproca no son ortogonales, entonces no es conveniente

utilizarlas para expandir un vector, por ejemplo, el vector de velocidad. En vez de utilizar alguna de ellas, es preferible usar una base ortonormal para expresar el vector de velocidad.

Para una base ortonormal, es decir, una base cuyos vectores son ortogonales y unitarios ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$), requerimos que se cumpla la siguiente condición:

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}.$$

Entonces un vector \mathbf{v} se puede expresar en una base física (ortonormal) como

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{e}_k,$$

donde v_k son las llamadas componentes físicas. Sólo para una base física, las componentes son obtenidas como proyecciones del vector sobre la respectiva base, es decir,

$$v_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k.$$

Como se aprecia, una primera conveniencia es la obtención de las componentes del vector como proyecciones del vector sobre la respectiva base.

A continuación definimos, en la notación de índice, el gradiente de un campo escalar, la divergencia de un vector, el rotacional de un vector y el operador derivada material. Para ello, definimos un par de coeficientes que involucran los vectores de la base física \mathbf{e}_i y de la base recíproca \mathbf{a}^j (Bolinder, 1996a).

Definición 8 (Coeficientes E_{ijk} y γ_i^j) Definimos

$$E_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \chi^k}, \quad (10)$$

$$\gamma_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}^j, \quad (11)$$

donde \mathbf{a}^j fue definido en (7).

Definición 9 (Gradiente de un campo escalar) La i -ésima componente del gradiente de un campo escalar es

$$[\nabla f]_i = \mathbf{e}_i \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial \chi^j} \gamma_j^i, \quad (12)$$

Definición 10 (Divergencia de un vector) La divergencia de un vector es

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi^i} (\sqrt{g} v_j \gamma_j^i), \quad (13)$$

donde

$$g = \det(g_{kl}) = \det(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_l). \quad (14)$$

Definición 11 (Rotacional de un vector) La i -ésima componente del rotacional de un vector queda definido como

$$[\text{rot } \mathbf{v}]_i = \epsilon_{ijk} \gamma_j^l \left(\frac{\partial v_k}{\partial \chi^l} - v_m E_{mkl} \right), \quad (15)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo usual de la permutación o tensor de Levi-Civita y está definido como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (16)$$

Definición 12 (Derivada material) Definimos la i -ésima componente del operador derivada material, aplicado a un vector dado \mathbf{u} , como

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right]_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \gamma_j^k \left(\frac{\partial u_i}{\partial \chi^k} - u_l E_{lik} \right) v_j. \quad (17)$$

En las definiciones anteriores hemos supuesto que los vectores de la base física \mathbf{e}_i no dependen del tiempo. Para el caso Cartesiano todos los coeficientes E_{ijk} son nulos (Bolinder, 1996a).

2.7. Ecuaciones de movimiento y de conservación de masa

Definimos las ecuaciones de Euler y de conservación de masa como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (19)$$

Al tomar el rotacional de la ecuación de Euler surge la ecuación de vorticidad de Helmholtz la cual está definida como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (20)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es el vector de vorticidad del fluido y está definido como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (21)$$

Notamos que en la ecuación de vorticidad (20) ya no aparece la presión p .

En virtud de las definiciones mostradas en la sección anterior podemos escribir en detalle las ecuaciones de movimiento y de conservación de masa (18) y (19), en su notación de índice, a partir de

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \gamma_j^k \left(\frac{\partial v_i}{\partial \chi^k} - v_l E_{lik} \right) v_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \chi^j} \gamma_j^i, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi^i} (\sqrt{g} v_j \gamma_j^i) = 0, \quad (23)$$

donde p es la presión generalizada, la cual incluye fuerzas de cuerpo conservativas.

Además podemos escribir la ecuación de vorticidad (20) a partir de

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \gamma_j^k \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \chi^k} - \omega_l E_{lik} \right) v_j = \gamma_j^k \left(\frac{\partial v_i}{\partial \chi^k} - v_l E_{lik} \right) \omega_j. \quad (24)$$

2.8. Vórtices tubulares curvados y torcidos

A continuación presentamos un método para expresar las ecuaciones de movimiento en forma adecuada para vórtices tubulares curvados y torcidos. En particular, dicho método puede ser aplicado a casos particulares, por ejemplo, el caso de un vórtice helicoidal.

El vector de posición de la línea central de una hélice puede ser escrita como

$$\mathbf{r}_c(s) = R \mathbf{e}_r(s) + \frac{ls}{\sqrt{R^2 + l^2}} \mathbf{e}_z,$$

donde el parámetro s es la longitud de arco, R es el radio del cilindro inmaterial sobre el cual yace la hélice y $l = \frac{L}{2\pi}$ el tamaño de paso escalado; \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ y \mathbf{e}_z son los vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas indicados en la Figura 5. Además, supongamos que $\mathbf{r}_c(s)$ es suficientemente suave, de tal manera que las derivadas de $\mathbf{r}_c(s)$ son continuas.

En coordenadas cartesianas tenemos que las ecuaciones paramétricas de la hélice son

$$x(s) = R \cos s,$$

$$y(s) = R \sin s,$$

$$z(s) = ls,$$

donde el parámetro s , R y l fueron definidos anteriormente.

Si una curva dada está parametrizada según la longitud de arco $\mathbf{r}_c(s)$ entonces definimos los vectores tangente \mathbf{t} , normal \mathbf{n} y binormal \mathbf{b} de una curva en el espacio como

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial s},$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

Observamos que si $\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s}$ es nulo entonces el vector \mathbf{n} también lo es, es decir, tenemos una curva con curvatura nula y por lo tanto torsión nula. Por otro lado, la curvatura κ y la torsión τ de $r_c(s)$ son definidas por las siguientes expresiones:

$$\kappa = \left\| r_c'' \right\|,$$

$$\tau = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} \bullet \mathbf{b}.$$

La curvatura es una medida del cambio de dirección del vector tangente a una curva, cuanto más rápido cambia éste a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva, decimos que es más grande la curvatura. Por otro lado, la torsión es una medida del cambio de dirección del vector binormal, cuánto más rápido cambia, más rápido gira el vector binormal alrededor del vector tangente y más retorcida aparece la curva. Por lo tanto, para una curva totalmente contenida en el plano, la torsión es nula, ya que el vector binormal es constantemente perpendicular al plano que lo contiene.

Utilizando las expresiones anteriores podemos escribir las llamadas fórmulas de Frenet como

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}' = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t},$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}.$$

Para una hélice circular los vectores \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} están dados por

$$\mathbf{t}(s) = \cos \alpha \mathbf{e}_\theta(s) + \sin \alpha \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{n}(s) = -\mathbf{e}_r(s),$$

$$\mathbf{b}(s) = -\sin \alpha \mathbf{e}_\theta(s) + \cos \alpha \mathbf{e}_z,$$

donde α es la pendiente de la hélice relativa al plano $z = \text{constante}$ (ver Figura 5).

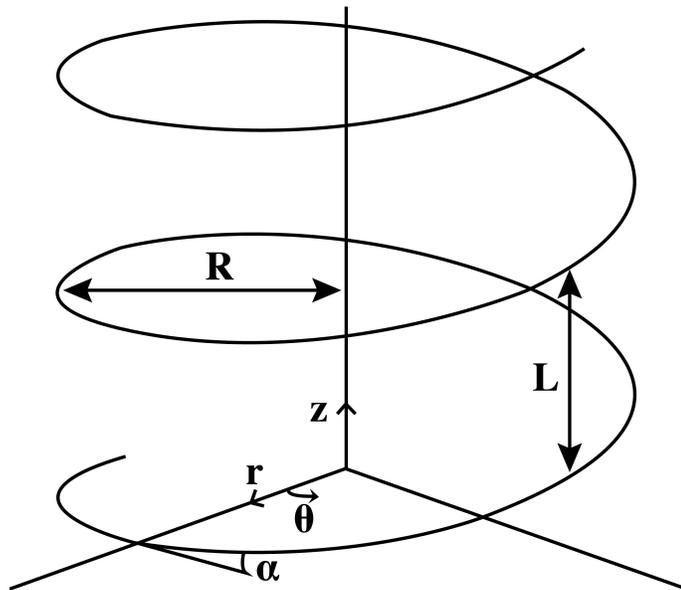


Figura 5. Segmento de hélice circular con tamaño de paso L y radio R . (r, θ, z) representan los ejes del sistema de coordenadas cilíndricas.

Además tenemos las siguientes relaciones:

$$\cos \alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{L^2 + 4\pi^2 R^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}},$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\pi^2 R^2}} = \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}.$$

La curvatura κ y la torsión τ son constantes con los siguientes valores

$$\kappa = \frac{R}{R^2 + l^2},$$

$$\tau = \frac{l}{R^2 + l^2}.$$

Para representar puntos fuera de la línea central, pero cercanos a ella, las coordenadas x y y son utilizadas, con x en la dirección de \mathbf{n} y y en la dirección de \mathbf{b} . Notamos que el vector normal \mathbf{n} apunta al eje de la hélice.

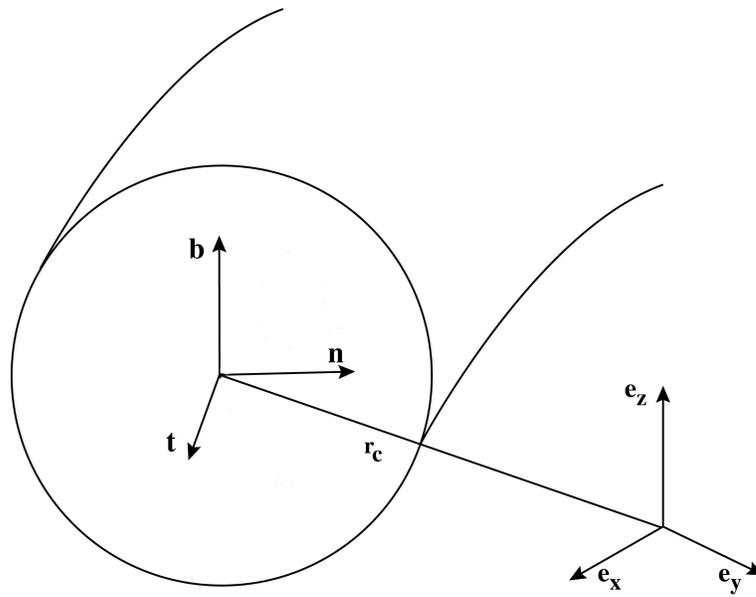


Figura 6. Vectores relacionados a la línea central de un vórtice tubular. Notamos que el vector normal \mathbf{n} apunta al eje de la hélice.

Entonces el vector de posición \mathbf{r} de puntos en el vórtice tubular está dado por

$$\mathbf{r}(s, x, y) = \mathbf{r}_c(s) + x\mathbf{n}(s) + y\mathbf{b}(s).$$

Esta representación de \mathbf{r} es especialmente adecuada para vórtices con sección transversal rectangular. Para vórtices con sección transversal circular, es más conveniente usar coordenadas polares en el plano \mathbf{n}, \mathbf{b} , es decir,

$$\mathbf{r}(s, r, \theta) = \mathbf{r}_c(s) + r \cos \theta \mathbf{n}(s) + r \sin \theta \mathbf{b}(s).$$

Los llamados vectores base natural del sistema de coordenadas (s, x, y) están dados por las siguientes relaciones

$$\mathbf{a}_s = (1 - \kappa x)\mathbf{t} - \tau y \mathbf{n} + \tau x \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{n},$$

$$\mathbf{a}_y = \mathbf{b},$$

entonces la representación del vector de velocidad en la base natural es

$$\mathbf{v} = v^s \mathbf{a}_s + v^x \mathbf{a}_x + v^y \mathbf{a}_y.$$

Sin embargo, si la base natural no es ortogonal, resulta más conveniente expandir el vector de velocidad en la base física $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, por lo cual

$$\mathbf{v} = w\mathbf{t} + u\mathbf{n} + v\mathbf{b},$$

donde w es la llamada componente axial del fluido. Como $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ es una base física, es decir una base ortonormal, las componentes físicas del vector de velocidad w, u, v son obtenidas como las proyecciones del vector de velocidad en la respectiva base. Además, las componentes contravariantes y físicas del vector de velocidad están relacionadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v^s &= \frac{w}{M}, \\ v^x &= \frac{u + \tau y w}{M}, \\ v^y &= \frac{v - \tau x w}{M}. \end{aligned}$$

Si utilizamos las componentes contravariantes para describir el fluido tenemos que al incrementar el valor de τ , tanto v^x como v^y pueden obtener valores arbitrariamente grandes. Entonces es más conveniente describir el fluido usando las componentes físicas del vector de velocidad (Bolinder, 1996b).

Una vez elegidas las coordenadas curvilíneas convenientes podemos escribir en detalle las ecuaciones de Euler, de conservación de masa y de vorticidad en una forma adecuada para vórtices tubulares curvados y torcidos. Los detalles se muestran en el anexo de esta tesis.

En el siguiente capítulo analizamos un caso particular de los vórtices tubulares curvados: los vórtices toroidales.

Capítulo 3. Vórtices Toroidales

En este capítulo analizamos un caso particular de los vórtices tubulares curvados, los vórtices toroidales. Decimos que un toro, o toroide, es una superficie de género uno, es decir, posee un agujero, y en un espacio tridimensional tiene forma de dona. Además, la línea central del toro está caracterizada por tener torsión $\tau = 0$ y curvatura $\kappa = \text{constante}$ la cual es igual al inverso del radio de curvatura. Entonces, un vórtice toroidal es un vórtice tubular en forma de dona (ver Figura 7).

Es de particular interés el estudio del caso en el cual el radio de curvatura es grande, es decir, la curvatura es pequeña. Para ser más precisos, el radio de curvatura R debe ser grande comparado con el radio a de la sección transversal del vórtice. Entonces podemos definir un parámetro adimensional pequeño como sigue:

$$\kappa = \frac{\epsilon}{a} \ll 1.$$

La existencia de dicho parámetro nos sugiere la aplicación del método de expansiones asintóticas para obtener el flujo secundario de un vórtice toroidal. La Figura 7 ilustra un toro con sección transversal circular de radio a .

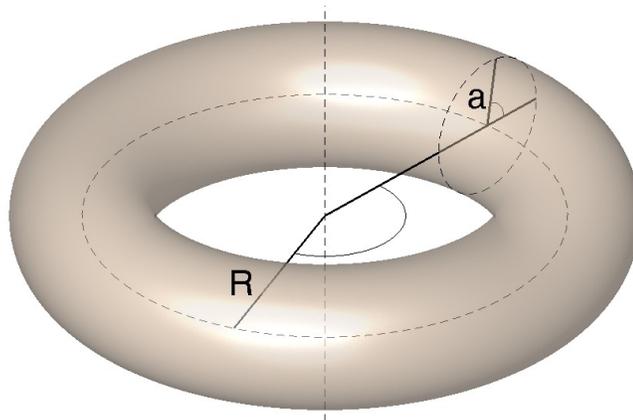


Figura 7. Representación geométrica de un vórtice toroidal con sección transversal de radio a .

A continuación describimos de manera breve el método de las expansiones asintóticas.

3.1. El método de las expansiones asintóticas

Las ecuaciones que gobiernan la mecánica de fluidos son esencialmente no lineales, más precisamente, cuasi-lineales (una ecuación diferencial parcial no lineal es cuasi-lineal si es lineal en las derivadas de mayor orden); y esto es cierto independientemente de si se incluyen o no viscosidad y compresibilidad. Debido a la no linealidad, las soluciones exactas son conocidas sólo para casos particulares en cualquiera de las ramas de la mecánica de fluidos. Una alternativa para conocer la solución de dichas ecuaciones, usualmente utilizada, es la de aproximar. La mayoría de las aproximaciones útiles son válidas cuando uno o más de los parámetros en el problema son pequeños (o grandes). Esta cantidad (perturbación) es a menudo adimensional.

Una aproximación de este tipo se vuelve cada vez más precisa conforme la cantidad de perturbación tiende a cero (o infinito). Entonces decimos que es una solución asintótica. En principio, se puede mejorar el resultado utilizando un esquema sistemático de aproximaciones sucesivas. Las series resultantes, aunque no necesariamente convergentes, son por construcción expansiones asintóticas. En la práctica, calculamos solamente la primera aproximación, a veces la segunda.

Cuando la perturbación tiende a cero, el flujo debe tender a un límite, el cual puede ser denominado como la solución básica. Ésta es a menudo un flujo trivial o conocido. Entonces la llamamos aproximación de orden cero, y a la perturbación aproximación de n-ésimo orden con n un número entero positivo dado.

Ilustramos el método con el siguiente ejemplo. Supongamos que ϵ es un parámetro adimensional pequeño dado, entonces el vector dado \mathbf{u} se escribe en su forma de expansión asintótica como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots$$

donde los puntos denotan términos de mayor orden (Van Dyke, 1964).

En este capítulo aproximamos la función de corriente a orden ϵ para un vórtice toroidal tomando en cuenta que el orden cero es la función de corriente del llamado vórtice de Rankine.

3.2. La función de corriente de orden ϵ

Para obtener la función de corriente de orden ϵ consideramos que las ecuaciones de vorticidad para un fluido incompresible y completamente desarrollado (la velocidad no depende de la coordenada axial s ni del tiempo t), con $\tau = 0$, se escriben como

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \omega_s}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_s}{\partial y} - \frac{\kappa}{M} \omega_x w &= \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\kappa}{M} \omega_s u, \\ u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{w}{M} \omega_s \kappa &= \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\omega_s}{M} w \kappa, \\ u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} &= \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \quad (25)$$

donde $M = 1 - \kappa x$ y las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$ quedan expresadas por las siguientes relaciones:

$$\omega_s = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (27)$$

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w \kappa}{M}. \quad (28)$$

La ecuación de conservación de masa es

$$\frac{\partial}{\partial x} [M u] + \frac{\partial}{\partial y} [M v] = 0, \quad (29)$$

además definimos una función de corriente $\psi = \psi(x, y)$ que satisface la ecuación anterior

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = M u, \quad (30)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = M v. \quad (31)$$

Para un valor de s dado, $\psi(x, y) = \text{constante}$ define una curva en el plano $\mathbf{n-b}$, y $\nabla \psi$ es ortogonal a la tangente de dicha curva. Utilizamos la definición de gradiente de una

función escalar (12) y obtenemos

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{n} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{b}.$$

Denotamos el flujo secundario como

$$\mathbf{v} = u\mathbf{n} + v\mathbf{b},$$

entonces

$$\begin{aligned}\nabla\psi \bullet \mathbf{v} &= u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= u(-Mv) + v(Mu) \\ &= -uvm + uvM \\ &= 0.\end{aligned}$$

Observamos que las tangentes de las curvas $\psi(x, y) = \text{constante}$ son paralelas al vector \mathbf{v} en todos sus puntos, por lo tanto, $\psi(x, y) = \text{constante}$ son líneas de corriente del campo de velocidades \mathbf{v} . Los detalles sobre la deducción de las ecuaciones anteriores se muestran en el anexo de esta tesis.

Sea $\epsilon \ll 1$, entonces las variables dependientes pueden ser expresadas como series de potencias del parámetro ϵ como sigue

$$u = u_0 + \epsilon u_\epsilon + \dots, \quad (32)$$

$$v = v_0 + \epsilon v_\epsilon + \dots, \quad (33)$$

$$w = 0 + \dots, \quad (34)$$

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_\epsilon + \dots, \quad (35)$$

donde los puntos indican términos de mayor orden los cuales son despreciados. El caso $\tau = 0$ implica que $w = 0$ ya que la componente tangencial del vector de velocidad es nula (Fukumoto, 2002; Velasco Fuentes, 2017). ψ_0 es la función de corriente del conocido vórtice de Rankine la cual definimos a continuación.

Definición 13 (Función de corriente del vórtice de Rankine)

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \omega_0 (a^2 - r^2), & r \leq a \\ -\frac{1}{2} \omega_0 a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right), & r > a \end{cases} \quad (36)$$

donde a es el radio de la sección transversal del vórtice y ω_0 es un valor constante de vorticidad.

Estamos interesados en la región $r \leq a$, además notemos que $\psi(r)$ puede ser expresada en función de las usuales coordenadas cartesianas, es decir,

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4} \omega_0 (a^2 - x^2 - y^2).$$

Sustituimos $w = 0$ en las ecuaciones de vorticidad y tenemos

$$u \frac{\partial \omega_s}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_s}{\partial y} + \frac{\omega_s K}{M} u = 0, \quad (37)$$

donde ω_s se definió anteriormente en (26), además $\omega_x = \omega_y = 0$. Luego sustituimos ω_s en (37) y tenemos:

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{uK}{M} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (38)$$

Enseguida sustituimos las expansiones de las componentes del vector de velocidad u y v , dadas en (32) y (33), en la expresión anterior y analizamos cada término para coleccionar aquellos de orden ϵ .

Analicemos el primer término

$$(u_0 + \epsilon u_\epsilon) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon v_\epsilon}{\partial x^2} \right) - (u_0 + \epsilon u_\epsilon) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon u_\epsilon}{\partial x \partial y} \right), \quad (39)$$

colectemos los términos de orden ϵ , es decir,

$$u_0 \frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x^2} + u_\epsilon \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - u_0 \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} - u_\epsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}. \quad (40)$$

Notemos que a partir de la definición de la función de corriente tenemos las siguientes

relaciones de orden cero y de orden ϵ :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ v_0 &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \\ u_\epsilon &= \frac{x}{\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial y}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$v_\epsilon = -\frac{x}{\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x}. \quad (42)$$

Sustituimos las relaciones anteriores en la expresión (40) y tenemos:

$$\begin{aligned} (40) &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x^2} - u_\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x \partial y} - u_\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\frac{x}{\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{x}{\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{\alpha} y + \frac{1}{2} \omega_0 y \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 \psi_\epsilon]. \end{aligned} \quad (43)$$

Ahora el segundo término

$$(v_0 + \epsilon v_\epsilon) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \epsilon v_\epsilon}{\partial y \partial x} \right) - (v_0 + \epsilon v_\epsilon) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon u_\epsilon}{\partial y^2} \right),$$

nuevamente colectemos los términos de orden ϵ , es decir,

$$v_0 \frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial y \partial x} + v_\epsilon \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} - v_0 \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} - v_\epsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}. \quad (44)$$

Sustituimos las relaciones de orden 0 y ϵ en la expresión anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} (44) &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial y \partial x} - v_\epsilon \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial y^2} - v_\epsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(-\frac{x}{\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{x}{\alpha} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi_\epsilon]. \end{aligned} \quad (45)$$

Finalmente el tercer término

$$(u_0 + \epsilon u_\epsilon) \left(\frac{\epsilon}{a} + \left(\frac{\epsilon}{a} \right)^2 x \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} (v_0 + \epsilon v_\epsilon) - \frac{\partial}{\partial y} (u_0 + \epsilon u_\epsilon) \right). \quad (46)$$

Colectamos los términos de orden ϵ y tenemos

$$\frac{u_0}{a} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{u_0}{a} \frac{\partial u_0}{\partial y}. \quad (47)$$

Sustituimos las relaciones de orden 0 en la expresión anterior y escribimos

$$\begin{aligned} (47) &= \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{a} y. \end{aligned} \quad (48)$$

Sabemos que x está definida en el intervalo $0 < x < a$, además $a \ll R$, por lo tanto decimos que x es pequeña. Para κx pequeñas la siguiente aproximación es válida:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{1 - \kappa x} \approx 1 + \kappa x.$$

Esta aproximación fue aplicada en la expresión (46).

Poniendo todo junto, es decir, sustituimos (43), (45) y (48) en (37) y tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{a} y + \frac{1}{2} \omega_0 y \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 \psi_\epsilon] - \frac{1}{2} \omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi_\epsilon] - \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{a} y &= 0 \\ \frac{1}{2} \omega_0 \left(y \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 \psi_\epsilon] - x \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi_\epsilon] \right) &= \frac{5}{4} \frac{\omega_0^2}{a} y \\ y \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 \psi_\epsilon] - x \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi_\epsilon] &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} y \\ y \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 \psi_\epsilon] - x \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi_\epsilon] &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} y. \end{aligned} \quad (49)$$

La expresión anterior es una ecuación diferencial parcial lineal de primer orden no homogénea.

Hasta este momento hemos descrito el problema en términos de las coordenadas

cartesianas rectangulares, sin embargo, estamos interesados en describirlo en coordenadas polares. Para escribir la ecuación diferencial parcial lineal de primer orden (49) en coordenadas polares enunciamos un teorema del cálculo, el cual tampoco demostraremos.

Teorema 3.1 (Regla de la cadena) *Supongamos que $f(r, \theta)$, $r = g(x, y)$ y $\theta = h(x, y)$ son todas diferenciables, entonces f tiene derivadas parciales respecto a x e y , dadas por las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.\end{aligned}$$

Ahora sean $f(r, \theta) = \nabla^2 \psi_\epsilon$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \text{atan}(\frac{y}{x})$, entonces por el teorema anterior escribimos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{y}{x^2 + y^2},\end{aligned}$$

pero sabemos que

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\ y &= r \text{sen} \theta,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{r \cos \theta}{r} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{r \text{sen} \theta}{r^2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\text{sen} \theta}{r}.\end{aligned}$$

De forma análoga tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \text{sen} \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación (49) como

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla^2 \psi_\epsilon] - \operatorname{cos}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla^2 \psi_\epsilon] &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} r \operatorname{sen} \theta \\
 -\frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla^2 \psi_\epsilon] &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} r \operatorname{sen} \theta \\
 -\nabla^2 \psi_\epsilon &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} r \int \operatorname{sen} \theta d\theta + C(r) \\
 \nabla^2 \psi_\epsilon &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} r \operatorname{cos} \theta + C(r). \tag{50}
 \end{aligned}$$

La expresión anterior es la llamada ecuación de Poisson. En la frontera, suponemos la condición de impenetrabilidad.

Para el caso estacionario, las líneas de corriente $\psi(r, \theta) = C$, con C una constante arbitraria, pueden ser consideradas como fronteras sólidas. Entonces una condición de frontera para (50) se escribe como

$$\psi(a, \theta) = 0. \tag{51}$$

Las relaciones (50) y (51) definen un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. En general, el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace consiste en encontrar una función ϕ tal que

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ en } \Omega,$$

$$\phi = f, \text{ en } \partial\Omega,$$

donde Ω es un dominio acotado en \mathbb{E}^n y f es una función dada la cual es continua y está definida sobre $\partial\Omega$, con $\partial\Omega$ la frontera del dominio. La solución del problema anterior para un disco de radio a está dada en su forma de serie de Fourier en coordenadas polares por la siguiente expresión

$$\phi(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n [\alpha_n \operatorname{cos}(n\theta) + \beta_n \operatorname{sen}(n\theta)],$$

donde α_n y β_n son los coeficientes de Fourier y están dados por

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \operatorname{sen}(n\varphi) d\varphi.$$

Escribamos entonces el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_\epsilon &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} r \cos \theta + C(r) \quad \text{en } r < a, \\ \psi_\epsilon(a, \theta) &= 0 \quad \text{en } r = a. \end{aligned}$$

Para obtener la solución del problema anterior proponemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} C(r) &= 0, \\ \delta(r, \theta) &= \frac{5}{16} \frac{\omega_0}{a} r^3 \cos \theta, \\ \lambda &= \psi_\epsilon - \delta. \end{aligned}$$

Entonces, aplicamos el Laplaciano a la expresión anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \lambda &= \nabla^2 \psi_\epsilon - \nabla^2 \delta \\ &= \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} r \cos \theta - \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{a} r \cos \theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \lambda(a, \theta) &= \psi_\epsilon(a, \theta) - \delta(a, \theta) \\ &= -\frac{5}{16} a^2 \omega_0 \cos \theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, escribimos el problema para λ como

$$\begin{aligned}\nabla^2 \lambda &= 0, & \text{en } r < a, \\ \lambda(a, \theta) &= -\frac{5}{16} a^2 \omega_0 \cos \theta & \text{en } r = a.\end{aligned}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier de la solución del problema anterior se escriben como

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0, \\ \alpha_1 &= -\frac{5}{16} a^2 \omega_0, \\ \beta_n &= 0,\end{aligned}$$

donde las siguientes igualdades fueron aplicadas

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= 0, \quad n, m \in \mathbb{N}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}\end{aligned}$$

Entonces la solución del problema para λ es:

$$\lambda(r, \theta) = -\frac{5}{16} a \omega_0 r \cos \theta.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\psi_\epsilon(r, \theta) &= \lambda(r, \theta) + \delta(r, \theta) \\ &= -\frac{5}{16} a \omega_0 r \cos \theta + \frac{5}{16} \frac{\omega_0}{a} r^3 \cos \theta.\end{aligned}$$

La expresión anterior expresada en coordenadas cartesianas es:

$$\psi_\epsilon(x, y) = -\frac{5}{16} a \omega_0 x + \frac{5}{16} \frac{\omega_0}{a} x(x^2 + y^2). \quad (52)$$

3.3. Las velocidades de orden ϵ

Para calcular las velocidades de orden ϵ tomamos en cuenta lo siguiente

$$\begin{aligned}\psi_0(x, y) &= \frac{1}{4} \omega_0 (a^2 - x^2 - y^2), \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \omega_0 x, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \omega_0 y, \\ \psi_\epsilon(x, y) &= -\frac{5}{16} a \omega_0 x + \frac{5}{16} \frac{\omega_0}{a} x(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x} &= \frac{5}{16} \frac{\omega_0}{a} (-a^2 + 3x^2 + y^2), \\ \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial y} &= \frac{5}{8} \frac{\omega_0}{a} x y,\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}u_\epsilon &= \frac{x}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial y}, \\ v_\epsilon &= -\frac{x}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x},\end{aligned}$$

por lo tanto las velocidades son

$$\begin{aligned}u_\epsilon &= \frac{1}{8} \frac{\omega_0}{a} x y, \\ v_\epsilon &= -\frac{1}{16} \frac{\omega_0}{a} (-5a^2 + 7x^2 + 5y^2).\end{aligned}$$

Por lo anterior escribimos:

$$\mathbf{v}_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \frac{\omega_0}{a} x y \\ -\frac{1}{16} \frac{\omega_0}{a} (-5a^2 + 7x^2 + 5y^2) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

3.4. La vorticidad de orden ϵ

Para calcular la distribución de vorticidad $\omega_{s\epsilon}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 \omega_{s\epsilon} &= \frac{\partial v_{\epsilon}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{16} \frac{\omega_0}{a} (-5a^2 + 7x^2 + 5y^2) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{8} \frac{\omega_0}{a} xy \right] \\
 &= -\frac{7}{8} \frac{\omega_0}{a} x - \frac{1}{8} \frac{\omega_0}{a} x \\
 &= -\frac{\omega_0}{a} x.
 \end{aligned}$$

La expresión anterior puede ser escrita en términos de las coordenadas polares como:

$$\omega_{s\epsilon} = -\frac{\omega_0}{a} r \cos \theta. \quad (54)$$

Notamos que esta expresión cumple un principio fundamental, a saber: en una solución estacionaria de la ecuación de Euler, para un flujo axialmente simétrico y sin giro, la vorticidad varía linealmente con la distancia al centro de curvatura (Batchelor, 1967).

En el siguiente capítulo analizamos otro caso particular de los vórtices tubulares, los vórtices helicoidales.

Capítulo 4. Vórtices Helicoidales

En general una curva es llamada una hélice si las líneas tangentes a dicha curva forman un ángulo constante respecto a una dirección fija. Además la curva está caracterizada por tener torsión $\tau = \text{constante}$ y curvatura $\kappa = \text{constante}$. Entonces decimos que un vórtice helicoidal es un vórtice tubular cuya línea central es una hélice (ver Figura 8).

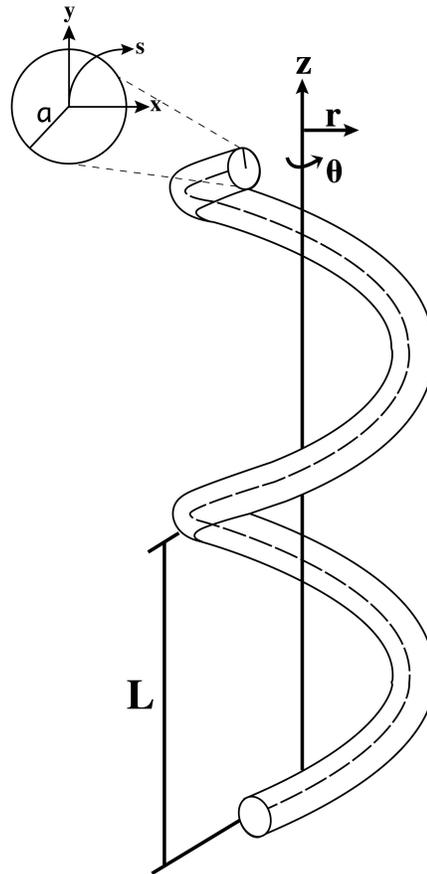


Figura 8. Segmento de un vórtice helicoidal. El vórtice se extiende indefinidamente en ambas direcciones y su línea central es una hélice de tamaño de paso L .

En este capítulo obtenemos la pseudo función de corriente de orden η tomando en cuenta que el orden cero es la función de corriente del vórtice de Rankine.

4.1. La seudo función de corriente de orden η

Para obtener la seudo función de corriente de orden η consideramos que las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible y completamente desarrollado (la velocidad no depende de la coordenada axial s ni del tiempo t) se escriben como sigue:

$$\left(u + \frac{\tau y}{M} w\right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w\right) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\kappa}{M} w u = -\frac{1}{\rho M} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} + \tau y \frac{\partial \rho}{\partial x} - \tau x \frac{\partial \rho}{\partial y} \right), \quad (55)$$

$$\left(u + \frac{\tau y}{M} w\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{M} w (\kappa w - \tau v) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (56)$$

$$\left(u + \frac{\tau y}{M} w\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\tau}{M} w u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}. \quad (57)$$

La ecuación de conservación de masa se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial x} [M u + \tau y w] + \frac{\partial}{\partial y} [M v - \tau x w] = 0, \quad (58)$$

además una seudo función de corriente $\psi = \psi(x, y)$ que satisface la ecuación anterior es:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = M u + \tau y w, \quad (59)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = M v - \tau x w. \quad (60)$$

$\psi(x, y) = \text{constante}$ define una superficie tridimensional, y $\nabla \psi$ es normal a esta superficie. Para un valor de s dado, $\psi(x, y) = \text{constante}$ define curva en el plano $\mathbf{n-b}$ tal que $\nabla \psi$ es ortogonal a la tangente de esta curva. Utilizamos la definición de gradiente de una función escalar (12) y obtenemos (Bolinder, 1996a):

$$\nabla \psi = \left(\frac{\tau y}{M} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\tau x}{M} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \mathbf{t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{n} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{b}.$$

Denotamos el flujo secundario como

$$\mathbf{v} = u \mathbf{n} + v \mathbf{b}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\nabla\psi \bullet \mathbf{v} &= u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= \tau w(xu + yv)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi(x, y) = \text{constante}$ no son líneas de corriente del campo de velocidades \mathbf{v} , sin embargo,

$$\begin{aligned}\nabla\psi \bullet \mathbf{v} &= \nabla\psi \bullet (w\mathbf{t} + \mathbf{v}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

es decir, la velocidad es tangente a las superficies $\psi(x, y) = \text{constante}$. Esto es, estas superficies definen tubos de corriente para el campo de velocidades (Bolinder, 1996b).

Ahora definimos el siguiente parámetro adimensional pequeño:

$$\tau = \frac{\eta}{\alpha} \ll 1.$$

La existencia de los parámetros ϵ y η nos sugiere nuevamente la aplicación del método de expansiones asintóticas. Los valores de los parámetros ϵ y η no pueden ser elegidos de manera arbitraria. En la Figura 9 mostramos los valores que toman estos parámetros en función del tamaño de paso adimensional del vórtice para un valor dado del radio del vórtice $\alpha = 0.1$.

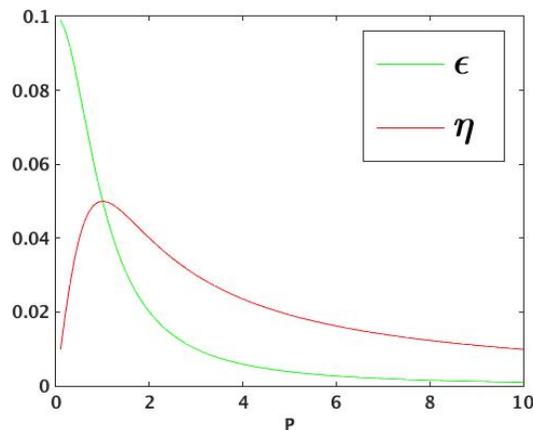


Figura 9. Valores de los parámetros ϵ y η en función del tamaño de paso adimensional P para un valor dado del radio del vórtice $\alpha = 0.1$.

Para un problema en el cual hay dos parámetros dados es posible considerar una expansión de las variables dependientes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \mathbf{F}_{00} + \epsilon \mathbf{F}_{01} + \epsilon^2 \mathbf{F}_{02} + \dots \\ & + \eta \mathbf{F}_{10} + \eta \epsilon \mathbf{F}_{11} + \eta \epsilon^2 \mathbf{F}_{12} + \dots, \end{aligned}$$

donde el primer subíndice indica la potencia asociada al parámetro η y el segundo al parámetro ϵ (Tuttle, 1990). Por lo tanto, las variables dependientes pueden ser expresadas como series de potencias en ϵ y η como sigue

$$u = u_0 + \epsilon u_\epsilon + \eta u_\eta + \dots, \quad (61)$$

$$v = v_0 + \epsilon v_\epsilon + \eta v_\eta + \dots, \quad (62)$$

$$w = \eta w_\eta + \dots, \quad (63)$$

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_\epsilon + \eta \psi_\eta + \dots, \quad (64)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_\epsilon + \eta p_\eta + \dots, \quad (65)$$

donde $p = \frac{p}{\rho}$ y los puntos indican términos de mayor orden los cuales son despreciados, además ψ_0 y ψ_ϵ son las funciones de corriente dadas anteriormente.

Observemos que a partir de las relaciones de la seudo función de corriente tenemos las siguientes expresiones de orden cero y de orden η :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ v_0 &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \\ u_\eta &= \frac{\partial \psi_\eta}{\partial y}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$v_\eta = -\frac{\partial \psi_\eta}{\partial x}. \quad (67)$$

Sustituimos las series (61), (62), (63) y (65) en la segunda componente de las ecuaciones de Euler (56), colectamos los términos de orden η y tenemos:

$$u_0 \frac{\partial u_\eta}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_\eta}{\partial y} + v_\eta \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_\eta}{\partial x}.$$

Ahora sustituimos las series (61), (62), (63) y (65) en la tercera componente de las ecuaciones de Euler (57), colectamos los términos de orden η y tenemos:

$$u_0 \frac{\partial v_\eta}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_\eta}{\partial y} + v_\eta \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_\eta}{\partial y}.$$

Las últimas dos ecuaciones forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_\eta}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_\eta}{\partial y} + v_\eta \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{\partial p_\eta}{\partial x}, \\ u_0 \frac{\partial v_\eta}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_\eta}{\partial y} + v_\eta \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -\frac{\partial p_\eta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Sustituimos las expresiones de orden cero y de orden η de la pseudo función de corriente en el sistema de ecuaciones anterior y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi_\eta}{\partial y} \right] + \frac{\partial \psi_\eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right] - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi_\eta}{\partial y} \right] - \frac{\partial \psi_\eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial p_\eta}{\partial x}, \\ -\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi_\eta}{\partial x} \right] - \frac{\partial \psi_\eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right] + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi_\eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial \psi_\eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right] &= -\frac{\partial p_\eta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Tomamos en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= \frac{1}{4} \omega_0 (a^2 - x^2 - y^2) \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \omega_0 x \\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2} \omega_0 \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \omega_0 y \\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} &= -\frac{1}{2} \omega_0 \\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en el sistema de ecuaciones tenemos:

$$-\frac{1}{2}\omega_0 y \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\omega_0 x \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial \psi_\eta}{\partial x} = -\frac{\partial \rho_\eta}{\partial x}, \quad (68)$$

$$\frac{1}{2}\omega_0 y \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial \psi_\eta}{\partial y} - \frac{1}{2}\omega_0 x \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial \rho_\eta}{\partial y}. \quad (69)$$

Derivamos la ecuación (68) con respecto a y y (69) con respecto a x y tenemos:

$$-\frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}\omega_0 y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{2}\omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 \rho_\eta}{\partial y \partial x}, \quad (70)$$

$$\frac{1}{2}\omega_0 y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial x^2} \right] = -\frac{\partial^2 \rho_\eta}{\partial x \partial y}. \quad (71)$$

Multiplicamos (71) por (-1) y lo sumamos a (70) y tenemos:

$$y \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 \psi_\eta] - x \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 \psi_\eta] = 0. \quad (72)$$

Por lo tanto, podemos reescribir la expresión anterior, en función de las usuales coordenadas polares, como:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla^2 \psi_\eta] + \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla^2 \psi_\eta] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla^2 \psi_\eta] &= 0 \\ \nabla^2 \psi_\eta &= K(r). \end{aligned} \quad (73)$$

La expresión anterior es conocida como la ecuación de Poisson. En la frontera suponemos, nuevamente, la condición de impenetrabilidad y escribimos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_\eta &= K(r) \text{ en } r < a, \\ \psi_\eta(a, \theta) &= 0 \text{ en } r = a. \end{aligned}$$

Para obtener la solución del problema anterior proponemos

$$\begin{aligned}K(r) &= \frac{\omega_0}{a} r, \\ \Upsilon(r, \theta) &= \frac{1}{9} \frac{\omega_0}{a} r^3, \\ \Lambda &= \psi_\eta - \Upsilon.\end{aligned}$$

Aplicamos el Laplaciano a la última igualdad y tenemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Lambda &= \nabla^2 \psi_\eta - \nabla^2 \Upsilon \\ &= \frac{\omega_0}{a} r - \frac{\omega_0}{a} r \\ &= 0,\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}\Lambda(a, \theta) &= \psi_\eta(a, \theta) - \Upsilon(a, \theta) \\ &= -\frac{1}{9} a^2 \omega_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto escribimos el problema para Λ como:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Lambda &= 0 && \text{en } r < a, \\ \Lambda(a, \theta) &= -\frac{1}{9} a^2 \omega_0 && \text{en } r = a.\end{aligned}$$

El problema anterior es conocido como el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace y su solución es:

$$\Lambda(r, \theta) = -\frac{1}{9} a^2 \omega_0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\psi_\eta(r, \theta) &= \Lambda(r, \theta) + \Upsilon(r, \theta) \\ &= -\frac{1}{9} a^2 \omega_0 + \frac{1}{9} \frac{\omega_0}{a} r^3 \\ &= \frac{1}{9} \omega_0 \left(\frac{r^3}{a} - a^2 \right).\end{aligned}\tag{74}$$

4.2. La componente axial del vector de velocidad

Para obtener la expresión para la componente axial de la velocidad, sustituimos las velocidades y la presión dadas por las ecuaciones (61), (62), (63) y (65) en (55), sustituimos $\tau = \frac{\eta}{a}$, colectamos los términos de orden η y tenemos

$$u_0 \frac{\partial w_\eta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_\eta}{\partial y} = -\frac{\partial p_\eta}{\partial s} - \frac{y}{a} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{x}{a} \frac{\partial p_0}{\partial y},$$

sustituimos las relaciones de orden cero en la expresión anterior y obtenemos:

$$-\frac{1}{2} \omega_0 y \frac{\partial w_\eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \omega_0 x \frac{\partial w_\eta}{\partial y} = -\frac{\partial p_\eta}{\partial s} - \frac{y}{a} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{x}{a} \frac{\partial p_0}{\partial y}. \quad (75)$$

Dado que el vórtice de Rankine es un vórtice circular con rotación de cuerpo sólido tenemos que $p_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, además suponemos que p_η es constante, entonces sustituimos estas expresiones para la presión en (75) y tenemos

$$y \frac{\partial w_\eta}{\partial x} + x \frac{\partial w_\eta}{\partial y} = 0.$$

Podemos reescribir la expresión anterior, en función de las coordenadas polares, como

$$\begin{aligned} y \left[\cos \theta \frac{\partial w_\eta}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w_\eta}{\partial \theta} \right] + x \left[\sin \theta \frac{\partial w_\eta}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w_\eta}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \frac{\partial w_\eta}{\partial \theta} \left[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right] &= 0 \\ \frac{\partial w_\eta}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$w_\eta = H(r). \quad (76)$$

Para fines prácticos tomaremos como ejemplo dos formas para $H(r)$, a saber, $H(r) = 0$ y $H(r) = -r^2$.

4.3. La vorticidad de orden η

Para calcular ω de orden η tomamos en cuenta las siguientes relaciones

$$\omega_s = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (77)$$

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\tau x}{M} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\tau y}{M} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u\tau}{M}, \quad (78)$$

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\tau x}{M} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\tau y}{M} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w\kappa}{M} - \frac{v\tau}{M}, \quad (79)$$

y proponemos las siguientes expansiones

$$\omega_s = \omega_{s0} + \epsilon\omega_{s\epsilon} + \eta\omega_{s\eta} + \dots, \quad (80)$$

$$\omega_x = \omega_{x0} + \epsilon\omega_{x\epsilon} + \eta\omega_{x\eta} + \dots, \quad (81)$$

$$\omega_y = \omega_{y0} + \epsilon\omega_{y\epsilon} + \eta\omega_{y\eta} + \dots. \quad (82)$$

Sustituimos las series (61), (62) y (80) en (77) y tenemos:

$$\omega_{s0} + \epsilon\omega_{s\epsilon} + \eta\omega_{s\eta} = \frac{\partial}{\partial x} [v_0 + \epsilon v_\epsilon + \eta v_\eta] - \frac{\partial}{\partial y} [u_0 + \epsilon u_\epsilon + \eta u_\eta].$$

Colectamos los términos de orden η y obtenemos:

$$\omega_{s\eta} = \frac{\partial v_\eta}{\partial x} - \frac{\partial u_\eta}{\partial y}.$$

Si

$$\psi_\eta(r, \theta) = \frac{1}{9} \omega_0 \left(\frac{r^3}{a} - a^2 \right),$$

entonces

$$\psi_\eta(x, y) = \frac{1}{9} \omega_0 \left[\frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{a} - a^2 \right],$$

además tomamos en cuenta las relaciones de orden η para la pseudo función de corriente y tenemos que

$$u_\eta = \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} y (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial y} = \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} \frac{x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De manera análoga tenemos

$$v_\eta = -\frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

entonces

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial x} = \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} \frac{-2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \omega_{s\eta} &= \frac{\partial v_\eta}{\partial x} - \frac{\partial u_\eta}{\partial y} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} \frac{-2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} \frac{x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{\omega_0}{a} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Consideramos $\tau = \frac{\eta}{a}$, sustituimos las series (61), (62), (63) y (81) en (78), y tenemos:

$$\omega_{x0} + \epsilon \omega_{x\epsilon} + \eta \omega_{x\eta} = \frac{\partial \eta w_\eta}{\partial y} + \frac{\tau x}{M} \frac{\partial}{\partial y} [v_0 + \epsilon v_\epsilon + \eta v_\eta] - \frac{\tau y}{M} \frac{\partial}{\partial x} [v_0 + \epsilon v_\epsilon + \eta v_\eta] - \frac{\tau}{M} [u_0 + \epsilon u_\epsilon + \eta u_\eta].$$

Colectamos los términos de orden η :

$$\omega_{x\eta} = \frac{\partial w_\eta}{\partial y} + \frac{x}{a} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{y}{a} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{a} u_0.$$

Si suponemos $H(r) = 0$ entonces

$$w_\eta = 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial w_\eta}{\partial y} = 0.$$

Además recordemos que

$$u_0 = -\frac{1}{2}\omega_0 y,$$

$$v_0 = \frac{1}{2}\omega_0 x,$$

entonces

$$\omega_{x\eta} = 0.$$

Ahora sustituimos las series (61), (62), (63) y (82) en (79), y tenemos:

$$\omega_{y0} + \epsilon\omega_{y\epsilon} + \eta\omega_{y\eta} = -\frac{\partial\eta w_\eta}{\partial x} - \frac{\tau x}{M} \frac{\partial}{\partial y} [u_0 + \epsilon u_\epsilon + \eta u_\eta] + \frac{\tau y}{M} \frac{\partial}{\partial x} [u_0 + \epsilon u_\epsilon + \eta u_\eta] + \frac{\eta w_{\eta K}}{M} - \frac{\tau}{M} [v_0 + \epsilon v_\epsilon + \eta v_\eta].$$

Colectamos los términos de orden η , es decir,

$$\omega_{y\eta} = -\frac{\partial w_\eta}{\partial x} - \frac{x}{a} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{y}{a} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{a} v_0.$$

Si suponemos $H(r) = 0$ entonces

$$\omega_{y\eta} = 0.$$

Por lo tanto el vector de vorticidad de orden η es:

$$\boldsymbol{\omega}_\eta = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_0}{a} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Por otro lado, supongamos que $H(r) = -\frac{\omega_0}{a} r^2$ entonces el vector de vorticidad de orden η , en términos de las coordenadas cartesianas, es:

$$\boldsymbol{\omega}_\eta = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_0}{a} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ -2 \frac{\omega_0}{a} y \\ 2 \frac{\omega_0}{a} x \end{pmatrix}. \quad (84)$$

4.4. Los campos de velocidad y de vorticidad

A continuación escribiremos el campo de velocidad para un vórtice helicoidal, entonces si $H(r) = 0$ tenemos que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\omega_0 y + \epsilon \frac{1}{8} \frac{\omega_0}{a} x y + \eta \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} y (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\omega_0 x - \epsilon \frac{1}{16} \frac{\omega_0}{a} (-5a^2 + 7x^2 + 5y^2) - \eta \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} x (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Luego, si $H(r) = -\frac{\omega_0}{a} r^2$ tenemos

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\eta \frac{\omega_0}{a} (x^2 + y^2) \\ -\frac{1}{2}\omega_0 y + \epsilon \frac{1}{8} \frac{\omega_0}{a} x y + \eta \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} y (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\omega_0 x - \epsilon \frac{1}{16} \frac{\omega_0}{a} (-5a^2 + 7x^2 + 5y^2) - \eta \frac{1}{3} \frac{\omega_0}{a} x (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (86)$$

A continuación escribiremos el campo de vorticidad para un vórtice helicoidal, entonces si $H(r) = 0$ tenemos que

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_0 - \epsilon \frac{\omega_0}{a} x - \eta \frac{\omega_0}{a} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Por otro lado, si $H(r) = -\frac{\omega_0}{a} r^2$ tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_0 - \epsilon \frac{\omega_0}{a} x - \eta \frac{\omega_0}{a} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ -2\eta \frac{\omega_0}{a} y \\ 2\eta \frac{\omega_0}{a} x \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Capítulo 5. Resultados

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos en las secciones de los capítulos anteriores.

5.1. La función de corriente de orden ϵ y la pseudo función de corriente de orden η

La Figura 10 muestra los contornos de la función de corriente de orden ϵ y la pseudo función de corriente de orden η de primer orden del flujo secundario de un vórtice helicoidal. Observamos que ψ_ϵ muestra un par de celdas contra rotativas (ver Figura 11(a)). Cabe mencionar que este par de celdas son análogas a las mostradas por Dean (1927, 1928). Por otro lado, ψ_η muestra una estructura axialmente simétrica.

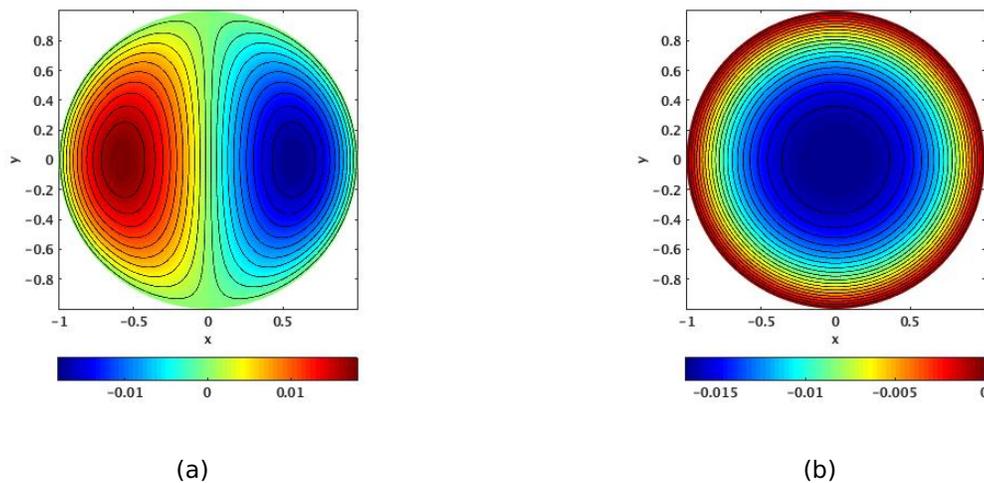


Figura 10. Función de corriente de orden ϵ y pseudo función de corriente de orden η : (a) ψ_ϵ la función de corriente asociada sólo a la curvatura; (b) ψ_η la pseudo función de corriente asociada sólo a la torsión.

Para un vórtice helicoidal los contornos de la pseudo función de corriente ψ no describen el flujo secundario dado por u y v . Entonces, graficamos los campos vectoriales para representar el flujo secundario. La Figura 11(a) muestra el flujo secundario asociado sólo a la curvatura, mientras que la Figura 11(b) muestra el flujo secundario asociado sólo a la torsión.

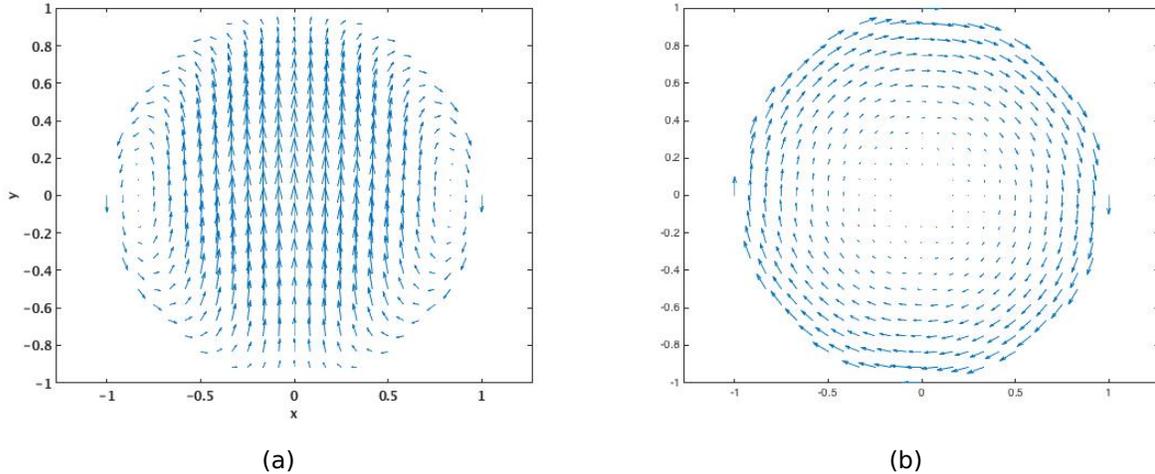


Figura 11. Campos vectoriales del flujo secundario: (a) flujo secundario asociado sólo a la curvatura; (b) flujo secundario asociado sólo a la torsión.

La pseudo función de corriente para un vórtice helicoidal es la suma de las funciones de corriente de Rankine, la asociada sólo a la curvatura y la pseudo función de corriente asociada sólo a la torsión, en otras palabras, $\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_\epsilon + \eta \psi_\eta$. A continuación mostramos ψ con diferentes valores de ϵ y η .

Para mostrar ψ consideramos los siguientes parámetros: el radio del vórtice $\alpha = \frac{a}{R}$, el tamaño de paso adimensional del vórtice $P = \frac{L}{2\pi R}$ y el tamaño de paso escalado $l = \frac{L}{2\pi}$. Si suponemos $\alpha = 1$ entonces $\kappa = \epsilon$ y $\tau = \eta$. Estos últimos pueden ser obtenidos con las fórmulas para la curvatura y la torsión dadas en el capítulo 2 de esta tesis.

Los valores de los parámetros ϵ y η no pueden ser elegidos de manera arbitraria. Dados P y α podemos determinar valores para ϵ y η , sin embargo, para determinar P y α se tiene que satisfacer la siguiente condición: $L \geq 4\alpha$, con L el tamaño de paso del vórtice, y $P \geq \frac{2\alpha}{\pi}$ (Velasco Fuentes, 2018b).

La Tabla 1 muestra los valores de parámetros ϵ y η , de izquierda a derecha tenemos valores para $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$ y de arriba hacia abajo tenemos valores para el tamaño de paso adimensional $P = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$. Los valores de P están asociados al alargamiento del vórtice helicoidal, por ejemplo, obtenemos una hélice más alargada cuando $P = 10$. Por otro lado, los valores de α representan el cociente entre el radio de la sección transversal del vórtice y el radio de curvatura R . Si $\alpha = 1$ entonces $\alpha = 0.1$ implica que $R = 10$, ya que se debe cumplir $\alpha \ll R$.

Los valores de los parámetros ϵ y η mostrados en la Tabla 1 están asociados a las subfiguras mostradas en la Figura 12, por ejemplo, la Figura 12(c) está asociada a los valores $\epsilon = 0.2970$ y $\eta = 0.0297$.

Tabla 1. Valores de los parámetros ϵ y η .

	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$
$P = 0.1$	$\epsilon = 0.0990$ $\eta = 0.0099$	$\epsilon = 0.1980$ $\eta = 0.0198$	$\epsilon = 0.2970$ $\eta = 0.0297$
$P = 0.5$	$\epsilon = 0.0800$ $\eta = 0.0400$	$\epsilon = 0.1600$ $\eta = 0.0800$	$\epsilon = 0.2400$ $\eta = 0.1200$
$P = 1$	$\epsilon = 0.0500$ $\eta = 0.0500$	$\epsilon = 0.1000$ $\eta = 0.1000$	$\epsilon = 0.1500$ $\eta = 0.1500$
$P = 5$	$\epsilon = 0.0038$ $\eta = 0.0192$	$\epsilon = 0.0077$ $\eta = 0.0385$	$\epsilon = 0.0115$ $\eta = 0.577$
$P = 10$	$\epsilon = 0.0009$ $\eta = 0.0099$	$\epsilon = 0.0020$ $\eta = 0.0198$	$\epsilon = 0.0030$ $\eta = 0.0297$

La Figura 12 muestra la pseudo función de corriente $\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_\epsilon + \eta \psi_\eta$ con diferentes valores de los parámetros adimensionales ϵ y η , éstos son mostrados en la Tabla anterior. Notemos que la hélice más alargada se obtiene cuando $P = 10$, en contraste la hélice menos alargada es para $P = 0.1$. En función de P y α obtenemos valores para los parámetros adimensionales ϵ y η . Por ejemplo, en la Figura 12(c) para $P = 0.1$ y $\alpha = 0.3$ obtenemos $\epsilon = 0.2970$ y $\eta = 0.0297$, además observamos que el desplazamiento del valor máximo de la función de corriente ψ_0 es en el sentido de los valores negativos del eje x , es decir, en dirección contraria al centro de curvatura, dicho desplazamiento se debe a la curvatura. Cuantitativamente notamos que el parámetro asociado a la curvatura es mucho más grande que el asociado a la torsión. Por otro lado, en la Figura 12(ñ) para $P = 10$ y $\alpha = 0.3$ tenemos $\epsilon = 0.003$ y $\eta = 0.0297$. En este caso obtenemos una hélice alargada, es decir, la curvatura es muy pequeña, lo cual se observa cuantitativamente en el valor de ϵ . El desplazamiento es despreciable.

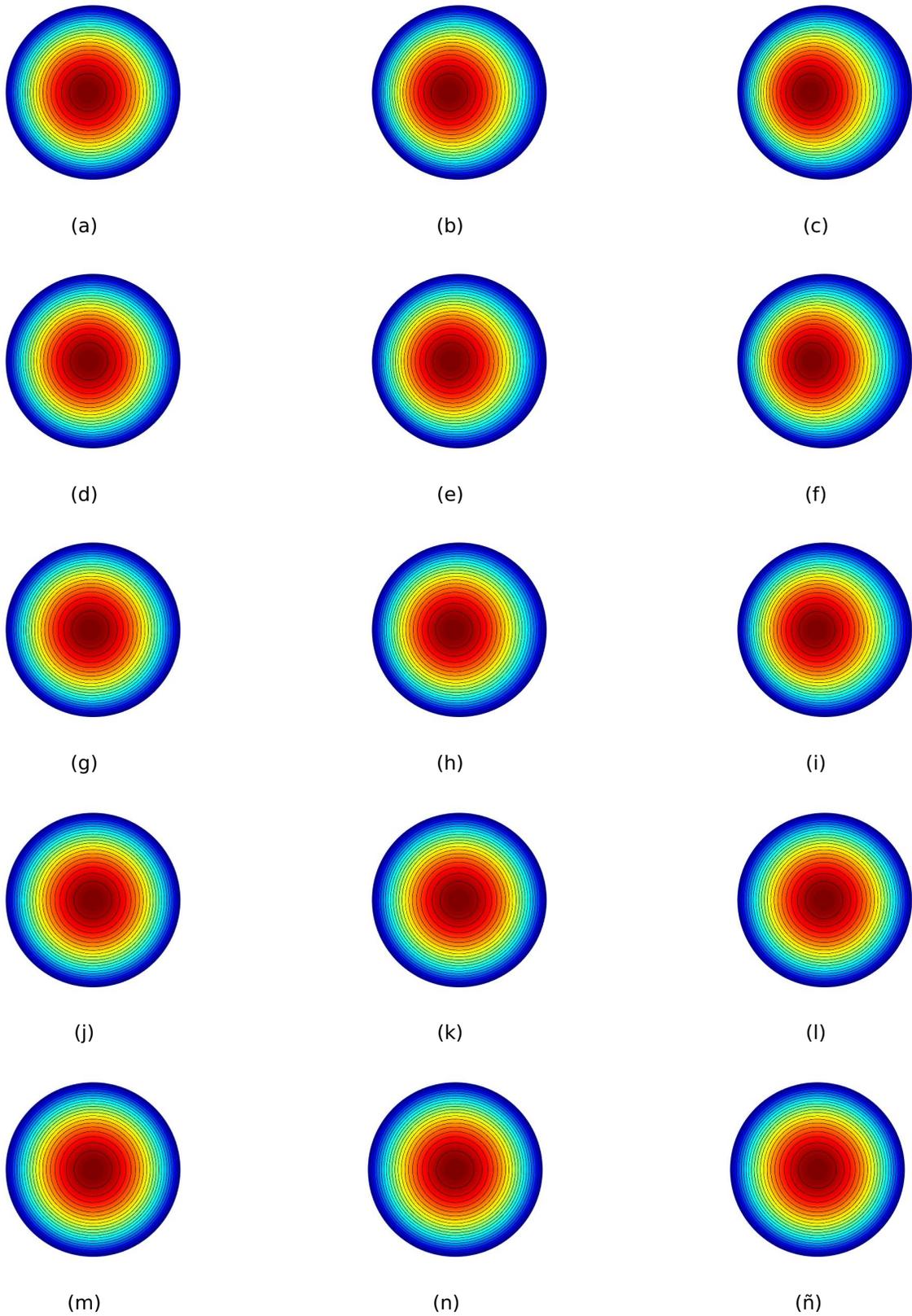


Figura 12. $\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_\epsilon + \eta \psi_\eta$ para diferentes valores del paso de la hélice ($P = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$, de arriba hacia abajo) y del radio del remolino ($\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$, de izquierda a derecha). Los valores de los parámetros adimensionales ϵ y η son mostrados en la Tabla 1.

La Figura 13 muestra los valores del desplazamiento del valor máximo de la función de corriente ψ_0 en función de ϵ .

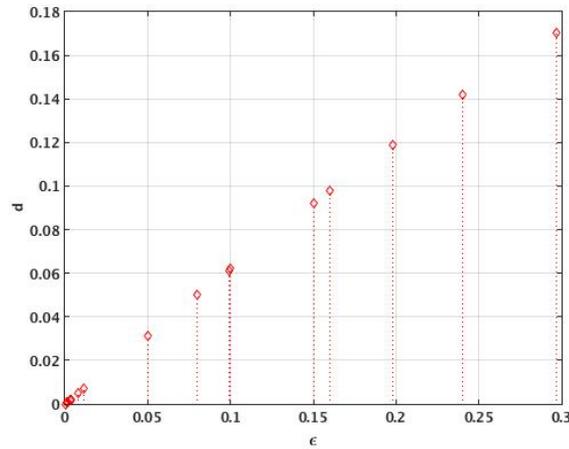


Figura 13. Desplazamiento del valor máximo de la función de corriente ψ_0 en función de ϵ .

A continuación mostramos la componente axial del vector de velocidad.

5.2. La componente axial del vector de velocidad

La Figura 14 muestra la componente axial del vector de velocidad w_η .

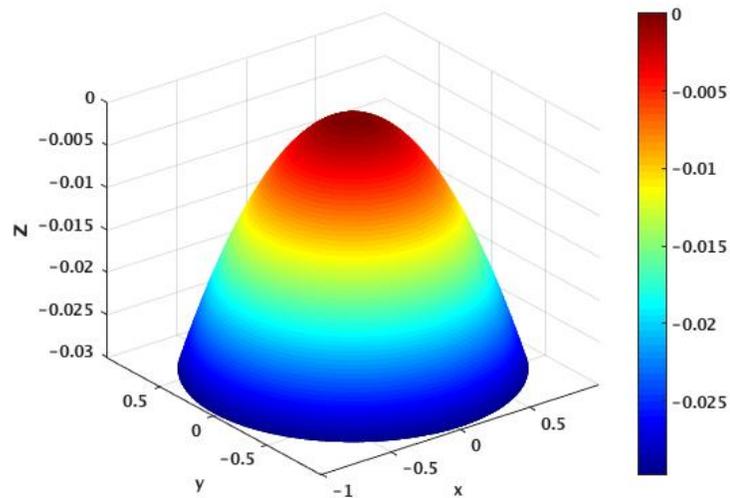


Figura 14. Componente axial del vector de velocidad w_η : $H(r) = -r^2$, $\eta = 0.0297$.

Esta componente del vector de velocidad es de orden η , es decir, es debida a la torsión.

A continuación mostramos los campos de vorticidad de orden ϵ y η .

5.3. El vector de vorticidad

5.3.1. Vorticidad de orden ϵ

En la Figura 15 mostramos la componente axial del vector de vorticidad de orden ϵ , es decir, $\omega_{s\epsilon}$.

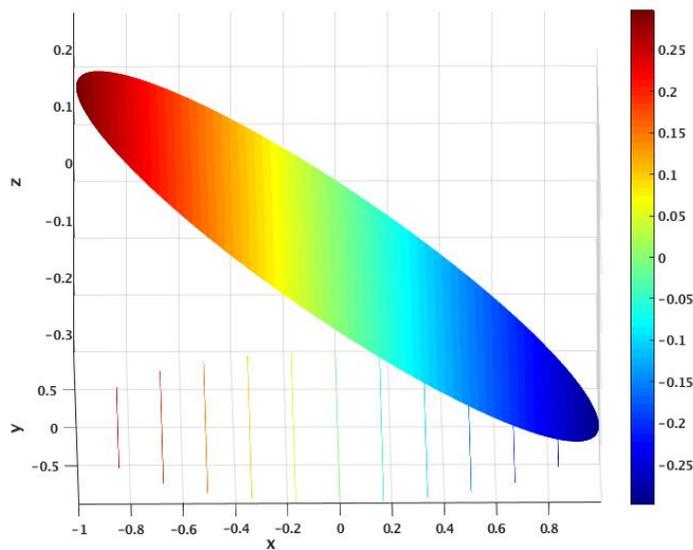


Figura 15. Componente axial del vector de vector de vorticidad $\omega_{s\epsilon}$.

Observamos que la vorticidad varía linealmente con la distancia al centro de curvatura, ya que el vector $\mathbf{n}(s)$ apunta hacia el centro de curvatura en el sentido de los valores positivos del eje x . Además, notemos que a orden 0 la vorticidad es constante, mientras que a orden ϵ es una función lineal. Este último es debido a la curvatura.

5.3.2. Vorticidad de orden η

La Figura 16 muestra el campo de vorticidad de orden η en la sección transversal del vórtice helicoidal.

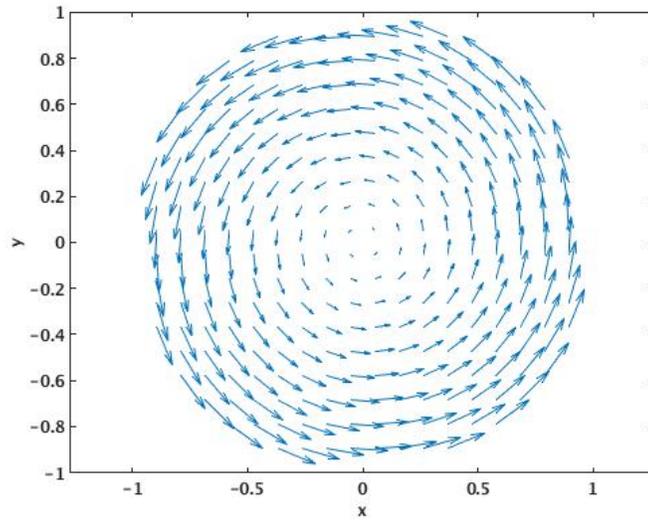


Figura 16. Campo de vorticidad de orden η en la sección transversal del vórtice helicoidal. El eje de la hélice está en la dirección positiva del eje x .

En la Figura anterior consideramos $H(r) = -r^2$ en w_η .

Las conclusiones más significativas de esta tesis las presentamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 6. Conclusiones

En un sistema de coordenadas ortogonal podemos deducir las ecuaciones gobernantes de forma inmediata utilizando factores de escala (Batchelor, 1967), sin embargo, el sistema de coordenadas helicoidal no es ortogonal lo que implica el desarrollo de las ecuaciones gobernantes utilizando el análisis tensorial. En esta tesis utilizamos la metodología propuesta por Bolinder (1996a) y deducimos las ecuaciones gobernantes en un sistema de coordenadas helicoidal para obtener el campo de velocidad y la distribución de vorticidad en la sección transversal de un vórtice helicoidal.

Recuperamos, para un vórtice toroidal, un par de celdas contra rotativas. Esta estructura de dos celdas es análoga a la mostrada por Dean (1927, 1928). Por otro lado, el efecto debido sólo a la torsión muestra una estructura axialmente simétrica.

Obtenemos la pseudo función de corriente para un vórtice helicoidal, la cual evaluamos para valores diferentes de los parámetros adimensionales ϵ y η . Encontramos que la curvatura es la responsable del desplazamiento del valor máximo de la función de corriente del vórtice de Rankine, dicho desplazamiento es en dirección negativa del eje x , en otras palabras, en dirección contraria al centro de curvatura.

Observamos que la curvatura es responsable de que la vorticidad $\omega_{s\epsilon}$ varíe linealmente con la distancia al centro de curvatura.

Conseguimos una expresión analítica arbitraria para la componente axial del vector de velocidad. Si dicha expresión es cero entonces las componentes del vector de vorticidad, en la sección transversal del vórtice, son nulas. Si es una función cuadrática del radio de la sección transversal del vórtice, entonces las componentes del vector de vorticidad son diferentes de cero.

La helicidad mide qué tan eslabonadas o anudadas están las líneas de vorticidad. Ésta es una integral sobre el dominio del fluido y se calcula como $\mathcal{H} = \int \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} dV$ (Moffatt, 2017). Si la expresión analítica para la componente axial del vector de velocidad es cero entonces $\mathcal{H} = 0$. Si es una función cuadrática, entonces $\mathcal{H} = \frac{2}{15} \eta^2 \omega_0^2 a^3 \pi$.

Literatura citada

- Batchelor, G. K. 1967 . *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Boersma, J. y Wood, D. H. 1999 . On the self-induced motion of a helical vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, **384**: 263–279.
- Bolinder, C. J. 1996a . Curvilinear coordinates and physical components: an application to the problem of viscous flow and heat transfer in smoothly curved ducts. *Journal of Applied Mechanics*, **63**(4): 985–989.
- Bolinder, C. J. 1996b . First-and higher-order effects of curvature and torsion on the flow in a helical rectangular duct. *Journal of fluid mechanics*, **314**: 113–138.
- Da Rios, L. S. 1906 . Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, **22**(1): 117–135.
- Da Rios, L. S. 1916 . Vortici ad elica. *Il Nuovo Cimento (1911-1923)*, **11**(1): 419–432.
- Dean, W. R. 1927 . Note on the motion of fluid in a curved pipe. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **4**(20): 208–223.
- Dean, W. R. 1928 . The stream-line motion of fluid in a curved pipe (second paper). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **5**(30): 673–695.
- Fukumoto, Y. 2002 . Three-dimensional motion of a vortex filament and its relation to the localized induction hierarchy. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **29**(2): 167–171.
- Germano, M. 1982 . On the effect of torsion on a helical pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **125**: 1–8.
- Hardin, J. C. 1982 . The velocity field induced by a helical vortex filament. *The Physics of Fluids*, **25**(11): 1949–1952 (1867).
- Helmholtz, H. 1858 . Über integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Z. Reine Angew. Math.* **55**: 25-55 (Traducido al inglés por P.G. Tait (1867)). *Phil. Mag*, **33**: 485–512.
- Joukowski, N. E. 1912 . Vihrevaja teorija grebnogo vinta. *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lubitelei Estestvoznaniya*, **16**: 1–31.
- Kao, H. C. 1987 . Torsion effect on fully developed flow in a helical pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, **184**: 335–356.
- Kuibin, P. A. y Okulov, V. L. 1998 . Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of a helical vortex filament. *Physics of Fluids*, **10**(3): 607–614.
- Larrabee, E. E. 1980 . The screw propeller. *Scientific American*, **243**(1): 134–149.
- Levy, H. y Forsdyke, A. G. 1928 . The steady motion and stability of a helical vortex. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **120**(786): 670–690.
- Mezić, I., Leonard, A., y Wiggins, S. 1998 . Regular and chaotic particle motion near a helical vortex filament. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **111**(1-4): 179–201.

- Moffatt, H. K. 2017 . Helicity—invariant even in a viscous fluid. *Science*, **357**(6350): 448–449.
- Murata, S., Yutaka, M., Inaba, T., y Ogawa, H. 1981 . Laminar flow in a helically coiled pipe. *Bulletin of JSME*, **24**(188): 355–362.
- Narasimhan, M. N. L. 1993 . *Principles of continuum mechanics*. Wiley-Interscience.
- NASA 2018 . Recuperado de: <https://www.nasa.gov>, 30 de Octubre de 2018.
- Ortega-Jimenez, V. M., Badger, M., Wang, H., y Dudley, R. 2016 . Into rude air: hummingbird flight performance in variable aerial environments. *Phil. Trans. R. Soc. B*, **371**(1704): 20150387.
- Ricca, R. L. 1994 . The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament. *Journal of Fluid Mechanics*, **273**: 241–259.
- Thomson, W. 1867 . The translatory velocity of a circular vortex ring. *Phil. Mag.*, **33**: 511–512.
- Thomson, W. 1880 . Vibrations of a columnar vortex. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **10**(61): 155–168.
- Tuttle, E. R. 1990 . Laminar flow in twisted pipes. *Journal of Fluid Mechanics*, **219**: 545–570.
- Van Dyke, M. 1964 . *Perturbation methods in fluid mechanics*, Vol. 8. Academic press New York.
- Velasco Fuentes, O. 2017 . *Effect of the Local Geometry on the Motion of Filamentary Vortices*. Seminario del posgrado en Oceanografía Física (CICESE).
- Velasco Fuentes, O. 2018a . Motion of a helical vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, **836**.
- Velasco Fuentes, O. 2018b . Flow topology of helical vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **842**.
- Velasco Fuentes, O. U. 2003 . ¡Larga vida al vórtice! *Ciencia y Desarrollo*, **29**: 23–29.
- Wang, C. Y. 1981 . On the low-Reynolds-number flow in a helical pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, **108**: 185–194.
- Widnall, S. E. 1972 . The stability of a helical vortex filament. *Journal of Fluid Mechanics*, **54**(4): 641–663.

Anexo

Las ecuaciones gobernantes

En este anexo aplicamos las fórmulas definidas en el capítulo 2 de esta tesis y escribimos en detalle las ecuaciones de Euler, de vorticidad y de conservación de masa. Por lo tanto, a continuación se calculan los vectores base naturales, la métrica fundamental del sistema coordenado, los vectores base recíprocos y los coeficientes E_{ijk} y γ_i^j .

Los vectores base naturales

Sean $\chi^1 = s$, $\chi^2 = x$, $\chi^3 = y$ las coordenadas curvilíneas, $v_1 = w$, $v_2 = u$, $v_3 = v$ las componentes del vector velocidad y $\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$ la base física, entonces el vector de posición \mathbf{r} de puntos en el vórtice tubular está dado por

$$\mathbf{r}(s, x, y) = \mathbf{r}_c(s) + x\mathbf{n} + y\mathbf{b}$$

y su diferencial es

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy.$$

Las derivadas parciales en la expresión anterior son los llamados vectores base naturales del sistema coordenado (s, x, y) . Calculemos entonces el diferencial del vector de posición

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + x \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} + y \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right] ds + \left[\frac{\partial}{\partial x} [x\mathbf{n}] \right] dx + \left[\frac{\partial}{\partial y} [y\mathbf{b}] \right] dy \\ &= \left[\mathbf{t} + x[\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}] + y[-\tau\mathbf{n}] \right] ds + \mathbf{n} dx + \mathbf{b} dy \\ &= \left[(1 - \kappa x)\mathbf{t} - \tau y\mathbf{n} + \tau x\mathbf{b} \right] ds + \mathbf{n} dx + \mathbf{b} dy, \end{aligned}$$

por lo tanto los vectores base naturales son

$$\mathbf{a}_s = (1 - \kappa x)\mathbf{t} - \tau y \mathbf{n} + \tau x \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{n},$$

$$\mathbf{a}_y = \mathbf{b}.$$

La métrica fundamental del sistema coordenado

Podemos reescribir a $d\mathbf{r}$ como

$$d\mathbf{r} = M ds \mathbf{t} + (dx - \tau y ds) \mathbf{n} + (dy + \tau x ds) \mathbf{b},$$

con $M = 1 - \kappa x$. Entonces la métrica fundamental del sistema coordenado se escribe como:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} M ds \\ dx - \tau y ds \\ dy + \tau x ds \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M ds \\ dx - \tau y ds \\ dy + \tau x ds \end{pmatrix} \\ &= M^2 (ds)^2 + (\tau y)^2 (ds)^2 + (\tau x)^2 (ds)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + 2\tau x dy ds - 2\tau y ds dx \\ &= [M^2 + \tau^2 y^2 + \tau^2 x^2] (ds)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + 2\tau x dy ds - 2\tau y ds dx. \end{aligned}$$

Los dos últimos términos en la expresión anterior indican que, a menos que $\tau = 0$, el sistema de coordenadas (s, x, y) no es ortogonal y escribimos el tensor métrico fundamental como

$$(g_{kl}) = \begin{pmatrix} M^2 + \tau^2 y^2 + \tau^2 x^2 & -\tau y & \tau x \\ -\tau y & 1 & 0 \\ \tau x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuya inversa está dada por

$$(g^{kl}) = \frac{1}{M^2} \begin{pmatrix} 1 & \tau y & -\tau x \\ \tau y & M^2 + \tau^2 y^2 & -\tau^2 xy \\ -\tau x & -\tau^2 xy & M^2 + \tau^2 x^2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores base recíprocos

Los vectores base recíprocos pueden ser obtenidos a partir de $\mathbf{a}^k = g^{kl}\mathbf{a}_l$, entonces

$$\mathbf{a}^s = g^{11}\mathbf{a}_s + g^{21}\mathbf{a}_x + g^{31}\mathbf{a}_y,$$

$$\mathbf{a}^x = g^{12}\mathbf{a}_s + g^{22}\mathbf{a}_x + g^{32}\mathbf{a}_y,$$

$$\mathbf{a}^y = g^{13}\mathbf{a}_s + g^{23}\mathbf{a}_x + g^{33}\mathbf{a}_y.$$

Calculemos dichos vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^s &= [Mt - \tau y \mathbf{n} + \tau x \mathbf{b}] \frac{1}{M^2} + \frac{\tau y}{M^2} \mathbf{n} - \frac{\tau x}{M^2} \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{t} - \frac{\tau y}{M^2} \mathbf{n} + \frac{\tau x}{M^2} \mathbf{b} + \frac{\tau y}{M^2} \mathbf{n} - \frac{\tau x}{M^2} \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^x &= [Mt - \tau y \mathbf{n} + \tau x \mathbf{b}] \frac{\tau y}{M^2} + \frac{M^2 + \tau^2 y^2}{M^2} \mathbf{n} - \frac{\tau^2 xy}{M^2} \mathbf{b} \\ &= \frac{\tau y}{M} \mathbf{t} - \frac{\tau^2 y^2}{M^2} \mathbf{n} + \frac{\tau^2 xy}{M^2} \mathbf{b} + \frac{M^2 + \tau^2 y^2}{M^2} \mathbf{n} - \frac{\tau^2 xy}{M^2} \mathbf{b} \\ &= \frac{\tau y}{M} \mathbf{t} + \mathbf{n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^y &= -[Mt - \tau y \mathbf{n} + \tau x \mathbf{b}] \frac{\tau x}{M^2} - \frac{\tau^2 xy}{M^2} \mathbf{n} + \frac{M^2 + \tau^2 x^2}{M^2} \mathbf{b} \\ &= -\frac{\tau x}{M} \mathbf{t} + \frac{\tau^2 xy}{M^2} \mathbf{n} - \frac{\tau^2 x^2}{M^2} \mathbf{b} - \frac{\tau^2 xy}{M^2} \mathbf{n} + \frac{M^2 + \tau^2 x^2}{M^2} \mathbf{b} \\ &= -\frac{\tau x}{M} \mathbf{t} + \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Los coeficientes E_{ijk} y γ_i^j

Los coeficientes E_{ijk} y γ_i^j fueron definidos en el capítulo 2. A continuación calculamos aquellos que no son nulos, comenzamos con los γ_i^j y recordemos que $\gamma_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}^j$,

entonces

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^1 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}^1 \\
 &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}^s \\
 &= \frac{1}{M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) \\
 &= \frac{1}{M'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_2^2 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{a}^2 \\
 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^x \\
 &= \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\tau_y}{M} \mathbf{t} + \mathbf{n} \right) \\
 &= \left(\frac{\tau_y}{M} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_3^3 &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}^3 \\
 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^y \\
 &= \mathbf{b} \cdot \left(-\frac{\tau_x}{M} \mathbf{t} + \mathbf{b} \right) \\
 &= -\left(\frac{\tau_x}{M} \right) \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}^2 \\
&= \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}^x \\
&= \mathbf{t} \cdot \left(\frac{\tau y}{M} \mathbf{t} + \mathbf{n} \right) \\
&= \left(\frac{\tau y}{M} \right) \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \\
&= \frac{\tau y}{M},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^3 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}^3 \\
&= \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}^y \\
&= \mathbf{t} \cdot \left(-\frac{\tau x}{M} \mathbf{t} + \mathbf{b} \right) \\
&= -\left(\frac{\tau x}{M} \right) \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \\
&= -\frac{\tau x}{M}.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos los coeficientes E_{ijk} , recordemos que $E_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \chi^k}$, entonces

$$\begin{aligned}
E_{121} &= \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \chi^1} \\
&= \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} \\
&= \mathbf{t} \cdot (\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) \\
&= \tau (\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}) - \kappa (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) \\
&= -\kappa,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{211} &= \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \chi^1} \\
 &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} \\
 &= \mathbf{n} \cdot (\kappa \mathbf{n}) \\
 &= \kappa (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \\
 &= \kappa,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{321} &= \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \chi^1} \\
 &= \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} \\
 &= \mathbf{b} \cdot (\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}) \\
 &= \tau (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \kappa (\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}) \\
 &= \tau,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{231} &= \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \chi^1} \\
 &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \\
 &= \mathbf{n} \cdot (-\tau \mathbf{n}) \\
 &= -\tau (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \\
 &= -\tau.
 \end{aligned}$$

La ecuación de conservación de masa

Para escribir la ecuación de conservación de masa utilizamos la definición de divergencia de un vector dada en (13). Entonces de forma general tenemos que las

componentes de la divergencia de un vector \mathbf{v} son

$$[\text{div } \mathbf{v}]_1 = \frac{\partial}{\partial \chi^1}(\sqrt{g}v_1\gamma_1^1) + \frac{\partial}{\partial \chi^1}(\sqrt{g}v_2\gamma_2^1) + \frac{\partial}{\partial \chi^1}(\sqrt{g}v_3\gamma_3^1),$$

$$[\text{div } \mathbf{v}]_2 = \frac{\partial}{\partial \chi^2}(\sqrt{g}v_1\gamma_1^2) + \frac{\partial}{\partial \chi^2}(\sqrt{g}v_2\gamma_2^2) + \frac{\partial}{\partial \chi^2}(\sqrt{g}v_3\gamma_3^2),$$

$$[\text{div } \mathbf{v}]_3 = \frac{\partial}{\partial \chi^3}(\sqrt{g}v_1\gamma_1^3) + \frac{\partial}{\partial \chi^3}(\sqrt{g}v_2\gamma_2^3) + \frac{\partial}{\partial \chi^3}(\sqrt{g}v_3\gamma_3^3).$$

Calculemos a g

$$\begin{aligned} g &= \det(g_{kl}) \\ &= \begin{vmatrix} M^2 + \tau^2 y^2 + \tau^2 x^2 & -\tau y & \tau x \\ -\tau y & 1 & 0 \\ \tau x & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= M^2, \end{aligned}$$

entonces $\sqrt{g} = M$.

Utilizamos las expresiones anteriores y tenemos que las componentes de $\text{div } \mathbf{v}$ se escriben como

$$[\text{div } \mathbf{v}]_1 = \frac{\partial w}{\partial s},$$

$$[\text{div } \mathbf{v}]_2 = \frac{\partial}{\partial x}[Mu + \tau y w],$$

$$[\text{div } \mathbf{v}]_3 = \frac{\partial}{\partial y}[Mv - \tau x w].$$

Por lo tanto, poniendo todo junto y considerando un flujo completamente desarrollado, es decir, la velocidad no depende de la coordenada axial s ni del tiempo t , la ecuación de conservación de masa se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial x}[Mu + \tau y w] + \frac{\partial}{\partial y}[Mv - \tau x w] = 0.$$

El gradiente de presión

A continuación escribimos el gradiente de presión. Tomamos en cuenta la definición del gradiente de un escalar dada en (12). Entonces de forma general para un campo escalar f dado tenemos que

$$[\nabla f]_1 = \frac{\partial f}{\partial \chi^1} \gamma_1^1 + \frac{\partial f}{\partial \chi^2} \gamma_1^2 + \frac{\partial f}{\partial \chi^3} \gamma_1^3,$$

$$[\nabla f]_2 = \frac{\partial f}{\partial \chi^1} \gamma_2^1 + \frac{\partial f}{\partial \chi^2} \gamma_2^2 + \frac{\partial f}{\partial \chi^3} \gamma_2^3,$$

$$[\nabla f]_3 = \frac{\partial f}{\partial \chi^1} \gamma_3^1 + \frac{\partial f}{\partial \chi^2} \gamma_3^2 + \frac{\partial f}{\partial \chi^3} \gamma_3^3.$$

Utilizamos las expresiones anteriores y tenemos que las componentes de $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ se escriben como

$$\left[-\frac{1}{\rho} \nabla p \right]_1 = -\frac{1}{M} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial s} + \tau y \frac{\partial p}{\partial x} - \tau x \frac{\partial p}{\partial y} \right],$$

$$\left[-\frac{1}{\rho} \nabla p \right]_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\left[-\frac{1}{\rho} \nabla p \right]_3 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

La ecuación de Euler

Para el caso de un flujo completamente desarrollado tenemos que las componentes de la ecuación de Euler, pueden ser obtenidas a partir de la siguiente expresión

$$\gamma_j^k \left(\frac{\partial v_i}{\partial \chi^k} - v_l E_{lik} \right) v_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \chi^j} \gamma_i^j,$$

donde el lado derecho de la igualdad fue obtenido anteriormente. Dado que el lado izquierdo de la igualdad anterior tiene 4 índices: i, j, l y k fijamos uno de ellos y recorremos los valores de los restantes para obtener una de las componentes. Las otras dos pueden ser obtenidas de forma análoga al recorrer los valores del primer índice

fijado. Entonces tenemos que

$$\left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]_1 = \gamma_j^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_l E_{l1k} \right) v_j.$$

Recorramos el índice j

$$\left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]_1 = \gamma_1^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_l E_{l1k} \right) v_1 + \gamma_2^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_l E_{l1k} \right) v_2 + \gamma_3^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_l E_{l1k} \right) v_3.$$

Ahora el índice l y tenemos que $\left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]_1 =$

$$\begin{aligned} & \gamma_1^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_1 E_{11k} \right) v_1 + \gamma_2^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_1 E_{11k} \right) v_2 + \gamma_3^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_1 E_{11k} \right) v_3 + \\ & \gamma_1^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_2 E_{21k} \right) v_1 + \gamma_2^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_2 E_{21k} \right) v_2 + \gamma_3^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_2 E_{21k} \right) v_3 + \\ & \gamma_1^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_3 E_{31k} \right) v_1 + \gamma_2^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_3 E_{31k} \right) v_2 + \gamma_3^k \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^k} - v_3 E_{31k} \right) v_3. \end{aligned}$$

Finalmente el índice k $\left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right]_1 =$

$$\begin{aligned}
& \gamma_1^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_1 E_{111} \right) v_1 + \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_1 E_{111} \right) v_2 + \gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_1 E_{111} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_2 E_{211} \right) v_1 + \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_2 E_{211} \right) v_2 + \gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_2 E_{211} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_3 E_{311} \right) v_1 + \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_3 E_{311} \right) v_2 + \gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^1} - v_3 E_{311} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_1 E_{112} \right) v_1 + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_1 E_{112} \right) v_2 + \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_1 E_{112} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_2 E_{212} \right) v_1 + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_2 E_{212} \right) v_2 + \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_2 E_{212} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_3 E_{312} \right) v_1 + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_3 E_{312} \right) v_2 + \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^2} - v_3 E_{312} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_1 E_{113} \right) v_1 + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_1 E_{113} \right) v_2 + \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_1 E_{113} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_2 E_{213} \right) v_1 + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_2 E_{213} \right) v_2 + \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_2 E_{213} \right) v_3 + \\
& \gamma_1^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_3 E_{313} \right) v_1 + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_3 E_{313} \right) v_2 + \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi^3} - v_3 E_{313} \right) v_3.
\end{aligned}$$

Observamos que la expresión anterior tiene veintisiete términos, entonces recorreremos los valores del índice i y tenemos las otras dos componentes, donde cada una tendrá veintisiete términos. Sustituimos los valores de los coeficientes E_{ijk} y γ_i^j , igualamos cada componente con su respectiva componente del gradiente de presión y obtenemos que las componentes de la ecuación de Euler, se escriben como

$$\begin{aligned}
\left(u + \frac{\tau y}{M} w \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w \right) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\kappa}{M} w u &= -\frac{1}{\rho M} \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \tau y \frac{\partial p}{\partial x} - \tau x \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\
\left(u + \frac{\tau y}{M} w \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{M} w (\kappa w - \tau v) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\
\left(u + \frac{\tau y}{M} w \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\tau}{M} w u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.
\end{aligned}$$

La ecuación de vorticidad

Nuevamente consideramos el caso de un flujo completamente desarrollado, entonces las componentes de la ecuación de vorticidad, es decir, el rotacional de la ecuación de Euler, pueden ser obtenidas a partir de la siguiente expresión:

$$\gamma_j^k \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \chi^k} - \omega_l E_{lik} \right) v_j = \gamma_j^k \left(\frac{\partial v_i}{\partial \chi^k} - v_l E_{lik} \right) \omega_j.$$

Nuevamente usamos la estrategia mostrada en secciones anteriores para obtener en detalle las componentes de dicha ecuación. Observamos que cada lado de la igualdad anterior tiene veintisiete componentes para cada valor del índice que elegimos fijo i . Entonces las componentes de la ecuación de vorticidad se escriben como sigue

$$\begin{aligned} \left(u + \frac{\tau y}{M} w \right) \frac{\partial \omega_s}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w \right) \frac{\partial \omega_s}{\partial y} - \frac{\kappa}{M} \omega_x w &= \\ \left(\omega_x + \frac{\tau y}{M} \omega_s \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\omega_y - \frac{\tau x}{M} \omega_s \right) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\kappa}{M} \omega_s u, & \\ \left(u + \frac{\tau y}{M} w \right) \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w \right) \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{w}{M} (\omega_s \kappa - \omega_y \tau) &= \\ \left(\omega_x + \frac{\tau y}{M} \omega_s \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\omega_y - \frac{\tau x}{M} \omega_s \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\omega_s}{M} (w \kappa - v \tau), & \\ \left(u + \frac{\tau y}{M} w \right) \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \left(v - \frac{\tau x}{M} w \right) \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\tau}{M} \omega_x w &= \\ \left(\omega_x + \frac{\tau y}{M} \omega_s \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\omega_y - \frac{\tau x}{M} \omega_s \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\tau}{M} \omega_s u, & \end{aligned}$$

donde ω_s , ω_x , y ω_y son las componentes del vector de vorticidad $\boldsymbol{\omega}$.

El rotacional del vector \mathbf{v}

Para calcular el rotacional del vector \mathbf{v} utilizamos la definición (15) y recordamos que el tensor alternante, definido anteriormente, es un tensor de rango 3 el cual tiene seis componentes no nulas, entonces fijamos un índice y elegimos los otros dos índices de tal manera que el tensor alternante tenga un valor no nulo. Entonces si fijamos el índice i tenemos

$$[\text{rot } \mathbf{v}]_1 = \epsilon_{123} \gamma_2^l \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^l} - v_m E_{m3l} \right),$$

donde $\epsilon_{123} = 1$. Recorramos ahora el índice l , entonces

$$[\text{rot } \mathbf{v}]_1 = \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^1} - v_m E_{m31} \right) + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^2} - v_m E_{m32} \right) + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^3} - v_m E_{m33} \right).$$

Finalmente el índice m y tenemos que $[\text{rot } \mathbf{v}]_1 =$

$$\begin{aligned} & \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^1} - v_1 E_{131} \right) + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^2} - v_1 E_{132} \right) + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^3} - v_1 E_{133} \right) + \\ & \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^1} - v_2 E_{231} \right) + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^2} - v_2 E_{232} \right) + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^3} - v_2 E_{233} \right) + \\ & \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^1} - v_3 E_{331} \right) + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^2} - v_3 E_{332} \right) + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^3} - v_3 E_{333} \right). \end{aligned}$$

Pero para $i = 1$ también tenemos $j = 3$ y $k = 2$ entonces

$$[\text{rot } \mathbf{v}]_1 = \epsilon_{132} \gamma_3^l \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^l} - v_m E_{m2l} \right),$$

donde $\epsilon_{132} = -1$. Recorramos el índice l

$$[\text{rot } \mathbf{v}]_1 = -\gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^1} - v_m E_{m21} \right) - \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^2} - v_m E_{m22} \right) - \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^3} - v_m E_{m23} \right).$$

Ahora el índice m y tenemos que $[\text{rot } \mathbf{v}]_1 =$

$$\begin{aligned} & -\gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^1} - v_1 E_{121} \right) - \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^2} - v_1 E_{122} \right) - \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^3} - v_1 E_{123} \right) \\ & -\gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^1} - v_2 E_{221} \right) - \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^2} - v_2 E_{222} \right) - \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^3} - v_2 E_{223} \right) \\ & -\gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^1} - v_3 E_{321} \right) - \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^2} - v_3 E_{322} \right) - \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^3} - v_3 E_{323} \right). \end{aligned}$$

Poniendo todo junto tenemos que $[\text{rot } \mathbf{v}]_1 =$

$$\begin{aligned} & \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^1} - v_1 E_{131} \right) + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^2} - v_1 E_{132} \right) + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^3} - v_1 E_{133} \right) + \\ & \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^1} - v_2 E_{231} \right) + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^2} - v_2 E_{232} \right) + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^3} - v_2 E_{233} \right) + \\ & \gamma_2^1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^1} - v_3 E_{331} \right) + \gamma_2^2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^2} - v_3 E_{332} \right) + \gamma_2^3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \chi^3} - v_3 E_{333} \right) \\ & - \gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^1} - v_1 E_{121} \right) - \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^2} - v_1 E_{122} \right) - \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^3} - v_1 E_{123} \right) \\ & - \gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^1} - v_2 E_{221} \right) - \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^2} - v_2 E_{222} \right) - \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^3} - v_2 E_{223} \right) \\ & - \gamma_3^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^1} - v_3 E_{321} \right) - \gamma_3^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^2} - v_3 E_{322} \right) - \gamma_3^3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi^3} - v_3 E_{323} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega_1 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

De manera análoga obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{M} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\tau x}{M} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\tau y}{M} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u \tau}{M}, \\ \omega_3 &= \frac{1}{M} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w \kappa}{M} - \frac{\tau x}{M} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\tau y}{M} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v \tau}{M}. \end{aligned}$$

Las componentes del vector de vorticidad ω

A continuación escribimos las componentes del vector de vorticidad ω , es decir,

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\tau x}{M} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\tau y}{M} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u \tau}{M}, \\ \omega_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\tau x}{M} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\tau y}{M} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w \kappa}{M} - \frac{v \tau}{M}. \end{aligned}$$