

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN  
SUPERIOR DE ENSENADA, BAJA CALIFORNIA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

---

**Dinámica caótica en sistemas discontinuos en el plano.**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias

Presenta:

**José Guadalupe Castro Lugo**

Ensenada, Baja California, México

2014

Tesis defendida por

**José Guadalupe Castro Lugo**

y aprobada por el siguiente comité

---

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos  
*Director del Comité*

---

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Iouri Orlov Kuchina  
*Miembro del Comité*

---

Dr. David Isaías Rosas Almeida  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Fernando Verduzco González  
*Miembro del Comité*

---

Dr. César Cruz Hernández  
*Coordinador del Programa de  
Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*

---

Dr. Jesús Favela Vara  
*Director de Estudios de Posgrado*

Diciembre, 2014

Resumen de la tesis que presenta José Guadalupe Castro Lugo como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones.

### **Dinámica caótica en sistemas discontinuos en el plano.**

Resumen elaborado por:

---

José Guadalupe Castro Lugo

El estudio de los sistemas discontinuos es de gran interés ya que pueden aparecer de manera natural en el modelado de sistemas físicos, biológicos, etc; o surgen de forma intencionada al utilizar un control discontinuo. Dichos sistemas pueden producir diferentes comportamientos, como la existencia de soluciones múltiples, modos deslizantes, bifurcaciones no típicas, intervalo de equilibrios, convergencia en tiempo finito, robustez frente a incertidumbres y perturbaciones, entre otros. Sin embargo, uno de los fenómenos de gran interés es predecir la ocurrencia de órbitas caóticas.

Uno de los métodos más usados para predecir la ocurrencia de órbitas caóticas, en sistemas dinámicos no-autónomos suaves, es el método de Melnikov, el cual considera un sistema perturbado periódicamente, donde su parte nominal tiene un punto hiperbólico tipo silla, asociado a una trayectoria homoclínica. Las extensiones al caso no suave consideran que el punto de equilibrio tipo silla está ubicado fuera de la superficie de la discontinuidad y la órbita homoclínica asociada tenga cruces transversales.

Sin embargo, existen sistemas discontinuos para los cuales no es posible la aplicación del método de Melnikov, debido a que el punto de equilibrio se encuentra sobre la superficie de discontinuidad y la duración de órbita asociada a dicho punto es finita. Por lo tanto, para predecir la ocurrencia de órbitas caóticas en este tipo de sistemas, se propone el uso de un sistema aproximado para el cual es posible el uso del método de Melnikov.

Dado que los puntos de equilibrio del sistema discontinuo son los mismos que los del sistema aproximado, el hamiltoniano del sistema aproximado converge al hamiltoniano del sistema discontinuo, la solución del sistema aproximado puede estar tan cerca como se desee de la solución del sistema discontinuo cuando  $n$  (parámetro de la aproximación) es suficientemente grande, entonces podemos concluir que el sistema discontinuo presenta dinámica caótica. Además, la condición de Melnikov del sistema aproximado es válida para valores suficientemente grandes de  $n$ , y esta puede ser usada para predecir dinámica caótica en el sistema discontinuo.

Para confirmar las predicciones realizadas, se muestra el diagrama de bifurcación del sistema discontinuo y algunas gráficas de los atractores del sistema discontinuo para diferentes valores en los parámetros.

**Palabras Clave: Sistema seccionalmente lineal, Sistema discontinuo, Método de Melnikov sistemas no suaves.**

Abstract of the thesis presented by José Guadalupe Castro Lugo as a partial requirement to obtain the Doctor in Sciences in Electronics and Telecommunications.

## **Chaotic dynamic in discontinuous systems in the plane.**

Abstract by:

---

José Guadalupe Castro Lugo

The study of discontinuous systems is of great importance as they either appear naturally in the modeling of physical and biological systems, or arise intentionally by using discontinuous controllers. These systems could produce different dynamical behaviours, like the existence of multiple solutions, sliding modes, non-typical bifurcations, multiple intervals of equilibria, finite-time convergence, among others. However, one of the most interesting phenomena is to predict occurrences of chaotic orbits.

One of the most-used methods to predict the occurrence of chaotic orbits, in non-autonomous smooth dynamical systems, is the Melnikov's method, which considers a periodically perturbed system, whose nominal part has a saddle type hyperbolic point associated to an homoclinic trajectory. The extension to the non-smooth case considers that the equilibrium point is located outside of the discontinuous surface, and that the associated homoclinic orbit has transverse crosses.

However, there exist discontinuous systems for which the application of the Melnikov's method is not possible, since the equilibrium point is located on the discontinuous surface, and the duration of the associated orbit is finite. Therefore, to predict the occurrence of chaotic orbits in these systems, it is proposed the use of an approximated system for which the application of the Melnikov's method is possible.

Since the equilibrium points of both approximated and discontinuous systems are the same, the Hamiltonian of the former converges to the Hamiltonian of the latter, so the solution of the approximated system can be made as close as it is desired to the solution of the discontinuous system when a parameter  $n$  is large enough. Then, it can be concluded that the discontinuous system exhibits chaotic dynamics. Besides, the Melnikov's condition of the approximated system is valid for sufficiently large values of  $n$ , and it can be used to predict chaotic dynamics in the discontinuous system.

To confirm the developed predictions, the bifurcation diagram of the discontinuous system is shown, as well as its attractors for different values of the corresponding parameters.

**Keywords: Piecewise Smooth System, Discontinuous System, Melnikov Method for nonsmooth system.**

## Dedicatoria

*A Blanca mi esposa e hijos Joselyn y Diego su amor y apoyo me impulsaron en lograr esta meta, que es también de ustedes.*

*A mis padres Dora y Felipe; a mis hermanos Rocio, Dora, Felipe, Miguel, Jorge y Alejandro por todo su cariño y apoyo.*

## Agradecimientos

Al Dr. Joaquín Álvarez por toda su paciencia y apoyo en la realización de este trabajo. Y por todas sus enseñanzas en el ámbito profesional y personal.

A los miembros del comité de tesis: Dr. Fernando Verduzco, Dr. Alejandro Márquez, Dr. Iouri Orlov y Dr. David Rosas, por sus valiosos comentarios.

A mis amigos del cubo: Aniskuis, Rigini, el "Muchas", Aldini y Javoberto por que más que compañeros, hicimos una sólida amistad, gracias por los momentos que compartimos.

A Ollin y Anita por brindarme su amistad y su apoyo en todo momento.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada y todo su personal por todas las facilidades brindadas durante mi estancia como estudiante.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado. A todo el pueblo de México.

Al Instituto Tecnológico Superior de Cajeme por el apoyo económico y las facilidades brindadas para mi formación profesional.

# Tabla de contenido

	Página
<b>Resumen en español</b>	<b>iii</b>
<b>Resumen en inglés</b>	<b>iv</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>x</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Publicaciones derivadas de esta tesis . . . . .	5
<b>2. Fundamentación teórica</b>	<b>6</b>
2.1. Sistemas seccionalmente suaves . . . . .	6
2.2. Solución estándar y deslizante . . . . .	8
2.3. Método de Melnikov para sistemas no suaves . . . . .	9
<b>3. Sistema discontinuo tipo I</b>	<b>13</b>
3.1. Sistema discontinuo . . . . .	13
3.1.1. Puntos de equilibrio del sistema discontinuo . . . . .	15
3.1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	16
3.2. Sistema aproximado tipo I . . . . .	17
3.2.1. Puntos de equilibrio del sistema aproximado . . . . .	19
3.2.1.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	19
3.2.2. Función de Melnikov para el sistema aproximado . . . . .	20
3.3. Solución de los sistemas . . . . .	22
3.3.1. Solución del sistema discontinuo . . . . .	22
3.3.2. Solución del sistema aproximado . . . . .	24
3.3.3. Análisis de convergencia . . . . .	25
3.4. Diagrama de bifurcaciones . . . . .	26
3.5. Conclusiones . . . . .	29
<b>4. Sistema seccionalmente lineal en el plano</b>	<b>31</b>
4.1. Sistema seccionalmente lineal en el plano . . . . .	32
4.1.1. Puntos de equilibrio . . . . .	33
4.1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	34
4.1.3. Función de Melnikov . . . . .	35
4.1.4. Solución del sistema aproximado . . . . .	37
4.1.5. Análisis de convergencia . . . . .	38
4.1.6. Diagrama de bifurcación . . . . .	39
4.2. Conclusiones . . . . .	40
<b>5. Sistema discontinuo tipo II</b>	<b>42</b>
5.1. Planteamiento del problema . . . . .	42
5.2. Sistema discontinuo tipo II . . . . .	44

## Tabla de contenido (continuación)

5.3.	Sistema aproximado tipo II . . . . .	46
5.3.1.	Función de Melnikov . . . . .	47
5.4.	Solución analítica de los sistemas . . . . .	48
5.4.1.	Solución del sistema discontinuo tipo II . . . . .	49
5.4.2.	Solución del sistema aproximado tipo II . . . . .	51
5.5.	Resultados numéricos . . . . .	52
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>59</b>
	<b>Lista de referencias</b>	<b>65</b>

## Lista de figuras

Figura	Página
1. Órbitas del sistema (14) para diferentes valores de $C$ . . . . .	17
2. Órbita homoclínica del sistema aproximado ecuación (24) para valores de $n = 2, 100, 1000$ . . . . .	21
3. Solución exacta y numérica del ejemplo. . . . .	23
4. Diagrama de bifurcación para $\xi = 0.01, \omega = \frac{\pi}{10}, \alpha = 1$ del sistema discontinuo. . . . .	27
5. Diagrama de bifurcación para $r = 1.9, \omega = \frac{\pi}{10}, \alpha = 1$ del sistema discontinuo. . . . .	28
6. Atractores caóticos del sistema discontinuo, para valores fijos en los parámetros $\alpha = 1, \omega = 0.1\pi$ , y diferentes valores $\xi, r$ . . . . .	29
7. Órbitas del sistema no perturbado (44), para valores fijos en los parámetros $\xi = 0.01, \alpha = 1, r = 1, \omega = \frac{\pi}{10}$ y valores de $n = 2, 10, 100$ . . . . .	35
8. Diagrama de bifurcación del sistema discontinuo (11), y del sistema seccionalmente lineal (42) para diferentes valores en los parámetros. . . . .	40
9. Órbitas del sistema discontinuo tipo II (76) y del sistema aproximado tipo II (82), para $n = 100, 1000$ . . . . .	53
10. Diagrama de bifurcación del sistema aproximado ecuación (82) para $n = 2, 100, 1000$ , y sistema discontinuo ecuación (62), para $n = 2, 100, 1000, \delta = 0.001, \xi = 0.01, \omega = 3\pi/10$ , y $0 < r < 7.3$ . . . . .	55
11. Atractor del sistema discontinuo (62), para $\alpha = 2, \delta = 0.001, \xi = 0.01, \omega = 0.15\pi$ , y diferentes valores de $r$ . . . . .	55
12. Diagrama de bifurcación del sistema aproximado ecuación (82) para $n = 1000$ , y sistema discontinuo ecuación (62), para $\alpha = 2, \delta = 0.001, \xi = 0.01, r = 5$ , y $0 < \omega < 4.5$ . . . . .	56
13. Atractor del sistema discontinuo ecuación (62), para $\alpha = 2, \delta = 0.001, \xi = 0.01, r = 5$ y diferentes valores de $\omega$ . . . . .	57
14. Clasificación de la superficie de discontinuidad . . . . .	61
15. Atractores del sistema discontinuo, para valores fijos en los parámetros $\alpha = 1, \alpha = 2.9, \xi = 0.01, a = 1, \omega = 0.5\pi$ , y diferentes valores $b$ . . . . .	62
16. Atractores del sistema discontinuo, para valores fijos en los parámetros $\alpha = 1, \alpha = 2.9, \xi = 0.01, a = 1, \omega = 0.5\pi$ , y diferentes valores $b$ . . . . .	63

# Lista de tablas

Tabla

Página

1. Condición de Melnikov (87) para diferentes valores de  $n$  . . . . . 54

## Capítulo 1. Introducción

---

Las ecuaciones diferenciales con componentes no suaves se emplean en diversas situaciones. Se usan para modelar sistemas mecánicos, donde el movimiento de un cuerpo rígido es sujeto a saltos en la velocidad y fuerzas discontinuas como resultado de fricción o impacto (Brogliato, 1999; Awrejcewicz y Holicke, 1999). También están presentes en circuitos eléctricos o en sistemas biológicos, si las características no suaves se utilizan para representar conmutaciones. En problemas de control óptimo o controladores conmutados, por ejemplo, el control de temperatura de una recámara. En la manipulación robótica de objetos por medio de contacto mecánico, las discontinuidades se producen naturalmente de la interacción con el medio ambiente. Además, las discontinuidades también son intencionalmente diseñadas para lograr regulación y estabilización. El control por modos deslizantes usa un controlador por retroalimentación discontinuo para estabilización (Utkin, 1992). Más aún, muchos sistemas de control no pueden ser estabilizados por un control por retroalimentación de manera continua, por ejemplo, el sistema unidimensional (Sontag, 1998),  $\dot{x} = x[(u - 1)^2 - (x - 1)][(u + 1)^2 + (x - 2)]$ . Como consecuencia, es necesario considerar un control de retroalimentación discontinuo.

Los modelos que representan la dinámica de estos sistemas pueden escribirse como

$$\dot{x} = f_i(x, t), \quad \text{si } x \in D_i \subset \mathbb{R}^n, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, l\} \quad (1)$$

donde  $D_i$  es un abierto,  $D_i \cap D_j = \emptyset$  (conjunto vacío), para  $i \neq j$ ,  $\cup_{i \in I} \bar{D}_i = \mathbb{R}^n$ , donde  $\bar{D}_i$  es la cerradura de  $D_i$ , y  $\dot{x} \equiv dx/dt$ . Las fronteras de cada región  $D_i$  están bien definidas y constituyen superficies suaves, denominadas superficies de discontinuidad o conmutación, caracterizadas por funciones diferenciables  $H_j(x) = 0$ .

El sistema (1) se clasifica en tres tipos:

1. Sistemas continuos con jacobiano no suave. Estos sistemas son descritos por un campo vectorial continuo pero no suave.
2. Sistemas discontinuos o tipo Filippov. El campo vectorial de estos sistemas es discontinuo.

3. Sistemas híbridos. Estos surgen cuando se modela el fenómeno de impacto (no considerados en esta tesis).

Debido a que estos sistemas no son diferenciables, y en algunos casos son discontinuos, los métodos de la teoría de sistemas suaves no pueden ser aplicados. Para su estudio se han utilizado aproximaciones continuas (Danca y Codreanu, 2002; Awrejcewicz *et al.*, 2005). Si bien esta estrategia es apropiada en muchas situaciones, existen propiedades, ventajas y comportamientos típicos de los sistemas no suaves que no pueden reproducirse, como por ejemplo, la existencia de soluciones múltiples, de modos deslizantes, de bifurcaciones no típicas, intervalo de equilibrios, convergencia en tiempo finito, de robustez frente a incertidumbres y perturbaciones, entre otros. Otras herramientas de análisis son el método convexo de Filippov (Filippov, 1988), inclusiones diferenciales (Aubin y Cellina, 1984), herramientas numéricas (Awrejcewicz y Olejnik, 2002; Awrejcewicz y Dzyubak, 2005; Savi *et al.*, 2007; Danca, 2010; Dieci y Lopez, 2012), etc.

Existen una gran cantidad de publicaciones sobre sistemas discontinuos. La literatura en matemáticas estudia principalmente la existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales discontinuas (Filippov, 1988). Los trabajos de Filippov extienden una ecuación diferencial discontinua a una inclusión diferencial. Para más resultados al respecto pueden consultarse (Aubin y Cellina, 1984; Clarke, 1983). En Awrejcewicz y Holicke (1999); Leine y Van Campen (2002); di Bernardo *et al.* (2002) tratan con problemas con fricción seca como inclusión diferencial y la existencia de soluciones periódicas.

La teoría de bifurcaciones para sistemas discontinuos ha sido abordada en diferentes publicaciones; por ejemplo, para sistemas continuos pero no suaves o sistemas tipo Filippov podemos citar los trabajos de (di Bernardo *et al.*, 2008; Warwick, 2010; Kuznetsov *et al.*, 2003). Algo que ha interesado a la comunidad científica es predecir la ocurrencia de órbitas caóticas. Existen varias técnicas para reconocer y clasificar el comportamiento caótico. Estas técnicas incluyen la propuesta por Devaney (Devaney, 1989), exponentes de Lyapunov (Arrowsmith y Place, 1990; Wiggins, 2003), diagrama de bifurcación, método de Melnikov (Arrowsmith y Place, 1990; Wiggins, 2003), espectro de Fourier (Guzzo, 2006), el método de Li-Yorke (Li y Yorke, 1975), etc. Recientemente, se han realizado diferentes esfuerzos para extender la teoría del caos a sistemas discontinuos. Por ejemplo;

En (Kahng, 2009), se realiza una redefinición de caos en el sentido de Devaney para sistemas dinámicos no suaves. La extensión del cálculo de los exponentes de Lyapunov para sistemas dinámicos con discontinuidades está dada en (Müller, 1995). La extensión del método de Melnikov se ha presentado en (Awrejcewicz y Holicke, 1999; Kunze y Küpper, 2001; Kukučka, 2007; Battelli y Fečkan, 2010, 2012; Li *et al.*, 2014).

Particularmente, uno de los métodos mas usados para predecir la ocurrencia de órbitas caóticas en sistemas dinámicos no-autónomos suaves, es el método de Melnikov, el cual considera para su aplicación un sistema perturbado periódicamente, donde su parte nominal tiene un punto hiperbólico tipo silla, asociado a una trayectoria homoclínica (Arrowsmith y Place, 1990; Wiggins, 2003).

Por otra parte, para un sistema no suave, existe también una amplia literatura sobre el estudio de dinámica caótica usando el método de Melnikov. En (Awrejcewicz y Holicke, 1999; Pontes *et al.*, 2001), se realizó una formulación del método de Melnikov para sistemas mecánicos con fricción de Coulomb y viscosa, donde el término discontinuo dado por la fricción de Coulomb es considerado como perturbación. En general, el método de Melnikov para sistemas no suaves en el plano es presentado en (Kukučka, 2007; Shi *et al.*, 2013; Kunze, 2000), el cual considera que; el punto de equilibrio tipo silla debe estar fuera de la superficie de discontinuidad y la interacción de la órbita homoclínica con la superficie de discontinuidad debe ser transversal. Bajo estos supuestos, es posible obtener la llamada función de Melnikov para sistemas no suaves.

En (Battelli y Fečkan, 2012) se generaliza el resultado dado por (Kukučka, 2007; Shi *et al.*, 2013; Kunze, 2000), para órbitas homoclínicas con o sin deslizamiento. Finalmente, en (Li *et al.*, 2014) se presenta la función de Melnikov para sistemas seccionalmente suaves en el plano continuos, con parte nominal Hamiltoniana, y las hipótesis para la aplicación del método son las mismas que en los casos anteriores.

Sin embargo, existen sistemas discontinuos en el plano resultado, por ejemplo, de la aplicación de un control discontinuo, para los cuales no es posible la aplicación de las extensiones realizadas en (Kunze, 2000; Kukučka, 2007; Battelli y Fečkan, 2012; Shi *et al.*, 2013; Li *et al.*, 2014), dado que el punto de equilibrio tipo silla no se encuentra fuera

de la superficie de conmutación. Más aún, la órbita asociada a dicho punto tiene duración finita.

El objetivo general de este trabajo de tesis es contribuir al estudio de la dinámica compleja de una clase de sistemas con término discontinuos. Dichos términos pueden provenir de la dinámica natural del sistema bajo estudio (por ejemplo fricción de Coulomb), o agregados intencionalmente por medio de un controlador robusto discontinuo. En particular se propone el estudio de sistemas en el plano seccionalmente suaves, específicamente lineales, donde las regiones de discontinuidad dividen el plano en regiones disjuntas, para los cuales no es posible aplicar las técnicas clásicas de análisis de sistemas suaves ni algunas otras técnicas recientes, aplicables a sistemas discontinuos en una clase de sistemas seccionalmente suaves en el plano, los cuales tienen un punto de equilibrio sobre la superficie de discontinuidad. En particular, considerese que el sistema (1) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ax + f(x) + g(x, t),\end{aligned}\tag{2}$$

donde  $a = (a_1, a_2)$ ,  $x = (x_1, x_2)^T$ ,  $f$  discontinua y  $g$  periódica.

En el primer caso de estudio la discontinuidad podría ser originada por un control discontinuo, función de la posición, es decir,  $f(x) = \alpha \text{sign}(x_1)$ , para el estudio se usa una aproximación continua dada por la saturación. Posteriormente, se modifica la aproximación usada en el primer caso de estudio, lo que da origen a un sistema seccionalmente lineal, el cual tiene la característica de presentar órbitas homoclínicas no simétricas y, en el proceso al límite converge al sistema discontinuo. Para el segundo caso de estudio, se añade otro término discontinuo ahora en función de la velocidad, el cual podría representar la fricción de Coulomb, es decir, la discontinuidad está dada como  $f(x) = \alpha \text{sign}(x_1) - \delta \text{sign}(x_2)$ . Finalmente, se considera el caso general donde, la discontinuidad puede ser cualquier recta la cual pasa por el origen, es decir,  $f(x) = \alpha \text{sign}(ax_1 + bx_2)$ .

La organización del presente trabajo es la siguiente: en el capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas usadas para el desarrollo de esta investigación. El análisis de

la dinámica caótica para una clase de sistemas discontinuos en el plano, con un punto de equilibrio sobre la superficie de discontinuidad, se presenta en el capítulo 3. Enseguida se presenta, en el capítulo 4, el estudio de la dinámica caótica de un sistema seccionalmente lineal, el cual en el proceso al límite converge al sistema discontinuo analizado en el capítulo 3. Finalmente, en el capítulo 5 se tiene el estudio de la dinámica caótica para un sistema en el plano con dos discontinuidades.

### **1.1. Publicaciones derivadas de esta tesis**

1. Castro, J., Alvarez, J., “Melnikov-Type Chaos of Planar Systems with Two Discontinuities”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Aceptado.
2. Castro, J., Alvarez, J., Verduzco, F., “Chaotic behavior of a class of discontinuous systems”. *Sometido a Revista Mexicana de Física*.
3. Castro, J., Alvarez, J., Verduzco, F., (2012) “Continuous approximation of the complex dynamics of a discontinuous system”. *Cybernetics and Physics*. 1(1): 11-16 p.
4. Castro, J. y Alvarez, J. (2012). “Chaos in discontinuous system by using continuous approximation”. En: *Analysis and Control of Chaotic Systems*. Vol. 3, pp. 215–219. DOI 10.3182/20120620-3-MX-3012.00040.
5. Castro, J., Alvarez, J., “Uso de Aproximación Continua para Determinar Caos en Sistema Discontinuo ”. *Congreso Nacional de Control Automático, AMCA2011*. Saltillo, Coahuila, México.
6. Castro, J., Alvarez, J., Peñaloza-Mejia, O., “Predicción De Caos En Sistemas Discontinuos Forzados De Segundo Orden”. *XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014*. Cancún, Quintana Roo, México.

## Capítulo 2. Fundamentación teórica

---

En este capítulo se describe una breve introducción de las principales herramientas matemáticas utilizadas en el presente trabajo. En primer lugar se presenta una introducción a los sistemas seccionalmente suaves, la clasificación de los puntos de equilibrio y su solución. En segundo lugar se describe el método de Melnikov para sistemas no suaves, el cual es una herramienta analítica desarrollada para predecir el comportamiento caótico.

### 2.1. Sistemas seccionalmente suaves

Los sistemas seccionalmente suaves (PSS por sus siglas en inglés), se describen por un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) de la forma general:

$$\dot{x} = f_i(x), \quad \text{para } x \in D_i \subset \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

donde  $x$  representa los estados del sistema, los conjuntos  $D_i$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ , son regiones abiertas y disjuntas entre sí, las cuales están separadas por superficies de dimensión  $n - 1$ , conocidas como fronteras. Los campos vectoriales  $f_i(x)$  y las fronteras se consideran suaves y la unión de todas las fronteras  $\Sigma$ , junto con todas las regiones  $D_i$ , cubren todo el espacio de estados (Kuznetsov *et al.*, 2003; di Bernardo *et al.*, 2008; Jeffrey y Hogan, 2011).

Los PSS se clasifican como *continuos* si  $f_i(x) = f_j(x)$  en cualquier punto  $x$  de la frontera  $\Sigma_{ij}$  que separa a las regiones adyacentes  $D_i$  y  $D_j$ . En estos sistemas el vector  $\dot{x}$  está definido de manera única en cualquier punto del espacio de estado y las órbitas en la región  $D_i$  que se aproximan transversalmente a la frontera  $\Sigma_{ij}$ , la cruzan para entrar a la región adyacente  $D_j$ . Por otra parte, si  $f_i(x) \neq f_j(x)$  en cualquier punto  $x$  de la frontera  $\Sigma_{ij}$ , los PSS son llamados *discontinuos o sistemas de Filippov*. Particularmente, cuando las componentes transversales de  $f_i(x)$  y  $f_j(x)$  tienen la misma dirección, la órbita cruza la frontera, pero en el punto  $x$  de cruce se presenta una discontinuidad en su vector tangente. Por el contrario, si las componentes transversales de  $f_i(x)$  y  $f_j(x)$  tienen direcciones opuestas, el estado del sistema permanece en la frontera y dependiendo de

la dinámica sobre la superficie  $\Sigma_{ij}$ , las órbitas se deslizan o no sobre ella. El movimiento del sistema sobre la superficie  $\Sigma_{ij}$  se aproxima como la solución de la EDO's continua  $\dot{x} = g(x)$  definida sobre la superficie  $\Sigma_{ij}$ , donde  $g(x)$  es la combinación convexa entre  $f_i$  y  $f_j$  tangente a  $\Sigma_{ij}$  en  $x$  ver (Filippov, 1988). Por lo tanto, es de interés conocer el comportamiento de las órbitas sobre la superficie  $\Sigma_{ij}$ . Para ello considere el siguiente sistema discontinuo en el plano representado como:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in D_1; \\ f_2(x), & \text{si } x \in D_2; \end{cases} \quad (4)$$

donde la frontera de discontinuidad  $\Sigma$  se describe como  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = 0\}$ , siendo  $H$  una función escalar suave con gradiente no nulo  $\nabla H$  sobre  $\Sigma$ . Además, las regiones  $D_1$  y  $D_2$  se definen como  $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) < 0\}$  y  $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) > 0\}$  y las funciones  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , son funciones suaves.

Además, se define:

$$\sigma(x) = \langle \nabla H(x), f_1(x) \rangle \langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle; \quad (5)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota al producto punto y  $\langle \nabla H(x), f_i(x) \rangle$ ,  $x \in \Sigma$ , representa las proyecciones escalares (las componentes) de los campos vectoriales  $f_i$  sobre la normal de la superficie  $H(x)$ . La ecuación (5) permite clasificar los puntos sobre  $\Sigma$ .

Si  $\sigma(x) > 0$ ,  $x \in \Sigma$ , entonces las órbitas en  $D_1$  entrarán a la región  $D_2$  si  $\langle \nabla h(x), f_1(x) \rangle > 0$  y  $\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle > 0$ , o viceversa. Al conjunto de puntos para los cuales las órbitas cruzan la frontera  $\Sigma$  corresponde a  $\Sigma_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : \sigma(x) > 0\}$ , el cual en general es un conjunto abierto y se le denomina *conjunto de cruce*. Al complemento de  $\Sigma_c$  se le llama *conjunto deslizante*. Este conjunto está representado por  $\Sigma_s = \{x \in \mathbb{R}^2 : \sigma(x) \leq 0\}$ , el cual está compuesto por el subconjunto deslizante y los puntos deslizantes aislados.

Más aún, los puntos  $x \in \Sigma_s$ , donde  $\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle = 0$  son llamados *puntos deslizantes singulares*. En estos puntos,  $f_1$  y  $f_2$  son tangentes a  $\Sigma$ , o uno se desvanece mientras el otro es tangente a  $\Sigma$ , o ambos se desvanecen. Finalmente, para completar el

análisis sobre  $\Sigma_s$ , considere los puntos donde  $\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle \neq 0$ , es decir, *puntos deslizantes no singulares*.

Para cada  $x \in \Sigma_s$ , el *punto deslizante no singular*, se define:

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda f_1(x) + (1 - \lambda) f_2(x), \\ \lambda &= \frac{\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle}{\langle \nabla H(x), f_1(x) - f_2(x) \rangle}. \end{aligned} \quad (6)$$

Así,

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \Sigma_s, \quad (7)$$

define una ecuación diferencial escalar sobre  $\Sigma_s$ , la cual es suave en el intervalo deslizante de  $\Sigma_s$ . La solución de esta ecuación se le llama *solución deslizante*.

Para el sistema (7) podrían presentarse dos tipos de puntos. El primero se presenta cuando la dinámica en  $\Sigma_s$  es nula, lo cual significa que el campo vectorial  $g(x) = 0$ ; particularmente, esta condición define a los llamados puntos de *pseudo-equilibrio*  $P$ . A fin de que  $P$  se clasifique como no degenerado, no debe ser equilibrio de  $f_1$  ni de  $f_2$ . El segundo caso surge cuando  $g(x)$  es tangente a  $f_1$  o a  $f_2$ , es decir,  $\langle \nabla H(x), f_i(x) \rangle = 0$ . En este sentido, se definen los puntos que delimitan la zona  $\Sigma_s$ , los cuales son llamados *puntos de tangencia*  $T$  o puntos de tipo *fold*. Al igual que en el caso anterior, estos puntos no deben ser equilibrios de  $f_1$  ni de  $f_2$ . Por último, para un punto  $T$  tangente a  $f_1$ , se dice que es un punto de tangencia *visible*, si una órbita regida por  $f_1$ , que inicia su trayectoria en  $T$ , pertenece a  $D_1$  para un  $t$  lo suficientemente pequeño. Por el contrario, el punto se toma como *invisible* si la órbita resultante pertenece a  $D_2$ .

## 2.2. Solución estándar y deslizante

Es posible definir una única solución del sistema (4). Para ello, supóngase que  $x_0 \in D_1$  y construya la solución hacia adelante  $x(t)$  de (4) resolviendo la correspondiente ecuación en  $D_1$ . Si la solución no permanece en  $D_1$ , alcanzará la frontera  $\Sigma$  en el tiempo  $t_1$ , es decir  $H(x(t_1)) = 0$ . En este punto, existen dos posibilidades:

1. Si  $\sigma(x(t_1)) > 0$ , es decir  $x(t_1) \in \Sigma_c$ , entonces se conmuta a  $\dot{x} = f_2(x)$ , y se resuelve

la ecuación en la región  $D_2$  para  $t \geq t_1$ . En otras palabras, la órbita cruzará  $\Sigma$  en  $x(t_1)$ .

2. Si  $\sigma(x(t_1)) \leq 0$ , es decir,  $x(t_1) \in \Sigma_s$ , entonces se conmuta a la ecuación (7) sobre  $\Sigma_s$  así se sigue la órbita deslizante. Esta órbita se degenera en un punto si  $g(x(t_1)) = 0$ , es decir,  $x(t_1)$  es un equilibrio de (7). En este caso, se tiene que  $x(t) = x(t_1)$  para todo  $t > t_1$ . Si  $g(x(t_1)) \neq 0$ , se determina el comienzo de la órbita deslizante en  $x(t_1)$ , y se sigue la solución deslizante para  $t > t_1$ . Esta solución puede permanecer estrictamente sobre el segmento deslizante (tendiendo a un pseudo-equilibrio o a un punto deslizante aislado con  $g = 0$ ). Alternativamente, ésta puede llegar en un tiempo  $t_2 > t_1$  a su frontera (es decir, a un punto de frontera o tangente). En el caso de un punto frontera, se tiene que  $x(t) = x(t_2)$  para todo  $t > t_2$ , mientras que para el punto tangente, se sigue la única órbita en  $D_1$  o  $D_2$  que empieza en  $x(t_2)$ . Esto mismo puede ser aplicado al sistema (4) en sentido inverso para generar una solución única.

Note que las soluciones hacia adelante o hacia atrás pueden ser definidas de manera única, además, el sistema (4) no es invertible en el sentido clásico dado que las órbitas pueden traslaparse. Por tanto, en la literatura es común introducir la correspondiente inclusión diferencial al sistema de Filippov (4) y entonces considerar su solución (Aubin y Cellina, 1984; Filippov, 1988).

### 2.3. Método de Melnikov para sistemas no suaves

La teoría de Melnikov proporciona una herramienta analítica para establecer la existencia de trayectorias homoclínicas transversales a mapeos de Poincaré para órbitas periódicas de sistemas dinámicos perturbados.

Considere el siguiente sistema en el plano, periódicamente perturbado, de la forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g_1(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ f_2(x) + \epsilon g_2(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_2; \end{cases} \quad (8)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , las funciones  $g_i$  son  $T$ -periódicas y las funciones  $f_i$  son suficien-

temente suaves en sus respectivos dominios.

El espacio de estado  $\mathbb{R}^2$  es dividido en dos subconjuntos abiertos disjuntos  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  por una hipersuperficie  $\Sigma$  tal que  $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D}_1 \cup \Sigma \cup \mathcal{D}_2$ . La hipersuperficie  $\Sigma$  es definida por una función escalar  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in C^r$ ,  $r \geq 1$ . Los subconjuntos  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  y la hipersuperficie pueden ser definidos como:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) < 0\}, \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\}, \\ \mathcal{D}_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) > 0\}.\end{aligned}$$

La normal a la hipersuperficie  $\Sigma$  está dada por:  $n = n(x) = \nabla(h(x))$ ,  $x \in \Sigma$ . Además, se supone que la función  $h$  es seleccionada de tal manera que  $n(x) \neq 0$ .

De manera equivalente, se tiene el sistema suspendido

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g_1(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ f_2(x) + \epsilon g_2(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_2; \end{cases} \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{9}$$

con  $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ . Supóngase que las siguientes hipótesis se cumplen para el sistema no perturbado:

(H1) Para  $\epsilon = 0$ , el sistema  $\dot{x} = f_1(x)$  tiene un punto  $x_0 \in \mathcal{D}_1$ , el cual es un punto singular tipo silla. Sea  $\gamma$  una trayectoria homoclínica del punto  $x_0$ , la cual sólo tiene intersecciones transversales con  $\Sigma$ , y el número de intersecciones es diferente de cero. Esta trayectoria homoclínica es una función paramétrica por partes.

(H2)  $tr(Df_1) = tr(Df_2) = 0$ .

Bajo las hipótesis (H1) – (H2) y  $\epsilon$  suficientemente pequeño, el sistema perturbado (8) tiene una única órbita periódica hiperbólica  $\gamma_\epsilon(t) = x_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ . De manera correspondiente, el mapeo de Poincaré  $P_\epsilon$  asociado al sistema suspendido (9) tiene un único punto silla hiperbólico  $x_{0_\epsilon} = x_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ .

Se define ahora la *función de Melnikov para sistemas no suaves* asociada al sistema (8) como

$$\begin{aligned}
 M(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u_0(t)) \wedge g(t + \theta, u_0(t)) dt + \sum_{j=1}^{2i_0-1} [\Delta^u(j+1, t_j, \theta) - \Delta^u(j, t_j, \theta)] \\
 &+ \sum_{j=2i_0}^{2k} [\Delta^s(j+1, t_j, \theta) - \Delta^s(j, t_j, \theta)]
 \end{aligned} \tag{10}$$

donde  $\Delta$  representa la integración gradual con respecto a  $t$ , por ejemplo  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_2(u_0(t)) \wedge g_2(t + \theta, u_0(t)) dt = \Delta^u(2, \tau_2, \theta) - \Delta^u(2, \tau_1, \theta)$  (para más detalles ver Kukučka (2007)).  $\tau_j$  representa el tiempo para el cual la trayectoria homoclínica tiene intersección transversal con  $\Sigma$ , el cual será denotado por  $2k$ , dado que éste es un número par,  $j = 1, \dots, 2k$  y  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ . Finalmente, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.1** *Sea  $\epsilon$  suficientemente pequeño y supóngase que se cumplen las hipótesis (H1) – (H2). Si existe un número  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tal que*

$$M(\theta_0) = 0, \quad \frac{dM(\theta_0)}{d\theta} \neq 0,$$

*entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, las variedades  $u_{\epsilon, \theta}^s(0)$ , y  $u_{\epsilon, \theta}^u(t)$ , se intersectan transversalmente cerca de  $\theta_0$ .*

La existencia de puntos homoclínicos transversos implica, vía el teorema de Smale-Birkhoff (Wiggins, 2003), que alguna iteración del mapeo de Poincaré tiene un conjunto hiperbólico invariante: una herradura de Smale. En consecuencia, si este conjunto es atractor, el sistema exhibirá un comportamiento caótico.

Es importante señalar lo siguiente:

1. Si el campo vectorial es no suave pero continuo, entonces las sumatorias en la ecuación (10) se desvanecen. Por tanto, la función de Melnikov se obtiene resolviendo la integral para cada sección de la órbita homoclínica. Es decir, similar al caso suave.
2. Los sistemas discontinuos a analizar, no satisfacen las hipótesis para utilizar el

método de Melnikov para sistemas no suaves descrito anteriormente. Sin embargo, nuestra propuesta es utilizar una aproximación continua, generando un sistema aproximado al cual sí es posible aplicar dicho método.

## Capítulo 3. Sistema discontinuo tipo I

---

El objetivo de este capítulo es presentar el análisis de la dinámica caótica de un sistema discontinuo en el plano con una discontinuidad, debida a la dinámica propia del sistema o inducida por medio de un control retroalimentado discontinuo. Dado que el sistema discontinuo no cuenta con un punto de equilibrio tipo silla fuera de la discontinuidad, se utilizará una aproximación continua dada por la función saturación para hacer posible el uso de los resultados recientes del método de Melnikov para sistemas no suaves dado en (Kunze, 2000; Kukučka, 2007; Shi *et al.*, 2013; Battelli y Fečkan, 2012).

En este capítulo se obtendrán las condiciones que deben satisfacer los parámetros del sistema aproximado para la existencia de comportamiento caótico. Para tal propósito se utilizará la teoría de Melnikov para sistemas no suaves. Asimismo, determinará que los puntos de equilibrio del sistema aproximado son los mismos que los del sistema discontinuo. Además, se demostrará que si  $n \rightarrow \infty$ , entonces el hamiltoniano, la órbita homoclínica y la solución del sistema aproximado converge al hamiltoniano, la órbita y la solución del sistema discontinuo. Finalmente, se propone el uso de la condición de Melnikov del sistema aproximado para determinar el intervalo en el cual el parámetro debe ser variado para obtener el diagrama de bifurcación.

El presente capítulo está organizado como sigue: primeramente presentamos el sistema discontinuo en el plano, sus puntos de equilibrio y la estabilidad de los puntos de equilibrio. En la segunda parte se describe el sistema aproximado y se demuestra la presencia de caos, dando la condición que deben de satisfacer los parámetros del sistema; también se demuestra la convergencia de las órbitas del sistema aproximado a las órbitas del sistema discontinuo. Finalmente, se propone el uso de la condición de Melnikov para obtener el intervalo donde realizar el diagrama de bifurcación.

### 3.1. Sistema discontinuo

Considere la clase de sistemas discontinuos en el plano, representados por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\xi x_2 + \alpha \text{sign}(x_1) + u(t),\end{aligned}\tag{11}$$

donde  $0 < \xi < 1$ ,  $\alpha > 0$  y  $u(t) = r \text{sen}(\omega t)$ .

Si el objetivo es determinar si el sistema (11) presenta dinámica caótica, es natural pensar en aplicar el método de Melnikov para sistemas no suaves como la herramienta de análisis (ver Kukučka (2007); Kunze (2000); Battelli y Fečkan (2012); Shi *et al.* (2013); Li *et al.* (2014)). Por tanto, se supone que los parámetros  $\xi$  y  $r$  del sistema (11) son pequeños y que pueden expresarse en términos de un parámetro, al que se denotará  $\epsilon$ . De esta manera, se tiene que  $2\xi = \epsilon\bar{\xi}$  y  $r = \epsilon\bar{r}$ . Así, sustituyendo en el sistema (11) se obtiene:

$$\dot{x} = f_i(x) + \epsilon g(x, t), \quad i = 1, 2,$$

donde  $f_i(x) + \epsilon g(x, t)$  está dado por:

$$f_i(x) + \epsilon g(x, t) = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ f_2(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_2; \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{donde } f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \alpha \end{pmatrix}, \quad g(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\xi}x_2 + \bar{r}\text{sen}(\omega t) \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = x_1 = 0\}, \quad \mathcal{D}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) < 0\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) > 0\}.$$

Observe que el sistema no perturbado (sistema (12) con  $\epsilon = 0$ ) tiene la forma deseada para aplicar el método de Melnikov para sistemas no suaves, con el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_d = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \alpha|x_1|. \quad (13)$$

Sin embargo, es necesario que el sistema no perturbado cumpla con las hipótesis (H1)-(H2) del método de Melnikov para sistemas no suaves descritas en el capítulo 2, las cuales se reescriben a continuación:

(H1) El sistema  $\dot{x} = f_1(x)$  tiene un punto de equilibrio  $x_0$ , el cual es tipo silla. Sea  $\gamma$  una trayectoria homoclínica del punto  $x_0$ , el cual sólo tiene intersecciones transversales solamente con  $\Sigma$ , y el número de intersecciones es diferente de cero.

(H2)  $\text{tr}(Df_1(x)) = \text{tr}(Df_2(x)) = 0$  en los respectivos dominios.

Se procederá a continuación a verificar las hipótesis mencionadas anteriormente.

### 3.1.1. Puntos de equilibrio del sistema discontinuo

Si  $\epsilon = 0$ , entonces el sistema (12) toma la forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ f_2(x), & \text{si } x \in \mathcal{D}_2. \end{cases} \quad (14)$$

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema (14) es necesario resolver las ecuaciones  $f_i(x) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , en sus respectivos dominios. Luego, para el dominio  $\mathcal{D}_1$ , se tiene;

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \alpha \end{pmatrix} = 0; \quad (15)$$

es decir, existe un punto de equilibrio en  $\mathcal{D}_1$  dado por  $(-\alpha, 0)$ . De igual manera, para el dominio  $\mathcal{D}_2$ , al resolver

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \alpha \end{pmatrix} = 0, \quad (16)$$

se obtiene que  $(\alpha, 0)$  es un punto de equilibrio en  $\mathcal{D}_2$ .

Por último, para analizar la existencia de puntos de equilibrio sobre la superficie de discontinuidad, es necesario calcular la ecuación (5), la cual se reescribe a continuación:

$$\sigma(x) = \langle \nabla h, f_1(x) \rangle \langle \nabla h, f_2(x) \rangle.$$

Dado que  $h(x) = x_1$ , entonces  $\nabla h = (1, 0)^T$ . Para el sistema (14) se tiene:

$$\sigma(x) = x_2^2. \quad (17)$$

Es decir, de acuerdo a (17), las órbitas del sistema (14) cruzarán transversalmente la superficie de discontinuidad  $h(x)$ , excepto cuando  $x_2 = 0$ . Para  $x_2 = 0$  se tiene que

$\sigma(0, 0) = 0$ , lo que representa que  $x_0 = (0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema (14).

Resumiendo, el sistema (14) tiene tres puntos de equilibrio dados por:

$$\mathcal{P}_{ed} = \{(-\alpha, 0), (0, 0), (\alpha, 0)\}. \quad (18)$$

### 3.1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Se analizará a continuación la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (14). Observe que la matriz jacobiana del sistema (14), para los equilibrios  $(-\alpha, 0)$  y  $(\alpha, 0)$  en sus respectivos dominios, está dado por:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es:

$$p_{Df}(\lambda) = \lambda^2 + 1. \quad (19)$$

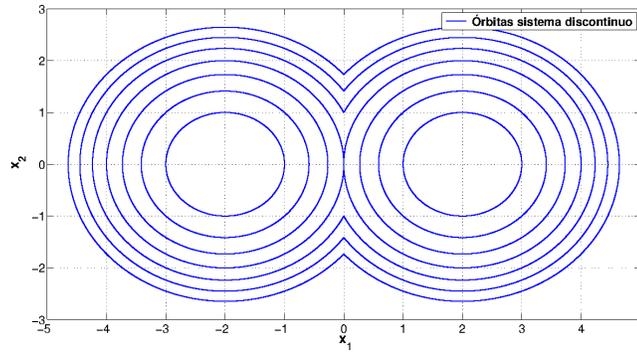
Las raíces de (19) son  $\lambda_{1,2} = \pm j$ , es decir, los equilibrios  $(-\alpha, 0)$  y  $(\alpha, 0)$  en sus respectivos dominios son clasificados como centros.

Del hamiltoniano (ecuación (13)), para diferentes valores de  $C$  que satisfagan  $2C + \alpha^2 > 0$ , se obtendrán circunferencias centradas en el equilibrio  $(-\alpha, 0)$  y  $(\alpha, 0)$  con radio  $\sqrt{2C + \alpha^2}$  en los respectivos dominios. Las ecuaciones paramétricas para ambas regiones están dadas por:

$$u_{d0}(t) = (\mp\sqrt{2C + \alpha^2} \cos(t) \mp \alpha, \pm\sqrt{2C + \alpha^2} \sin(t)). \quad (20)$$

La Figura 1 muestra las órbitas del sistema (14) para diferentes valor del parámetro  $C$ .

Es importante observar que, cuando  $C = 0$ , existe una órbita tangente al punto de equilibrio  $x_0 = 0$ ; dicha órbita tiene duración finita. El punto de equilibrio  $x_0$  es clasificado



**Figura 1: Órbitas del sistema (14) para diferentes valores de  $C$ .**

como un pseudo-equilibrio tangente (Kuznetsov *et al.*, 2003), el cual tiene la estructura de pseudo-silla. Por tanto, la hipótesis (H1) no se satisface, lo que conduce a que el método de Melnikov para sistemas no suaves descrito en el capítulo 2 no puede ser utilizado para el sistema (12).

### 3.2. Sistema aproximado tipo I

Considérese ahora una aproximación continua para el término discontinuo  $\text{sign}(\cdot)$  del sistema (11), dada por la función saturación:

$$\text{sign}(\varsigma) \approx \text{sat}_n(\varsigma) = \begin{cases} -1, & \text{si } \varsigma < -\frac{1}{n}; \\ n\varsigma, & \text{si } -\frac{1}{n} \leq \varsigma \leq \frac{1}{n}; \\ 1, & \text{si } \varsigma > \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (21)$$

donde  $n \in \mathbb{Z}^+$  y es suficientemente grande. Luego, el sistema aproximado está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\xi x_2 + \alpha \text{sat}_n(x_1) + r \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (22)$$

De la misma manera que para el caso discontinuo para la aplicación del método de Melnikov para sistemas no suaves, supóngase que los parámetros  $\xi$  y  $r$  del sistema (22) son pequeños y que pueden expresarse en términos de un parámetro  $\epsilon$ . Luego, se tiene que

$\epsilon\bar{\xi} = 2\xi$  y  $\epsilon\bar{r} = r$ . Sustituyendo y reescribiendo el sistema (22) se obtiene:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a1}; \\ f_n(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a2}; \\ f_2(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a3}, \end{cases} \quad (23)$$

donde  $f_n(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ (\alpha n - 1)x_1 \end{pmatrix}$ ,  $\Sigma_{n_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1}(x) = x_1 + \frac{1}{n} = 0\}$ ,

$$\Sigma_{n_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_2}(x) = x_1 - \frac{1}{n} = 0\}, \mathcal{D}_{a1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1} < 0\},$$

$$\mathcal{D}_{a2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1} > 0 \wedge h_{n_2} < 0\} \text{ y } \mathcal{D}_{a3} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_2} > 0\}.$$

Nótese que el método de Melnikov para sistemas no suaves es presentado para sistemas en el plano divididos en dos regiones por una hipersuperficie; sin embargo, el resultado puede similarmente ser extendido a sistemas en el plano divididos en tres regiones por dos hipersuperficies paralelas y simétricas.

De igual manera que para el caso discontinuo, el sistema no perturbado (sistema (23), cuando  $\epsilon = 0$ ), tiene la forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a1}; \\ f_n(x), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a2}; \\ f_2(x), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a3}; \end{cases} \quad (24)$$

y su función hamiltoniana está dada por:

$$\mathcal{H}_P(x; n) = \frac{x_2^2}{2} + V(x_1; n), \quad (25)$$

donde

$$V(x_1; n) = \begin{cases} -(\alpha n - 1)\frac{x_1^2}{2}, & \text{si } |x_1| \leq \frac{1}{n}; \\ \frac{x_1^2}{2} \pm \alpha \left(x_1 \pm \frac{1}{2n}\right), & \text{si } |x_1| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

### 3.2.1. Puntos de equilibrio del sistema aproximado

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema (24) es necesario resolver  $f(x) = 0$  en cada región. Sin embargo, los campos vectoriales en las regiones  $\mathcal{D}_{a1}$  y  $\mathcal{D}_{a3}$  del sistema aproximado son los mismos que para el sistema discontinuo en las regiones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$ , respectivamente. Es decir, los equilibrios son  $(-\alpha, 0) \in \mathcal{D}_{a1}$  y  $(\alpha, 0) \in \mathcal{D}_{a3}$ .

Para la región  $\mathcal{D}_{a2}$ , resolviendo  $f_n(x) = 0$ , se tiene que el punto de equilibrio es el origen  $x_0 = (0, 0)$ . Por lo tanto, el sistema (24) tiene tres puntos de equilibrio dados por:

$$\mathcal{P}_{\epsilon a} = \{(-\alpha, 0), (0, 0), (\alpha, 0)\}. \quad (26)$$

De esta manera, se tiene que los puntos de equilibrio ecuación (26) del sistema aproximado no perturbado (24), son los mismos que los puntos de equilibrio ecuación (18) del sistema discontinuo no perturbado (14).

#### 3.2.1.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio

La estabilidad de los puntos de equilibrio en las regiones  $\mathcal{D}_{a1}$  y  $\mathcal{D}_{a3}$  del sistema aproximado, es la misma que la del sistema discontinuo en las regiones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$ . Luego, para la región  $\mathcal{D}_{a2}$ , tenemos que la matriz jacobiana está dada por:

$$Df_n(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha n - 1 & 0 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es:

$$p_{Df_n}(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha n - 1). \quad (27)$$

Las raíces de (27) son  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha n - 1}$ ; es decir, el punto de equilibrio  $x_0$  es un punto silla hiperbólico y la órbita asociada con dicho punto hiperbólico está dada por:

$$u_0^\pm(t) = \begin{pmatrix} u_{01}^\pm \\ u_{02}^\pm \end{pmatrix}^T = \begin{cases} \left( \pm \frac{1}{n} e^{\sqrt{\alpha n - 1}(t+t_1)}, \pm \frac{\sqrt{\alpha n - 1}}{n} e^{\sqrt{\alpha n - 1}(t+t_1)} \right), & \text{si } t \leq -t_1; \\ \left( \mp \alpha \mp \sqrt{\frac{\alpha(\alpha n - 1)}{n}} \cos t, \pm \sqrt{\frac{\alpha(\alpha n - 1)}{n}} \operatorname{sen} t \right), & \text{si } |t| \leq t_1; \\ \left( \pm \frac{1}{n} e^{\mp \sqrt{\alpha n - 1}(t-t_1)}, -\frac{\sqrt{\alpha n - 1}}{n} e^{-\sqrt{\alpha n - 1}(t-t_1)} \right), & \text{si } t \geq t_1, \end{cases} \quad (28)$$

donde el signo de  $u_0^\pm$  corresponden a la órbita derecha e izquierda respectivamente.

Las órbitas homoclínicas (28), tiene duración infinita, para cualquier  $n$  finita. Si  $n \rightarrow \infty$  la duración es finita y converge a la órbita del sistema discontinuo dada por la ecuación (20). En la Figura 2 se muestra la gráfica de la órbita homoclínica (28) para  $n = 2, 100, 1000$ .

### 3.2.2. Función de Melnikov para el sistema aproximado

Dado que el sistema (23) no es diferenciable, pero sí es continuo, para calcular la función de Melnikov dada por la ecuación (10), sólo es necesario obtener la integral como en el caso suave. Es decir, la función de Melnikov está dada por:

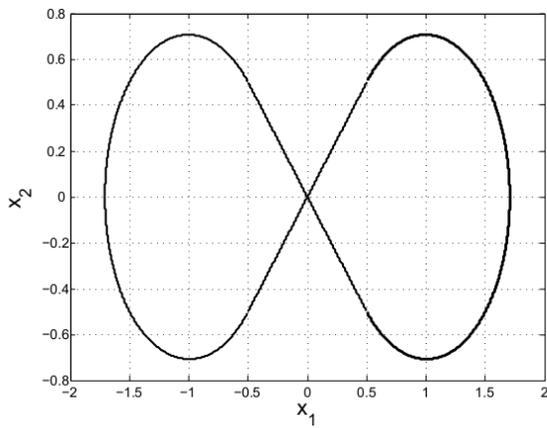
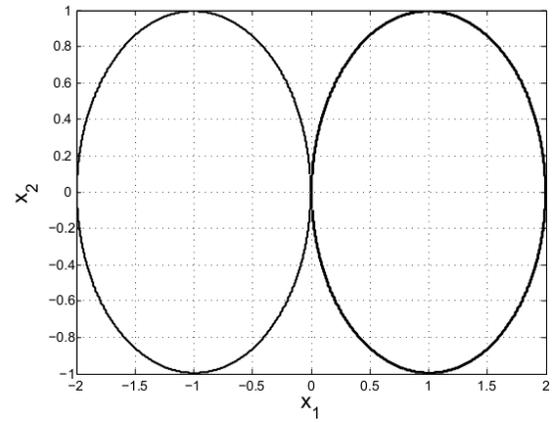
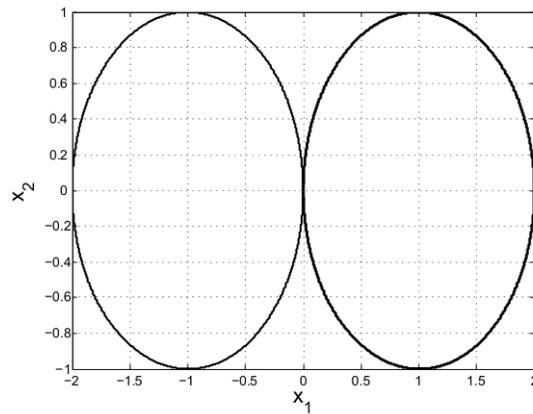
$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_0(t)) \wedge G(t + \theta, u_0(t)) dt. \quad (29)$$

En consecuencia, para el sistema aproximado (23) se tiene;

$$F(u_0(t)) \wedge G(t + \theta, u_0(t)) = -\bar{\xi} (u_{02})^2 + \bar{r} u_{02} \operatorname{sen}(\omega(t + \theta)); \quad (30)$$

por lo que es necesario resolver las integrales siguientes:

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \int_{-\infty}^{-t_1} -\bar{\xi} \left( \pm \frac{\sqrt{a}}{n} e^{\sqrt{a}(t+t_1)} \right)^2 dt + \int_{-\infty}^{-t_1} \bar{r} \left( \pm \frac{\sqrt{a}}{n} e^{\sqrt{a}(t+t_1)} \right) \operatorname{sen}(\omega(t + \theta)) dt \\ &+ \int_{-t_1}^{t_1} -\bar{\xi} \left( \mp \sqrt{\frac{a\alpha}{n}} \operatorname{sen}(t) \right)^2 dt + \int_{-t_1}^{t_1} \bar{r} \left( \mp \sqrt{\frac{a\alpha}{n}} \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(\omega(t + \theta)) \right) dt \\ &+ \int_{t_1}^{\infty} -\bar{\xi} \left( \mp \frac{\sqrt{a}}{n} e^{-\sqrt{a}(t-t_1)} \right)^2 dt + \int_{t_1}^{\infty} \bar{r} \left( \mp \frac{\sqrt{a}}{n} e^{-\sqrt{a}(t-t_1)} \right) \operatorname{sen}(\omega(t + \theta)) dt, \end{aligned} \quad (31)$$

(a)  $n = 2$ .(b)  $n = 100$ .(c)  $n = 1000$ .**Figura 2: Órbita homoclínica del sistema aproximado ecuación (24) para valores de  $n = 2, 100, 1000$ .**

donde  $a = \alpha n - 1$ . Al calcular cada una de las integrales de la ecuación (31) y simplificando se obtiene:

$$M(\theta) = -\frac{\alpha \bar{\xi} \sqrt{a}}{n} (1 + \sqrt{a} t_1) + \frac{2\alpha \bar{r} \sqrt{a} \operatorname{sen} \left( \omega t_1 + \arctan \left( \frac{\omega}{\sqrt{a}} \right) \right)}{(\omega^2 - 1) \sqrt{\omega^2 + a}} \cos(\omega \theta).$$

Luego, la función de Melnikov tendrá ceros simples si:

$$\left| \frac{r}{(\omega^2 - 1) \sqrt{\omega^2 + \alpha n - 1}} \right| > \left| \frac{\xi}{n} \left( 1 + \sqrt{\alpha n - 1} t_1 \right) \right|. \quad (32)$$

Es importante notar que la desigualdad (32) se satisface siempre para valores de  $n$  suficientemente grandes.

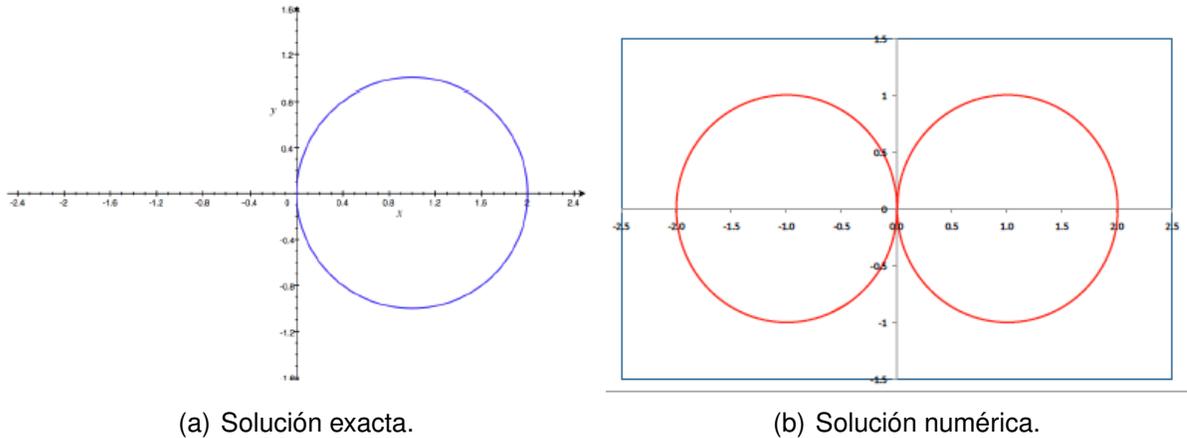
### 3.3. Solución de los sistemas

Los métodos numéricos se utilizan para obtener las soluciones de los sistemas dinámicos no suaves. Sin embargo, incluso para los sistemas seccionalmente lineales, el error inherente a cualquier algoritmo numérico puede producir, en algunas ocasiones, conclusiones erróneas (Dieci y Lopez, 2012). Por ejemplo, considere el siguiente sistema discontinuo  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1 + \operatorname{sign}(x_1))$ . En la Figura 3(a) se muestra la solución exacta, mientras que en la Figura 3(b) se muestra la solución dada por un algoritmo numérico y podemos observar el error generado. Por tanto, el objetivo de esta sección es obtener las soluciones de los sistemas analizados aprovechando su naturaleza lineal en cada una de las regiones, y utilizarlas para la obtención de los resultados presentados.

#### 3.3.1. Solución del sistema discontinuo

Considere el sistema discontinuo (11), el cual puede ser representado en la forma siguiente:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax - Bu_1(t) & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ Ax + Bu_2(t) & \text{si } x \in \mathcal{D}_2; \end{cases} \quad (33)$$



(a) Solución exacta.

(b) Solución numérica.

**Figura 3: Solución exacta y numérica del ejemplo.**

donde  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $u_1(t) = \alpha - r\text{sen}(\omega t)$  y  $u_2(t) = \alpha + r\text{sen}(\omega t)$ .

Para el sistema (33), la solución  $\varphi$  puede ser obtenida de la solución general de sistemas lineales no autónomos, en cada una de las regiones. Por tanto, para la región  $\mathcal{D}_1$ , se tiene:

$$\varphi^{\mathcal{D}_1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\Delta t} \left( A_1 \cos(\kappa\Delta t) + \frac{\xi A_1 + A_2}{\kappa} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) - \alpha + c_2 \cos(\omega t) + c_3 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\Delta t} \left( A_2 \cos(\kappa\Delta t) - \frac{A_1 + \xi A_2}{\kappa} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + c_3 \omega \cos(\omega t) - c_2 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

donde  $\Delta t = t - t_0$ ,  $\kappa = \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $A_1 = x_{10} + \alpha - c_2 \cos(\omega t_0) - c_3 \text{sen}(\omega t_0)$ , y  $A_2 = x_{20} + c_3 \omega \cos(\omega t_0) - c_2 \omega \text{sen}(\omega t_0)$ . De manera similar, se obtiene la solución en la región  $\mathcal{D}_2$ , dada por:

$$\varphi^{\mathcal{D}_2}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\Delta t} \left( B_1 \cos(\kappa\Delta t) + \frac{\xi B_1 + A_2}{\kappa} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + \alpha + c_2 \cos(\omega t) + c_3 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\Delta t} \left( A_2 \cos(\kappa\Delta t) - \frac{B_1 + \xi A_2}{\kappa} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + c_3 \omega \cos(\omega t) - c_2 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde  $B_1 = A_1 - 2\alpha$ .

Dado que el cruce de las órbitas sobre la superficie de discontinuidad siempre es transversal (ver ecuación (17)), es posible obtener una solución del sistema discontinuo (11), realizando una concatenación de las órbitas en cada una de las regiones identificando el tiempo para cual ésta cruzará a otra región. Por ejemplo, si  $x(t_0) \in \mathcal{D}_1$ , y  $t_1$  es el

tiempo en que la órbita alcanza la superficie de discontinuidad, y entra a  $\mathcal{D}_2$  y permanece en la región  $\mathcal{D}_2$ , para un valor  $\sigma > 0$ , entonces la solución en ese intervalo  $t = [t_0, t_1 + \sigma]$ , se puede representar como:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi^{\mathcal{D}_1}(t), & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1; \\ \varphi^{\mathcal{D}_2}(t), & \text{si } t_1 \leq t \leq t_1 + \sigma. \end{cases} \quad (36)$$

### 3.3.2. Solución del sistema aproximado

De la misma manera, el sistema (22) es representado como:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax - Bu_1(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a1}; \\ A_n x + Bu_n(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a2}; \\ Ax + Bu_2(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a3}; \end{cases} \quad (37)$$

donde  $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha n - 1 & -2\xi \end{bmatrix}$  y  $u_n(t) = r \text{sen}(\omega t)$ .

Similarmente, la solución  $\varphi_n$  del sistema (22) puede ser obtenida por la concatenación de las órbitas en las regiones  $\mathcal{D}_{a1}$ ,  $\mathcal{D}_{a2}$ , y  $\mathcal{D}_{a3}$ , denotadas por  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}}$ ,  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}}$ , y  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}$ , respectivamente.

Es sencillo obtener que  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}} = \varphi^{\mathcal{D}_1}$  para  $x_0 \in \mathcal{D}_{a1}$ . Para  $x_0 \in \mathcal{D}_{a3}$  se tiene que  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}} = \varphi^{\mathcal{D}_2}$ . Finalmente, para  $x_0 \in \mathcal{D}_{a2}$ , se obtiene:

$$\varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}} = \begin{bmatrix} e^{-\xi \Delta t} \left( D_1 \cosh(\kappa_1 \Delta t) + \frac{D_1 \xi + D_2}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1 \Delta t) \right) + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi \Delta t} \left( D_2 \cosh(\kappa_1 \Delta t) + \frac{D_1(\alpha n - 1) - D_2 \xi}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1 \Delta t) \right) + a_2 \omega \cos(\omega t) - a_1 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

donde

$$a_1 = \frac{-2r\xi\omega}{(1 - \alpha n - \omega^2)^2 + (2\omega\xi)^2}, \quad a_2 = \frac{r(1 - \alpha n - \omega^2)}{(1 - \alpha n - \omega^2)^2 + (2\omega\xi)^2}$$

$$D_1 = x_{10} - a_1 \cos(\omega t_0) - a_2 \text{sen}(\omega t_0), \quad D_2 = x_{20} - a_2 \omega \cos(\omega t_0) + a_1 \omega \text{sen}(\omega t_0).$$

Similarmente al sistema discontinuo (11), la solución puede ser obtenida por la conca-

tenación de las soluciones en cada una de las regiones, i.e.  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}} = \varphi^{\mathcal{D}_1}$  (34),  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}} = \varphi^{\mathcal{D}_2}$  (35), y  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}}$  (38). Por ejemplo, si  $x_0 \in \mathcal{D}_{a3}$  y la órbita entra a la región  $\mathcal{D}_{a2}$  en el tiempo  $t_{n1}$ , y a la región  $\mathcal{D}_{a1}$  en el tiempo  $t_{n2}$  y permanece ahí, entonces, para el intervalo  $(t_0, t_0 + t_{n1} + t_{n2} + \sigma)$ ,  $\sigma > 0$ , la solución está dada por:

$$\varphi_n(x_0, t) = \begin{cases} \varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}(x_0, t), & t_0 \leq t \leq t_{n1}; \\ \varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}}(y_0, t), & t_{n1} \leq t \leq t_{n2}; \\ \varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}}(z_0, t), & t_{n2} \leq t \leq t_{n2} + \sigma; \end{cases} \quad (39)$$

donde  $y_0 = \varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}(x_0, t_{n1})$ ,  $z_0 = \varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}}(y_0, t_{n2})$ .

### 3.3.3. Análisis de convergencia

Como ya se ha expuesto con anterioridad, el objetivo es predecir dinámica caótica en el sistema discontinuo (11), dado que el sistema aproximado (22), de acuerdo al método de Melnikov, puede presentar dinámica caótica para el conjunto de parámetros que satisfacen la ecuación (32), y en particular para valores suficientemente grandes de  $n$ . El objetivo en esta sección es presentar un bosquejo de cómo la solución del sistema aproximado puede estar tan cerca como se desee a la solución del sistema discontinuo. Aunado a todo lo anterior, se podría concluir que el sistema discontinuo también puede presentar dinámica caótica.

Supóngase que  $x_0 = (0, x_{20})^T$ , con  $x_{20} > 0$ . Además, considere un intervalo de tiempo finito  $t = [0, T]$ , tal que,  $\|\varphi(x_0, T)\| > 1/n$

Por tanto, de las ecuaciones (39) y (36), la diferencia entre las órbitas del sistema discontinuo y el sistema aproximado en  $t = T$ , está dada por:

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(x_0, T) - \varphi(x_0, T)\| &= \left\| \varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}(\varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}}(y_0, t_n), T) - \varphi^{\mathcal{D}_2}(x_0, T) \right\| \\ &= \left\| \varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}(y_0, T) - \varphi^{\mathcal{D}_2}(x_0, T) \right\| \end{aligned}$$

$$= \left\| \left\| e^{-\xi T} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \bar{B}_1 - \theta \frac{\xi \bar{B}_1 + \bar{A}_2}{\kappa} - B_1 & \theta \bar{B}_1 + \delta \frac{\xi \bar{B}_1 + \bar{A}_2}{\kappa} - \frac{\xi B_1 + A_2}{\kappa} \\ \delta \bar{A}_2 + \theta \frac{\bar{B}_1 + \xi \bar{A}_2}{\kappa} - A_2 & \theta \bar{A}_2 - \delta \frac{\bar{B}_1 + \xi \bar{A}_2}{\kappa} + \frac{B_1 + \xi A_2}{\kappa} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \cos(\kappa T) \\ \sin(\kappa T) \end{bmatrix} \right\| \right\|$$

$$\leq |e^{-\xi T}| \sqrt{\lambda_{\max}(Q^H Q)}, \text{ donde}$$

$$\delta = e^{\xi t_n} \cos(\kappa t_n), \theta = e^{\xi t_n} \sin(\kappa t_n), \bar{B}_1 = y_{10} - \alpha - c_2 \cos(\omega t_n) - c_3 \sin(\omega t_n), \bar{A}_2 = y_{20} + c_3 \omega \cos(\omega t_n) - c_2 \omega \sin(\omega t_n), B_1 = -\alpha - c_2, A_2 = x_{20} + c_3 \omega,$$

$$y_{10} = e^{-\xi t_n} \left( -a_1 \cosh(\kappa_1 t_n) + \frac{-a_1 \xi + x_{20} - a_2 \omega}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1 t_n) \right) + a_1 \cos(\omega t_n) + a_1 \sin(\omega t_n)$$

$$y_{20} = e^{-\xi t_n} \left( (x_{20} - a_2 \omega) \cosh(\kappa_1 t_n) + \frac{-a_1(\alpha n - 1) + \xi(x_{20} - a_2 \omega)}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1 t_n) \right) + a_2 \omega \cos(\omega t_n) - a_1 \omega \sin(\omega t_n),$$

$$t_n = \frac{2}{n x_{02} + \sqrt{n(x_{02}^2 - 4\xi(b_1 \omega - x_{02}) - 2a_1(\alpha n + \omega^2 - 1))}}$$

$\lambda_{\max}$ , representa el máximo valor propio de  $Q^H Q$ , y  $Q^H$  es la transpuesta conjugada de  $Q$ .

Dado que  $\lambda_{\max}(Q^H Q)$  es tan pequeño como se desee, entonces se tiene que la solución (39) del sistema aproximado puede estar tan cerca como se desee a la solución (36) del sistema discontinuo.

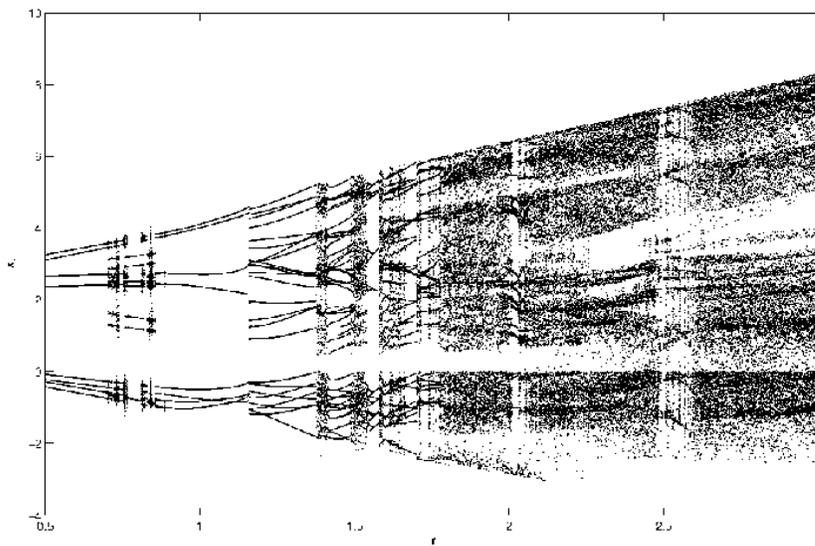
### 3.4. Diagrama de bifurcaciones

El diagrama de bifurcaciones es una herramienta numérica muy utilizada para analizar la dinámica compleja de sistemas dinámicos (Awrejcewicz y Olejnik, 2002). Sin embargo, para su construcción, es necesario identificar el rango del parámetro sobre el cual se va a realizar el diagrama de bifurcación. Si no se tiene un buen conocimiento del sistema, esta tarea puede ser abrumadora. Mas aún, para sistemas dependientes de varios parámetros, la búsqueda puede complicarse todavía más. Por tanto, en esta sección se propone el uso de la función de Melnikov como una herramienta para obtener el rango del parámetro para el cual realizar el diagrama de bifurcación. Además, permitirá ilustrar los resultados teóricos obtenidos.

Si se considera la ecuación (32), entonces para valores fijos de  $\xi$ ,  $\omega$  y  $\alpha$ , se tiene que:

$$|r| > \left| \frac{\xi \left(1 + \sqrt{\alpha n - 1} t_1\right) (\omega^2 - 1) \sqrt{\omega^2 + \alpha n - 1}}{n} \right|. \quad (40)$$

Obsérvese que para cualquier valor positivo de  $n$  siempre existirá un valor del parámetro  $r$  que satisface la desigualdad (40). Esta desigualdad permite identificar el rango de valores del parámetro  $r$  para los cuales el sistema aproximado (22) puede presentar comportamiento caótico y en consecuencia, dado que es válida para valores arbitrariamente grandes de  $n$ , el sistema discontinuo (11). La desigualdad (40) proporciona un intervalo, para el parámetro  $r$ , donde es posible la existencia de una dinámica caótica eventualmente visible mediante el diagrama de bifurcación. Por ejemplo, si se fijan los valores  $\xi = 0.01$ ,  $\omega = \frac{\pi}{10}$ ,  $\alpha = 1$  y  $n = 1000$ , se tiene que  $r > 0.0283$ . En particular, considérese el intervalo  $0 < r < 5$  para el cual se realizará el diagrama de bifurcación del sistema discontinuo, el cual se muestra en la Figura 4. Es importante mencionar que dicho diagrama de bifurcación fue construido a partir de la solución dada por (36). Similarmente, para los valores

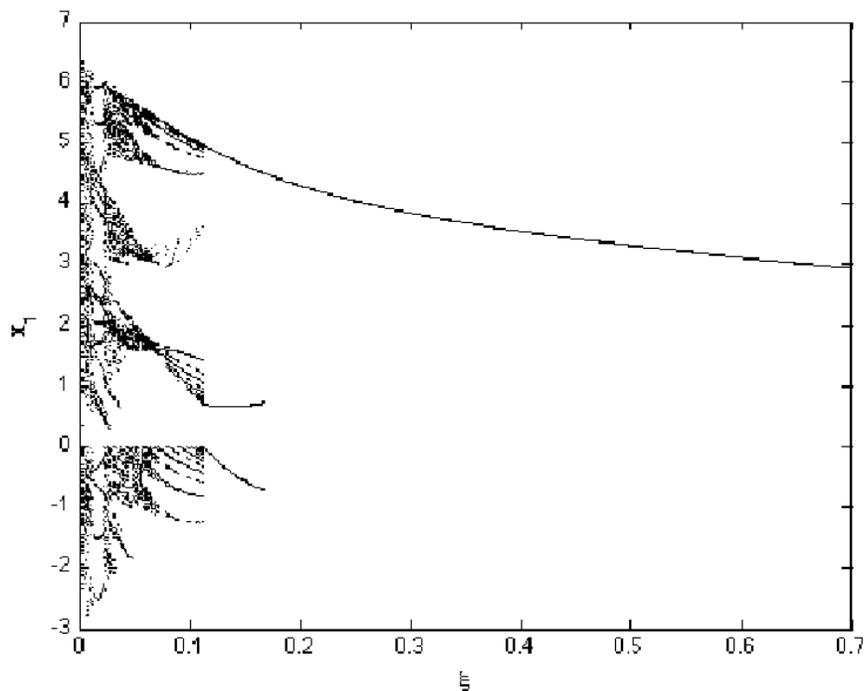


**Figura 4: Diagrama de bifurcación para  $\xi = 0.01$ ,  $\omega = \frac{\pi}{10}$ ,  $\alpha = 1$  del sistema discontinuo.**

fijos de  $r$ ,  $\omega$ , y  $\alpha$ , y resolviendo la ecuación (32) para  $\xi$  se obtiene que:

$$|\xi| > \left| \frac{rn}{(1 + \sqrt{\alpha n - 1}t_1)(\omega^2 - 1)\sqrt{\omega^2 + \alpha n - 1}} \right|, \quad (41)$$

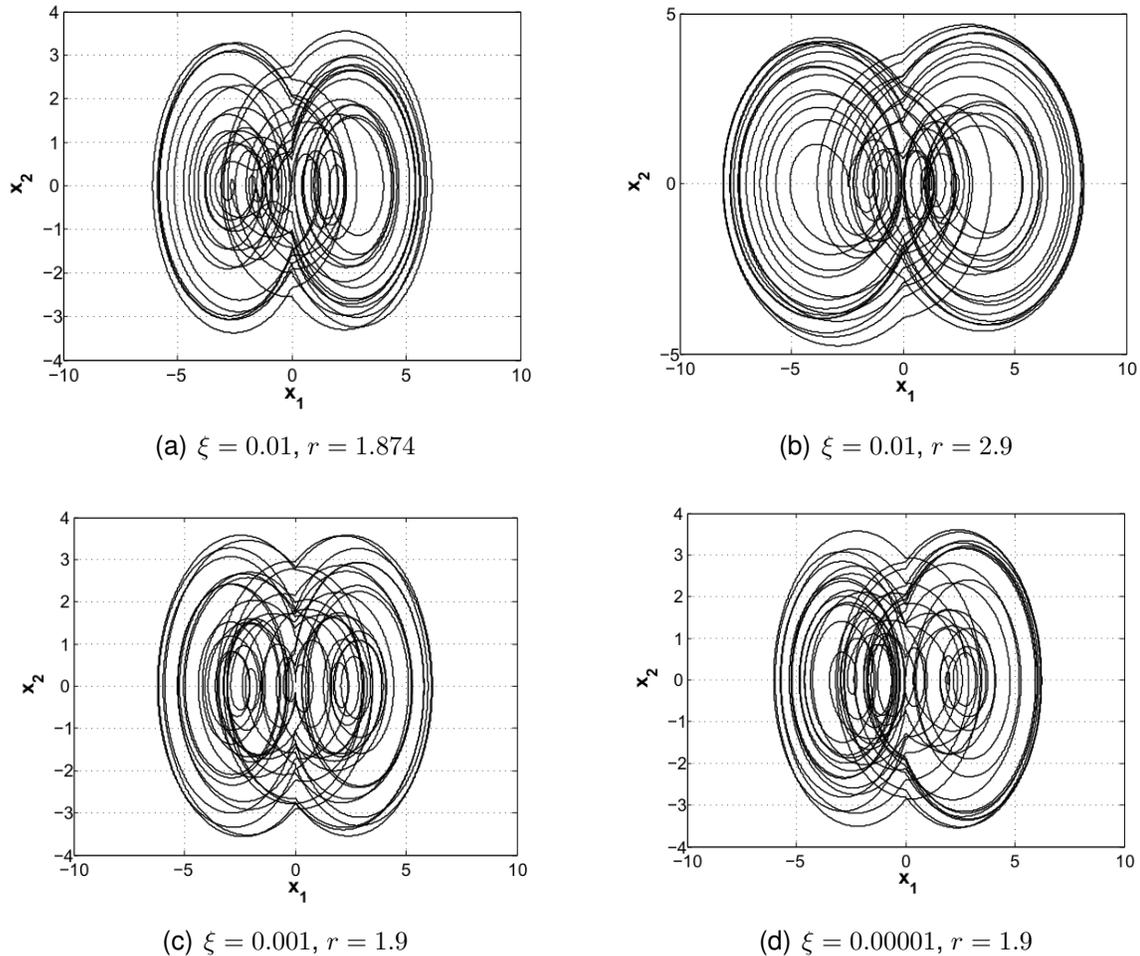
la cual se satisface para cualquier valor finito de  $n$ . Luego, considerando  $r = 1.9$ ,  $\omega = 0.1\pi$ ,  $\alpha = 1$ ,  $n = 1000$ , en la ecuación (41) se tiene que  $|\xi| < 0.6716$ , es decir el sistema aproximado (22) presentará comportamiento caótico y, en consecuencia, dado que el valor de  $n$  es suficientemente grande, también el sistema discontinuo. Por otra parte, el intervalo en el cual podemos graficar el diagrama de bifurcación para observar eventualmente un comportamiento caótico está dado por  $0 < \xi < 0.6716$ . En la Figura 5 se muestra el diagrama de bifurcación del sistema discontinuo que confirma lo anterior. Por último, con-



**Figura 5: Diagrama de bifurcación para  $r = 1.9$ ,  $\omega = \frac{\pi}{10}$ ,  $\alpha = 1$  del sistema discontinuo.**

sidere los valores en los parámetros utilizados para construir el diagrama de bifurcación de la Figura 4; es decir, valores de los parámetros que satisfacen (40). Los atractores del sistema discontinuo para  $r = 1.87$  y  $r = 2.9$  se muestran en las figuras 6(a) y 6(b). Similarmente, en las figuras 6(c) y 6(d) se muestran los atractores del sistema discontinuo, utilizando la ecuación (41) para valores de  $\xi = 0.001$  y  $0.00001$ , respectivamente.

Estos valores corresponden a regiones de los diagramas de bifurcación que muestran un comportamiento caótico, lo cual es congruente con el comportamiento mostrado en estas Figuras.



**Figura 6: Atractores caóticos del sistema discontinuo, para valores fijos en los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\omega = 0.1 \pi$ , y diferentes valores  $\xi, r$ .**

### 3.5. Conclusiones

Para un sistema de segundo orden en el plano (sistema aproximado ecuación (22)), hemos dado las condiciones en los parámetros para que presente comportamiento caótico, y hemos probado que los puntos de equilibrio del sistema aproximado y discontinuo son los mismos, que el hamiltoniano del sistema aproximado converge al hamiltoniano del sistema discontinuo y la solución del sistema aproximado puede estar tan cerca como se desee de la solución del sistema discontinuo cuando  $n$  es suficientemente grande.

En consecuencia, se concluye que la clase de sistemas discontinuos en el plano con un punto de equilibrio sobre la superficie de discontinuidad analizada en este capítulo (ecuación (11)) puede exhibir dinámica caótica si se satisface la desigualdad (32).

Sin embargo, faltaría probar formalmente que el sistema discontinuo presenta dinámica caótica, o inferir que para este tipo de sistemas, no es necesario que la órbita tenga duración infinita.

## Capítulo 4. Sistema seccionalmente lineal en el plano

---

En este capítulo se utiliza una variante de la aproximación continua usada en el capítulo 3, con el objetivo de determinar vía proceso límite la dinámica de una clase de sistemas discontinuos en el plano con un punto de equilibrio sobre la superficie de discontinuidad. El sistema resultante, tiene órbitas homoclínicas asimétricas. Sistemas dinámicos continuos con esta característica han sido estudiados ya anteriormente. Yagasaki considera un péndulo con un control lineal el cual tiene un par de órbitas homoclínicas asimétricas (Yagasaki, 1994). Cao et al. analizó la ruptura simétrica para el oscilador de Helmholtz-Duffing (Cao *et al.*, 2007), mostrando sus resultados con simulaciones numéricas. Recientemente, Feng et al. utilizó la aproximación de Pade para obtener las ecuaciones paramétricas de las órbitas homoclínicas o heteroclínicas resultantes (Feng *et al.*, 2012), y utilizaron el método de Melnikov para analizar dinámica caótica.

En este capítulo demostraremos que, cuando el valor de  $n$  es suficientemente grande, los puntos de equilibrios, el hamiltoniano, las órbitas homoclínicas y las condiciones de Melnikov del sistema seccionamente lineal, convergen a los puntos de equilibrio, el hamiltoniano, órbitas homoclínicas y las condiciones de Melnikov del sistema discontinuo (11). Más aún, la solución del sistema seccionalmente lineal converge a la solución del sistema discontinuo (11) y el diagrama de bifurcación del sistema seccionalmente lineal cuando  $n \geq 1000$ , es esencialmente el mismo que para el sistema discontinuo (11), de donde se podrá concluir que el sistema discontinuo (11) presenta dinámica caótica.

La organización de este capítulo es la siguiente. Primeramente se presenta el sistema seccionalmente lineal, sus puntos de equilibrio, su estabilidad, su hamiltoniano sus órbitas homoclínicas asimétricas, y se comparan respectivamente vía límite con los del sistema discontinuo afín. Enseguida, usamos el método de Melnikov para determinar dinámica caótica en el sistema seccionalmente lineal y analizamos la condición de Melnikov. Posteriormente, se obtienen las soluciones analíticas del sistema las cuales se usarán para mostrar los resultados de este capítulo, y hacer el análisis de convergencia de las soluciones. Finalmente, se hace una comparación de los diagramas de bifurcación para diferentes valores del parámetro  $n$ .

#### 4.1. Sistema seccionalmente lineal en el plano

Considere el siguiente sistema seccionalmente lineal en el plano representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\xi x_2 + \alpha f_n(x_1) + u(t),\end{aligned}\tag{42}$$

donde  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $0 < \xi < 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $u(t) = r \operatorname{sen}(\omega t)$  y  $f_n(x_1) = \begin{cases} -1, & \text{si } x_1 < 0, \\ 2n x_1 - 1, & \text{si } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{si } x_1 > \frac{1}{n}. \end{cases}$

Para utilizar el método de Melnikov para sistemas no suaves supóngase que los parámetros  $\xi$  y  $r$  del sistema (42) son pequeños y pueden expresarse en términos de un parámetro  $\epsilon$ . Por lo tanto, se tiene que  $\epsilon \bar{\xi} = 2\xi$  y  $\epsilon \bar{r} = r$ . Sustituyendo estas expresiones y reescribiendo el sistema (42) se obtienen:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_{p1}(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x_1 \in \mathcal{P}_1; \\ f_{p2}(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x_1 \in \mathcal{P}_2; \\ f_{p3}(x) + \epsilon g(x, t), & \text{si } x_1 \in \mathcal{P}_3, \end{cases}\tag{43}$$

donde

$$\begin{aligned}f_{p1}(x) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \alpha \end{pmatrix}, f_{p2}(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ (2\alpha n - 1)x_1 - \alpha \end{pmatrix}, f_{p3}(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \alpha \end{pmatrix} \text{ y} \\ g(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\xi} + \bar{r} \operatorname{sen}(\omega t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Las regiones pueden ser definidas como:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq n x_1 < 1\}, \\ \mathcal{P}_3 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : n x_1 \geq 1\},\end{aligned}$$

estas regiones son separadas por las superficies siguientes:

$$\begin{aligned}\Sigma_{a1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{a1} = x_1 = 0\}; \\ \Sigma_{a2} &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : h_{a2} = x_1 - \frac{1}{n} = 0\right\}.\end{aligned}$$

Cuando  $\epsilon = 0$ , se obtiene el sistema no perturbado siguiente del sistema seccionalmente lineal (43):

$$\dot{x} = \begin{cases} f_{p1}(x), & \text{si } x_1 \in \mathcal{P}_1; \\ f_{p2}(x), & \text{si } x_1 \in \mathcal{P}_2; \\ f_{p3}(x), & \text{si } x_1 \in \mathcal{P}_3, \end{cases} \quad (44)$$

el cual es un sistema hamiltoniano y su función hamiltoniana está dada por:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}}(x; n) = \frac{x_2^2}{2} + V(x_1; n), \quad (45)$$

donde

$$V(x_1; n) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{2} + \alpha x_1, & \text{si } x_1 < 0; \\ -(2\alpha n - 1)\frac{x_1^2}{2} + \alpha x_1, & \text{si } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{n}; \\ \frac{x_1^2}{2} - \alpha \left(x_1 - \frac{1}{n}\right), & \text{si } x_1 > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Más aún, la función hamiltoniana  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}(x; n)$  (45) del sistema seccionalmente lineal (42) converge a la función hamiltoniana  $\mathcal{H}_d$  (13) del sistema discontinuo (11).

Dado que el sistema (44) es hamiltoniano, entonces se satisface (H2) de las condiciones de Melnikov para sistemas no suaves descritas en el capítulo 2. Las demás condiciones para aplicar el método de Melnikov para sistemas no suaves tienen que ver con los puntos de equilibrio del sistema (44), por tanto, procedemos a verificarlas.

#### 4.1.1. Puntos de equilibrio

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema (44) es necesario resolver  $f_{pi}(x) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , en sus respectivos dominios. Luego, para el dominio  $\mathcal{P}_1$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \alpha \end{pmatrix} = 0. \quad (46)$$

Es decir, existe un punto de equilibrio en  $\mathcal{P}_1$  dado por  $(-\alpha, 0)$ . Para la región  $\mathcal{P}_2$  se resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ (2\alpha n - 1)x_1 - \alpha \end{pmatrix} = 0, \quad (47)$$

y se obtiene el resultado  $(\frac{\alpha}{2\alpha n - 1}, 0)$ , el cual es un punto de equilibrio en la región  $\mathcal{P}_2$ . Por último para el dominio  $\mathcal{P}_3$ , al resolver

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \alpha \end{pmatrix} = 0, \quad (48)$$

se obtiene  $(\alpha, 0)$ , el cual es un punto de equilibrio en  $\mathcal{P}_3$ . En resumen, el sistema no perturbado (44) tiene los siguientes tres puntos de equilibrio:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}} = \left\{ (-\alpha, 0), \left( \frac{\alpha}{2\alpha n - 1}, 0 \right), (\alpha, 0) \right\} \quad (49)$$

Los puntos de equilibrio ( $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$  ecuación (49)) del sistema seccionalmente lineal (42) convergen a los puntos de equilibrio ( $\mathcal{P}_{ed}$  ecuación (18)) del sistema discontinuo (11), cuando  $n \rightarrow \infty$ .

#### 4.1.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Los equilibrios  $(-\alpha, 0)$  y  $(\alpha, 0)$  son clasificados como centros, mientras que  $(\frac{\alpha}{2\alpha n - 1}, 0)$  es un punto silla, ya que las raíces de la matriz jacobiana son  $\pm\sqrt{2\alpha n - 1}$ .

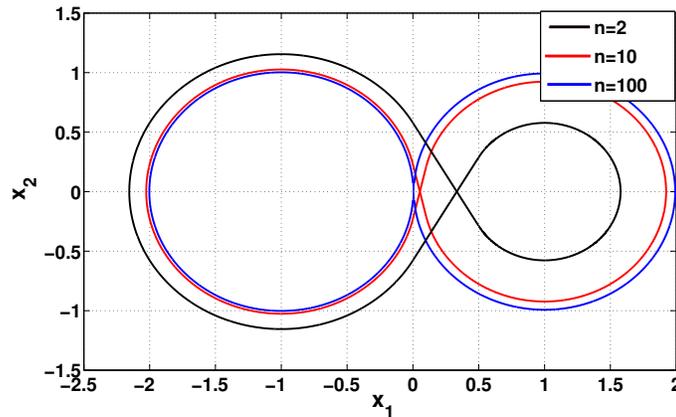
Más aún, del hamiltoniano (45), se tiene que el punto de equilibrio tipo silla  $(\frac{\alpha}{2\alpha n - 1}, 0)$  tiene asociadas dos órbitas homoclínicas. La órbita a la izquierda del punto silla está dada por la ecuación siguiente:

$$u^i = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\alpha n - 1} \left( 1 - e^{\pm b(t \pm t_m)} \right), \mp \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha n - 1}} e^{\pm b(t \pm t_m)}, & \text{si } |t| \geq t_m; \\ -\sqrt{\frac{2\alpha^3 n}{2\alpha n - 1}} \cos(t) - \alpha, \sqrt{\frac{2\alpha^3 n}{2\alpha n - 1}} \sin(t), & \text{si } |t| \leq t_m \end{cases} \quad (50)$$

mientras que la órbita a la derecha del punto silla estará dada por:

$$u^d(t, n) = \begin{cases} \frac{1}{b^2}(1 + (\alpha n - 1)e^{\pm b(t \pm t_m)}), \pm \frac{\alpha n - 1}{nb} e^{\pm b(t \pm t_m)}, & \text{si } |t| \geq t_m; \\ \sqrt{\frac{2\alpha}{n} \frac{\alpha n - 1}{b}} \cos(t) + \alpha, -\sqrt{\frac{2\alpha}{n} \frac{\alpha n - 1}{b}} \sin(t), & \text{si } |t| \leq t_m; \end{cases} \quad (51)$$

donde  $b = \sqrt{2\alpha n - 1}$ ,  $t_m = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{2\alpha n - 1}{2\alpha n}}\right)$ . En la Figura 7 se muestran las órbitas homoclínicas del sistema sin perturbar (44) para valores fijos de los parámetros  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 1$ ,  $r = 1$ ,  $\omega = \frac{\pi}{10}$  y valores de  $n = 2, 10, 100$ . Note que estas órbitas no son simétricas.



**Figura 7: Órbitas del sistema no perturbado (44), para valores fijos en los parámetros  $\xi = 0.01$ ,  $\alpha = 1$ ,  $r = 1$ ,  $\omega = \frac{\pi}{10}$  y valores de  $n = 2, 10, 100$**

De igual forma, las órbitas homoclínicas ( $u^i(t, n)$  ecuación (50) y  $u^d(t, n)$  ecuación (51)) convergen a las órbitas ( $u_{d0}(t)$  ecuación 20) del sistema discontinuo (11).

#### 4.1.3. Función de Melnikov

Dado que el sistema aproximado (44) tiene dos órbitas homoclínicas no simétricas, entonces es necesario obtener para cada órbita homoclínica una función de Melnikov. Es decir, se requiere una función de Melnikov  $M_1(\theta)$  para la órbita  $u^i(t, n)$  y otra  $M_2(\theta)$  para la órbita  $u^d(t, n)$ . Por tanto;

$$M(\theta) = \begin{cases} M_1(\theta), & \text{si } u^i(t, n); \\ M_2(\theta), & \text{si } u^d(t, n); \end{cases} \quad (52)$$

En consecuencia, el sistema (43) presentará dinámica caótica para los valores de los parámetros que satisfagan ambas funciones.

Para obtener  $M_1(\theta)$  considere que:

$$F_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \alpha \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1(1 - 2\alpha n) - \alpha \end{pmatrix}, G_1 = G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\xi}x_2 + \bar{r}\text{sen}(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la función de Melnikov  $M_1(\theta)$  estará dada por:

$$M_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} -\bar{\xi}(u_{0_2})^2 + \bar{r}u_{0_2}\text{sen}(\omega(t + \theta)) dt. \quad (53)$$

Después de sustituir la órbita homoclínica  $u^i(t, n)$  descrita por la ecuación (50), resolver la integral y simplificar, se obtiene:

$$M_1(\theta) = -\frac{2n\alpha^2\bar{\xi}}{(2n\alpha - 1)^{\frac{3}{2}}}(1 + \sqrt{2\alpha n - 1}t_m) - \frac{4\bar{r}\alpha^2 n \sin(\omega t_m + \delta) \cos(\omega\theta)}{\sqrt{(2\alpha n - 1)(\omega^2 + 2\alpha n - 1)(\omega^2 - 1)}},$$

donde,  $\delta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2\alpha n - 1}}{\omega}\right)$ .

$M_1(\theta)$  tendrá ceros simples si y sólo si, se satisface la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{r}{\sqrt{2\alpha n - 1 + \omega^2(\omega^2 - 1)}} \right| > \left| \frac{\xi(1 + \sqrt{2\alpha n - 1}t_m)}{2\alpha n - 1} \right|. \quad (54)$$

Similarmente, para determinar la función de Melnikov  $M_2(\theta)$ , asociada a la órbita homoclínica  $u^d(t, n)$  se considera que:

$$F_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1(1 - 2\alpha n) - \alpha \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \alpha \end{pmatrix}, G_1 = G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\xi}x_2 + \bar{r}\text{sen}(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, después de sustituir la órbita homoclínica (51), resolver la integral y simplificar se tiene que la función de Melnikov  $M_2(\theta)$  está dada como:

$$M_2(\theta) = -\frac{2\alpha\bar{\xi}(\alpha n - 1)^2}{n(2\alpha n - 1)^{\frac{3}{2}}}(1 + \sqrt{2\alpha n - 1}t_m) + \frac{4\bar{r}\alpha(\alpha n - 1) \sin(\omega t_m + \delta) \cos(\omega\theta)}{\sqrt{(2\alpha n - 1)(2\alpha n - 1 + \omega^2)(\omega^2 - 1)}}.$$

La cual tendrá ceros simples si y sólo si se satisface la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{r}{\sqrt{2\alpha n - 1 + \omega^2}(\omega^2 - 1)} \right| > \left| \frac{\xi(1 + \sqrt{2\alpha n - 1}t_m)(\alpha n - 1)}{n(2\alpha n - 1)} \right|. \quad (55)$$

En resumen, la condición de Melnikov para el sistema (43) estará dada por los valores de los parámetros que satisfagan (54) y (55). Para que esto sea posible, si  $\alpha > \frac{n+1}{n}$ , entonces los parámetros deben de satisfacer la condición (55) para que el sistema pueda presentar comportamiento caótico, es decir, la condición de Melnikov estará dada por  $M_2(\theta)$ . Si  $\alpha < \frac{n+1}{n}$ , los parámetros deben de satisfacer (54), es decir, la condición de Melnikov estará dada por  $M_1(\theta)$ . Más aún, se tiene que las condiciones (54) y (55) se satisfacen para valores de  $n$  suficientemente grandes.

#### 4.1.4. Solución del sistema aproximado

El objetivo de esta sección es obtener la solución del sistema seccionalmente lineal (42). Esta será utilizada para evitar los errores numéricos inherentes a cualquier algoritmo numérico utilizado para obtener la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y para demostrar que la solución del sistema seccionalmente lineal (42) converge a la solución del sistema discontinuo (11).

Por lo tanto, la solución del sistema (42) estará dada por la concatenación de las soluciones en las regiones  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  y  $\mathcal{P}_3$ . La solución para cada región  $\mathcal{P}_i$ , se denotará  $\varphi_n^{\mathcal{P}_i}$ , y está dada por las soluciones  $\varphi^{D_1}$  de la ecuación (34) para la región  $\mathcal{P}_1$  y  $\varphi^{D_2}$  de la ecuación (35) para la región  $\mathcal{P}_3$ . Finalmente, para la región  $\mathcal{P}_2$ , se obtiene la solución denotada por  $\varphi_n^{\mathcal{P}_2}$ ;

$$\varphi^{\mathcal{P}_2}(x_0, t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\Delta t} \left( G_1 \cosh(\kappa_2 \Delta t) + \frac{\xi G_1 + D_2}{\kappa_2} \sinh(\kappa_2 \Delta t) \right) - \frac{\delta}{\alpha n - 1} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \\ e^{-\xi\Delta t} \left( D_2 \cosh(\kappa_2 \Delta t) + \frac{G_1(\alpha n - 1) - \xi D_2}{\kappa_2} \sinh(\kappa_2 \Delta t) \right) + c_2 \omega \cos(\omega t) - c_1 \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (56)$$

donde  $\kappa_2 = \sqrt{2\alpha n - 1 + \xi^2}$ ,  $c_1 = \frac{-2r\xi\omega}{(2\alpha n - 1 + \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}$ ,  $c_2 = \frac{-r(2\alpha n - 1 + \omega^2)}{(2\alpha n - 1 + \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}$ ,

$$I_1 = x_{10} - \frac{\alpha}{2\alpha n - 1} - c_1 \cos(\omega t_0) - c_2 \sin(\omega t_0).$$

Es decir, una solución del sistema aproximado (42), la cual se denotará  $\varphi_n^{a_2}$ , está dada

por la concatenación de las soluciones en cada una de las regiones denotadas por  $\varphi^{\mathcal{P}_1}$ ,  $\varphi^{\mathcal{P}_2}$  y  $\varphi^{\mathcal{P}_3}$ . Por ejemplo, si  $x_0 \in \mathcal{P}_1$  y posteriormente la órbita llega a la región  $\mathcal{P}_2$  en un tiempo finito  $t_1$  y en un tiempo  $t_2$  entra a la región  $\mathcal{P}_3$  y permanece ahí, entonces la solución para el intervalo  $t_0 + t_1 + t_2 + \sigma$ , con  $\sigma > 0$ , estará dada por;

$$\varphi_n^{a2}(x_0, t) = \begin{cases} \varphi^{\mathcal{P}_1}(x_0, t), & t_0 \leq t \leq t_{n_1}; \\ \varphi^{\mathcal{P}_2}(y_0, t), & t_{n_1} \leq t \leq t_{n_2}; \\ \varphi^{\mathcal{P}_3}(z_0, t), & t_{n_2} \leq t \leq t_{n_2} + \sigma; \end{cases}, \quad (57)$$

donde  $y_0 = \varphi^{\mathcal{P}_1}(x_0, t_1)$ ,  $z_0 = \varphi^{\mathcal{P}_2}(y_0, t_2)$ .

#### 4.1.5. Análisis de convergencia

En esta sección se prueba la convergencia de la solución del sistema seccionalmente lineal (42) a la solución del sistema discontinuo (11). Esto se añade al hecho de que los puntos de equilibrio y el hamiltoniano del sistema aproximado convergen a los equilibrios y al hamiltoniano del sistema discontinuo. Más aún, la condición de Melnikov es válida para valores suficientemente grandes de  $n$ . Por lo tanto, se puede concluir que el sistema discontinuo presenta dinámica caótica y la condición de Melnikov puede ser usada para predecir tal ocurrencia.

Para probar que la solución del sistema aproximado converge a la solución del sistema discontinuo, suponga que  $x_0 = (0, x_{20})^T$ , con  $x_{20} > 0$ . Además, considere un intervalo de tiempo finito  $t = [0, T]$ , tal que  $\|\varphi(x_0, T)\| > \frac{1}{n}$ . Bajo las condiciones anteriores, se tiene que la diferencia entre las órbitas de ambos sistemas en el semiplano derecho, en  $t = T$ , está dada por:

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(x_0, T) - \varphi(x_0, T)\| &= \left\| \varphi_n^{\mathcal{D}a3}(\varphi_n^{\mathcal{D}a2}(y_0, t_n), T) - \varphi^{\mathcal{D}2}(x_0, T) \right\| \\ &= \left\| \varphi_n^{\mathcal{D}a3}(y_0, T) - \varphi^{\mathcal{D}2}(x_0, T) \right\| \\ &= \left\| e^{-\xi T} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \bar{B}_1 - \theta \frac{\xi \bar{B}_1 + \bar{A}_2}{\kappa} - B_1 & \theta \bar{B}_1 + \delta \frac{\xi \bar{B}_1 + \bar{A}_2}{\kappa} - \frac{\xi B_1 + A_2}{\kappa} \\ \delta \bar{A}_2 + \theta \frac{\bar{B}_1 + \xi \bar{A}_2}{\kappa} - A_2 & \theta \bar{A}_2 - \delta \frac{\bar{B}_1 + \xi \bar{A}_2}{\kappa} + \frac{B_1 + \xi A_2}{\kappa} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \cos(\kappa T) \\ \text{sen}(\kappa T) \end{bmatrix} \right\| \end{aligned}$$

$$\leq |e^{-\xi T}| \sqrt{\lambda_{\max}(Q^H Q)},$$

donde

$$\delta = e^{\xi t_n} \cos(\kappa t_n), \theta = e^{\xi t_n} \sen(\kappa t_n), \bar{B}_1 = y_{10} - \alpha - c_2 \cos(\omega t_n) - c_3 \sen(\omega t_n),$$

$$\bar{A}_2 = y_{20} + c_3 \omega \cos(\omega t_n) - c_2 \omega \sen(\omega t_n), B_1 = -\alpha - c_2, A_2 = x_{20} + c_3 \omega,$$

$$y_{10} = e^{-\xi t_n} \left( -a_1 \cosh(\kappa_1 t_n) + \frac{-a_1 \xi + x_{20} - a_2 \omega}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1 t_n) \right) + a_1 \cos(\omega t_n) + a_1 \sen(\omega t_n)$$

$$y_{20} = e^{-\xi t_n} \left( (x_{20} - a_2 \omega) \cosh(\kappa_1 t_n) + \frac{-a_1(\alpha n - 1) + \xi(x_{20} - a_2 \omega)}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1 t_n) \right) + a_2 \omega \cos(\omega t_n) - a_1 \omega \sen(\omega t_n),$$

$$t_n = \frac{2}{n x_{02} + \sqrt{n(x_{02}^2 - 4\xi(b_1 \omega - x_{02}) - 2a_1(\alpha n + \omega^2 - 1))}}$$

$\lambda_{max}$  representa el máximo valor propio de  $Q^H Q$  y  $Q^H$  es la transpuesta conjugada de  $Q$ .

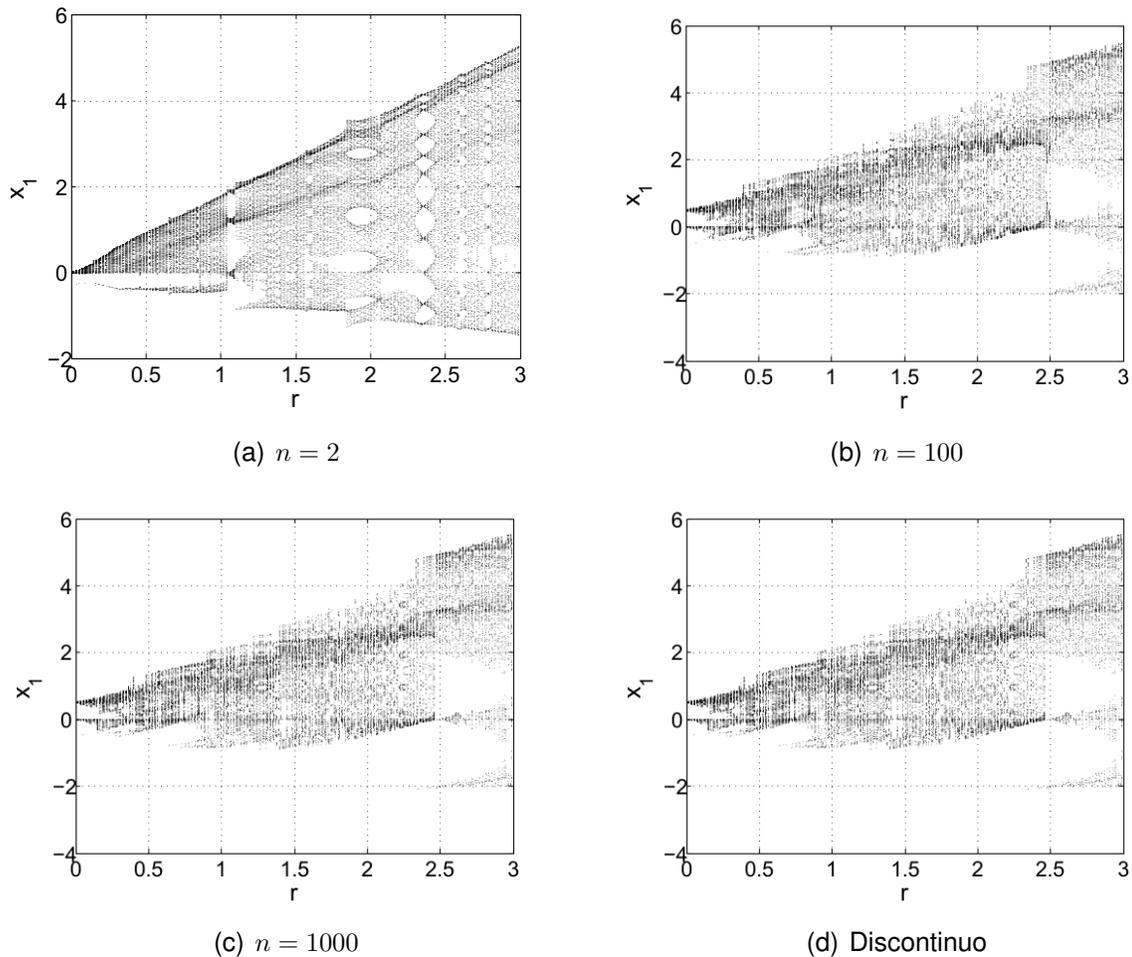
Dado que  $\lambda_{max}(Q^H Q)$  es tan pequeño como se desee, entonces se tiene que la solución (57) del sistema aproximado converge a la solución (36) del sistema discontinuo.

#### 4.1.6. Diagrama de bifurcación

Otra manera de conocer si un sistema presenta dinámica caótica es mediante el diagrama de bifurcación. El objetivo de esta sección es obtener el diagrama de bifurcación del sistema aproximado (49) para los parámetros  $\alpha$ ,  $\xi$  y  $\omega$  fijos,  $r$  variando en el intervalo  $r \in (0, 3)$  y diferentes valores de  $n = 2, 100, 1000$ , así como el diagrama de bifurcación del sistema discontinuo (11), para los mismo valores paramétricos. Entonces, se observará que para  $n$  suficientemente grande en particular  $n = 1000$ , el diagrama de bifurcación del sistema aproximado es similar al diagrama de bifurcación del sistema discontinuo, es decir, predicen el mismo comportamiento.

Considere  $\alpha = 0.5$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . En la Figuras 8(a)– 8(c) se muestran los diagramas de bifurcación del sistema (42) para  $n = 2, 100, 1000$  y en la Figura 8(d) el diagrama de bifurcación del sistema discontinuo (11). Observese que los diagramas de las Figuras 8(c) y 8(d) son prácticamente los mismo o equivalentes. Por tanto, se confirma la predicción hecha con la función de Melnikov. Es decir, dado que el sistema aproximado

(42) presenta dinámica caótica, entonces el sistema discontinuo (11) también presenta dinámica caótica.



**Figura 8: Diagrama de bifurcación del sistema discontinuo (11), y del sistema seccionalmente lineal (42) para diferentes valores en los parámetros.**

## 4.2. Conclusiones

Para un determinado conjunto de parámetros del sistema seccionalmente lineal (42), se ha demostrado que produce caos homoclínico, debido a que para  $n$  suficientemente grande se tiene que:

- Los puntos de equilibrio del sistema seccionalmente lineal (42) convergen a los puntos de equilibrio del sistema discontinuo (11).
- La función hamiltoniana del sistema seccionalmente lineal converge a la función hamiltoniana del sistema discontinuo.

- Las órbitas homoclínicas del sistema seccionalmente lineal (42) convergen a las órbitas homoclínicas del sistema discontinuo (11).
- La solución del sistema seccionalmente lineal (42) converge a la solución del sistema discontinuo (11).

Se puede concluir que el sistema discontinuo (11) también presenta dinámica caótica. Más aún, para valores de  $n \geq 1000$ , el diagrama de bifurcación del sistema seccionalmente lineal (42) es esencialmente el mismo que el diagrama de bifurcación del sistema discontinuo (11).

## Capítulo 5. Sistema discontinuo tipo II

---

En este capítulo se presentan las condiciones en los parámetros de un sistema de segundo orden en el plano, con dos discontinuidades, para que éste presente dinámica caótica. Estos sistemas pueden presentarse cuando se considera la fricción seca en el modelo y se utiliza un control discontinuo de la posición (ver por ejemplo, Awrejcewicz y Holicke (1999); Martinez *et al.* (2008)). Dado que para dicho sistema no es posible utilizar el método de Melnikov para sistemas no suaves, se propone el uso de una aproximación continua, dada por la función saturación, sólo para el término  $\text{sign}(x_1)$ , la otra discontinuidad se considerará parte de la perturbación. Para el sistema aproximado se obtienen las condiciones en los parámetros para que éste presente dinámica caótica.

En particular, se tiene que los puntos de equilibrio del sistema aproximado son los mismos que los del sistema discontinuo. Además, el hamiltoniano del sistema aproximado converge al hamiltoniano del sistema discontinuo, y la solución del sistema aproximado puede estar tan cerca como se desee de la solución del sistema discontinuo. Igualmente, la condición de Melnikov se sigue satisfaciendo cuando la pendiente de la saturación es suficientemente grande. Además, la condición de Melnikov obtenida para el sistema aproximado puede utilizarse para predecir dinámica caótica en el sistema discontinuo, para un valor de  $n$  suficientemente grande. Por todo lo anterior, se puede concluir que el sistema discontinuo puede presentar dinámica caótica.

Finalmente, se propone que esta condición sea utilizada para determinar el rango en el parámetro para obtener el diagrama de bifurcación. Se analizan los diagramas de bifurcación del sistema aproximado para diferentes valores de  $n = 2, 100, 1000$  y se obtiene que para  $n = 1000$ , los diagramas de ambos sistemas son prácticamente los mismos.

### 5.1. Planteamiento del problema

Considere el siguiente sistema discontinuo:

$$\dot{x} = f_i(x) + \epsilon g_i(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (58)$$

donde

$$f_i(x) + \epsilon g_i(x, t) = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g_1(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d1}, \\ f_1(x) + \epsilon g_2(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d2}, \\ f_2(x) + \epsilon g_2(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d3}, \\ f_2(x) + \epsilon g_1(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d4}. \end{cases} \quad (59)$$

El espacio de estado  $\mathbb{R}^2$  es dividido en cuatro subconjuntos abiertos disjuntos,  $\mathcal{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , por dos hipersuperficies  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, 2$ , tal que  $\mathbb{R}^2 = \cup_{i=1}^4 \mathcal{D}_{di} \cup_{j=1}^2 \Sigma_j$ . Las hipersuperficies  $\Sigma_j$  son definidas por una función  $h_j(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Más aún, las funciones  $f_j$  son suficientemente suaves en  $x$  para todo  $x \in \mathcal{D}_{di}$  y  $g_j$  son funciones  $T$ -periódicas del tiempo. Los subconjuntos  $\mathcal{D}_{di}$  y las hipersuperficies  $\Sigma_j$  pueden ser formuladas de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{d1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) > 0 \wedge h_2(x) > 0\}; & \mathcal{D}_{d2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) > 0 \wedge h_2(x) < 0\}; \\ \mathcal{D}_{d3} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) < 0 \wedge h_2(x) < 0\}; & \mathcal{D}_{d4} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) < 0 \wedge h_2(x) > 0\}; \\ \Sigma_j &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_j(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Si  $\epsilon = 0$ , se tiene el siguiente sistema sin perturbar:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathcal{S}_{d1}, \\ f_2(x), & x \in \mathcal{S}_{d2}, \end{cases} \quad (60)$$

donde el espacio de estado  $\mathbb{R}^2$  es dividido en dos subconjuntos abiertos disjuntos  $\mathcal{S}_{dk}$ ,  $k = 1, 2$  por una hipersuperficie  $\Sigma$ . Dichos subconjuntos pueden ser formulados como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{d1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) < 0\}; \\ \mathcal{S}_{d2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) > 0\}; \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\}. \end{aligned} \quad (61)$$

Para el sistema (60) suponga lo siguiente: (i) tiene un punto de equilibrio  $x_0 \in \mathcal{S}_{d1}$ , el cual es un punto de equilibrio tipo silla y tiene una órbita homoclínica  $u_0$  asociada a ese

punto de equilibrio y (ii) la órbita homoclínica  $u_0$  tiene solo cruces transversales con la hipersuperficie  $\Sigma$ , (iii) el sistema (60) es hamiltoniano y (iv)  $g_i$  es  $T$ -periódica en el tiempo. Si estas condiciones son satisfechas, entonces es posible obtener la función de Melnikov como se mencionó en el capítulo 2. Además, si el sistema es continuo, entonces la función de Melnikov puede ser obtenida como en el caso suave.

## 5.2. Sistema discontinuo tipo II

El objetivo ahora es estudiar una clase de sistemas de segundo orden discontinuo descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\xi x_2 + \alpha \text{sign}(x_1) - \delta \text{sign}(x_2) + u(t),\end{aligned}\tag{62}$$

donde  $0 < \xi < 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $0 < \delta \ll 1$ ,  $u(t) = r \text{sen}(\omega t)$ ,  $r > \delta$ .

El sistema (62) puede ser considerado como un sistema de segundo orden con fricción de Coulomb y un controlador discontinuo en la posición ver (Awrejcewicz y Holicke, 1999; Martinez *et al.*, 2008).

Si se supone que los parámetros  $\xi$ ,  $\delta$  y  $r$  son pequeños y están dados por  $2\xi = \epsilon \bar{\xi}$ ,  $\delta = \epsilon \bar{\delta}$  y  $r = \epsilon \bar{r}$ , para algún valor pequeño  $\epsilon$ , entonces el sistema (62) puede ser visto como un sistema perturbado, el cual tiene la forma siguiente:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g_1(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d1}, \\ f_1(x) + \epsilon g_2(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d2}, \\ f_2(x) + \epsilon g_2(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d3}, \\ f_2(x) + \epsilon g_1(x, t), & x \in \mathcal{D}_{d4}. \end{cases}\tag{63}$$

$$\text{Aquí } x = (x_1, x_2)^T, f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \alpha \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \alpha \end{pmatrix},$$

$$g_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\bar{\xi}x_2 + \bar{\delta} + \bar{r}\text{sen}(\omega t) \end{pmatrix}, g_2(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\bar{\xi}x_2 - \bar{\delta} + \bar{r}\text{sen}(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Las fronteras de conmutación y los dominios están definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \Sigma_{x_1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = x_1 = 0\}; \\ \Sigma_{x_2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_2(x) = x_2 = 0\}; \\ \mathcal{D}_{d1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) > 0 \wedge h_2(x) > 0\}; \\ \mathcal{D}_{d2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) > 0 \wedge h_2(x) < 0\}; \\ \mathcal{D}_{d3} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) < 0 \wedge h_2(x) < 0\}; \\ \mathcal{D}_{d4} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) < 0 \wedge h_2(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Cuando  $\epsilon = 0$ , el sistema (63) puede ser descrito por la expresión (64), esto es:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in \mathcal{S}_{d1}; \\ f_2(x), & \text{si } x \in \mathcal{S}_{d2}; \end{cases} \quad (64)$$

donde

$$\mathcal{S}_{d1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) < 0\}, \mathcal{S}_{d2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) > 0\} \text{ y } \Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = 0\}.$$

Más aún, este sistema es hamiltoniano y su función hamiltoniana está dada por

$$\mathcal{H}_d(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 - \alpha|x_1|. \quad (65)$$

Como se puede observar el sistema sin perturbar (64) es el mismo que el sistema sin perturbar (14). Es decir, no es posible utilizar el método de Melnikov para este sistema. Debido a lo anterior, se utilizará una aproximación continua en el término  $\text{sign}(x_1)$  para satisfacer las condiciones de método de Melnikov.

### 5.3. Sistema aproximado tipo II

Considere una aproximación del término discontinuo  $\text{sign}(x_1)$  del sistema (63), dada por la función saturación dada por (21). Debido a esta aproximación continua, el sistema (63) queda como sigue:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) + \epsilon g_1(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a1}; \\ f_1(x) + \epsilon g_2(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a2}; \\ f_n(x) + \epsilon g_2(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a3}; \\ f_2(x) + \epsilon g_2(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a4}; \\ f_2(x) + \epsilon g_1(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a5}; \\ f_n(x) + \epsilon g_1(x, t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a6}; \end{cases} \quad (66)$$

donde  $f_n(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ (\alpha n - 1)x_1 \end{pmatrix}$ .

Las superficies y los subconjuntos pueden ser definidos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \Sigma_{n_1} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1}(x) = x_1 - \frac{1}{n} \right\}, \\ \Sigma_{n_2} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_2}(x) = x_1 + \frac{1}{n} \right\}, \\ \mathcal{D}_{a1} &= \{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1} > 0 \wedge h_2 > 0 \}, \\ \mathcal{D}_{a2} &= \{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1} > 0 \wedge h_2 < 0 \}, \\ \mathcal{D}_{a3} &= \{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1} < 0 \wedge h_{n_2} > 0 \wedge h_2 < 0 \}, \\ \mathcal{D}_{a4} &= \{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_2} < 0 \wedge h_2 < 0 \}, \\ \mathcal{D}_{a5} &= \{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_2} < 0 \wedge h_2 > 0 \}, \\ \mathcal{D}_{a6} &= \{ x \in \mathbb{R}^2 : h_{n_1} < 0 \wedge h_{n_2} > 0 \wedge h_2 > 0 \}. \end{aligned} \quad (67)$$

Cuando  $\epsilon = 0$  el sistema (66) puede ser descrito como:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in \mathcal{S}_{a1}; \\ f_n(x), & \text{si } x \in \mathcal{S}_{a2}; \\ f_2(x), & \text{si } x \in \mathcal{S}_{a3}; \end{cases} \quad (68)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{a1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n1} > 0\}, \\ \mathcal{S}_{a2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n1} < 0 \wedge h_{n2} > 0\}, \\ \mathcal{S}_{a3} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : h_{n2} < 0\}. \end{aligned} \quad (69)$$

El sistema sin perturbar (68) es un sistema hamiltoniano, cuya función hamiltoniana es la siguiente:

$$\mathcal{H}_P(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + V(x_1; n), \quad (70)$$

donde

$$V(x_1; n) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{2} - \alpha \left(x_1 - \frac{1}{2n}\right), & \text{si } x \in \mathcal{S}_{a1}; \\ -(\alpha n - 1) \frac{x_1^2}{2}, & \text{si } x \in \mathcal{S}_{a2}; \\ \frac{x_1^2}{2} + \alpha \left(x_1 + \frac{1}{2n}\right), & \text{si } x \in \mathcal{S}_{a3}. \end{cases}$$

Puesto que el sistema (68) es el mismo que el sistema (24), es posible aplicar el método de Melnikov para sistemas no suaves.

### 5.3.1. Función de Melnikov

La función de Melnikov para el sistema aproximado (66) está dada por la solución de la siguiente integral:

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_0(t)) \wedge G(t + \theta, u_0(t)) dt. \quad (71)$$

Puesto que

$$F(u_0(t)) \wedge G(t + \theta, u_0(t)) = -\bar{\xi}(u_{02})^2 - \bar{\delta} u_{02} \text{sign}(u_{02}) + \bar{r} u_{02} \text{sen}(\omega(t + \theta)),$$

entonces, al sustituir la expresion anterior en (71), se tiene que

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} -\bar{\xi}(u_{0_2})^2 - \bar{\delta} u_{0_2} \text{sign}(u_{0_2}) + \bar{r} u_{0_2} \text{sen}(\omega(t + \theta)) dt. \quad (72)$$

Además, al sustituir la órbita homoclínica dada por la ecuación (28) en la ecuación (72), y después de simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned} M(\theta) = & \frac{\sqrt{a}}{n} e^{\sqrt{a} t_1} \int_{-\infty}^{-t_1} \left( -\frac{\bar{\xi}\sqrt{a}}{n} e^{\sqrt{a}(2t+t_1)} - \bar{\delta} e^{\sqrt{a} t} \text{sign}\left(\frac{\sqrt{a}}{n} e^{\sqrt{a}(t+t_1)}\right) + \bar{r} e^{\sqrt{a} t} \text{sen}(\omega(t + \theta)) \right) dt \\ & + \sqrt{\frac{a\alpha}{n}} \int_{-t_1}^{t_1} \left( \bar{\xi} \sqrt{\frac{a\alpha}{n}} \text{sen}^2 t - \bar{\delta} \text{sen} t \text{sign}\left(\sqrt{\frac{a\alpha}{n}} \text{sen} t\right) - \bar{r} \text{sen} t \text{sen}(\omega(t + \theta)) \right) dt \\ & - \frac{\sqrt{a}}{n} e^{\sqrt{a} t_1} \int_{t_1}^{\infty} \left( \frac{-\bar{\xi}\sqrt{a}}{n} e^{-\sqrt{a}(2t-t_1)} + \bar{\delta} e^{-\sqrt{a} t} \text{sign}\left(\frac{\sqrt{a}}{n} e^{-\sqrt{a}(t-t_1)}\right) + \bar{r} e^{-\sqrt{a} t} \text{sen}(\omega(t + \theta)) \right) dt, \end{aligned} \quad (73)$$

Al calcular cada una de las integrales de (73) y simplificando se tiene el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} M(\theta) = & -\frac{\bar{\xi}\gamma\sqrt{a}(1 + \sqrt{at_1})}{n} - 2\bar{\delta}\sqrt{\frac{a}{n}}(\sqrt{an} - \sqrt{a}) \\ & + \frac{2\alpha\bar{r}\sqrt{a}\text{sen}\left(\omega t_1 + \arctan\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right)\right)}{(\omega^2 - 1)\sqrt{\omega^2 + a}} \cos(\omega\theta). \end{aligned} \quad (74)$$

Por lo tanto, para que  $M(\theta) = 0$  tenga ceros simples, debe satisfacerse:

$$\left| \frac{r}{(\omega^2 - 1)\sqrt{\omega^2 + a}} \right| > \left| \frac{\xi}{n}(1 + \sqrt{at_1}) + \delta \left( \sqrt{a} - \frac{\sqrt{a+1}}{n} \right) \right|. \quad (75)$$

De igual manera, es importante señalar que la condición (75) es válida para el conjunto de valores en los parámetros que la satisfacen y en particular para valores de  $n$  suficientemente grandes.

#### 5.4. Solución analítica de los sistemas

Dado que los sistemas son seccionalmente lineales, en esta sección se presentan las soluciones analíticas, tanto del sistema discontinuo como del aproximado. Dichas solucio-

nes serán utilizadas para validar los resultados presentados en la siguiente sección, con el propósito de evitar algún error posiblemente producido por la herramienta numérica.

#### 5.4.1. Solución del sistema discontinuo tipo II

El sistema (62) puede ser escrito como un sistema lineal no autónomo de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + Bu_1(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{d1}; \\ Ax + Bu_2(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{d2}; \\ Ax + Bu_3(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{d3}; \\ Ax + Bu_4(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{d4}; \end{cases} \quad (76)$$

donde  $u_1(t) = \alpha - \delta + r\text{sen}(\omega t)$ ,  $u_2(t) = \alpha + \delta + r\text{sen}(\omega t)$ ,  $u_3(t) = -\alpha + \delta + r\text{sen}(\omega t)$ , y  $u_4(t) = -\alpha - \delta + r\text{sen}(\omega t)$ .

En este particular caso, una solución general  $\varphi_d$  está dada por la solución del sistema en cada una de las regiones. Esto es:

para  $x_0 \in \mathcal{D}_{d1}$ ,

$$\varphi^{\mathcal{D}_{d1}}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\Delta t} \left( C_1 \cos(\kappa\Delta t) + \frac{\xi C_1 + A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + \alpha - \delta + c_2 \cos(\omega t) + c_3 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\Delta t} \left( A_2 \cos(\kappa\Delta t) - \frac{C_1 + \xi A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + c_3 \omega \cos(\omega t) - c_2 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (77)$$

donde  $C_1 = x_{10} - \alpha + \delta - c_2 \cos(\omega t_0) - c_3 \text{sen}(\omega t_0)$ .

Para  $x \in \mathcal{D}_{d2}$ ,

$$\varphi^{\mathcal{D}_{d2}}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\Delta t} \left( D_1 \cos(\kappa\Delta t) + \frac{\xi D_1 + A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + \alpha + \delta + c_2 \cos(\omega t) + c_3 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\Delta t} \left( A_2 \cos(\kappa\Delta t) - \frac{D_1 + \xi A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + c_3 \omega \cos(\omega t) - c_2 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (78)$$

donde  $D_1 = x_{10} - \alpha - \delta - c_2 \cos(\omega t_0) - c_3 \text{sen}(\omega t_0)$ .

Para  $x \in \mathcal{D}_{d3}$ ,

$$\varphi^{\mathcal{D}_{d3}}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\Delta t} \left( E_1 \cos(\kappa\Delta t) + \frac{\xi E_1 + A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) - \alpha + \delta + c_2 \cos(\omega t) + c_3 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\Delta t} \left( A_2 \cos(\kappa\Delta t) - \frac{E_1 + \xi A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + c_3 \omega \cos(\omega t) - c_2 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (79)$$

donde  $E_1 = x_{10} + \alpha - \delta - c_2 \cos(\omega t_0) - c_3 \text{sen}(\omega t_0)$ .

Para  $x \in \mathcal{D}_{d4}$ ,

$$\varphi^{\mathcal{D}_{d4}}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\Delta t} \left( F_1 \cos(\kappa\Delta t) + \frac{\xi F_1 + A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) - \alpha + \delta + c_2 \cos(\omega t) + c_3 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\Delta t} \left( A_2 \cos(\kappa\Delta t) - \frac{F_1 + \xi A_2}{k} \text{sen}(\kappa\Delta t) \right) + c_3 \omega \cos(\omega t) - c_2 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (80)$$

donde  $F_1 = x_{10} + \alpha - \delta - c_2 \cos(\omega t_0) - c_3 \text{sen}(\omega t_0)$ .

Las órbitas cruzan transversalmente  $\Sigma_{x_1}$  y si suponemos que  $r > \alpha - \delta$ , entonces el caso cuando las órbitas a lo largo de  $\Sigma_{x_2}$  pueden deslizarse es excluido. Por lo tanto, una solución del sistema (76) dada por  $\varphi_d$ , puede ser obtenida por la concatenación de las soluciones en cada una de las regiones, representadas por las ecuaciones (77)-(80). Por ejemplo, si  $x_0 \in \mathcal{D}_{d1}$ , y  $t_1$  denota el tiempo en el cual la órbita alcanza la superficie de discontinuidad  $\mathcal{D}_{d2}$ ,  $t_2$  para  $\mathcal{D}_{d3}$ , y  $t_3$  para  $\mathcal{D}_{d4}$ , entonces, para un intervalo  $(t_0, t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \sigma)$ ,  $\sigma > 0$ , la solución está dada por:

$$\varphi_d(x_0, t) = \begin{cases} \varphi^{\mathcal{D}_{d1}}(x_0, t), & t_0 \leq t \leq t_1; \\ \varphi^{\mathcal{D}_{d2}}(y_0, t), & t_1 \leq t \leq t_2; \\ \varphi^{\mathcal{D}_{d3}}(z_0, t), & t_2 \leq t \leq t_3; \\ \varphi^{\mathcal{D}_{d4}}(w_0, t), & t_3 \leq t \leq t_3 + \sigma; \end{cases} \quad (81)$$

donde  $y_0 = \varphi^{\mathcal{D}_{d1}}(x_0, t_1)$ ,  $z_0 = \varphi^{\mathcal{D}_{d2}}(y_0, t_2)$ ,  $w_0 = \varphi^{\mathcal{D}_{d3}}(z_0, t_3)$ .

### 5.4.2. Solución del sistema aproximado tipo II

Si se considera la aproximación del término  $\text{sign}(x_1)$  por la función saturación  $\text{sat}_n(x_1)$  dada por la ecuación (21), entonces el sistema (62) puede ser escrito como sigue:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + Bu_1(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a1}; \\ Ax + Bu_2(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a2}; \\ A_n x + Bu_{n1}(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a3}; \\ Ax + Bu_3(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a4}; \\ Ax + Bu_4(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a5}; \\ A_n x + Bu_{n2}(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{a6}; \end{cases} \quad (82)$$

donde  $u_{n1}(t) = \delta + r\text{sen}(\omega t)$  y  $u_{n2}(t) = -\delta + r\text{sen}(\omega t)$ .

De manera similar, la solución  $\varphi_{an}$  de (82) puede ser obtenida por la concatenación de las órbitas en cada una de las regiones, denotadas por  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{ai}}$ , para cada región  $\mathcal{D}_{ai}$ , con  $i = 1, \dots, 6$ . Para  $x_0 \in \mathcal{D}_{a1}$ , se puede ver que  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}} = \varphi^{\mathcal{D}_{a1}}$ . Similarmente, para  $x_0 \in \mathcal{D}_{a2}$ ,  $x \in \mathcal{D}_{a4}$  y  $x \in \mathcal{D}_{a5}$ , se tiene  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}} = \varphi^{\mathcal{D}_{a2}}$ ,  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a4}} = \varphi^{\mathcal{D}_{a3}}$  y  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a5}} = \varphi^{\mathcal{D}_{a4}}$ , respectivamente. Finalmente, para  $x_0 \in \mathcal{D}_{a3}$ , se obtiene la expresión siguiente:

$$\varphi_n^{n1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\eta} \left( G_1 \cosh(\kappa_1\eta) + \frac{\xi G_1 + D_2}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1\eta) \right) - \frac{\delta}{\alpha n - 1} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\eta} \left( D_2 \cosh(\kappa_1\eta) + \frac{G_1(\alpha n - 1) - \xi D_2}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1\eta) \right) + a_2 \omega \cos(\omega t) - a_1 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (83)$$

donde  $G_1 = x_{10} + \frac{\delta}{\alpha n - 1} - a_1 \cos(\omega t_0) - a_2 \text{sen}(\omega t_0)$ .

Y para  $x \in \mathcal{D}_{a6}$ ,

$$\varphi_n^{n1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi\eta} \left( H_1 \cosh(\kappa_1\eta) + \frac{\xi H_1 + D_2}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1\eta) \right) + \frac{\delta}{\alpha n - 1} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \text{sen}(\omega t) \\ e^{-\xi\eta} \left( D_2 \cosh(\kappa_1\eta) + \frac{H_1(\alpha n - 1) - \xi D_2}{\kappa_1} \sinh(\kappa_1\eta) \right) + a_2 \omega \cos(\omega t) - a_1 \omega \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (84)$$

donde  $H_1 = x_{10} - \frac{\delta}{\alpha n - 1} - a_1 \cos(\omega t_0) - a_2 \text{sen}(\omega t_0)$ .

De la misma manera que para el sistema discontinuo (76), una solución del sistema aproximado (82) puede ser obtenida por la concatenación de  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}} = \varphi^{\mathcal{D}_{a1}}$  (77),  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}} =$

$\varphi^{\mathcal{D}_{a2}}$  (78),  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}$  (83),  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a4}} = \varphi^{\mathcal{D}_{a3}}$  (79),  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a5}} = \varphi^{\mathcal{D}_{a4}}$  (80) y  $\varphi_n^{\mathcal{D}_{a6}}$  (84).

Por ejemplo, si  $x_0 \in \mathcal{D}_{a1}$  y  $t_{n_i}$  es el tiempo que la órbita evoluciona en la región  $\mathcal{D}_{a_i}$  con  $i = 1, \dots, 5$ , entonces para el intervalo  $(t_0, t_0 + t_{n_1} + t_{n_2} + t_{n_3} + t_{n_4} + t_{n_5} + \sigma)$ ,  $\sigma > 0$ , la solución estará dada por

$$\varphi_{\text{an}}(x_0, t) = \begin{cases} \varphi_n^{\mathcal{D}_{a1}}(x_0, t), & t_0 \leq t \leq t_{n_1}; \\ \varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}}(y_0, t), & t_{n_1} \leq t \leq t_{n_2}; \\ \varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}(z_0, t), & t_{n_2} \leq t \leq t_{n_3}; \\ \varphi_n^{\mathcal{D}_{a4}}(u_0, t), & t_{n_3} \leq t \leq t_{n_4}; \\ \varphi_n^{\mathcal{D}_{a5}}(v_0, t), & t_{n_4} \leq t \leq t_{n_5}; \\ \varphi_n^{\mathcal{D}_{a6}}(w_0, t), & t_{n_5} \leq t \leq t_{n_5} + \sigma; \end{cases} \quad (85)$$

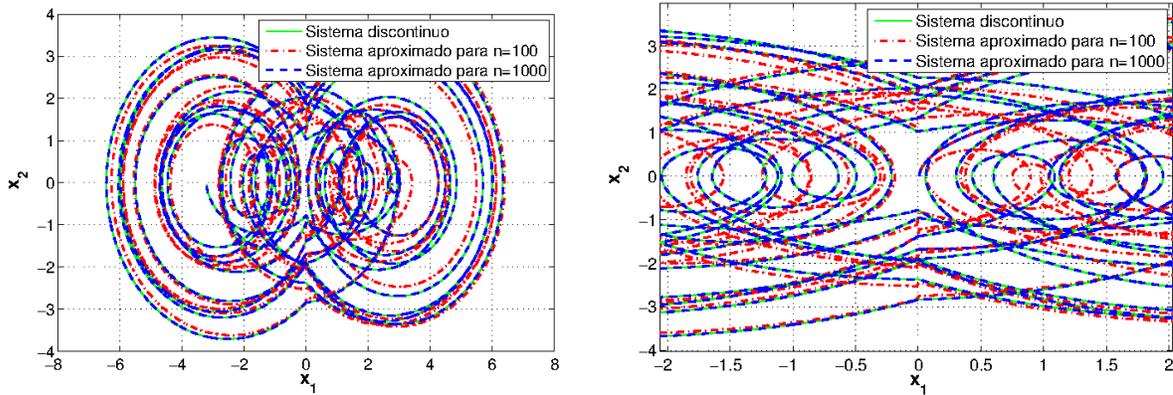
donde  $y_0 = \varphi_n^{\mathcal{D}_{a2}}(x_0, t_{n_1})$ ,  $z_0 = \varphi_n^{\mathcal{D}_{a3}}(y_0, t_{n_2})$ ,  $u_0 = \varphi_n^{\mathcal{D}_{a4}}(z_0, t_{n_3})$ ,  $v_0 = \varphi_n^{\mathcal{D}_{a5}}(u_0, t_{n_4})$ , y  $w_0 = \varphi_n^{\mathcal{D}_{a6}}(v_0, t_{n_5})$ .

## 5.5. Resultados numéricos

En esta sección se mostrará que, para valores grandes de  $n$  en la función saturación, la solución del sistema aproximado tipo II (85) estará tan cerca como se desee a la solución del sistema discontinuo tipo II (81) para condiciones iniciales y entradas iguales. Por tanto, la órbita caótica generada por el sistema aproximado expresión (82) estará muy cerca de la correspondiente órbita del sistema discontinuo representado por la (76), para valores de la pendiente suficientemente grandes. Una observación importante es que, para evitar los errores inherentes a cualquier método numérico (utilizado para resolver la ecuación diferencial) se utilizará las soluciones analíticas dadas en la sección previa. Debido a que el sistema aproximado tipo II presenta dinámica caótica de acuerdo con la condición (75), y que tal condición es satisfecha cuando la pendiente  $n$  del sistema aproximado tipo II es suficientemente grande, es posible concluir que el sistema discontinuo tipo II presenta comportamiento caótico.

Considere los siguientes valores en los parámetros,  $\xi = 0.01$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $\alpha = 1$ ,  $r = 2$ , y  $\omega = 0.32$ . En la Figura 9(a) se puede observar cómo la solución del sistema aproximado tipo II (85) se aproxima a la solución del sistema discontinuo tipo II (81) cuando  $n$  crece,

de  $n = 100$  a  $n = 1000$ . La Figura 9(b) muestra una vista ampliada alrededor de la discontinuidad en el eje- $x_2$  de la Figura 9(a).



(a) Órbitas del sistema discontinuo tipo II (76) y del sistema aproximado tipo II (82), para  $n = 100, 1000$

(b) Una ampliación de la Figura 9(a)

**Figura 9: Órbitas del sistema discontinuo tipo II (76) y del sistema aproximado tipo II (82), para  $n = 100, 1000$**

Además, si se obtiene el error relativo  $e_r$  de la aproximación, definido como

$$e_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1} (x_{1i_{\text{exact}}} - x_{1i_{\text{appr}}})^2 + \sum_{i=1} (x_{2i_{\text{exact}}} - x_{2i_{\text{appr}}})^2}{\sum_{i=1} x_{1i_{\text{exact}}}^2 + \sum_{i=1} x_{2i_{\text{exact}}}^2}}, \quad (86)$$

donde las sumas son calculadas para todos los valores de  $x_{1i}$  y  $x_{2i}$  de ambos sistemas,  $\varphi(x_0, t_i) = (x_{1i_{\text{exact}}}, x_{2i_{\text{exact}}})$ , y  $\varphi_n(x_0, t_i) = (x_{1i_{\text{appr}}}, x_{2i_{\text{appr}}})$ . Si consideramos los siguientes valores en los parámetros,  $\xi = 0.01$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $\alpha = 1$ ,  $r = 2$  y  $\omega = 0.32$ , el error relativo  $e_r$  para  $n = 100$  de 0.1214 y para  $n = 1000$  de  $2.52 \times 10^{-3}$ . Obsérvese que si  $n \geq 1000$ , entonces la solución del sistema aproximado tipo II puede ser considerada como una buena aproximación de la solución del sistema discontinuo tipo II.

En resumen, se tiene que la condición (75) se satisface para cualquier valor de  $n \gg 1$ , i.e.,  $n$  puede elegirse  $n \geq 1000$  y la dinámica exhibida por el sistema aproximado tipo II será similar a la del sistema discontinuo tipo II. Por lo tanto, se puede concluir que el sistema discontinuo tipo II también presenta comportamiento caótico.

El diagrama de bifurcación es otra manera de determinar si un sistema dinámico puede presentar comportamiento caótico. Sin embargo, el desconocimiento del sistema puede causar problemas al momento de elegir el parámetro y su rango a variar, donde el sistema

**Tabla 1: Condición de Melnikov (87) para diferentes valores de  $n$** 

$n$	$r >$
2	0.0158994
100	0.0257785
1000	0.0259735

pueda presentar dinámica caótica. Sin embargo, usando la condición (75), es posible determinar dicho rango. Por ejemplo, si se fija  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\delta$  y  $n$ , y se resuelve para  $r$  en la ecuación (75), se obtiene:

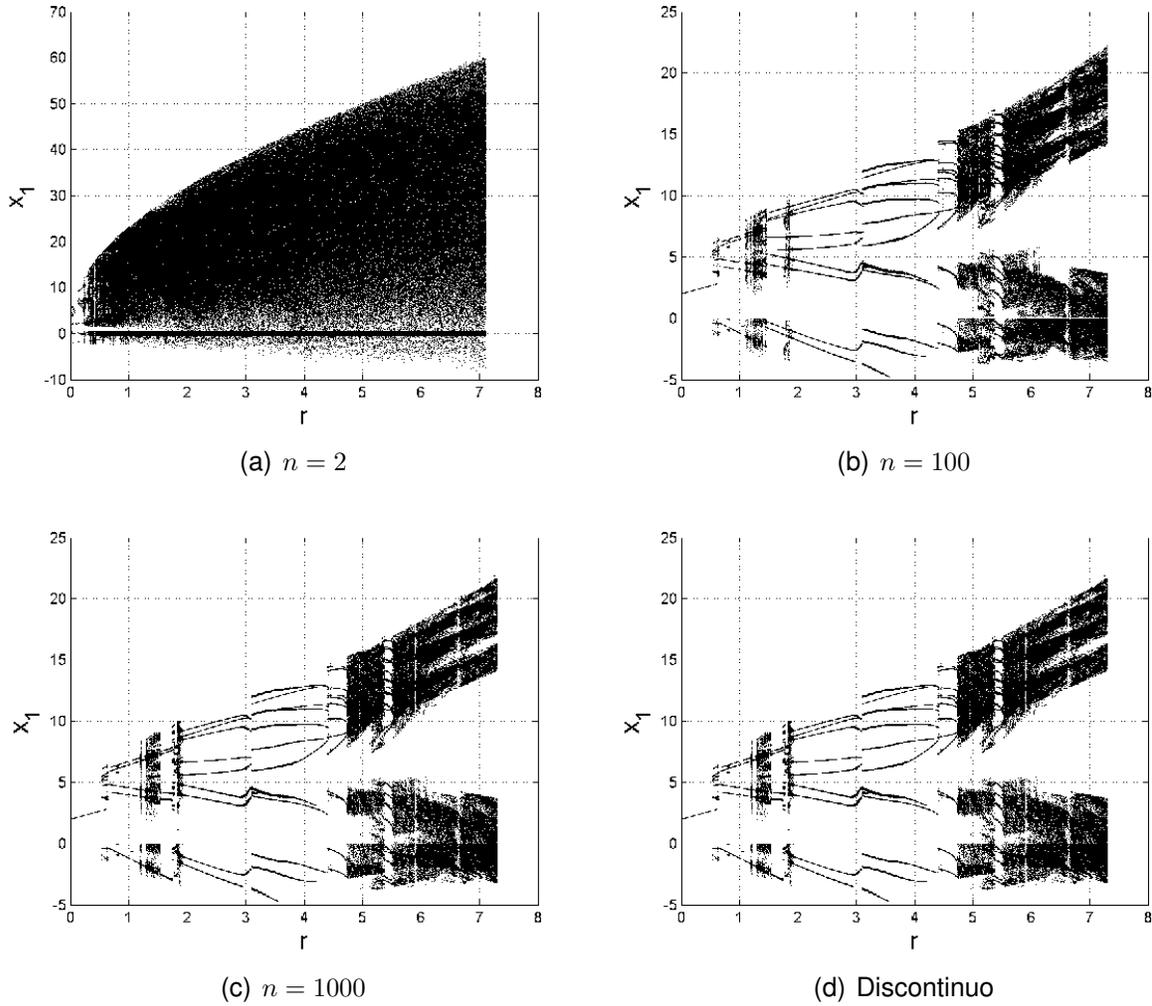
$$|r| > \left| (\omega^2 - 1) (\sqrt{\omega^2 + a}) \left( \frac{\xi (1 + \sqrt{at_1})}{n} + \delta \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha n}} \right) \right) \right|. \quad (87)$$

Ahora se verificará la viabilidad de los resultados obtenidos. Para este propósito, considere los siguientes parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\omega = 0.15\pi$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $\delta = 0.001$ . Sustituyendo  $n = 2, 100, 1000$  en la ecuación (87) se obtiene el valor mínimo del parámetro  $r$  que satisface la condición (87), los cuales se presentan en la Tabla 1.

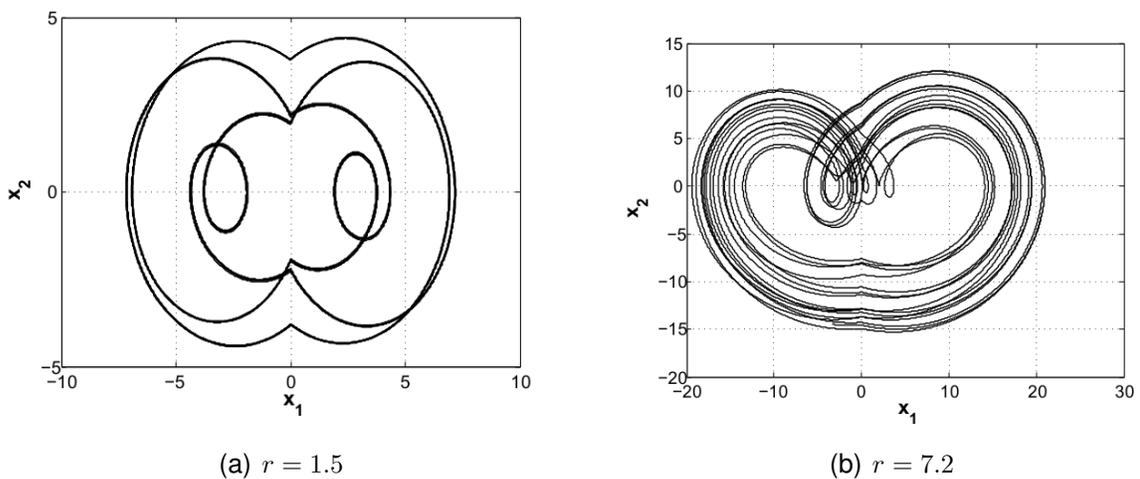
Las Figuras 10(a)–10(d) muestran los diagramas de bifurcación, los cuales confirman las predicciones hechas usando la ecuación (87). Note que, cuando  $n \rightarrow \infty$ , la ecuación (87) está dada por  $(2\delta + \pi\alpha\xi)(\omega^2 - 1)$ . Sustituyendo los parámetros usados en la expresión (87), se tiene que  $r > 0.0259954$  ver Tabla 1. Entonces, se puede suponer que la ecuación (87) puede ser usada para identificar comportamiento caótico en el sistema discontinuo tipo II (62).

Las Figuras 11(a)–11(b) muestran la órbita del sistema discontinuo tipo II para diferentes valores en los parámetros que satisfacen la condición (87) y el diagrama de bifurcación de la Figura 10(d).

Finalmente, se considera la influencia de la frecuencia de excitación en el sistema aproximado tipo II y discontinuo tipo II. En la Figura 12 se muestra, para ambos sistemas, los diagramas de bifurcación, donde se considera los siguientes parámetros,  $\alpha = 2$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $r = 5$  y  $0 \leq \omega \leq 5$ . De nuevo, se observa en la Figura 12 la similitud de ambos sistemas, y las regiones donde pueden presentar respuestas periódicas y caóticas. Las simulaciones de los resultados se presentan en la Figura 13. La respuesta para

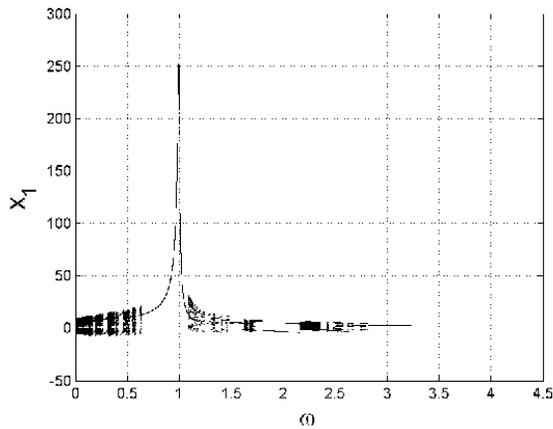
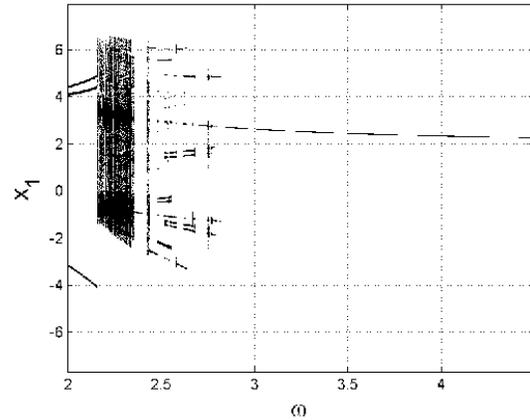


**Figura 10: Diagrama de bifurcación del sistema aproximado ecuación (82) para  $n = 2, 100, 1000$ , y sistema discontinuo ecuación (62), para  $n = 2, 100, 1000$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $\omega = 3\pi/10$ , y  $0 < r < 7.3$ .**

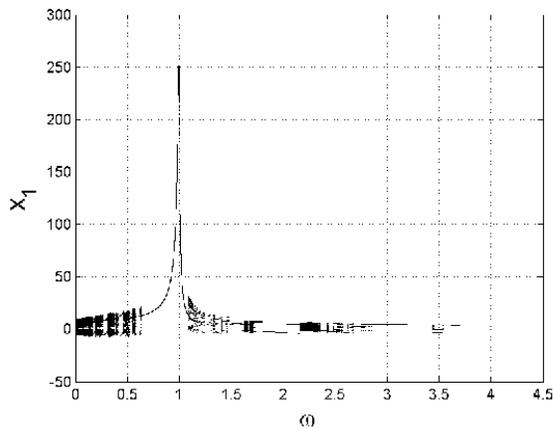


**Figura 11: Atractor del sistema discontinuo (62), para  $\alpha = 2$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $\omega = 0.15\pi$ , y diferentes valores de  $r$**

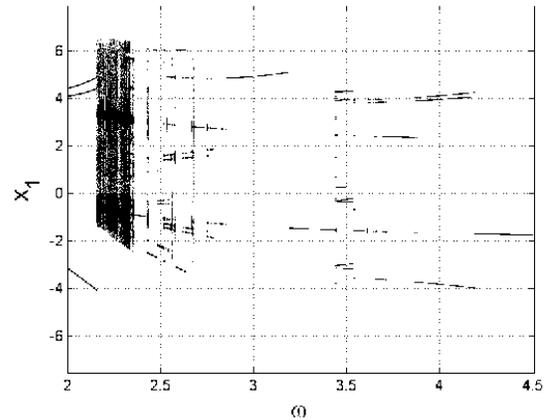
diferentes valores de  $\omega = 0.1, 0.32, 2, 4.6$  se muestran en la Figura 13, observando comportamiento caótico en las Figuras 13(a)-13(b) y comportamiento periódico en las Figuras 13(c)-13(d).

(a)  $n = 1000$ 

(b) Amplificación de la Figura 12(a)



(c) Discontinuo

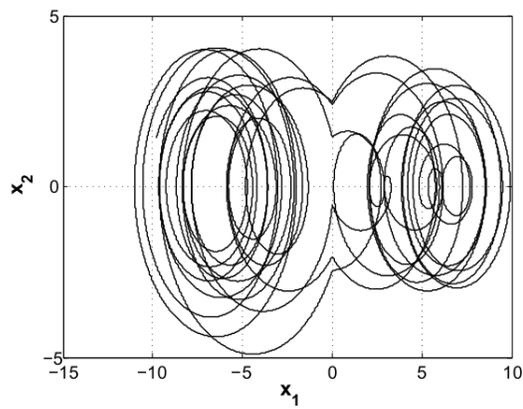
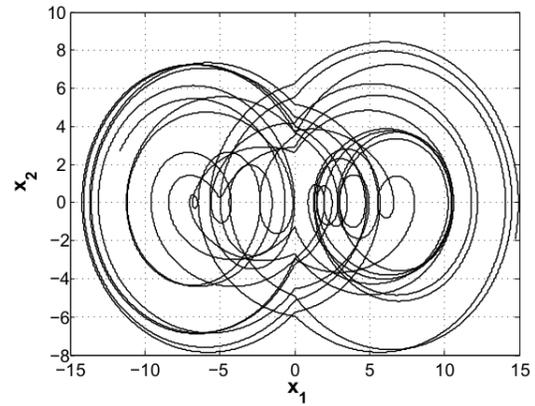
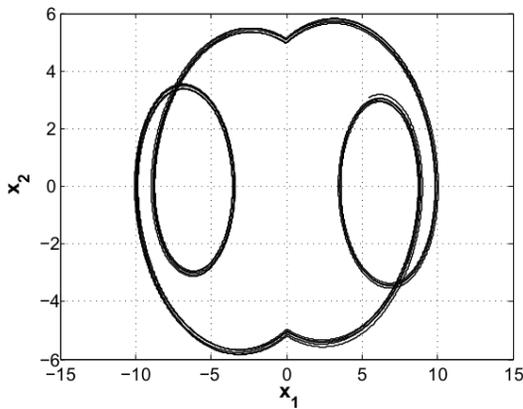
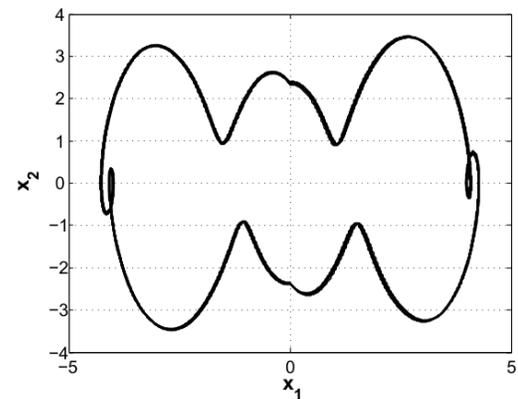


(d) Amplificación de la Figura 12(c)

**Figura 12: Diagrama de bifurcación del sistema aproximado ecuación (82) para  $n = 1000$ , y sistema discontinuo ecuación (62), para  $\alpha = 2, \delta = 0.001, \xi = 0.01, r = 5$ , y  $0 < \omega < 4.5$ .**

## Conclusiones

Se puede concluir que al aproximar el término discontinuo  $\text{sign}(\nu)$ , por la función (continua) saturación, nos permite determinar las condiciones para que el sistema aproximado tipo II presente comportamiento periódico y caótico. Más aún, las órbitas del sistema aproximado tipo II pueden estar tan cerca como se desee de las correspondientes órbitas del sistema discontinuo tipo II, cuando el valor de la pendiente de la función saturación es suficientemente grande.

(a)  $\omega = 0.1$ (b)  $\omega = 0.32$ (c)  $\omega = 2$ (d)  $\omega = 4.6$ 

**Figura 13: Atractor del sistema discontinuo ecuación (62), para  $\alpha = 2$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $r = 5$  y diferentes valores de  $\omega$**

Además, que la condición de Melnikov es válida para valores grandes de la pendiente de la función saturación, se concluye que el sistema discontinuo tipo II puede presentar dinámica caótica. Este comportamiento puede obtenerse de la condición de Melnikov obtenida para el sistema aproximado tipo II, dichos resultados son validados con el uso de los diagramas de bifurcaciones.

Un trabajo que a futuro podría complementar los resultados presentados en este capítulo sería considerar el caso cuando las órbitas podrían deslizarse sobre la superficie  $h_2(x)$ .

## Capítulo 6. Conclusiones

---

En este trabajo de tesis doctoral los siguientes objetivos fueron satisfechos:

1. Se contribuyó al estudio de la dinámica compleja de una clase de sistemas con términos discontinuos.
2. Se analizaron sistemas en el plano seccionalmente suaves, específicamente lineales.

Las principales conclusiones se resumen en los puntos siguientes:

- Se obtuvieron las condiciones que deben satisfacer los parámetros del sistema aproximado para la existencia de comportamiento caótico. Esto fue posible al utilizar los resultados recientes de la teoría de Melnikov para sistemas no suaves.
- Se encontró que los puntos de equilibrio del sistema aproximado son los mismos que los del sistema discontinuo. También, si  $n \rightarrow \infty$ , entonces el hamiltoniano, la órbita homoclínica y la solución del sistema aproximado convergen al hamiltoniano, la órbita y la solución del sistema discontinuo, y la solución del sistema aproximado puede estar tan cerca como se desee de la solución del sistema discontinuo cuando  $n$  es suficientemente grande.
- Para realizar el diagrama de bifurcación se determinó el intervalo del parámetro. Para ello, se utilizó la condición de Melnikov del sistema aproximado.
- Tomando en cuenta los puntos anteriores, se concluye que la clase de sistemas discontinuos en el plano con un punto de equilibrio sobre la superficie de discontinuidad puede exhibir dinámica caótica si se satisface la desigualdad obtenida de la función de Melnikov.

## Trabajos futuros:

Sin duda es importante plantear ideas, procesos y productos de investigación en base al desarrollo del presente trabajo para el futuro, tales aspectos se mencionan a continuación:

1. Considere una clase de sistemas discontinuos dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\xi x_2 + \alpha \text{sign}(ax_1 + bx_2) + u(t)\end{aligned}\quad (88)$$

donde  $0 < \xi < 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $a, b \neq 0$  y  $u(t) = r \text{sen}(\omega t)$ .

Debido a la discontinuidad este puede ser escrito como

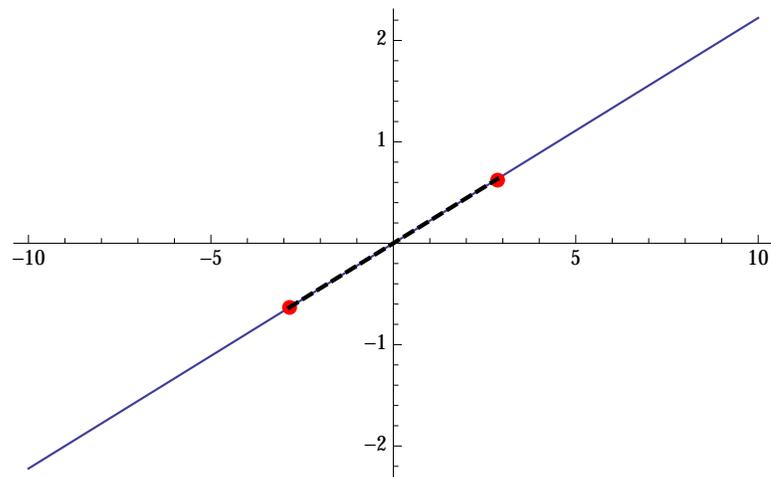
$$\dot{x} = \begin{cases} f_{g_1}(x) + u(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{g_1}; \\ f_{g_2}(x) + u(t), & \text{si } x \in \mathcal{D}_{g_2}; \end{cases}\quad (89)$$

donde

$$\begin{aligned}f_{g_1}(x) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2\xi x_2 - \alpha \end{pmatrix}, \quad f_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2\xi x_2 + \alpha \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \text{sen}(\omega t) \end{pmatrix}, \\ \Sigma_g &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H_g(x) = ax_1 + bx_2 = 0\}, \quad \mathcal{D}_{g_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : H_g(x) < 0\}, \\ \mathcal{D}_{g_2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H_g(x) > 0\}.\end{aligned}$$

En la Figura 14, se muestran los diferentes conjuntos que puede presentar el sistema discontinuo (89), la línea punteada corresponde al conjunto de deslizamiento  $\Sigma_s$ , los puntos que delimitan la zona de deslizamiento son los puntos tangentes, dados en la ecuación (90), representados en la Figura 14 por puntos rojos, mientras que las líneas en azul corresponde al conjunto de cruce  $\Sigma_c$ .

$$\mathcal{P}_T = \left\{ \left( \frac{-b^2(\alpha - r \text{sen}(\omega t))}{a^2 - 2\xi ab + b^2}, \frac{ab(\alpha - r \text{sen}(\omega t))}{a^2 - 2\xi ab + b^2} \right), \left( \frac{b^2(\alpha - r \text{sen}(\omega t))}{a^2 - 2\xi ab + b^2}, \frac{-ab(\alpha - r \text{sen}(\omega t))}{a^2 - 2\xi ab + b^2} \right) \right\}\quad (90)$$



**Figura 14: Clasificación de la superficie de discontinuidad**

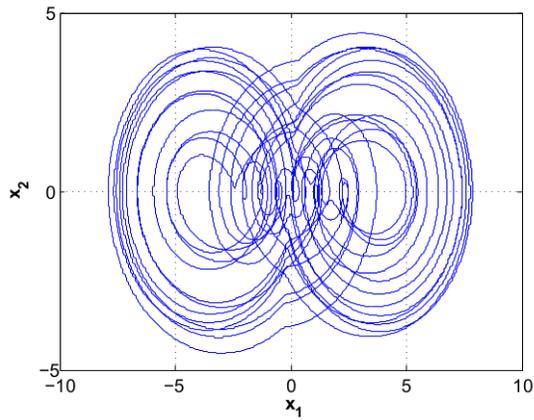
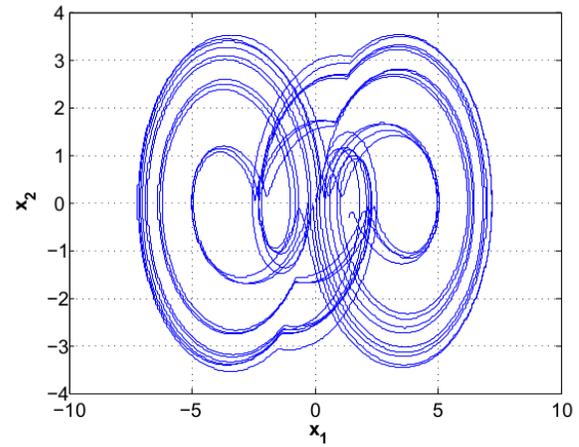
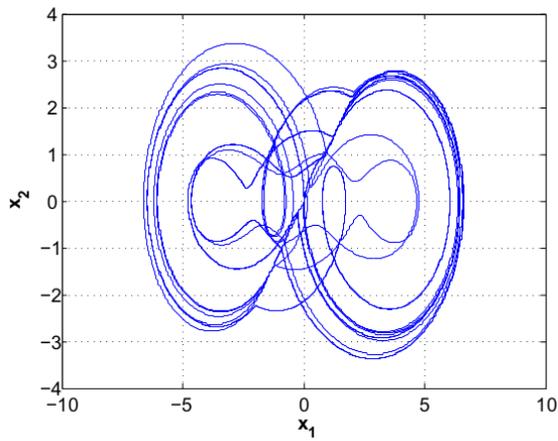
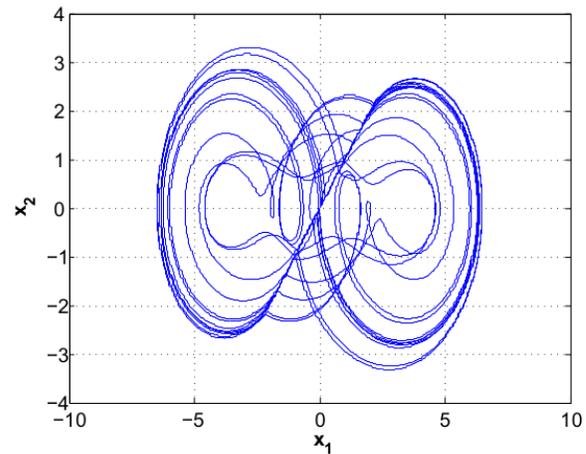
De la ecuación (90), podemos observar; si la pendiente de la recta es muy grande, entonces los puntos tangentes se colapsan en el origen  $(0, 0)$  y esto genera un comportamiento como en el sistema discontinuo tipo I analizado en el capítulo 3 y 4. Caso contrario, se obtiene un intervalo de deslizamiento dado por  $(-\alpha + r \operatorname{sen}(\omega t), \alpha + r \operatorname{sen}(\omega t))$ .

Para analizar que pasa con la dinámica del sistema (89) cuando se varia la pendiente, se fijan los siguientes valores en los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $r = 2.9$ ,  $\omega = 0.1\pi$ ,  $a = 1$  y se obtienen los atractores para diferentes valores del parámetro  $b$ . Es importante mencionar que los parámetros elegidos satisfacen la condición del Melnikov obtenida en el capítulo 3.

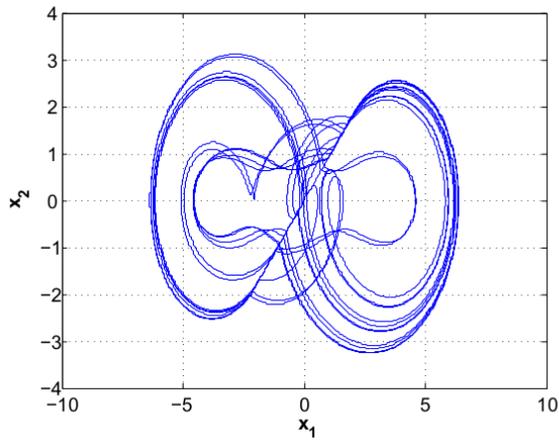
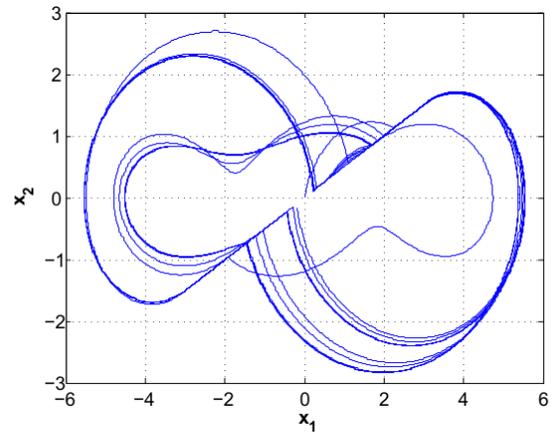
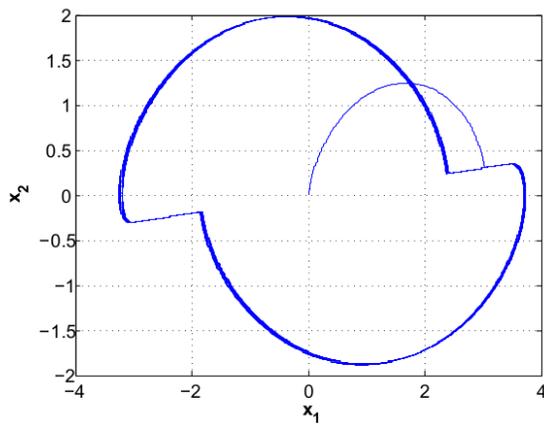
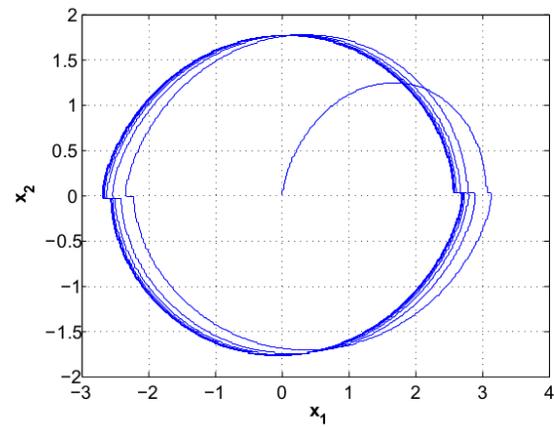
En las Figuras 15(a)–15(d) se varia  $b = (-0.1, 1)$ , observando una persistencia de la dinámica caótica. Posteriormente en las Figuras 16(a)–16(d), se observa que para valores grandes de la pendiente, dicho comportamiento se pierde.

Por lo tanto, considerando lo anterior y el sistema (89), se proponen los siguientes temas a desarrollar:

- Generar una herramienta numérica confiable para simular el comportamiento del sistema.
- Desarrollar una clasificación de los puntos tangentes.
- Obtener las condiciones necesarias, si existen, para determinar la existencia

(a)  $b = -0.1$ (b)  $b = -0.5$ (c)  $b = -0.9$ (d)  $b = -1$ 

**Figura 15: Atractores del sistema discontinuo, para valores fijos en los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2.9$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $a = 1$ ,  $\omega = 0.5\pi$ , y diferentes valores  $b$ .**

(a)  $b = -1.1$ (b)  $b = -2$ (c)  $b = -10$ (d)  $b = -100$ 

**Figura 16: Atractores del sistema discontinuo, para valores fijos en los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2.9$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $a = 1$ ,  $\omega = 0.5\pi$ , y diferentes valores  $b$ .**

de bifurcaciones deslizantes.

- Determinar las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema (89) presente dinámica caótica.
2. Tomando en consideración el sistema (62) con dos discontinuidades, se propone el estudio analítico en aquellos casos en donde puedan existir deslizamientos y determinar los cambios originados en la dinámica si es que existen.
  3. Estudiar las bifurcaciones grazing y deslizantes.
  4. Analizar la dinámica de sistemas fraccionarios y sus aplicaciones.

## Lista de referencias

- Arrowsmith, D. K. y Place, C. M. (1990). *An introduction to dynamical systems*. Cambridge University, USA, p. 423.
- Aubin, J. P. y Cellina, A. (1984). *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, p. 342.
- Awrejcewicz, J. y Dzyubak, L. (2005). Quantifying smooth and nonsmooth regular and chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**(6): 2041–2055.
- Awrejcewicz, J. y Holicke, M. M. (1999). Melnikov's method and stick-slip chaotic oscillations in very weakly forced mechanical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(3): 505–518.
- Awrejcewicz, J. y Holicke, M. M. (2007). *Smooth and nonsmooth high dimensional chaos and the Melnikov-type methods*. World Scientific, Singapore, p. 307.
- Awrejcewicz, J. y Olejnik, P. (2002). Numerical analysis of self-excited by friction chaotic oscillations in two-degrees-of-freedom system using exact Hénon method. *Machine Dynamics Problems*, **26**(4): 9–20.
- Awrejcewicz, J., Fečkan, M., y Olejnik, P. (2005). On continuous approximation of discontinuous systems. *Nonlinear Analysis*, **62**: 1317–1331.
- Battelli, F. y Fečkan, M. (2010). An example of chaotic behaviour in presence of a sliding homoclinic orbit. *Annali di Matematica*, **189**: 615–642.
- Battelli, F. y Fečkan, M. (2012). Nonsmooth homoclinic orbits, Melnikov functions and chaos in discontinuous systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **241**(22): 1962–1975.
- Brogliato, B. (1999). *Nonsmooth Mechanics*, (2<sup>nd</sup> ed.). Springer-Verlag, London, p. 552.
- Cao, H., Seoane, J. M., y Sanjuán, M. A. (2007). Symmetry-breaking analysis for the general Helmholtz–Duffing oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, **34**(2): 197–212.
- Clarke, F. H. (1983). *Optimization and Nonsmooth Analysis: Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts*. Wiley, New York, p. 318.
- Danca, M.-F. (2010). On the uniqueness of solutions to a class of discontinuous dynamical systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**(3): 1402–1412.
- Danca, M.-F. y Codreanu, S. (2002). On a possible approximation of discontinuous dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, **13**(4): 681–691.
- Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*, (2<sup>nd</sup> ed.). Addison-Wesley Publishing Company, New-York, p. 335.
- di Bernardo, M., Kowalczyk, P., y Nordmark, A. (2002). Bifurcations of dynamical systems with sliding: derivation of normal-form mappings. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **170**: 175–205.

- di Bernardo, M., Budd, C. J., Champneys, A. R., y Kowalczyk, P. (2008). *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*. Springer-Verlag, London, p. 505.
- Dieci, L. y Lopez, L. (2012). A survey of numerical methods for ivps of odes with discontinuous right-hand side. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**(16): 3967–3991.
- Feng, J., Zhang, Q., y Wang, W. (2012). Chaos of several typical asymmetric systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, **45**(7): 950–958.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Klumer Academic Publishers, Dordrecht, p. 304.
- Guzzo, M. (2006). Fourier analysis of chaotic motions and applications to celestial mechanics. En: B. Steves, A. Maciejewski, y M. Hendry (eds.), *Chaotic Worlds: From Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems*, Vol. 227. Springer Netherlands, pp. 167–200.
- Jeffrey, M. y Hogan, S. (2011). The geometry of generic sliding bifurcations. *SIAM Review*, **53**(3): 505 – 525.
- Kahng, B. (2009). Redefining chaos: Devaney-chaos for piecewise continuous dynamical systems. *J Math Mode Meth Appl Sci*, **3**(4): 317–326.
- Kukučka, P. (2007). Melnikov method for discontinuous planar systems. *Nonlinear Analysis*, **66**(12): 2698–2719.
- Kunze, M. (2000). *Non-smooth dynamical systems*. Vol. 1744. Springer, p. 244.
- Kunze, M. y Küpper, T. (2001). *Non-smooth dynamical systems: an overview, Ergodic Theory, Analysis and Efficient Simulation of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, p. 820.
- Kuznetsov, Y. A., Rinaldi, S., y Gragnani, A. (2003). One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13**(8): 2157–2188.
- Leine, R. y Nijmeijer, H. (2004). *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*, (2<sup>nd</sup> ed.). Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Vol. 18, Springer-Verlag, New-York, p. 248.
- Leine, R. I. y Van Campen, D. H. (2002). Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied mechanics*, **72**: 138–146.
- Li, S., Zhang, W., y Hao, Y. (2014). Melnikov-type method for a class of discontinuous planar systems and applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**(02): 1450022–1450032.
- Li, T.-Y. y Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, **82**(10): 985–992.
- Luo, A. C. y Chen, L. (2005). Periodic motions and grazing in a harmonically forced, piecewise, linear oscillator with impacts. *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**(2): 567–578.

- Martinez, R., Alvarez, J., y Orlov, Y. (2008). Hybrid sliding-mode-based control of underactuated systems with dry friction. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, **55**(11): 3998–4003.
- Müller, P. C. (1995). Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos, Solitons & Fractals*, **5**(9): 1671–1681.
- Pontes, B. R., Oliveira, V. A., y Balthazar, J. M. (2001). On stick-slip homoclinic chaos and bifurcations in a mechanical system with dry friction. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(7): 2019–2029.
- Savi, M. A., Divenyi, S., Penna, L. F., y Weber, H. I. (2007). Numerical and experimental investigations of the nonlinear dynamics and chaos in non-smooth systems. *Journal of sound and vibration*, **301**: 59–73.
- Shi, L.-s., Zou, Y.-k., y Küpper, T. (2013). Melnikov method and detection of chaos for non-smooth systems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **29**(4): 881–896.
- Sontag, E. D. (1998). *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, (2<sup>nd</sup> ed.). Springer-Verlag, New York, p. 531.
- Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, New York, p. 286.
- Warwick, D. J. (2010). *Bifurcation in Piecewise-Smooth Continuous Systems*. World Scientific on Nonlinear Science, Series A-Vol.70, Singapore.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, (2<sup>nd</sup> ed.). Springer-Verlag, New York, p. 843.
- Yagasaki, K. (1994). Chaos in a pendulum with feedback control. *Nonlinear Dynamics*, **6**(2): 125–142.