

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación
en Instrumentación y Control**

**Desarrollo de un arreglo de neuronas electrónicas
con aplicaciones en sincronización de sistemas**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Gerardo Gabriel Velasco Equihua

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por

Gerardo Gabriel Velasco Equihua

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Codirector de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Codirector de tesis

M en C. Ricardo Francisco Núñez Pérez

Dra. Mónica Elizabeth Tentori Espinosa



Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Coordinador del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Gerardo Gabriel Velasco Equihua © 2018

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Gerardo Gabriel Velasco Equihua como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Desarrollo de un arreglo de neuronas electrónicas con aplicaciones en sincronización de sistemas

Resumen aprobado por:

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Codirector de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Codirector de tesis

El cerebro humano es un órgano compuesto principalmente por neuronas, las cuales interactúan entre sí a través de sinapsis eléctrica o química. Independientemente del tipo de interconexión, se ha observado que (parte de) las neuronas tienden a sincronizarse. El resultado de dicha sincronía es algunas veces benéfico (p. ej. produce momentos de creatividad e inspiración), pero otras veces es perjudicial para el organismo (p. ej. ataques epilépticos). Por esta razón, es de vital importancia entender los mecanismos y procesos que conducen a la sincronización de neuronas. Esta tesis se enfoca en particular, en el estudio de comportamiento síncrono en neuronas, utilizando modelos matemáticos y circuitos electrónicos que emulan el comportamiento dinámico de una neurona. En la primera parte se presenta un estudio comparativo de los modelos matemáticos más relevantes, que se encuentran en la literatura. De dicho estudio, se concluye que el modelo propuesto por Hindmarsh-Rose (HR) es uno de los más completos, ya que logra reproducir la mayoría de los comportamientos neuronales. Después se describe el diseño y construcción de un circuito electrónico basado en el modelo HR. El circuito se construye utilizando electrónica analógica y se demuestra de manera numérica y experimental que el circuito diseñado puede reproducir exitosamente los comportamientos dinámicos del modelo neuronal HR. Finalmente, la tesis se centra en el estudio analítico, numérico y experimental de la sincronización de un par y una red de circuitos electrónicos HR interconectados a través de acoplamientos dinámicos. La estabilidad del comportamiento síncrono es analizada utilizando la función maestra de estabilidad y los exponentes transversos de Lyapunov. Los resultados que se obtuvieron demuestran que, para ciertas combinaciones de entrada-salida en las neuronas, el número de neuronas que se sincronizan con acoplamientos dinámicos es mayor que el número de neuronas que se sincronizan usando acoplamientos estáticos. En resumen, los resultados de esta tesis proveen un nuevo entendimiento, desde un punto de vista de dinámica y control, sobre el fenómeno de sincronización de neuronas.

Palabras clave: sincronización, neurona electrónica, acoplamiento dinámico

Abstract of the thesis presented by Gerardo Gabriel Velasco Equihua as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Development of an array of electronic neurons with system synchronization applications

Abstract approved by:

Dr. Jonatán Peña Ramírez

Thesis Co-Director

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Thesis Co-Director

The human brain is an organ mainly composed by neurons, which interact to each other through electric or chemical synapses. Independently of the type of interconnection, it has been found that (part of) the neurons have a tendency to synchronize. Sometimes, this synchronous behavior is beneficial (e.g. this behavior is found in the brain in moments of creativity or inspiration). However, the synchronized behavior of neurons may also be detrimental (e.g. in epileptic seizures). Hence, it is of utmost importance to understand the mechanisms or processes that yield to synchronized behavior in neurons. This thesis focuses in the study of synchronization in neurons from a dynamics and control perspective. In particular, the onset of synchronous behavior in neurons is investigated by using mathematical models and electronic circuits, which emulate the dynamic behavior observed in neurons. The first part of the thesis presents a comparative study on the mathematical models available in the literature. From this study, it is concluded that the Hindmarsh-Rose (HR) model is the most complete in the sense that it can reproduce most of the neuronal dynamic behaviors. Then, an electronic circuit, based on the HR model, is designed and constructed by using analog circuits. It is numerically and experimentally demonstrated that the derived circuit can successfully reproduce the dynamic behaviors of the HR model. Finally, the third part of the thesis presents an analytic, numeric, and experimental study related to the synchronization of a pair and a network of electronic neurons HR interconnected via dynamical couplings. The stability of the synchronous solution is investigated by using the Master Stability Function and the largest transverse Lyapunov exponents. The obtained results show that for a certain input-output combinations in the neurons, the number of neurons that can be synchronized with dynamic couplings is larger than the number of neurons that can be synchronized using the traditional static couplings. In summary, the results presented in this thesis provide new understanding, from a dynamics and control perspective, about the synchronization phenomenon observed in neurons.

Keywords: synchronization, electronic neuron, dynamic coupling

Dedicatoria

A mi familia.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por aceptarme como estudiante y por las facilidades que otorga a cada uno de los estudiantes para que logremos tener un mejor desempeño.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 613468

A mis padres y hermanos, por su amor y apoyo incondicional. A mis abuelos que siempre me apoyan y me dan su cariño. A mi familia en general, por su apoyo y compañía.

A mis amigos, por siempre apoyarme, darme ánimos y por acompañarme en buenos y malos momentos.

A mis profesores, por el apoyo que me dieron a lo largo de mis estudios. A mi director de tesis el Dr. Jonatán Peña por su apoyo y por darme la confianza para realizar este trabajo. A los miembros del comité, por su apoyo y comentarios. De igual manera agradezco al Ing. René Torres encargado del taller de electrónica, por el apoyo brindado a lo largo de mi trabajo de tesis.

A mis compañeros y amigos de generación, por darme su apoyo tanto académica como personalmente durante estos años.

Finalmente, gracias a la señora Carmen, que me apoyó con la casa en la que viví durante mis estudios y a todas las personas que me apoyaron directa e indirectamente en la realización de este proyecto.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xi
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Sincronización de neuronas	1
1.2. Estudios de la sincronización neuronal desde una perspectiva de dinámica y control	3
1.3. Panorama general de esta tesis	4
1.3.1. Motivación	4
1.3.2. Hipótesis	5
1.3.3. Objetivo general	5
1.3.4. Objetivos específicos	5
1.3.5. Contribuciones	5
1.3.6. Productos generados	6
1.3.7. Estructura de la tesis	6
Capítulo 2. Preliminares	
2.1. Modelos neuronales clásicos	8
2.1.1. Hodgkin y Huxley	8
2.1.2. Morris-Lecar	10
2.1.3. FitzHugh-Nagumo	12
2.1.4. Izhikevich	13
2.2. El modelo de Hindmarsh-Rose (HR)	14
2.3. Discusión	17
2.4. Propiedades dinámicas del modelo HR	17
2.4.1. Convergencia	17
2.4.2. Semipasividad	19
2.5. Herramientas de análisis de comportamiento síncrono en sistemas dinámicos acoplados	21
2.5.1. Función maestra de estabilidad	22
2.5.2. Análisis de estabilidad	23
2.6. Definición formal de sincronización	25
Capítulo 3. Diseño y construcción de una neurona electrónica	
3.1. Consideraciones de diseño	27
3.2. Circuito electrónico Izhikevich	29
3.2.1. Resultados numéricos	30

Tabla de contenido (continuación)

3.2.2. Resultados experimentales	31
3.3. Circuito electrónico Hindmarsh-Rose	31
3.3.1. Implementación en el simulador Multisim	33
3.3.2. Implementación en tablilla de pruebas	34
3.4. Diseño del circuito impreso (PCB)	35
3.5. Validación experimental de la neurona electrónica	36
Capítulo 4. Sincronización de dos neuronas electrónicas	
4.1. Acoplamiento tipo Huygens	41
4.2. Esquema de sincronización propuesto	42
4.2.1. Análisis de estabilidad	44
4.3. Estudio numérico	44
4.3.1. Análisis para diferentes configuraciones	45
4.3.1.1. Configuración 1-1	45
4.3.1.2. Configuraciones restantes	47
4.4. Resultados experimentales	50
4.5. Discusión	53
Capítulo 5. Sincronización de una red de neuronas electrónicas	
5.1. Función maestra de estabilidad para la sincronización de redes con acoplamientos dinámicos	54
5.1.1. Análisis de estabilidad	55
5.2. Sincronización de una red de neuronas HR utilizando acoplamientos estáticos	58
5.2.1. Análisis de estabilidad	59
5.2.2. Resultados numéricos	60
5.3. Sincronización de una red de neuronas electrónicas HR utilizando acoplamientos dinámicos	62
5.3.1. Análisis de estabilidad	64
5.3.2. Resultados numéricos	66
5.3.3. Resultados experimentales	67
Capítulo 6. Conclusiones	
Literatura citada	73
Anexo	75

Lista de figuras

Figura	Página
1. Medición de potenciales eléctricos en neuronas, A) potencial de neurona receptora, B) potencial de sinapsis, C) potencial de acción. Fuente:(Purves et al., 2004).	2
2. Principales comportamientos eléctricos mostrados por neuronas “spiking” y “bursting”. Fuente:(Purves et al., 2004).	2
3. Método para medir el potencial eléctrico de la membrana de una neurona utilizando microelectrodos, A) electrodos necesarios para medir el potencial de membrana en una neurona (estímulo y medidor), B) señal de estímulo a la neurona (arriba) y potencial de membrana adquirido (abajo). Fuente:(Purves et al., 2004).	3
4. Hodgkin y Huxley, “spiking”.	10
5. Morris-Lecar, “spiking”.	12
6. FitzHugh-Nagumo, “spiking”.	13
7. Izhikevich, “spiking”.	14
8. Izhikevich, “bursting”.	14
9. HR, “spiking”.	15
10. HR, “bursting”.	16
11. HR, “bursting” caótico.	16
12. Sumador integrador utilizando amplificadores operacionales.	27
13. Inversor.	28
14. Circuito para fijar condiciones iniciales.	28
15. Conexión del multiplicador. Fuente (hoja de datos AD734).	29
16. Resultados de la simulación del circuito de Izhikevich “spiking”.	30
17. Resultados de la simulación del circuito de Izhikevich para “bursting”.	30
18. Resultados experimentales circuito Izhikevich.	31
19. Simulación del circuito en Multisim.	33
20. Validación experimental del circuito HR.	34
21. Diseño de la mascarilla del circuito impreso.	35
22. Circuito impreso lado de las pistas.	36
23. Circuito impreso lado de componentes.	36
24. “Spiking” A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.	37
25. Plano de fase (x, y) del circuito de Hindmarsh-Rose en “spiking”. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.	37

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
26. “Bursting” periódico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.	38
27. Plano de fase (x, y) del circuito de Hindmarsh-Rose en “bursting” periódico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.	38
28. “Bursting” caótico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.	39
29. Plano de fase (x, y) del circuito de Hindmarsh-Rose en “bursting” caótico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.	39
30. Dibujo original de Huygens.	41
31. Modelo de Huygens simplificado.	42
32. Diagrama a bloques del esquema de sincronización propuesto.	42
33. Máximo exponente de transverso de Lyapunov λ_{max}^{\perp} para la configuración 1-1. Línea punteada: λ_{max}^{\perp} acoplado con h_1 . Línea sólida: λ_{max}^{\perp} acoplado con h_2	47
34. Neuronas HR sincronizadas en “bursting” caótico, x_1 (azul oscuro), x_2 (azul claro).	51
35. Plano de fase generado por 2 neuronas HR sincronizadas en “bursting” caótico (x_1, x_2)	51
36. Señal h_2 del acoplamiento dinámico para el caso de 2 neuronas HR sincronizadas en “bursting” caótico.	52
37. Señal h_2 del acoplamiento dinámico para el caso que no hay sincronización.	52
38. Plano de fase generado por (x_1, y_2) con ambas neuronas HR sincronizadas.	53
39. $\lambda_i^{\perp max}$ para una red en estrella de 3 neuronas HR con acoplamientos estáticos.	60
40. $\lambda_i^{\perp max}$ para una red en estrella de 4 neuronas HR con acoplamientos estáticos.	60
41. Sincronización de una red en estrella de 3 neuronas HR con acoplamientos estáticos.	61
42. Simulación de una red en estrella de 4 neuronas HR con acoplamientos estáticos. La red no se sincroniza.	62
43. Diagrama de una red en estrella de neuronas HR con acoplamientos dinámicos.	63

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
44. $\lambda_i^{\perp max}$ para una red en estrella de neuronas HR con acoplamientos dinámicos.	65
45. Sincronización de una red en estrella de 10 neuronas HR con acoplamientos dinámicos.	66
46. Conjunto de circuitos de neuronas HR montados en estructura.	67
47. Validación experimental del esquema de sincronización propuesto en laboratorio.	68
48. Señales del estado x de cada neurona con la red sincronizada.	69
49. Señales de error entre neuronas con la red sincronizada.	69
50. Circuito Izhikevich.	75
51. Circuito HR básico.	76
52. Circuito construido en PCB.	77
53. Diagrama eléctrico de la sincronización de 2 sistemas HR con acoplamiento dinámico.	78

Lista de tablas

Tabla	Página
1.	Matrices de acoplamiento para diferentes configuraciones. 48
2.	λ_{max}^\perp para diferentes configuraciones. Línea punteada: h_1 como señal de acoplamiento. Línea sólida: h_2 como señal de acoplamiento. . 49
3.	Planos de fase generados por la red sincronizada. 70
4.	Lista de materiales utilizados en circuito impreso. 79

Capítulo 1. Introducción

El cerebro humano puede verse como “el controlador” de nuestro cuerpo: el cerebro recibe información, la analiza y con base en dicho análisis decide si almacena la información y/o ejecuta una cierta función.

Uno de los componentes clave o esenciales del cerebro son las neuronas. Estudios recientes han revelado que el cerebro humano contiene en promedio 86 billones de neuronas (Frederico *et al.*, 2009). Las neuronas transmiten y reciben información mediante señales eléctricas, llamados potenciales. Algunos de estos potenciales, los cuales se muestran en la figura 1, son: el potencial negativo, potencial de neurona receptora, potencial sináptico y potencial de acción, también llamado “spike”. Además, las neuronas pueden exhibir diferentes estados electrofisiológicos estables. Por ejemplo, las neuronas talamocorticales pueden estar en dos estados electrofisiológicos estables: el de “bursting” y el de “spiking”. En el estado de “bursting”, las neuronas en el tálamo se sincronizan con las de la corteza, mientras que en el estado de “spiking”, las neuronas talamocorticales transmiten información a las neuronas de la corteza con trenes de “spikes” (Purves *et al.*, 2004). Estos estados electrofisiológicos se muestran en la figura 2.

Como se mencionó antes, la forma en la que se miden estos potenciales es utilizando un microelectrodo intracelular (figura 3), lo que dificulta realizar mediciones para realizar estudios o diagnósticos. Debido a esto se han realizado distintos modelos matemáticos que emulan el comportamiento dinámico de las neuronas.

1.1. Sincronización de neuronas

Las neuronas interactúan entre sí a través de descargas eléctricas (sinapsis eléctrica) o mediante un proceso químico (sinapsis química). Sin embargo, independientemente del tipo de interconexión, se ha observado que (parte de) las neuronas tienden a sincronizarse cuando el cerebro ejecuta una cierta tarea. El resultado de dicha sincronía es algunas veces benéfico produciendo momentos de creatividad intensa e inspiración, entre otros (Lom, 2014), (Nummenmaa *et al.*, 2012); pero otras veces es perjudicial para el organismo. Por ejemplo dicha sincronía en el cerebro parece ser causante de ataques epilépticos (Moser *et al.*, 2008).

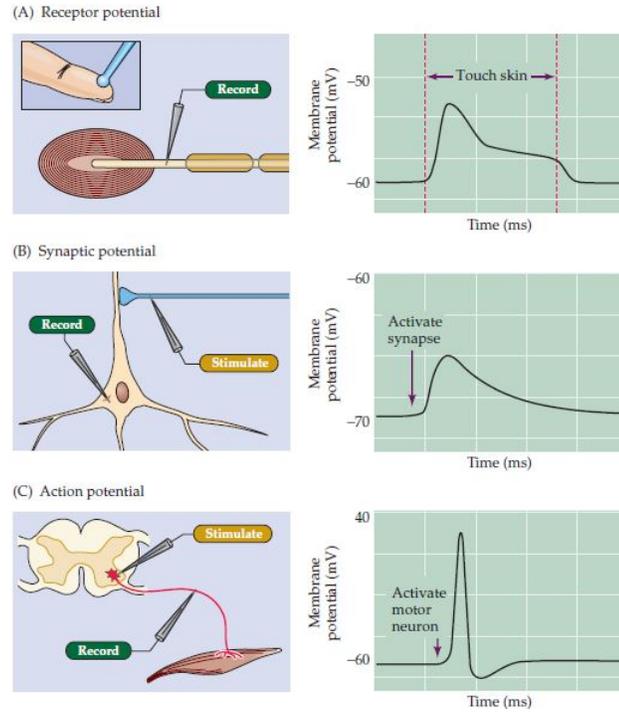


Figura 1. Medición de potenciales eléctricos en neuronas, A) potencial de neurona receptora, B) potencial de sinapsis, C) potencial de acción. Fuente:(Purves et al., 2004).

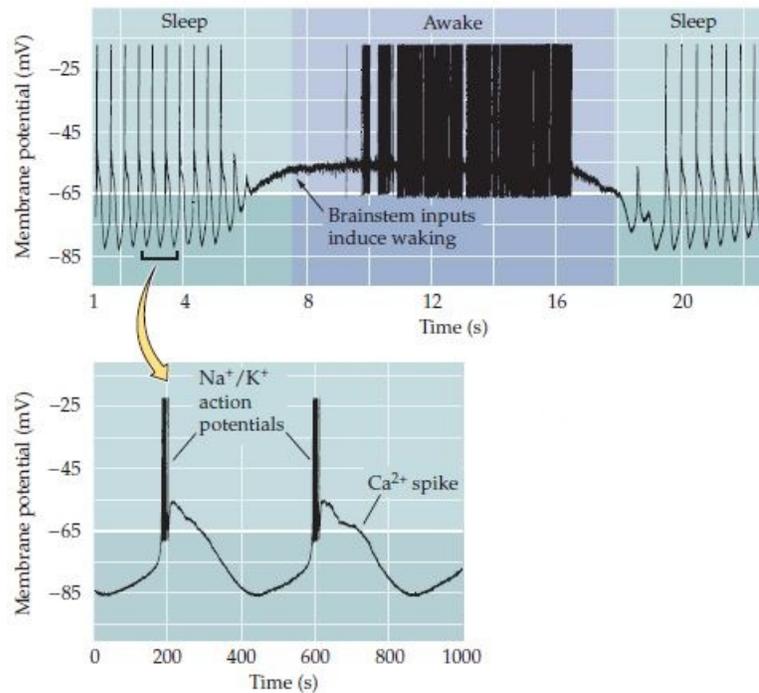


Figura 2. Principales comportamientos eléctricos mostrados por neuronas “spiking” y “bursting”. Fuente:(Purves et al., 2004).

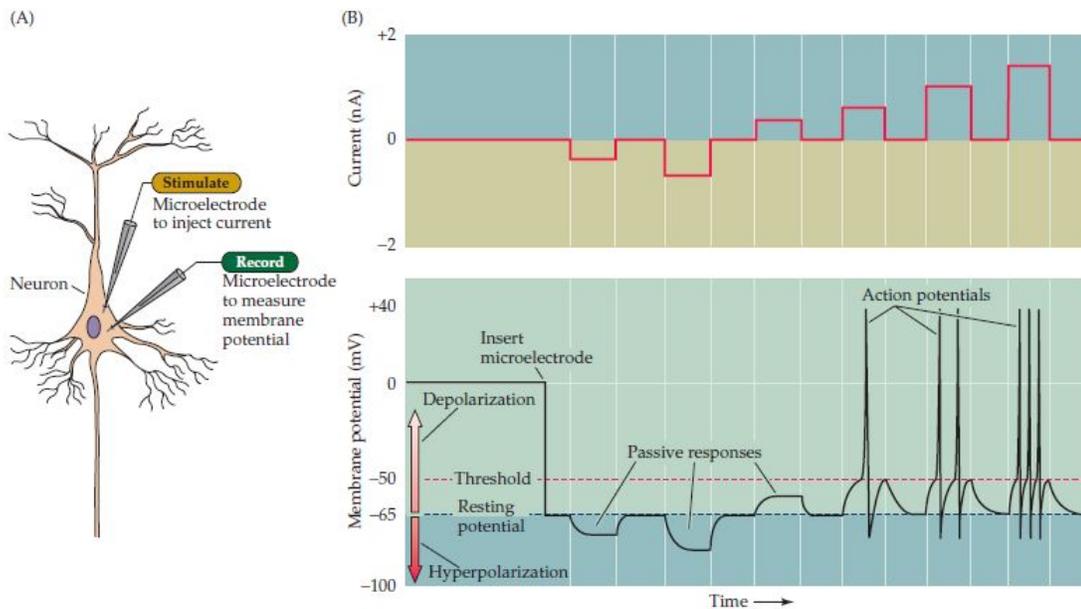


Figura 3. Método para medir el potencial eléctrico de la membrana de una neurona utilizando microelectrodos, A) electrodos necesarios para medir el potencial de membrana en una neurona (estímulo y medidor), B) señal de estímulo a la neurona (arriba) y potencial de membrana adquirido (abajo). Fuente: (Purves et al., 2004).

1.2. Estudios de la sincronización neuronal desde una perspectiva de dinámica y control

Las señales eléctricas que producen las neuronas pueden adquirirse utilizando un electrodo intracelular, tal y como se muestra en la figura 3. Sin embargo, este es un método invasivo y muy delicado, ya que el mínimo error durante su inserción puede ocasionar problemas neurológicos severos. Una alternativa para estudiar el comportamiento neuronal con métodos no invasivos es usar modelos matemáticos.

Con la ayuda de dichos modelos se han realizado varios estudios relativos a la sincronización de neuronas, usando diversos esquemas de sincronización y técnicas de control. Por ejemplo, se han utilizado acoplamientos difusos (Steuer *et al.*, 2009), control adaptivo (Shi *et al.*, 2009), o acoplamientos estáticos unidireccionales (Hrg, 2013), entre otros.

En particular, se han realizado diversos estudios enfocados en la sincronización de redes de neuronas con distintas características. Por ejemplo en (Jalili, 2009) se estudia el comportamiento síncrono de una red tipo Newman-Watts con topología de red con características de red en mundo pequeño, mientras que en (Jia *et al.*, 2011) se presenta un estudio sobre la sincronización de una red de neuronas con retardos en el

acoplamiento. Y recientemente, en (Vromen *et al.*, 2016), se describe un procedimiento adaptivo de entrenamiento para una red de neuronas electrónicas que controlan un robot móvil.

Por otra parte, la estabilidad del estado síncrono se estudia a través de distintas técnicas como la función maestra de estabilidad (Pecora y Carroll, 1998) y la teoría de estabilidad de Lyapunov (Khalil, 2002).

1.3. Panorama general de esta tesis

Esta tesis se enfoca en el estudio de la sincronización de neuronas desde una perspectiva de dinámica y control. En particular, se diseña un circuito electrónico que emula la dinámica de un modelo neuronal reportado en la literatura y se estudia de manera analítica, numérica y experimental la aparición de comportamiento síncrono en un par y en una red, de neuronas electrónicas.

A continuación se presenta la motivación para realizar este trabajo, los objetivos general y los específicos, las contribuciones y productos generados y por último, se comenta la estructura de la tesis.

1.3.1. Motivación

La mayoría de las funciones cognitivas del cerebro, así como algunos desordenes neuronales como la epilepsia o el autismo, están basadas en interacciones coordinadas de un gran número de neuronas, las cuales están distribuidas en diferentes áreas del cerebro (Uhlhaas y Singer, 2006). Los métodos para medir los potenciales eléctricos son invasivos y peligrosos ya que requieren del uso de microelectrodos introducidos directamente en el cerebro; proceso en el cual el mínimo error puede generar problemas neurológicos severos. Esto nos lleva a la necesidad de estudiar los comportamientos neuronales mediante un método no invasivo. Una manera en la que se pretende abordar este problema es utilizando modelos matemáticos que emulen los comportamientos neuronales. En el trabajo aquí propuesto se desea llegar a construir una red neuronal con alguno de los modelos propuestos en la literatura utilizando circuitos electrónicos.

1.3.2. Hipótesis

El uso de circuitos electrónicos basados en modelos matemáticos neuronales permitirá obtener nuevo un entendimiento del comportamiento síncrono observado en redes de neuronas en el cerebro.

Por otra parte, utilizar esquemas de sincronización con acoplamientos dinámicos para la sincronización de modelos neuronales tipo Hindmarsh-Rose permitirá obtener un mejor desempeño en comparación con esquemas que utilizan acoplamientos estáticos.

1.3.3. Objetivo general

Contribuir al conocimiento que se tiene sobre la sincronización de neuronas, desde una perspectiva de dinámica y control, por medio de diseñar, construir e implementar una red de neuronas electrónicas y estudiar su comportamiento dinámico.

1.3.4. Objetivos específicos

- Caracterizar los comportamientos dinámicos del modelo de Hindmarsh-Rose y reproducirlos en un circuito electrónico.
- Diseñar e implementar esquemas de sincronización que utilicen acoplamientos dinámicos tipo Huygens para sincronizar pares y redes de neuronas electrónicas.
- Construir y sincronizar una red de neuronas electrónicas usando acoplamientos dinámicos y comparar los resultados obtenidos con el caso de acoplamientos estáticos.
- Demostrar que los acoplamientos dinámicos tienen un mejor desempeño que los acoplamientos estáticos.

1.3.5. Contribuciones

Las contribuciones de esta tesis constan del diseño y construcción del circuito electrónico Hindmarsh-Rose, así como la validación del mismo. También se construyó un

arreglo de neuronas electrónicas, el cual quedará en el laboratorio de control para futuros estudios de sincronización.

Una contribución importante de esta tesis, es que se ha demostrado que para la sincronización de neuronas, los acoplamientos dinámicos tipo Huygens, presentan un mejor desempeño en comparación con resultados reportados en la literatura, los cuales utilizan acoplamientos estáticos. En particular, el esquema de sincronización aquí propuesto permite incrementar el número de neuronas que se pueden sincronizar con acoplamientos estáticos en una topología de red específica.

1.3.6. Productos generados

Se escribió el artículo titulado : “Synchronization of Hindmarsh-Rose neurons via Huygens-like coupling”, el cual se presentará en la conferencia internacional IFAC CHAOS 2018, a celebrarse en Eindhoven, Holanda a finales de octubre de este año. Una copia de este artículo se encuentra en la sección de anexos de esta tesis.

En el artículo se muestra la sincronización de dos neuronas electrónicas Hindmarsh-Rose interconectadas a través de un acoplamiento dinámico tipo Huygens. El capítulo 4 de esta tesis está basado en este artículo.

1.3.7. Estructura de la tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se muestran diferentes modelos matemáticos que emulan el comportamiento de una neurona, incluyendo el modelo de Hindmarsh-Rose (HR) que es el modelo que se utilizará a lo largo de la tesis. También, se presentan las herramientas para estudiar la estabilidad del comportamiento síncrono en redes de sistemas acoplados. Finalmente, se presenta una definición formal de sincronización.

El capítulo 3 esta dedicado al diseño y construcción del circuito electrónico que reproduce el comportamiento del modelo matemático HR. Se muestra el proceso de diseño, resultados numéricos, así como la validación experimental del circuito. Además, se incluye el trabajo realizado en el diseño y construcción de un circuito que

reproduce el comportamiento del modelo neuronal de Izhikevich (Izhikevich, 2003), el cual no mostró un desempeño satisfactorio.

En el capítulo 4 se investiga la sincronización de dos neuronas HR utilizando un acoplamiento dinámico tipo Huygens. El análisis de estabilidad del estado de sincronización se realiza usando la función maestra de estabilidad (FME). En este capítulo se muestran resultados experimentales de la implementación del esquema de sincronización propuesto.

El capítulo 5 está dedicado al estudio analítico, numérico y experimental del fenómeno de sincronización en una red de neuronas conectada en estrella utilizando acoplamientos dinámicos. Además, se presenta una comparación con el caso en el que los acoplamientos en la red son estáticos.

Posteriormente, el capítulo 6 presenta las conclusiones generadas durante el desarrollo de esta tesis. Finalmente, la sección de anexos contiene los diagramas completos de los circuitos diseñados, así como el artículo derivado de este trabajo de tesis.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo se presenta una breve descripción de los principales modelos neuronales y se realiza una comparación entre estos con el fin de determinar que modelo logra reproducir, de mejor manera, los comportamientos observados en una neurona.

Por otra parte, este capítulo también introduce la herramienta de análisis usada a lo largo de esta tesis, la cual es la Función Maestra de estabilidad (FME). Al final del capítulo se da una definición formal de sincronización.

2.1. Modelos neuronales clásicos

En la literatura se han propuesto distintos modelos matemáticos para emular el comportamiento dinámico de una neurona. A continuación se presenta una breve introducción a los modelos más importantes, con particular énfasis en los modelos que reproducen los comportamientos de “spiking” y “bursting”. Finalmente se realiza una comparación entre ellos.

2.1.1. Hodgkin y Huxley

En 1952 Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Huxley propusieron un modelo para describir el flujo de corriente eléctrica a través de la membrana de fibra nerviosa (Hodgkin y Huxley, 1952). El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_M \dot{V} &= I - g_K n^4 (V - V_K) - g_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - g_l (V - V_l), \\
 \dot{n} &= \alpha_n (1 - n) - \beta_n n, \\
 \dot{m} &= \alpha_m (1 - m) - \beta_m m, \\
 \dot{h} &= \alpha_h (1 - h) - \beta_h h,
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde

V es el desplazamiento del potencial de membrana de su potencial de reposo.
 I es la densidad de corriente total de la membrana.

C_M es la capacitancia de la membrana por unidad de área.

V_{Na}, V_K son la diferencia entre los potenciales de equilibrio de los iones de sodio y potasio con el valor absoluto del potencial de reposo total.

V_l es la diferencia entre el potencial generado por la corriente de fuga y el valor absoluto del potencial de reposo.

$g_{Na}, g_K,$ y g_l son las conductancias del sodio, potasio y la generada por la corriente de fuga respectivamente.

n se refiere a las moléculas de potasio.

m y h se refieren a las moléculas de sodio.

$\alpha_n, \alpha_m, \alpha_h$ determinan la tasa de transferencia desde afuera hacia adentro.

$\beta_n, \beta_h, \beta_h$ determinan la tasa de transferencia desde adentro hacia afuera.

Estos parámetros se describen a continuación:

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \frac{0.01(V + 10)}{e^{\left(\frac{V+10}{10}-1\right)}}, \\
 \beta_n &= 0.125e^{V/80}, \\
 \alpha_m &= \frac{0.1(V + 25)}{e^{\left(\frac{V+25}{10}-1\right)}}, \\
 \beta_m &= 4e^{-V/18}, \\
 \alpha_h &= 0.07e^{V/20}, \\
 \beta_h &= \frac{1}{e^{\left(\frac{V+30}{10}+1\right)}}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Hodgkin y Huxley comparan los resultados de simulaciones numéricas de su sistema con señales obtenidas de un axón de calamar gigante. Para este trabajo, se reprodujeron las simulaciones presentadas en (Hodgkin y Huxley, 1952), y se logró reproducir el comportamiento de “spiking”, véase la figura 4.

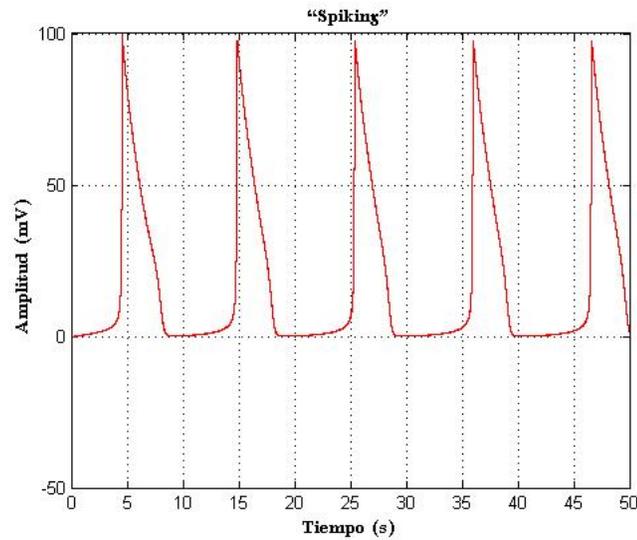


Figura 4. Hodgkin y Huxley, "spiking".

2.1.2. Morris-Lecar

Catherine Morris y Harold Lecar propusieron en 1981 un sistema planar que modela las oscilaciones de voltaje en fibra muscular de percebe (Morris y Lecar, 1981). El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 C\dot{V} &= I - g_L(V - V_L) - g_{Ca}M(V - V_{Ca}) - g_KN(V - V_K), \\
 \dot{M} &= \lambda_M(V)(M_\infty(V) - M), \\
 \dot{N} &= \lambda_N(V)(N_\infty(V) - N),
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde:

I = Es la corriente aplicada ($\mu A/cm^2$).

g_L, g_{Ca}, g_K = Conductancia máxima o instantánea para de los caminos de fuga, Ca^{++} y K^+ , respectivamente ($mmho/cm^2$).

V = Potencial de membrana (mV).

V_L, V_{Ca}, V_K = Potencial de equilibrio correspondiente a las conductancias de fuga, Ca^{++} y K^+ respectivamente (mV).

M = Porción de canales de Ca^{++} abiertos.

N = Porción de canales de K^+ abiertos.

$M_\infty(V), N_\infty(V)$ = Porción de canales abiertos de Ca^{++} y K^+ , en estado estacionario.

$\lambda_M(V), \lambda_N(V)$ = Tasa constante para abrir los canales de Ca^{++} y K^+ (s^{-1}).

$\bar{\lambda}_M, \bar{\lambda}_N$ = Máxima tasa constante para abrir los canales de Ca^{++} y K^+ (s^{-1}).

V_1 = Potencial al que $M_\infty = 0.5$ (mV).

V_2 = Recíproco de la pendiente de la dependencia de voltaje de M_∞ (mV).

V_3 = Potencial al que $N_\infty = 0.5$ (mV).

V_4 = Recíproco de la pendiente de la dependencia de voltaje de N_∞ (mV).

C = Capacitancia de la membrana $\mu F/cm^2$.

Las variables $M_\infty(V), N_\infty(V), \lambda_M(V), \lambda_N(V)$ están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} M_\infty(V) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{V - V_1}{V_2} \right) \right), \\ N_\infty(V) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{V - V_3}{V_4} \right) \right), \\ \lambda_M(V) &= \bar{\lambda}_M \cosh \left(\frac{V - V_1}{2V_2} \right), \\ \lambda_N(V) &= \bar{\lambda}_N \cosh \left(\frac{V - V_3}{2V_4} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

En (Morris y Lecar, 1981) se menciona que la característica más interesante en el comportamiento de la fibra muscular del percebe es la oscilación del voltaje, que ocurre solo cuando los sistemas de Ca^{++} y K^+ están operando al mismo tiempo. Por lo tanto, presentan un sistema reducido asumiendo que el sistema de Ca^{++} es mucho más rápido que el de K^+ . El sistema reducido utiliza solo la primera y la tercera ecuación del sistema original. Se realizaron simulaciones numéricas en *Matlab* utilizando este sistema reducido para obtener el estado oscilatorio del sistema y el resultado se muestra en la figura 5 .

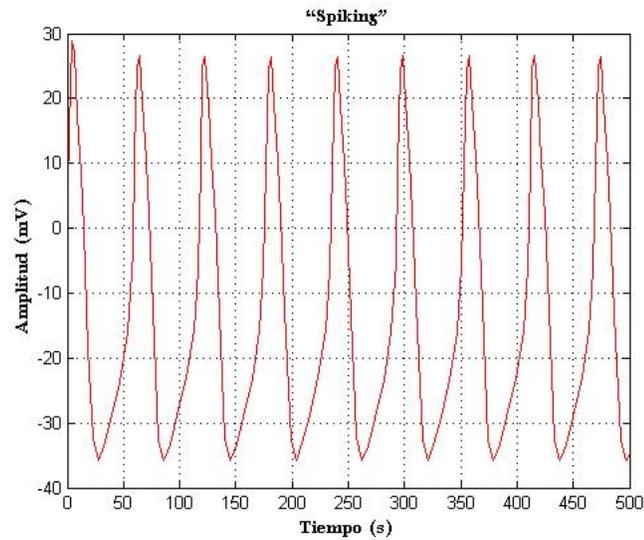


Figura 5. Morris-Lecar, "spiking".

2.1.3. FitzHugh-Nagumo

El modelo FitzHugh-Nagumo fue propuesto a partir de un análisis del oscilador de Van der Pol (Nagumo *et al.*, 1962),(FitzHugh, 1961), las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= c\left(y + x - \frac{x^3}{3} + z\right), \\ \dot{y} &= -(x - a + by)/c.\end{aligned}\tag{5}$$

Los parámetros a, b y $c \in \mathbb{R}$ son constantes y $z \in \mathbb{R}$ es la intensidad del estímulo. Estos parámetros deben cumplir lo siguiente:

$$1 - 2b/3 < a < 1, \quad 0 < b < 1, \quad b < c^2.\tag{6}$$

Fitzhugh compara su modelo con el de Hodgking y Huxley que tiene cuatro estados: V, m, n, h . Como resultado de la comparación, Fitzhugh concluye que el par (V, m) corresponde a x , que representa excitabilidad y cambia rápidamente. Y el par (h, n) corresponde a y .

Se realizó una simulación numérica del modelo y se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 6.

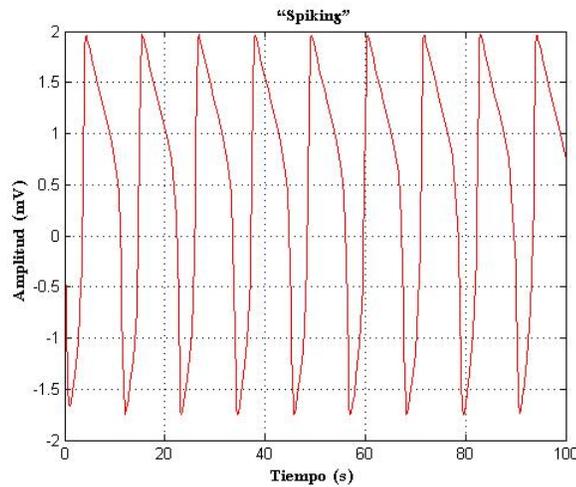


Figura 6. FitzHugh-Nagumo, “spiking”.

2.1.4. Izhikevich

En 2003 Eugene M. Izhikevich propuso un modelo simple de segundo orden que presenta comportamientos de “spiking” y “bursting” (Izhikevich, 2003).

El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= 0.04v^2 + 5v + 140 - u + I, \\ \dot{u} &= a(bv - u).\end{aligned}\tag{7}$$

Con un reinicio auxiliar como sigue:

$$\text{Si } v \geq 30\text{mV, entonces } \begin{cases} v = c, \\ u = u + d, \end{cases}\tag{8}$$

donde $v \in \mathbb{R}$ representa el potencial de membrana de la neurona y $u \in \mathbb{R}$ representa una variable de recuperación de membrana. Las corrientes inyectadas al sistema se representan con la variable $I \in \mathbb{R}$, el parámetro $a \in \mathbb{R}$ describe la escala de tiempo de la variable de recuperación u . El parámetro $b \in \mathbb{R}$ describe la sensibilidad de u a las fluctuaciones del potencial de membrana v , el parámetro $c \in \mathbb{R}$ es el valor de reinicio del potencial de membrana v y el parámetro $d \in \mathbb{R}$ es el valor de reinicio que se suma a la variable de recuperación u .

Al igual que en los modelos anteriores, se realizaron simulaciones numéricas utilizando Matlab para reproducir los comportamientos más importantes, los cuales se muestran en las figuras 7 y 8.

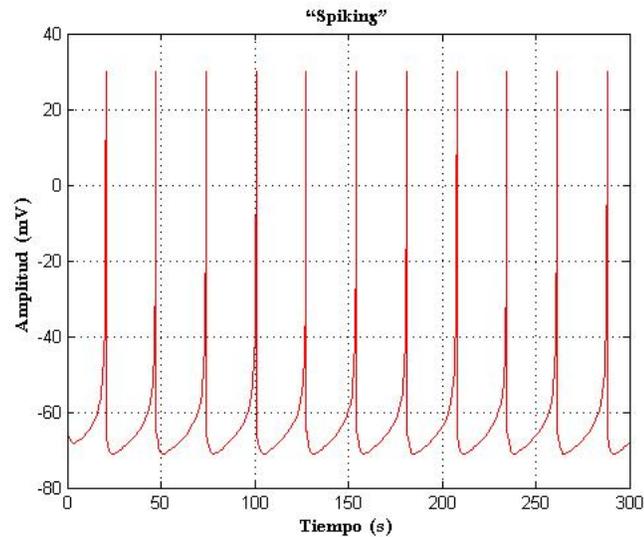


Figura 7. Izhikevich, “spiking”.

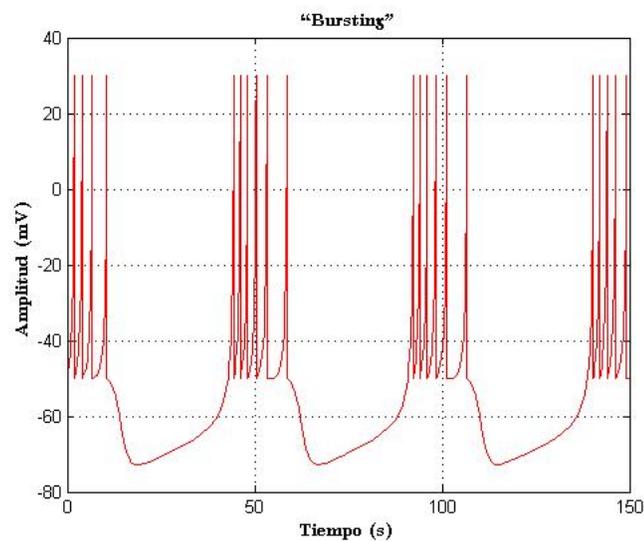


Figura 8. Izhikevich, “bursting”.

2.2. El modelo de Hindmarsh-Rose (HR)

En esta sección se analiza el modelo de Hindmarsh-Rose. El modelo fue propuesto por J. L. Hindmarsh y R.M. Rose en 1984 (Hindmarsh y M Rose, 1984). Este modelo

es un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas, y presenta varios comportamientos dinámicos conocidos, tales como “spiking”, “bursting”, y comportamiento caótico.

El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + bx^2 - ax^3 - z + I, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y, \\ \dot{z} &= r[s(x - x_0) - z].\end{aligned}\tag{9}$$

La variable $x(t) \in \mathbb{R}$ se conoce como el potencial de membrana, la variable $y(t) \in \mathbb{R}$ modela el transporte de iones de potasio y sodio a través de canales de iones rápidos, y la variable $z(t) \in \mathbb{R}$ modela el transporte de otros iones a través de canales lentos, $I \in \mathbb{R}$ es la corriente externa inyectada a la neurona, $a \in \mathbb{R}$ permite conmutar entre comportamientos de “bursting” y “spiking” y además determina la frecuencia del “spiking”. Por otra parte $r \in \mathbb{R}$ gobierna el comportamiento “bursting”, $s \in \mathbb{R}$ gobierna la adaptación: valores pequeños (alrededor de 1) provocan un comportamiento “spiking” rápido. Finalmente, $x_0 \in \mathbb{R}$ es el potencial de reposo del sistema y $b, d, c \in \mathbb{R}_+$ son parámetros positivos.

Se realizaron simulaciones numéricas para reproducir los comportamientos de “spiking” (figura 9) y “bursting” (figura 10) utilizando Matlab.

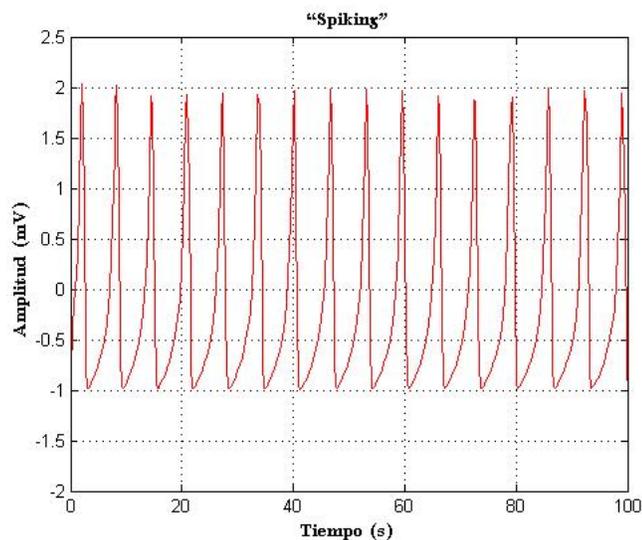


Figura 9. HR, “spiking”.

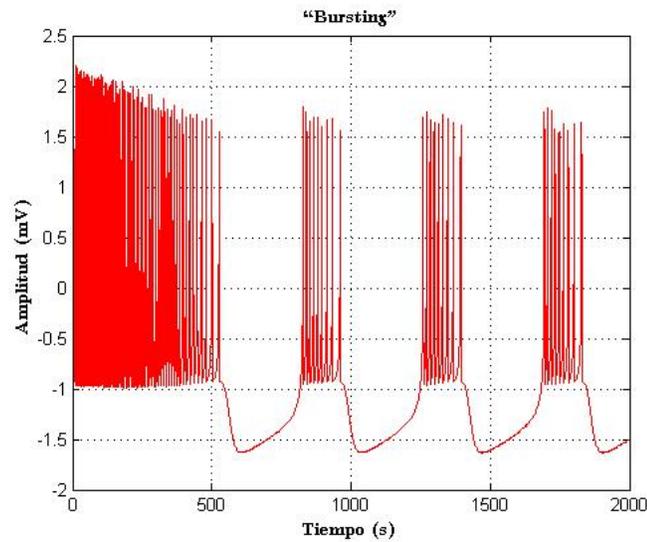


Figura 10. HR, “bursting”.

En la figura 11, se puede observar el comportamiento de “bursting” caótico, en el cual el número de “spikes” en cada “paquete” cambia. Además, si las condiciones iniciales se varían ligeramente, este comportamiento será diferente, es decir, el número de “spikes” por “paquete” se modificará. La sensibilidad a condiciones iniciales es una de las características principales de los sistemas caóticos. Debido a esto el comportamiento mostrado en la figura 11 se conoce como “bursting” caótico.

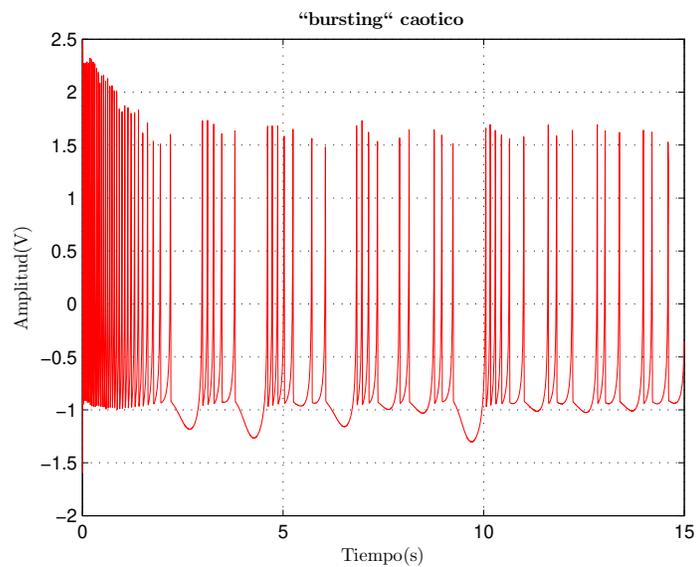


Figura 11. HR, “bursting” caótico.

A lo largo de esta tesis nos enfocaremos en este tipo de comportamiento.

2.3. Discusión

Después de haber realizado una comparación de los distintos modelos matemáticos y realizar las simulaciones numéricas de los mismos, se concluye que el modelo más apropiado para esta tesis es el de Hindmarsh-Rose (HR). Esto es debido a que los comportamientos buscados se pueden reproducir cambiando solo los parámetros del sistema sin necesidad de agregar alguna otra entrada de control. Además, su implementación en circuito electrónico, con componentes analógicos, es más sencilla debido al número de estados y a la cantidad de no linealidades que tiene cada sistema.

2.4. Propiedades dinámicas del modelo HR

En esta sección se analizan dos propiedades que tiene el modelo HR. En particular, se muestra que el sistema HR es convergente y semi-pasivo.

2.4.1. Convergencia

Considere el siguiente sistema:

$$\dot{z} = q(z, w(t)), \quad (10)$$

donde $z \in \mathbb{R}^l$ es el estado, $w(t) \in \mathbb{R}$ con la entrada externa que toma valores de algún conjunto compacto. Este sistema es convergente (Pogromsky *et al.*, 2002) si para cualquier señal acotada $w(t)$ definida en el intervalo de tiempo $(-\infty, +\infty)$ existe una solución única, asintóticamente estable de manera global $\bar{z}(t)$ definida en el mismo intervalo $(-\infty, +\infty)$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t) - \bar{z}(t)| = 0, \quad (11)$$

para cualquier condición inicial $z(t_0) \in \mathbb{R}^l$. En este tipo de sistemas el límite está determinado solamente por la señal de entrada $w(t)$, y no por las condiciones iniciales de z . De la existencia de una solución única $\bar{z}(t)$ cuando son sometidos a la misma entrada, se puede deducir que dos sistemas convergentes idénticos z_1 y z_2 deben sincronizarse, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t) - z_2(t)| = 0. \quad (12)$$

Debido a esto, el concepto de convergencia está muy relacionado con la sincronización de sistemas. Es importante encontrar condiciones bajo las cuales se pueda garantizar que un sistema es convergente.

Una condición suficiente, llamada condición de Demidovich (Demidovich, 1961), es que si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{l \times l}$ simétrica definida positiva, tal que todos los valores propios $\lambda_i(Q)$ de la matriz

$$Q(z, w) = \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{\partial q}{\partial z}(z, w) \right) + \left(\frac{\partial q}{\partial z}(z, w) \right)^T P \right], \quad (13)$$

sean negativos y separados de cero, es decir existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda_i(Q) \leq -\delta < 0, \quad (14)$$

con $i = 1, \dots, l$ para toda $z, w \in \mathbb{R}^l$, entonces el sistema (10) es convergente y existe una función cuadrática $W(\zeta) = \zeta^T P \zeta$ que satisface la desigualdad:

$$\frac{\partial W(z_1 - z_2)}{\partial \zeta} (q(z_1, w) - q(z_2, w)) \leq -\alpha |z_1 - z_2|^2, \quad (15)$$

para alguna $\alpha > 0$. Esta condición es una modificación del teorema de Demidovich de sistemas convergentes para el caso que $P = I_l$, donde $I_l \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es la matriz identidad.

Para el sistema HR, si se utiliza el estado x como entrada w , la parte restante del sistema HR, es decir, la dinámica interna, queda como sigue

$$\begin{aligned} \dot{y} &= c + dw^2 - y, \\ \dot{z} &= r[s(w - x_0) - z]. \end{aligned} \quad (16)$$

Para obtener la matriz Q primero se calcula el Jacobiano de la dinámica interna, el cual queda como sigue

$$J(y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \quad (17)$$

Usando $P = I_2$ y sustituyendo (17) en (13), se obtiene

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} \quad (18)$$

Los valores propios de la matriz Q son ambos negativos ($\lambda_i(Q) < 0$) por lo que se cumple con la condición de Deminovich y el sistema es convergente.

2.4.2. Semipasividad

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + Bu, \\ \mathbf{y} &= Cx, \end{aligned} \quad (19)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es la salida. Además $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave \mathcal{C}^1 y los vectores B y C son de las dimensiones apropiadas.

Definición 2.4.2.1 Semi-pasividad (Willems, 1972; Pogromsky y Nijmeijer, 2001). El sistema (19) es llamado

- semi-pasivo en \mathcal{D} si existe una función no negativa $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$, \mathcal{D} es abierto, conectado e invariante bajo (19), $V(0) = 0$, tal que

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} (f(x) + Bu) \leq \mathbf{y}^\top u - H(x), \quad (20)$$

donde la función $H : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es no negativa afuera de la bola de radio ρ , es decir,

$$\exists \rho > 0, \|x\| \geq \rho \implies H(x) \geq \varrho(\|x\|),$$

con una función continua no negativa $g(\cdot)$ definida para toda $\|x\| \geq \rho$; si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ el sistema es semi-pasivo;

- estrictamente semi-pasivo (en \mathcal{D}) si la función $H(\cdot)$ es positiva fuera de alguna bola $B \subset \mathcal{D}$.

Un sistema semi-pasivo se comporta similar a uno pasivo para una $\|x\|$ suficientemente grande.

A continuación se mostrará que el sistema HR es semi-pasivo. El sistema HR está descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + bx^2 - ax^3 - z + I + u, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y, \\ \dot{z} &= r[s(x - x_0) - z].\end{aligned}\tag{21}$$

Para probar que el sistema (21) es semi-pasivo, se sigue el procedimiento presentado en (Steuer *et al.*, 2009). Considere la función de almacenamiento $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + \mu y^2 + \frac{1}{rs}z^2)\tag{22}$$

donde $\mu > 0$, es una constante. Por lo tanto

$$\dot{V} = xu - ax^4 + bx^3 + xy + Ix + \mu cy - \mu dx^2y - \mu y^2 + x_0z - \frac{1}{s}z^2.\tag{23}$$

Note que el término $-ax^4 - \mu dx^2y$ puede escribirse de la siguiente forma

$$-ax^4 - \mu dx^2y = -a\lambda_1 x^4 - a(1 - \lambda_1) \left(x^2 + \frac{\mu d}{2a(1 - \lambda_1)} y \right)^2 + \frac{\mu^2 d^2}{4a(1 - \lambda_1)} y^2,\tag{24}$$

con $\lambda_1 \in (0, 1)$.

Igualmente, el término $-\mu y^2 + xy$ se puede escribir como

$$-\mu y^2 + xy = -\mu\lambda_2 y^2 - \mu(1-\lambda_2) \left(y - \frac{1}{2\mu(1-\lambda_2)} x \right)^2 + \frac{1}{4\mu(1-\lambda_2)} x^2, \quad (25)$$

con $\lambda_2 \in (0, 1)$.

Entonces, sustituyendo (24) y (25) en (23), y definiendo $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}, y, z) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u} - H(\mathbf{x}, y, z), \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, y, z) = & -a\lambda_1 x^4 + bx^3 + \frac{1}{4\mu(1-\lambda_2)} x^2 + Ix - \left(\mu\lambda_2 - \frac{\mu^2 d^2}{4a(1-\lambda_1)} \right) y^2 + \mu cy - \left(\frac{1}{s} \right) z^2 \\ & + x_0 z - \mu(1-\lambda_2) \left(y - \frac{1}{2\mu(1-\lambda_2)} x \right)^2 - a(1-\lambda_1) \left(x^2 + \frac{\mu d}{2a(1-\lambda_1)} y \right)^2. \quad (27) \end{aligned}$$

Entonces, si $\mu < \frac{4a\lambda_2(1-\lambda_1)}{d^2}$, se tiene que el modelo HR satisface (20) y por tanto es semi-pasivo.

2.5. Herramientas de análisis de comportamiento síncrono en sistemas dinámicos acoplados

Un problema de investigación que ha tomado un gran interés desde la perspectiva de dinámica y control es la sincronización de sistemas, es decir, cuando varios sistemas acoplados se comportan de la misma manera. El estudio de este fenómeno requiere saber cuando este estado de sincronización será estable. Debido a esto, se han buscado herramientas que permitan conocer la estabilidad de dicho estado o las condiciones bajo las cuales el estado síncrono es estable. Para el análisis de estabilidad, en esta tesis se utiliza la función maestra de estabilidad (Pecora y Carroll, 1998), la cual se explica en la siguiente sección.

2.5.1. Función maestra de estabilidad

Considere una red de sistemas dinámicos de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{w}(\mathbf{x}^j), \quad (28)$$

donde $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado correspondiente al nodo i , la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe la dinámica de un nodo aislado, G_{ij} determina la fuerza de interacción entre los nodos i y j , la función $\mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe que variables se utilizan en el acoplamiento, k es la fuerza de acoplamiento y N es el número de nodos.

Definiendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \text{y } \mathbf{G} = [G_{ij}], \quad (29)$$

se puede escribir la ecuación (28) en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k \mathbf{G} \otimes \mathbf{W}(\mathbf{x}), \quad (30)$$

donde \otimes denota el producto de Kronecker.

Se realizan las siguientes suposiciones con respecto a la matriz \mathbf{G} :

S-1 Las filas de la matriz de conectividad \mathbf{G} suman cero y tiene elementos no positivos en la diagonal, es decir,

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} \text{ y } G_{ij} \leq 0 \text{ for } i \neq j. \quad (31)$$

S-2 La matriz de conectividad \mathbf{G} tiene un valor propio igual a cero y $N - 1$ valores propios positivos, los cuales pueden ser ordenados como sigue

$$\gamma_1 = 0 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots < \gamma_N. \quad (32)$$

Además, se supone que la función $\mathbf{w}(\mathbf{x}^i)$ es una función lineal de la forma

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{C}\mathbf{x}^i, \quad (33)$$

donde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante. Bajo esta suposición, la ecuación (30) toma la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - k\mathbf{G} \otimes \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (34)$$

Una solución de la ecuación (34) es llamada *solución síncrona* si satisface

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^2(t) = \dots = \mathbf{x}^N(t) = \mathbf{s}(t), \quad (35)$$

donde $\mathbf{s}(t)$ corresponde a la solución de un nodo aislado, es decir,

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}). \quad (36)$$

Además, se debe notar que $\mathbf{s}(t)$ es una solución exacta de la ecuación (34).

2.5.2. Análisis de estabilidad

La estabilidad local de la solución síncrona (35) se puede investigar utilizando la función maestra de estabilidad. Como primer paso la ecuación (28) se linealiza alrededor de $\mathbf{s}(t)$. Esto deja la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{w}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^j} (\mathbf{x}^j - \mathbf{s}). \quad (37)$$

Reemplazando (33) en (37) y considerando la suposición [**S-2**] se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{C}(\mathbf{x}^j - \mathbf{s}). \quad (38)$$

Después, se definen los siguientes errores de sincronización

$$\mathbf{e}^i := \mathbf{x}^i - \mathbf{s}. \quad (39)$$

Usando (36) y (38), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \dot{\mathbf{x}}^i - \dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} \mathbf{e}^i - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{C} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (40)$$

Esta ecuación se puede reescribir de la forma

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k \mathbf{G} \otimes \mathbf{C}] \mathbf{e}, \quad (41)$$

donde $\mathbf{e} = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^N]^T$, $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad, y $\mathbf{Df}(\mathbf{s})$ es el Jacobiano de la función \mathbf{f} evaluado en la solución síncrona $\mathbf{s}(t)$, ver ecuación (36). Esta ecuación se puede diagonalizar a bloques utilizando la siguiente transformación

$$\mathbf{e} = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{e}}, \quad (42)$$

donde $\bar{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{nN}$ es un nuevo vector de estado, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de vectores propios asociada a la matriz de conectividad \mathbf{G} , y $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Aplicando esta transformación a la ecuación (41) y utilizando las propiedades del producto de Kronecker, se obtiene la siguiente dinámica del error diagonalizada a bloques

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}, \quad (43)$$

donde $\mathbf{\Gamma} := \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios γ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ de la matriz de conectividad \mathbf{G} . Por lo tanto, se puede observar que la dinámica del error (43) consiste en N bloques de la forma

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^i = [\mathbf{Df}(\mathbf{s}) - k \gamma_i \mathbf{C}] \bar{\mathbf{e}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (44)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación variacional*. Como paso final para el análisis de la estabilidad local de la solución síncrona (35), se calcula el máximo exponente

transverso de Lyapunov (λ_{max}^\perp) para cada ecuación variacional (44) como sigue

$$\lambda_i^{\perp max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln|\mathbf{e}^i(t)| - \ln|\mathbf{e}^i(0)|), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (45)$$

Se tienen las siguientes condiciones para la estabilidad local de la solución síncrona (35), véase (Pikovsky *et al.*, 2003):

Si $\lambda_i^{\perp max} < 0$, para toda $i = 2, \dots, N$ el estado de sincronización es localmente estable.

Si $\lambda_i^{\perp max} > 0$, para al menos una $i = 2, \dots, N$ el estado de sincronización es inestable.

Como se puede observar los valores propios de la matriz de conectividad \mathbf{G} , juegan un papel importante al determinar la estabilidad de la solución síncrona (35).

2.6. Definición formal de sincronización

Es necesario hacer una definición formal de uno de los conceptos principales en esta tesis —la sincronización. Para ello, considere el siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (46)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (47)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad (48)$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, son variables de estado y las funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ son localmente Lipschitz. Nótese que (46) y (47) describen sistemas idénticos que interactúan por medio del subsistema (48). En esta tesis, se considera que los subsistemas (46) y (47) son dos sistemas HR idénticos y (48) es el acoplamiento tipo Huygens.

A continuación se presenta la definición de sincronización para los sistemas acoplados (46)-(48).

Definición 2.6.1 Se dice que el sistema (46)-(48) está completamente sincronizado de manera asintótica si las soluciones \mathbf{x}, \mathbf{y} de (46)-(48) con condiciones iniciales $\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0)$ y $\mathbf{z}(0)$ satisfacen (Peña, 2013)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) := \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) = 0. \quad (49)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = 0. \quad (50)$$

Por otro lado, dado que es imposible tener sistemas idénticos, en la práctica los sistemas no pueden cumplir (49) y (50). Por lo tanto, se introduce el concepto de sincronización práctica.

Definición 2.6.1 Se dice que el sistema (46)-(48) está prácticamente sincronizado de manera asintótica si las soluciones $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ de (46)-(48) con condiciones iniciales $\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0)$ y $\mathbf{z}(0)$ satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{e}(t)| := |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \epsilon_1. \quad (51)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) \leq \epsilon_2, \quad (52)$$

para ciertos $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.

Capítulo 3. Diseño y construcción de una neurona electrónica

En este capítulo se presenta el diseño de una neurona basada en el modelo de Izhikevich y otra basada en el modelo de Hindmarsh-Rose. En particular, se presenta el método de diseño, las características, las simulaciones del circuito y los resultados experimentales en una tablilla de pruebas. Además, para el circuito HR se mostrará su diseño en circuito impreso (PCB) y las pruebas correspondientes.

3.1. Consideraciones de diseño

El diseño se realiza utilizando circuitos integradores combinados con sumadores (figura 12) e inversores (figura 13) que se implementan con amplificadores operacionales. Además, las no linealidades se implementaron utilizando circuitos multiplicadores.

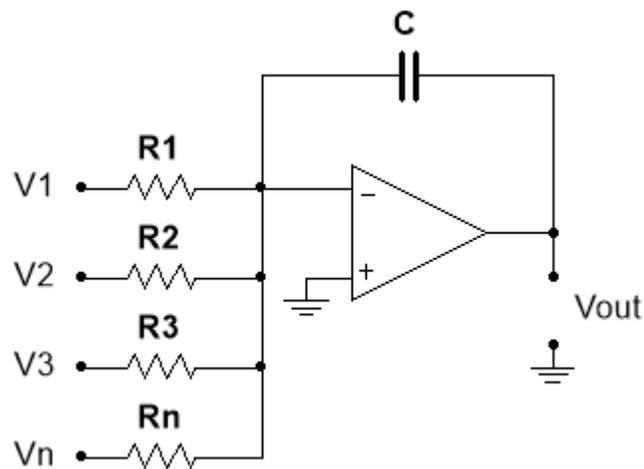


Figura 12. Sumador integrador utilizando amplificadores operacionales.

Al obtener la función de transferencia del circuito de la figura 12 utilizando la transformada de Laplace y técnicas de análisis de circuitos se obtiene lo siguiente:

$$V_o(s) = - \left(\frac{1}{R_1 C s} V_1 + \frac{1}{R_2 C s} V_2 + \frac{1}{R_3 C s} V_3 + \dots + \frac{1}{R_n C s} V_n \right), \quad (53)$$

donde R_1, R_2, \dots, R_n son resistencias, V_1, V_2, \dots, V_n son voltajes de entrada, C es un capacitor y V_{out} es el voltaje de salida.

Como se puede observar, este circuito con las entradas apropiadas, es capaz de resolver una ecuación diferencial de primer orden. Por lo tanto, este circuito se utilizará como base para el diseño de los circuitos electrónicos que reproducen el comportamiento de los modelos matemáticos neuronales.

En la figura 13, se muestra el diagrama de un inversor.

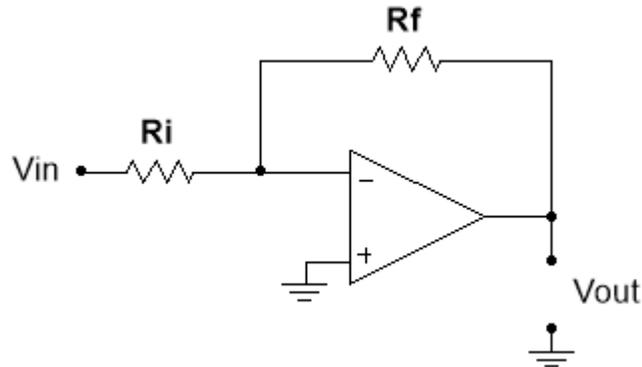


Figura 13. Inversor.

De la función de transferencia del circuito inversor se obtiene

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_i} V_i, \quad (54)$$

donde V_{out} es el voltaje de salida, V_i el voltaje de entrada, R_f y R_i son resistencias.

Otro circuito útil en la construcción de la neurona electrónica es el que se observa en la figura 14, el cual se utiliza para fijar condiciones iniciales específicas a los integradores.

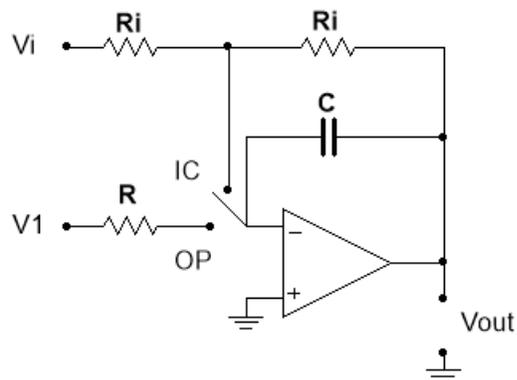


Figura 14. Circuito para fijar condiciones iniciales.

En este circuito R, Ri son resistencias, Vi es el voltaje de consigna para la condición inicial, C es un capacitor, Vi es el voltaje de entrada, Vo es el voltaje de salida, IC es la posición del interruptor la cual permite cargar al capacitor con el voltaje de consigna para la condición inicial deseada, y OP es la posición en la cual el integrador opera normalmente.

Para la implementación de las no linealidades se utilizó un circuito AD734. En la figura 15, se observa la conexión necesaria para utilizar este circuito como un multiplicador.

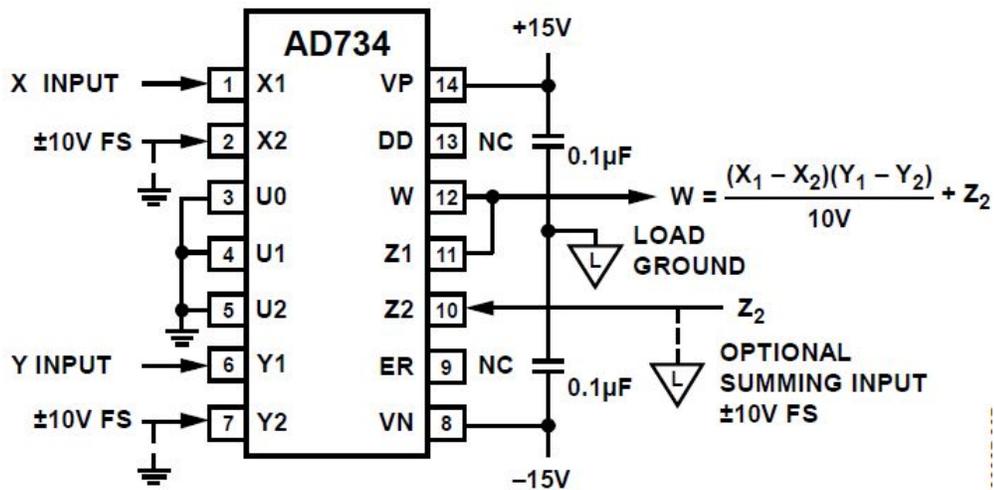


Figura 15. Conexión del multiplicador. Fuente (hoja de datos AD734).

3.2. Circuito electrónico Izhikevich

Se trabajó con el diseño del circuito electrónico para el modelo neuronal de Izhikevich descrito en la ecuación (7). Se utilizaron dos integradores, inversores y un multiplicador AD734 (para el término cuadrático), para resolver cada una de las ecuaciones diferenciales. Para la implementación del reinicio auxiliar se utilizó un comparador LM339, el cual manda un pulso cuadrado al temporizador 74121 configurado como multivibrador astable para generar un pulso más ancho del que genera el comparador. La salida del 74121 se conecta al interruptor analógico HI5043 y cuando se cumple la condición de $v = 30\text{ mV}$ se genera el pulso y el interruptor se conecta de manera que realice el trabajo del circuito de la figura 14, para llevar a los integradores a las condiciones descritas en (8). En la sección de anexos, véase la figura 50, se observa el diagrama del circuito.

3.2.1. Resultados numéricos

El circuito se simuló en el programa especializado *Multisim*^{v14}. Se utilizaron interruptores MAX4719 en lugar del circuito HI5043, ya que el simulador no cuenta con ese componente. Además, no cuenta con el temporizador 74121. Se intentó utilizar otro tipo de componentes para realizar el multivibrador; sin embargo, no se obtuvieron resultados satisfactorios. Los resultados que se obtuvieron para el comportamiento de “spiking” se muestran en la figura 16.

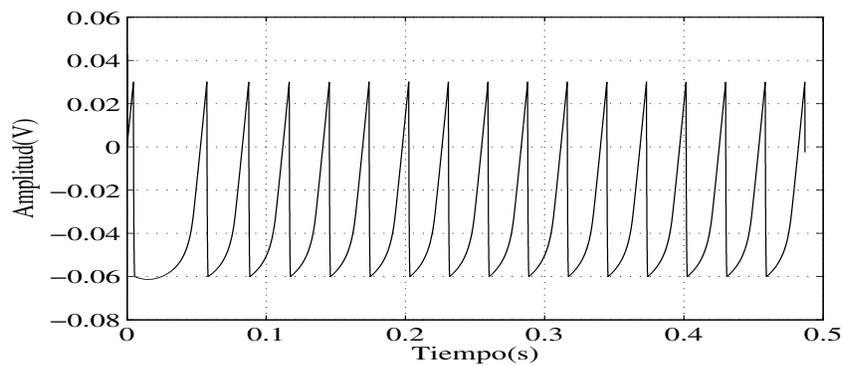


Figura 16. Resultados de la simulación del circuito de Izhikevich “spiking”.

En la simulación el comportamiento de “spiking” parece correcto y cualitativamente muy similar al comportamiento observado en el modelo (7)-(8). En la figura 17 se muestra un resultado parecido al “bursting”. Sin embargo, cuando se cumple la condición de $v = 30\text{mV}$ el voltaje de v no disminuye al valor de la consigna, de aproximadamente -60mV , por lo que la respuesta se modifica.

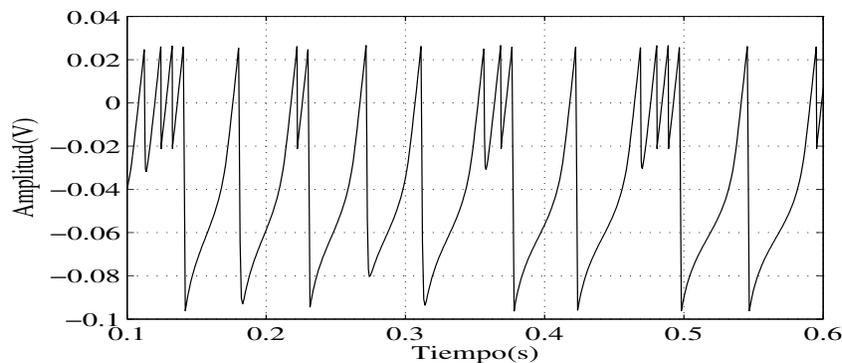


Figura 17. Resultados de la simulación del circuito de Izhikevich para “bursting”.

3.2.2. Resultados experimentales

Este circuito se construyó en tablilla de pruebas con el fin de verificar experimentalmente la implementación del reinicio auxiliar (8) presentaría los mismos problemas que la simulación, los resultados obtenidos se presentan en la figura 18.

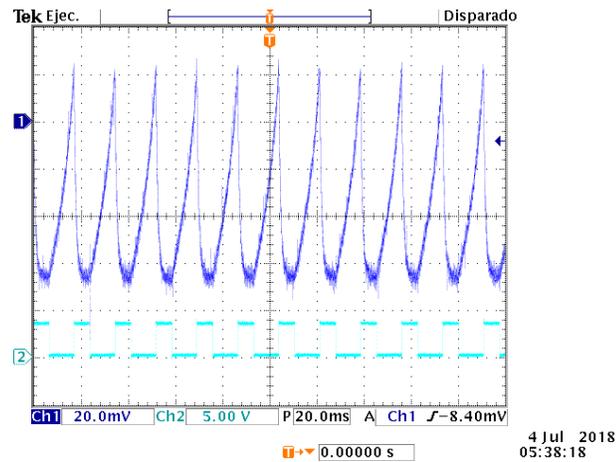


Figura 18. Resultados experimentales circuito Izhikevich.

En la implementación del circuito se presenta el mismo problema que en la simulación del “bursting”; es decir, el voltaje no disminuye a la consigna al cumplirse la condición (8). El pulso cuadrado que aparece en la figura se genera por el temporizador 74121. Se eliminó este circuito ya que la implementación del reinicio auxiliar dado en (8) presentó dificultades, y los resultados obtenidos mostrarán resultados poco satisfactorios.

3.3. Circuito electrónico Hindmarsh-Rose

Como primer paso en el diseño del circuito HR se realizó un escalamiento en tiempo del modelo HR (9) con el fin de acelerar el tiempo. Para esto, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\tau = \omega t, \quad (55)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}_+$ y τ es una nueva variable adimensional.

Para un estado del modelo HR (9) tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\frac{\tau}{\omega}} = \omega \frac{dx}{d\tau} = \omega \dot{x} \quad (56)$$

Como se puede observar el escalamiento en tiempo consiste en multiplicar el lado izquierdo de la ecuación (9) por una constante ω .

Por lo tanto, el modelo HR, escalado en tiempo queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \omega \dot{x} &= y + bx^2 - ax^3 - z + I + u, \\ \omega \dot{y} &= c - dx^2 - y + u, \\ \omega \dot{z} &= r[s(x - x_0) - z] + u. \end{aligned} \quad (57)$$

Se consideran los siguientes valores de parámetros $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.005, s = 4, x_0 = -1.6, I = 3.25$ los cuales son los necesarios para reproducir el comportamiento de “bursting” caótico (Hindmarsh y M Rose, 1984). Se utilizó $\omega = 0.001$ con el fin de poder utilizar valores de resistencias y capacitores comunes, y en un rango adecuado, es decir, resistencias en el orden de $k\Omega$ y capacitores en el orden de nF a μF . Por lo tanto, el modelo (57) toma la forma:

$$\begin{aligned} 0.001\dot{x} &= y + 3x^2 - x^3 - z + 3.25 + u, \\ 0.001\dot{y} &= 1 - 5x^2 - y + u, \\ 0.001\dot{z} &= 0.005[4(x - 1.6) - z] + u. \end{aligned} \quad (58)$$

Para la implementación del modelo HR dado en la ecuación (58) se utilizan 3 integradores para resolver las ecuaciones diferenciales. Además, se requiere utilizar inversores para obtener los signos correctos en la entradas de voltaje a los integradores. Se utilizaron los multiplicadores AD734 (figura 15) para generar los términos cuadrático y cúbico que aparecen en las ecuaciones del modelo HR, véase la ecuación (58). El diagrama completo del circuito se muestra en la figura 51 de la sección de anexos.

En la tabla 4 de la sección de anexos se enlistan los valores de los componentes que se utilizaron para obtener los valores adecuados en el circuito.

3.3.1. Implementación en el simulador Multisim

Una vez diseñado el circuito se implementó en el simulador de circuitos electrónicos *Multisim*. Inicialmente se utilizaron componentes ideales con los que cuenta el simulador. Una vez que la simulación funcionó, se procedió a cambiar los componentes ideales por los componentes que se utilizarían en la construcción del circuito. En la figura 19 se muestra una captura de pantalla del simulador, en donde se aprecia el diagrama esquemático y el resultado de la simulación.

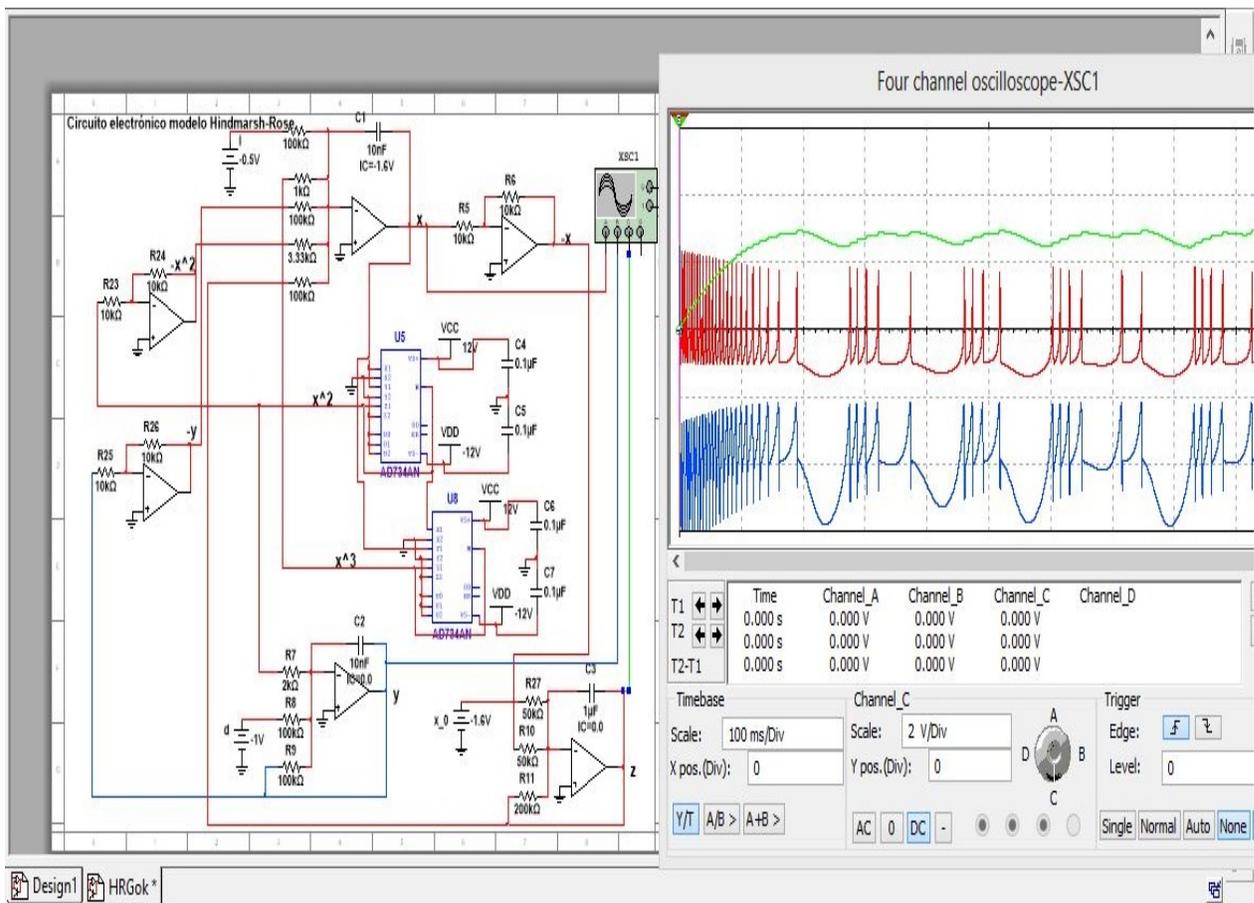


Figura 19. Simulación del circuito en Multisim.

Una vez que se verificó y validó el circuito en el simulador, se procedió a construir el circuito HR en una tablilla de pruebas.

3.3.2. Implementación en tablilla de pruebas

El siguiente paso fue construir un circuito HR en una tablilla de pruebas para después verificar que físicamente se reprodujeran los comportamientos esperados a pesar de las diferencias entre los componentes y otros efectos no deseados como ruido proveniente de la línea eléctrica, etc. En la figura 20 se observa la realización experimental del circuito.

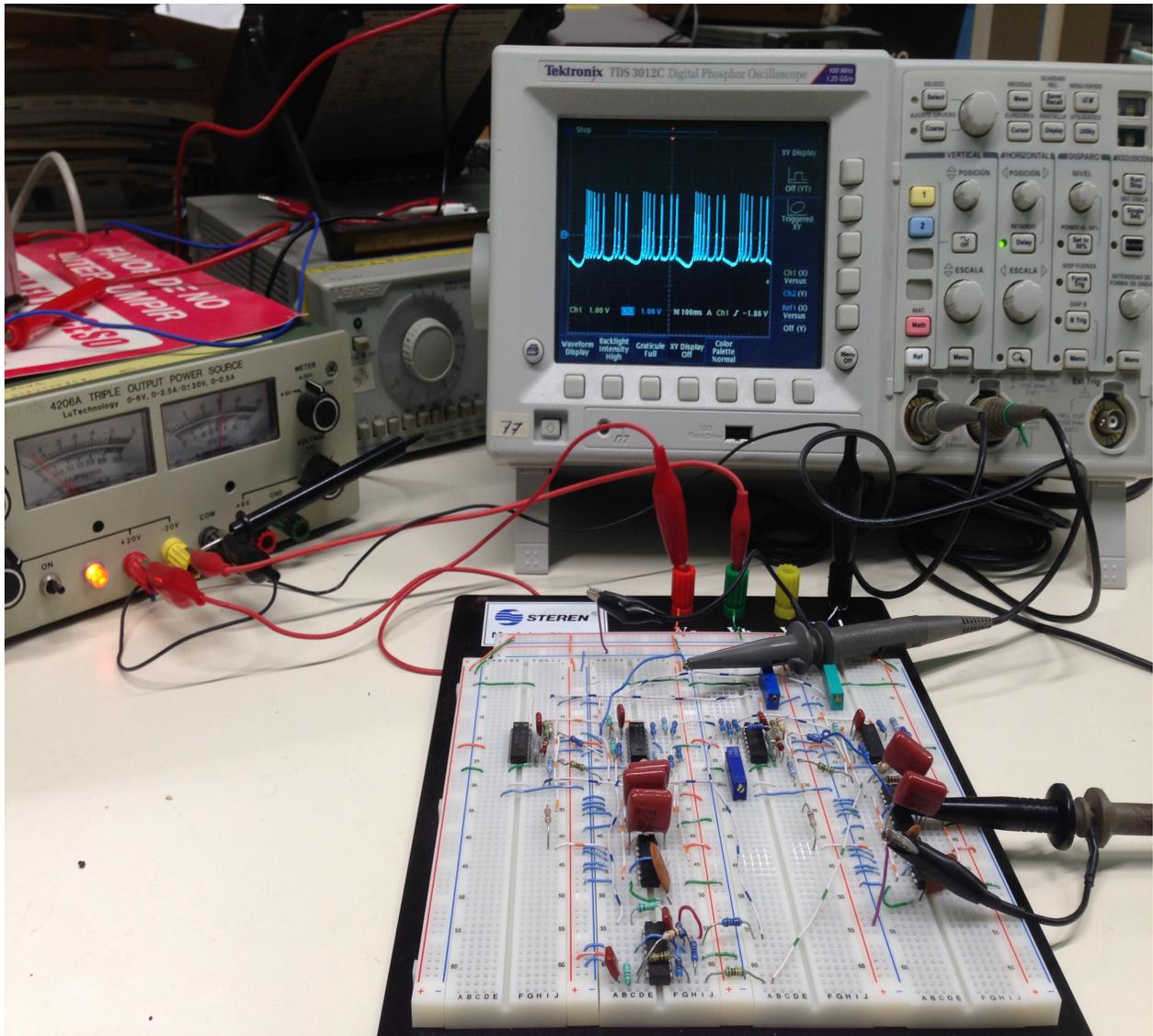


Figura 20. Validación experimental del circuito HR.

3.4. Diseño del circuito impreso (PCB)

En la figura 52 de la sección de anexos se presenta el diagrama del circuito que se implementó en circuito impreso (PCB por sus siglas en inglés). Este circuito cuenta con un circuito regulador de voltaje, un conector para medir las salidas, uno para introducir posibles entradas de control a cada estado, postes de prueba en las salidas de los integradores y en las salidas de voltaje de los potenciómetros que fijan las constantes I , c y x_0 . El diseño del PCB se realizó en Ultiboard que es una extensión de Multisim para el diseño de circuitos impresos. Se decidió diseñar el circuito impreso con todas las pistas en la capa inferior de la placa y así utilizar la capa superior como un plano de tierra para brindar protección contra ruido que pudiera ser generado por el mismo circuito o introducido al circuito desde una fuente externa. La mascarilla del circuito impreso construido se aprecia en la figura 21 y el circuito ya ensamblado se muestra en las figuras 22 y 23.

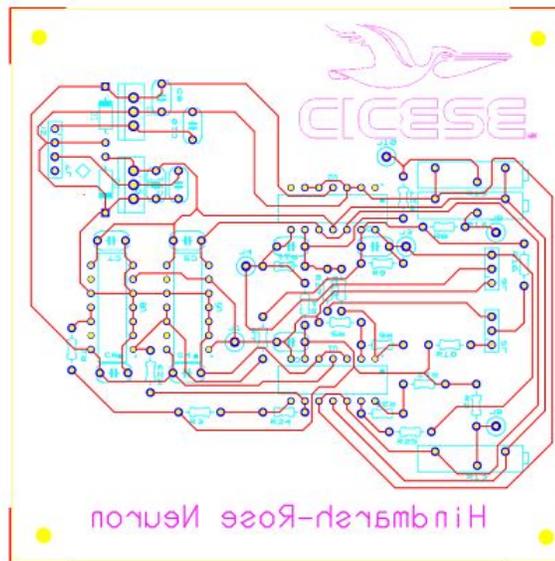


Figura 21. Diseño de la mascarilla del circuito impreso.

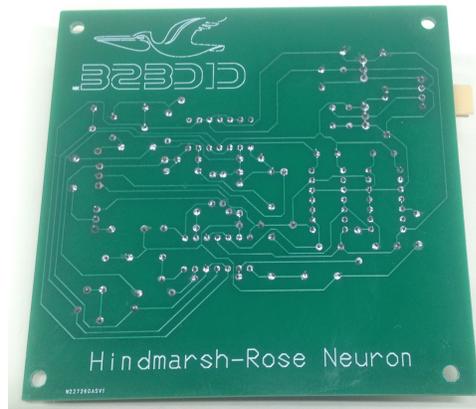


Figura 22. Circuito impreso lado de las pistas.

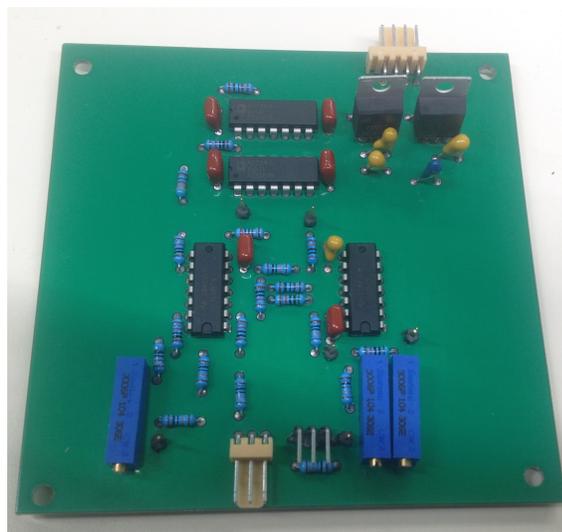


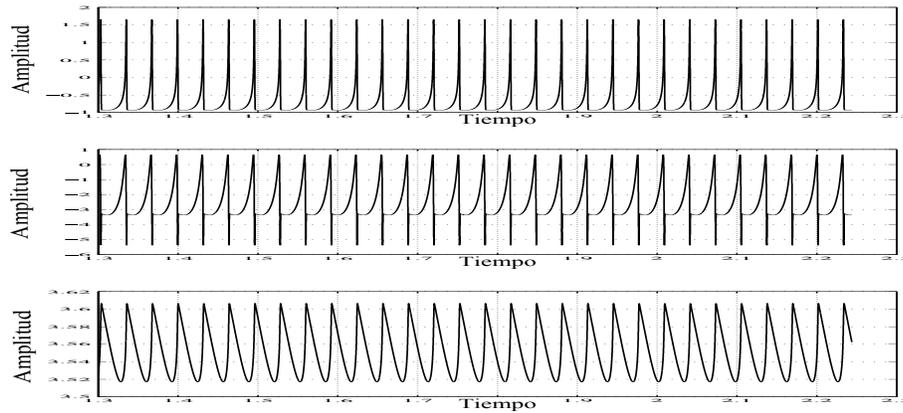
Figura 23. Circuito impreso lado de componentes.

3.5. Validación experimental de la neurona electrónica

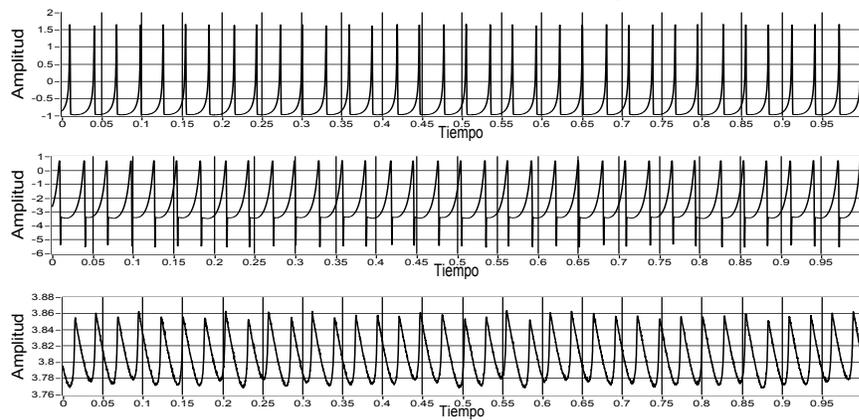
Se realizaron verificaciones del circuito buscando reproducir los comportamientos de “spiking”, “bursting” y “bursting” caótico. Al realizar los experimentos, se encontró que al dejar fijos los parámetros $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $r = 0.005$, $s = 4$, $x_0 = -1.6$ para el reproducir el comportamiento de “bursting caótico” (Hindmarsh y M Rose, 1984), aparte de reproducir este comportamiento variando la entrada I , se pueden generar también los comportamientos de “spiking” y “bursting” periódico. Las simulaciones, como ya se mencionó antes, se realizaron con Multisim 14, y los resultados experimentales fueron obtenidos con la tarjeta de adquisición de datos NI USB-6259.

En las figuras 24, 26 y 28 se observan los resultados obtenidos con el simulador

y el circuito impreso construido para los tres estados del sistema HR (58) x, y, z (de arriba hacia abajo). El comportamiento de “spiking” se muestra en la figura 24.



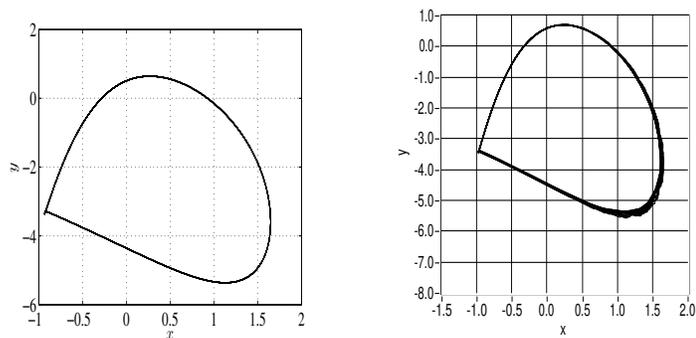
A) Resultados numéricos “spiking”.



B) Resultados experimentales “spiking”.

Figura 24. “Spiking” A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.

En la figura 25 se presenta el plano de fase generado por el estado (x, y) , cuando el circuito se encuentra en comportamiento de “spiking”.

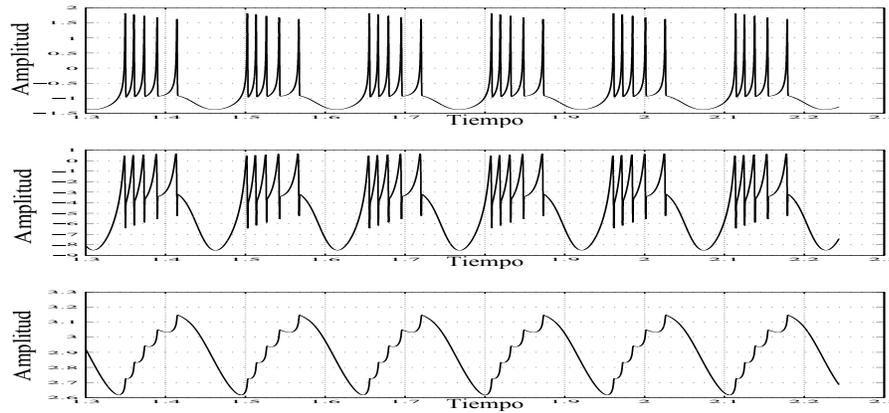


A) Resultados numéricos

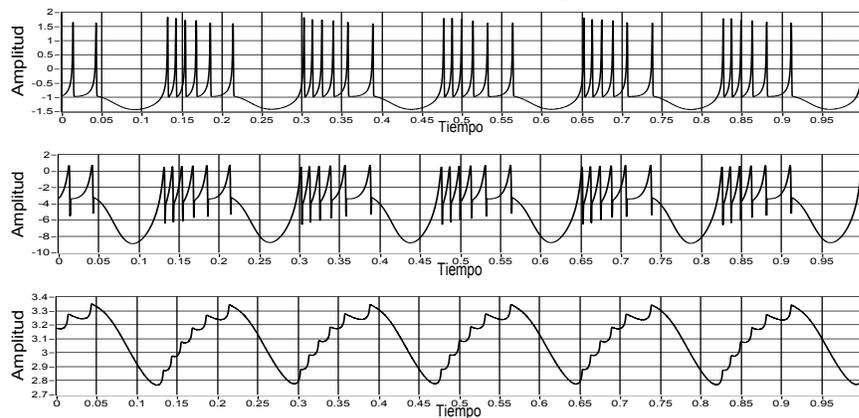
B) Resultados experimentales

Figura 25. Plano de fase (x, y) del circuito de Hindmarsh-Rose en “spiking”. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.

La figura 26 muestra los resultados que se obtuvieron para el comportamiento de “bursting” periódico, tanto para la simulación, como para el circuito impreso.



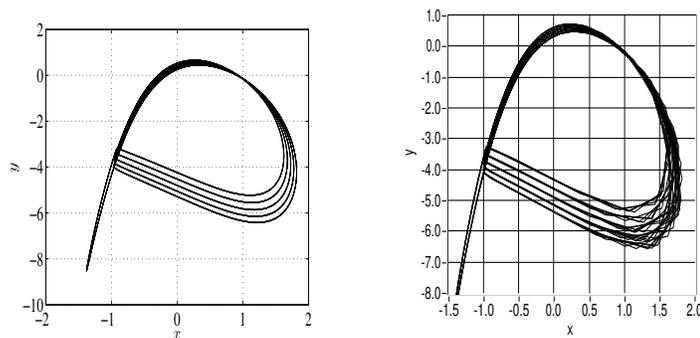
A) Resultados numéricos “bursting” periódico.



B) Resultados experimentales “bursting” periódico.

Figura 26. “Bursting” periódico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.

En la figura 27 se muestra el plano de fase que generan (x, y) con el circuito en comportamiento de “bursting” periódico.

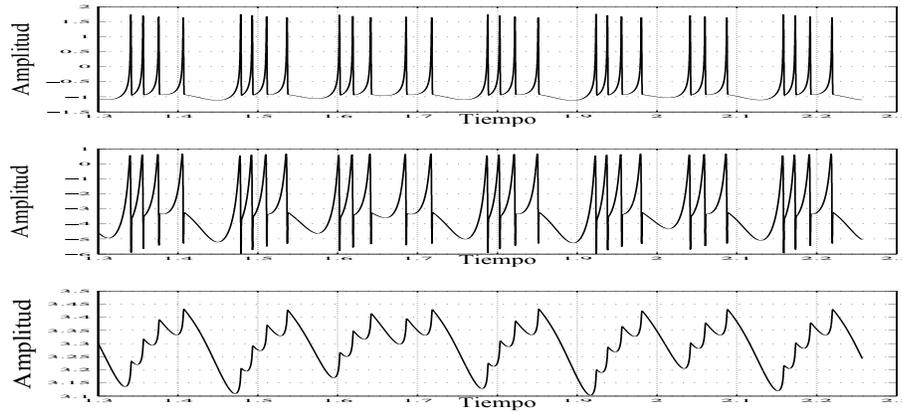


A) Resultados numéricos

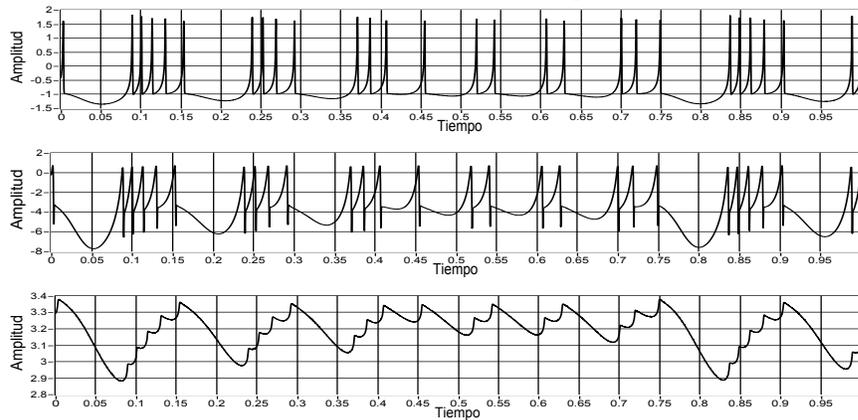
B) Resultados experimentales

Figura 27. Plano de fase (x, y) del circuito de Hindmarsh-Rose en “bursting” periódico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.

Por último, en la figura 28 se muestran los resultados de la simulación y experimentales para el comportamiento de “bursting” caótico.



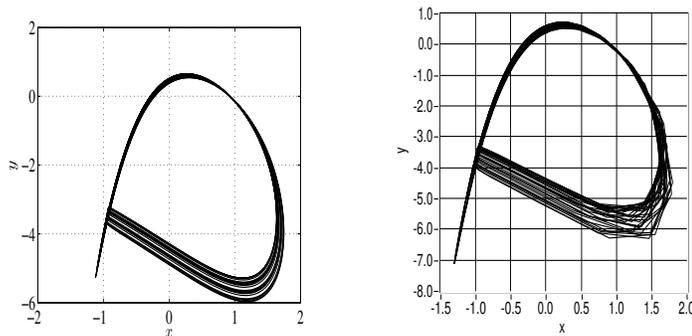
A) Resultados numéricos “bursting” caótico.



B) Resultados experimentales “bursting” caótico.

Figura 28. “Bursting” caótico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.

En la figura 29 se muestra el plano de fase que se genera al graficar (x, y) , cuando el circuito muestra comportamiento de “bursting” caótico.



A) Resultados numéricos

B) Resultados experimentales

Figura 29. Plano de fase (x, y) del circuito de Hindmarsh-Rose en “bursting” caótico. A) Resultados numéricos. B) Resultados experimentales.

Observación 3.1 *Se encontró que se logran reproducir los comportamientos neuronales requeridos, dejando fijos todos los parámetros con excepción de I , la cual, al ser variada alrededor de $3 \pm 0.5V$, hace que el circuito cambie de comportamiento.*

Se implementó satisfactoriamente el modelo HR (58) en circuito impreso, el cual fue utilizado para realizar el estudio experimental descrito en los próximos capítulos. El circuito muestra un buen desempeño en la reproducción de los comportamientos requeridos, y con un voltaje de alimentación de $\pm 15V$ requiere de una corriente de aproximadamente $35mA$. Además, cuenta con un plano de tierra como blindaje contra el ruido y un circuito regulador de voltaje.

Capítulo 4. Sincronización de dos neuronas electrónicas

Este capítulo se enfoca en la sincronización de dos neuronas HR bajo un esquema de acoplamiento dinámico tipo Huygens, la estabilidad del estado de sincronización, se estudiará utilizando la función maestra de estabilidad y los exponentes transversos de Lyapunov.

4.1. Acoplamiento tipo Huygens

Alrededor de 1665, el científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695) escribió una carta a su padre en la cual describe que dos de sus relojes de péndulo recientemente inventados, colgados de un soporte de madera (figura 30), oscilaban en armonía y en direcciones opuestas. A este fenómeno se le conoce actualmente como sincronización en antifase. Después de varios experimentos, Huygens concluyó que este fenómeno se debía a pequeñas vibraciones en la barra de madera de la que colgaban los relojes.

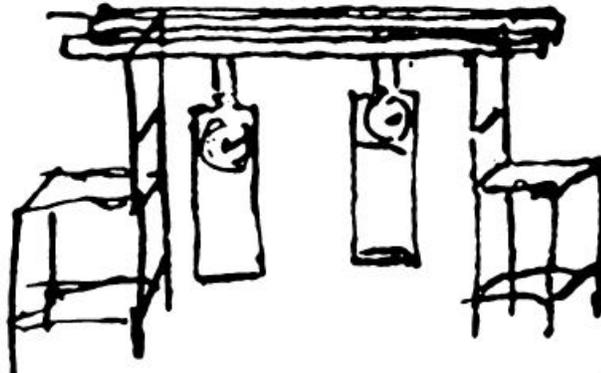


Figura 30. Dibujo original de Huygens.

Un modelo simple para el experimento de Huygens se muestra en la figura 31. En este modelo, los relojes se reemplazan por péndulos simples, cada péndulo se modela como una masa puntual m_i sujeta a una barra de longitud l_i . Se supone un amortiguamiento viscoso y lineal modelado con la constante d_i . El mecanismo del reloj se modela como una entrada de control τ_i para $i = 1, 2$. La barra de madera soportada por las dos sillas se modela como con una barra rígida de masa m_3 sujeta a la pared por medio de un resorte de elasticidad k_3 y un amortiguador viscoso lineal con

constante de amortiguamiento d_3 (Peña Ramirez *et al.*, 2012) (Belykh y Pankratova, 2014).

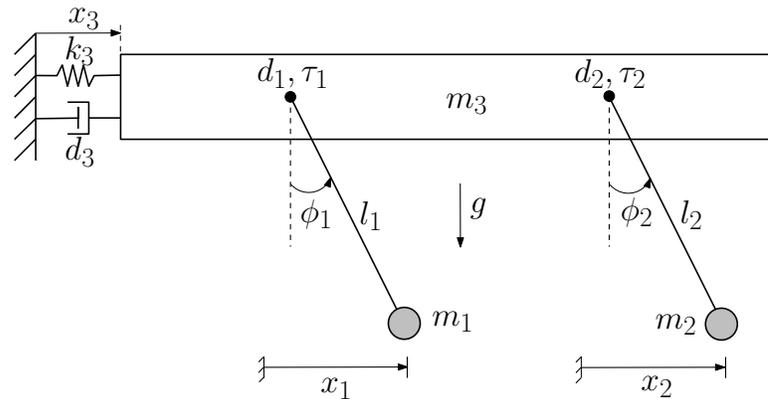


Figura 31. Modelo de Huygens simplificado.

Básicamente, el esquema de sincronización que se presenta a continuación se obtiene reemplazando los péndulos simples por neuronas HR.

4.2. Esquema de sincronización propuesto

El diagrama a bloques del esquema de sincronización propuesto se muestra en la figura 32. En el diagrama se observa claramente que la interacción entre las neuronas es indirecta a través el acoplamiento tipo Huygens.

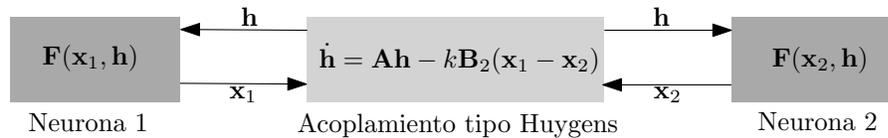


Figura 32. Diagrama a bloques del esquema de sincronización propuesto.

El esquema de sincronización se describe por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}, \\ \dot{\mathbf{h}} &= \mathbf{A}\mathbf{h} - k\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),\end{aligned}\tag{59}$$

donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema i para $i = 1, 2$ y el campo vectorial \mathbf{F} es no lineal. Para el caso particular del sistema HR (9) el vector de estado está dado

por $(\mathbf{x}_i = x_i, y_i, z_i)^T$ y el campo vectorial no lineal \mathbf{F} está dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} y_i + bx_i^2 - ax_i^3 - z_i + I \\ c - dx_i^2 - y_i \\ r[s(x_i - x_0) - z_i] \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Los parámetros se escogen de tal manera que cada neurona desacoplada exhiba comportamiento de “bursting” caótico. Estos parámetros son: $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, r = 0.005, x_0 = 1.6$ y $I = 3.25$. Además, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado del acoplamiento dinámico, y está dado por $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$, con $h_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$, como las variables de estado del acoplamiento, $k \in \mathbb{R}_+$ es la fuerza de acoplamiento y las matrices $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ y $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ se conocen como matrices de acoplamiento.

Se considera el caso que solamente uno de los términos de las matrices \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 es igual a uno mientras los demás son cero. Esta consideración indica que para \mathbf{B}_1 solo una de las variables de estado del acoplamiento dinámico, ya sea h_1 o h_2 , se aplica a una de las ecuaciones del sistema HR. Y la forma de \mathbf{B}_2 , se debe a que solo se utiliza una de las variables de estado del sistema HR como entrada para el acoplamiento dinámico.

La matriz \mathbf{A} del acoplamiento dinámico (59) esta dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

donde α, γ_1 y γ_2 son parametros positivos constantes.

Nótese que para $\alpha = 0$ y $k = 0$, la dinámica de \mathbf{h} (véase la ecuación 59), describe la dinámica de un oscilador masa-resorte-amortiguador, es decir la dinámica del acoplamiento de Huygens, tal y como se describe en la figura 31. Al agregar α en (61), se tiene una mayor flexibilidad para escoger γ_1 y γ_2 (Peña Ramirez *et al.*, 2018).

Un ejemplo similar a este tipo de acoplamiento se puede observar en (Katriel, 2008).

4.2.1. Análisis de estabilidad

La estabilidad de la solución síncrona en los sistemas acoplados (59) se estudia utilizando la función maestra de estabilidad FME, definida anteriormente en el capítulo 2, sección 2.5.1.

El análisis comienza por definir los errores de sincronización $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, además \mathbf{h} se considera un “error” debido a que se desvanece asintóticamente cuando se alcanza la sincronización, es decir cuando $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Después, usando (59) se obtiene la ecuación variacional, la cual está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} D\mathbf{F}(p) & 2\mathbf{B}_1 \\ -k\mathbf{B}_2 & \mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{E}}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ h \end{bmatrix} \quad (62)$$

donde $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es el Jacobiano de la función \mathbf{F} evaluada en la solución $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ de un nodo aislado, es decir $\mathbf{x}(t)$ es la solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

El Jacobiano de la función \mathbf{F} , véase la ecuación (60), está dado por

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 6x - 3x^2 & 1 & -1 \\ -10x & -1 & 0 \\ rs & 0 & -r \end{pmatrix}. \quad (63)$$

La estabilidad de la solución síncrona $\mathbf{e} := (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{h})^T$ puede ser estudiada calculando el máximo exponente transverso de Lyapunov λ_{max}^\perp de la ecuación variacional (62), tal y como se definió en el capítulo 2. Recordemos que si $\lambda_{max}^\perp < 0$ la solución síncrona es localmente estable y si $\lambda_{max}^\perp > 0$ dicha solución es inestable.

4.3. Estudio numérico

En esta sección, la estabilidad de la sincronización de un par de neuronas HR acopladas con un acoplamiento dinámico tipo Huygens se estudia numéricamente, calculando el máximo exponente de Lyapunov λ_{max}^\perp de la ecuación variacional (62) como

función de la fuerza de acoplamiento k .

En el análisis, los parámetros del modelo HR se escogen tal y como se mencionó abajo de la ecuación (60), de tal manera que el modelo exhibe “bursting” caótico. Los parámetros que se utilizaron en el acoplamiento dinámico son $\alpha = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = k$ y k es variada en el intervalo $k \in [0, 15]$. Para calcular λ_{max}^\perp se utiliza una versión modificada del algoritmo de Wolf (Wolf *et al.*, 1985).

4.3.1. Análisis para diferentes configuraciones

El análisis de estabilidad se realiza para diferentes configuraciones de acoplamiento, las cuales están determinadas por las matrices \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 . En total existen 9 diferentes configuraciones posibles. Para cada una de ellas, se calculan los exponentes transversos de Lyapunov λ_{max}^\perp .

4.3.1.1. Configuración 1-1

La primer configuración que se considera es el caso en el que las matrices de acoplamiento \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 están dadas por

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Nos referimos a esta configuración como 1-1 debido a que se utiliza la primera variable de estado de cada sistema HR; es decir x , como entrada para el acoplamiento dinámico, y la señal h_2 se usa como señal de acoplamiento aplicada a la primera ecuación de cada sistema HR.

Luego, utilizando \mathbf{F} como esta dada en (60), \mathbf{A} como (61) y las matrices de acoplamiento \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 como están dadas en (64), el sistema (59) toma la forma:

$$HR 1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + bx_1^2 - ax_1^3 - z_1 + I + h_2, \\ \dot{y}_1 = c - dx_1^2 - y_1, \\ \dot{z}_1 = r[s(x_1 - x_0) - z_1], \end{cases} \quad (65)$$

$$HR 2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 + bx_2^2 - ax_2^3 - z_2 + I + h_2, \\ \dot{y}_2 = c - dx_2^2 - y_2, \\ \dot{z}_2 = r[s(x_2 - x_0) - z_2], \end{cases} \quad (66)$$

$$\mathbf{h} : \begin{cases} \dot{h}_1 = h_2 - \alpha h_1, \\ \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (67)$$

Reemplazando $D\mathbf{F}$ dado en (63), \mathbf{A} dada en (61), \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 como (64) en la ecuación variacional (62), se obtiene la siguiente matriz $\tilde{\mathbf{E}}$, véase la ecuación (62).

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 2bx - ax^2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2dx & -1 & 0 & 0 & 0 \\ rs & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & -k & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

El resultado del cálculo del exponente transverso de Lyapunov se muestra en la figura 33. Podemos observar que utilizando h_2 para una $k > 2.2$ tenemos $\lambda_{max}^\perp < 0$ por tanto para una $k > 2.2$ la solución sincrona será localmente estable.

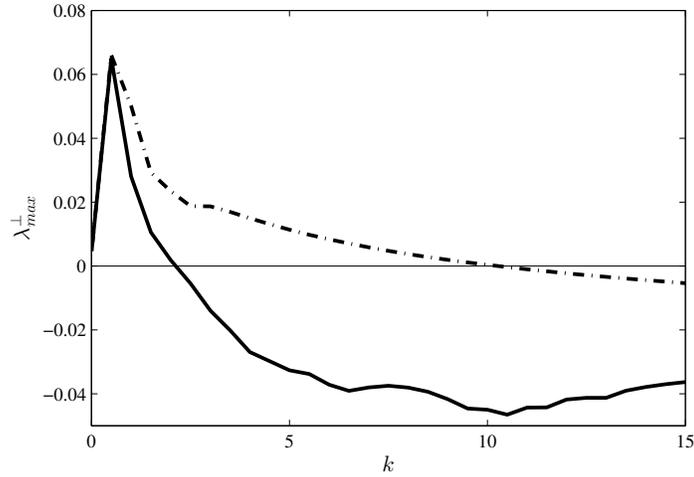


Figura 33. Máximo exponente de transverso de Lyapunov λ_{max}^{\perp} para la configuración 1-1. Línea punteada: λ_{max}^{\perp} acoplado con h_1 . Línea sólida: λ_{max}^{\perp} acoplado con h_2 .

Previamente, se utilizó h_2 como señal de acoplamiento. Sin embargo, para el caso en el que se utilice h_1 como señal de acoplamiento, se utiliza la siguiente matriz \mathbf{B}_1

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Como se observa en la figura 33, la línea punteada indica que para tener una solución síncrona estable utilizando h_1 como señal de acoplamiento se requiere de una $k > 10.5$.

Claramente, se puede observar que cuando se utiliza h_2 como señal de acoplamiento, la fuerza de acoplamiento k requerida es menor que cuando se utiliza la señal h_1 .

4.3.1.2. Configuraciones restantes

Para obtener las configuraciones entrada-salida restantes se realizan los cambios necesarios en las matrices \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 . En la tabla 2, se muestran las matrices correspondientes a cada configuración.

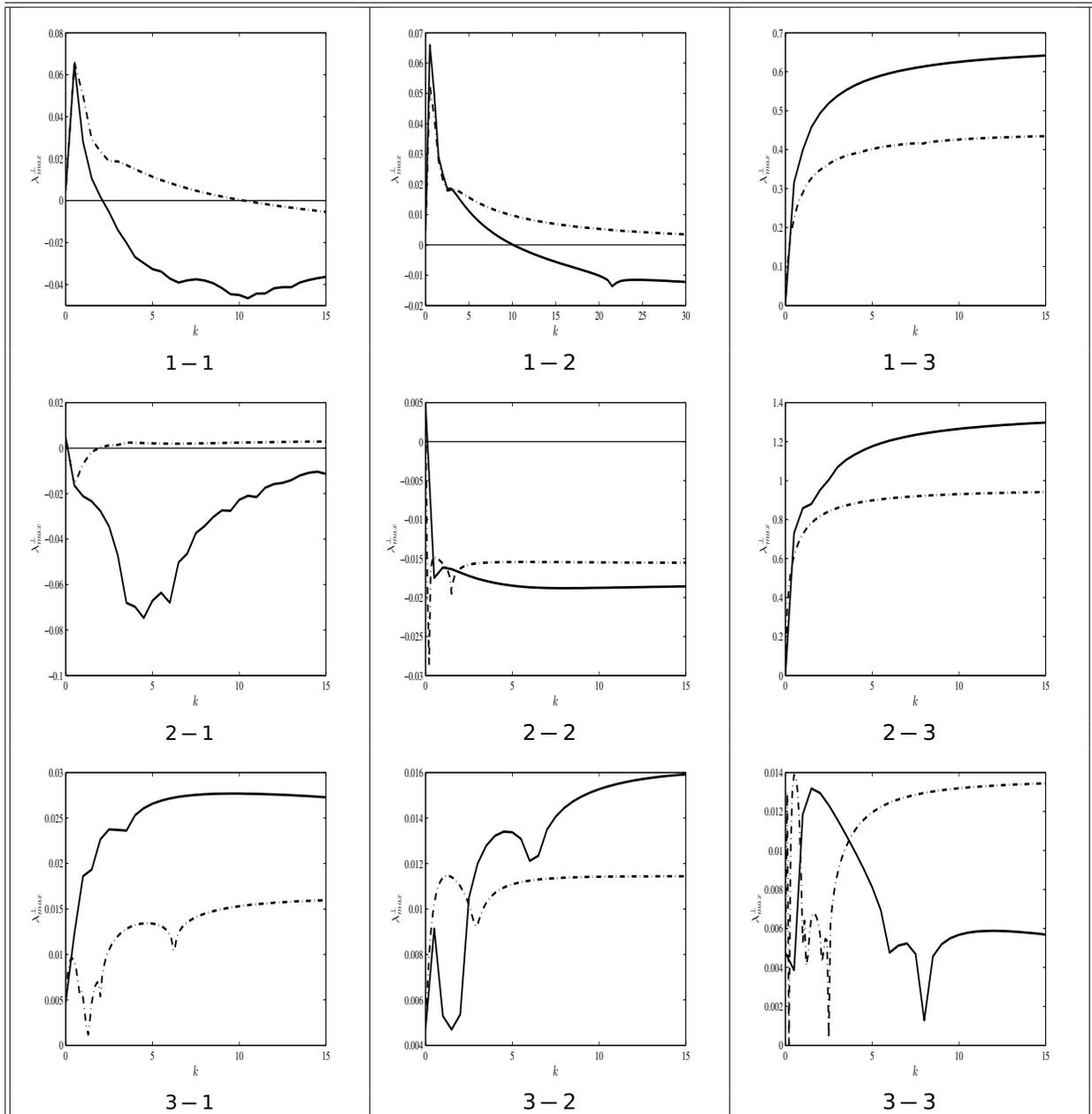
Tabla 1. Matrices de acoplamiento para diferentes configuraciones.

Configuración	Matrices \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2	
1-1	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (70)
1-2	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (71)
1-3	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (72)
2-1	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (73)
2-2	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (74)
2-3	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (75)
3-1	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (76)
3-2	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (77)
3-3	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (78)

En estas matrices se considera h_2 como la señal de acoplamiento. Para el caso cuando se utiliza h_1 , se deben intercambiar las columnas en la matriz \mathbf{B}_1 para cada configuración, tal y como se observa en el ejemplo de la configuración 1-1, véase la ecuación (69).

A continuación, se muestran las gráficas de los exponentes transversos de Lyapunov correspondientes a cada configuración presentada en la tabla 2.

Tabla 2. λ_{max}^\perp para diferentes configuraciones. Línea punteada: h_1 como señal de acoplamiento. Línea sólida: h_2 como señal de acoplamiento.



Como se puede observar en la solución síncrona será localmente estable para las configuraciones, 1-1, 1-2, 2-1 y 2-2. En todas las configuraciones en las que aparece el tercer estado no se encuentran valores de λ_{max}^\perp negativos, por lo cual la solución síncrona, cuando se utiliza el tercer estado en cualquier configuración, será inestable.

4.4. Resultados experimentales

El esquema de sincronización propuesto se validó experimentalmente utilizando neuronas electrónicas HR que se implementaron en tablilla de pruebas. Además, el acoplamiento dinámico también se construyó en tablilla de pruebas utilizando amplificadores operacionales TL084 y componentes pasivos (resistencias y capacitores) como se muestra en la figura 53 de la sección de anexos.

Como se mencionó en el capítulo 3, los circuitos están se escalaron en tiempo e igualmente el acoplamiento dinámico se escaló en el mismo factor. Las ecuaciones que se escalaron e implementaron en circuito electrónico, son las siguientes.

$$HR\ 1 : \begin{cases} \omega \dot{x}_1 = y_1 + bx_1^2 - ax_1^3 - z_1 + I + h_2, \\ \omega y_1 = c - dx_1^2 - y_1, \\ \omega \dot{z}_1 = r[s(x_1 - x_0) - z_1], \end{cases} \quad (79)$$

$$HR\ 2 : \begin{cases} \omega \dot{x}_2 = y_2 + bx_2^2 - ax_2^3 - z_2 + I + h_2, \\ \omega y_2 = c - dx_2^2 - y_2, \\ \omega \dot{z}_2 = r[s(x_2 - x_0) - z_2], \end{cases} \quad (80)$$

$$\mathbf{h} : \begin{cases} \omega \dot{h}_1 = h_2 - \alpha h_1, \\ \omega \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (81)$$

Para los sistemas HR se utilizan los valores de parámetros ya mencionados para reproducir “bursting” caótico y $\omega = 0.001$. Los parámetros para el acoplamiento son $\alpha = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = k$ y $k = 10$.

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron para la configuración 1-1. La figura 34 se muestran las series de tiempo correspondientes a las señales x_1 (azul oscuro) y x_2 (azul claro). Como se puede ver, las señales están sincronizadas.

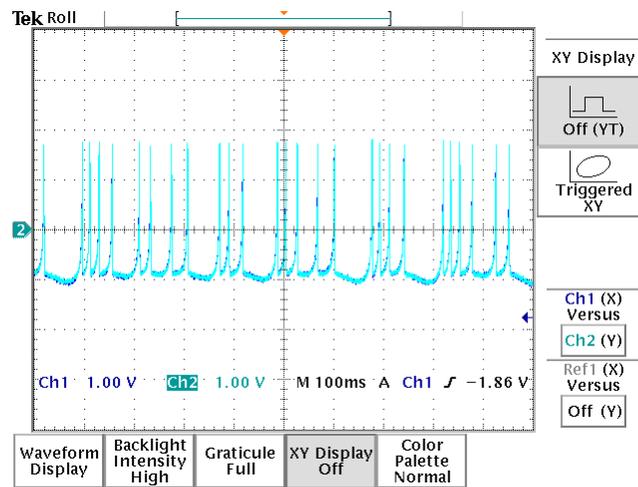


Figura 34. Neuronas HR sincronizadas en “bursting” caótico, x_1 (azul oscuro), x_2 (azul claro).

La sincronización es más notable cuando se observa el plano de fase (figura 35), el cual muestra los resultados en el plano (x_1, x_2) . Si los sistemas están sincronizados $x_1 = x_2$ se espera observar una línea recta a 45° .

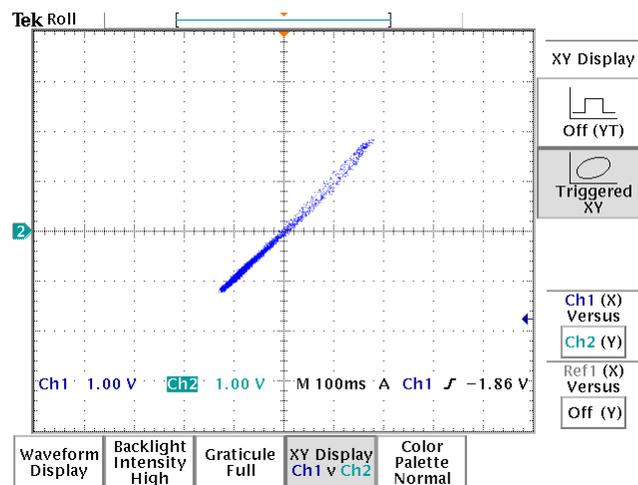


Figura 35. Plano de fase generado por 2 neuronas HR sincronizadas en “bursting” caótico (x_1, x_2) .

En la figura 36 se muestra la señal h_2 cuando las neuronas se encuentran sincronizadas.

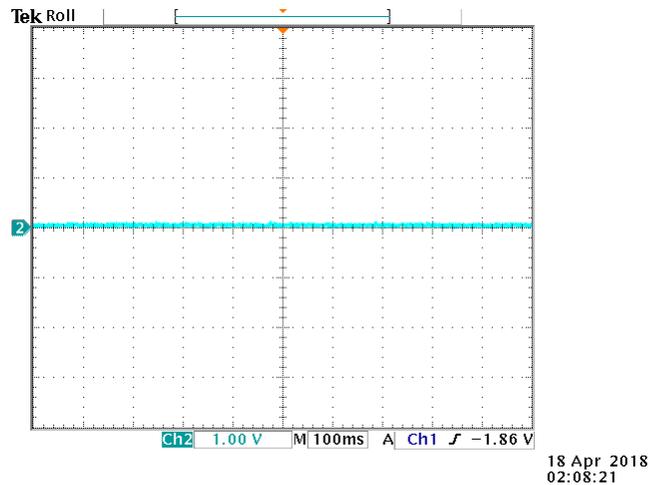


Figura 36. Señal h_2 del acoplamiento dinámico para el caso de 2 neuronas HR sincronizadas en “bursting” caótico.

Idealmente, h_2 debería ser exactamente cero. Sin embargo, debido a las inevitables diferencias entre los circuitos, la señal h_2 no se desvanece por completo.

Por otra parte, en la figura 37 se muestra la señal h_2 cuando se encuentra desconectado el acoplamiento y las neuronas están fuera de sincronización es decir $x_1 \neq x_2$.

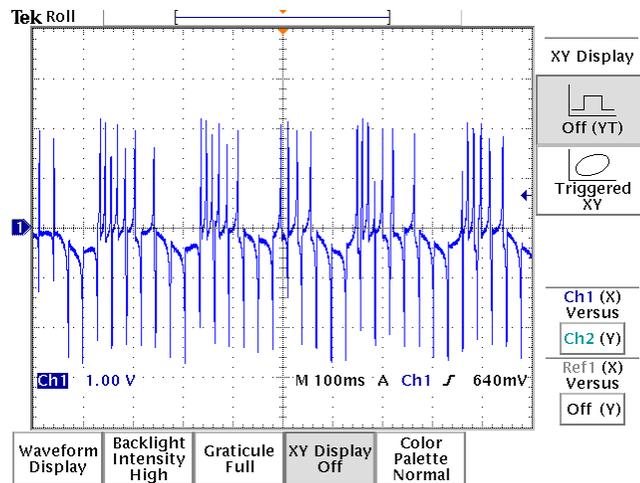


Figura 37. Señal h_2 del acoplamiento dinámico para el caso que no hay sincronización.

Finalmente, la figura 38 presenta el plano de fase generado por (x_1, y_2) . Como se puede observar, tiene la forma del atractor que se genera con una sola neurona HR en comportamiento de “bursting” caótico.

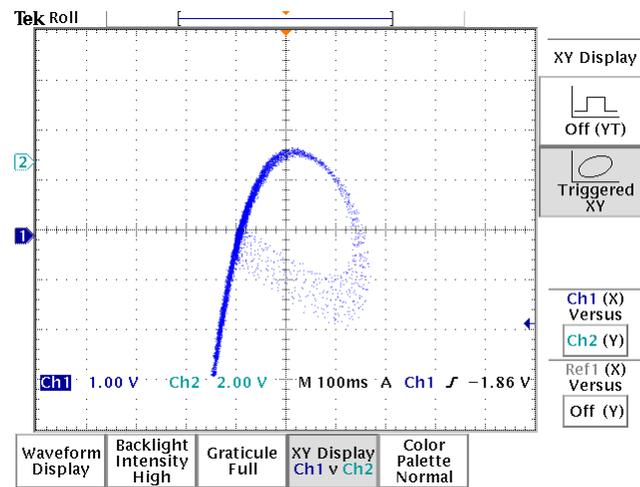


Figura 38. Plano de fase generado por (x_1, y_2) con ambas neuronas HR sincronizadas.

4.5. Discusión

Se comprobó numérica y experimentalmente que el esquema de sincronización propuesto, el cual está inspirado en el acoplamiento de Huygens, puede sincronizar exitosamente un par de neuronas HR.

Una de las principales diferencias del esquema aquí propuesto con respecto a los esquemas reportados en la literatura es que la interacción entre las neuronas HR es indirecta.

La estabilidad de la solución síncrona de los sistemas acoplados se investigó utilizando la función maestra de estabilidad y el máximo exponente transversal de Lyapunov. Los resultados que se obtuvieron muestran que la señal h_2 parece tener un mejor desempeño para inducir sincronización que la señal h_1 , ya que requiere de una menor fuerza de acoplamiento. Además, el estado de sincronización se alcanza más “rápidamente” cuando h_2 es considerada como señal de acoplamiento. Sin embargo, el análisis también reveló que existen casos en los que el esquema propuesto no es capaz de inducir sincronización.

Por otra parte, el análisis realizado por medio de la función maestra de estabilidad es limitado, ya que solo proporciona condiciones necesarias para la estabilidad de la solución síncrona. Por lo tanto aún se requiere un análisis más riguroso para la estabilidad de la solución síncrona.

Capítulo 5. Sincronización de una red de neuronas electrónicas

Cuando se utilizan acoplamientos estáticos existen limitaciones para ciertas topologías de red, en cuanto el número de nodos que se pueden sincronizar, es decir para un número de nodos suficientemente grande la solución síncrona es inestable. Para resolver esta limitación, en este capítulo se presenta un nuevo esquema de sincronización en el que los acoplamientos estáticos se reemplazan por acoplamientos dinámicos.

La estabilidad de la solución síncrona se estudia utilizando la función maestra de estabilidad. Como ejemplo particular se considera una red de neuronas electrónicas conectadas en una topología de red en estrella. Además, se presenta una comparación entre los resultados obtenidos usando acoplamientos estáticos y los resultados que se obtuvieron usando acoplamientos dinámicos. Finalmente, se presenta un estudio experimental que valida los resultados semi-análíticos y numéricos obtenidos.

5.1. Función maestra de estabilidad para la sincronización de redes con acoplamientos dinámicos

Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}^i, \quad (82)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{A} \mathbf{h}^i - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (83)$$

donde $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado correspondiente al nodo i , la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe la dinámica de un nodo aislado, G_{ij} determina la fuerza de interacción entre los nodos i y j , $\mathbf{h}^i \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado del acoplamiento dinámico, k es la fuerza de acoplamiento, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ y $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ son vectores de acoplamiento los cuales solo tienen un término igual a uno y los demás igual a cero. La forma de \mathbf{B}_1 se debe a la suposición de que el acoplamiento dinámico solo se aplica a un estado del sistema del nodo i y para la elección de \mathbf{B}_2 se supone que solo una de las variables de estado del nodo i esta disponible para medirse. Finalmente $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz que contiene los

parámetros de control del acoplamiento dinámico y está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

donde α , γ_1 y γ_2 son parámetros positivos de diseño. Definiendo \mathbf{x} , \mathbf{F} y \mathbf{G} como sigue

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = [G_{ij}], \quad (85)$$

y $\mathbf{h} = [\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N]^T$, la red descrita en (82)-(83) pueden escribirse como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \mathbf{h}, \quad (86)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} \mathbf{h} - k \mathbf{G} \otimes \mathbf{B}_2 \mathbf{x}, \quad (87)$$

donde $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Las ecuaciones (86)-(87) describen una red de N nodos interactuando por medio de acoplamientos dinámicos. La solución síncrona está dada por

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \dots = \mathbf{x}^N = \mathbf{s}(t), \quad \mathbf{h}^1 = \mathbf{h}^2 = \dots = \mathbf{h}^N = \mathbf{0}, \quad (88)$$

donde $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un vector, el cual todos sus términos son cero, y

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}), \quad (89)$$

es la solución de un nodo aislado.

5.1.1. Análisis de estabilidad

Como se mencionó anteriormente, el análisis de estabilidad de la solución síncrona (88) se realiza utilizando la llamada función maestra de estabilidad. Como primer paso

se linealiza la red dada en (82)-(83) alrededor de la solución síncrona (88), obteniéndose

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}) + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}^i, \quad (90)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{A} \mathbf{h}^i - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{B}_2 (\mathbf{x}^j - \mathbf{s}). \quad (91)$$

Después, se definen los siguientes errores de sincronización

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{x}^1 - \mathbf{s}, \mathbf{e}^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{s}, \dots, \mathbf{e}^N = \mathbf{x}^N - \mathbf{s}, \quad \mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N. \quad (92)$$

Nótese que todos los estados $\mathbf{h}^i, i = 1, 2, \dots, N$, que corresponden a los acoplamientos dinámicos, son considerados como “errores” ya que cuando se alcanza la sincronización, las señales de acoplamiento se desvanecen. Después, usando (89) a (91), se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^i} \mathbf{e}^i + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}^i, \quad (93)$$

$$\dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{A} \mathbf{h}^i - k \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{B}_2 \mathbf{e}^j. \quad (94)$$

Debido a que se supone que todos los nodos en la red son idénticos, se tiene que todos los Jacobianos de la función \mathbf{f} , evaluados en la solución síncrona $\mathbf{s}(t)$ son idénticos, es decir

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^1} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^2} = \dots = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^N}. \quad (95)$$

Este hecho permite escribir la dinámica del error en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k \mathbf{G} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

donde $\mathbf{Df}(\mathbf{s})$ describe el Jacobiano de la función \mathbf{f} evaluado en la solución $\mathbf{s}(t)$ de un nodo aislado. Además, $\mathbf{e} = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^N]$ y $\mathbf{h} = [\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N]$.

El siguiente paso consiste en diagonalizar a bloques la ecuación (96). Para ello se define la siguiente transformación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{h}} \end{bmatrix}, \quad (97)$$

donde $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de la matriz de conectividad \mathbf{G} , $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{I}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son matrices identidad. Por otra parte, $\mathbf{0}_1 \in \mathbb{R}^{nN \times 2N}$ y $\mathbf{0}_2 \in \mathbb{R}^{2N \times nN}$ son matrices de ceros.

En las nuevas coordenadas $(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{h}})$, la ecuación (96) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{h}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Df}(\mathbf{s}) & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1 \\ -k\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{B}_2 & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{h}} \end{bmatrix}, \quad (98)$$

donde $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad y $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios σ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ de la matriz de conectividad \mathbf{G} .

La ecuación (98) es una matriz diagonal a bloques compuesta por N bloques de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}^i} \\ \dot{\bar{\mathbf{h}}^i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{DF}(\mathbf{s}) & \mathbf{B}_1 \\ -k\sigma_i \mathbf{B}_2 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^i \\ \bar{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (99)$$

Finalmente, la estabilidad de la solución síncrona (88) se determina calculando el máximo exponente transverso de Lyapunov $\lambda_i^{\perp max}$, para cada ecuación variacional (99), el cual está dado por

$$\lambda_i^{\perp max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln |\tilde{\mathbf{e}}^i(t)| - \ln |\tilde{\mathbf{e}}^i(0)|). \quad (100)$$

Se tienen las siguientes condiciones para la estabilidad local de la solución síncrona (88)(Pikovsky *et al.*, 2003):

Si $\lambda_i^{\perp max} < 0$, para toda $i = 2, \dots, N$, el estado de sincronización es localmente estable.

Si $\lambda_i^{\perp max} > 0$, para al menos una $i = 2, \dots, N$, el estado de sincronización es inestable.

5.2. Sincronización de una red de neuronas HR utilizando acoplamientos estáticos

Como se mencionó anteriormente, cuando se utilizan acoplamientos estáticos para ciertas configuraciones entrada-salida, existe una limitación, la cual se presenta cuando el número de nodos en la red se incrementa, es decir, se pierde sincronización y la solución síncrona se vuelve inestable.

En esta sección se muestra esta limitación para el caso de una red de neuronas tipo HR con topología de estrella. De acuerdo con (Huang *et al.*, 2009), cuando la salida del modelo HR (9) es la variable “ y ”, y el término de acoplamiento estático se aplica a la primera ecuación del modelo (9), entonces el máximo número de neuronas que se pueden conectar es 3.

Para mostrar esto, considere la red (34) con $N = 3$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3]$ y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

Y $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es como se definió en (29) con $\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)$ dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^i) = \begin{bmatrix} y_i + bx_i^2 - ax_i^3 - z_i + I \\ c - dx^2 - y \\ r[s(x_i - x_0) - z_i] \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (102)$$

Con los siguientes parámetros $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.005, s = 4, x_0 = -1.6, I = 3.25$.

5.2.1. Análisis de estabilidad

A continuación, la estabilidad de la solución síncrona en la red en estrella de 3 nodos (34), (101)-(102), se determina usando la función maestra de estabilidad, tal y como se discutió en la sección 2.5.2.

Primero, se obtiene la ecuación variacional (44), la cual, para el ejemplo bajo consideración, está dada por

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \begin{bmatrix} 6x - 3x^2 & 1 - k * \sigma_i & -1 \\ -10x & -1 & 0 \\ rs & 0 & -r \end{bmatrix} \mathbf{e}^i \quad (103)$$

Después, se calculan los máximos exponentes transversos de Lyapunov de la ecuación (103) para todos los valores propios de la matriz de interconectividad \mathbf{G} dada en (101), los cuales son

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 3. \quad (104)$$

Para el cálculo de $\lambda_i^{\perp max}$, se utiliza el algoritmo de Wolf (Wolf *et al.*, 1985) y los resultados se muestran en la figura 39.

En la figura 39, se observa que $\lambda_i^{\perp max} < 0$ solo para $0.33 < k < 0.48$. Por lo tanto, la solución síncrona $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^3$ será localmente estable, solo para valores de k dentro del intervalo antes mencionado.

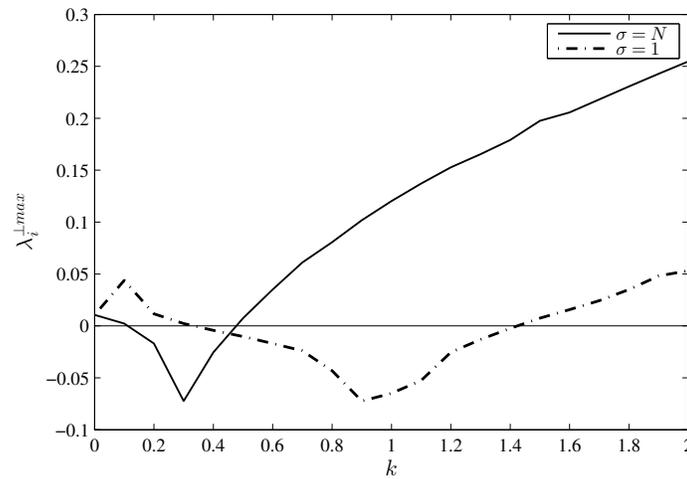


Figura 39. $\lambda_i^{\perp max}$ para una red en estrella de 3 neuronas HR con acoplamiento estático.

Sin embargo, si se agrega un nodo a la red, la sincronía se pierde, tal y como se muestra en la figura 40.

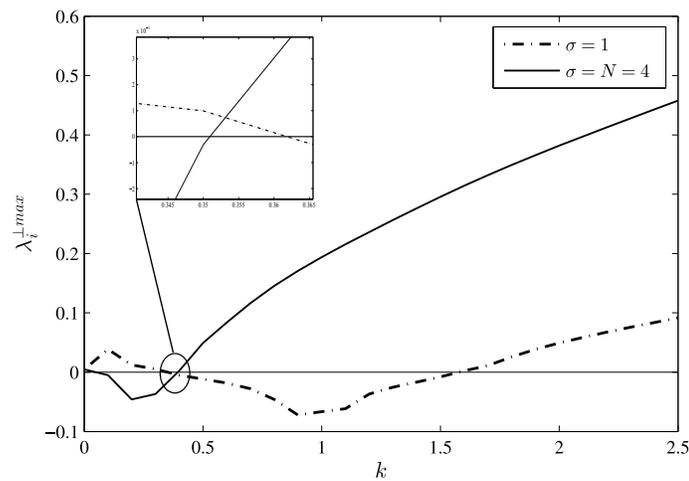


Figura 40. $\lambda_i^{\perp max}$ para una red en estrella de 4 neuronas HR con acoplamiento estático.

Como se puede observar en esta figura las gráficas nunca se intersectan en la región negativa, por lo que la solución síncrona es inestable.

5.2.2. Resultados numéricos

Finalmente, se presentan algunos resultados numéricos. En un primer estudio, la ecuación (34), (101)-(102) se integra numéricamente con los parámetros tal y como se

definieron en (102) y condiciones iniciales $\mathbf{x}^1(0) = [-1.6, 0, 0]$, $\mathbf{x}^2(0) = [-1.56, 0, 0]$, $\mathbf{x}^3(0) = [-1.62, 0, 0]$. El valor de k se fija en $k = 0.4$. Nótese que para este valor de k , $\lambda_i^{\perp max} < 0$, véase la figura 39, y por lo tanto se espera que la red se sincronice. De hecho, como se muestra en la figura 41, todos los sistemas HR se sincronizan.

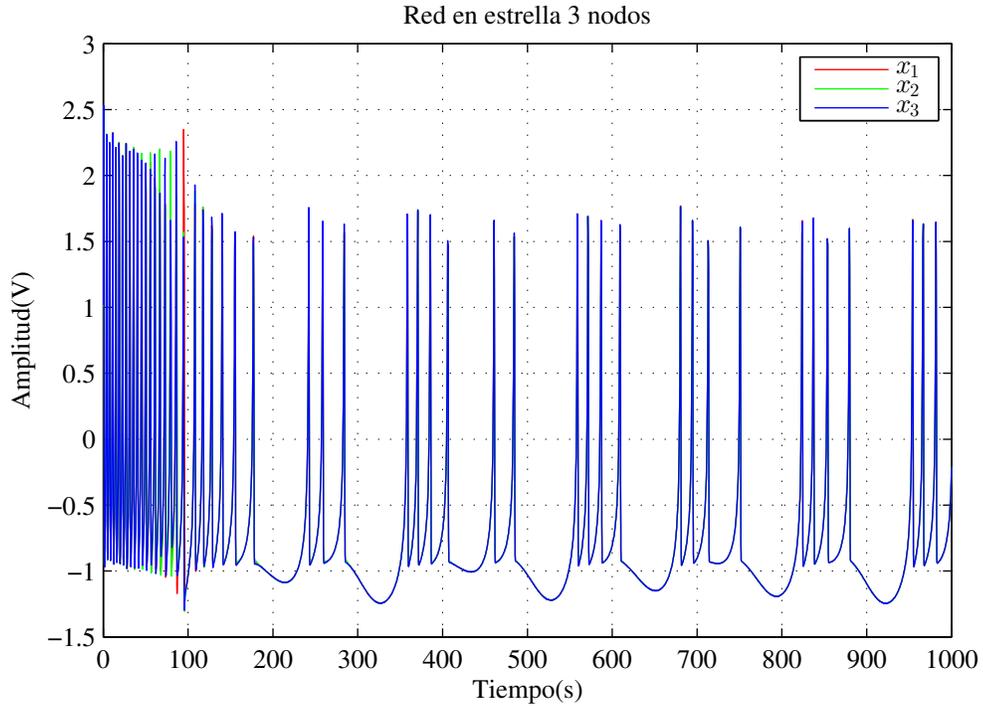


Figura 41. Sincronización de una red en estrella de 3 neuronas HR con acoplamientos estáticos.

Sin embargo, si el número de nodos en la red se incrementa a 4, la red no se sincroniza, tal y como se muestra en la figura 42. Note que este resultado coincide con el resultado presentado en la figura 40.

Este ejemplo claramente ilustra que cuando el número de nodos se incrementa es imposible sincronizar la red.

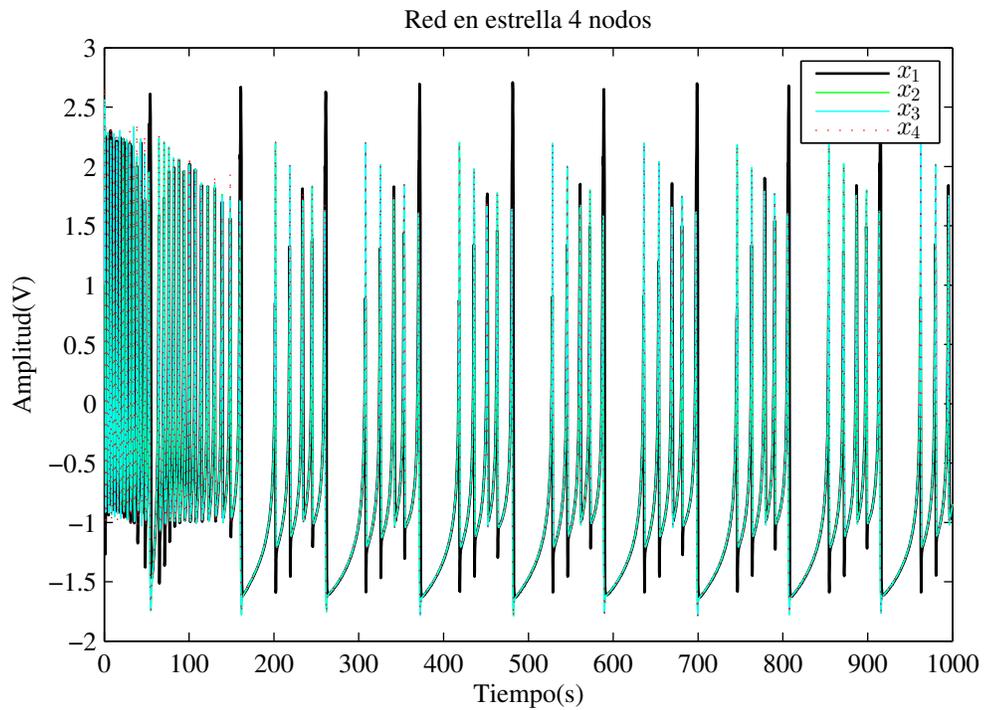


Figura 42. Simulación de una red en estrella de 4 neuronas HR con acoplamientos estáticos. La red no se sincroniza.

5.3. Sincronización de una red de neuronas electrónicas HR utilizando acoplamientos dinámicos

Ahora se mostrará que si los acoplamientos estáticos se reemplazan por acoplamientos dinámicos, la red de neuronas HR se sincroniza aún si el número de nodos es “grande”.

En la figura 43 se observa un diagrama del esquema de sincronización propuesto para la red en estrella, utilizando los acoplamientos dinámicos tipo Huygens.

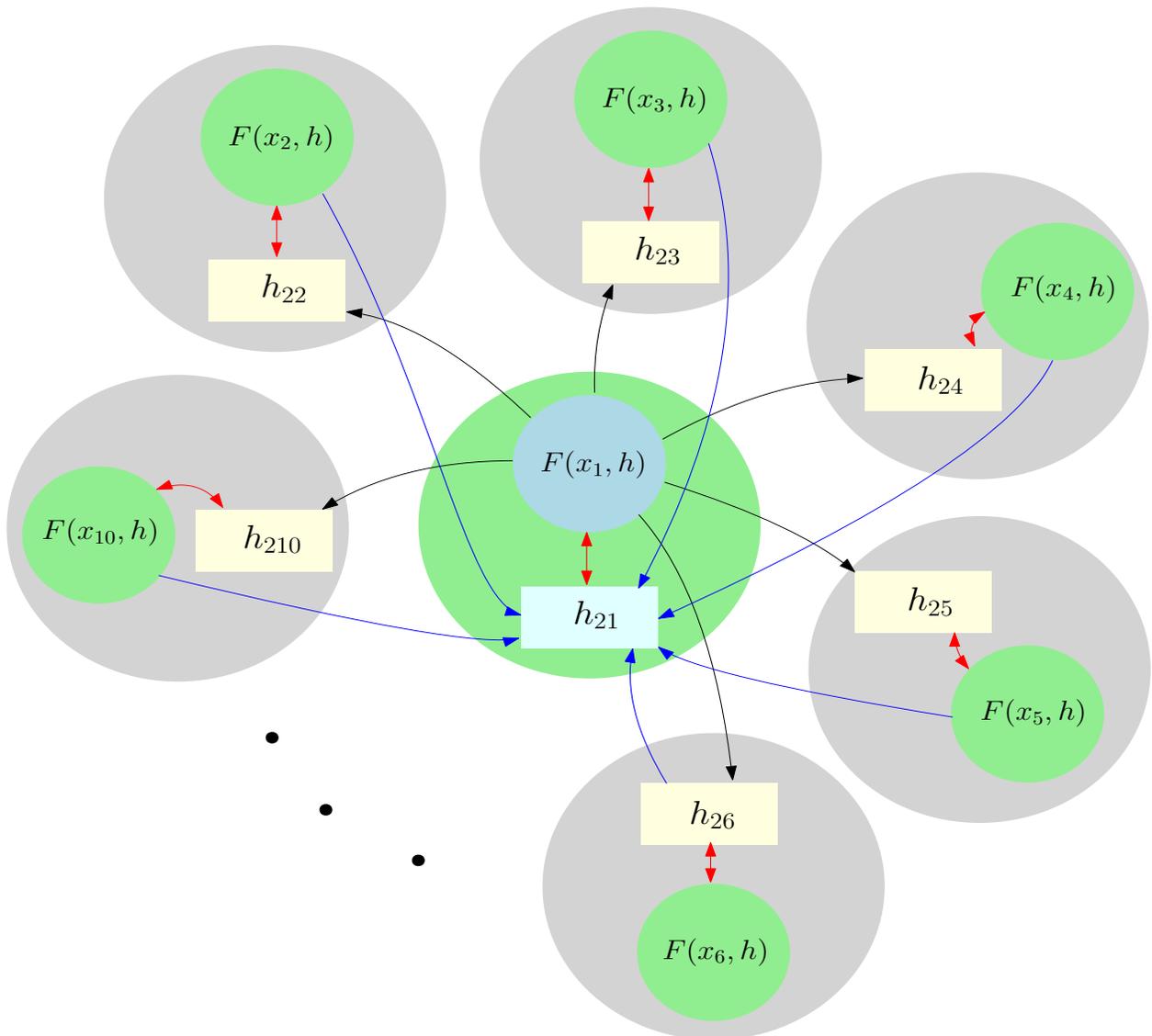


Figura 43. Diagrama de una red en estrella de neuronas HR con acoplamientos dinámicos.

Como se puede observar de la figura 43, las conexiones entre los sistemas son indirectas ya que se hacen a través del acoplamiento dinámico que se agrega a cada sistema HR. Tal y como se consideró en la sección anterior, se asume que la salida medible de cada neurona HR (9) es la variable “y” y se considera el caso en que el término de acoplamiento se aplica a la primer ecuación del sistema (9). Por lo tanto, la red de la figura 43 puede escribirse en la forma (86)-(87) con $N = 10$,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^i) = \begin{bmatrix} y_i + bx_i^2 - ax_i^3 - z_i + I \\ c - dx^2 - y \\ r[s(x_i - x_0) - z_i] \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (105)$$

Con los siguientes parámetros $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, r = 0.005, s = 4, x_0 = -1.6, I = 3.25$, y las matrices de acoplamiento

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (106)$$

Además, los parámetros de la matriz \mathbf{A} , véase (84), se escogen como sigue

$$\gamma_1 = 3, \quad \gamma_2 = 3k, \quad \alpha = 5. \quad (107)$$

5.3.1. Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad de la solución síncrona en la red (86)-(87),(105)-(107) se estudia calculando el máximo exponente transverso de Lyapunov de la ecuación variacional (99), la cual toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}^i \\ \dot{\mathbf{h}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - 3x^2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -10x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ rs & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -k\sigma_i & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\bar{e}}^i \\ \mathbf{\bar{h}}^i \end{bmatrix}, \quad (108)$$

donde $\sigma_i, i = 1, \dots, 10$, son los valores propios de la matriz de interconectividad \mathbf{G} (105), los cuales están dados por

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \dots = \sigma_9 = 1, \sigma_{10} = 10. \quad (109)$$

A continuación, se calcula el máximo exponente transverso de Lyapunov de la ecuación (108) para σ_2 y σ_{10} , como función de la fuerza de acoplamiento k . Se utilizan los valores de parámetros del sistema HR correspondientes al comportamiento caótico, que se presenta en de la ecuación (105) y los valores de γ_1, γ_2 y α dados en (107). Para el cálculo del máximo exponente transverso de Lyapunov se utiliza el algoritmo de Wolf (Wolf *et al.*, 1985). Los resultados que se obtuvieron se presentan en la figura 44. Como se puede observar en esta figura hay una región en el intervalo $0.03 < k < 1.31$ en la que ambas gráficas son negativas. En esta región la solución síncrona es localmente estable.

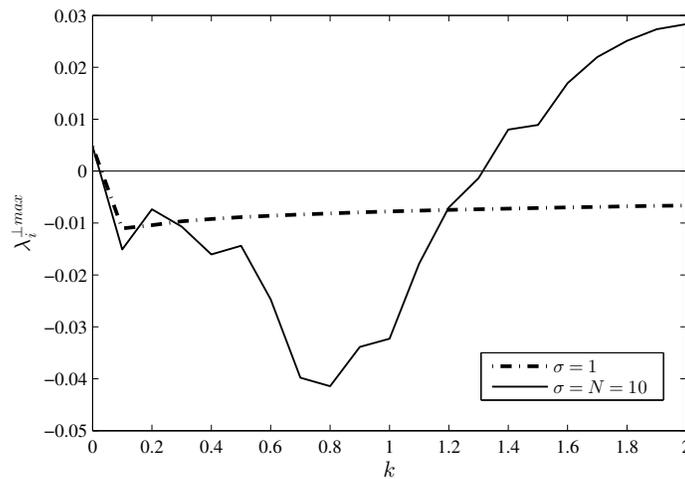


Figura 44. λ_i^{Lmax} para una red en estrella de neuronas HR con acoplamientos dinámicos.

Claramente, los resultados que se muestran en la figura 40 y la figura 44, muestran que los acoplamientos dinámicos permiten incrementar el número de nodos que se pueden sincronizar.

5.3.2. Resultados numéricos

Se realizaron simulaciones numéricas en Simulink de la red (86)-(87),(105)-(107), con parámetros tal y como se muestran abajo de la ecuación (105),(107), condiciones iniciales $\mathbf{x}^1 = [1, 2, 1.37]$, $\mathbf{x}^2 = [0, 1.49, 0]$, $\mathbf{x}^3 = [-1.2, 0, 0]$, $\mathbf{x}^4 = [1.5, -1.1, -2]$, $\mathbf{x}^5 = [0, -1.4, 0]$, $\mathbf{x}^6 = [-1, -1.3, 0]$, $\mathbf{x}^7 = [2, 0, 0]$, $\mathbf{x}^8 = [-1.45, 0, -1.6]$, $\mathbf{x}^9 = [0, -2.1, 1.23]$ y $\mathbf{x}^{10} = [1.2, 3, 2]$ y fuerza de acoplamiento $k = 1$.

De los resultados que se presentan en la figura 44 se espera que para este valor de k la red se sincronice. Los resultados de la simulación se presentan en la figura 45

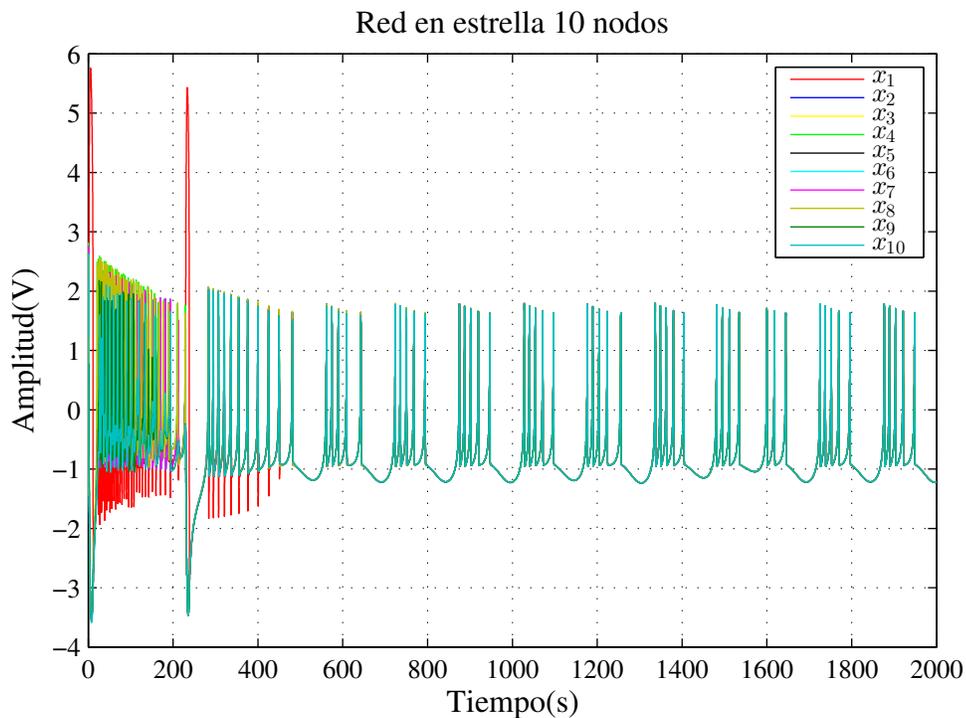


Figura 45. Sincronización de una red en estrella de 10 neuronas HR con acoplamientos dinámicos.

Como se puede observar, los sistemas se sincronizan. Al comparar la figura 42 con la figura 45, de la figura 42 se puede apreciar la diferencia entre las señales a lo largo de toda la serie de tiempo, y en algunas regiones se observan errores bastante considerables. Por otro lado, en la figura 45 se observa que después de un transitorio

los sistemas se sincronizan, y se mantienen en sincronía a lo largo de toda la serie de tiempo.

5.3.3. Resultados experimentales

En esta sección, los resultados que se obtuvieron en las secciones 5.3.1 y 5.3.2, se validan experimentalmente, utilizando las neuronas electrónicas construidas, las cuales se muestran en la figura 46. Los acoplamientos dinámicos se implementan en tablilla de pruebas. La figura 47 muestra la implementación en laboratorio.

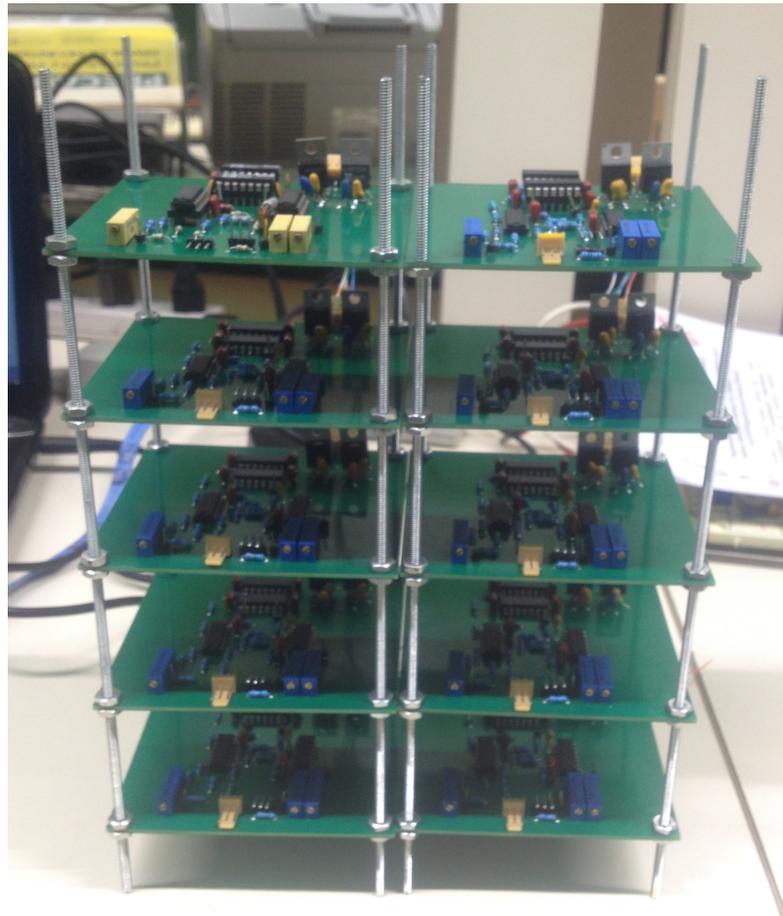


Figura 46. Conjunto de circuitos de neuronas HR montados en estructura.

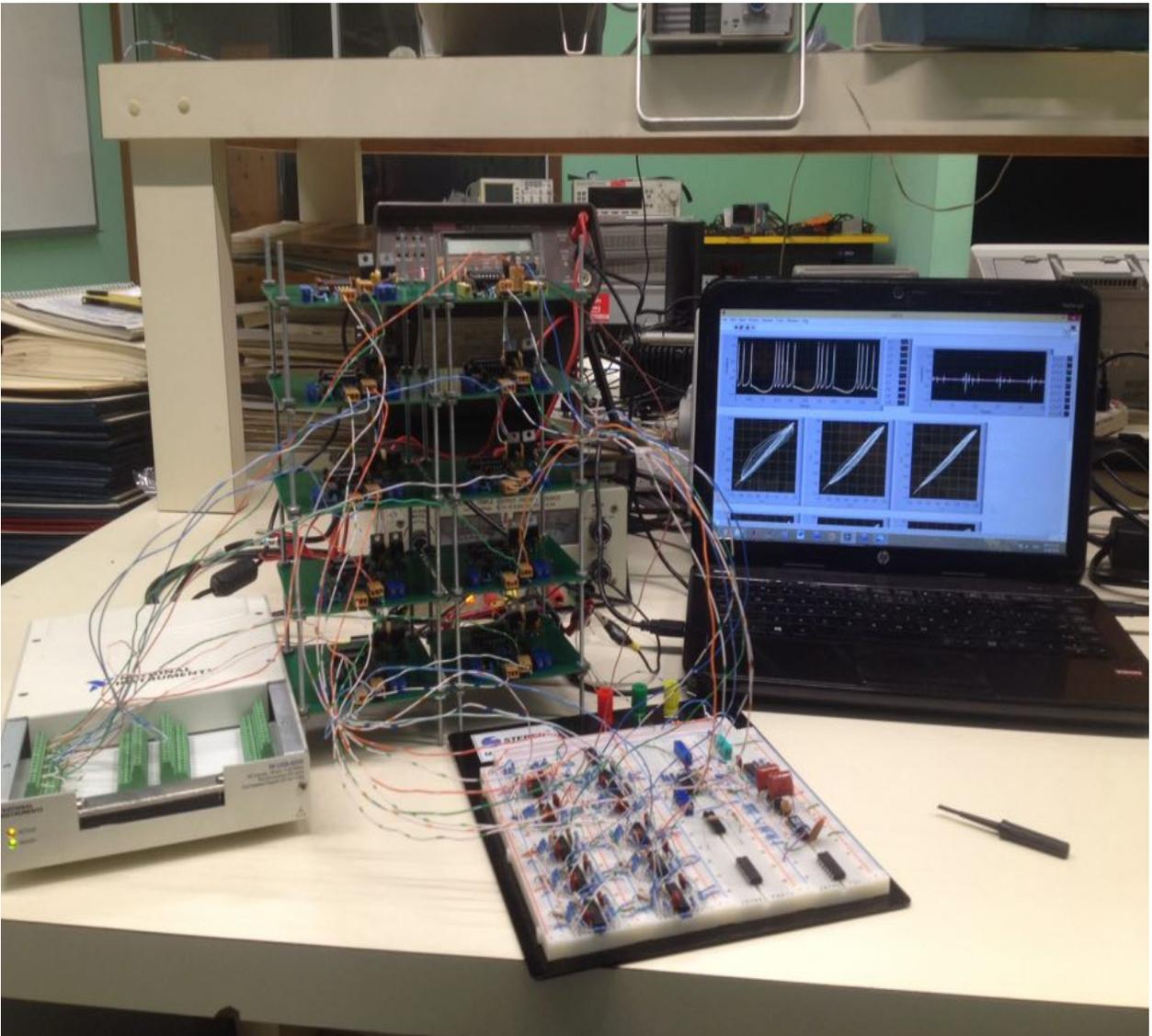


Figura 47. Validación experimental del esquema de sincronización propuesto en laboratorio.

Esta figura muestra las 10 neuronas electrónicas conectadas a los acoplamientos dinámicos implementados en la tablilla de pruebas para formar una red en estrella. Además, se observa la tarjeta de adquisición de datos NI-USB6259 (izquierda), la cual está adquiriendo las señales del primer estado de cada neurona electrónica. La computadora muestra un programa que se implementó en LabView 2012, para graficar los datos adquiridos por la tarjeta, en la pantalla de la computadora se puede apreciar la gráfica de las series de tiempo, los errores que se generan entre cada neurona con respecto al nodo central, y algunos de los planos de fase que se generan al graficar la señal del primer estado del nodo central contra el primer estado de cada neurona, es decir, (x_1, x_i) .

En la figura 48 observamos la señal en el tiempo del estado x de cada uno de los 10 sistemas con la red sincronizada y en la figura 49 se observan los errores de sincronización $e_1 = x_1 - x_2, e_2 = x_1 - x_3, \dots, e_9 = x_1 - x_{10}$.

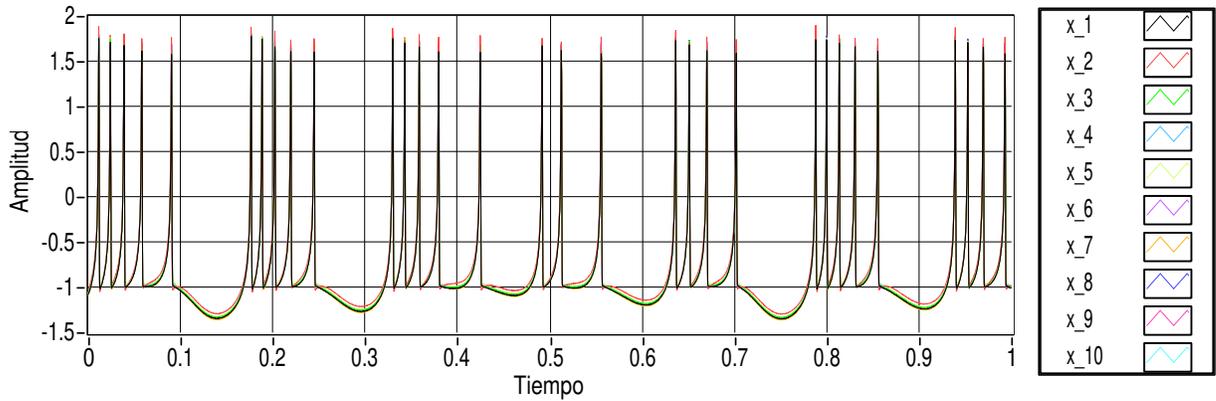


Figura 48. Señales del estado x de cada neurona con la red sincronizada.

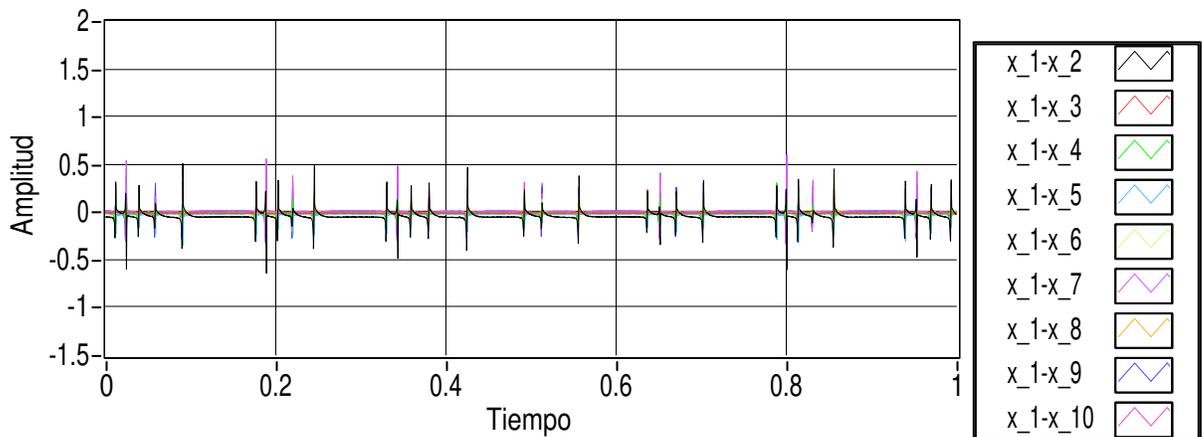
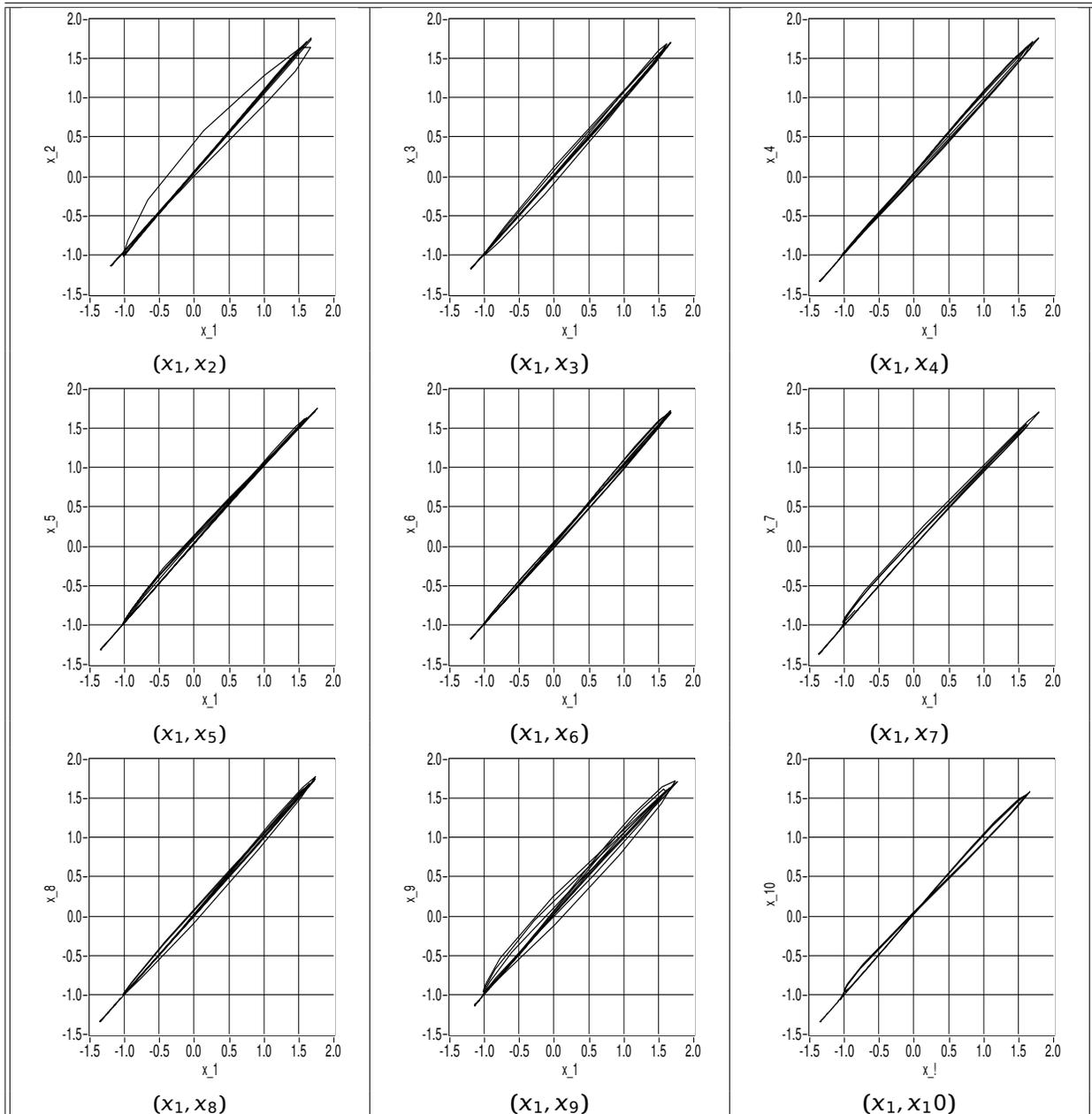


Figura 49. Señales de error entre neuronas con la red sincronizada.

De la figura 49 en el experimento, puesto que los circuitos no son idénticos, el error de sincronización no es cero. Sin embargo, se puede observar que las neuronas están prácticamente sincronizadas. Una mejor manera de observar esto es en el plano de fase. Los planos de fase generados por $(x_1, x_2), (x_1, x_3), \dots, (x_1, x_{10})$ se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Planos de fase generados por la red sincronizada.

Como se puede observar los sistemas se encuentran sincronizados, y al utilizar acoplamientos dinámicos se logró superar el número máximo de nodos que se pueden sincronizar con acoplamientos estáticos.

Capítulo 6. Conclusiones

En esta tesis se llegó a varias conclusiones. Primero, al realizar la comparación entre los diversos modelos matemáticos que hay en la literatura para emular comportamientos neuronales, se encontró que el mejor modelo neuronal, de los modelos comparados, para el propósito de esta tesis es el Hindmarsh-Rose. Esto es debido a que es capaz de reproducir los comportamientos más importantes, a pesar de que es un modelo que fue diseñado para reproducir formas de onda y no es biológicamente inspirado.

Este modelo mostró las ventajas de poder reproducir los comportamientos necesarios por sí mismo, con solo variar sus parámetros, y además que su implementación en circuito electrónico es relativamente sencilla en comparación con otros modelos, como por ejemplo, el de Izhikevich, el cual, a pesar de ser de segundo orden, lo que podría representar una ventaja, en cuanto a los componentes necesarios para su implementación en circuito electrónico, el reinicio que necesita complica su implementación física.

Al implementar y validar el circuito electrónico del modelo de Hindmarsh-Rose se observó que efectivamente reproduce los comportamientos observados en el modelo matemático. Además, al realizar varios experimentos, se concluyó que puede reproducir los comportamientos neuronales más importantes variando solo un parámetro de entrada (I), dejando todos los otros parámetros fijos, lo cual es una ventaja en cuanto al no tener que realizar cambios al circuito si se requiere cambiar de comportamiento.

Al trabajar con la sincronización de dos sistemas implementados en circuito electrónico, se concluyó que los acoplamientos dinámicos tipo Huygens tienen buen desempeño, además de cierto grado de “robustez”, debido a que se obtuvieron resultados experimentales bastante satisfactorios aun cuando se sabe que los circuitos electrónicos de los sistemas no son idénticos.

Con la sincronización de la red de circuitos electrónicos HR, se comprueba que la extensión que se hizo del análisis anteriormente realizado para dos sistemas funciona de manera correcta para el caso de la red en estrella, ya que el esquema de sincronización de la red propuesto arroja los resultados esperados en el análisis. Además, tal vez el resultado más importante de este trabajo de tesis es que se logró demostrar

analítica y experimentalmente que el esquema de sincronización propuesto, utilizando acoplamientos dinámicos tipo Huygens mostró tener mejor desempeño que cuando se utilizan acoplamientos estáticos, ya que permite aumentar el número de sistemas que se pueden conectar a la red y lograr así una sincronización efectiva.

Literatura citada

- Belykh, V. N. y Pankratova, E. V. (2014). Shilnikov chaos in oscillators with Huygens coupling. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**(08): 1440007.
- Demidovich, B. P. (1961). On dissipativity of some system of nonlinear differential equations: I. *Vestnik Moscow State University*.
- FitzHugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, **1**(6): 445 – 466.
- Frederico, A., Ludmila, C., Lea, G., Marcelo, F. J., Renata, F., Renata, L., Jacob, F. W., Roberto, L., y Suzana, H. (2009). Equal numbers of neuronal and nonneuronal cells make the human brain an isometrically scaled up primate brain. *Journal of Comparative Neurology*, **513**(5): 532–541.
- Hindmarsh, J. y M Rose, R. (1984). A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. **221**: 87–102.
- Hodgkin, A. y Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, **117**(4): 500–544.
- Hrg, D. (2013). Synchronization of two Hindmarsh–Rose neurons with unidirectional coupling. *Neural Networks*, **40**: 73 – 79.
- Huang, L., Chen, Q., Lai, Y.-C., y Pecora, L. M. (2009). Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. E*, **80**: 036204.
- Izhikevich, E. (2003). Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **14**(6): 1569–1572.
- Jalili, M. (2009). Synchronizing Hindmarsh–Rose neurons over Newman–Watts networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **19**(3): 033103.
- Jia, C., Wang, J., Wei, X., Deng, B., y Che, Y. (2011). Complete synchronization in the globally delay-coupled Hindmarsh-Rose large-scale network. En: *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, July. pp. 880–884.
- Katriel, G. (2008). Synchronization of oscillators coupled through an environment. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**(22): 2933 – 2944.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall.
- Lom, B. (2014). Portraits of the mind: Visualizing the brain from antiquity to the 21(st) century. *Journal of Undergraduate Neuroscience Education*, **13**: R7–8.
- Morris, C. y Lecar, H. (1981). Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical Journal*, **35**(1): 193 – 213.
- Moser, M., Fruhwirth, M., y Kenner, T. (2008). The symphony of life [chronobiological investigations]. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, **27**(1): 29–37.
- Nagumo, J., Arimoto, S., y Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, **50**(10): 2061–2070.

- Nummenmaa, L., Glerean, E., Viinikainen, M., Iiro, Hari, R., y Sams, M. (2012). Emotions promote social interaction by synchronizing brain activity across individuals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **109**(24): 9599–9604.
- Peña Ramirez, J., Fey, R., y Nijmeijer, H. (2012). Synchronization of weakly nonlinear oscillators with Huygens coupling. conference; Workshop on Resonance and Synchronization, August 20-24, 2012; 2012-08-21; 2012-08-21 ; Conference date: 21-08-2012 Through 21-08-2012.
- Pecora, L. y Carroll, T. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. **80**: 2109–2112.
- Peña, J. (2013). *Huygens' synchronization of dynamical systems : beyond pendulum clocks*. Netherlands, TUE : Department of Mechanical Engineering.
- Peña Ramirez, J., Arellano-Delgado, A., y Nijmeijer, H. (2018). Enhancing master-slave synchronization: The effect of using a dynamic coupling. *Phys. Rev. E*, **98**: 012208.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J., y Kurths, J. (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press.
- Pogromsky, A. y Nijmeijer, H. (2001). Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **48**(2): 152–162.
- Pogromsky, A., Santoboni, G., y Nijmeijer, H. (2002). Partial synchronization: from symmetry towards stability. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **172**(1-4): 65–87.
- Purves, D., Augustine, G., Fitzpatrick, D., Hall, W., A.S.Lamantia, J.O.McNamara, y S.M.Williams, (eds.) (2004). *Neuroscience*. Sinauer Associates Inc., tercera edición.
- Shi, Y., Wang, J., Deng, B., y Liu, Q. (2009). Chaotic synchronization of coupled Hindmarsh-Rose neurons using adaptive control. En: *2009 2nd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, Oct. pp. 1–5.
- Steur, E., Tyukin, I., y Nijmeijer, H. (2009). Semi-passivity and synchronization of neuronal oscillators*. *IFAC Proceedings Volumes*, **42**(7): 21 – 26. 2nd IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems.
- Uhlhaas, P. J. y Singer, W. (2006). Neural synchrony in brain disorders: Relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology. *Neuron*, **52**(1): 155 – 168.
- Vromen, T. G. M., Steur, E., y Nijmeijer, H. (2016). Training a network of electronic neurons for control of a mobile robot. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26**(12): 1650196.
- Willems, J. C. (1972). Dissipative dynamical systems part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **45**(5): 321–351.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., y Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16**(3): 285 – 317.

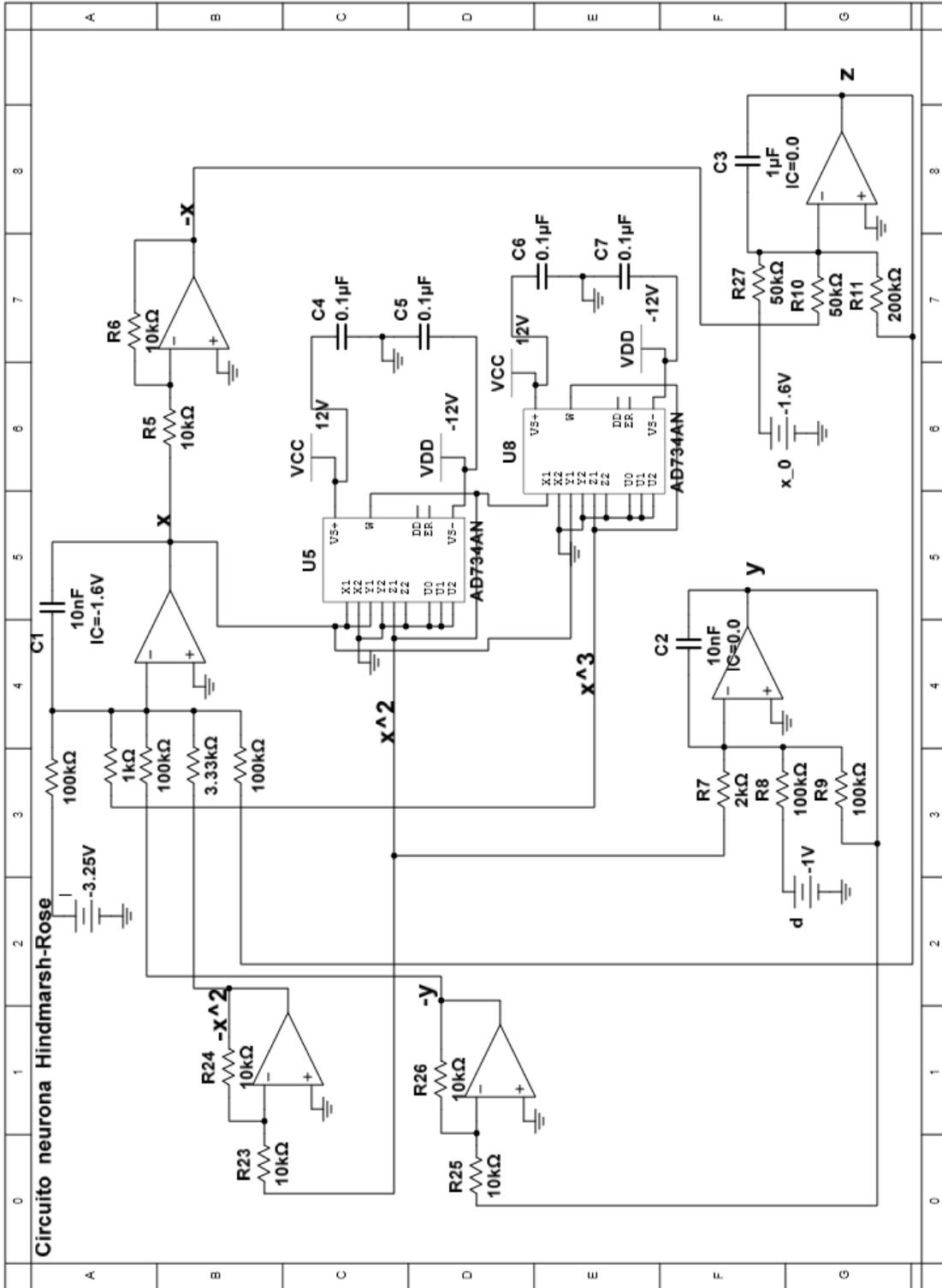


Figura 51. Circuito HR básico.

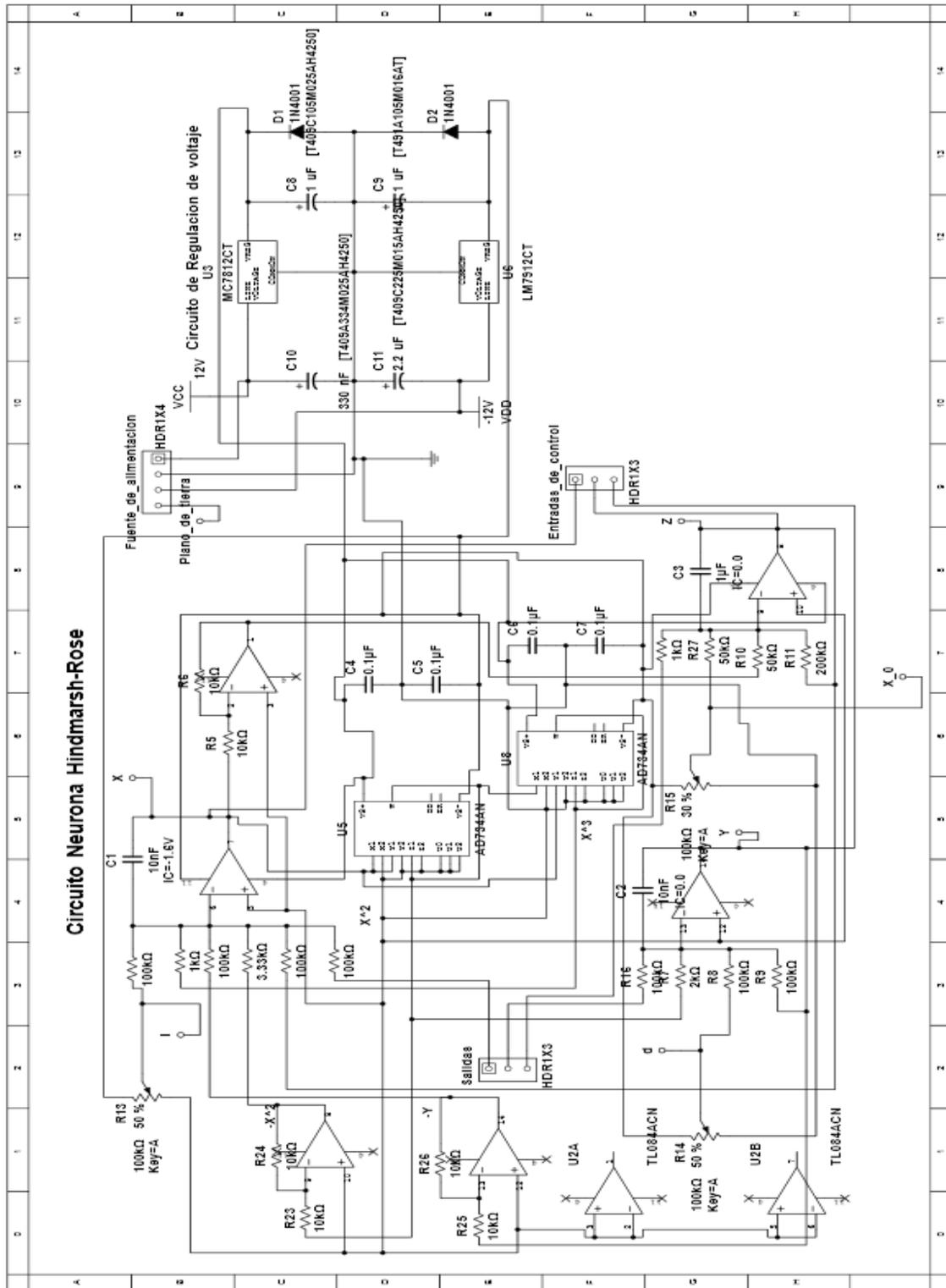


Figura 52. Circuito construido en PCB.

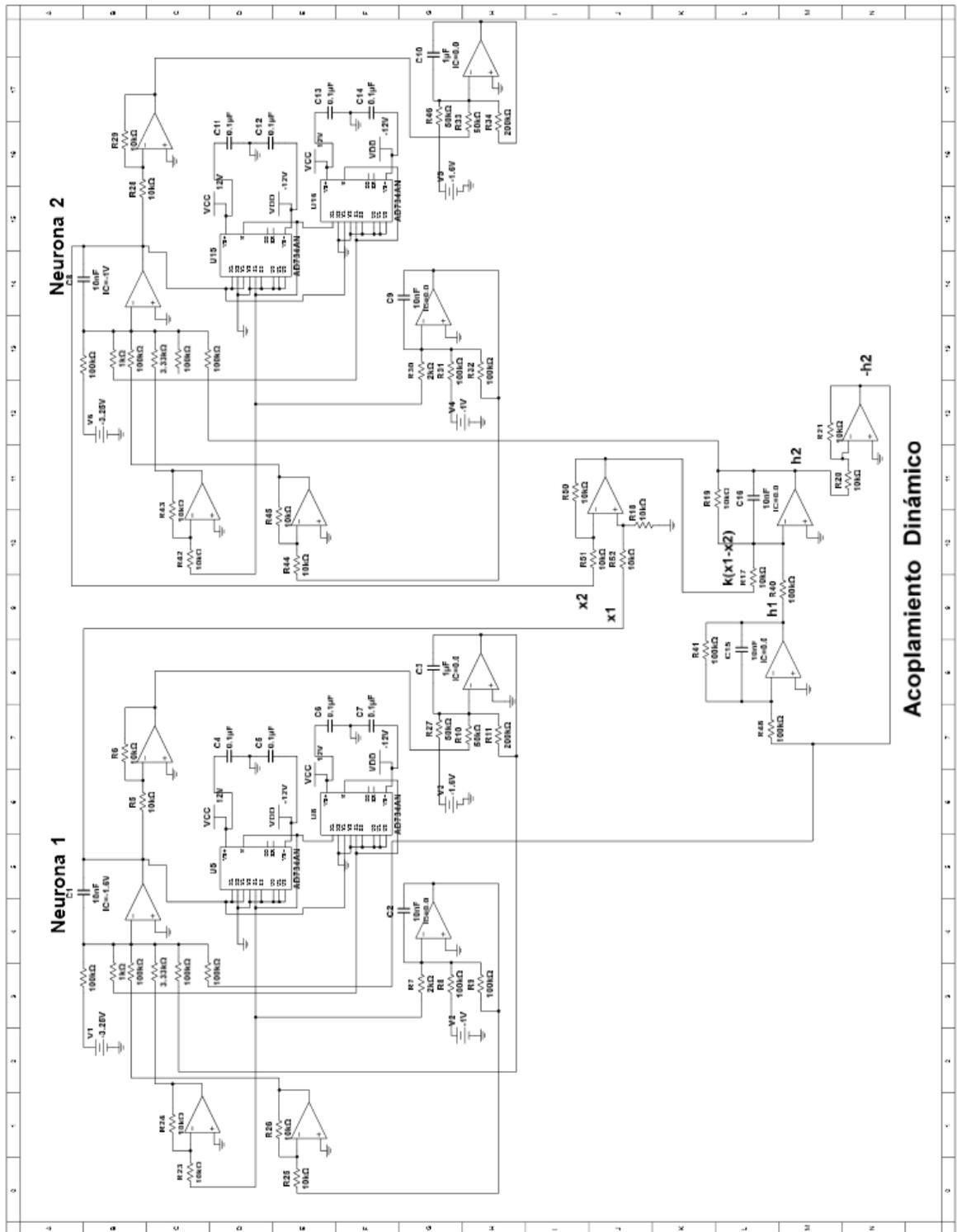


Figura 53. Diagrama eléctrico de la sincronización de 2 sistemas HR con acoplamiento dinámico.

Tabla 4. Lista de materiales utilizados en circuito impreso.

Cantidad	Componente	Referencia diagrama
2	OP AMP, TL084CN	U1, U2
2	Multiplicador AD734AN	U5, U8
3	Potenciómetros 100K Ω	R13, R14, R15
1	Regulador de voltaje MC7812CT	U3
1	Regulador de voltaje MC7912CT	U6
2	Diodo 1N4001	D1, D2
2	Capacitor, 10nF Poliéster	C1, C2
1	Capacitor, 1 μ F Poliéster	C3
4	Capacitor, 0.1 μ F Poliéster	C4, C5, C6, C7
2	Capacitor, 1 μ F Tantalio	C8, C9
1	Capacitor, 330nF Tantalio	C10
1	Capacitor, 2.2 μ F Tantalio	C11
7	Resistencia, 100K Ω	R2, R4, R8, R9, R12, R16, R18
6	Resistencia, 10K Ω	R5, R6, R23, R24, R25, R26
2	Resistencia, 1K Ω	R1, R17
2	Resistencia, 50K Ω	R10, R27
1	Resistencia, 3.33K Ω	R3
1	Resistencia, 2K Ω	R7
1	Resistencia, 200K Ω	R11
6	Poste de prueba	d, I, X, X ₀ , Y, Z
2	Conector para prueba 3 postes (macho)	Entradas de control, Salidas
1	Conector para prueba 4 postes (macho)	Fuente de alimentacion

Synchronization of Hindmarsh-Rose neurons via Huygens-like coupling

Gerardo G. Velasco Equihua* Jonatan Pena Ramirez**

* Center for Scientific Research and Higher Education at Ensenada, Applied Physics Division, Carr. Ensenada-Tijuana 3918 CP 22680 Ensenada B.C., México (e-mail: gvelasco@cicese.edu.mx).

** CONACYT-CICESE, Applied Physics Division, Electronics and Telecommunications Department, Carr. Ensenada-Tijuana 3918 CP 22680 Ensenada B.C., México (e-mail: jpena@cicese.mx)

Abstract: In this paper we study the synchronization of two Hindmarsh-Rose neuronal models interacting to each other through a dynamic coupling. The design of the dynamic interconnection is inspired in the so-called Huygens' coupling, which in its simplest form is modeled by a second order linear system. In the analysis, it is assumed that only one state variable is available for measurement and the stability of the synchronous behavior is investigated by using the master stability function approach in combination with the largest transverse Lyapunov exponents. Ultimately, the proposed synchronization scheme is experimentally validated by using electronic circuits, which emulate the dynamics of the Hindmarsh-Rose neuronal model.

Keywords: Synchronization, dynamic coupling, Hindmarsh-Rose neuronal model, electronic circuits, master stability function.

1. INTRODUCTION

Synchronization in (groups of) neurons is observed in different cognitive functions as well as in some neurological disorders like epilepsy and Parkinson's disease. A key ingredient for observing synchronization in neurons is that there should be a channel, called coupling, through which the neurons interact to each other. There exist two types of coupling, namely chemical and electrical synapses.

In order to get understanding into the synchronized behavior observed in neurons—in a non-invasive way—the scientist have developed mathematical models, which allow to reproduce several dynamic behaviors like spiking, bursting, and chaotic busting. Some of these models are the Hodgkin-Huxley model (Hodgkin and Huxley, 1952), the Hindmarsh-Rose (HR) model (Hindmarsh and Rose, 1984), and the Izhikevich model (Izhikevich, 2003). Among these, the HR model is one of the most complete models in the sense that it can reproduce most of the dynamic behaviors observed in a single neuron. On the other hand, there exist several coupling schemes for modelling the chemical and electrical synapses. For example, diffusive coupling (Steuer et al., 2009; Vromen et al., 2016) unidirectional coupling schemes (Dalibor, 2013), and adaptive control (Shi et al., 2009), just to mention a few.

This paper focuses on the synchronization of a pair of HR neuronal models interacting via dynamic coupling. The design of the dynamic interconnection is inspired in the so-called Huygens' coupling—which in its simplest form can be modelled as a mass-spring-damper system. In the analysis, it is assumed that only one state variable is available for measurement in the HR system.

The stability of the synchronous solution is investigated by using the well-known Master Stability Function formalism and the largest transverse Lyapunov exponent. Ultimately, the proposed coupling scheme is experimentally validated by using a pair of HR electronic neurons.

The outline of this paper is as follows. First, the HR model and the notion of Huygens' coupling are briefly described in Section 2. Then, the proposed synchronization scheme and the corresponding stability analysis are presented in Section 3. Next, a numerical study is conducted in Section 4. After that, some experimental results obtained with two dynamically coupled HR electronic circuits are presented in Section 5. Finally, a discussion and some conclusions are provided in Section 6.

2. PRELIMINARIES

In this section, the HR model and the concept of Huygens' coupling, are briefly introduced.

2.1 The Hindmarsh-Rose model (HR)

In 1984 J. L. Hindmarsh and R.M. Rose published their model for bursting neurons, which is described by the following differential equations (Hindmarsh and Rose, 1984)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + bx^2 - ax^3 - z + I, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y, \\ \dot{z} &= r[s(x - x_0) - z], \end{aligned} \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}$ is the membrane potential, $y \in \mathbb{R}$ is the recovery current, $z \in \mathbb{R}$ is the adaptation current, a, b, c, d, s, r, x_0 are constant parameters, and $I \in \mathbb{R}$ is a (constant) external current.

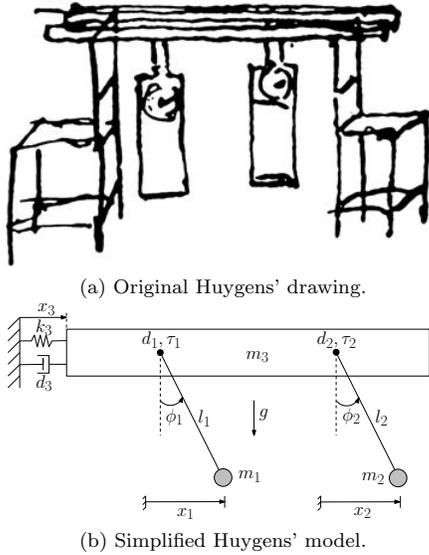


Fig. 1. Huygens' synchronization experiment.

According to (Hindmarsh and Rose, 1984), chaotic bursting behavior is observed in (1) for the following parameter values: $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, x_0 = -1.6, r = 0.005$, and $I = 3.25$. These parameter values will be used through this paper in both the numerical and experimental studies.

2.2 Huygens' coupling

Around 1665 the Dutch scientist Christiaan Huygens (1629-1695) wrote a letter to his father Constantijn Huygens, in which he detailed 'an odd kind of sympathy' (Huygens, 1893): two of his recently invented pendulum clocks, hanging from a common wooden support, see Figure 1a, were oscillating in perfect consonance and in opposite directions—a phenomenon that nowadays is referred to as anti-phase synchronization. After several experiments, Huygens did conclude that the onset of synchronization was due to the small vibrations of the coupling wooden bar, on which the clocks were hanging.

The simplest model for Huygens' experiment is depicted in Figure 1b. In this model, the pendulum clocks have been replaced by two identical pendula. Each pendulum is modelled by a point mass of mass m_i attached at the lower end of a massless bar of length l_i . The damping in the pendula is also assumed to be viscous and linear with damping constant d_i . The escapement mechanism in the clocks is modelled as a control input denoted by τ_i , for $i = 1, 2$. On the other hand, the wooden bar supported on two chairs, on which the pendulum clocks are hanging, has been replaced by a rigid bar of mass m_3 , which is attached to the wall via a linear spring with stiffness constant k_3 and a linear viscous damper with damping constant d_3 . This rigid bar elastically attached to the fixed support is referred to as *Huygens' coupling*, see e.g (Pena Ramirez et al., 2013; Belykh and Pankratova, 2014).

Roughly speaking, the synchronization scheme presented here is based on the idea of 'replacing' each pendulum in Figure 1b by a HR neuronal model.

3. PROPOSED SYNCHRONIZATION SCHEME

The proposed synchronization scheme is schematically depicted in Figure 2. In this scheme, the systems interact to each other through a dynamical system, i.e. the interaction is *indirect*.

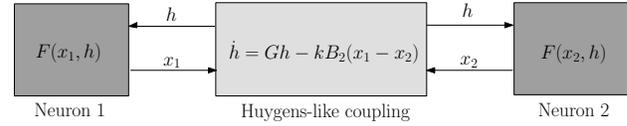


Fig. 2. Synchronization scheme.

The synchronization scheme is described by the following set of equations:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= F(\mathbf{x}_1) + B_1 \mathbf{h}, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= F(\mathbf{x}_2) - B_1 \mathbf{h}, \\ \dot{\mathbf{h}} &= G\mathbf{h} - kB_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \end{aligned} \quad (2)$$

where $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ is the state vector of system i , for $i = 1, 2$, and function F is a nonlinear function. For the particular case of the HR system, see Eq. (1), the state vector is given by $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ and the nonlinear function F is given by

$$F(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} y_i + bx_i^2 - ax_i^3 - z_i + I \\ c - dx_i^2 - y_i \\ r[s(x_i - x_0) - z_i] \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where the parameter values and state variables are as defined in Eq (1).

On the other hand, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ is the state vector of the dynamic coupling and is given by $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$, with $h_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, being the state variables of the dynamic coupling, $k \in \mathbb{R}_+$ is the coupling strength and the matrices $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ and $B_2 \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ are the coupling matrices.

In this study, it will be assumed that only one of the entries of the coupling matrices B_1 and B_2 is equal to one and the remaining entries are all equal to zero. The assumption on B_1 comes from the fact that we will consider the case where only one state variable of the dynamic coupling, either h_1 or h_2 , is applied to only one equation of the HR system i . Similarly, the assumption on B_2 arises from the fact that only one state variable of the HR system i is used as a driving input for the dynamic coupling.

The matrix $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ of the dynamic coupling (2) is given by

$$G = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

where α, γ_1 , and γ_2 are constant positive parameters, to be chosen.

Note that for $\alpha = 0$ and $k = 0$, the \mathbf{h} dynamics, see Eq. (2), describes the dynamics of a mass-spring-damper oscillator, i.e. the dynamics of Huygens' coupling, as depicted in Figure 1b. The addition of α in (4) allows to have more flexibility in the choice of γ_1 and γ_2 .

Finally, it is important to mention that the proposed coupling scheme (2) has certain similarity to the so-called environmental coupling described in (Katriel, 2008).

3.1 Stability analysis

The stability of the synchronous solution in the coupled systems (2) is investigated by using the Master Stability Function (MSF) approach (Pecora and Carroll, 1998; Huang et al., 2009). The MSF is a useful tool for determining necessary conditions for synchronization in coupled systems. It is based on the following assumptions: the systems are all identical, the same component from each system is used in the coupling scheme, the synchronization manifold is invariant, and the coupling function is linear. Furthermore, the MSF formalism requires to compute the so-called variational equation and the corresponding transverse Lyapunov exponents (Pecora and Carroll, 1998).

The analysis starts by defining the synchronization errors $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Furthermore \mathbf{h} is also considered as an ‘error’ because \mathbf{h} vanishes asymptotically when synchronization is achieved, i.e. when $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Then, the obtained variational equation is given by

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} DF(\mathbf{x}) & 2B_1 \\ -kB_2 & G \end{bmatrix}}_{\tilde{E}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

where $DF(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$ is the Jacobian of function F evaluated on a (bounded) solution $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ of an isolated system, i.e. $\mathbf{x}(t)$ is the solution of system $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$.

For the HR system, see (1), the Jacobian $DF(\mathbf{x})$ is

$$DF(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2bx - 3ax^2 & 1 & -1 \\ -2dx & -1 & 0 \\ rs & 0 & -r \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Next, the local stability of the synchronous solution $\mathbf{e} := (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{h})^T$ can be investigated by looking at the largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^\perp , which is computed from Eq. (6) and is defined as follows (Pikovsky et al., 2003)

$$\lambda_{max}^\perp = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln|\mathbf{e}(t)| - \ln|\mathbf{e}(0)|). \quad (7)$$

If

$$\lambda_{max}^\perp < 0, \quad (8)$$

then the synchronous solution $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ and $\mathbf{h}(t) = 0$ is locally stable. On the other hand, if $\lambda_{max}^\perp > 0$ then the synchronous solution is unstable (Pikovsky et al., 2003).

4. NUMERICAL STUDY

In this part, the stability of a pair of HR systems interacting via Huygens’ like coupling, see (2), is numerically investigated. In particular, the largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^\perp (7) is computed from the variational equation (5) as a function of the coupling strength k .

In the analysis, the following parameter values for the HR system, see (1), are considered: $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, x_0 = -1.6, r = 0.005$, and $I = 3.25$ (Hindmarsh and Rose, 1984). Likewise, the parameter values in the dynamic coupling, see (2) and (4), are: $\alpha = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = k$, and k is varied in the interval $k \in [0, 15]$. For the computation of λ_{max}^\perp , a modified version of the Wolf algorithm (Wolf et al., 1985) is used.

4.1 Configuration 1-1

First, we consider the case in which the coupling matrices B_1 and B_2 in (2) are given by

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

We refer to this choice as *configuration 1-1*: the state variable x of each HR system is used as the driving input for the dynamic coupling and likewise, the dynamic coupling signal h_2 is applied to the x -equation of each HR system.

Then, using F as given in (3), G as given in (4), and the coupling matrices B_1 and B_2 as defined above, system (2) takes the form:

$$\text{HR 1: } \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + bx_1^2 - ax_1^3 - z_1 + I + h_2, \\ \dot{y}_1 = c - dx_1^2 - y_1, \\ \dot{z}_1 = r[s(x_1 - x_0) - z_1], \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{HR 2: } \begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 + bx_2^2 - ax_2^3 - z_2 + I - h_2, \\ \dot{y}_2 = c - dx_2^2 - y_2, \\ \dot{z}_2 = r[s(x_2 - x_0) - z_2], \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Dynamic coupling: } \begin{cases} \dot{h}_1 = -\alpha h_1 + h_2, \\ \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (12)$$

The stability of the synchronous solution in system (10)-(12) is investigated by using the variational equation (5). Replacing DF as given in (6), G as given in (4) and B_1 and B_2 as given in (9) into (5) yields

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} 2bx - ax^2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2dx & -1 & 0 & 0 & 0 \\ rs & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & -k & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Then, the largest transverse Lyapunov exponent λ_{max}^\perp is computed—as a function of the coupling strength k —from the variational equation (5) with \tilde{E} as given in (13) and parameter values as discussed before.

The obtained results are shown in Figure 3, in which the obtained λ_{max}^\perp is indicated by the blue line. Clearly, for $k > 2.2$ we have that $\lambda_{max}^\perp < 0$ and consequently, the synchronous solution is locally stable for $k > 2.2$.

In the previous case, we have considered h_2 as the coupling signal. However, for the case that h_1 is considered as the coupling signal, i.e. for the case that

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

the synchronous solution is locally stable for $k > 10.5$, as shown by the red line in Figure 3.

Clearly, when h_2 is used as the coupling signal, the required coupling strength is smaller than the coupling strength required when h_1 is chosen as the coupling signal.

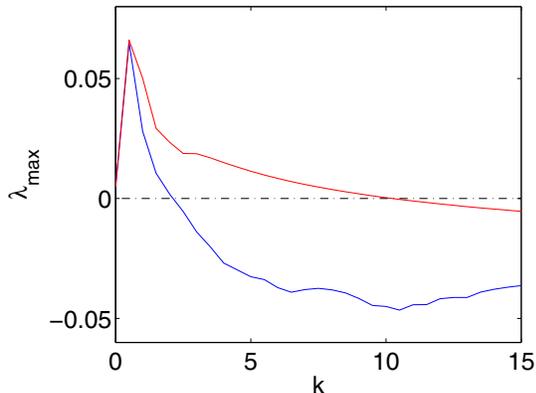


Fig. 3. Largest transverse Lyapunov exponent for the configuration 1-1. Blue: λ_{max}^{\perp} for the case that h_2 is used as the coupling signal. Red: λ_{max}^{\perp} when h_1 is the coupling signal. When h_2 is used, the required coupling strength to achieve synchronization is smaller.

4.2 Configuration 2-1

Now, we consider the case where the state variable y of each HR system is used as the driving input for the dynamic coupling and likewise, the dynamic coupling signal h_2 is applied to the x -equation of each HR system. We refer to this interconnection as *configuration 2-1*. In this case, the coupling matrix B_1 is as given in (9) and B_2 is

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Next, similar to the previous case, the largest transverse Lyapunov exponent, obtained from the resulting variational equation, is computed as a function of the coupling strength k .

The obtained results are shown in Figure 4, where the corresponding λ_{max}^{\perp} is depicted in blue. From the figure it is evident that $\lambda_{max}^{\perp} < 0$ for $k > 0.55$. Consequently the synchronous solution in this configuration is locally stable, provided that the coupling strength satisfies $k > 0.55$.

On the other hand, if h_1 is used as the coupling signal, i.e. when the coupling matrix B_1 is chosen as in (14), and B_2 is kept as chosen in (15), then the obtained transverse Lyapunov exponent λ_{max}^{\perp} is negative only in the narrow interval of coupling strength $0.55 < k < 2.1$, see the red line in Figure 4.

Again, by comparing the blue and red lines in Figure 4, it is easy to reach the conclusion that the best performance in the configuration 2-1 is obtained when h_2 is used as the coupling signal.

4.3 Configuration 3-1

Finally, we present the *configuration 3-1*: the state variable z of each HR system is used as the driving input for the dynamic coupling and likewise, the dynamic coupling signal h_2 is applied to the x -equation of each HR system

Again, the coupling matrix B_1 is as given in (9) and B_2 is given by

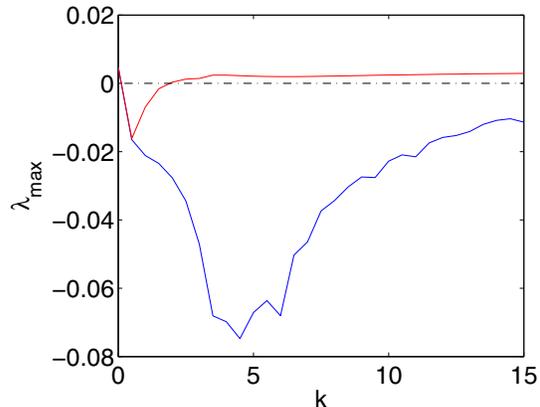


Fig. 4. Largest transverse Lyapunov exponent for the configuration 2-1. Blue: λ_{max}^{\perp} for the case that h_2 is used as the coupling signal. Red: λ_{max}^{\perp} when h_1 is the coupling signal. Interestingly, when h_1 is used as the coupling signal, synchronization is achieved only in a narrow interval of k , i.e. $\lambda_{max}^{\perp} < 0$ in the interval $0.55 < k < 2.1$ (red line). In contrast, when h_2 is the coupling signal, $\lambda_{max}^{\perp} < 0$ for any $k > 0.55$.

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

In this configuration, the obtained λ_{max}^{\perp} is positive for all the considered coupling strength values, see the blue line in Figure 5. Likewise, if h_1 is used as the coupling signal, i.e. B_1 is chosen as in (14) and B_2 is kept as in (16), the obtained λ_{max}^{\perp} is positive for all values of k , see the red line in Figure 5.

Hence, the proposed synchronization scheme fails to induce synchronization when the state variable z of the HR system is used as the driving signal of the dynamic coupling.

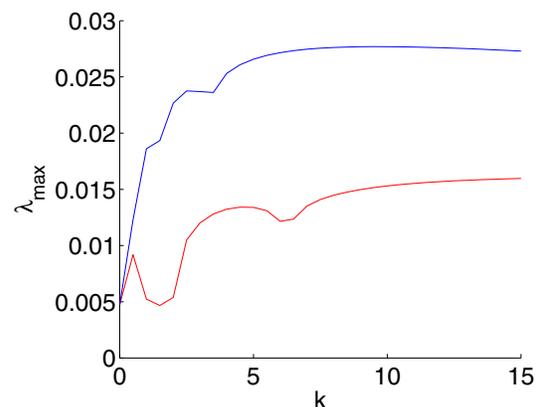


Fig. 5. Largest transverse Lyapunov exponent for the configuration 3-1. Blue: λ_{max}^{\perp} for the case that h_2 is used as the coupling signal. Red: λ_{max}^{\perp} when h_1 is the coupling signal. In both cases λ_{max}^{\perp} stays positive and consequently, this configuration fails to induce synchronization.

5. EXPERIMENTAL RESULTS

Finally, the proposed synchronization scheme is experimentally validated using HR electronic neurons, see Figure 6.

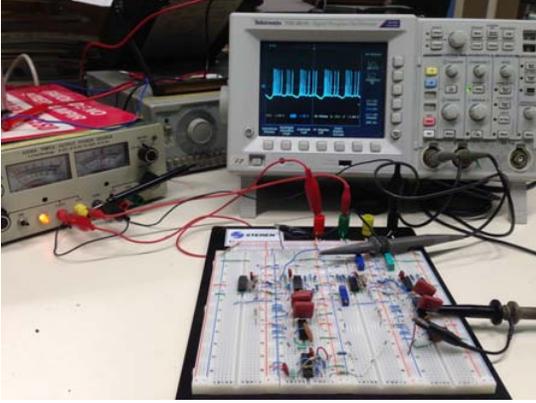


Fig. 6. Experimental setup at CICESE.

In particular, we investigate the onset of synchronization for all the configurations discussed in Section 4. However, here we only report those experimental results corresponding to the configuration 1-1 given in (10)-(12). First, system (10)-(12) is scaled in time by introducing the change of variable $\tau = \omega_c t$. Then, system (10)-(12) becomes:

$$\text{HR 1: } \begin{cases} \omega_c \dot{x}_1 = y_1 + bx_1^2 - ax_1^3 - z_1 + I + h_2, \\ \omega_c \dot{y}_1 = c - dx_1^2 - y_1, \\ \omega_c \dot{z}_1 = r[s(x_1 - x_0) - z_1], \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{HR 2: } \begin{cases} \omega_c \dot{x}_2 = y_2 + bx_2^2 - ax_2^3 - z_2 + I - h_2, \\ \omega_c \dot{y}_2 = c - dx_2^2 - y_2, \\ \omega_c \dot{z}_2 = r[s(x_2 - x_0) - z_2], \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{Dynamic coupling: } \begin{cases} \omega_c \dot{h}_1 = -\alpha h_1 + h_2, \\ \omega_c \dot{h}_2 = -\gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - k(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (19)$$

This system is physically implemented using TL084 operational amplifiers, AD734 multipliers and the necessary resistors and capacitors to have the correct gains. It is important to mention that prior to the physical implementation, the electronic diagram has been validated using MultiSim 14.0. The corresponding simulation file is available upon request. Furthermore, the following parameter values, for which chaotic bursting is expected, are considered: $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, x_0 = -1.6, r = 0.005, I = 3.25$. Likewise, the parameters of the coupling system (19) are: $\gamma_1 = 1, \alpha = 1, \gamma_2 = k$ and $k = 10$. For these parameter values, $\lambda_{max}^+ < 0$, see Figure 3 and therefore, synchronization is expected to occur in system (17)-(19). Finally $\omega_c = 0.001$.

The obtained experimental results, which have been recorded using the TDS3012C oscilloscope from Tektronix, are depicted in Figures 7 to 10.

First, the synchronized behavior of the dynamically coupled HR electronic neurons (18)-(19) is shown in Figure 7. The blue signal is x_1 , whereas the cyan signal denotes x_2 . Clearly, the coupled HR neurons exhibit synchronized bursting behavior.

The synchronized behavior becomes more evident from Figure 8, which shows the projection of the (experimental) solutions of system (18)-(19) onto the (x_1, x_2) -plane.

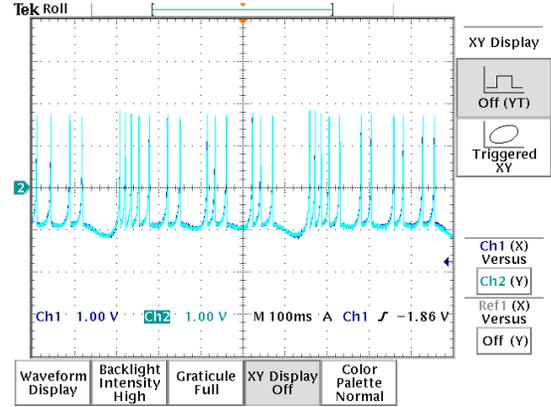


Fig. 7. Synchronized bursting behavior in the coupled HR electronic neurons. Blue: x_1 . Cyan: x_2 .

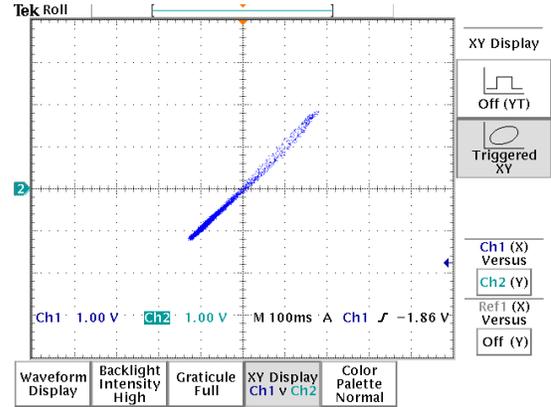


Fig. 8. Projection of the experimental solutions of system (17)-(19) onto the (x_1, x_2) -plane.

On the other hand, the coupling signal h_2 is depicted in Figure (9) and Figure 10. When the HR electronic neurons are unsynchronized, the coupling signal is oscillatory, as shown in Figure 9.

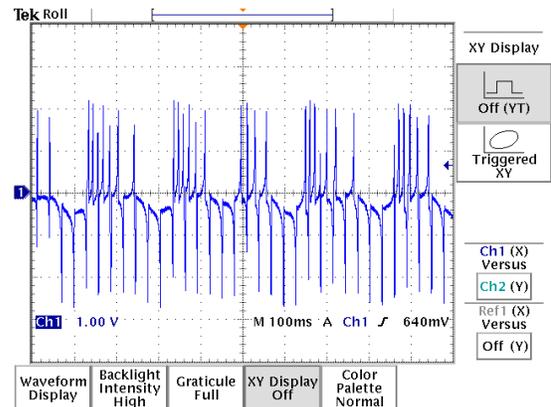


Fig. 9. Times series of the coupling signal h_2 when $x_1 \neq x_2$.

However, when the systems are *practically* synchronized, the coupling signal h_2 almost vanishes, as depicted in Figure 10.

Ideally, h_2 should be zero. However, due to the unavoidable mismatches in the electronic circuits, what we observe in the experiments is the so-called practical synchronization. This is the reason for which h_2 is not identically zero when the systems synchronize.

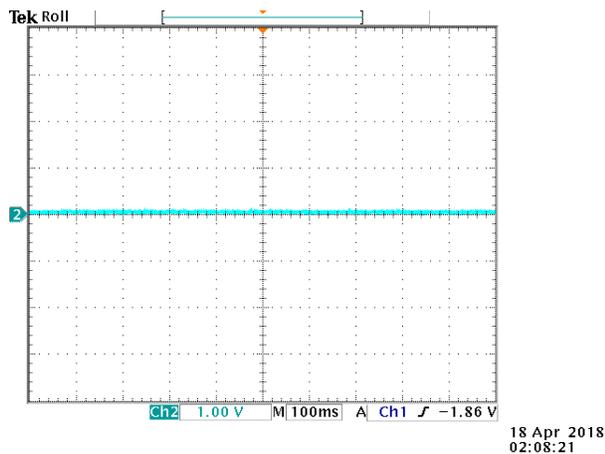


Fig. 10. Time series of the coupling signal h_2 when $x_1 \approx x_2$.

6. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

It has been numerically and experimentally demonstrated that the proposed coupling scheme, which is inspired in Huygens' coupling, can achieve synchronization in a pair of HR (electronic) neurons. One of the main differences of the proposed scheme with respect to the schemes available in the literature is that the interaction between the HR neurons is indirect.

In the analysis, the stability of the synchronous behavior in the coupled systems has been investigated by using the Master Stability Function approach and the largest transverse Lyapunov exponents. The obtained results have shown that the coupling signal h_2 seems to have the best performance: it requires a smaller coupling strength to induce synchronization than the coupling signal h_1 and likewise, synchronization is achieved 'faster' than when h_1 is considered as the coupling signal. Nevertheless, the analysis has also revealed that there exist cases where the proposed coupling scheme is not able to induce synchronization.

The analysis conducted using the MSF, however, is limited: it only provides necessary conditions for the onset of synchronization. A more rigorous analysis of the stability of the synchronous solutions is still necessary.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been partially supported by CONACYT, Mexico.

REFERENCES

- Belykh, V.N. and Pankratova, E. (2014). Shilnikov chaos in oscillators with Huygens coupling. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24, 1440007.
- Dalibor, H. (2013). Synchronization of two hindmarsh-rose neurons with unidirectional coupling. *Neural Networks*, 40, 73–79.
- Hindmarsh, J.L. and Rose, R.M. (1984). A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 221(1222), 87–102.
- Hodgkin, A.L. and Huxley, A.F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117, 500–44.
- Huang, L., Chen, Q., Lai, Y., and Pecora, L. (2009). Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Physical Review E*, 80(3), 036204.
- Huygens, C. (1893). *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens vol V*, chapter Correspondance 1664–1665. La Societe Hollandaise des Sciences, The Hague.
- Izhikevich, E.M. (2003). Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(6), 1569–1572.
- Katriel, G. (2008). Synchronization of oscillators coupled through an environment. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(22), 2933–2944.
- Pecora, L.M. and Carroll, T. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 80, 2109–2112.
- Pena Ramirez, J., Fey, R., and Nijmeijer, H. (2013). Synchronization of weakly nonlinear oscillators with Huygens' coupling. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23, 033118.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J. (2003). *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Shi, Y., Wang, J., Deng, B., and Liu, Q. (2009). Chaotic synchronization of coupled Hindmarsh-Rose neurons using adaptive control. In *2009 2nd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, 1–5.
- Steur, E., Tyukin, I., and Nijmeijer, H. (2009). Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 238(21), 2119–2128.
- Vromen, T., Steur, E., and Nijmeijer, H. (2016). Training a network of electronic neurons for control of a mobile robot. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(12).
- Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., and Vastano, J.A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285–317.