

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Doctorado en Ciencias
en Óptica con orientación en Óptica Física**

**Metodología de reconocimiento de patrones basada en
máscaras binarias vía transformada fraccional de Fourier**

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Esbanyely Garza Flores

Ensenada, Baja California, México
2018

Tesis defendida por
Esbanyely Garza Flores

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Josué Álvarez Borrego
Director de tesis

Miembros del comité

Dra. Diana Tentori Santa Cruz

Dra. Selene Solorza Calderón

Dr. Israel Rocha Mendoza



Dr. Israel Rocha Mendoza
Coordinador del Posgrado en Óptica

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Esbanyely Garza Flores © 2018

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis.

Resumen de la tesis que presenta **Esbanyely Garza Flores** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física.

Metodología de reconocimiento de patrones basada en máscaras binarias vía transformada fraccional de Fourier.

Resumen aprobado por:

Dr. Josué Álvarez Borrego
Director de tesis

En este trabajo, se desarrollaron dos metodologías de reconocimiento de patrones invariantes a posición y rotación. En ambas metodologías, se implementó la transformada fraccional de Fourier, la cual es una generalización de la transformada de Fourier convencional. Los dos métodos generan firmas de imágenes mediante la utilización de máscaras binarias de anillos concéntricos. En la primera metodología, las máscaras binarias se obtienen a partir de la transformada fraccional de Fourier de la imagen espectral, la cual es el módulo de la transformada de Fourier de la imagen procesada, mientras que en la segunda metodología, las máscaras son obtenidas al aplicar la transformada fraccional de Fourier de la imagen. Para ambas metodologías, se utilizó correlación no lineal y correlación no lineal adaptativa para la comparación de las firmas de la imagen objetivo y de la imagen problema. Además, dos variantes fueron implementadas para cada método, una en la que se utilizó solo una máscara obtenida a partir de la imagen objetivo y otra basada en máscaras adaptativas donde se obtuvo una máscara de la imagen objetivo y otra de la imagen problema. Las metodologías se aplicaron a 30 especies de fitoplancton, las cuales fueron rotadas para analizar su desempeño ante rotación. Ambas metodologías fueron probadas con imágenes que tienen información incompleta, para ello se utilizaron imágenes de 21 especies de diatomeas fosilizadas. Se realizó un análisis con imágenes afectadas por variaciones de iluminación. Además, se analizó el desempeño de ambas metodologías ante imágenes inmersas en ruido. Con la implementación de la transformada fraccional de Fourier se pudo trabajar con planos intermedios entre el plano del espacio y el plano de frecuencias, obteniendo valores de correlación mayores, incrementando la capacidad de discriminación, logrando para el caso de máscaras adaptativas, hasta un 100% de discriminación de las especies, el cual es un resultado que no se había alcanzado antes.

Palabras clave: Transformada fraccional de Fourier, transformada de Fourier, correlación no lineal, máscaras binarias, óptica de Fourier, firmas vectoriales, fitoplancton, diatomeas.

Abstract of the thesis presented **by Esbanyely Garza Flores** as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Optics with orientation in Optical Physics

Pattern recognition methodology based on binary masks from the fractional Fourier transform.

Abstract approved by:

Dr. Josué Álvarez Borrego
Thesis Director

In this work, two pattern recognition methodologies invariant to position and rotation were developed. In both methodologies, the fractional Fourier transform was implemented, which is a generalization of the conventional Fourier transform. Both methods generate image signatures by using binary masks of concentric rings. In the first methodology, the binary masks are obtained from the fractional Fourier transform of the spectral image, which is the modulus of the Fourier transform of the image processed, while in the second methodology, the masks are obtained by applying the fractional Fourier transform to the image. For both methodologies, nonlinear correlation and adaptive nonlinear correlation were used to compare between the signatures of the target image and the problem image. In addition, two variants were implemented for each method, one in which a single mask obtained from the target image is used, and another called adaptive masks where a mask of the target image and another of the problem image was generated. The methods were applied to 30 species of phytoplankton, which were rotated to analyze their performance against rotation. Both methodologies were tested with images with incomplete information, for this, 21 images of fossil diatoms species were used. An analysis with images affected by variations in illumination was performed. Also, an analysis of the performance of both methodologies with images affected by noise was done. By implementing the fractional Fourier transform, it was possible to work in intermediate planes between the space plane and the frequencies plane, increasing the discrimination capability, reaching for the case of adaptive masks, up to a 100% of discrimination between species with both methodologies, which is a result that had not been achieved before.

Keywords: Fractional Fourier transform, Fourier transform, nonlinear correlation, binary masks, Fourier optics, vectorial signatures, phytoplankton, diatoms.

Dedicatoria

A mi madre, María Luisa Flores Mercado y mis hermanos
Por haberme apoyado siempre.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, CICESE. Por brindarme sus instalaciones para poder realizar mis estudios y alcanzar mí meta de obtener el grado de Doctor en Ciencias.

Al Dr. Josué Álvarez Borrego, director de tesis, por su apoyo, paciencia y disposición para orientarme y ayudarme en el desarrollo de este trabajo.

A los miembros del comité de tesis, la Dra. Diana Tentori Santa Cruz, Dra. Selene Solorza Calderón y Dr. Israel Rocha por su ayuda, tiempo y consejos para lograr el término de este trabajo.

Al CONACYT por su apoyo económico al otorgarme la beca para realizar mis estudios de doctorado.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatorias.....	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	viii
Lista de tablas.....	xii
Capítulo 1. Introducción	
1.1 Máscaras binarias.....	1
1.2 Órdenes fraccionales de la transformada de Fourier.....	3
1.3 Justificación.....	5
1.4 Objetivos.....	5
1.4.1 Objetivo general.....	5
1.4.2 Objetivos particulares.....	5
Capítulo 2. Fundamentación matemática	
2.1 La transformada de Fourier.....	6
2.2 Propiedades de la transformada de Fourier.....	8
2.2.1 Linealidad.....	8
2.2.2 Traslación en el dominio del espacio.....	9
2.2.3 Traslación en el dominio de la frecuencia.....	9
2.2.4 Teorema de escalamiento.....	9
2.2.5 Simetría.....	10
2.3 Teorema de Parseval.....	10
2.4 Teorema de convolución.....	10
2.5 Teorema de correlación.....	11
2.6 Filtros de correlación.....	12
2.6.1 Filtro clásico acoplado CMF (<i>Classical Matched Filter</i>).....	12
2.6.2 Filtro solo de fase POF.....	13
2.6.3 Filtro no lineal NLF -ley k	13
2.7 La transformada fraccional de Fourier.....	15
2.8 Propiedades de la transformada fraccional de Fourier (Ozaktas et al. 1999).....	17
2.8.1 Operador identidad y operador paridad.....	17

2.8.2 Potencias enteras de la transformada fraccional de Fourier.....	20
2.8.3 Periodicidad.....	20
2.8.4 Suma de órdenes.....	20
2.8.5 Transformada fraccional de Fourier de funciones par.....	21
2.8.6 Transformada fraccional de Fourier de funciones escaladas.....	21
2.8.7 Propiedad de desplazamiento.....	22
Capítulo 3. Metodología	
3.1 Metodología 1. TFrF de la imagen espectral para la generación de máscaras binarias.....	23
3.1.1 Máscara binaria de anillos concéntricos.....	23
3.1.2 Firma de la imagen obtenida con metodología 1.....	30
3.2 Metodología 2. TFrF de la imagen para la generación de máscaras binarias.....	35
3.2.1 Máscaras binarias.....	35
3.2.2 Firma de la imagen obtenida con metodología 2.....	35
3.3 Una máscara y máscaras adaptativas.....	37
3.3.1 Primer caso: una máscara.....	38
3.3.1.1 Uso de la metodología 1. Primer caso.....	38
3.3.1.2 Uso de la metodología 2. Primer caso.....	39
3.3.2 Segundo caso: máscaras adaptativas.....	40
3.3.2.1 Uso de la metodología 1. Segundo caso.....	40
3.3.2.2 Uso de la metodología 2. Segundo caso.....	41
3.4 Correlación no lineal y correlación no lineal adaptativa.....	43
Capítulo 4. Análisis realizados y resultados	
4.1 Respuesta ante cambio de rotación en las imágenes.....	45
4.1.1 Ángulo óptimo de la transformada fraccional de Fourier para las imágenes de fitoplancton.....	46
4.1.2 Resultados ante rotación.....	47
4.2 Información fragmentada.....	56
4.3 Imágenes afectadas por ruido.....	63
4.4 Imágenes afectadas por iluminación no homogénea.....	65
Capítulo 5. Conclusiones	78
Literatura citada	80

Lista de figuras

Figura	Página
1 Geometría de muestreo de anillos concéntricos. (b) Geometría de muestreo de líneas transversales. Lendaris y Stanley, 1970.....	2
2 Detector RWD. George et al., 1972.....	2
3 Respuesta de la autocorrelación de una imagen de tres diferentes filtros. (a) Imagen. (b) Espacio de autocorrelación usando un filtro clásico acoplado, su $PCE = 0.0012$. (c) Espacio de autocorrelación usando un filtro solo de fase, su $PCE = 0.2130$. (d) Espacio de autocorrelación usando un filtro no lineal con una $k = 0.1$, su $PCE = 0.2575$	15
4 Plano tiempo-frecuencia y la rotación de la TFrF por un ángulo α	16
5 TFrF de una función rectángulo, calculada a varios ángulos. a) $\alpha = 0.01$ b) $\alpha = 0.05$ c) $\alpha = \pi/4$. d) $\alpha = \pi/2$. Línea solida: parte real. Línea punteada: parte imaginaria.....	18
6 Variación de magnitud de la TFRF de un rectángulo con respecto a α	19
7 Transformada fraccional de Fourier de la letra B tipo Arial para diferentes valores de α . (a) $\alpha = 0^\circ$. (b) $\alpha = 15^\circ$. (c) $\alpha = 45^\circ$. (d) $\alpha = 65^\circ$. (e) $\alpha = 80^\circ$. (f) $\alpha = 90^\circ$	19
8 (a) Imagen de letra B tipo Arial de 307×307 pixeles. (b) Imagen espectral de la imagen de la letra B tipo Arial. (c) Parte real de la TFrF de la imagen espectral a un $\alpha = 85^\circ$. (d) La parte imaginaria de la TFrF de la imagen espectral a un $\alpha = 85^\circ$	24
9 Proceso de filtrado de la TFrF de la imagen espectral por un disco unitario. (a) Parte real. (b) Parte imaginaria.....	25
10 (a) Algunos ejemplos de los 180 perfiles obtenidos de la parte real de la TFrF. (b) Algunos ejemplos de los 180 perfiles obtenidos de la parte imaginaria de la TFrF.....	26
11 Perfiles óptimos extraídos de la TFrF de la imagen espectral de la letra Arial B con un ángulo $\alpha = 85^\circ$. (a) Perfil óptimo extraído de la parte real. (b) Perfil óptimo extraído de la parte imaginaria.....	27
12 Perfil óptimo binarizado obtenido de la parte real de la TFrF de la imagen espectral aplicando la condición de la ecuación 56.....	29
13 Cilindros concéntricos producidos al rotar el perfil binario $Z_{RP}(x)$	29
14 Máscaras de anillos concéntricos para la letra B tipo Arial obtenidas utilizando la metodología 1 para un $\alpha = 85^\circ$ de la TFrF. (a) M_{RP} . (b) M_{RN} . (c) M_{IP} . (d) M_{IN}	30

15	Perfiles óptimos extraídos de f_{Re} a diferentes ángulos α para la TFrF de la imagen espectral de la letra Arial B, mediante la metodología 1. (a) Para $\alpha = 85^\circ$. (b) Para $\alpha = 45^\circ$	31
16	Máscaras binarias de anillos concéntricos para la letra Arial B obtenidas utilizando la metodología 1 con una TFrF con $\alpha = 45^\circ$. (a) M_{RP} . (b) M_{RN} . (c) M_{IP} . (d) M_{IN}	32
17	Procedimiento para obtener la firma normalizada de la una imagen mediante metodología 1. (a) El módulo de la TFrF a un ángulo $\alpha = 85^\circ$ de la imagen espectral de la letra Arial B. (b) Máscara binaria M_{RP} obtenida de la letra Arial B. (c) Resultado de la multiplicación del módulo de la TFrF de la imagen espectral con M_{RP} . (d) Firma normalizada para la letra Arial B, generada mediante la suma de todos los valores muestreados por cada anillo.....	33
18	Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 85^\circ$ con la metodología 1.....	34
19	Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 45^\circ$ con la metodología 1.....	34
20	(a) Imagen de la letra Arial B de 307×307 pixeles. (b) Parte real de la TFrF de la imagen con un ángulo $\alpha = 85^\circ$. (c) Parte imaginaria de la TFrF de la imagen con un ángulo $\alpha = 85^\circ$	36
21	Perfiles óptimos extraídos de la TFrF de la imagen de la letra Arial B con un ángulo $\alpha = 85^\circ$. (a) Perfil óptimo extraído de la parte real. (b) Perfil óptimo extraído de la parte imaginaria.....	36
22	Mascaras de anillos concéntricos para la letra B tipo Arial obtenidas utilizando la metodología 2 para un $\alpha = 85^\circ$ de la TFrF. (a) M_{RP} . (b) M_{RN} . (c) M_{IP} . (d) M_{IN}	37
23	Procedimiento para obtener la firma normalizada de la una imagen mediante metodología 2. (a) El módulo de la TF de la imagen de la letra Arial B. (b) Máscara binaria M_{IN} obtenida de la letra Arial B. (c) Resultado de la multiplicación del módulo de la TF de la imagen con M_{IN} . (d) Firma normalizada para la letra Arial B, generada mediante la suma de todos los valores muestreados por cada anillo.....	38
24	Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 85^\circ$ con la metodología 2.....	39
25	Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 45^\circ$ con la metodología 2.....	40
26	Procedimiento seguido en la metodología 1 para el caso que utiliza una sola máscara.....	41
27	Procedimiento seguido en la metodología 2 para el caso que utiliza una sola máscara.....	42

28	Procedimiento seguido en la metodología 1 para el caso que utiliza máscaras adaptativas.....	42
29	Procedimiento seguido en la metodología 2 para el caso que utiliza máscaras adaptativas.....	43
30	Imágenes en escala de gris de 30 especies diferentes de fitoplancton. Especie 1: <i>Acanthogonyaulax spinifera</i> . Especie 2: <i>Ceratium gravidum Gourret</i> . Especie 3: <i>Dinophysis hastata</i> . Especie 4: <i>Preperidinium meunieri</i> . Especie 5: <i>Thalassiosira levanderi</i> . Especie 6: <i>Lingulodinium polyedrum</i> . Especie 7: <i>Asteromphalus heptactis</i> . Especie 8: <i>Ornithocercus magnificus</i> . Especie 9: <i>Oxytoxum scolopax</i> . Especie 10: <i>Podolampas bipes</i> . Especie 11: <i>Podolampas spinifer</i> . Especie 12: <i>Bacteriastrium delicatulum</i> . Especie 13: <i>Podolampas palmipes</i> . Especie 14: <i>Dinophysis monacantha</i> . Especie 15: <i>Protoberidinium longipes</i> . Especie 16: <i>Phalacroma rapa</i> . Especie 17: <i>Gonyaulax scrippsae</i> . Especie 18: <i>Ceratocorys horrida</i> . Especie 19: <i>Gonyaulax spinifera</i> . Especie 20: <i>Tripes furca</i> . Especie 21: <i>Tripes lunula</i> . Especie 22: <i>Ceratium hexacanthum</i> . Especie 23: <i>Ceratium gravidum praeolongum</i> . Especie 24: <i>Ceratium breve</i> . Especie 25: <i>Asterolampra marylandica</i> . Especie 26: <i>Hemidiscus cuneiformis</i> . Especie 27: <i>Thalassionema nitzschioides</i> . Especie 28: <i>Pyrocystis</i> . Especie 29: <i>Heterodinium agassizi</i> . Especie 30: <i>Ornithocercus Stein</i>	45
31	Valores de los máximos de autocorrelación obtenidos mediante la metodología 1 para ángulos α desde 1° hasta 90° , utilizando la especie 1 como imagen objetivo.	47
32	Procedimiento para obtener el máximo de correlación para cada metodología.....	50
33	Resultados para la metodología 1 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal.....	50
34	Resultados para la metodología 1 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando máscaras adaptativas con correlación no lineal.....	51
35	Resultados para la metodología 1 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal adaptativa.....	51
36	Resultados para la metodología 1 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando máscaras adaptativas con correlación no lineal adaptativa.....	52
37	Resultados para la metodología 2 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal.....	52
38	Resultados para la metodología 2 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando máscaras adaptativas con correlación no lineal.....	53
39	Resultados para la metodología 2 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal adaptativa.....	54
40	Resultados para la metodología 2 utilizando la especie 3 como objetivo y utilizando máscaras adaptativas con correlación no lineal adaptativa.....	54

41	Resultados para la metodología 1 utilizando a la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal. La línea punteada indica los valores extremos tomados como referencia para calcular la eficiencia de discriminación.....	55
42	Imágenes de 21 especies de diatomeas fosilizadas.....	60
43	Fragmentos de la especie <i>Actinocyclus inges Rattray</i>	61
44	Fragmentos de la especie <i>Azpeita sp.</i>	62
45	Resultados del análisis del fragmento 12 de la especie A (<i>Actinocyclus inges Rattray</i>), para la metodología 2 utilizando una máscara.....	62
46	Resultados del análisis del fragmento 13 de la especie A (<i>Actinocyclus inges Rattray</i>), para la metodología 2 utilizando una máscara.....	64
47	Desempeño de ambas metodologías cuando la imagen es afectada por ruido gaussiano.....	67
48	Desempeño de ambas metodologías cuando la imagen es afectada por ruido sal y pimienta.....	67
49	Diagrama del procedimiento para generar una imagen con iluminación no homogénea. (a) Imagen original. (b) Patrón de iluminación no homogéneo. (c) Imagen con iluminación no homogénea. Donde • indica multiplicación punto a punto.....	68
50	Patrones de iluminación no homogénea utilizados.....	68
51	Imagen de la especie E afectada por los diferentes patrones de iluminación, donde P0 indica que no se modificó la iluminación y P1-P8 indican los ocho diferentes patrones de iluminación no homogénea.....	69
52	Resultados de la variación de los valores de autocorrelación de la imagen de la especie E al ser afectada por los diferentes patrones de iluminación. (a) Metodología 1. (b) Metodología 2.....	69
53	Resultados de la variación de los valores de autocorrelación de la imagen de la especie S al ser afectada por los diferentes patrones de iluminación. (a) Metodología 1. (b) Metodología 2.	71
54	Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas utilizando la metodología 1. (a) Patrón P0. (b) Patrón P7.....	75
55	Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas utilizando la metodología 2. (a) Patrón P0. (b) Patrón P7.....	76

Lista de tablas

Tabla		Página
1	Ángulos óptimos para cada máscara binaria para cada especie de fitoplancton, aplicando la metodología 1.....	48
2	Ángulos óptimos para cada máscara binaria para cada especie de fitoplancton, aplicando la metodología 2.....	49
3	Eficiencia para cada metodología usando una máscara y correlación no lineal.....	56
4	Eficiencia para cada metodología usando máscaras adaptativas y correlación no lineal.....	57
5	Eficiencia para cada metodología usando una máscara y correlación no lineal adaptativa.....	58
6	Eficiencia para cada metodología usando máscaras adaptativas y correlación no lineal adaptativa.....	59
7	Información requerida para la identificación de cada especie de diatomea por cada metodología utilizando una máscara y correlación no lineal.....	65
8	Información requerida para la identificación de cada especie de diatomea por cada metodología utilizando máscaras adaptativas y correlación no lineal.....	66
9	Resultados obtenidos con la metodología 1 al correlacionar cada especie con versiones de sí, al afectarla con diferente iluminación. P0 es cuando no hay variación de iluminación y P1-P8 son diferentes patrones de iluminación no homogénea.....	70
10	Resultados obtenidos con la metodología 2 al correlacionar cada especie con versiones de sí, al afectarla con diferente iluminación. P0 es cuando no hay variación de iluminación y P1-P8 son diferentes patrones de iluminación no homogénea.....	72
11	Media de los resultados de autocorrelación de cada metodología para cada patrón de iluminación. La media se obtuvo considerando los resultados de las 21 especies. M1: metodología1. M2: metodología 2.....	72
12	Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 2 utilizando una máscara y correlación no lineal, para el patrón P0.....	73
13	Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 2 utilizando una máscara y correlación no lineal, para el patrón P1.....	74
14	Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 1 utilizando una máscara y correlación no lineal, para el patrón P1.....	74

15	Promedio de correlación de cada metodología para cada patrón de iluminación y cada especie de diatomea. M1: metodología1. M2: metodología 2.....	76
16	Porcentaje de discriminación de cada metodología para cada patrón de iluminación y cada especie de diatomea. M1: metodología 1. M2: metodología 2.....	77

Capítulo 1. Introducción

Los seres humanos desde que nacemos empezamos a detectar y almacenar imágenes de objetos (formas, colores, personas, etc.) en nuestro cerebro, lo cual nos permite identificar, diferenciar y reconocer objetos presentes en una imagen, sin importar la posición, la rotación o la escala a la que se encuentren, así como también podemos reconocer objetos en imágenes con ruido, con variaciones de iluminación o que contienen tan solo una fracción del objeto a identificar. Las tareas de nuestra vida diaria dependen del reconocimiento continuo de distintos objetos, procesos que pueden ser realizados enteramente por la percepción humana. Sin embargo, existen áreas donde es necesaria la automatización del proceso de reconocimiento, debido a la gran cantidad de imágenes que se analizan o para eliminar la probabilidad de error humano, como en el caso de la identificación y conteo de microorganismos, identificación de enfermedades, identificación de rostros en sistemas de seguridad o para encontrar defectos en algún producto dentro de miles. Debido a esto, la identificación automática de objetos en una imagen es una de las metas en el campo del reconocimiento de patrones.

La introducción por Vander Lugt en 1964 del filtro acoplado, permitió un avance en el reconocimiento óptico y digital de patrones basado en la correlación de imágenes. Sin embargo, este tipo de filtros son ineficientes cuando los objetos presentes en las imágenes tienen distorsiones geométricas como posición o rotación, por ello, se busca desarrollar metodologías que puedan superar estas dificultades.

En este trabajo, se desarrollaron dos metodologías basadas en la correlación no lineal de firmas obtenidas utilizando máscaras binarias de anillos concéntricos, generadas a partir de la implementación de la transformada fraccional de Fourier (TFRF).

1.1 Máscaras binarias

En 1970, Lendaris y Stanley presentaron un sistema de reconocimiento de patrones, en el cual, mediante la utilización de diferentes filtros espaciales llamados máscaras, muestreaban el patrón de difracción de Fraunhofer de una imagen, para reducir la distribución de luz bidimensional a un conjunto unidimensional de números llamado firma (Lendaris y Stanley, 1970). En la figura 1a se muestra una máscara binaria con una geometría de anillos concéntricos, la cual es invariante a posición y rotación. La figura 1b muestra una

geometría con líneas transversales invariante a la posición y escala. Krueger et al., en 1974 utilizaron máscaras de este tipo para el diagnóstico de neumoconiosis, y Kasdan, en 1979 presentó diversas aplicaciones de estas máscaras en la industria.

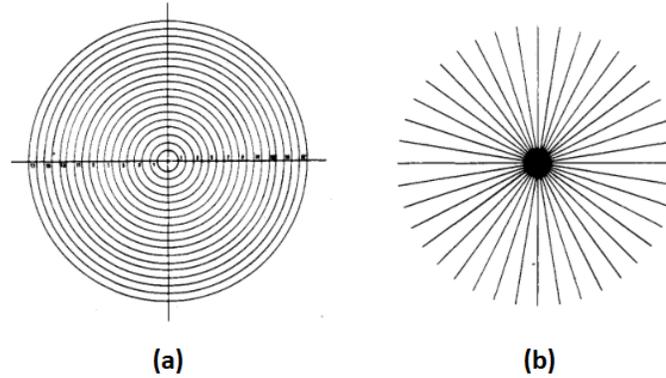


Figura 1. (a) Geometría de muestreo de anillos concéntricos. (b) Geometría de muestreo de líneas transversales. Lendaris y Stanley, 1970.

La figura 2 muestra un dispositivo llamado RWD (*Ring Wedge Detector*), utilizado para muestrear el patrón de difracción, diseñado con una región compuesta por anillos concéntricos y otra región con líneas transversales (George et al., 1972), con el objetivo de obtener invariancia a rotación e invariancia a escala.

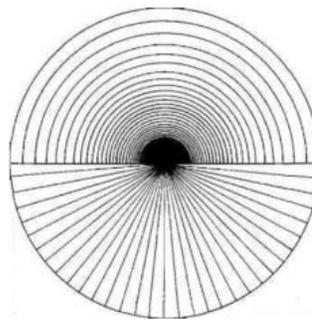


Figura 2. Detector RWD. George et al., 1972.

El problema de este tipo de dispositivos es que si la imagen tiene variaciones de rotación, las muestras del patrón de difracción obtenidas por los anillos concéntricos permanecerá constante, sin embargo, las muestras recopiladas por las líneas transversales cambiará mucho. Por otro lado, si los cambios son de escala, las muestras que permanecerán constantes serán las obtenidas con las líneas transversales, mientras las muestras obtenidas por los anillos concéntricos se modificarán (Asselin et al., 1994).

Recientemente, de manera digital se desarrolló una nueva metodología invariante a posición y rotación basada en correlación lineal y no lineal de firmas obtenidas utilizando una máscara binaria de anillos concéntricos, generada a partir de los valores positivos de la parte real de la transformada de Fourier (TF) de una imagen referencia (Solorza y Álvarez-Borrego, 2010). Con base en este trabajo, se estudiaron cuatro formas alternativas para la generación de las máscaras binarias de anillos concéntricos, obtenidas a partir de los valores positivos y negativos de las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una imagen, para la identificación de letras tipo Arial y diatomeas fosilizadas (Álvarez-Borrego et al., 2013). Este sistema basado en máscaras binarias de anillos concéntricos de Fourier fue utilizado para analizar imágenes afectadas por ruido e iluminación no homogénea y fue comparado con un sistema basado en máscaras binarias obtenidas a partir de la función Bessel de primer tipo y primer orden entre su argumento (Solorza y Álvarez-Borrego, 2015). También, se realizó un análisis de diatomeas fosilizadas utilizando máscaras binarias de anillos concéntricos de Fourier (Barajas et al., 2016). Y se desarrolló e implemento un tipo diferente de correlación llamada correlación no lineal adaptativa para la comparación de firmas obtenidas mediante máscaras binarias generadas a partir de la transformada de escala, para la clasificación de especies de fitoplancton (Solís-Ventura et al., 2015), la cual mostró mejor desempeño que la correlación no lineal.

1.2 Órdenes fraccionales de la transformada de Fourier

Por otro lado, como lo menciona Ozaktas et al. (1999), el concepto de órdenes fraccionales de la transformada de Fourier fue presentado y desarrollado en trabajos realizados por Winer en 1929, Condon en 1937, Bargmann en 1961 y De Bruijn en 1973. Posteriormente, los órdenes fraccionales de la transformada de Fourier con el nombre de transformada fraccional de Fourier (TFrF) fueron utilizados por Victor Namias en 1980, para resolver ecuaciones diferenciales. El orden fraccional de la transformada fraccional de Fourier corresponde a elevar a un exponente fraccional el operador de la transformada de Fourier, donde la transformada de Fourier “clásica” es el caso particular cuando el orden de la

transformada fraccional de Fourier es 1. En 1993, Mendlovic y Ozaktas, presentaron una interpretación óptica de la transformada fraccional de Fourier, basada en la propagación en un medio de índice de gradiente. También en 1993, Lohmann sugirió una definición alternativa de la transformada fraccional de Fourier basada en la función de distribución de Wigner, mostrando que los órdenes de la transformada fraccional de Fourier corresponden a una rotación en el plano espacio-frecuencia, donde el orden 1 de la transformada fraccional de Fourier corresponde a una rotación de 90° . Después, se encontró que la transformada fraccional de Fourier es equivalente a la difracción de Fresnel, así como el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier es equivalente a la difracción de Fraunhofer (Pellat-Finet, 1994). Esto es, la propagación de la luz es un continuo de transformaciones fraccionales de Fourier (Ozaktas y Mendlovic, 1995). Lo cual indica que la transformada fraccional de Fourier es una generalización de la transformada de Fourier convencional.

Debido a que la transformada de Fourier es una herramienta muy importante en muchas áreas de la ciencia, la transformada fraccional de Fourier también ha encontrado aplicación en diferentes áreas, como óptica de Fourier (Mendlovic y Ozaktas, 1993; Lohmann, 1993; Ozaktas y Mendlovic 1993; Alieva et al., 1994; Pellat-Finet, 1994; Ozaktas y Mendlovic, 1995; Shahin et al., 1995; Cai y Wang, 2006;), convolución (Ozaktas et al., 1994), reconstrucción de imágenes (Kutay y Ozaktas, 1998), correlación (Mendlovic et al., 1995; Mendlovic et. al. 1995; Setälä et al., 2010; Singh y Saxena, 2011), óptica no lineal (Lu et al., 2008), mecánica cuántica (Namias, 1980), monitoreo no destructivo (Tant et al, 2015) o filtrado (Ozaktas et al., 1994; Granieri et al., 1995; Erden, 1997). Por lo tanto, en toda área en la cual la transformada de Fourier ha sido utilizada existe el potencial de obtener mejores resultados utilizando la transformada fraccional de Fourier. La correlación de imágenes utilizando la transformada fraccional de Fourier o correlación fraccional se ha utilizado para el reconocimiento de objetos (López-Ávila, 2017), mostrando una respuesta menos ruidosa que la correlación convencional.

En este trabajo, la transformada fraccional de Fourier se propone para generar las máscaras binarias de anillos concéntricos de una imagen para obtener sus firmas. Al utilizar la transformada fraccional de Fourier se pueden seleccionar planos intermedios entre el plano del objeto y el plano de Fourier y generar las máscaras binarias buscando obtener una mejor discriminación. También, la correlación no lineal adaptativa es implementada con la intención de obtener valores de correlación más altos e incrementar los resultados de identificación.

1.3 Justificación

Determinar si es posible obtener mejores resultados de correlación de firmas al trabajar fuera del plano de Fourier, seleccionando diferentes órdenes de la transformada fraccional de Fourier y obtener así un incremento en la capacidad de discriminación entre una imagen referencia y una imagen problema.

1.4. Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Desarrollar un nuevo sistema de reconocimiento de patrones, basado en firmas unidimensionales, calculadas mediante la utilización de máscaras binarias obtenidas a partir de la transformada fraccional de Fourier de una imagen.

1.4.2 Objetivos particulares

- a) Obtención de firmas unidimensionales mediante máscaras binarias a partir de la transformada fraccional de Fourier de una imagen para diferentes órdenes.
- b) Para diferentes órdenes de la transformada fraccional de Fourier, utilizar la correlación no lineal para discriminar entre las firmas de imágenes y encontrar el valor óptimo del orden.
- c) Para diferentes órdenes de la transformada fraccional de Fourier, utilizar la correlación no lineal adaptativa para discriminar entre las firmas de imágenes. Encontrar el orden óptimo.
- d) Explorar diferentes maneras alternas de obtener máscaras binarias utilizando la transformada fraccional de Fourier.
- e) Determinar entre la correlación no lineal y correlación no lineal adaptativa, cuál es la más eficiente para las firmas obtenidas con las máscaras calculadas y para diferentes órdenes de la transformada fraccional de Fourier, para determinar la metodología para el reconocimiento.

Capítulo 2. Fundamentación matemática

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas que sirven como soporte teórico del presente trabajo.

2.1 La transformada de Fourier

Definiendo \mathcal{F} como el operador de la transformada de Fourier, entonces, para una función bidimensional $g(x, y)$ la transformada de Fourier está definida por

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (1)$$

donde x, y son variables continuas que representan el espacio, f_x, f_y son también variables continuas, generalmente referidas como frecuencias (Goodman, 2005) y $j = \sqrt{-1}$.

Similarmente, dado $G(f_x, f_y)$, la transformada inversa de Fourier se define por

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y. \quad (2)$$

La ecuación 1, indica que la transformada de Fourier, representa una cantidad compleja; esto es, está conformada por una parte real $\text{Re}[G(f_x, f_y)]$ y una parte imaginaria $\text{Im}[G(f_x, f_y)]$, por lo tanto, la transformada de Fourier puede ser expresada en forma polar:

$$G(f_x, f_y) = |G(f_x, f_y)| e^{j\phi(f_x, f_y)}, \quad (3)$$

donde

$$|G(f_x, f_y)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{G(f_x, f_y)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(f_x, f_y)\}^2}, \quad (4)$$

es la *magnitud, módulo o espectro de amplitud* de la transformada de Fourier y

$$\phi(f_x, f_y) = \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}\{G(f_x, f_y)\}}{\operatorname{Re}\{G(f_x, f_y)\}} \right], \quad (5)$$

es el *ángulo de fase o espectro de fase* de la transformada de Fourier.

El *espectro de energía* de una señal, está dado por el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier (Bracewell, 2000), esto es:

$$E(f_x, f_y) = |G(f_x, f_y)|^2. \quad (6)$$

Aunque la transformada de Fourier es una herramienta importante en diversas áreas de la física e ingeniería, desde un punto de vista matemático, existen algunas funciones para las cuales estas integrales no existen. Hay una variedad de posibles condiciones de existencia suficientes de la transformada de Fourier, pero quizá las más comunes son (Goodman, 2005):

1. $g(x, y)$ debe ser absolutamente integrable sobre el plano infinito (x, y) .
2. $g(x, y)$ debe tener solo un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito.
3. $g(x, y)$ no debe tener discontinuidades infinitas.

Sin embargo, como lo menciona Bracewell (1978), “*la posibilidad física es una condición suficientemente válida para la existencia de una transformada*”. Aun así, deben tomarse en consideración las condiciones de existencia mencionadas, ya que a veces es conveniente representar señales físicas por funciones matemáticas generadas que violan algunas de las condiciones, por ejemplo, la función delta de Dirac, representada por

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 e^{-N^2 \pi(x^2 + y^2)}, \quad (7)$$

la cual, al ser infinita en el origen y cero en cualquier otra parte, no cumple con la condición 3, por lo que estrictamente no tiene transformada de Fourier. Otros ejemplos importantes son $g(x, y) = 1$ y $g(x, y) = \cos(2\pi f_x x)$ que no satisfacen la condición 1. Afortunadamente, puede obtenerse la transformada de funciones que no satisfacen las condiciones de existencia, siempre y cuando puedan ser definidas como el límite de una secuencia de funciones transformables, de tal manera que, al transformar cada miembro de la secuencia, se genera una correspondiente secuencia de transformadas. El límite de esta nueva secuencia de transformadas se llama *transformada generalizada de Fourier* (Goodman, 2005). Por ejemplo, si se considera la delta de Dirac, se puede observar que cada miembro de la ecuación 9, *satisface* las condiciones de existencia mencionadas y tienen una transformada de Fourier dada por

$$\mathcal{F}\left\{N^2 e^{-N^2 \pi(x^2 + y^2)}\right\} = e^{\frac{-\pi(f_x^2 + f_y^2)}{N^2}}. \quad (8)$$

Por lo tanto, la transformada generalizada de Fourier de la función delta de Dirac es:

$$\mathcal{F}\{\delta(x, y)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ e^{\frac{-\pi(f_x^2 + f_y^2)}{N^2}} \right\} = 1. \quad (9)$$

Esto significa que el espectro de energía de la delta de Dirac es una constante en todo el dominio de frecuencias.

2.2 Propiedades de la transformada de Fourier

2.2.1 Linealidad

Si $\mathcal{F}\{ag_1(x, y)\} = aG_1(f_x, f_y)$ es la transformada de Fourier de una función $g_1(x, y)$ que está multiplicada por una constante a y $\mathcal{F}\{bg_2(x, y)\} = bG_2(f_x, f_y)$ es la transformada de Fourier de una

función $g_2(x, y)$ que está multiplicada por una constante b , se tiene que (Goodman, 2005)

$$\mathcal{F}\{ag_1(x, y) + bg_2(x, y)\} = aG_1(f_x, f_y) + bG_2(f_x, f_y). \quad (10)$$

Esto es, cumple con las propiedades de homogeneidad y superposición.

2.2.2 Traslación en el dominio del espacio

Si x_0 y y_0 son constantes reales y $\mathcal{F}\{g_1(x, y)\} = G_1(f_x, f_y)$, se tiene que (Brigham, 1988)

$$\mathcal{F}\{g(x - x_0, y - y_0)\} = G(f_x, f_y) e^{-j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)}. \quad (11)$$

Esto indica que la transformada de Fourier de una función desplazada en el espacio es la misma transformada de la función multiplicada por un factor exponencial de fase.

2.2.3 Traslación en el dominio de la frecuencia

Si $G(f_x, f_y)$ es desplazada por las constantes f_{x_0}, f_{y_0} , la transformada inversa de Fourier es (Brigham, 1988):

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f_x - f_{x_0}, f_y - f_{y_0})\} = g(x, y) e^{j2\pi(xf_{x_0} + yf_{y_0})}. \quad (12)$$

2.2.4 Teorema de escalamiento

Si a y b son constantes reales diferentes de cero, entonces se tiene que (Brigham, 1988)

$$\mathcal{F}\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right), \quad (13)$$

esto significa que, una expansión en el dominio de espacial, resulta en una contracción en el dominio de las frecuencias y viceversa, más un cambio en la amplitud total del espectro.

2.2.5 Simetría

Si la función $g(x, y)$ es una función real, como en el caso de imágenes, el módulo de su transformada de Fourier exhibe simetría, esto es (Brigham, 1988):

$$\left|G(f_x, f_y)\right| = \left|G(-f_x, -f_y)\right|. \quad (14)$$

2.3 Teorema de Parseval

El *teorema de Parseval* establece que (Goodman, 2005)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 df_x df_y, \quad (15)$$

lo cual significa que la energía o *varianza* de una señal se conserva al aplicar la transformada de Fourier.

2.4 Teorema de convolución

La convolución es una operación muy importante dentro del procesamiento de señales, debido a que nos relaciona tres señales de interés en un sistema lineal: la señal de entrada, la señal de salida y la respuesta al impulso del sistema (Smith, W. S., 1999, pp.107-109).

La convolución en el dominio espacial entre dos funciones bidimensionales $g(x, y)$ y $h(x, y)$, está expresada por la doble integral

$$g(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (16)$$

El *teorema de convolución* indica que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual a la multiplicación de las transformadas de Fourier de dichas funciones, esto es,

$$\mathcal{F}\{g(x, y) * h(x, y)\} = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y), \quad (17)$$

lo cual significa que se puede calcular la convolución de dos funciones aplicando la transformada inversa de Fourier al resultado de la multiplicación de las transformadas de Fourier de las funciones, eso es,

$$g(x, y) * h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y) H(f_x, f_y)\}. \quad (18)$$

2.5 Teorema de correlación

La correlación es una operación matemática que permite determinar el grado de relación entre dos funciones. Si tenemos una función $h(x, y)$ la cual es la función objetivo, y tenemos además una función $g(x, y)$, la cual hemos recopilado de algún experimento, la correlación está definida como

$$h(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(x', y') g(x' + x, y' + y) dx' dy', \quad (19)$$

donde \otimes significa correlación y h^* indica el complejo conjugado.

El teorema de correlación indica que la transformada de Fourier de la correlación de dos funciones $h(x, y)$ y $g(x, y)$ es igual a la multiplicación de la transformada de Fourier de $h(x, y)$ y el complejo conjugado de la transformada de Fourier de $g(x, y)$:

$$\mathcal{F}\{h(x, y) \otimes g(x, y)\} = G(f_x, f_y) H^*(f_x, f_y), \quad (20)$$

lo cual significa que se puede calcular la correlación de dos funciones aplicando la transformada inversa de Fourier al resultado de la multiplicación de la transformada de Fourier con el complejo conjugado de la otra función, eso es,

$$H(x, y) \otimes g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ G(f_x, f_y) H^*(f_x, f_y) \right\} . \quad (21)$$

2.6 Filtros de correlación

En esta sección se presentan algunos de los principales filtros basados en correlación que permiten el reconocimiento de objetos en una imagen de prueba.

2.6.1 Filtro clásico acoplado CMF (*Classical Matched Filter*)

El filtro clásico acoplado, desarrollado por Vander Lugt en 1964, también conocido como filtro complejo o filtro holográfico, generó un interés en el desarrollo de nuevos filtros de correlación optimizados para un mejor desempeño en ciertas áreas del reconocimiento de patrones. Este filtro se describe matemáticamente como

$$H(f_x, f_y)_{CMF} = T(f_x, f_y)^* , \quad (22)$$

donde $T(f_x, f_y)^*$ es el complejo conjugado de la transformada de Fourier de la imagen $t(x, y)$ del objeto a reconocer. Dado que $H(f_x, f_y)$ es una función compleja, también se puede expresar como

$$H(f_x, f_y)_{CMF} = |T(f_x, f_y)| e^{j\phi(f_x, f_y)} , \quad (23)$$

donde $|T(f_x, f_y)|$ es el módulo de la transformada de Fourier del objeto y $e^{j\phi(f_x, f_y)}$ es un factor exponencial de fase. Este tipo de filtro puede implementarse ópticamente como un filtro espacial, esto es,

insertando el filtro en el plano de Fourier, de ahí el nombre de filtro holográfico (Goodman, 2005).

Este filtro, tiene como ventaja que optimiza la relación señal a ruido (SNR) cuando la imagen problema se encuentra afectada por ruido blanco aditivo (Vijaya Kumar y Hasebrook, 1990). Sin embargo, presenta varias desventajas, ya que produce picos de correlación bastante anchos, lóbulos secundarios laterales grandes, tiene una discriminación relativamente baja y poca eficiencia de luz en su implementación óptica (Javidi y Horner, 1994). Dado que los filtros espaciales son elementos pasivos, esto es, no amplifican la distribución de la luz; entonces, $\left|H(f_x, f_y)\right| \leq 1$. Como consecuencia de ello, los valores posibles del filtro complejo deben estar en o dentro de una circunferencia unitaria centrada en el origen del plano complejo (Vander Lugt, 1968).

2.6.2 Filtro solo de fase POF

Este tipo de filtros está diseñado de modo que no considera la intensidad de la luz a través del sistema, esto es, la amplitud es unitaria. Entonces, la función que describe el filtro solo de fase está dada por (Horner y Gianino, 1984)

$$H(f_x, f_y)_{POF} = e^{j\phi(f_x, f_y)}. \quad (24)$$

Esta definición significa que este tipo de filtro solo toma valores en el círculo unitario del plano complejo. La implementación del filtro solo de fase da como respuesta, picos de correlación más estrechos y más definidos lo que permite mejor selectividad en comparación con el filtro clásico.

2.6.3 Filtro no lineal NLF -ley k

Un filtro no lineal, es un filtro en el cual su salida es una función no lineal de la entrada. En el filtro no lineal ley k , la no linealidad está determinada por el exponente k que afecta el módulo de la transformada de Fourier de la imagen, por lo tanto, este filtro está dada por (Vijaya Kumar y Hasebrook, 1990)

$$H(f_x, f_y)_{NLF} = |T(f_x, f_y)|^k e^{j\phi(f_x, f_y)}, \quad (25)$$

donde $\phi(f_x, f_y)$ y $|T(f_x, f_y)|$ son respectivamente, la fase y el módulo de la transformada de Fourier de la imagen y k es el factor de no linealidad que toma valores $0 < k < 1$. Variando el valor de k en este intervalo, podemos cambiar la capacidad de discriminación del filtro no lineal y determinar así el valor óptimo de k , dependiendo del sistema de reconocimiento a implementar. Como se puede ver, en el intervalo indicado, no se consideran los valores 0 y 1, ya que de hacerlo, estaríamos trabajando con un filtro solo de fase cuando $k = 0$ o con un filtro clásico cuando $k = 1$.

Comparado con el filtro clásico acoplado y el filtro solo de fase, el filtro no lineal ley k , tiene como ventaja su gran capacidad para discriminar objetos, ya que el máximo pico de correlación está bien localizado y el plano de salida es menos ruidoso. El valor óptimo de k , considerando la limpieza del plano de salida de correlación, es $k = 0.1$. La limpieza del plano de salida se determina comparando la energía total del plano de correlación con respecto al pico o máximo de correlación. Matemáticamente se mide mediante la métrica PCE (*Peak to Correlation Energy*) por sus siglas en inglés, la cual está dada por (Javidi, 2002)

$$PCE = \frac{|C(c_x, c_y)|^2}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N |C(x, y)|^2}, \quad (26)$$

donde el numerador es la energía del pico de correlación y el denominador es el valor de la energía de todo el plano de correlación. Esto significa que si el plano de correlación no presenta ruido, el $PCE = 1$ ya que en el denominador solo existirá el valor del pico de correlación. Conforme el plano vaya presentando más ruido el PCE disminuirá. En la figura 3 se muestran los planos de correlación producidos por los filtros de correlación: clásico acoplado, solo de fase y no lineal con un valor de $k = 0.1$, al realizar la autocorrelación de la imagen de la letra Arial O de la figura 3a. Se puede ver en la figura 3b lo ancho del pico de correlación y lóbulos laterales producidos por el filtro holográfico con $PCE = 0.0012$. En la figura 3c se puede ver cómo el pico de salida es más limpio y el pico de correlación está bien localizado con respecto al resultado del filtro clásico, por lo cual su PCE aumenta a 0.2130. En la figura 3d, se tiene el resultado para un filtro no lineal con una $k = 0.1$, en el cual el pico está más definido que en el caso de filtro clásico y de fase, por lo que su $PCE = 0.2575$ es el más alto de los tres tipos de filtros.

2.7 La transformada fraccional de Fourier

En esta sección se presenta el concepto de la definición de la transformada fraccional de Fourier, por facilidad en la explicación de sus propiedades, la definición es dada en una dimensión, pero puede extenderse a dos dimensiones. La transformada fraccional de Fourier (TFRF) introducida por Victor Namias (1980), es una generalización de la transformada de Fourier que depende de un parámetro α . La TFRF puede ser interpretada como una rotación en el plano tiempo-frecuencia y está definida como (Almeida, 1994):

$$G_{\alpha}(u) = \mathcal{F}_{\alpha}\{g(x)\} = \sqrt{1 - j \cot \alpha} e^{j\pi u^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{j\pi x^2 \cot \alpha} e^{-j2\pi u x \csc \alpha} dx, \quad (27)$$

donde α es el ángulo de rotación en el plano tiempo-frecuencia y u es una variable adimensional que corresponde a valores entre la función original en el dominio del tiempo (o espacio) y su transformada fraccional de Fourier (Almeida, 1994), figura 4.

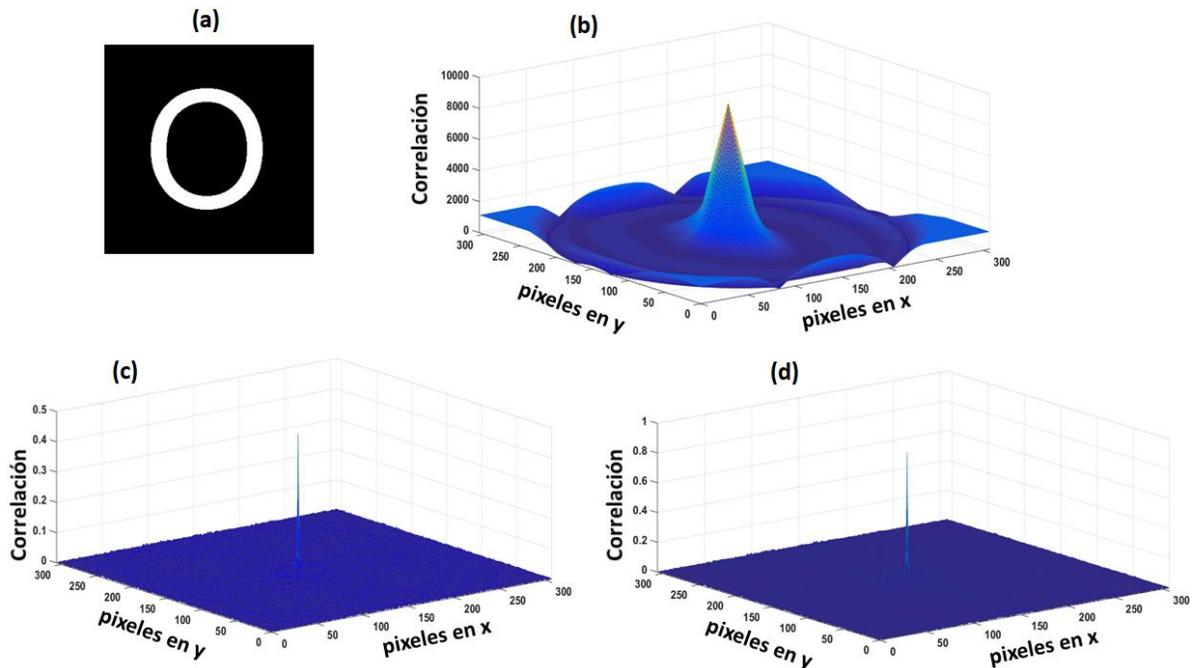


Figura 3. Respuesta de la autocorrelación de una imagen con tres diferentes filtros. (a) Imagen. (b) Espacio de autocorrelación usando un filtro clásico acoplado, su $PCE = 0.0012$. (c) Espacio de autocorrelación usando un filtro solo de fase, su $PCE = 0.2130$. (d) Espacio de autocorrelación usando un filtro no lineal con una $k = 0.1$, su $PCE = 0.2575$.

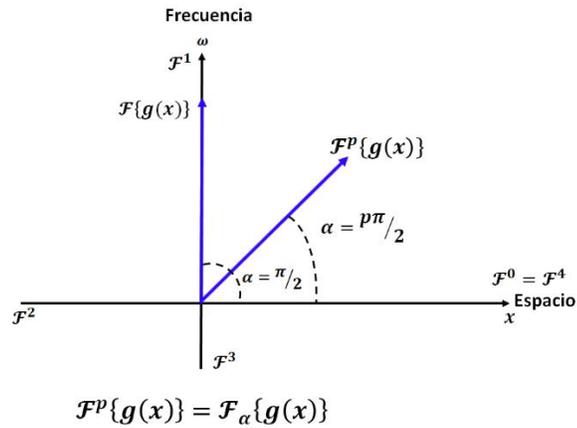


Figura 4. Plano tiempo-frecuencia y la rotación de la TFrF por un ángulo α .

Dado que \mathcal{F} es el operador de la transformada de Fourier, la transformada fraccional de Fourier de orden p de la función $g(x)$ es $\mathcal{F}^p\{g(x)\} = G_\alpha(u)$, donde

$$p = \frac{\alpha}{\pi/2}. \quad (28)$$

De la ecuación 28, se observa que al cambiar el ángulo α , se pueden obtener órdenes fraccionales p . Por lo tanto para un ángulo $\alpha = \pi/2$, la TFrF se convierte en la TF y para $\alpha = 0$ la TFrF se convierte en el operador identidad. Esto es, el operador de la TF "clásica", es un caso particular de la TFrF de orden $p = 1$ o equivalentemente, un ángulo $\alpha = \pi/2$. En este trabajo, la TFrF se calculó cambiando al ángulo α , además, por simplicidad en la presentación de resultados, los ángulos fueron tomados en grados y no en radianes.

En la figura 5 se muestran los resultados de las partes real e imaginaria de la TFrF de una función rectángulo para varios valores de α .

En la figura 6 se muestra la variación de magnitud de la transformada fraccional de Fourier de una función rectángulo con respecto al ángulo α , donde se observa la evolución de la función $g(x)$ hacia su transformada de Fourier, desde $g(x)$ para $\alpha = 0$ hasta $G(f)$ para $\alpha = \pi/2$, y los diferentes planos intermedios determinados por el ángulo α .

Del comportamiento mostrado en las figuras 5 y 6, se observa que la transformada fraccional de Fourier es equivalente a la manera en que la difracción de Fresnel nos describe la propagación de una onda electromagnética, hasta llegar a la difracción de campo lejano o difracción de Fraunhofer, la cual físicamente corresponde a la transformada de Fourier (Pellat-Finet, 1994). Por lo tanto, al variar el orden de la TFrF al cambiar el ángulo α , estaremos analizando diferentes planos de propagación de una onda determinada por la difracción de Fresnel.

Con respecto a las condiciones de existencia, la transformada fraccional de Fourier de una función tiene las mismas condiciones de existencia bajo las cuales la transformada de Fourier existe (McBride y Kerr 1987, Almeida 1994).

En la figura 7 se muestra la TFrF a varios ángulos α aplicada a la imagen de la letra B tipo Arial. Se puede ver cómo al cambiar el valor de α la imagen es difractada desde el dominio del espacio (figura 7a) cuando $\alpha = 0^\circ$, hasta el dominio de la frecuencia o difracción de Fraunhofer cuando $\alpha = 90^\circ$, figura 7f.

2.8 Propiedades de la transformada fraccional de Fourier

2.8.1 Operador identidad y operador paridad

Cuando $p = 4m$, donde m es un número entero, la TFrF corresponde al operador identidad \mathfrak{I} , esto es (Ozaktas et al., 1999):

$$\mathfrak{I} = \mathcal{F}^{4m}, \quad (29)$$

esto significa que

$$\mathcal{F}^{4m} \{g(x)\} = g(x). \quad (30)$$

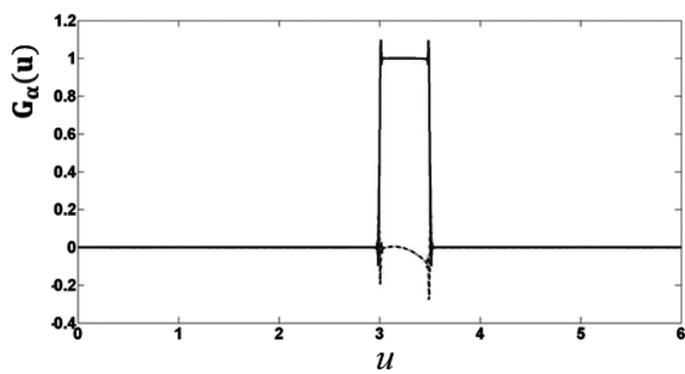
El operador identidad también se obtiene cuando $p = 0$.

Cuando $p = 4m \pm 2$, la TFrF corresponde al operador paridad \mathcal{P} , esto es:

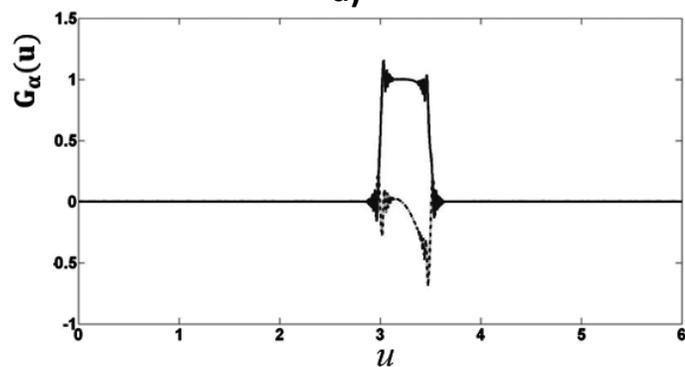
$$\mathcal{P} = \mathcal{F}^{4m \pm 2}, \quad (31)$$

lo cual significa que

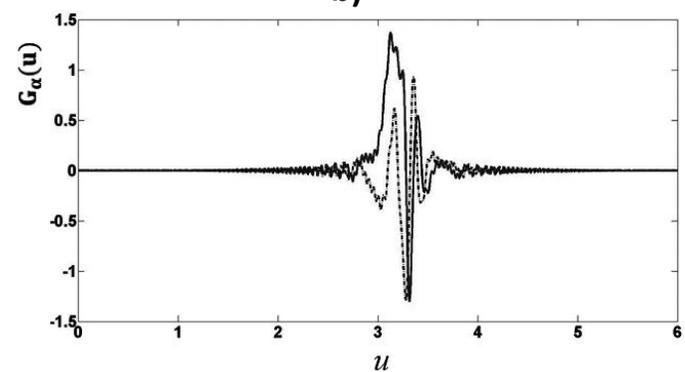
$$\mathcal{F}^{4m \pm 2} \{g(x)\} = g(-x). \quad (32)$$



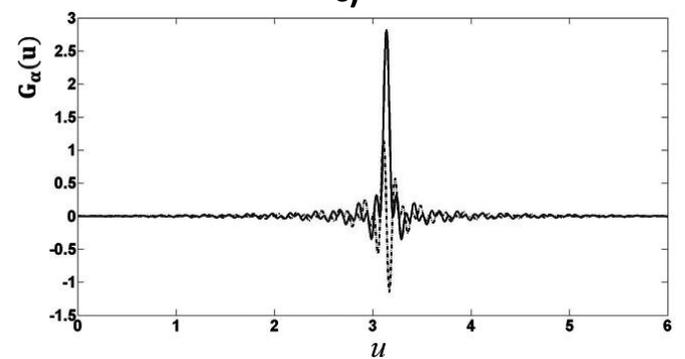
a)



b)



c)



d)

Figura 5. TFrf de una función rectángulo, calculada a varios ángulos. a) $\alpha = 0.01$ b) $\alpha = 0.05$. c) $\alpha = \pi/4$. d) $\alpha = \pi/2$. Línea sólida: parte real. Línea punteada: parte imaginaria.

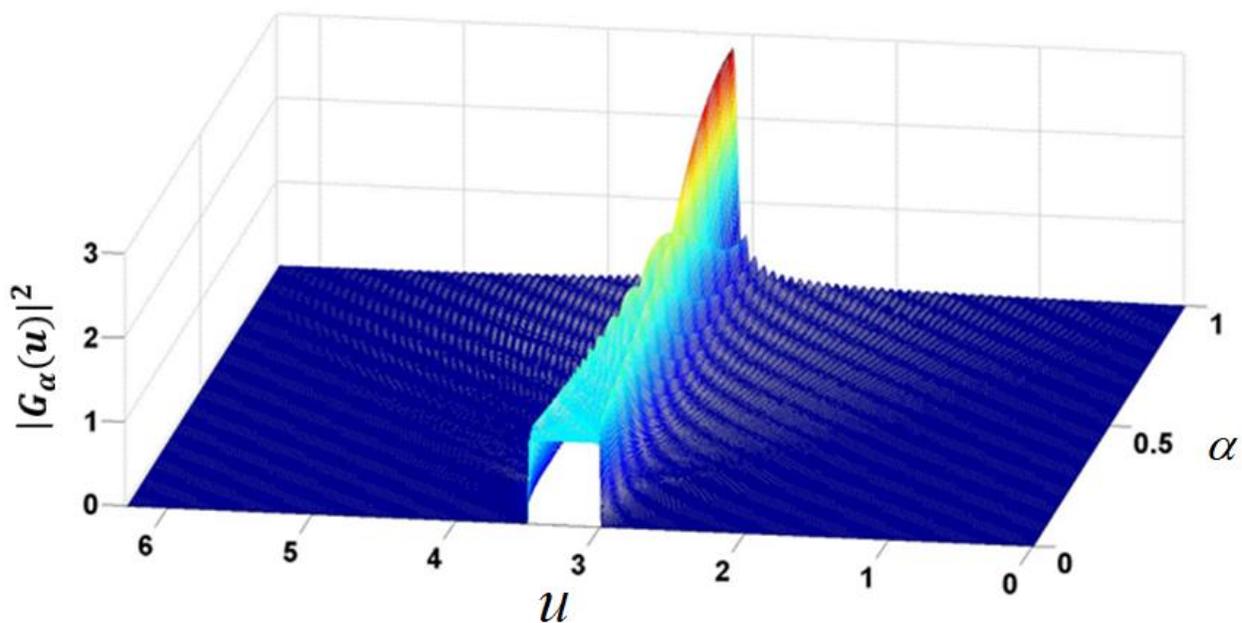


Figura 6. Variación de magnitud de la TFrF de un rectángulo con respecto a α .

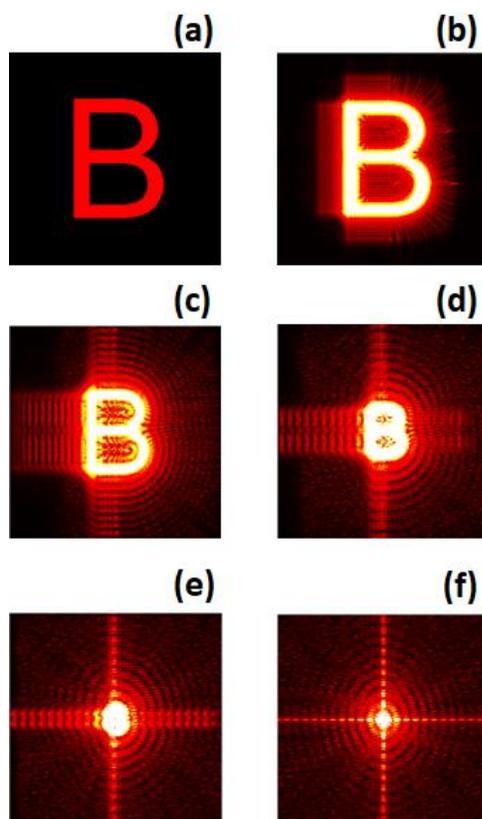


Figura 7. Transformada fraccional de Fourier de la letra B tipo Arial para diferentes valores de α . (a) $\alpha = 0^\circ$. (b) $\alpha = 15^\circ$. (c) $\alpha = 45^\circ$. (d) $\alpha = 65^\circ$. (e) $\alpha = 80^\circ$. (f) $\alpha = 90^\circ$.

2.8.2 Potencias enteras de la transformada fraccional de Fourier

La definición de la TFrF es consistente con la definición de potencias enteras del operador de la transformada de Fourier mediante aplicación repetida, esto es, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}\mathcal{F}^2$, etc. Por lo tanto, se tiene que (Ozaktas et al., 1999):

$$\mathcal{F}^0 = \mathfrak{I}, \quad (33)$$

$$\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}, \quad (34)$$

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{P}, \quad (35)$$

$$\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{F}, \quad (36)$$

$$\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}^0 = \mathfrak{I}. \quad (37)$$

2.8.3 Periodicidad

Dado que $p = \alpha/(\pi/2)$, la definición de la transformada fraccional de Fourier en términos de p es periódica, con un periodo igual a 4. En términos de α su periodo es de 2π . Por lo tanto, el operador de la TFrF cumple con (Ozaktas et al., 1999):

$$\mathcal{F}^{4m+p} = \mathcal{F}^{4n+p}, \quad (38)$$

donde m y n son enteros arbitrarios.

2.8.4 Suma de órdenes

La transformada fraccional de Fourier cumple con la siguiente propiedad (Ozaktas et al., 1999):

$$\mathcal{F}^{p_1} \left\{ \mathcal{F}^{p_2} \left\{ g(x) \right\} \right\} = \mathcal{F}^{p_1+p_2} \left\{ g(x) \right\} = \mathcal{F}^{p_2} \left\{ \mathcal{F}^{p_1} \left\{ g(x) \right\} \right\}, \quad (39)$$

utilizando la notación de operadores se tiene:

$$\mathcal{F}^{p_1} \mathcal{F}^{p_2} = \mathcal{F}^{p_1+p_2} = \mathcal{F}^{p_2} \mathcal{F}^{p_1} \quad (40)$$

Esta propiedad nos permite por ejemplo, calcular el orden 0.7 de la TFrF como la TFrF de orden 0.2 de la TFrF de orden 0.5 de una función. También, el calcular la TFrF de orden 1.3 de la TFrF de orden 2.1 de la TFrF del orden 1.4 de una función $g(x)$, es igual a calcular la TFrF de orden 4.8 de dicha función, que de acuerdo de la periodicidad de la TFrF, es igual a calcular la TFrF de orden 0.8 de la función.

2.8.5 Transformada fraccional de Fourier de funciones par

La TFrF es una operación par. Esto significa que la TFrF de una función par es siempre par y la TFrF de una función impar siempre es impar. Esto es (Ozaktas et al., 1999)

$$\mathcal{F}_\alpha \{g(-x)\} = G_\alpha(-u). \quad (41)$$

2.8.6 Transformada fraccional de Fourier de funciones escaladas

Generalizando la propiedad de escalamiento de la TF, la TFrF de una función $g(cx)$ está dada por (Almeida, 1994)

$$\mathcal{F}_\alpha \{g(cx)\} = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{c^2 - j \cot \alpha}} \exp \left[j \frac{u^2}{2} \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right) \right] G_\beta \left(\frac{u \operatorname{sen} \beta}{c \operatorname{sen} \alpha} \right), \quad (42)$$

donde, $\beta = \arctan(c^2 \tan \alpha)$. Esto es, la TFrF de una función $g(cx)$ no es una función escalada de $G_\alpha(u)$ para el mismo ángulo α , ya que es una versión escalada y modulada de $G_\beta(u)$, donde $\beta \neq \alpha$.

2.8.7 Propiedad de desplazamiento

Cuando la función $g(x)$ es desplazada por una constante x_0 , su transformada de Fourier está dada por (Almeida, 1994)

$$\mathcal{F}_\alpha \{g(x - x_0)\} = G_\alpha(u - x_0 \cos \alpha) e^{\left(j \frac{x_0^2}{2} \text{sen} \alpha \cos \alpha - j u x_0 \text{sen} \alpha \right)}. \quad (43)$$

La ecuación 43 muestra que al desplazar una función, su transformada fraccional de Fourier no solo estará multiplicada por un factor exponencial de fase, sino que además su argumento es afectado por desplazamiento dado por $\cos \alpha$. Esto significa que el módulo de la TFrF no es invariante a desplazamiento, como si lo es en el caso particular del módulo de la TF. Por lo tanto, en este trabajo se desarrollaron dos maneras distintas de obtener invariancia a posición.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se muestran las metodologías invariantes a rotación y posición desarrolladas. También se desarrollaron dos métodos para extraer de una imagen, vectores unidimensionales que representan a la imagen de manera única. Estos vectores unidimensionales son llamados firmas, ya que estos vectores son una manera de identificar a una imagen de la misma manera que una persona tiene una firma que la identifica. Ambas técnicas hacen uso de la transformada fraccional de Fourier para generar máscaras binarias que permiten construir las firmas y trabajan solo con imágenes $N \times N$.

3.1 Metodología 1. TFrF de la imagen espectral para la generación de máscaras binarias

En esta metodología, para la construcción de las máscaras binarias se utiliza el módulo de la transformada de Fourier de la imagen, nombrada *imagen espectral*. Para una imagen $I(x, y)$, donde $x = 1, \dots, N$, $y = 1, \dots, N$, la imagen espectral es

$$I_{esp} = |\mathcal{F}\{I(x, y)\}| = |\mathcal{F}_{90}\{I(x, y)\}|, \quad (44)$$

la cual es el módulo de la transformada de Fourier o transformada fraccional de Fourier a un ángulo $\alpha = 90^\circ$. Al trabajar con la imagen espectral se obtiene invariancia a posición. En la figura 8 tenemos un ejemplo obtenido de la imagen de la letra B tipo Arial. La figura 8b muestra la imagen espectral obtenida de la figura 8a.

3.1.1 Máscara binaria de anillos concéntricos

Las máscaras de anillos concéntricos se construyen tomando la parte real o imaginaria de la transformada fraccional de Fourier de la imagen espectral, esto es, $Re[\mathcal{F}_\alpha\{I_{esp}\}]$ o $Im[\mathcal{F}_\alpha\{I_{esp}\}]$. La figura 8c y 8d muestran la parte real e imaginaria respectivamente, de la transformada fraccional de Fourier a un ángulo

$\alpha = 85^\circ$ aplicada a la figura 8b.

Después, tanto de la parte real como de la parte imaginaria se extrae un *perfil óptimo* que será binarizado para posteriormente construir la máscara binaria de anillos concéntricos. Para extraer el perfil a utilizar, tanto la parte real e imaginaria de $N \times N$ pixeles es primeramente filtrada mediante una multiplicación punto a punto con un disco unitario D dado por (Solorza-Calderón y Álvarez-Borrego, 2015)

$$D = \begin{cases} 1, & \text{si } d((c_x, c_y), (x, y)) \leq N \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}, \quad (45)$$

donde, (c_x, c_y) es el pixel central, N es el diámetro y $d((c_x, c_y), (x, y))$ es la distancia euclidiana entre cada pixel en la imagen y el pixel central. Por lo tanto, el disco está centrado en el pixel (c_x, c_y) y tiene un diámetro de N pixeles.

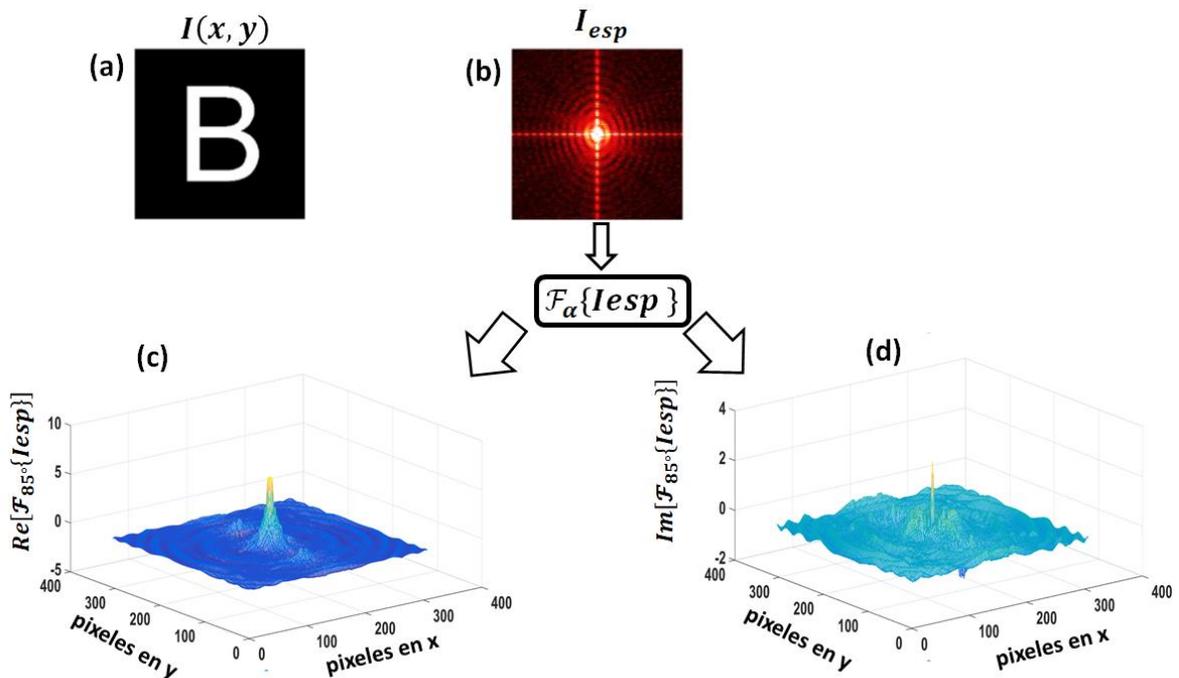


Figura 8. (a) Imagen de letra B tipo Arial de 307×307 pixeles. (b) Imagen espectral de la imagen de la letra B tipo Arial. (c) Parte real de la TFrF de la imagen espectral a un $\alpha = 85^\circ$. (d) La parte imaginaria de la TFrF de la imagen espectral a un $\alpha = 85^\circ$.

El proceso de filtrado está dado por:

$$f_{Re} = D \bullet Re \left[\mathcal{F}_\alpha \{ I_{spec} \} \right], \quad (46)$$

$$f_{Im} = D \bullet Im \left[\mathcal{F}_\alpha \{ I_{spec} \} \right], \quad (47)$$

donde, \bullet es una multiplicación punto a punto. El proceso de filtrado dado por las ecuaciones 44 y 45, se muestra en la figura 9a y 9b, respectivamente. Este filtrado permite obtener de f_{Re} y f_{Im} 180 perfiles de la misma longitud N y que pasen por el pixel central (c_x, c_y) con una separación de un grado entre ellos. Las figuras 10a y 10b muestran algunos ejemplos de perfiles obtenidos de f_{Re} y f_{Im} respectivamente.

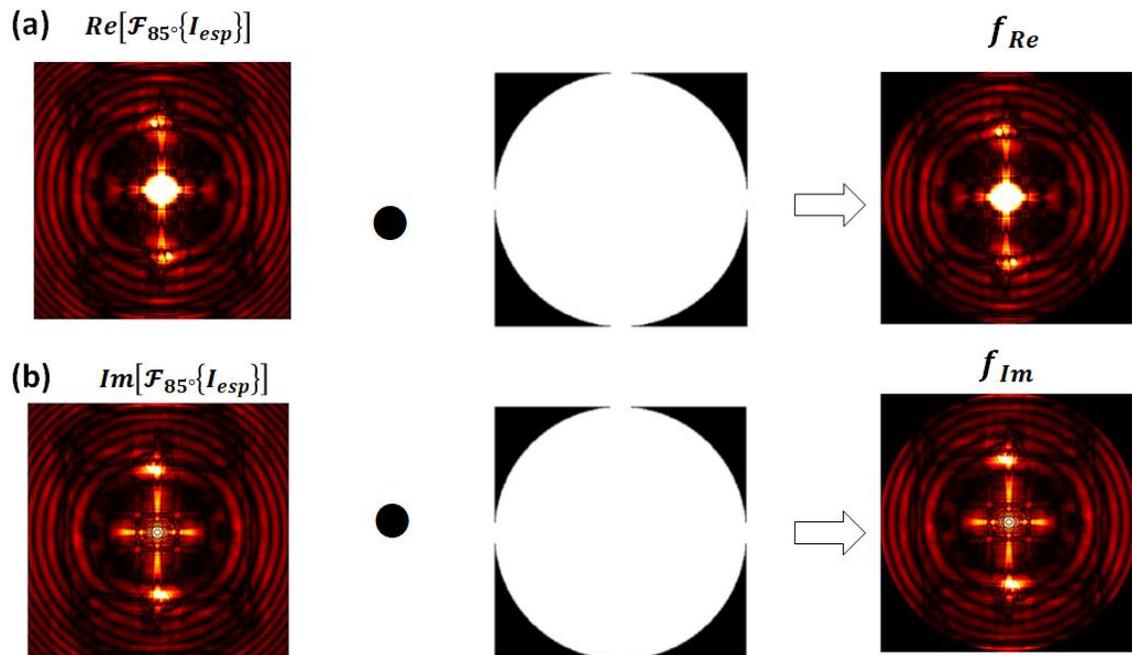


Figura 9. Proceso de filtrado de la TFRf de la imagen espectral por un disco unitario. (a) Parte real. (b) Parte imaginaria.

Los perfiles están expresados por (Solorza y Álvarez-Borrego, 2015)

$$P_{Re}^\theta(x) = f_{Re}(x, y(x)), \quad (48)$$

$$P_{Im}^{\theta}(x) = f_{Im}(x, y(x)), \quad (49)$$

donde, $y(x) = m(x - x_1) + y_1$, m es la pendiente de y , $(x_1, y_1) = (c_x + c_x \cos \theta, c_x - c_x \sin \theta)$ y $(x_2, y_2) = (c_x + c_x \cos(\theta + \pi), c_x - c_x \sin(\theta + \pi))$ son los puntos finales de la línea, y θ es el ángulo entre y y el eje horizontal. El siguiente paso es calcular la energía de cada perfil:

$$S_{Re}^{\theta} = \sum_{x=1}^N (P_{Re}^{\theta}(x))^2, \quad (50)$$

$$S_{Im}^{\theta} = \sum_{x=1}^N (P_{Im}^{\theta}(x))^2, \quad (51)$$

y el perfil con la mayor energía es seleccionado como el perfil óptimo:

$$\phi_{\beta} = \max_{0 \leq \theta \leq 179} \{S_{Re}^{\theta}\}, \quad P_{O_{Re}}(x) = P_{Re}^{\beta}(x), \quad (52)$$

$$\phi_{\gamma} = \max_{0 \leq \theta \leq 179} \{S_{Im}^{\theta}\}, \quad P_{O_{Im}}(x) = P_{Im}^{\gamma}(x), \quad (53)$$

donde β y γ son los ángulos del perfil que tiene la mayor energía. $P_{O_{Re}}(x)$ y $P_{O_{Im}}(x)$ son los perfiles óptimos de la parte real e imaginaria de la transformada fraccional de Fourier, respectivamente y mostrados en las figuras 11a y 11b.

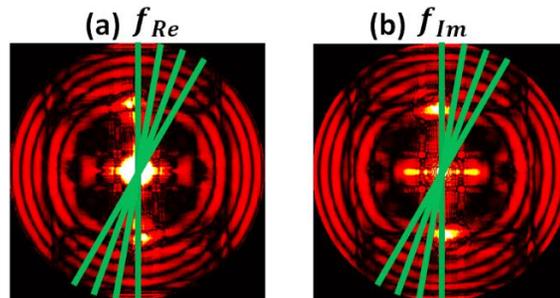


Figura 10. (a) Algunos ejemplos de los 180 perfiles obtenidos de la parte real de la TFrF. (b) Algunos ejemplos de los 180 perfiles obtenidos de la parte imaginaria de la TFrF.

Este proceso de búsqueda de un perfil óptimo, es necesario ya que si una imagen es rotada, su espectro también rotará, por lo tanto, el perfil óptimo no se encontrará en el mismo lugar que antes de la rotación, situación que puede afectar al analizar imágenes de las cuales sabemos de antemano la rotación que puedan tener.

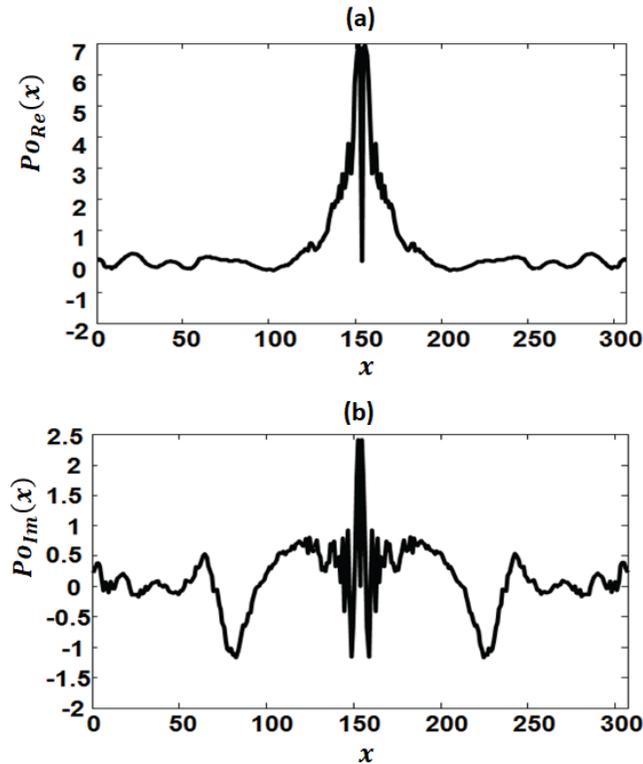


Figura 11. Perfiles óptimos extraídos de la TFrF de la imagen espectral de la letra Arial B con un ángulo $\alpha = 85^\circ$. (a) Perfil óptimo extraído de la parte real. (b) Perfil óptimo extraído de la parte imaginaria.

Una vez obtenidos los perfiles óptimos, se calculan sus pendientes (Solís-Ventura et al., 2015):

$$m_{Re} = \frac{Op_{Re}(x) - Op_{Re}(x+1)}{x - (x+1)}, \quad (54)$$

$$m_{Im} = \frac{Op_{Im}(x) - Op_{Im}(x+1)}{x - (x+1)}, \quad (55)$$

donde, $x=1,\dots,N-1$, m_{Re} and m_{Im} son las pendientes de los perfiles óptimos extraídos de la parte real e imaginaria respectivamente.

Posteriormente, se aplica a las pendientes de los perfiles óptimos de la parte real la condición obtenida en la ecuación 54. Para generar un perfil binario se utiliza como umbral la pendiente igual a cero de la siguiente manera (Solís-Ventura et al., 2015):

$$Z_{RP}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } m_{Re}(x) > 0, \\ 0, & \text{if } m_{Re}(x) \leq 0, \end{cases} \quad (56)$$

donde, $Z_{RP}(x)$ es el perfil binario positivo de la parte real. Invertiendo la condición de binarización, otra función es generada por medio de:

$$Z_{RN}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } m_{Re}(x) < 0, \\ 0, & \text{if } m_{Re}(x) \geq 0, \end{cases} \quad (57)$$

donde $Z_{RN}(x)$ es el perfil binario no positivo de la parte real.

Para las pendientes de la parte imaginaria obtenida con la ecuación 55, las mismas dos condiciones de umbral son aplicadas para obtener el perfil binario positivo de la parte imaginaria $Z_{IP}(x)$ y el perfil binario no positivo de la parte imaginaria $Z_{IN}(x)$ como

$$Z_{IP}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } m_{Im}(x) > 0, \\ 0, & \text{if } m_{Im}(x) \leq 0, \end{cases} \quad (58)$$

$$Z_{IN}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } m_{Im}(x) \leq 0, \\ 0, & \text{if } m_{Im}(x) > 0. \end{cases} \quad (59)$$

En la figura 12 se puede ver un ejemplo de la función binaria $Z_{RP}(x)$ obtenida a partir del perfil óptimo mostrado en la figura 8a. Después, tomando $x=1$ como eje de rotación, los perfiles binarios $Z_{RP}(x)$, $Z_{RN}(x)$, $Z_{IP}(x)$ y $Z_{IN}(x)$ son rotados 360° para obtener cilindros concéntricos; los cuales tendrán una altura de 1.

Estos cilindros concéntricos tienen diferente grosor y están centrados en (c_x, c_y) ; un ejemplo de ellos se muestra en la figura 13. Tomando una sección transversal de esos cilindros se construyen las máscaras de anillos concéntricos asociadas a la imagen procesada. Siguiendo la notación de subíndices de los perfiles binarizados, las máscaras binarias de anillos se nombran M_{RP} , M_{RN} , M_{IP} y M_{IN} . Debido a que se rotaron los perfiles binarizados utilizando como eje $x=1$, las imágenes de las máscaras binarias resultantes tendrían el doble de tamaño que la imagen, sin embargo, los radios de los anillos son divididos entre dos para así tener unas máscaras binarias de anillos que no exceden las dimensiones de la imagen procesada.

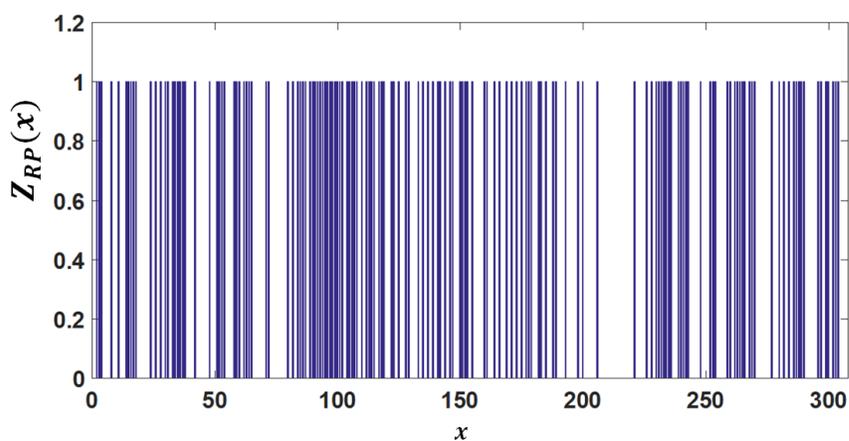


Figura 12. Perfil óptimo binarizado obtenido de la parte real de la TFrF de la imagen espectral aplicando la condición de la ecuación 56.

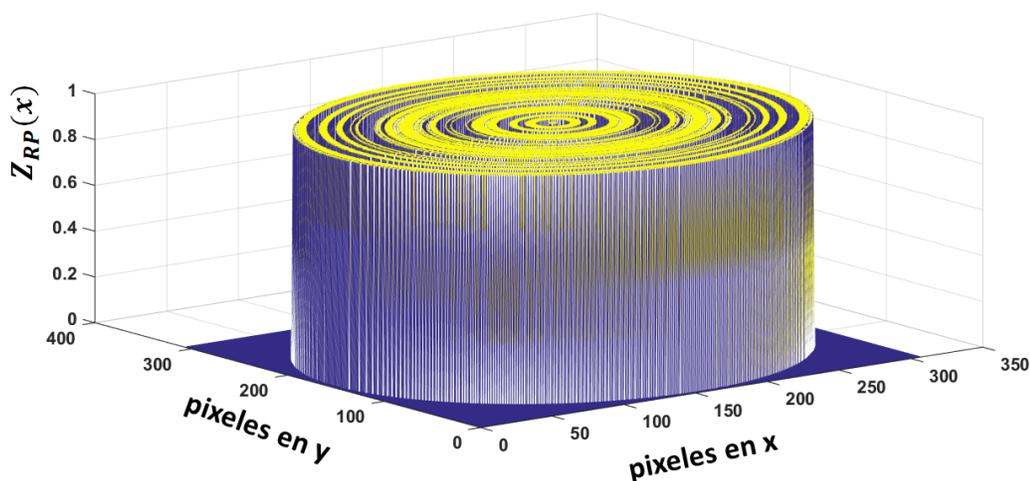


Figura 13. Cilindros concéntricos producidos al rotar el perfil binario $Z_{RP}(x)$.

La figura 14 muestra las máscaras asociadas con la imagen de la letra B tipo Arial al aplicar la metodología 1 para una transformada fraccional de Fourier a un ángulo $\alpha = 85^\circ$.

Como se muestra en la figura 7, el cambiar el ángulo α de la transformada fraccional de Fourier da como resultado un patrón de difracción de Fresnel diferente para diferente valor de α , por lo tanto, también cambia el perfil óptico extraído de la parte real y parte imaginaria. Por ejemplo, las figuras 15a y 15b muestran los perfiles óptimos extraídos de la parte real de la transformada fraccional de Fourier de la imagen espectral de la letra B para $\alpha = 85^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$, respectivamente. La figura 16 muestra las cuatro máscaras asociadas a la letra B para $\alpha = 45^\circ$, las cuales son diferentes a las obtenidas para $\alpha = 85^\circ$, como puede observarse en la figura 14.

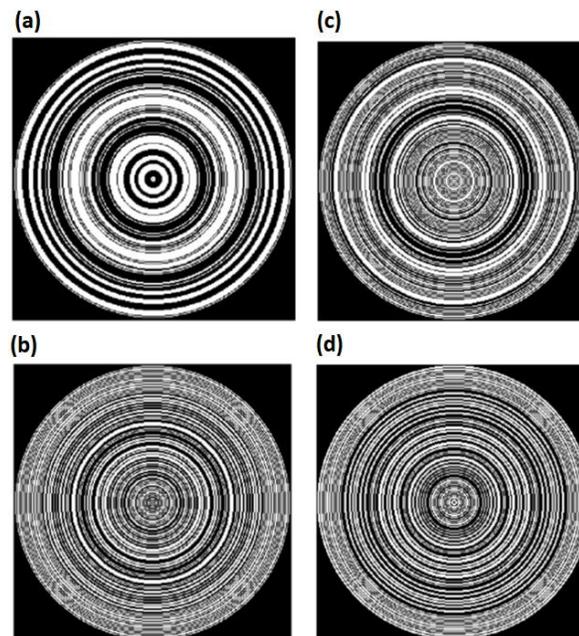


Figura 14. Máscaras de anillos concéntricos para la letra B tipo Arial obtenidas utilizando la metodología 1 para un $\alpha = 85^\circ$ de la TFrF. (a) M_{RP} . (b) M_{RN} . (c) M_{IP} . (d) M_{IN} .

3.1.2 Firma de la imagen obtenida con metodología 1

Para obtener invariancia a rotación, las máscaras binarias de anillos concéntricos son utilizadas para construir una firma unidimensional para una imagen dada. Cada una de las cuatro máscaras generará una

firma distinta para dicha imagen. El primer paso es calcular el módulo de la transformada fraccional de Fourier de la imagen espectral para después ser filtrada por las máscaras binarias previamente obtenidas, de la siguiente manera:

$$H_{RP} = M_{RP} \bullet \left| \mathcal{F}_\alpha \{ I_{spec} \} \right|, \quad (60)$$

$$H_{RN} = M_{RN} \bullet \left| \mathcal{F}_\alpha \{ I_{spec} \} \right|, \quad (61)$$

$$H_{IP} = M_{IP} \bullet \left| \mathcal{F}_\alpha \{ I_{spec} \} \right|, \quad (62)$$

$$H_{IN} = M_{IN} \bullet \left| \mathcal{F}_\alpha \{ I_{spec} \} \right|, \quad (63)$$

donde, la transformada fraccional de Fourier del módulo se calcula utilizando el mismo ángulo α con el que se generaron las máscaras binarias.

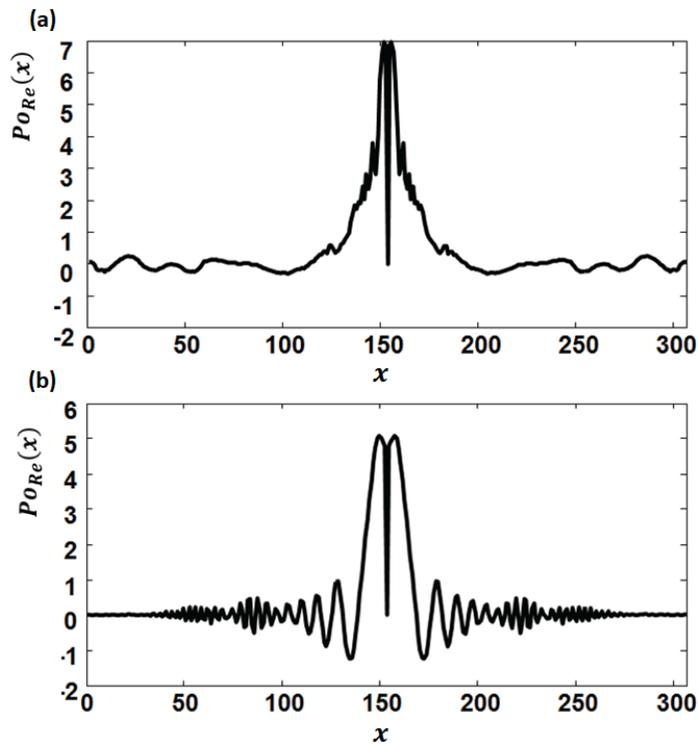


Figura 15. Perfiles óptimos extraídos de f_{Re} a diferentes ángulos α para la TFrF de la imagen espectral de la letra Arial B, mediante la metodología 1. (a) Para $\alpha = 85^\circ$. (b) Para $\alpha = 45^\circ$.

En la figura 17 se muestra un ejemplo: el módulo de la transformada fraccional de Fourier con $\alpha = 85^\circ$ de la imagen espectral de la figura 8b se muestra en la figura 17a, la M_{RP} se observa en la figura 17b y el resultado de la multiplicación punto a punto dada por la ecuación 60 se muestra en la figura 17c. Como paso final, se suman todos los valores muestreados por los anillos blancos de la máscara empezando con el anillo central hacia afuera, asignándoles un índice, para obtener la firma normalizada correspondiente a la máscara utilizada y que representa a la imagen (Solorza y Álvarez-Borrego, 2010). La figura 17d muestra la firma construida a partir de la figura 17c. El eje vertical representa la suma de los valores muestreados por cada anillo y el eje horizontal representa el índice asociado a cada anillo de la máscara binaria, empezando con el anillo interior.

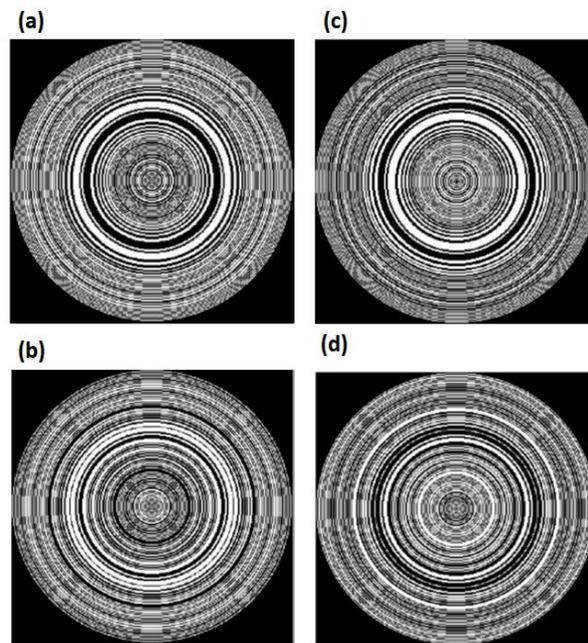


Figura 16. Máscaras binarias de anillos concéntricos para la letra Arial B obtenidas utilizando la metodología 1 con una TFrF con $\alpha = 45^\circ$. (a) M_{RP} . (b) M_{RN} . (c) M_{IP} . (d) M_{IN} .

La figura 18 muestra las cuatro firmas obtenidas de la imagen de la letra tipo Arial. La firma llamada S_{RP} es la construída con la máscara M_{RP} , S_{RN} con M_{RN} , S_{IP} con M_{IP} y S_{IN} con M_{IN} . Las cuatro firmas en la figura 18 son resultado de implementar una transformada fraccional de Fourier a un ángulo de $\alpha = 85^\circ$. Debido a que el número de anillos es diferente para cada máscara, el tamaño de las firmas también es diferente. La figura 19 presenta las firmas para la misma imagen pero para una transformada fraccional de Fourier calculada a un ángulo de $\alpha = 45^\circ$. Se observa que estas firmas son diferentes a las mostradas en la figura 18. Esto es debido a que los perfiles óptimos cambian con α , como se muestra en la figura

15. Entonces, al variar el ángulo α de la transformada fraccional de Fourier, tanto las máscaras binarias como las firmas cambian.

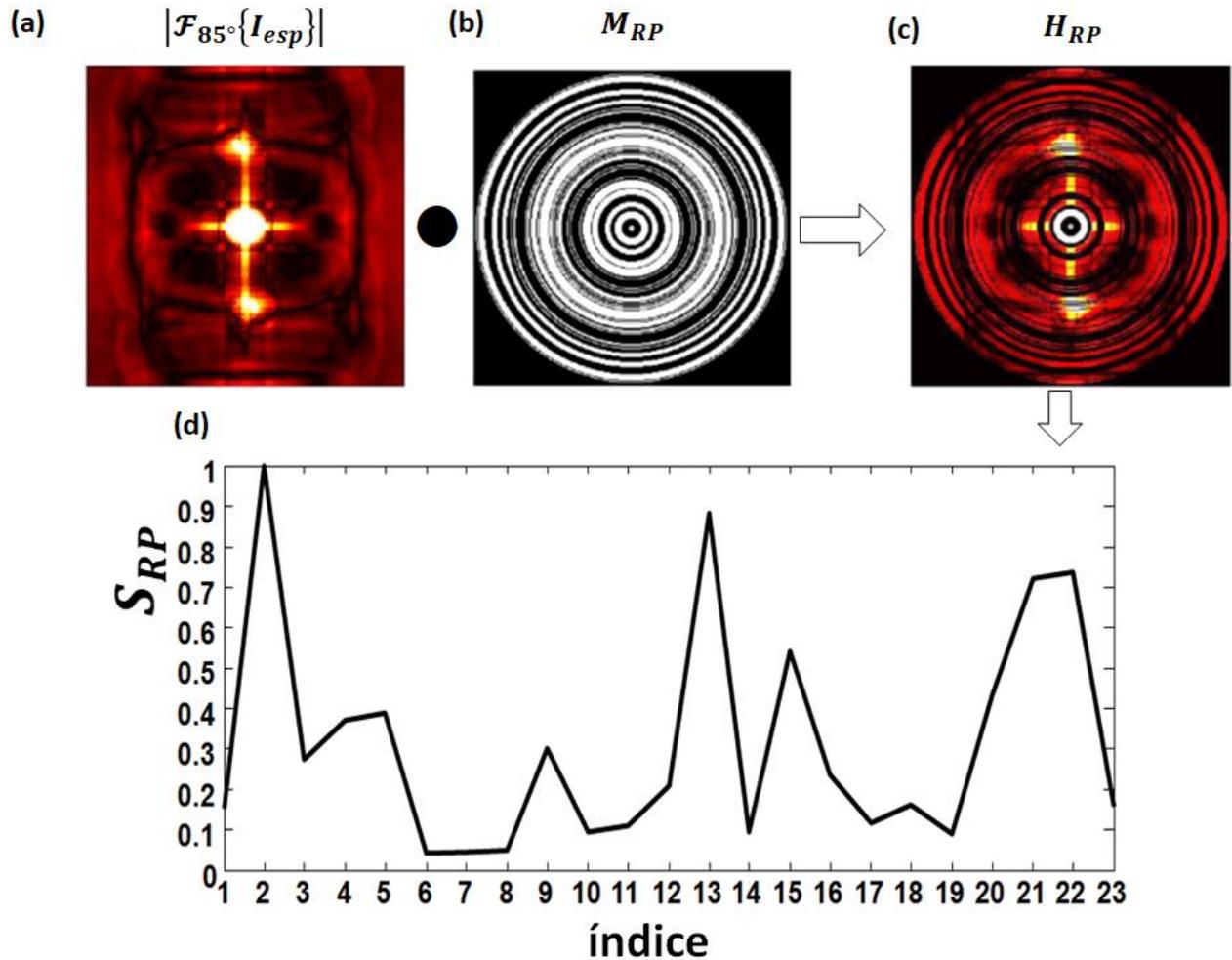


Figura 17. Procedimiento para obtener la firma normalizada de la una imagen mediante la metodología 1. (a) El módulo de la TFrF a un ángulo $\alpha = 85^\circ$ de la imagen espectral de la letra Arial B. (b) Máscara binaria M_{RP} obtenida de la letra Arial B. (c) Resultado de la multiplicación del módulo de la TFrF de la imagen espectral con M_{RP} . (d) Firma normalizada para la letra Arial B, generada mediante la suma de todos los valores muestreados por cada anillo.

Una vez que las firmas asociadas con las imágenes de referencia y problema hayan sido obtenidas, se realizan correlaciones no lineales entre las firmas. Debido a que al cambiar el ángulo α de la transformada fraccional de Fourier modifica las firmas de las imágenes, los valores de correlación no lineales también dependen de α .

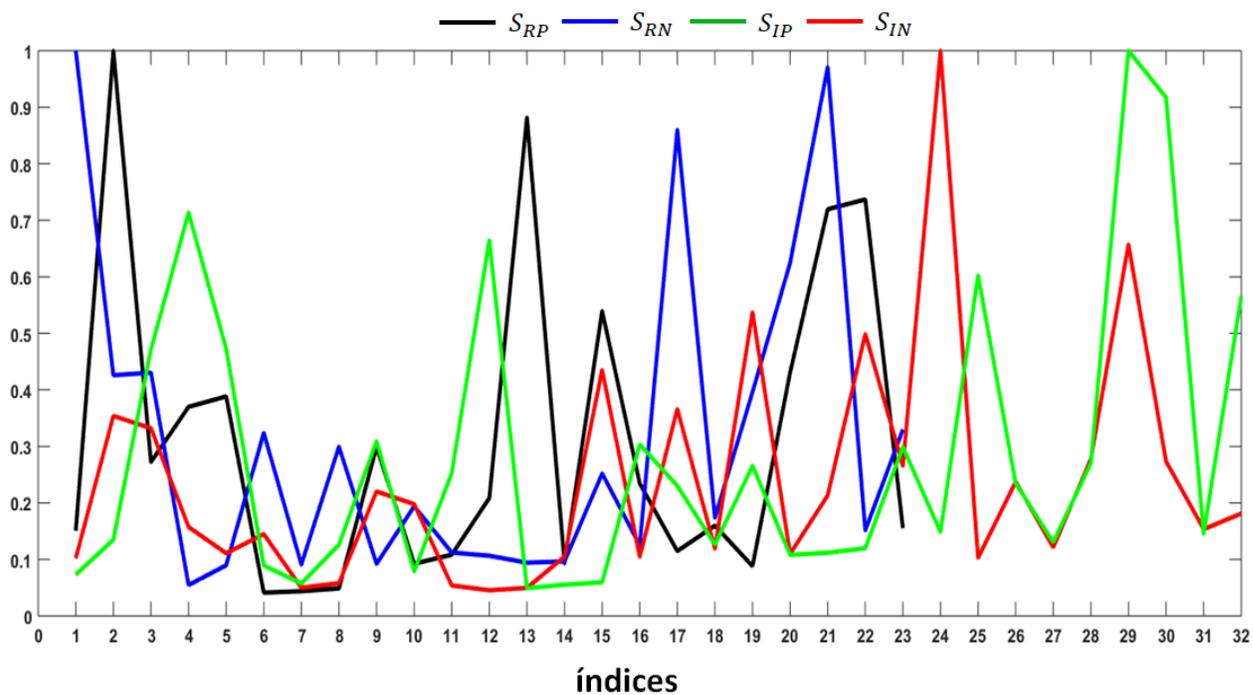


Figura 18. Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 85^\circ$ con la metodología 1.

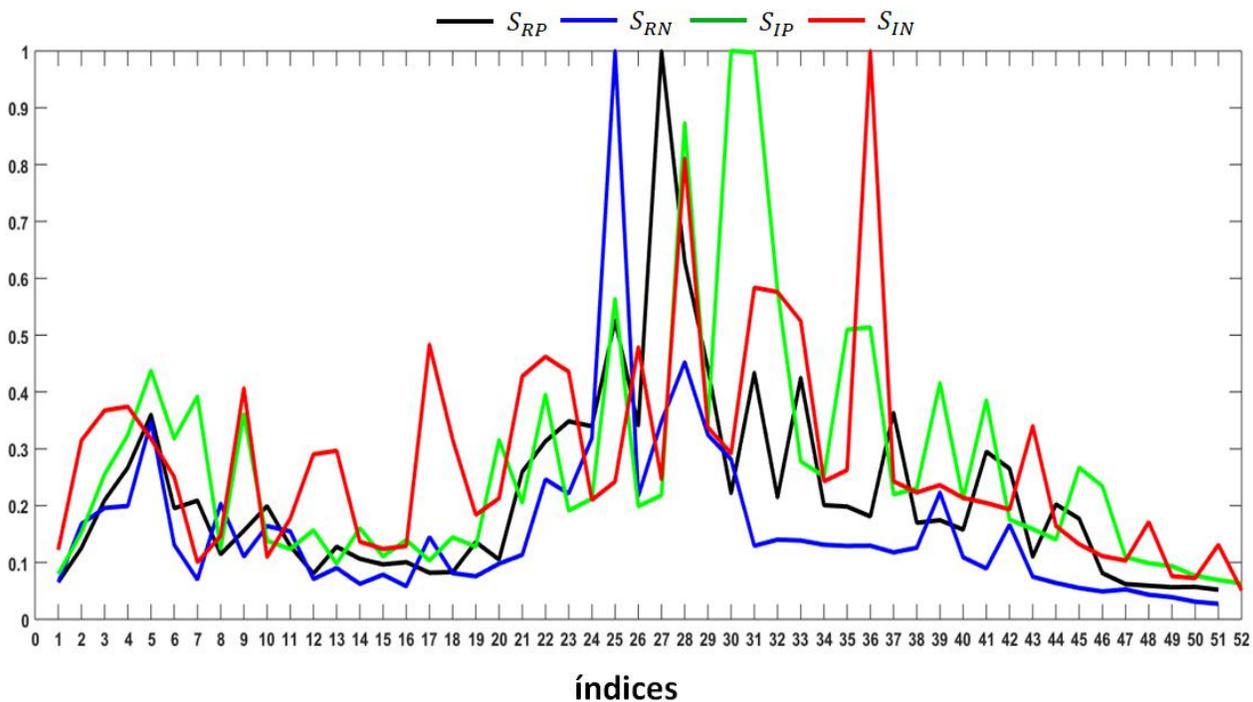


Figura 19. Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 45^\circ$ con la metodología 1.

3.2 Metodología 2. TFrF de la imagen para la generación de máscaras binarias

En esta metodología, la transformada fraccional de Fourier es aplicada directamente a la imagen para construir la máscara binaria de anillos concéntricos. En la figura 20 se presenta un ejemplo. La figura 20a muestra la imagen de la letra B tipo Arial. Las partes real e imaginaria de la transformada fraccional de Fourier de la imagen con $\alpha = 85^\circ$ se muestran en las figuras 20b y 20c, respectivamente.

3.2.1 Máscaras binarias

Primeramente, las partes real e imaginaria de la transformada fraccional de Fourier de la imagen son filtradas por el disco D . Posteriormente, se obtienen 180 perfiles de las partes real e imaginaria de la transformada fraccional de Fourier de la imagen. Después, se extraen los perfiles óptimos de las partes real e imaginaria; las figuras 21a y 21b muestran dichos perfiles extraídos de las figuras 20b y 20c. Una vez obtenidos los perfiles óptimos, se construyen las funciones binarizadas usando las mismas condiciones de las ecuaciones [53-56] y finalmente estas funciones son rotadas para construir las máscaras binarias de anillos concéntricos M_{RP} , M_{RN} , M_{IP} and M_{IN} . La figura 22 muestra las máscaras binarias para esta metodología utilizando una transformada fraccional de Fourier con $\alpha = 85^\circ$ aplicada a la imagen 20a.

3.2.2 Firma de la imagen obtenida usando la metodología 2

En esta metodología el módulo de la transformada de Fourier, la cual es invariante a posición, es utilizada para la construcción de la firma. Por lo tanto, las máscaras de anillos concéntricos son utilizadas para filtrar el módulo de la transformada de Fourier, para así obtener las firmas. Un ejemplo de este procedimiento se muestra en la figura 23, donde se utiliza M_{IN} para filtrar el módulo de la transformada de Fourier, para obtener las firmas mostradas en la figura 23d.

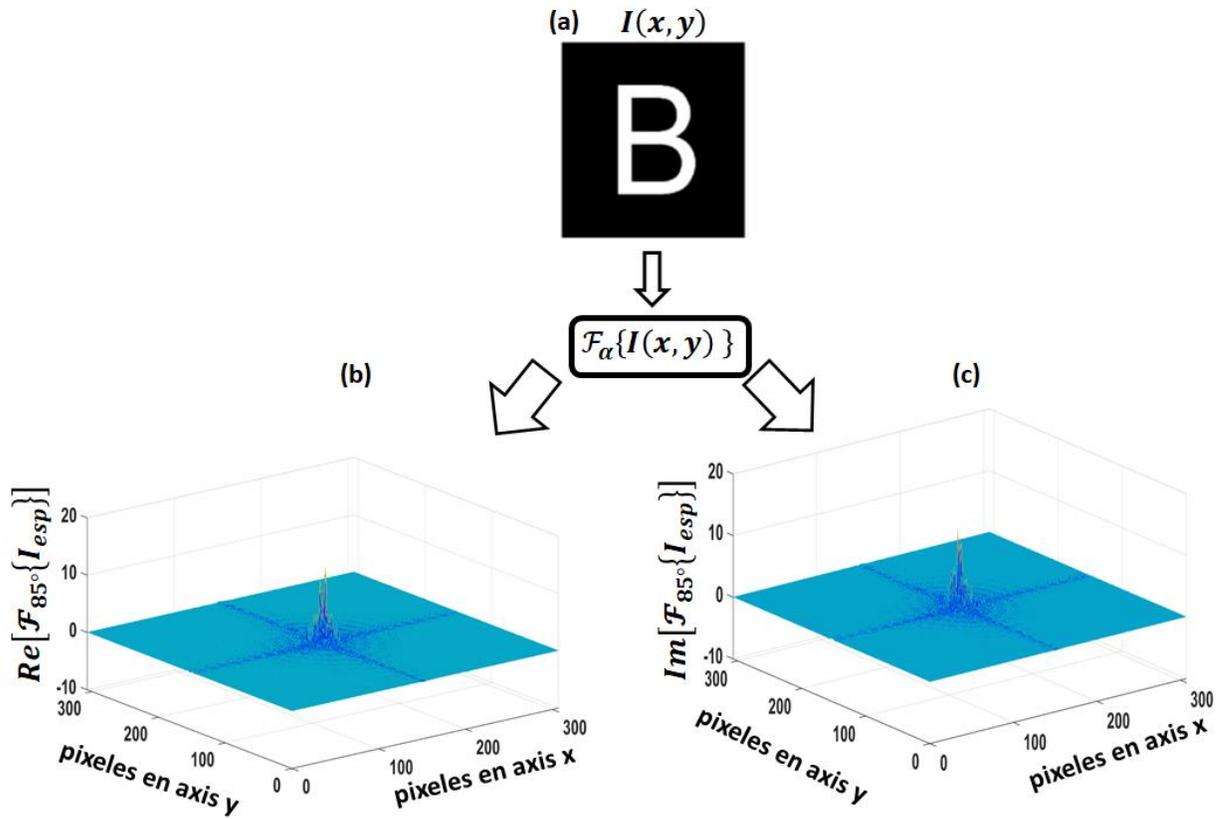


Figura 20. (a) Imagen de la letra Arial B de 307×307 píxeles. (b) Parte real de la TFrF de la imagen con un ángulo $\alpha = 85^\circ$. (c) Parte imaginaria de la TFrF de la imagen con un ángulo $\alpha = 85^\circ$.

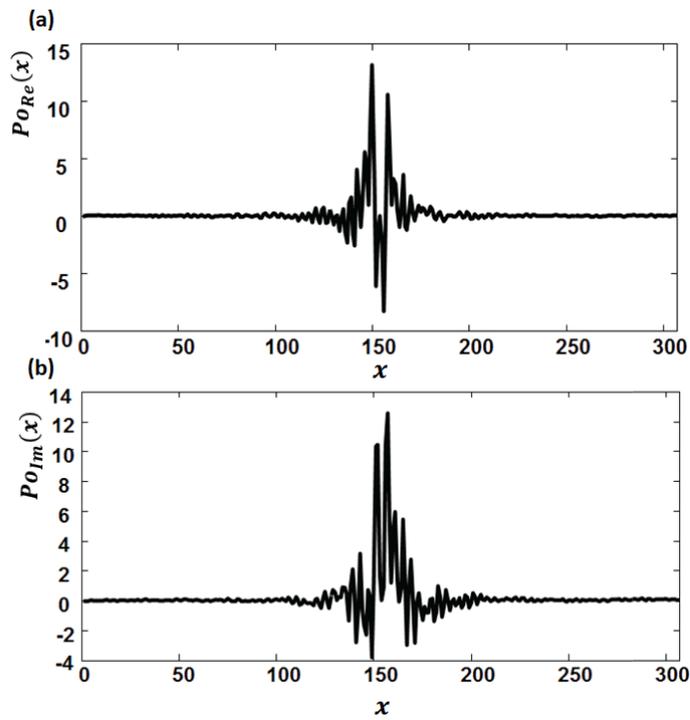


Figura 21. Perfiles óptimos extraídos de la TFrF de la imagen de la letra Arial B con un ángulo $\alpha = 85^\circ$. (a) Perfil óptimo extraído de la parte real. (b) Perfil óptimo extraído de la parte imaginaria.

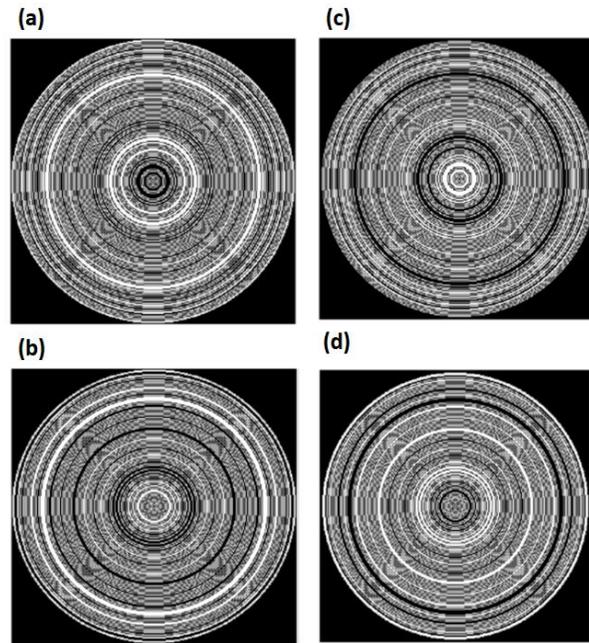


Figura 22. Máscaras de anillos concéntricos para la letra B tipo Arial obtenidas utilizando la metodología 2 para un $\alpha = 85^\circ$ de la TFrF. (a) M_{RP} . (b) M_{RN} . (c) M_{IP} . (d) M_{IN} .

Las firmas para la imagen de la letra Arial B calculada con una transformada fraccional de Fourier con $\alpha = 85^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$ se muestran en las figuras 24 y figura 25, respectivamente. Se puede ver que las firmas cambian para diferentes ángulos α .

3.3 Una máscara y máscaras adaptativas

Para el reconocimiento de objetos presentes en una imagen problema se necesita una imagen del objetivo o imagen de referencia. Para compararlas con cada una de las dos metodologías presentadas, se obtienen las firmas de cada imagen y se correlacionan. Se implementan dos casos para cada metodología.

1. Se calcula solo una máscara a partir de la imagen referencia para la obtención de las firmas de la imagen de referencia e imagen problema.
2. Se calculan dos máscaras, una máscara a partir de la imagen de referencia para calcular su firma y otra a partir de la imagen problema, para el cálculo de su respectiva firma.

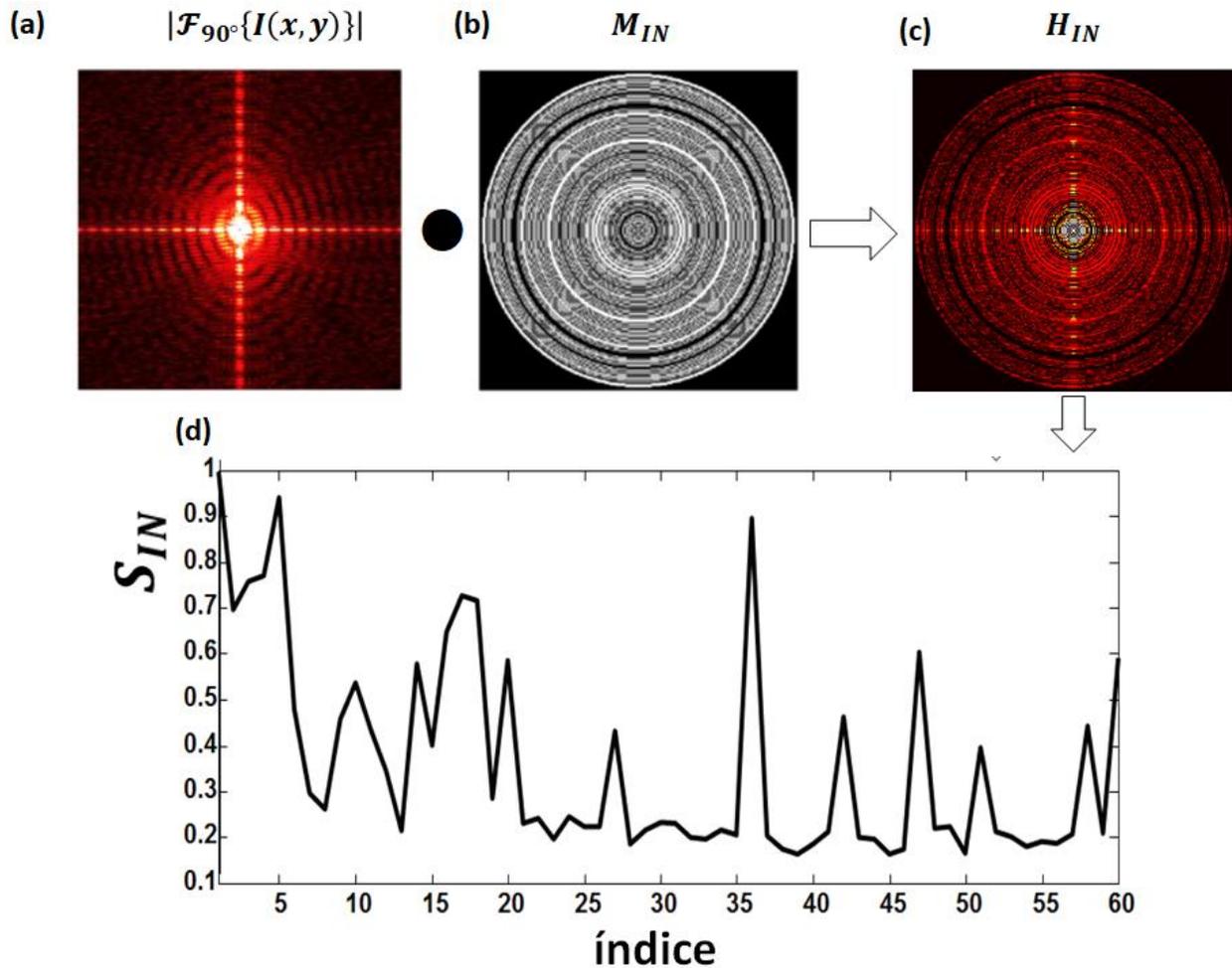


Figura 23. Procedimiento para obtener la firma normalizada de la una imagen mediante metodología 2. (a) El módulo de la TF de la imagen de la letra Arial B. (b) Máscara binaria obtenida de la letra Arial B. (c) Resultado de la multiplicación del módulo de la TF de la imagen con M_{IN} . (d) Firma normalizada para la letra Arial B, generada mediante la suma de todos los valores muestreados por cada anillo.

3.3.1 Primer caso: una máscara

3.3.1.1 Uso de la metodología 1. Primer caso

La figura 26 presenta un diagrama, que describe el caso en el cual se calcula una sola máscara, para la obtención de las firmas, tanto de la imagen de referencia u objetivo (IO), como de la imagen problema (IP), para la metodología 1. En el paso 1, se tiene la imagen objetivo. En el paso dos se obtiene la imagen espectral de la imagen objetivo. En el paso 3, se calcula la transformada fraccional de Fourier de la imagen espectral para construir a partir de ella las máscaras. En el paso 4 se obtienen las cuatro máscaras binarias

MO_{RP} , MO_{RN} , MO_{IP} y MO_{IN} asociadas a la imagen de referencia. Posteriormente, se calcula el módulo de la transformada fraccional de Fourier de la imagen espectral de la imagen de referencia en el paso 5. En el paso 6, el módulo de la transformada fraccional de Fourier obtenido en el paso 5 es filtrado con una multiplicación punto a punto con cada una de las máscaras binarias y en el paso 7 las cuatro firmas de la imagen objetivo se calculan. Después, en el paso 8, se introduce la imagen problema (IP). En el paso 9 se obtiene la imagen espectral de la imagen problema la cual se filtra en el paso 10 y después, muestreada en el paso 11 con el producto punto a punto con cada una de las máscaras generadas a partir de la imagen de referencia. Posteriormente en el paso 12, las cuatro firmas de la imagen problema son generadas. Finalmente, en el paso 13, las firmas de la imagen de referencia y la imagen problema son correlacionadas.

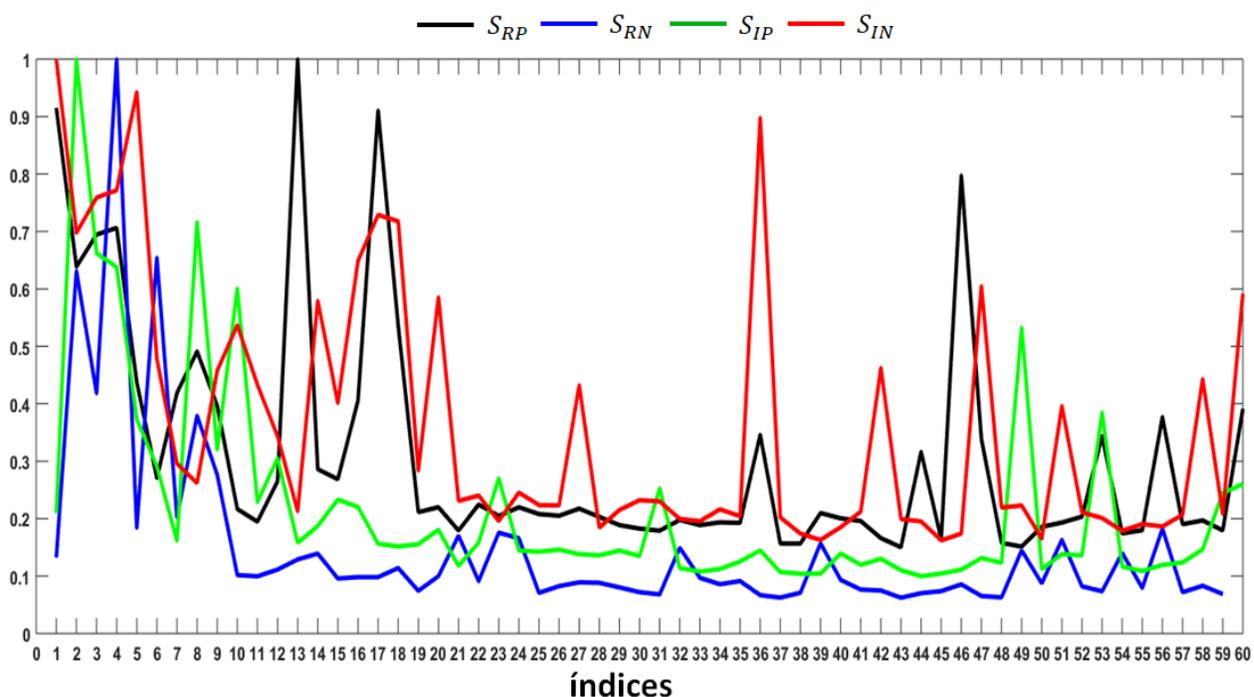


Figura 24. Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 85^\circ$ con la metodología 2.

3.3.1.2 Uso de la metodología 2. Primer caso

La figura 27 describe la metodología para el primer caso. El primer paso es determinar la imagen objetivo. En el paso 2 se calcula la transformada fraccional de Fourier de la imagen objetivo y utilizando las partes real e imaginaria, se obtienen las máscaras MO_{RP} , MO_{RN} , MO_{IP} y MO_{IN} (paso 3). Después, en el paso 4 se calcula el módulo de la transformada de Fourier de la imagen objetivo y después se filtra en el paso 5

mediante una multiplicación punto a punto con cada una de las máscaras binarias. Así, en el paso 6 se obtienen las cuatro firmas asociadas a la imagen objetivo. En el paso 7, es introducida la imagen problema que se analiza. Después, en el paso 8, se calcula el módulo de la transformada de Fourier de la imagen problema. Posteriormente en el paso 9, se realiza la multiplicación punto a punto con las máscaras binarias obtenidas a partir de la imagen objetivo. En el paso 10 se obtienen las cuatro firmas asociadas a la imagen problema. Finalmente en el paso 11 se realiza la correlación entre las firmas de la imagen de referencia y la imagen problema.

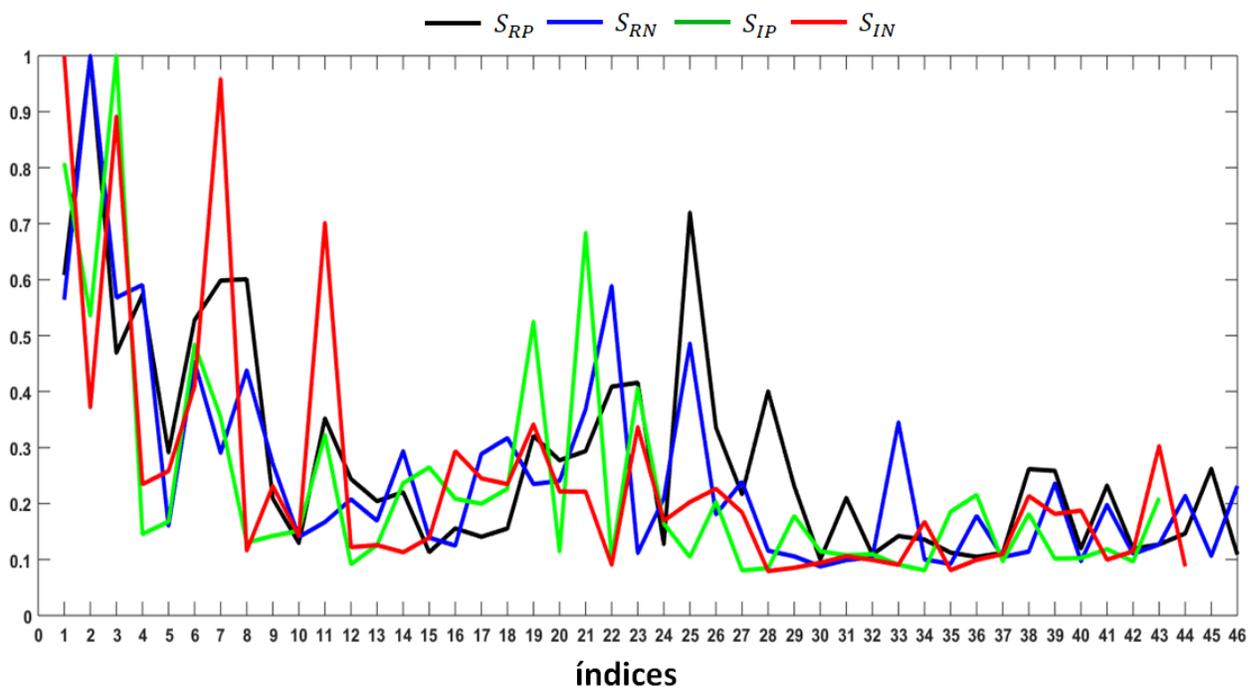


Figura 25. Firmas normalizadas para la letra Arial B obtenidas con cada una de las cuatro máscaras generadas de la TFrF a un ángulo de $\alpha = 45^\circ$ con la metodología 2.

3.3.2 Segundo caso: máscaras adaptativas

3.3.2.1 Uso de la metodología 1. Segundo caso

El diagrama mostrado en la figura 28 describe la metodología 1 utilizando máscaras adaptativas. Desde el paso 1 hasta el paso 9, el procedimiento es igual al descrito en la figura 26. Después, en el paso 10, se obtiene la transformada fraccional de Fourier de la imagen espectral de la imagen problema. Posteriormente en el paso 11, se obtienen cuatro máscaras binarias: MP_{RP} , MP_{RN} , MP_{IP} y MP_{IN} , las

cuales fueron generadas a partir de la imagen problema. Estas máscaras se obtienen para una transformada fraccional de Fourier calculada al mismo ángulo α utilizado para calcular las máscaras de la imagen de referencia. Después, en el paso 12 se calcula el módulo de la transformada fraccional de la imagen espectral de la imagen problema. La multiplicación punto a punto con las máscaras binarias se realiza en el paso 13. Así, las firmas de la imagen problema son obtenidas en el paso 14. Finalmente la correlación de las firmas se realiza en el paso 15.

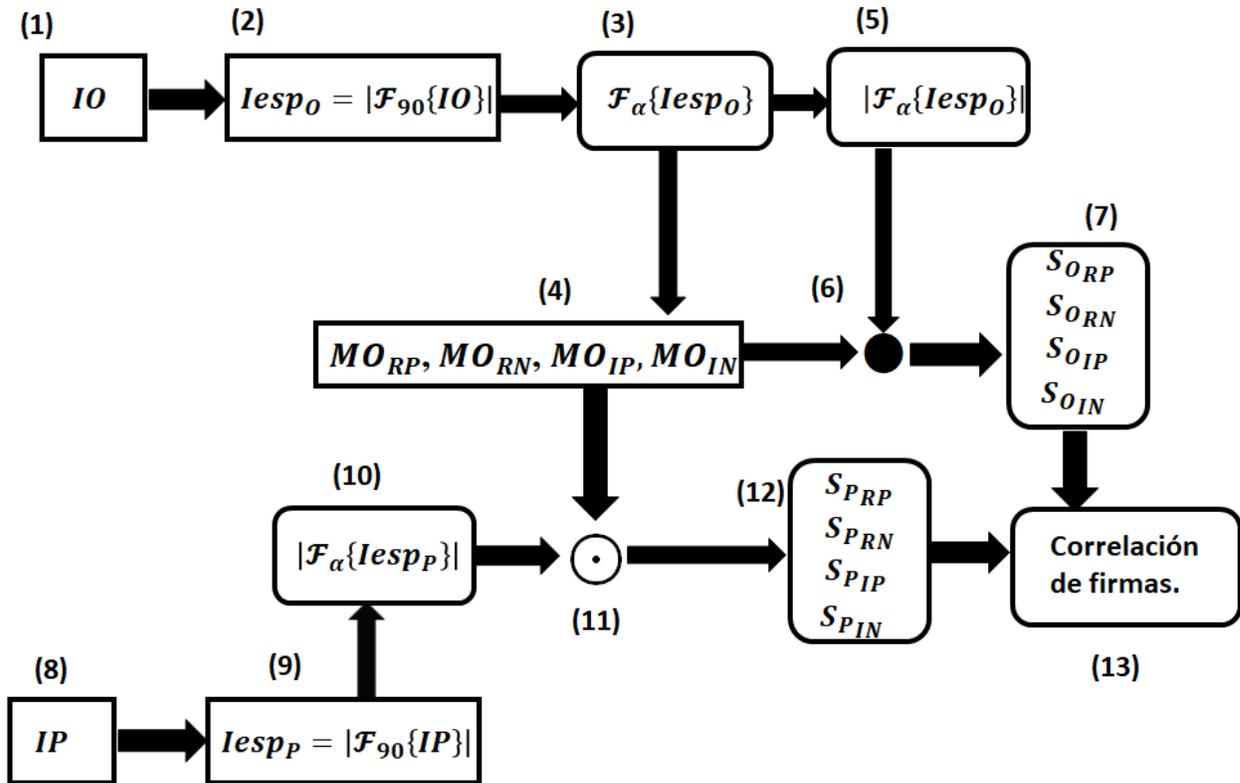


Figura 26. Procedimiento seguido en la metodología 1 para el caso que utiliza una sola máscara.

3.3.2.2 Uso de la metodología 2. Segundo caso.

La metodología 2 para este segundo caso se describe en la figura 29. Este procedimiento es el mismo desde el paso 1 hasta el paso 7 que el descrito en la figura 27. En el paso 8, se calcula la transformada fraccional de Fourier de la imagen problema. Posteriormente, en el paso 9 se obtienen las cuatro máscaras binarias asociadas a la imagen problema. En el paso 10, se calcula el módulo de la transformada de Fourier de la

imagen problema. En el paso 11 se realiza el proceso de filtrado del módulo de la transformada de Fourier de la imagen problema con las máscaras obtenidas en el paso 9. En el paso 12 se obtienen las firmas asociadas a la imagen problema. Finalmente en el paso 13 se realiza la correlación de las firmas.

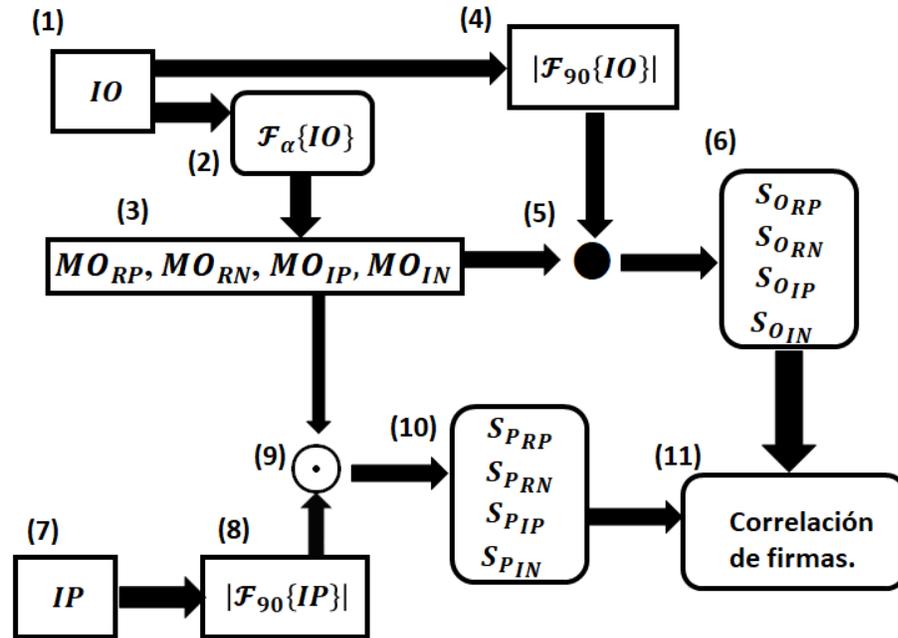


Figura 27. Procedimiento seguido en la metodología 2 para el caso que utiliza una sola máscara.

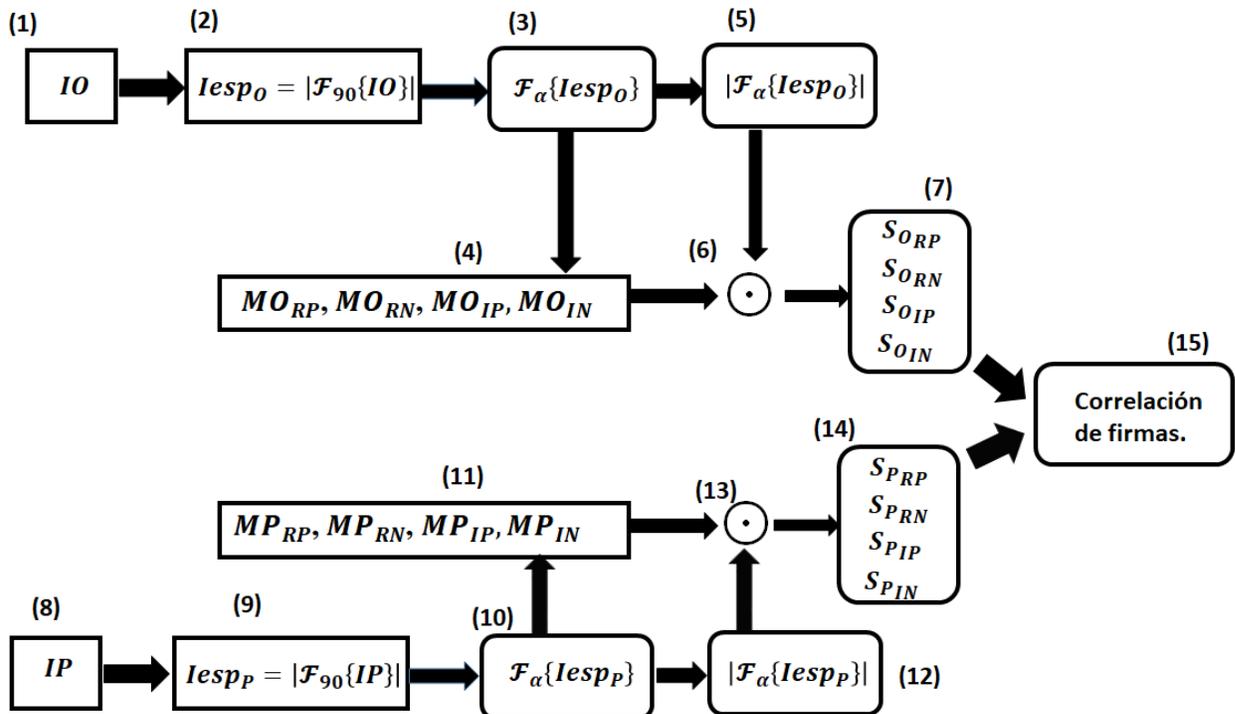


Figura 28. Procedimiento seguido en la metodología 1 para el caso que utiliza máscaras adaptativas.

3.4 Correlación no lineal y correlación no lineal adaptativa

En este trabajo, se utilizaron dos tipos de correlación diferentes en ambas metodologías para la discriminación entre las firmas de la imagen referencia y la imagen problema: correlación no lineal y correlación no lineal adaptativa.

Si S_{IP} es la firma de la imagen problema y S_{TI} es la firma de la imagen objetivo, la correlación no lineal o ley- k está definida como

$$C_{NL} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left| \mathcal{F} \{ S_{IP} \} \right|^k e^{(i\phi_{S_{IP}})} \left| \mathcal{F} \{ S_{IO} \} \right|^k e^{(-i\phi_{S_{IO}})} \right\}, \quad (64)$$

donde, $\phi_{S_{IP}}$ y $\phi_{S_{IO}}$ son las fases de las transformadas de Fourier de las firmas de la imagen problema y de la imagen objetivo, respectivamente y k es el factor de no linealidad con valores $0 < k < 1$. Para este trabajo $k = 0.1$ fue el valor no lineal utilizado.

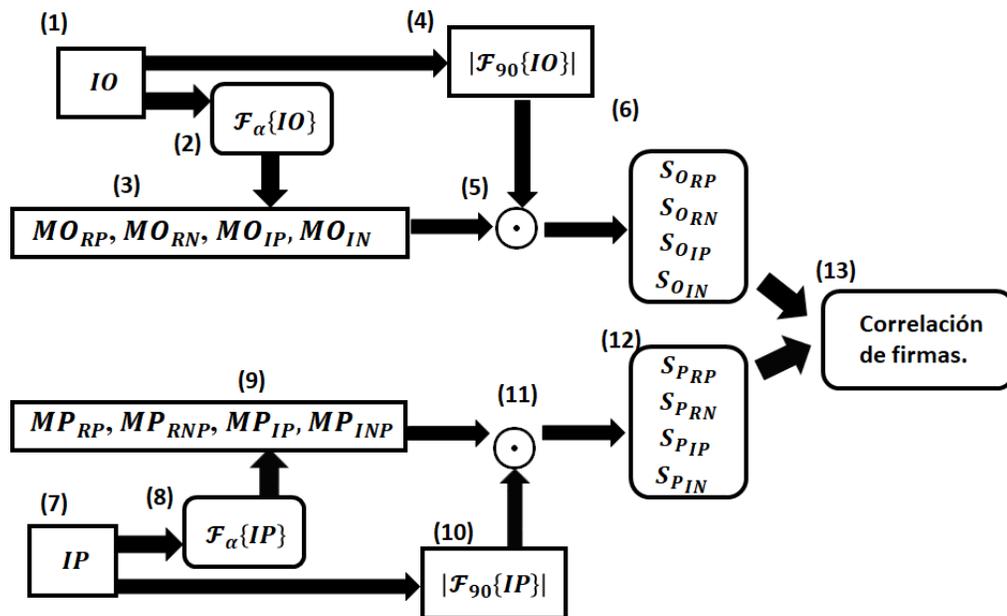


Figura 29. Procedimiento seguido en la metodología 2 para el caso que utiliza máscaras adaptativas.

La correlación no lineal adaptativa es una modificación de la correlación no lineal, realizada con el objetivo de obtener un mejor rendimiento en la discriminación y se expresa como (Solís *et al.*, 2013)

$$C_{NLA} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left| \mathcal{F} \{ S_{IP} \} \right|^{k \cdot R} e^{i\phi_{S_{IP}}} \left| \mathcal{F} \{ S_{IO} \} \right|^k e^{-i\phi_{S_{IO}}} \right\}, \quad (65)$$

donde R es el factor que modifica la no linealidad del módulo de la transformada de Fourier de la firma de la imagen problema. Para imágenes reales como las mostradas en la figura 30, el factor R es la razón entre las desviaciones estándar de las imágenes problema y objetivo (Solís, 2015),

$$R = \begin{cases} \frac{\sigma(x, y)_{IP}}{\sigma(x, y)_{IO}}, & \sigma(x, y)_{IP} \leq \sigma(x, y)_{IO}, \\ \frac{\sigma(x, y)_{IO}}{\sigma(x, y)_{IP}}, & \sigma(x, y)_{IP} > \sigma(x, y)_{IO}. \end{cases} \quad (66)$$

donde $\sigma(x, y)_{IP}$ es la desviación estándar de la imagen problema y $\sigma(x, y)_{IO}$ es la desviación estándar de la imagen objetivo.

Capítulo 4. Análisis realizados y resultados

4.1 Respuesta ante cambio de rotación en las imágenes

En esta sección se describe el análisis realizado para observar el desempeño de los métodos desarrollados cuando enfrentan imágenes problema que tienen distorsión por rotación. Para ello, se utilizaron treinta especies de fitoplancton para probar las metodologías. Las imágenes tienen dimensiones de 307×307 píxeles y tienen ruido natural, así como diferentes tipos de iluminación, figura 30.

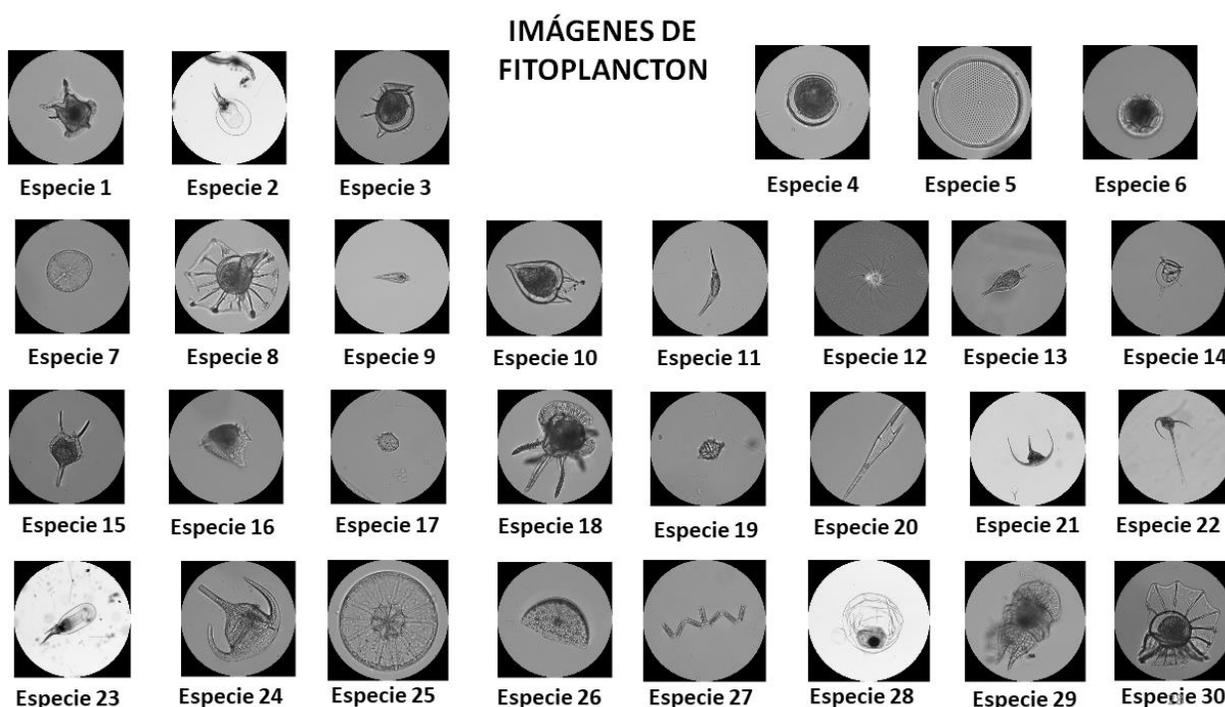


Figure 30. Imágenes en escala de gris de 30 especies diferentes de fitoplancton. Especie 1: *Acanthogonyaulax spinifera*. Especie 2: *Ceratium gravidum Gourret*. Especie 3: *Dinophysis hastata*. Especie 4: *Preperidinium meunieri*. Especie 5: *Thalassiosira levanderi*. Especie 6: *Lingulodinium polyedrum*. Especie 7: *Asteromphalus heptactis*. Especie 8: *Ornithocercus magnificus*. Especie 9: *Oxytoxum scolopax*. Especie 10: *Podolampas bipes*. Especie 11: *Podolampas spinifer*. Especie 12: *Bacteriastrium delicatum*. Especie 13: *Podolampas palmipes*. Especie 14: *Dinophysis monacantha*. Especie 15: *Protoperidinium longipes*. Especie 16: *Phalacroma rapa*. Especie 17: *Gonyaulax scrippsae*. Especie 18: *Ceratocorys horrida*. Especie 19: *Gonyaulax spinifera*. Especie 20: *Tripos furca*. Especie 21: *Tripos lunula*. Especie 22: *Ceratium hexacanthum*. Especie 23: *Ceratium gravidum praeolongum*. Especie 24: *Ceratium breve*. Especie 25: *Asterolampra marylandica*. Especie 26: *Hemidiscus cuneiformis*. Especie 27: *Thalassionema nitzschioides*. Especie 28: *Pyrocystis*. Especie 29: *Heterodinium agassizi*. Especie 30: *Ornithocercus Stein*.

Sin embargo, como se observó anteriormente, al cambiar el ángulo α las firmas producidas por las

máscaras binarias también cambian. Por ello, el resultado de la correlación de las firmas es diferente para diferente α . Por lo tanto, para cada metodología, existe un cierto ángulo α que dará un valor de correlación más alto que el resto. Ese ángulo es llamado el *ángulo óptimo*. Este ángulo no puede ser conocido a priori, por lo tanto, es necesario realizar su búsqueda antes de realizar cualquier análisis.

4.1.1 Ángulo óptimo de la transformada fraccional de Fourier para las imágenes de fitoplancton

Para encontrar el ángulo óptimo, se obtiene la firma de una imagen con un ángulo α dado. Posteriormente, se realiza la autocorrelación de la firma utilizando correlación no lineal para obtener el valor máximo o pico de autocorrelación trabajando a ese valor de α . Este proceso es repetido variando α desde $1-90^\circ$ grados en intervalos de 1° para seleccionar planos diferentes al plano de Fourier. El ángulo α al cual se obtenga el máximo de autocorrelación más alto es el ángulo óptimo para la imagen de la cual se obtuvieron sus firmas, así como para la metodología y las máscaras utilizadas en el cálculo de dichas firmas. Como ejemplo, en la figura 31 se muestran los valores de los máximos de las autocorrelaciones no normalizadas obtenidas para cada α utilizando la especie 1 como referencia (figura 30), donde las firmas se generaron con la máscara M_{RP} obtenida a partir de la metodología 1. Los máximos de autocorrelación se encuentran en el eje vertical y los valores del ángulo α de la transformada fraccional de Fourier están en el eje horizontal. Se puede ver que el valor más alto de autocorrelación se obtiene en $\alpha = 29^\circ$. Por lo tanto, 29° es el ángulo óptimo para la máscara binaria M_{RP} para la metodología 1 para dicha especie en específico. Este proceso se realizó para las cuatro máscaras binarias en ambas metodologías y todas las 30 especies de fitoplancton mostradas en la figura 30.

El resultado para la primera metodología se presenta en la tabla 1 y los resultados para la segunda metodología en la tabla 2. Se puede observar que no existe un ángulo óptimo general para todas las máscaras y todas las especies, ni tampoco para ambas metodologías. En vez de ello, debido a que las firmas autocorrelacionadas dependen de la imagen de la cual se extrajeron, así como de la máscara y metodología utilizada para calcularlas, entonces, cada especie tiene su propio ángulo óptimo, diferente para cada máscara y cada metodología. También se observa que solo en cinco casos el ángulo óptimo es 90° para la metodología 1 y en ningún caso para la metodología 2, esto es, en la mayoría de los casos, el trabajar fuera del plano de Fourier permite alcanzar valores de autocorrelación más grandes, incrementando así la capacidad de discriminación entre una imagen referencia una imagen problema.

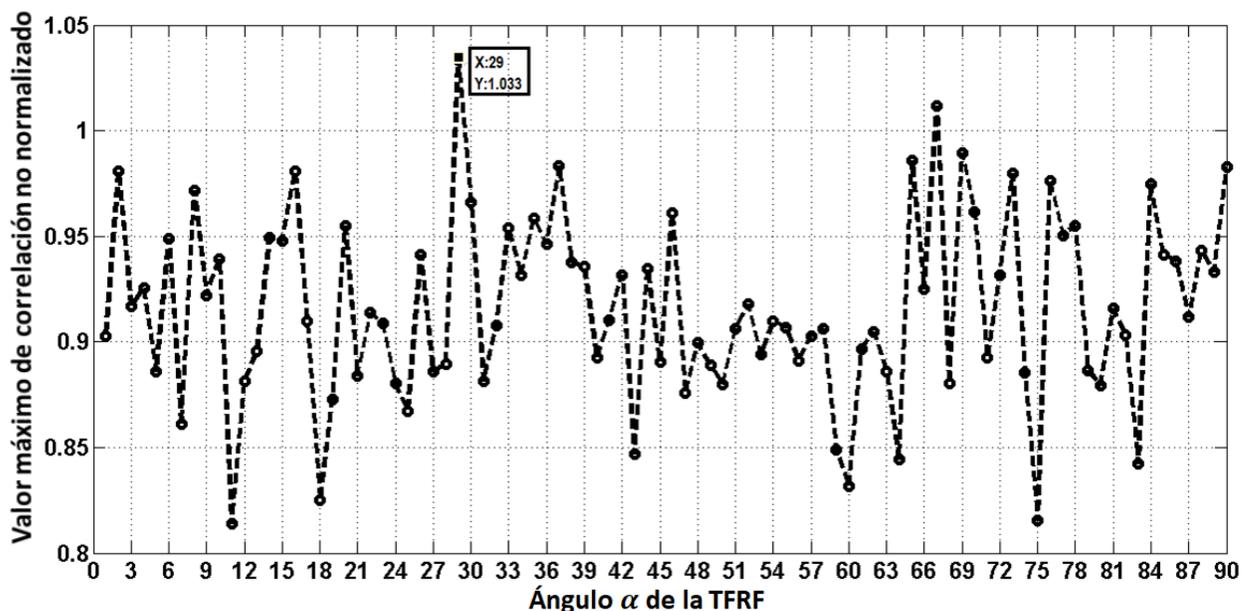


Figura 31. Valores de los máximos de autocorrelación obtenidos mediante la metodología 1 para ángulos α desde 1° hasta 90° , utilizando la especie 1 como imagen objetivo.

Las ecuaciones (61), (62) y (63) indican que para el caso de la autocorrelación, el factor R es igual a uno y la correlación no lineal adaptativa se convierte en correlación no lineal, por lo que en este caso no es necesario calcular ángulos óptimos.

4.1.2 Resultados ante rotación

En ambas metodologías, cada máscara binaria genera una firma en particular. Esto es, se obtienen cuatro firmas diferentes para cada imagen. Por lo tanto al discriminar entre una imagen problema y una imagen de referencia, se realizan cuatro correlaciones de firmas. Entonces, para tomar en cuenta los cuatro resultados de correlación, se obtiene el valor pico o máximo de cada correlación no lineal para después ser multiplicados. El resultado de esta multiplicación es considerado como el máximo de correlación final para la metodología implementada, figura 32. Cada máscara es calculada utilizando su correspondiente ángulo α óptimo, de acuerdo a las tablas 1 y 2.

Tomando entonces como respuesta final la multiplicación de los picos de correlación, se realizó un análisis

encaminado a probar la capacidad de invariancia a rotación de ambas metodologías. Para ello, cada una de las 30 especies fue rotada 360 veces en intervalos de 1° grado. Cada una de las 30 especies de fitoplancton fue seleccionada como referencia y comparada con las versiones rotadas de sí misma y con las versiones rotadas del resto de las especies. Una vez obtenidos los resultados de las correlaciones no lineales, se realizó una gráfica de cajas de los resultados, tomando en cuenta la media, ± 2 errores estándar, valores atípicos y extremos de los valores de los máximos de correlación no normalizados obtenidos al multiplicar los picos de correlación obtenidos con cada máscara. En cada gráfica de resultados, el eje horizontal muestra las 30 especies y el eje vertical representa los valores de correlación no normalizados.

Tabla 1. Ángulos óptimos para cada máscara binaria para cada especie de fitoplancton, aplicando la metodología 1.

Especie	M_{RP}	M_{RN}	M_{IP}	M_{IN}
1	29	70	14	64
2	1	10	75	68
3	26	25	89	20
4	66	80	71	64
5	59	50	64	56
6	24	72	75	28
7	90	63	90	89
8	6	58	51	62
9	64	24	34	71
10	76	64	65	64
11	7	90	89	33
12	74	69	62	62
13	88	4	90	75
14	85	58	1	66
15	47	23	68	67
16	86	3	90	75
17	26	7	62	63
18	61	64	56	4
19	67	63	34	71
20	85	3	58	65
21	71	71	35	90
22	75	70	62	75
23	12	71	89	64
24	8	75	6	62
25	67	6	35	58
26	14	85	35	37
27	74	3	34	63
28	89	3	75	1
29	62	69	40	77
30	1	66	72	65

Como ejemplo de los resultados obtenidos, se muestran los resultados cuando la especie tres es utilizada como imagen referencia. Las figuras 33 y figura 34 muestran los resultados para la metodología 1 implementando correlación no lineal. La figura 33, muestra la gráfica de cajas para el caso en que se utiliza una sola máscara. Se puede ver de estos resultados, que considerando los valores extremos, existe traslape entre la especie referencia y la especie 8. La figura 34 muestra el resultado pero utilizando máscaras adaptativas. Aquí, se puede ver claramente que los valores de autocorrelación de la especie dos son mucho más altos que los valores de correlación con otras especies, sin mostrar traslape alguno. Esto es, se obtuvo una discriminación total entre la especie 2 y el resto de las especies.

Tabla 2. Ángulos óptimos para cada máscara binaria para cada especie de fitoplancton, aplicando la metodología 2.

Especie	M_{RP}	M_{RN}	M_{IP}	M_{IN}
1	20	83	54	53
2	40	78	63	48
3	1	16	55	71
4	33	41	39	20
5	52	51	18	16
6	42	11	49	18
7	45	44	76	64
8	41	39	57	83
9	79	83	28	46
10	46	62	83	69
11	61	79	50	37
12	68	78	5	2
13	73	9	58	38
14	75	41	46	29
15	34	78	34	68
16	41	77	84	54
17	28	36	41	34
18	11	22	67	74
19	72	85	85	63
20	31	40	18	34
21	41	62	62	64
22	70	33	39	71
23	40	28	41	65
24	75	68	59	3
25	4	68	52	21
26	7	52	71	53
27	75	39	6	73
28	28	76	62	73
29	63	64	18	88
30	56	76	61	48

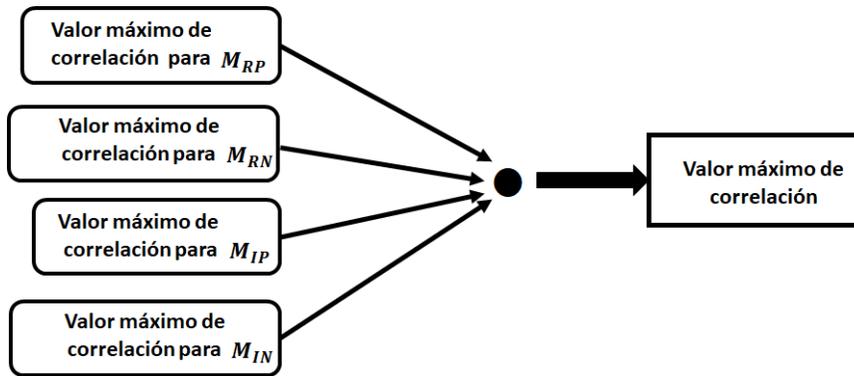


Figura 32. Procedimiento para obtener el máximo de correlación para cada metodología.

En las figuras 35 y figura 36, se muestran los resultados para la misma metodología pero ahora implementando correlación no lineal adaptativa y la misma especie como referencia. Para el caso en que se utiliza una sola máscara los resultados se muestran en la figura 35. Los diagramas indican que no se presentan traslapes con otra especie. La figura 36 muestra los resultados para el caso en que se utilizan máscaras adaptativas, se puede ver de nueva cuenta que se tiene una discriminación total, ya que los resultados de la autocorrelación de la especie 2 están muy por encima de los resultados de la correlación con las demás especies.

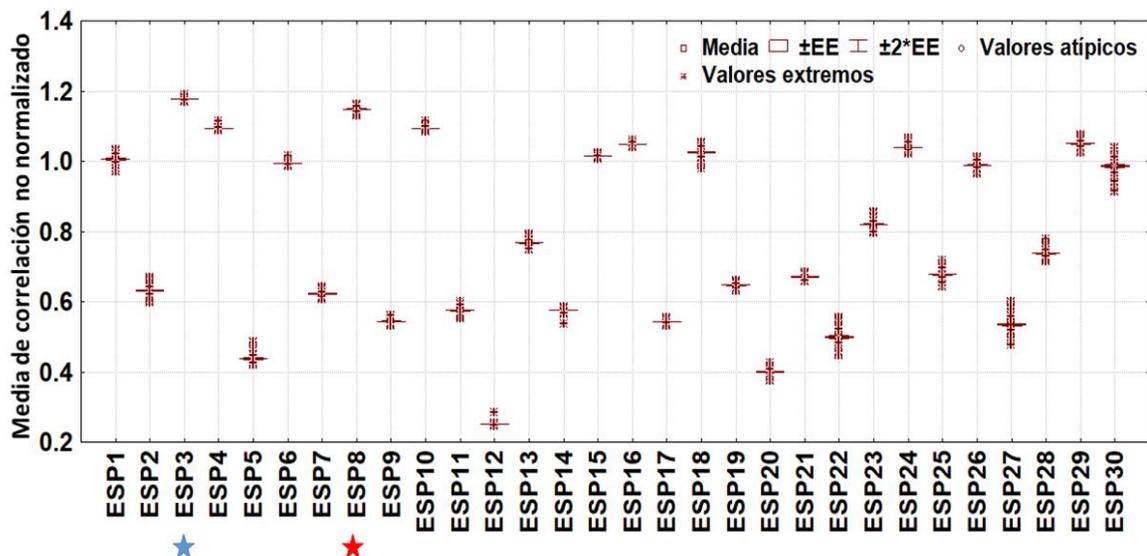


Figura 33. Resultados para la metodología 1 utilizando a la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal.

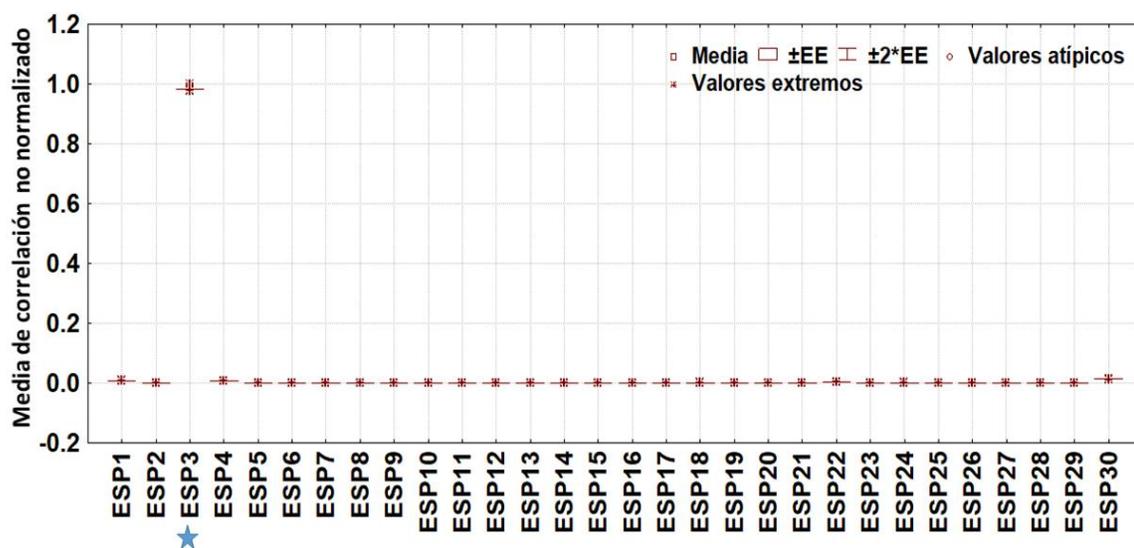


Figura 34. Resultados para la metodología 1 utilizando a la especie 3 como objetivo y utilizando máscaras adaptativas con correlación no lineal.

Los resultados de la metodología 2 utilizando correlación no lineal se muestran en las figuras 37 y 38. En la figura 37 presentan los resultados para el caso en que se utiliza una sola máscara; en ellos se observa que no hay traslape con ninguna especie. En la figura 38 se despliegan los resultados para el caso de máscaras adaptativas, mostrando cero traslapes.

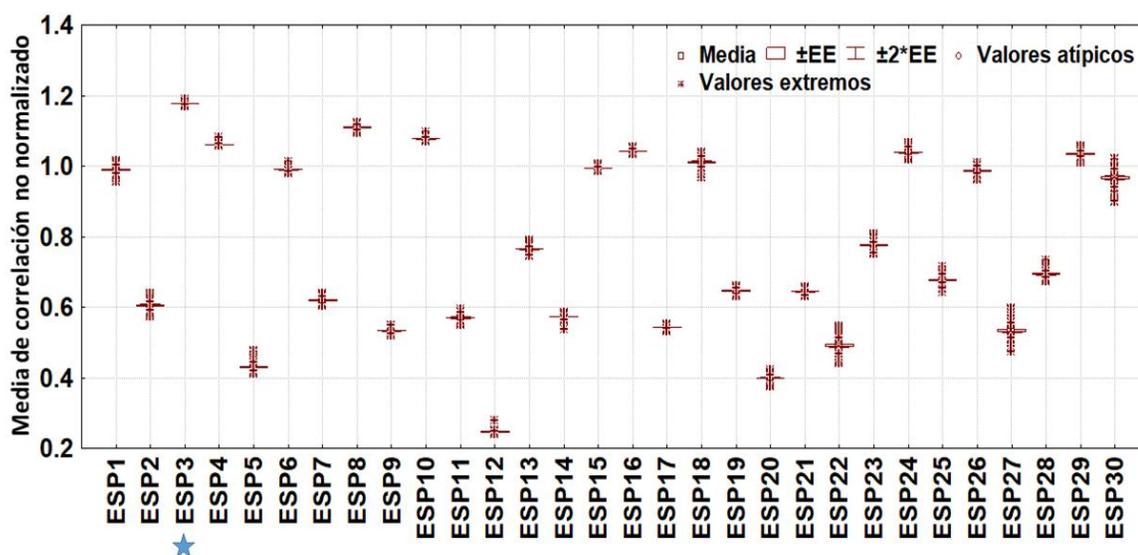


Figura 35. Resultados para la metodología 1 utilizando a la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal adaptativa.

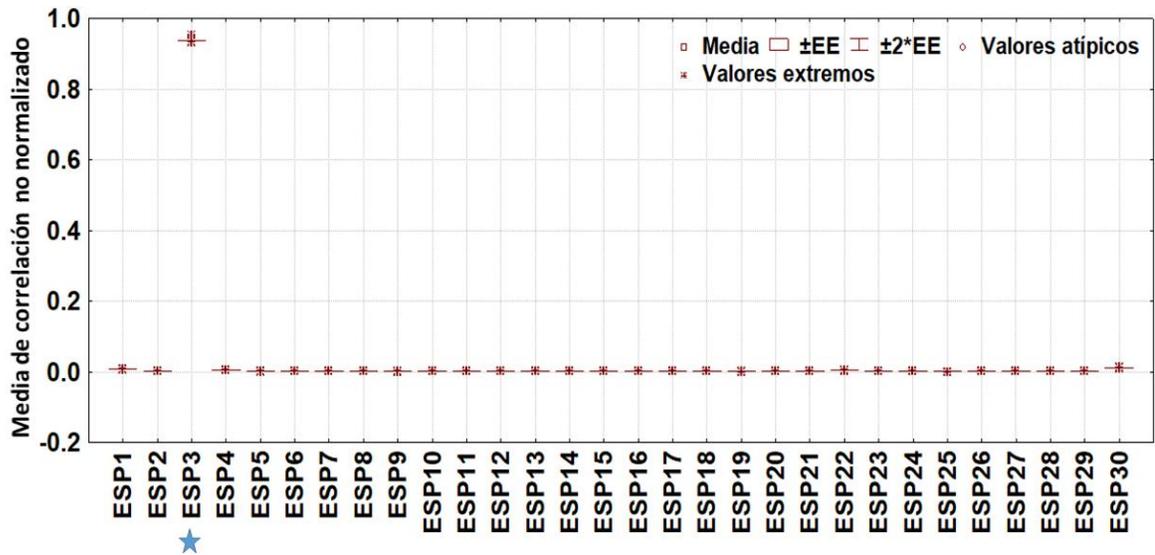


Figura 36. Resultados para la metodología 1 utilizando a la especie 3 como objetivo y máscaras adaptativas con correlación no lineal adaptativa.

Para la metodología dos, pero implementando la correlación no lineal adaptativa, los resultados se presentan en las figuras 39 y 40. El caso de una sola máscara se presenta en la figura 39, en la cual se observa que no hay traslape alguno, esto es, se obtuvo discriminación total. La figura 40 muestra los resultados para máscaras adaptativas, donde se puede ver de nueva cuenta que los valores de autocorrelación de la especie referencia están muy por encima del resto. Aunque para el caso de una sola máscara se llegó a tener discriminación total, los resultados para máscaras adaptativas son mejores, al presentar mayor diferencia que para una sola máscara.

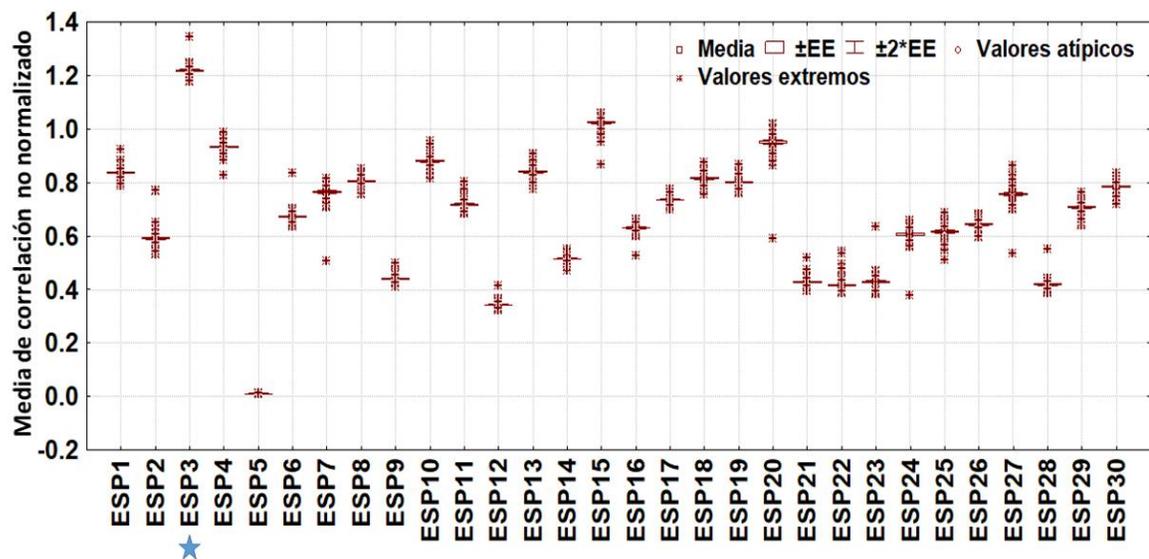


Figura 37. Resultados para la metodología 2 utilizando a la especie 3 como objetivo y una máscara con correlación no lineal.

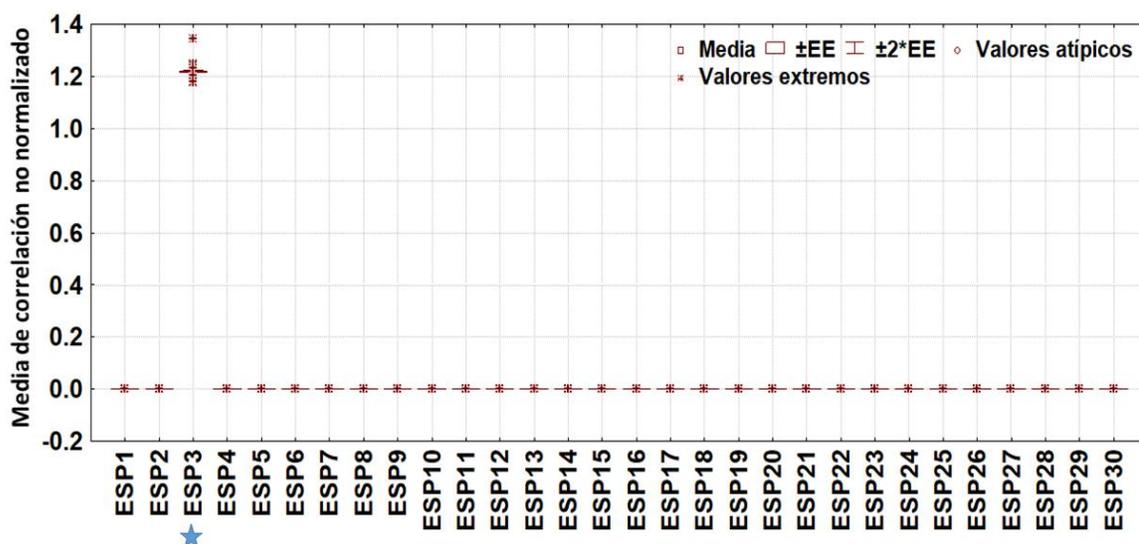


Figura 38. Resultados para la metodología 2 utilizando a la especie 3 como objetivo y máscaras adaptativas con correlación no lineal.

Debido a que al analizar todas las especies, en algunos casos los resultados mostraron traslapes, se procedió a calcular la eficiencia para discriminar cada especie implementando cada metodología en cada una de sus variantes: una máscara, máscaras adaptativas y ambos tipos de correlación. Esta eficiencia se calculó tomando como referencia los valores extremos de los resultados de diagramas de cajas de la autocorrelación de la especie referencia, como se muestra en la figura 41. Posteriormente, se determinó si el valor de correlación resultante entre la imagen referencia y todas de las versiones rotadas del resto de las 29 especies, se ubican dentro del intervalo utilizado, lo que es considerado como un traslape. Se contaron el número de traslapes totales y se dividieron entre el número total de imágenes procesadas de las otras 29 especies. La tabla 3 y tabla 4 presentan la eficiencia de discriminación de todas las especies cuando son usadas como referencia, así como la eficiencia media, cuando se implementa correlación no lineal. La tabla 3 muestra la eficiencia para cada método, utilizando una máscara. Se puede observar que la metodología 2 tiene mejor eficiencia para más especies de referencia que la metodología 1, con una eficiencia media que resultó mejor en el 1.1% de los casos. En la tabla 4 se presentan: la eficiencia para ambos métodos al usar máscaras adaptativas para todas las especies; así como su eficiencia media. Puede observarse que para ambas metodologías se alcanza el cien por ciento de eficiencia.

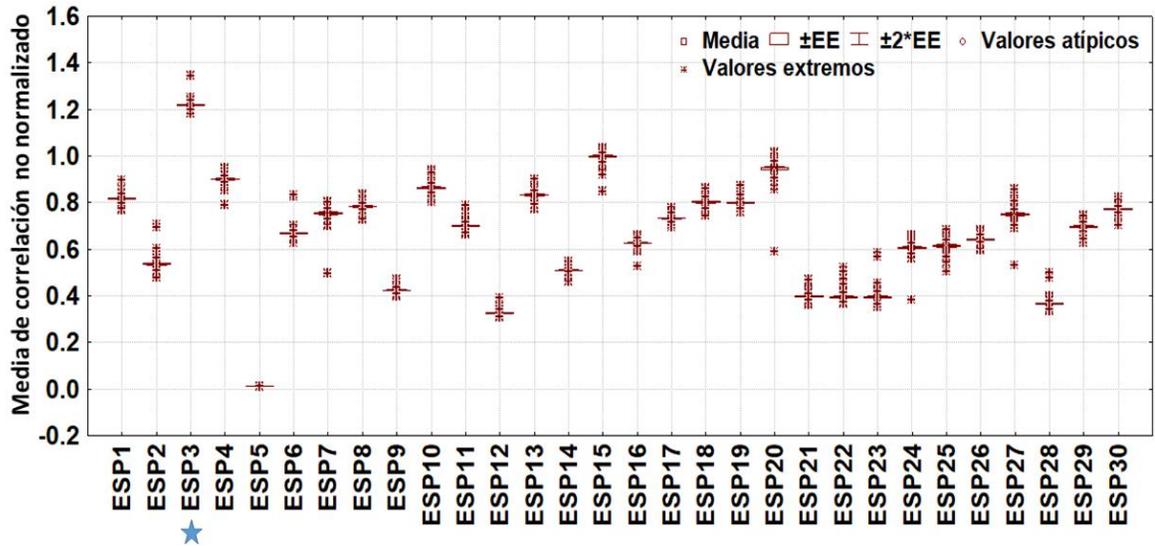


Figura 39. Resultados para la metodología 2 utilizando a la especie 3 como objetivo y una máscara con correlación no lineal adaptativa.

En las tablas 5 y 6 se presentan los resultados de eficiencia cuando se implementa correlación no lineal adaptativa. Para el caso en que se utiliza solo una máscara, la eficiencia se muestra en la tabla 5. Se observa de nueva cuenta que con la metodología 2 se logra una mejor eficiencia en la mayoría de especies de referencia, mejorando la eficiencia media solo en un 0.2%. La tabla 6 muestra la eficiencia para ambas metodologías cuando se utilizan máscaras adaptativas, logrando de nueva cuenta una eficiencia del 100% para ambas metodologías.

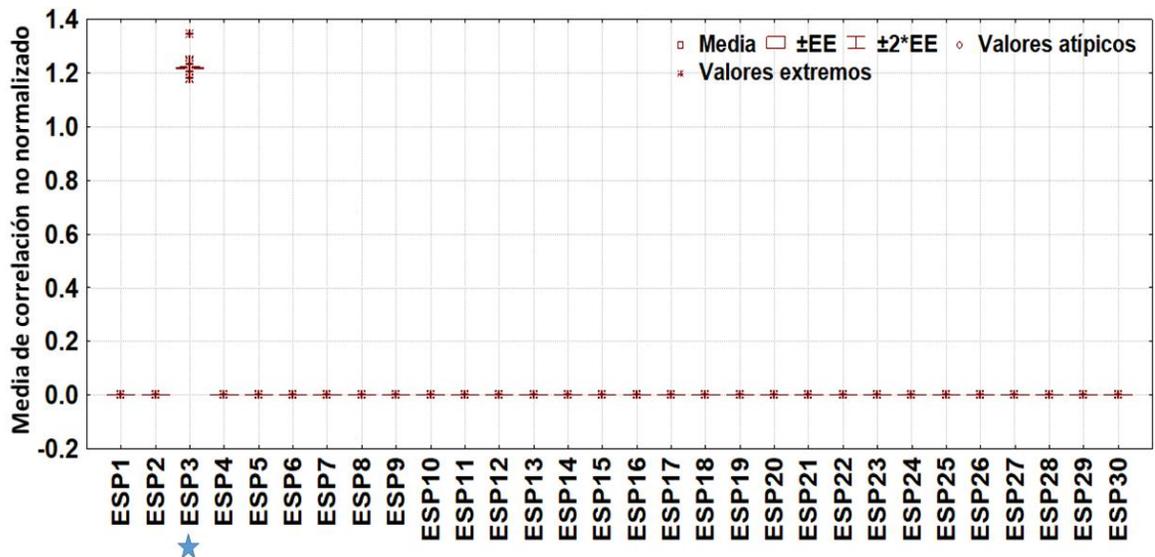


Figura 40. Resultados para la metodología 2 utilizando a la especie 3 como objetivo y máscaras adaptativas con correlación no lineal adaptativa.

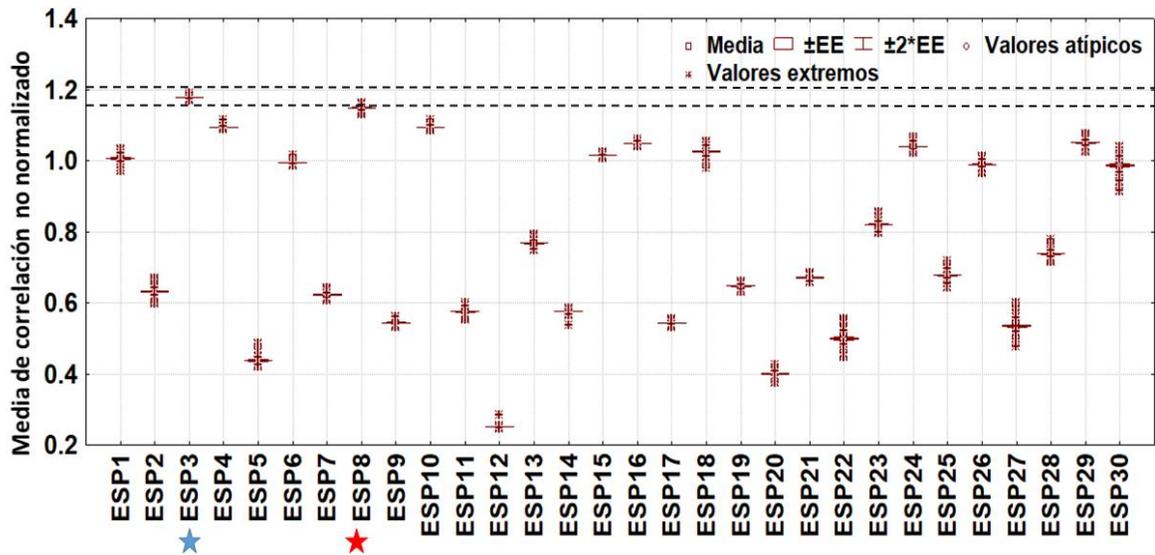


Figura 41. Resultados para la metodología 1 utilizando a la especie 3 como objetivo y utilizando una máscara con correlación no lineal. La línea punteada indica los valores extremos tomados como referencia para calcular la eficiencia de discriminación.

Todos los resultados de eficiencia, como se mencionó antes, fueron obtenidos considerando los valores extremos de los resultados de los máximos de correlación para cada imagen referencia, mostrando hasta un cien por ciento de eficiencia en ambas metodologías y ambos tipos de correlación para el caso en que se trabaja con máscaras adaptativas. Enfoques similares basados en máscaras binarias de anillos concéntricos han mostrado menor eficiencia a los dos métodos desarrollados en este trabajo, ya que alcanzaron valores inferiores al 95.4% de eficiencia (Álvarez-Borrego et al., 2013; Solorza et al., 2015; Solís-Ventura et al., 2015; Barajas-García et al., 2016;). Al usar otros criterios como firmas vectoriales e índices espectrales (Fimbres-Castro et al., 2012) y firmas de vectores identidad (Fimbres-Castro et al., 2013) se alcanzó un resultado similar, reportándose hasta 95.4% de nivel de confianza.

El tiempo consumido por ambas técnicas fue de 0.5733 segundos por imagen para la primera metodología y 0.4512 segundos para la metodología 2. Los tiempos fueron obtenidos en una computadora con un procesador Intel Core i7-370 de 3.40GHz y 8 GB de RAM DDR3, con Windows 10.

Tabla 3. Eficiencia para cada metodología usando una máscara y correlación no lineal.

Especie objetivo	Metodología 1 Eficiencia (%)	Metodología 2 Eficiencia (%)
1	100	100
2	95.4	98.6
3	100	100
4	100	100
5	100	100
6	99.6	100
7	100	99.4
8	97.9	100
9	99.7	99.9
10	100	100
11	91.5	99
12	100	98
13	98.9	93.1
14	99.8	100
15	98.8	98.8
16	100	100
17	98.9	100
18	96.6	100
19	97.8	99.8
20	96.9	99.8
21	100	95.9
22	78.9	99.9
23	96.5	96.9
24	99.9	100
25	100	100
26	100	100
27	99.5	96.5
28	100	100
29	100	100
30	98.5	100
Eficiencia media (%)	98.17	99.18

4.2 Información fragmentada

Es común que en algunas aplicaciones nos encontremos con imágenes incompletas del objeto a reconocer. Por ejemplo, en la identificación de huellas dactilares en investigaciones forenses, donde la base de datos contiene imágenes completas, mientras que las huellas recolectadas en la escena del crimen, se encuentran en la mayoría de los casos incompletas o degradadas (Jain y Feng. 2011). Otro caso es la identificación taxonómica de diatomeas fosilizadas que son utilizadas en áreas como ecología, evolución y paleoecología como indicadores ambientales de tiempos pasados, ya que se tiene la limitante de que se

encuentran en fragmentos o pulverizadas en muestras de sedimento (Hajós, 1967). Por lo tanto, es importante determinar la capacidad de una metodología para identificar imágenes con fragmentos de información y conocer con qué porcentaje de información son capaces de realizar una identificación. Por ello, se determinó la capacidad de las metodologías presentadas en este trabajo para reconocer objetos teniendo solo un fragmento de él. Para este análisis se utilizaron 21 especies de diatomeas fosilizadas colectadas en 1996 en La Cuenca San Lázaro, Baja California Sur, México, mostradas en la figura 42.

Tabla 4. Eficiencia para cada metodología usando máscaras adaptativas y correlación no lineal.

Especie objetivo	Metodología 1 Eficiencia (%)	Metodología 2 Eficiencia (%)
1	100	100
2	100	100
3	100	100
4	100	100
5	100	100
6	100	100
7	100	100
8	100	100
9	100	100
10	100	100
11	100	100
12	100	100
13	100	100
14	100	100
15	100	100
16	100	100
17	100	100
18	100	100
19	100	100
20	100	100
21	100	100
22	100	100
23	100	100
24	100	100
25	100	100
26	100	100
27	100	100
28	100	100
29	100	100
30	100	100
Eficiencia media (%)	100	100

Tabla 5. Eficiencia para cada metodología usando una máscara y correlación no lineal adaptativa.

Especie objetivo	Metodología 1 Eficiencia (%)	Metodología 2 Eficiencia (%)
1	100	100
2	99.6	100
3	100	100
4	100	100
5	100	100
6	100	100
7	100	99.9
8	99.7	100
9	100	99.9
10	100	100
11	95.4	100
12	100	99.9
13	100	93.2
14	99.8	100
15	100	99.9
16	100	100
17	99.7	100
18	97.9	100
19	99.6	99.8
20	97.1	99.8
21	100	99.8
22	96.3	100
23	100	99.3
24	99.9	100
25	100	100
26	100	100
27	99.7	96.6
28	100	100
29	100	99.9
30	98.6	100
Eficiencia media (%)	99.4	99.6

Además, de cada una de las 21 especies se cuenta con 49 fragmentos con diferente porcentaje de información, por lo tanto, se trabajó con 50 imágenes de cada una de las 21 especies, esto es, un total de 1050 imágenes.

En la figura 43 se muestran las 50 imágenes de la diatomea A llamada *Actinocyclus inges Rattray*, donde la pieza marcada como A_1 es la imagen de referencia (diatomea completa) y en la figura 44 se muestra la diatomea B (espeie *Azpeita sp*) y sus 49 fragmentos.

Tabla 6. Eficiencia para cada metodología usando máscaras adaptativas y correlación no lineal adaptativa.

Especie objetivo	Metodología 1 Eficiencia (%)	Metodología 2 Eficiencia (%)
1	100	100
2	100	100
3	100	100
4	100	100
5	100	100
6	100	100
7	100	100
8	100	100
9	100	100
10	100	100
11	100	100
12	100	100
13	100	100
14	100	100
15	100	100
16	100	100
17	100	100
18	100	100
19	100	100
20	100	100
21	100	100
22	100	100
23	100	100
24	100	100
25	100	100
26	100	100
27	100	100
28	100	100
29	100	100
30	100	100
Eficiencia media (%)	100	100

Para cada una de las metodologías, se realizó el análisis que consiste en que cada fragmento de una especie de diatomea fue comparada con su imagen completa y con todos los fragmentos de las demás y determinar el mínimo porcentaje de información requerido para la identificación de la especie referencia. El análisis para ambas metodologías se realizó con base al máximo de correlación obtenido al multiplicar los picos de correlación de las cuatro máscaras binarias, para los casos de una máscara y máscaras adaptativas e implementando correlación no lineal.

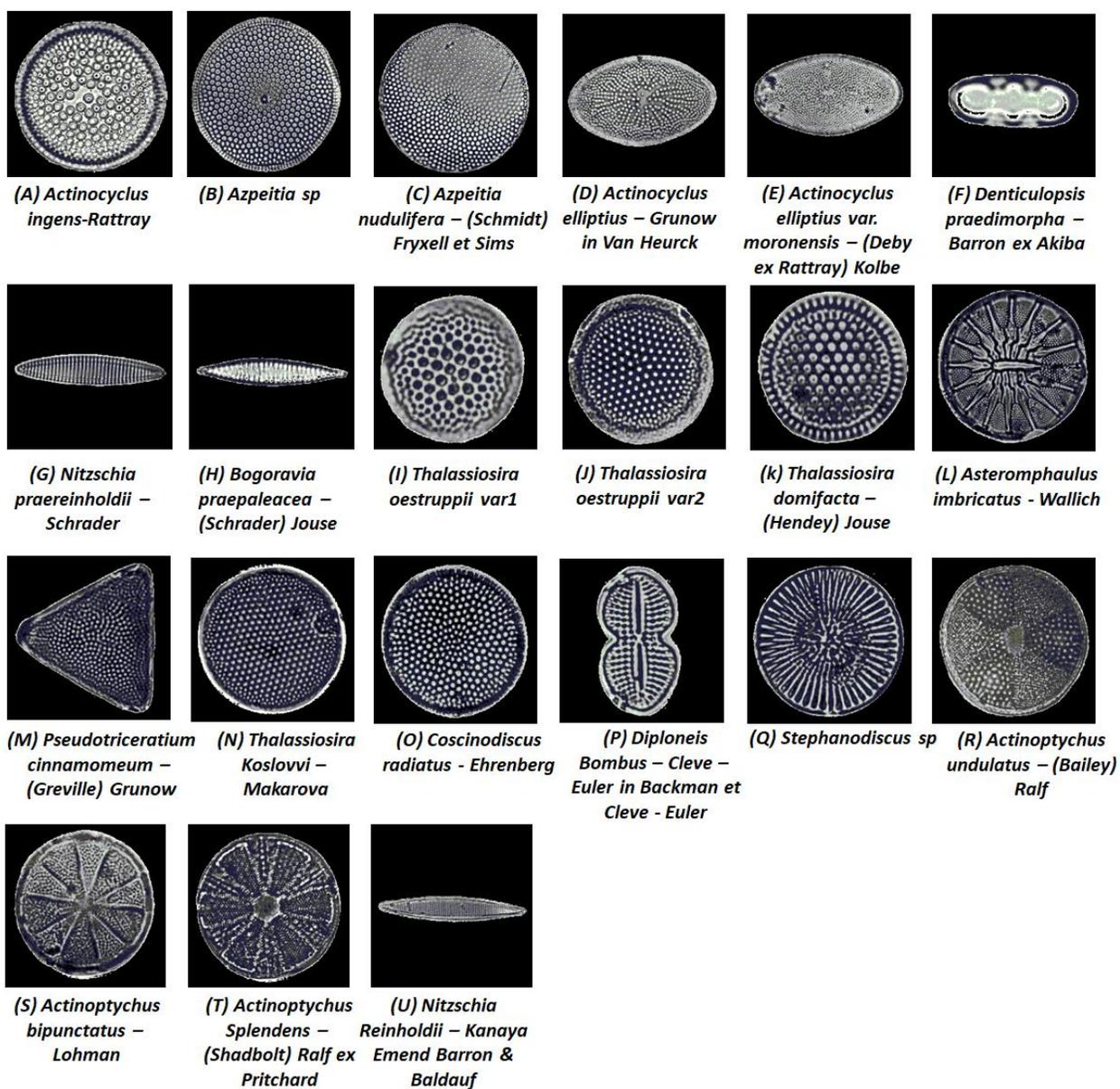


Figura 42. Imágenes de 21 especies de diatomeas fosilizadas.

Los resultados se graficaron como se muestra en la figura 45, donde se presentan los resultados de la metodología 2 usando una máscara y teniendo el fragmento 12 de la diatomea *Actinocyclus inges Rattray* (especie A) como imagen de referencia comparada con las 1050 imágenes, las cuales se muestran en el eje horizontal de la gráfica, que incluyen el fragmento 1 (imagen completa) y los 49 fragmentos de cada una de las 21 especies, esto es, cada 50 valores en el eje horizontal representan una especie de diatomea diferente. El eje vertical representa los valores resultantes de los máximos de la correlación entre la pieza 12 de la especie A con cada uno de los 1050 fragmentos. Para esta referencia, el valor tomado como

umbral para determinar la capacidad de discriminación, es el resultado de la correlación del fragmento referencia 12 y el fragmento 1 que representa a la imagen original de la especie A, el cual, como se puede observar, está por encima de los resultados de la correlación con fragmentos de otras especies.

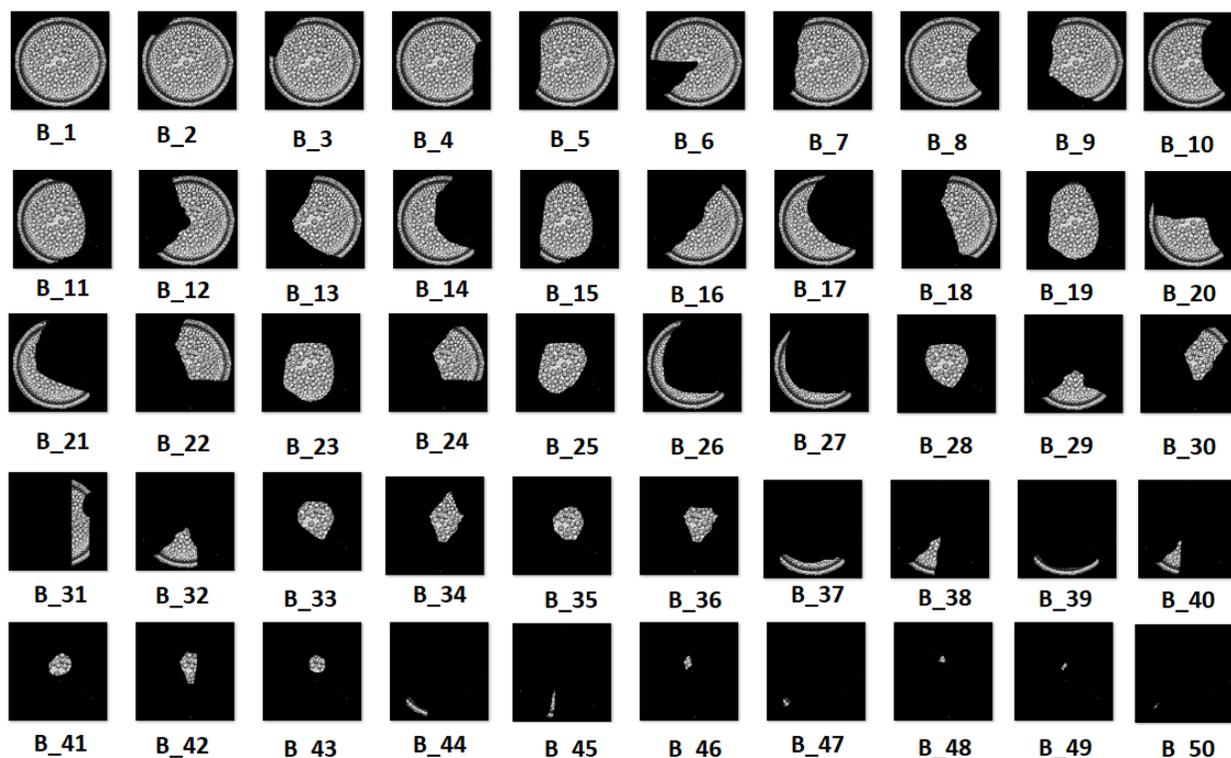


Figura 43. Fragmentos de la especie *Actinocyclus inges Rattray*.

Por lo tanto, este fragmento 12 es considerado seguro para identificar la especie a la que pertenece para la metodología utilizada.

La figura 46 muestra los resultados para la misma metodología y para la misma especie A, pero ahora para el fragmento 13. Se puede ver ahora que el máximo de correlación, entre el fragmento 13 y el fragmento 581 que pertenece a la especie L es mayor al máximo de correlación entre el fragmento 13 y su imagen completa (fragmento 1). Por ello, el fragmento 13 es considerado no adecuado para la identificación de su propia especie. Por lo tanto, esta metodología puede identificar hasta el fragmento 12, el cual tiene un 66.05% de información.

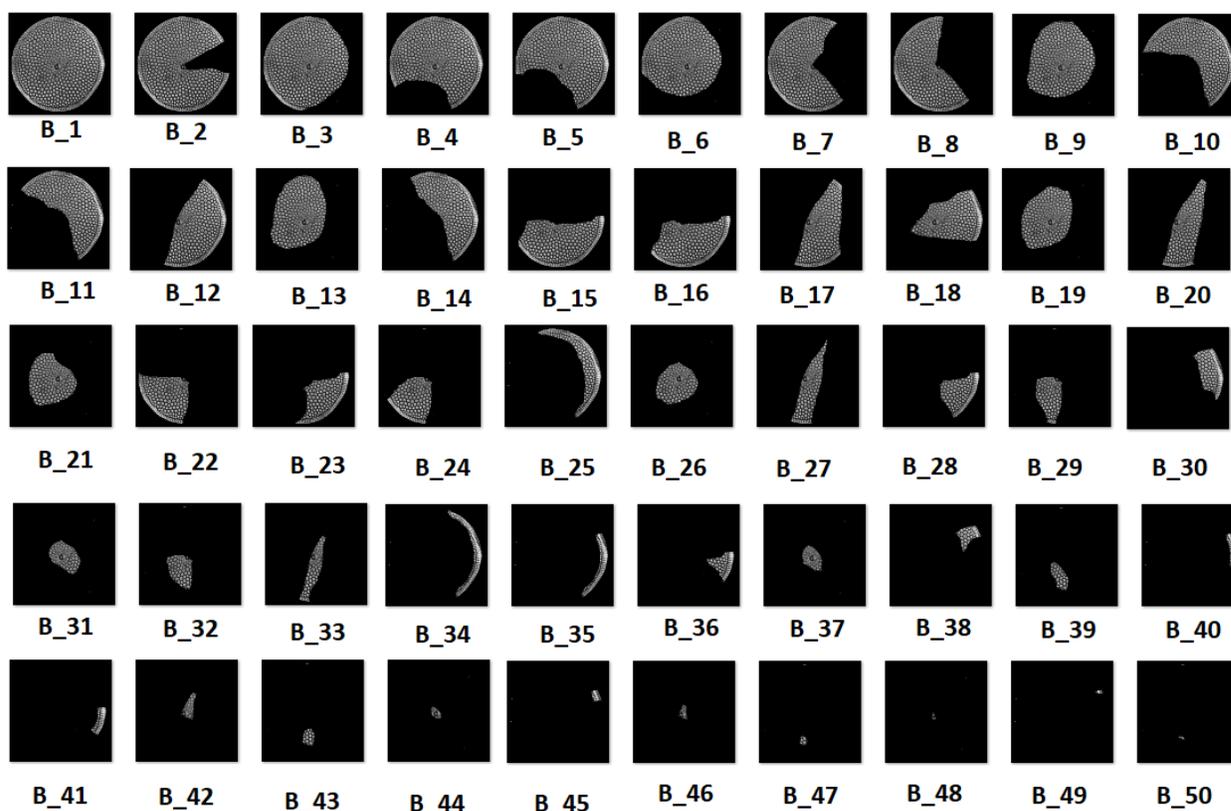


Figura 44. Fragmentos de la especie *Azpeita sp.*

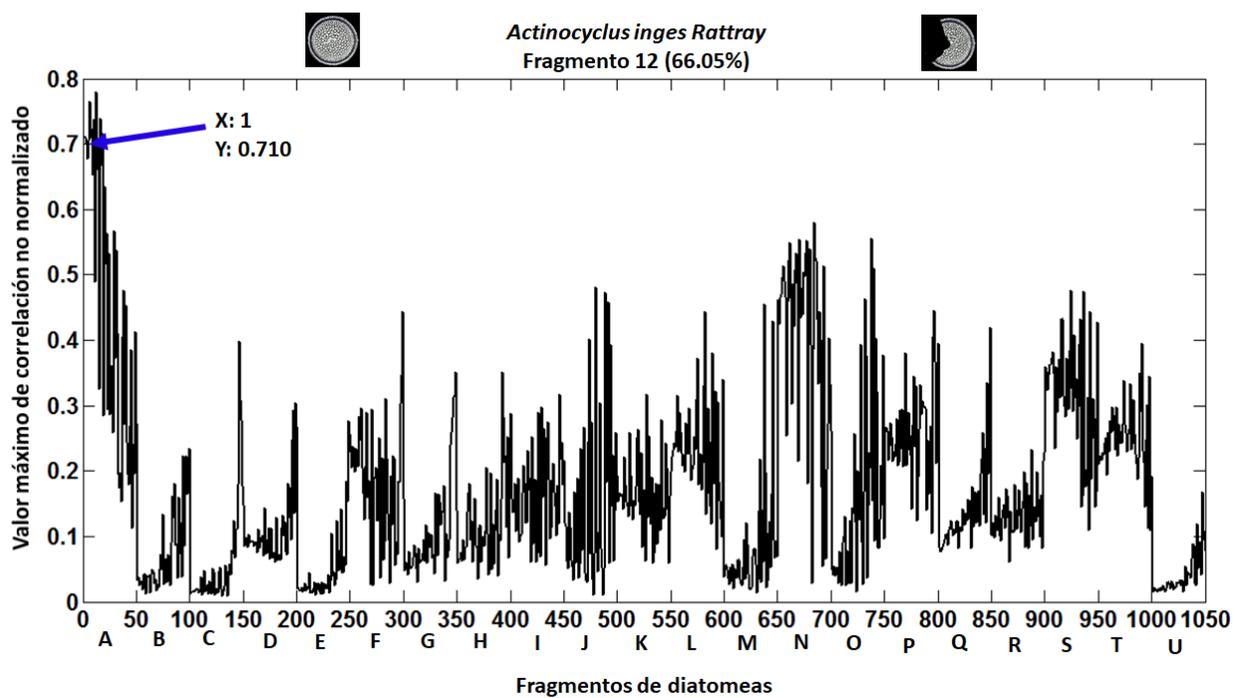


Figura 45. Resultados del análisis del fragmento 12 de la especie A (*Actinocyclus inges Rattray*), para la metodología 2 utilizando una máscara.

El proceso descrito para determinar el nivel de fragmentación, se realizó para ambas metodologías para una máscara y máscaras adaptativas implementando correlación no lineal para todas las 21 especies de diatomeas. La tabla 7 presenta el porcentaje de información para ambas metodologías utilizando una máscara, se observa un mejor desempeño del método 2 sobre el método 1, requiriendo menos información para la identificación de la especie objetivo. La tabla 8 muestra los resultados cuando se utilizan máscaras adaptativas. El desempeño para ambas metodologías es débil, requiriendo hasta el 100% de información para algunas especies de diatomeas.

Los resultados mostraron que estas dos técnicas no tienen un buen desempeño con información fragmentada al compararse con el trabajo realizado por Barajas-García *et al.* (2016). Ellos pudieron identificar especies de diatomeas con porcentajes de información de 22–48% , mientras que los métodos presentados en este trabajo, utilizando la misma base de datos, solo pudieron reconocer seis especies en el mismo rango, las demás especies necesitaron más porcentaje de información para su identificación.

4.3 Imágenes afectadas por ruido

El desempeño de ambas metodologías cuando enfrentan imágenes afectadas con ruido fue probado utilizando la métrica llamada coeficiente de discriminación definida como (Vijaya y Hassebrook, 1990)

$$CD = 1 - \frac{\max |C(S_{IO}, S_R)|^2}{C(0)^2}, \quad (67)$$

donde $\max |C(S_{IO}, S_R)|$ es el máximo de correlación entre la firma de la imagen objetivo S_{IO} y la firma del fondo de la imagen con ruido S_R y $C(0)$ es el valor del centro del plano de correlación entre la firma de la imagen objetivo S_{IO} y la firma de la imagen objetivo con ruido S_{IOR} . En el caso de las metodologías desarrolladas, la correlación utilizada es no lineal.

Para cada metodología, la imagen de la especie *Actinocyclus inges Rattray* fue afectada primeramente con ruido gaussiano de media cero, cambiando la varianza desde 0 hasta 5 en intervalos de 0.01 y él CD fue obtenido. Debido a que el proceso es aleatorio, se repitió el proceso 36 veces. El mismo procedimiento se realizó para el caso en que la imagen fue afectada con ruido sal y pimienta, variando la densidad desde

0 hasta 1 en intervalos de 0.01. Posteriormente, para ambos tipos de ruido, se calculó la media del CD y ± 1.96 errores estándar, lo cual da un 95% de nivel de confianza.

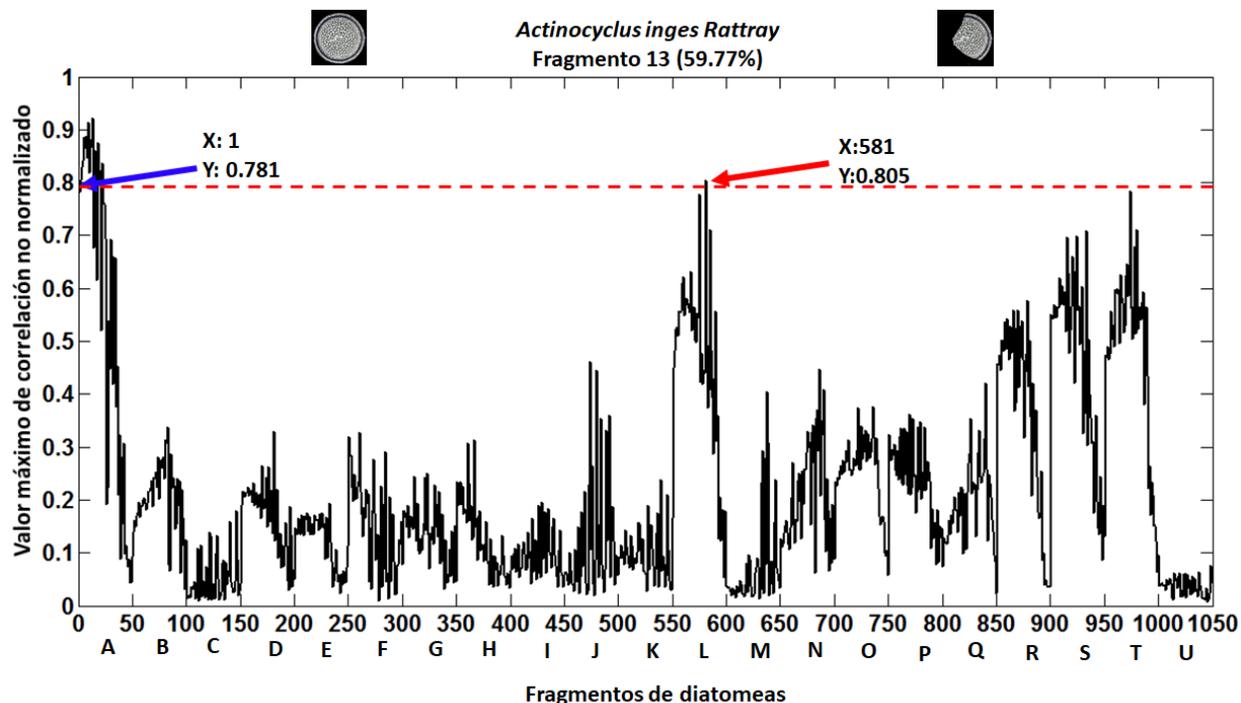


Figura 46. Resultados del análisis del fragmento 13 de la especie A (*Actinocyclus inges Rattray*), para la metodología 2 utilizando una máscara.

En la figura 47 se presentan los resultados para ambas metodologías para ruido gaussiano. En el eje horizontal se muestra el nivel de varianza y en el eje vertical la media de CD . Los resultados muestran que la metodología 2 tiene mejor desempeño para este tipo de ruido, ya que alcanza hasta un nivel de varianza de 4.03, mientras que la metodología 1 solo soporta 0.15 de varianza. Para el caso de ruido sal y pimienta, como se muestra en la figura 48, ambos métodos tienen casi el mismo desempeño, pero la metodología 2 tiene una respuesta ligeramente mejor, llegando a un nivel de densidad de 0.86 y mientras que la metodología 1 hasta 0.85.

Comparando estos resultados con los obtenidos por Solorza y Álvarez-Borrego (2015) y Barajas- García *et al.*, la metodología 2 tiene mejor desempeño para ruido gaussiano que las máscaras de Fourier, firmas vectoriales, el algoritmo SURF (Speed-Up Robust Features) y máscaras Bessel. La metodología 1 no tiene

tan buenos resultados, teniendo menor tolerancia ante este tipo de ruido que las técnicas mencionadas.

En el caso de ruido sal y pimienta, ambas metodologías tienen mejores resultados comparados con máscaras de Fourier, firmas vectoriales SURF y máscaras Bessel (Solorza et al., 2015 y Barajas-García et al., 2016).

Tabla 7. Información requerida para la identificación de cada especie de diatomea por cada metodología utilizando una máscara y correlación no lineal.

Especie de diatomea	Metodología 1 (%)	Metodología 2 (%)
A	95.67	66.05
B	87.66	20.97
C	88.31	51.05
D	89.06	19.26
E	81.34	44.80
F	88.63	60.50
G	77.37	32.21
H	94.70	87.61
I	84.90	82.64
J	73.24	55.33
K	79.37	62.21
L	100	65.21
M	97.19	66.08
N	94.54	79.66
O	73.25	20.78
P	90.72	31.15
Q	89.29	49.92
R	94.38	77.70
S	92.54	57.87
T	89.15	66.05
U	66.29	20.97

4.4 Imágenes afectadas por iluminación no homogénea

Ambas metodologías desarrolladas, fueron evaluadas también para el caso en que las imágenes tienen variaciones de iluminación. Para esta evaluación, se utilizaron las imágenes de las 21 especies de diatomeas y se generaron 8 diferentes patrones de iluminación no homogénea, los cuales fueron utilizados para afectar las imágenes, mediante una multiplicación punto a punto entre la imagen y el patrón a utilizar, como se muestra en la figura 49.

En la figura 50 se muestran los 8 patrones de iluminación generados y en la figura 51 se observa a la imagen de la especie E (*Actinocyclus elipticus var. Moronensis*) afectada por los ocho patrones de iluminación, donde P0 indica el caso en el cual la iluminación no es modificada o imagen original.

Tabla 8. Información requerida para la identificación de cada especie de diatomea por cada metodología utilizando máscaras adaptativas y correlación no lineal.

Especie de diatomea	Metodología 1 (%)	Metodología 2 (%)
A	100	91.45
B	100	100
C	100	100
D	100	95.47
E	85.59	85.59
F	100	93.05
G	100	100
H	100	95.10
I	100	94.17
J	100	100
K	92.24	100
L	100	92.85
M	97.75	100
N	100	100
O	100	100
P	90.72	100
Q	98.21	98.21
R	100	94.38
S	98.38	92.54
T	100	90.90
U	100	100

El primer paso fue realizar una “autocorrelación” de las imágenes con iluminación no homogénea, esto es, se realizó la correlación de la imagen original con imágenes de sí misma pero afectadas por los ocho patrones de iluminación (P1-P8) para determinar que tanto afectan las variaciones de iluminación al valor esperado que se obtiene cuando no hay variaciones en la iluminación (P0). Este proceso se repitió para las 21 especies de diatomeas y ambas metodologías desarrolladas con correlación no lineal de las firmas.

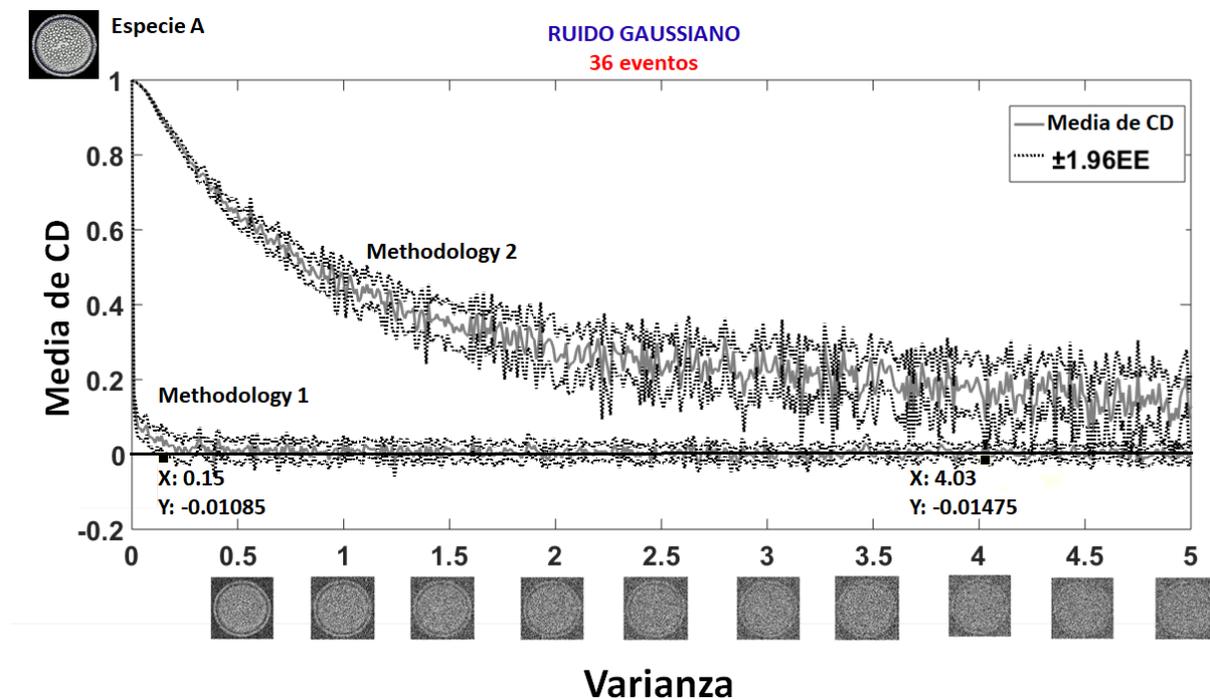


Figura 47. Desempeño de ambas metodologías cuando la imagen es afectada por ruido gaussiano.

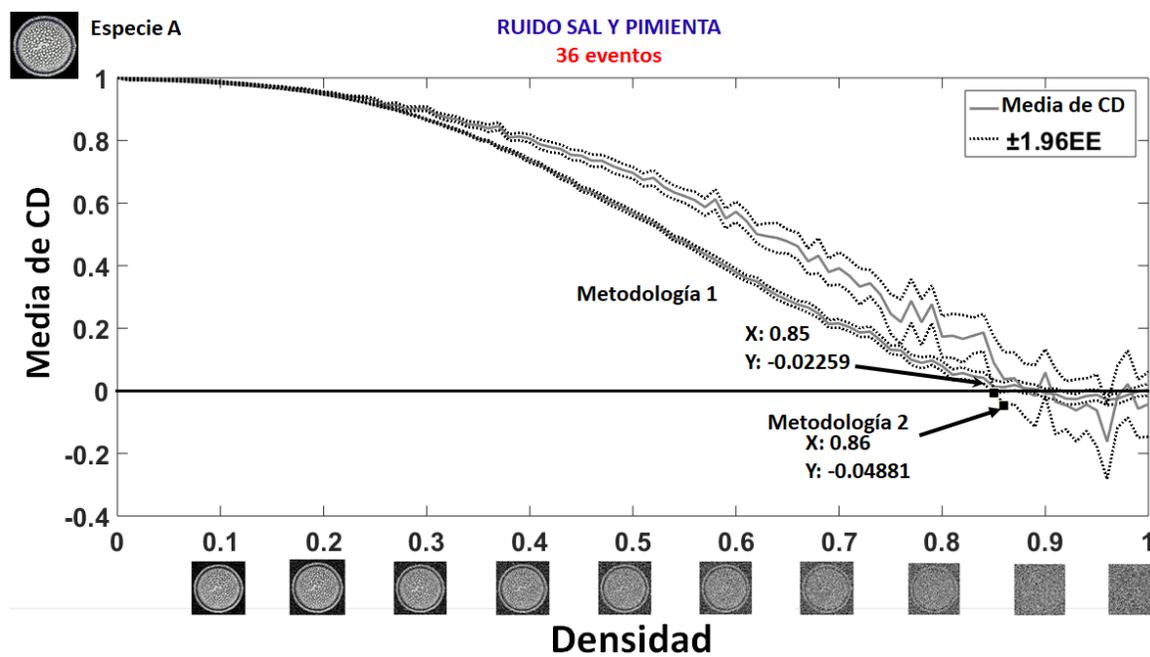


Figura 48. Desempeño de ambas metodologías cuando la imagen es afectada por ruido sal y pimienta.

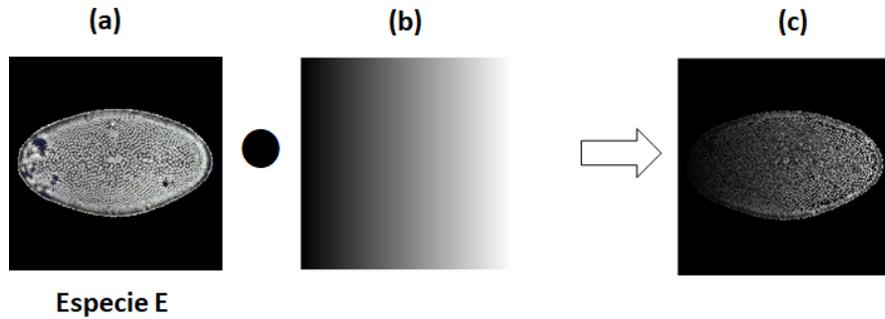


Figura 49. Diagrama del procedimiento para generar una imagen con iluminación no homogénea. (a) Imagen original. (b) Patrón de iluminación no homogéneo. (c) Imagen con iluminación no homogénea. Donde • indica multiplicación punto a punto.

En la figura 52 como ejemplo se muestran los resultados de la correlación no lineal normalizada, cuando la imagen de referencia es la especie E, para ambas metodologías. La normalización fue realizada con respecto al valor de obtenido cuando la imagen no tiene variaciones de iluminación o patrón P0. Se puede observar como los valores decaen al variar la iluminación de la imagen para ambas metodologías.

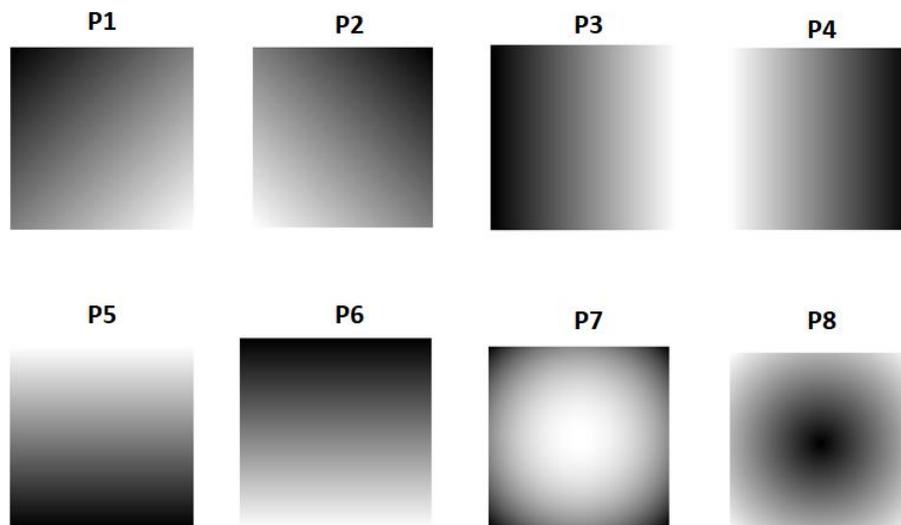


Figura 50. Patrones de iluminación no homogénea utilizados.

Ahora en la figura 53 se observan los resultados correspondientes a la especie S. Se puede ver que nuevamente, existe disminución en los valores de autocorrelación, para ambas metodologías, al afectar la imagen con iluminación no homogénea. Además, comparando con los resultados mostrados en la figura

52, se puede ver que los patrones de iluminación afectan de una manera diferente a cada especie. Por lo tanto, se procedió a repetir el proceso para cada una de las 21 diatomeas afectadas por los ocho patrones de iluminación.

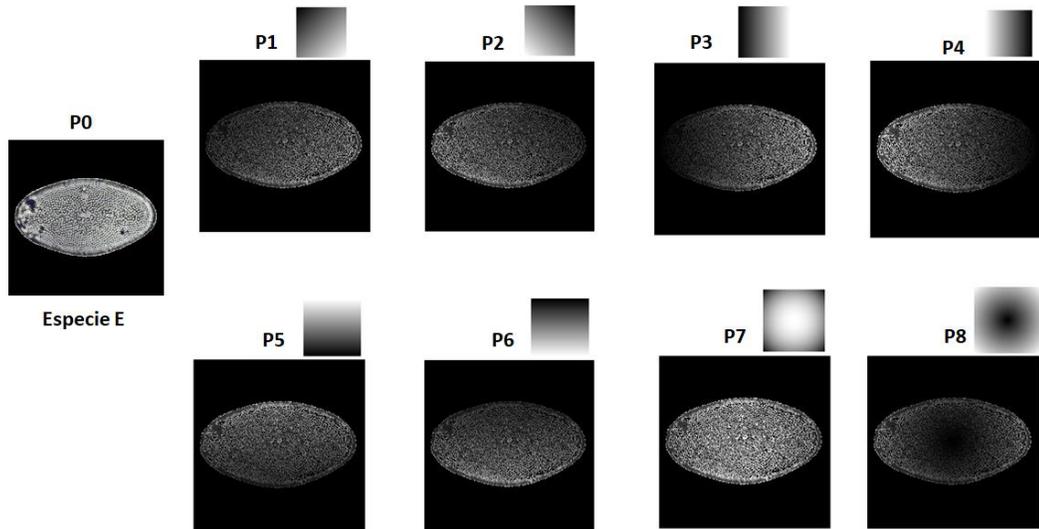


Figura 51. Imagen de la especie E afectada por los diferentes patrones de iluminación, donde P0 indica que no se modificó la iluminación y P1-P8 indican los ocho diferentes patrones de iluminación no homogénea.

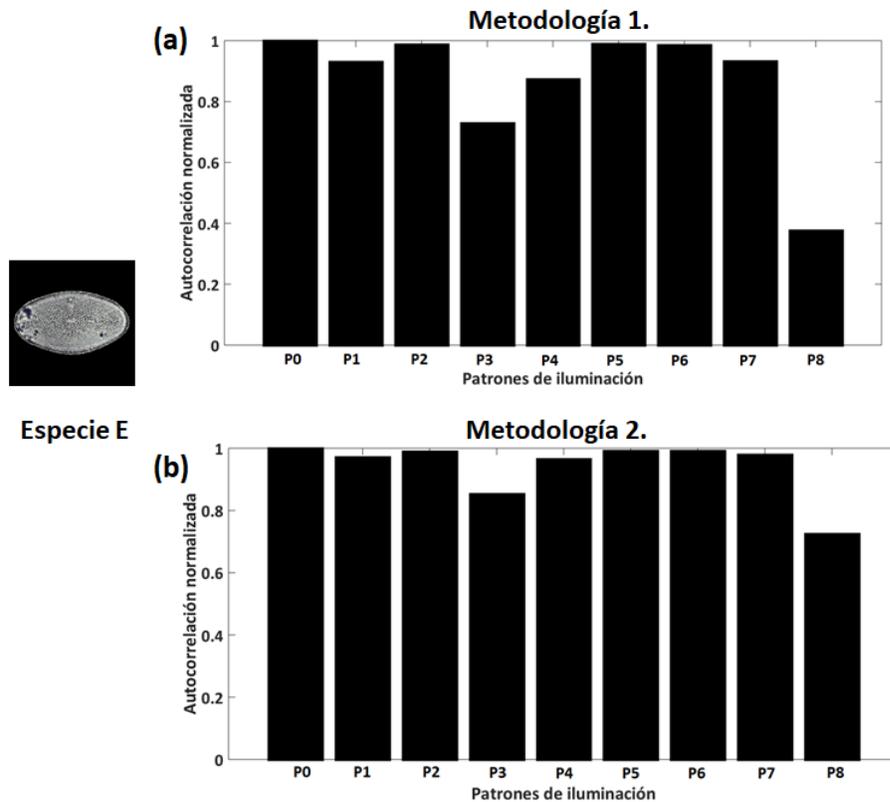


Figura 52. Resultados de la variación de los valores de autocorrelación de la imagen de la especie E al ser afectada por los diferentes patrones de iluminación. (a) Metodología 1. (b) Metodología 2.

En la tabla 9 se muestran los resultados de la “autocorrelación” de cada una de las 21 especies de diatomeas con variaciones de iluminación para la metodología 1.

Tabla 9. Resultados obtenidos con la metodología 1 al correlacionar cada especie con versiones de sí misma, al afectarla con diferente iluminación. P0 es cuando no hay variación de iluminación y P1-P8 son diferentes patrones de iluminación no homogénea.

Patrón	ESPECIES DE DIATOMEAS																				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
P0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
P1	0.87	0.95	0.9	0.99	0.93	0.97	1	0.99	0.88	0.76	0.97	0.94	0.98	0.89	0.95	0.95	0.91	0.94	0.99	0.92	0.94
P2	0.84	1	0.91	0.96	0.98	0.97	0.95	0.98	0.94	0.92	0.95	0.88	0.96	0.9	0.95	0.96	0.92	0.92	0.99	0.96	0.94
P3	0.68	0.82	0.76	0.85	0.72	0.91	0.91	0.95	0.67	0.72	0.9	0.81	0.98	0.79	0.81	0.98	0.85	0.93	0.87	0.81	0.68
P4	0.64	0.92	0.81	0.83	0.87	0.9	0.8	0.92	0.8	0.93	0.9	0.67	0.86	0.8	0.88	0.98	0.84	0.85	0.95	0.89	0.63
P5	0.7	0.84	0.79	0.93	0.98	0.96	0.99	0.99	0.67	0.91	0.89	0.71	0.98	0.8	0.92	0.81	0.86	0.93	0.73	0.82	0.99
P6	0.65	0.9	0.74	0.98	0.98	0.98	1	1	0.72	0.74	0.9	0.77	0.97	0.74	0.76	0.82	0.82	0.84	0.97	0.83	0.99
P7	0.89	0.98	0.96	0.94	0.93	0.94	0.94	0.95	0.96	0.92	0.93	0.91	0.92	0.93	0.99	0.95	0.98	0.96	0.93	0.98	0.94
P8	0.71	0.89	0.58	0.66	0.37	0.43	0.71	0.53	0.69	0.86	0.76	0.66	0.54	0.52	0.84	0.74	0.79	0.63	0.72	0.76	0.76
Media	0.77	0.92	0.82	0.9	0.86	0.89	0.92	0.92	0.81	0.86	0.91	0.81	0.9	0.81	0.89	0.9	0.88	0.88	0.9	0.88	0.87

El valor más alto se obtiene para P0, que es el caso en el cual las imágenes no son afectadas por variaciones de iluminación y se observa como los valores decaen al ser afectadas por los patrones de iluminación no homogéneos, solo en el caso de la especie G con los patrones P1 y P6, así como la especie H con el patrón P6, se pudo obtener un valor de autocorrelación de 1. En el último renglón de la tabla se muestra la media de los resultados considerando todos los patrones de iluminación para cada especie, se puede ver claramente que el efecto de los cambios de iluminación es diferente para cada especie.

En la tabla 10, se presentan los resultados para la metodología 2 de la “autocorrelación” de cada una de las 21 especies de diatomeas con variaciones de iluminación. Se puede ver de nueva cuenta como el valor más alto se obtiene para P0 y los valores decaen para P1-P8, obteniendo el valor de 1 solo para la especie H con el patrón P6. La media indica por un lado, que las variaciones de iluminación afectan de diferente forma a cada especie, además, al compararse con la media de los resultados obtenidos para la metodología 1 de la tabla 9, la media de la metodología 2 es mayor que la media de la metodología 1 en la mayoría de las especies, ya que la metodología 1 tiene una media mayor solo para las especies B, H, M y O.

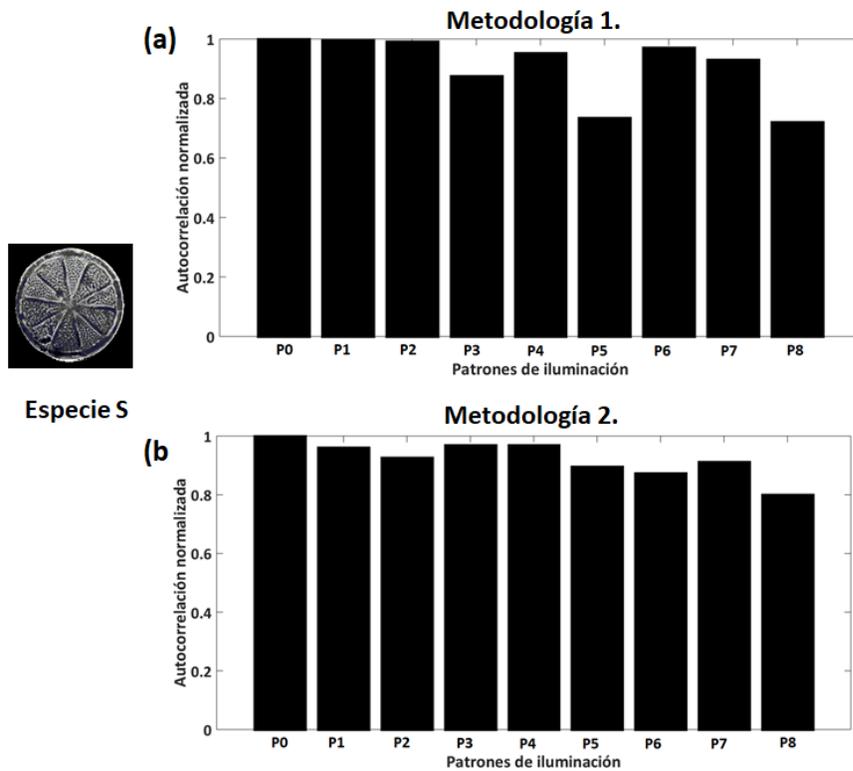


Figura 53. Resultados de la variación de los valores de autocorrelación de la imagen de la especie S al ser afectada por los diferentes patrones de iluminación. (a) Metodología 1. (b) Metodología 2.

En la tabla 11 se presentan ahora los resultados para ambas metodologías, pero en este caso se calcula la media de los valores de autocorrelación para cada patrón considerando los resultados de las 21 especies mostrados en las tablas 19 y 10. Se puede observar que con excepción del caso en que no hay variación de iluminación (P0), en todos los patrones de iluminación no homogénea la metodología 2 (M2) tiene una media más alta en los valores de autocorrelación que la metodología 1 (M1). Todos los resultados mostrados en las tablas 9-11 fueron obtenidos utilizando una máscara y correlación no lineal de las firmas.

Tabla 10. Resultados obtenidos con la metodología 2 al correlacionar cada especie con versiones de sí, al afectarla con diferente iluminación. P0 es cuando no hay variación de iluminación y P1-P8 son diferentes patrones de iluminación no homogénea.

Patrón	ESPECIES DE DIATOMEAS																				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
P0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
P1	0.93	0.92	0.97	0.98	0.97	0.98	0.96	0.99	0.94	0.92	0.97	0.97	0.99	0.92	0.97	0.98	0.94	0.97	0.96	0.95	0.98
P2	0.92	0.94	0.9	0.98	0.98	0.98	0.9	0.98	0.94	0.98	0.93	0.96	0.97	0.93	0.95	0.98	0.98	0.94	0.92	0.98	0.93
P3	0.9	0.92	0.92	0.93	0.85	0.95	0.92	0.96	0.85	0.9	0.97	0.91	0.95	0.88	0.93	0.98	0.94	0.89	0.97	0.93	0.9
P4	0.9	0.96	0.96	0.93	0.96	0.96	0.79	0.93	0.9	0.96	0.94	0.93	0.93	0.88	0.94	0.99	0.93	0.9	0.96	0.98	0.81
P5	0.9	0.92	0.64	0.98	0.99	0.88	0.98	0.98	0.92	0.96	0.91	0.92	0.89	0.93	0.82	0.88	0.95	0.94	0.89	0.94	0.99
P6	0.83	0.84	0.86	0.98	0.99	0.98	0.98	1	0.9	0.89	0.88	0.93	0.95	0.86	0.92	0.93	0.96	0.95	0.87	0.94	0.99
P7	0.93	0.91	0.97	0.92	0.97	0.95	0.95	0.96	0.87	0.86	0.9	0.96	0.86	0.85	0.89	0.95	0.96	0.92	0.91	0.94	0.95
P8	0.73	0.79	0.95	0.6	0.72	0.71	0.47	0.8	0.67	0.73	0.86	0.86	0.59	0.75	0.65	0.85	0.96	0.88	0.79	0.92	0.69
Media	0.89	0.91	0.9	0.92	0.93	0.93	0.88	0.95	0.88	0.91	0.92	0.93	0.9	0.88	0.89	0.94	0.95	0.93	0.91	0.95	0.91

Posteriormente se procedió a realizar la correlación de cada especie de diatomea con el resto de especies afectándolas con los ocho patrones de iluminación generados.

Tabla 11. Media de los resultados de autocorrelación de cada metodología para cada patrón de iluminación. La media se obtuvo considerando los resultados de las 21 especies. M1: metodología1. M2: metodología 2.

	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
	P0	P0	P1	P1	P2	P2	P3	P3	P4	P4	P5	P5	P6	P6	P7	P7	P8	P8
Media	1	1	0.93	0.96	0.94	0.95	0.82	0.92	0.84	0.92	0.86	0.91	0.86	0.92	0.94	0.92	0.67	0.76

En las tablas 12 se muestran como ejemplo, los resultados de correlación normalizados entre las 21 especies de diatomeas mediante la metodología 2, para el caso en que no hay variación de iluminación, patrón P0. Se puede ver claramente una diagonal con valor de 1, la cual corresponde al caso en que se realiza la correlación de cada especie con sí misma.

Ahora se muestran los resultados para la misma metodología 2 en la tabla 13, para el caso en el que el patrón de iluminación P1 afecta a las imágenes problema. Se puede observar en los resultados, que ya no se tiene una diagonal con valores igual a 1, lo cual indica una disminución en la autocorrelación de las especies al ser afectadas con este patrón de iluminación. Este comportamiento sucedió también para la metodología 1, tabla 14.

Por lo tanto, se procedió a calcular el promedio de la correlación normalizada para cada metodología y cada patrón de iluminación, utilizando a cada una de las 21 especies de diatomeas como imagen de referencia.

Los resultados de la correlación no lineal utilizando una máscara para ambas metodologías se muestran en la tabla 15. Los resultados mostrados en cada columna corresponden al promedio de los valores de la correlación de cada especie con las demás diatomeas. Además, para cada metodología y cada patrón de iluminación se calculó la media de los promedios de correlación de todas las especies, la cual se muestra en el último renglón de la tabla. Comparando los resultados de las medias, se puede ver como la metodología 2 (M2) tiene una media de correlaciones más baja que la metodología 1 (M1). Estos resultados indican que la metodología 2 tiene una mejor capacidad de discriminación que la metodología 1, ya que al realizar una correlación entre dos imágenes diferentes, se desea que el valor de correlación sea lo más bajo posible, al contrario que en el caso de correlación de una imagen consigo misma (autocorrelación), en donde se desea tener el valor más alto.

Tabla 12. Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 2 utilizando una máscara y correlación no lineal, para el patrón P0.

Especie Diatomea	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
A	1	0.13	0.1	0.34	0.04	0.37	0.14	0.29	0.11	0.26	0.15	0.24	0.26	0.16	0.08	0.22	0.16	0.43	0.51	0.51	0.07
B	0.15	1	0.17	0.2	0.09	0.03	0.06	0.1	0.01	0.16	0.04	0.06	0.19	0.07	0.01	0.05	0.03	0.47	0.11	0.26	0.02
C	0.04	0.12	1	0.07	0.04	0.02	0.03	0.08	0	0.09	0.02	0.02	0.54	0.01	0	0	0.03	0.07	0.07	0.06	0.01
D	0.2	0.33	0.07	1	0.03	0.05	0.17	0.12	0.06	0.07	0.03	0.05	0.19	0.05	0.01	0.09	0.08	0.41	0.47	0.17	0.05
E	0.08	0.07	0.07	0.04	1	0.06	0.03	0.3	0.01	0.03	0.03	0.04	0.07	0.02	0.01	0.03	0	0.23	0.07	0.13	0.13
F	0.19	0.02	0.06	0.14	0.08	1	0.04	0.37	0.12	0.09	0.15	0.01	0.09	0.05	0	0.16	0.16	0.11	0.31	0.1	0.04
G	0.1	0.07	0.09	0.16	0.01	0.05	1	0.11	0.03	0.02	0.03	0.04	0.09	0.02	0.01	0.02	0.03	0.23	0.12	0.1	0.09
H	0.23	0.15	0.19	0.1	0.29	0.2	0.17	1	0.03	0.12	0.06	0.02	0.18	0.1	0	0.09	0.03	0.52	0.19	0.12	0.27
I	0.07	0.02	0	0.04	0	0.09	0	0.03	1	0.18	0.51	0.08	0	0.08	0.03	0.3	0.2	0.03	0.29	0.06	0
J	0.09	0.04	0.03	0.01	0	0.04	0	0.05	0.26	1	0.56	0.11	0.01	0.03	0.03	0.19	0.4	0.12	0.32	0.09	0
K	0.09	0.02	0	0.02	0	0.04	0	0.02	0.34	0.19	1	0.13	0	0.07	0.02	0.53	0.34	0.02	0.28	0.12	0
L	0.61	0.11	0.09	0.09	0.05	0.18	0.05	0.23	0.04	0.2	0.23	1	0.17	0.2	0.12	0.15	0.1	0.34	0.31	0.85	0.03
M	0.14	0.23	0.61	0.19	0.02	0.02	0.04	0.11	0.01	0.14	0.06	0.04	1	0.09	0.01	0.04	0.07	0.09	0.16	0.12	0.02
N	0.41	0.07	0.03	0.1	0	0.03	0.01	0.11	0.03	0.12	0.25	0.14	0.15	1	0.1	0.25	0.19	0.13	0.39	0.35	0.01
O	0.09	0.02	0.01	0.02	0	0.05	0	0.02	0.02	0.16	0.11	0.06	0.01	0.12	1	0.14	0.18	0.07	0.07	0.09	0
P	0.19	0.04	0.01	0.11	0	0.14	0	0.04	0.21	0.26	0.65	0.19	0.01	0.32	0.14	1	0.37	0.08	0.37	0.21	0.01
Q	0.22	0.04	0.06	0.05	0	0.07	0	0.06	0.11	0.46	0.45	0.17	0.03	0.06	0.04	0.32	1	0.13	0.32	0.18	0
R	0.46	0.4	0.15	0.28	0.11	0.14	0.09	0.39	0.04	0.22	0.11	0.18	0.24	0.26	0.08	0.21	0.07	1	0.39	0.49	0.16
S	0.6	0.16	0.06	0.56	0.03	0.35	0.07	0.13	0.14	0.23	0.16	0.2	0.2	0.21	0.03	0.23	0.31	0.33	1	0.41	0.04
T	0.44	0.15	0.12	0.12	0.05	0.21	0.06	0.29	0.04	0.19	0.26	0.72	0.17	0.23	0.08	0.15	0.13	0.54	0.44	1	0.05
U	0.06	0.02	0.06	0.02	0.04	0.03	0.04	0.24	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02	0	0.02	0	0.07	0.06	0.03	1

Si comparamos los resultados de la media de autocorrelaciones de la tabla 11 y los resultados de la media de correlaciones de la tabla 15 se puede ver que el intervalo entre los valores de autocorrelación y correlación para la metodología 2 es más grande que para la metodología 1.

Tabla 13. Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 2 utilizando una máscara y correlación no lineal, para el patrón P1.

Especie Diatomea	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	
A	0.932	0.128	0.086	0.339	0.061	0.4	0.149	0.309	0.137	0.23	0.143	0.194	0.241	0.149	0.066	0.214	0.134	0.39	0.467	0.415	0.079	
B	0.174	0.923	0.205	0.234	0.081	0.036	0.074	0.105	0.022	0.185	0.052	0.055	0.206	0.078	0.019	0.065	0.042	0.446	0.121	0.226	0.032	
C	0.037	0.12	0.976	0.088	0.042	0.021	0.027	0.056	0.005	0.09	0.019	0.024	0.629	0.012	0.005	0.005	0.035	0.051	0.079	0.055	0.011	
D	0.25	0.348	0.069	0.989	0.033	0.066	0.177	0.126	0.071	0.087	0.037	0.058	0.193	0.067	0.016	0.118	0.092	0.432	0.507	0.198	0.06	
E	0.071	0.063	0.069	0.04	0.971	0.061	0.037	0.306	0.012	0.032	0.03	0.026	0.064	0.022	0.007	0.035	0.008	0.235	0.064	0.102	0.148	
F	0.202	0.03	0.07	0.156	0.094	0.986	0.05	0.412	0.129	0.102	0.158	0.019	0.088	0.053	0.005	0.167	0.154	0.137	0.313	0.109	0.044	
G	0.084	0.055	0.084	0.142	0.021	0.052	0.966	0.115	0.036	0.027	0.029	0.04	0.084	0.021	0.01	0.027	0.032	0.234	0.069	0.093	0.106	
H	0.217	0.151	0.218	0.124	0.295	0.174	0.173	0.985	0.036	0.111	0.055	0.024	0.195	0.093	0.008	0.08	0.033	0.482	0.184	0.115	0.307	
I	0.094	0.032	0.006	0.068	0.007	0.128	0.005	0.051	0.94	0.229	0.547	0.081	0.011	0.099	0.039	0.379	0.228	0.037	0.326	0.086	0.007	
J	0.08	0.055	0.033	0.022	0.002	0.064	0.003	0.058	0.278	0.921	0.57	0.041	0.009	0.037	0.024	0.151	0.386	0.154	0.322	0.094	0.005	
K	0.083	0.028	0.009	0.041	0.001	0.058	0.002	0.03	0.349	0.271	0.978	0.168	0.005	0.065	0.016	0.552	0.366	0.029	0.322	0.124	0.002	
L	0.598	0.125	0.113	0.096	0.085	0.192	0.028	0.042	0.181	0.209	0.972	0.178	0.176	0.091	0.138	0.092	0.138	0.092	0.394	0.32	0.846	0.049
M	0.118	0.21	0.587	0.193	0.027	0.019	0.047	0.119	0.016	0.128	0.063	0.047	0.994	0.099	0.013	0.04	0.067	0.06	0.152	0.117	0.024	
N	0.407	0.08	0.028	0.096	0.01	0.049	0.018	0.094	0.054	0.163	0.316	0.171	0.119	0.926	0.1	0.335	0.205	0.117	0.423	0.347	0.015	
O	0.114	0.037	0.016	0.025	0.005	0.077	0.003	0.035	0.038	0.202	0.124	0.074	0.02	0.136	0.975	0.19	0.23	0.078	0.103	0.117	0.007	
P	0.15	0.037	0.009	0.094	0.009	0.141	0.007	0.043	0.249	0.253	0.686	0.139	0.015	0.243	0.102	0.982	0.366	0.067	0.315	0.183	0.015	
Q	0.193	0.036	0.056	0.032	0.003	0.072	0.004	0.066	0.17	0.542	0.488	0.136	0.026	0.046	0.046	0.298	0.945	0.115	0.325	0.162	0.004	
R	0.458	0.425	0.161	0.356	0.12	0.139	0.109	0.407	0.054	0.213	0.104	0.171	0.251	0.241	0.077	0.215	0.077	0.97	0.398	0.429	0.158	
S	0.663	0.165	0.059	0.524	0.035	0.344	0.068	0.173	0.152	0.237	0.185	0.245	0.201	0.239	0.045	0.248	0.306	0.324	0.96	0.47	0.049	
T	0.482	0.178	0.135	0.167	0.061	0.243	0.086	0.313	0.07	0.195	0.259	0.673	0.192	0.196	0.059	0.17	0.152	0.593	0.489	0.954	0.071	
U	0.085	0.025	0.075	0.032	0.05	0.033	0.052	0.285	0.015	0.021	0.026	0.016	0.025	0.026	0.007	0.027	0.008	0.085	0.071	0.034	0.98	

Tabla 14. Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 1 utilizando una máscara y correlación no lineal, para el patrón P1.

Especie Diatomea	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
A	0.873	0.847	0.754	0.755	0.598	0.209	0.571	0.329	0.62	0.708	0.768	0.717	0.24	0.719	0.816	0.484	0.732	0.912	0.811	0.753	0.343
B	0.661	0.948	0.765	0.78	0.621	0.22	0.56	0.224	0.426	0.595	0.527	0.739	0.476	0.734	0.843	0.311	0.706	0.503	0.708	0.771	0.274
C	0.665	0.812	0.902	0.807	0.505	0.193	0.625	0.241	0.433	0.579	0.425	0.727	0.683	0.59	0.795	0.142	0.639	0.249	0.367	0.648	0.221
D	0.466	0.747	0.541	0.996	0.655	0.316	0.748	0.381	0.405	0.5	0.33	0.429	0.344	0.711	0.661	0.273	0.519	0.542	0.763	0.548	0.366
E	0.189	0.446	0.266	0.448	0.93	0.428	0.526	0.628	0.331	0.306	0.215	0.226	0.106	0.506	0.363	0.095	0.367	0.404	0.293	0.361	0.386
F	0.05	0.147	0.117	0.311	0.545	0.977	0.365	0.668	0.163	0.094	0.164	0.06	0.098	0.192	0.176	0.203	0.15	0.246	0.237	0.117	0.245
G	0.122	0.328	0.395	0.731	0.307	0.437	0.999	0.491	0.213	0.245	0.167	0.099	0.386	0.391	0.306	0.161	0.382	0.226	0.309	0.192	0.349
H	0.053	0.151	0.149	0.499	0.346	0.667	0.599	0.989	0.177	0.184	0.125	0.062	0.158	0.249	0.209	0.123	0.251	0.275	0.19	0.148	0.524
I	0.758	0.695	0.533	0.599	0.509	0.202	0.361	0.302	0.886	0.663	0.864	0.585	0.135	0.732	0.756	0.767	0.772	0.53	0.567	0.663	0.197
J	0.504	0.531	0.446	0.61	0.564	0.383	0.449	0.286	0.522	0.768	0.753	0.675	0.262	0.327	0.667	0.749	0.647	0.512	0.255	0.717	0.147
K	0.68	0.633	0.49	0.689	0.438	0.202	0.329	0.22	0.722	0.727	0.97	0.78	0.226	0.54	0.681	0.804	0.728	0.493	0.391	0.804	0.077
L	0.756	0.904	0.781	0.766	0.638	0.219	0.496	0.176	0.62	0.733	0.689	0.945	0.31	0.664	0.896	0.349	0.811	0.725	0.751	0.869	0.337
M	0.379	0.729	0.625	0.641	0.35	0.292	0.611	0.152	0.281	0.442	0.336	0.559	0.984	0.585	0.559	0.216	0.464	0.22	0.308	0.457	0.259
N	0.553	0.63	0.381	0.612	0.581	0.292	0.575	0.216	0.446	0.686	0.681	0.719	0.381	0.897	0.755	0.761	0.575	0.512	0.659	0.752	0.197
O	0.584	0.665	0.387	0.32	0.432	0.211	0.232	0.161	0.405	0.69	0.317	0.647	0.263	0.497	0.951	0.515	0.64	0.458	0.312	0.779	0.126
P	0.476	0.563	0.346	0.629	0.73	0.365	0.361	0.322	0.438	0.643	0.622	0.495	0.242	0.565	0.578	0.951	0.554	0.623	0.512	0.611	0.157
Q	0.597	0.566	0.47	0.604	0.427	0.291	0.401	0.237	0.515	0.834	0.599	0.605	0.366	0.483	0.673	0.72	0.916	0.423	0.382	0.759	0.134
R	0.673	0.84	0.667	0.898	0.728	0.323	0.617	0.398	0.523	0.701	0.688	0.762	0.303	0.804	0.819	0.408	0.716	0.945	0.765	0.82	0.408
S	0.809	0.859	0.792	0.902	0.59	0.233	0.553	0.284	0.673	0.739	0.66	0.814	0.298	0.831	0.9	0.621	0.808	0.812	0.996	0.796	0.307
T	0.718	0.831	0.651	0.848	0.659	0.248	0.568	0.21	0.574	0.769	0.677	0.885	0.32	0.645	0.841	0.446	0.806	0.775	0.802	0.927	0.365
U	0.088	0.293	0.235	0.46	0.188	0.277	0.529	0.574	0.243	0.217	0.109	0.085	0.169	0.281	0.274	0.102	0.324	0.123	0.25	0.167	0.947

En la figura 54 se muestra los resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 1 para el caso en que no hay variaciones de iluminación, figura 54a y para cuando se utiliza

el patrón P7, figura 54b. Se puede ver en la figura 54a que los valores iguales a uno se observan en diagonal, los cuales corresponden al caso de la autocorrelación de cada especie. Sin embargo, en la figura 54b, se puede ver que en esa misma diagonal, hay valores inferiores a 1, lo que implica que el patrón de iluminación 7 está afectando el reconocimiento de la especie.

En la figura 55 se muestran los resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas para la metodología 2, para el caso en que no hay variaciones de iluminación, (patrón P0) figura 55a y para cuando se utiliza el patrón P7, figura 55b. Al igual que en la metodología 1, la figura 55a muestra valores de 1 en diagonal, correspondientes a la autocorrelación de las especies sin efectos en la iluminación y la figura 55b muestra disminución de esos valores de autocorrelación al variar la iluminación.

Los resultados de las figuras 54b y 55b, muestran que al usar un patrón de iluminación no homogénea, puede llegar a haber traslape entre los resultados correspondientes a la correlación de una especie consigo misma y los resultados al correlacionarse con otra especie. Por lo tanto, el siguiente paso fue calcular el número de traslapes para cada especie como referencia, con cada metodología y cada uno de los diferentes patrones de iluminación y dividirlos entre el número total de imágenes procesadas para calcular así el porcentaje de discriminación para cada metodología con respecto a imágenes afectadas por iluminación no homogénea y observar que tanto afectan los cambios de iluminación a cada método.

Los resultados del porcentaje de discriminación para cada metodología se muestran en la tabla 16. En cada columna se presentan los resultados de cada patrón de iluminación (P0-P8) correspondiente a cada metodología (M1 y M2). En cada renglón se muestra el porcentaje de discriminación para cada patrón y metodología con respecto a cada especie de diatomea. Se puede ver que para algunos patrones de iluminación, las metodologías no llegan al 100% para algunas especies. En el último renglón se muestra la media de los porcentajes de discriminación obtenida al considerar los porcentajes para cada especie.

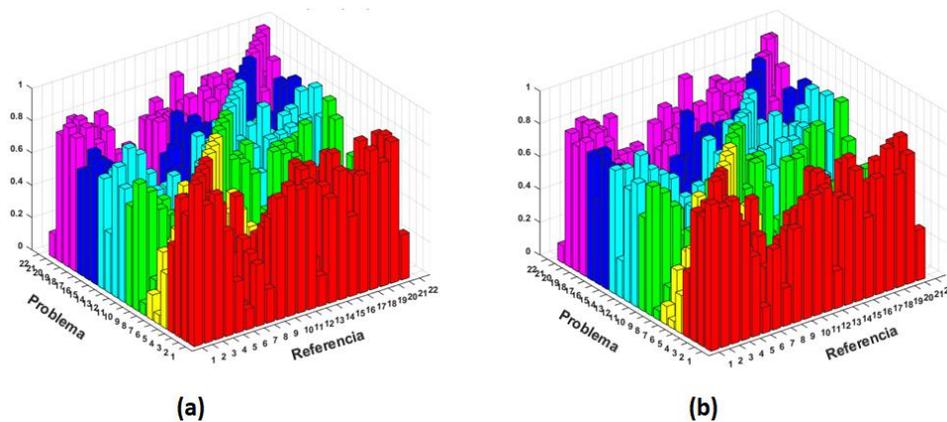


Figura 54. Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas utilizando la metodología 1. (a) Patrón P0. (b) Patrón P7.

Tabla 15. Promedio de correlación de cada metodología para cada patrón de iluminación y cada especie de diatomea. M1: metodología1. M2: metodología 2.

Especie	M1	M2																
	P0	P0	P1	P1	P2	P2	P3	P3	P4	P4	P5	P5	P6	P6	P7	P7	P8	P8
A	0.48	0.22	0.49	0.24	0.38	0.22	0.4	0.24	0.41	0.24	0.41	0.24	0.53	0.17	0.44	0.33	0.57	0.22
B	0.61	0.11	0.6	0.11	0.52	0.11	0.52	0.11	0.56	0.11	0.55	0.11	0.62	0.1	0.53	0.1	0.66	0.11
C	0.49	0.1	0.48	0.1	0.42	0.1	0.4	0.1	0.43	0.09	0.44	0.1	0.54	0.09	0.33	0.09	0.55	0.1
D	0.64	0.14	0.63	0.14	0.63	0.14	0.62	0.15	0.66	0.14	0.64	0.14	0.55	0.12	0.57	0.14	0.62	0.13
E	0.52	0.05	0.5	0.04	0.55	0.05	0.53	0.04	0.59	0.06	0.57	0.05	0.42	0.04	0.32	0.04	0.41	0.04
F	0.3	0.11	0.29	0.12	0.36	0.12	0.35	0.13	0.36	0.14	0.34	0.12	0.23	0.09	0.26	0.14	0.23	0.11
G	0.5	0.05	0.49	0.05	0.5	0.06	0.5	0.05	0.53	0.06	0.53	0.05	0.41	0.04	0.42	0.06	0.44	0.05
H	0.32	0.17	0.32	0.16	0.36	0.17	0.35	0.16	0.36	0.17	0.35	0.17	0.25	0.11	0.22	0.25	0.27	0.15
I	0.43	0.09	0.44	0.09	0.36	0.1	0.36	0.09	0.38	0.09	0.37	0.09	0.45	0.06	0.45	0.1	0.52	0.08
J	0.55	0.17	0.55	0.18	0.48	0.17	0.47	0.19	0.5	0.17	0.51	0.19	0.53	0.13	0.59	0.19	0.6	0.16
K	0.48	0.2	0.49	0.19	0.43	0.21	0.44	0.19	0.45	0.2	0.44	0.2	0.47	0.17	0.41	0.2	0.51	0.19
L	0.53	0.12	0.53	0.12	0.44	0.11	0.45	0.12	0.45	0.11	0.45	0.11	0.54	0.11	0.47	0.12	0.59	0.13
M	0.28	0.13	0.28	0.14	0.27	0.12	0.3	0.14	0.28	0.11	0.31	0.13	0.23	0.11	0.21	0.14	0.25	0.13
N	0.55	0.1	0.55	0.11	0.5	0.1	0.5	0.12	0.53	0.12	0.52	0.1	0.53	0.08	0.36	0.18	0.56	0.11
O	0.62	0.03	0.63	0.04	0.55	0.03	0.55	0.04	0.58	0.03	0.58	0.03	0.6	0.04	0.61	0.04	0.66	0.04
P	0.41	0.17	0.41	0.17	0.4	0.17	0.4	0.18	0.41	0.17	0.4	0.17	0.38	0.14	0.34	0.18	0.4	0.16
Q	0.58	0.15	0.57	0.15	0.51	0.15	0.49	0.16	0.53	0.15	0.53	0.15	0.56	0.13	0.57	0.15	0.62	0.15
R	0.47	0.22	0.48	0.22	0.45	0.22	0.45	0.23	0.49	0.23	0.47	0.22	0.43	0.17	0.4	0.28	0.47	0.22
S	0.48	0.26	0.46	0.28	0.44	0.27	0.42	0.29	0.47	0.29	0.44	0.27	0.43	0.2	0.44	0.34	0.5	0.26
T	0.58	0.21	0.59	0.22	0.5	0.21	0.5	0.21	0.52	0.22	0.52	0.21	0.59	0.18	0.57	0.28	0.66	0.22
U	0.27	0.06	0.26	0.05	0.28	0.06	0.27	0.05	0.31	0.06	0.29	0.06	0.21	0.04	0.25	0.08	0.24	0.05
Media	0.48	0.14	0.48	0.14	0.44	0.14	0.44	0.14	0.47	0.14	0.46	0.14	0.45	0.11	0.42	0.16	0.49	0.13

Se puede ver que cuando no se tienen variaciones de iluminación, patrón P0, se tiene una discriminación al 100% de las especies, sin embargo, para la metodología 1 se observa una alteración en los porcentajes para los patrones de iluminación no homogénea (P1-P8), lo cual no sucede en la metodología 2, en la cual se mantiene el 100% de discriminación.

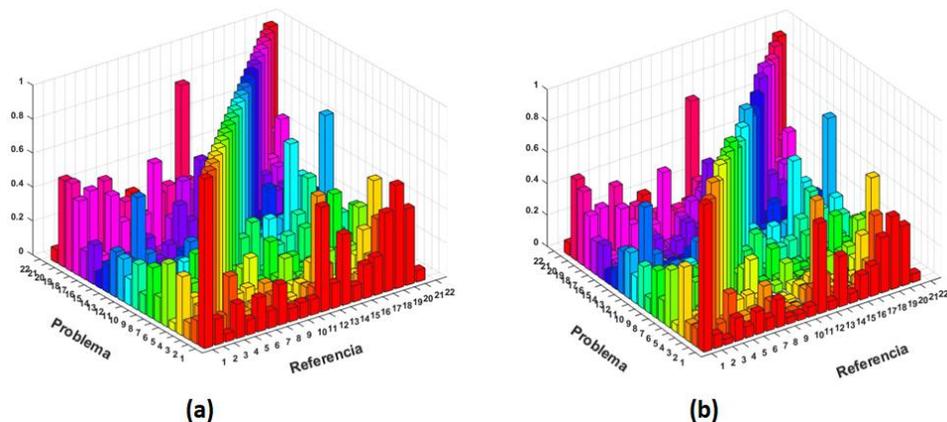


Figura 55. Resultados de correlación entre las 21 especies de diatomeas utilizando la metodología 2. (a) Patrón P0. (b) Patrón P7.

Tabla 16. Porcentaje de discriminación de cada metodología para cada patrón de iluminación y cada especie de diatomea. M1: metodología 1. M2: metodología 2.

Especie	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
	P0	P0	P1	P1	P2	P2	P3	P3	P4	P4	P5	P5	P6	P6	P7	P7	P8	P8
A	100	100	100	100	95.23	100	95.23	100	90.47	100	95.23	100	95.23	100	100	100	100	100
B	100	100	100	100	100	100	95.23	100	100	100	95.23	100	100	100	100	100	100	100
C	100	100	100	100	100	100	95.23	100	100	100	100	100	95.23	100	100	100	100	100
D	100	100	100	100	100	100	85.71	100	95.23	100	100	100	100	100	100	100	85.71	100
E	100	100	100	100	100	100	80.95	100	100	100	100	100	100	100	100	100	80.95	100
F	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
G	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
H	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
I	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	95.23	100	100	100	100	100	100	100
J	100	100	90.47	100	100	100	90.47	100	100	100	100	100	90.47	100	100	100	100	100
K	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
L	100	100	100	100	95.23	100	95.23	100	71.42	100	85.71	100	95.23	100	95.23	100	85.71	100
M	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
N	100	100	100	100	100	100	95.23	100	95.23	100	100	100	95.23	100	100	100	95.23	100
O	100	100	100	100	100	100	90.47	100	100	100	100	100	80.95	100	100	100	100	100
P	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	95.23	100	100	100	100	100
Q	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
R	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	95.23	100	100	100	100	100
S	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	85.71	100	100	100	100	100	100	100
T	100	100	100	100	100	100	95.23	100	100	100	95.23	100	95.23	100	100	100	90.47	100
U	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Media	100	100	99.54	100	99.54	100	96.14	100	97.73	100	97.73	100	97.05	100	99.77	100	97.05	100

Capítulo 5. Conclusiones

El presente trabajo cumplió con los objetivos trazados en esta tesis, ya que se lograron desarrollar dos maneras diferentes de obtener máscaras binarias utilizando la transformada fraccional de Fourier, para la generación de firmas representativas de las imágenes procesadas, invariante a posición y rotación

La utilización de la transformada fraccional de Fourier, permitió trabajar en planos diferentes al plano de Fourier al variar el ángulo u orden de la transformada fraccional, encontrando un ángulo óptimo en el cual se obtuvieron valores de autocorrelación de firmas más altos que al trabajar con firmas generadas a partir de la transformada de Fourier convencional, lo que permitió un incremento en la identificación de una especie con ambas metodologías.

Los resultados mostraron que aunque no existe un ángulo óptimo de la transformada fraccional de Fourier general para toda imagen de referencia, si existe un ángulo óptimo en particular para cada imagen de referencia y para cada una de las máscaras generadas en cada metodología, esto es, existen cuatro ángulos óptimos para una imagen de referencia en cada método. El tener ángulos óptimos diferentes para cada imagen de referencia es un resultado mejor que el haber tenido un ángulo óptimo en general para todas las imágenes, ya que si deseamos identificar una especie en particular, el proceso se realiza trabajando con los ángulos óptimos correspondientes a la especie de nuestro interés, dándole así ventaja sobre imágenes problema de otras especies para las cuales los ángulos óptimos son diferentes, incrementando así la capacidad de identificación de dicha especie.

Para ambas metodologías se implementaron correlaciones no lineal y no lineal adaptativa para la identificación de treinta imágenes especies de fitoplancton, las cuales no fueron pre-procesadas, por lo que dichas imágenes contienen ruido y variaciones de iluminación. Posteriormente estas imágenes fueron rotadas 360° , para probar la invariancia a rotación de ambas metodologías, para el caso en que se usa una máscara, o bien máscaras adaptativas para los dos tipos de correlación. Los resultados mostraron una variación del porcentaje de discriminación para cada método utilizado, variando también para correlaciones no lineal y no lineal adaptativa, así como para una máscara o bien, máscaras adaptativas. Para ambos métodos la utilización de máscaras adaptativas fue la mejor opción para ambos tipos de correlación.

Para el caso de imágenes con fragmento de información, ninguna de las metodologías resultó adecuada.

Aun cuando la metodología 2 obtuvo mejores resultados, sus resultados son inferiores a los reportados por Barajas-García et al. (2016). Sin embargo, a pesar de esta debilidad, ambas metodologías tienen mejor desempeño con imágenes completas, logrando una capacidad de discriminación del cien por ciento para cada imagen de referencia aun tomando en consideración los valores extremos de los resultados para el caso en que se utilizan máscaras para ambos tipos de correlación, lo cual es un porcentaje de discriminación no obtenido antes por algún otro algoritmo de reconocimiento.

También se pudo observar que para imágenes afectadas por ruido la metodología 2 tiene mejor desempeño para ruido gaussiano. En cuanto al ruido sal y pimienta ambas metodologías tienen casi el mismo desempeño. Además, se pudo observar que para el caso de variaciones de iluminación, de nueva cuenta la metodología 2 tuvo un mejor rendimiento, obteniendo valores de autocorrelación más altos, valores de correlación más bajos y una mayor capacidad de discriminación que la metodología 1.

En general, las dos metodologías presentadas en este trabajo basadas en la transformada fraccional de Fourier, mostraron que trabajando fuera del plano de Fourier pueden mejorarse los resultados de correlación de firmas dependiendo de la imagen en particular, lo cual incrementa la capacidad de identificación de un sistema.

Literatura citada

- Alieva, T.; Lopez, V.; Agullo-Lopez, F.; Almeida, L.B. J. Mod. Opt. 1994. The Fractional Fourier Transform in Optical Propagation Problems. *Journal of Modern Optics*, 41 (5), 1037–1044.
- Almeida, L.B. 1994. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42 (11), 3084–3091.
- Álvarez-Borrego, J., Solorza Calderón, S., Bueno-Ibarra, M. A. 2013. Invariant correlation to position and rotation using a binary mask applied to binary and gray images. *Optics Communications*, 294, 105–117.
- Asselin, D., Arsenault, H. H. and Prévost, D. 1994. Optical circular sampling system for translation and rotation invariant pattern recognition. *Optics Communications*, 110, 507–513.
- Barajas-García, C.; Solorza-Calderón, S.; Álvarez-Borrego, J. 2016. Classification of fragments of objects by the Fourier masks pattern recognition system. *Optics. Communications*, 367, 335–345.
- Bargmann, V. Comm. 1961. On a Hilbert Space of Analytic Functions and Associated Integral Transform. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14 (3), 187–214.
- Bracewell, R.N., 2000. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw Hill, New York.
- Brigham, E. O., 1988. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey,
- Cai, Y.J.; Wang, F. 2006. Lensless optical implementation of the coincidence fractional Fourier transform. *Optics Letters*, 31 (15), 2278–2280.
- Condon, E.U. 1937. Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transformations. *Proceedings of the National Academy of Science. U. S. A*, 23 (3), 159–164.
- De Bruijn, N.G. 1973. A Theory of generalized functions, with applications to Wigner distribution and Weyl correspondance. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 21, 205–280.
- Erden, M.F. 1997. Repeated Filtering in Consecutive Fractional Fourier Domains. Tesis de doctorado en Ciencias. Bilkent University.
- Esperanza-Álvarez, M.A. 1999. Variabilidad de la comunidad de diatomeas en los sedimentos de la cuenca de San Lázaro, Baja California Sur (Diatom Community Variability in the Sediments of the San Lázaro Basin, Baja California Sur. Mexico). Tesis de Maestría en Ciencias. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Fimbres-Castro, C.; Álvarez-Borrego, J.; Bueno-Ibarra, M. A. 2012. Invariant nonlinear correlation and spectral index for diatoms recognition. *Optical Engineering*, 51 (4), 047201.
- Fimbres-Castro, C.; Álvarez-Borrego, J.; Vázquez-Martínez, I.; Espinoza-Carreón, T.L.; Ulloa-Perez, A.E.; Bueno-Ibarra, M. A. 2013. Nonlinear correlation by using identity vectors signatures to identify plankton. *Gayana*, 77 (2), 105–124.

- George, N., Thomasson, J. T. and Spendel A. 1972. Photodetector light pattern detector. US patent, 3,689,772.
- Goodman J. W. 2005. Introduction to Fourier Optics. (3rd ed.) Roberts and Company Publishers, Greenwood Village, Colorado.
- Granieri, S.; Trabocchi, O.; Sicre, E.E.1995. Fractional Fourier transform applied to spatial filtering in the Fresnel domain. *Optics Communications*, 119 (3–4), 275–278.
- Hajós, M. (1976). Upper eocene and lower oligocene diatomaceae, archaemonadaceae and silicoflagellates in southwestern pacific sediments. *DSSP, leg, 29*, 817-883.
- Horner, J. L., Gianino, P. D. 1984. Phase-only matched filtering. *Applied optics*, 23(6), 812-816.
- Jain, A. K., and Feng, J. 2011. Latent fingerprint matching. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33(1), 88-100.
- Javidi, B. (2002). Image recognition and classification algorithms, systems, and applications. New York, NY, Marcel Dekker.
- Javidi, B., Horner, J. L. 1994. Real-time optical information processing. Academic Press, San Diego.
- Kasdan, H. L. 1979. Industrial applications of diffraction pattern sampling. *Optical Engineering*, 18(5), 185496-185496.
- Kruger, R. P., Thompson, W. B., Turner, A. F. 1974. Computer diagnosis of pneumoconiosis. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 4(1), 40-49.
- Kumar, B. V. K., y Hassebrook, L. 1990. Performance measures for correlation filters. *Applied optics*, 29(20), 2997-3006.
- Kutay, M.A.; Ozaktas, H.M. J. 1998. Optimal image restoration with the fractional Fourier transform. *Journal of the Optical Society of America A*, 15 (4), 825–833.
- Lendaris, G. G. and Stanley, G. L. 1970. Diffraction-pattern sampling for automatic pattern recognition. *Proceedings of the IEEE*, 58(2), 198-216.
- Lohmann, A.W. J. 1993. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *Journal of the Optical Society America A*, 10 (10), 2181–2186.
- López-Ávila, L.F. 2017. Correlación bidimensional para el reconocimiento de objetos mediante la transformada fraccional de Fourier (Bidimensional Correlation to Recognize Objects using the Fractional Fourier Transform). Tesis de Maestría en Ciencias. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.
- Lu, D.; Hu, W.; Zheng, Y.; Liang, Y.; Cao, L.; Lan, S.; Guo, Q. 2008. Self-induced fractional Fourier transform and revivable higher-order spatial solitons in strongly nonlocal nonlinear media . *Physical Review A*, 78 (4), 043815.

- McBride, A.C.; Kerr, F.H. 1987. On Namias's fractional Fourier transform. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 39(2), 159-175.
- Mendlovic, D.; Dorsch, R.G.; Lohmann, A.W.; Bitran, Y. J. 1995. Optical fractional correlation: experimental results. *Journal of the Optical Society of America A*, 12 (8), 1665–1670.
- Mendlovic, D.; Ozaktas, H.M. J. 1993. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I. *Journal of the Optical Society of America A*, 10 (9), 1875–1881.
- Mendlovic, D.; Ozaktas, H.M. J. 1993. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: II. *Journal of the Optical Society of America A*, 10 (12), 2522–2531.
- Mendlovic, D.; Ozaktas, H.M.; Lohmann, A.W. 1995. Fractional correlation. *Applied Optics*, 34 (2), 303–309.
- Namias, V.J. 1980. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25 (3), 241–265.
- Ozaktas, H.M.; Kutay, M.A.; Mendlovic, D. 1999. Introduction to the Fractional Fourier Transform and its Applications. En: Hawkes, P.W., (Eds.), *Advances in Imaging and Electron Physics*, Academic Press, New York. pp 239–291.
- Ozaktas, H.M.; Mendlovic, D. J. 1993. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: II. *Journal of the Optical Society of America A*, 10 (12), 2522–2531.
- Ozaktas, H.M.; Mendlovic, D. J. 1995. Fractional Fourier Optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 12 (4), 743–751.
- Ozaktas, H.M.; Mendlovic, D.; Onural, L.; Barshan, B. J. 1994. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms. *Journal of the Optical Society of America A*, 11, 2, 547–559.
- Pellat-Finet, P. 1994. Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform. *Optics Letters*, 19 (18), 1388–1390.
- Sahin, A.; Ozaktas, H.M.; Mendlovic, D. 1995. Optical implementation of the two-dimensional fractional Fourier transform with different orders in the two dimensions. *Optics Communications*, 120 (3–4), 134–138.
- Setälä, T.; Shirai, T.; Friberg, A.T. 2010. Fractional Fourier transform in temporal ghost imaging with classical light. *Physical Review A*, 82 (4), 043813.
- Singh, A.K.; Saxena, R. 2011. Correlation theorem for fractional Fourier transform. *IJSIP*, 3 (2), 31–40.
- Smith, W. S. 1999. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. (2 nd ed.). San Diego Cal, California Technical Publishing.
- Solís-Ventura, A. 2015. Metodología basada en la transformada de escala y técnicas de correlación no lineal con invariancia a distorsiones geométricas e iluminación (A Method Based on the Scale Transform and Nonlinear Correlation Techniques Invariant to Illumination and Geometric

Distortions). Tesis de Doctorado en Ciencias. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.

Solís-Ventura, A.; Álvarez-Borrego, J.; Solorza, S. 2015. Adaptive nonlinear correlation with a binary mask invariant to rotation and scale. *Optics Communications*, 339, 185–193.

Solorza Calderón, S. and Álvarez Borrego, J. (2010). Digital system of invariant correlation to position and rotation. *Optics Communications*, 283(19), 3613-3630.

Solorza, S.; Álvarez-Borrego, J. 2015. Position and rotation-invariant pattern recognition system by binary rings masks. *Journal Modern Optics*, 62 (10), 851–864.

Tant, K.M.; Mulholland, A.J.; Langer, M. 2015. A fractional Fourier transform analysis of the scattering of ultrasonic waves. En: *Processings of the Royal Society A*, Londres, UK, 8 de febrero. 471 (2175). DOI: 10.1098/rspa.2014.0958.

Vander Lugt, A. 1964. Signal detection by complex spatial filtering. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 10(2), 139-145.

Vander Lugt, A. 1968. A review of optical data-processing techniques, *Optica Acta*, 15(1), 1-33.

Wiener, N. J. 1929. Hermitian polynomials and Fourier analysis. *Journal of Mathematics and Physics*, 8, 70–73.