

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias de La Tierra
con orientación en Geofísica Aplicada**

**Modelado directo del efecto de Polarización
Inducida empleando permitividad eléctrica en
datos electromagnéticos: Formulación teórica**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Marco Antonio Oliva Gutiérrez

Ensenada, Baja California, México

2018

Tesis defendida por

Marco Antonio Oliva Gutiérrez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Codirector de tesis

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Codirector de tesis

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández

Dr. Markus Sebastian Gross



Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado

Coordinador del Posgrado en Ciencias de La Tierra

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Marco Antonio Oliva Gutiérrez © 2018

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Marco Antonio Oliva Gutiérrez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de La Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Modelado directo del efecto de Polarización Inducida empleando permitividad eléctrica en datos electromagnéticos: Formulación teórica

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Codirector de tesis

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Codirector de tesis

En la actualidad las técnicas de prospección empleadas en la industria minera están teniendo un rápido desarrollo al emplear sistemas electromagnéticos aerotransportados, cuya adquisición de datos se realiza en el dominio del tiempo principalmente. Estas actividades de prospección y exploración se basan en detectar el efecto de sobretensión conocido como Polarización Inducida (PI), que se presenta en medios polarizables. La técnica de PI está basada en un fenómeno electroquímico donde la conductividad varía en función de la frecuencia. Este fenómeno es bien representado por un mecanismo de relajación planteado directamente en la frecuencia conocido como Modelo Cole-Cole (MCC). Esta formulación es la principal razón de por qué los esquemas de modelado y procesamiento de datos se desarrollan en este dominio, pues resulta más sencilla que aquella en el dominio del tiempo. En este trabajo se desarrolló la teoría para implementar un nuevo modelo directo 3D planteado directamente en el dominio del tiempo para incorporar el efecto de PI en datos electromagnéticos usando la permitividad eléctrica. Se introdujo un término denominado función dieléctrica que, al igual que la conductividad del medio, es dependiente de la frecuencia. Esto involucró una convolución entre un parámetro que se denominó velocidad de polarización y la derivada temporal del campo eléctrico definiendo así la ecuación de Helmholtz para campo eléctrico con efecto de PI. Se empleó el concepto de variables de memoria para solucionar la convolución que contiene los parámetros de polarización del medio transformándola en una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias, con lo cual la serie de tiempo completa del medio ya no es necesaria. Se desarrolló la solución en diferencias finitas con mallado intercalado de la ecuación diferencial planteada empleando un esquema explícito evolutivo en tiempo. Finalmente, se trabaja en implementar un esquema de solución numérica que simule la respuesta electromagnética con efecto de PI en medios heterogéneos.

Palabras clave: aerotransportado, Polarización Inducida, Modelo Debye, permitividad, variables de memoria

Abstract of the thesis presented by Marco Antonio Oliva Gutiérrez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Science-Applied Geophysics.

Forward modeling of Induced Polarization effect using electric permittivity in electromagnetic data: Theoretical formulation

Abstract approved by:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Thesis Co-Director

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Thesis Co-Director

Nowadays the prospecting techniques employed in the mining industry have had a great development by the implementation of airborne electromagnetic systems which data acquisition is mainly done in the time-domain. These prospecting and exploration activities are based on detecting an overvoltage effect also known as Induced Polarization (IP) which can arise in the presence of polarizable media. The Induced Polarization technique is based on the electrochemical phenomena where conductivity is frequency dependent. This phenomenon is well represented by a relaxation mechanism defined in the frequency domain directly known as Cole-Cole Model (CCM) that is an empirical model of overburden phenomena. This is the main reason why the algorithm of forward-modeling is developed in the frequency. In the frequency domain, the formulation is easier than time-domain. The main objective of the present work is to develop the theory required to implement a new 3D forward-model posed on time-domain directly, in order to incorporate the IP effect in electromagnetic data using complex frequency-dependent permittivity. The approach involves a convolution integral with time-derivative of the electric field defining the Helmholtz equation for the electric field with IP effect. It has implemented the memory variable concept for solving convolution integral (which contains the polarization parameters of the medium) by transforming it in a set of first-order differential equation in time where the full-time history of the medium is no longer needed. It has developed the finite-difference time-domain solution of the posed equation using an explicit evolutionary scheme in time. Finally, in order to test our formulation is working to implement the numerical solution scheme using the staggered-grid finite-differences method to simulate the electromagnetic response in time-domain with IP effect in heterogeneous media.

Keywords: AEM, Induced Polarization, Debye Model, permittivity, memory variable

Differential equations form the basis for the scientific view of the world.

«V.I. Arnold»

Si se entiende el concepto se pueden desarrollar las ecuaciones.

«L.A. Gallardo»

Dedicatoria

A mi madre Lucia Gutiérrez, quien con su guía, apoyo y ejemplo me ha ayudado a alcanzar mis metas y conquistar mis sueños.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por recibirme para realizar mis estudios de maestría y sembrar la primer semilla como futuro investigador.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría con el No. de becario: 613795

A mis asesores:

- A mi asesor el Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado por su confianza para la realización de este trabajo, por seguir adelante con el objetivo a pesar de las complicaciones y navegar conmigo en este tema por demás interesante. Por todas las horas que me dedicó frente al pizarrón, por los valiosos conocimientos y sus invaluable comentarios para formar en mi un mejor criterio. ¡La tercera es la vencida!. De corazón, ¡muchas gracias!.
- A mi codirector el Dr. Carlos Francisco Flores Luna por el enorme aprendizaje acerca de la Polarización Inducida, por no cansarse de repetirme los conceptos más básicos cuantas veces los pregunté, por sus duras críticas que me hicieron investigar más, corroborar más, entender más. Gracias porque a pesar de todo continuó guiando mi trabajo.

Al Dr. Markus Sebastian Gross por su revisión y comentarios a este trabajo así como por compartir sus conocimientos sobre programación y la bella herramienta GIT, por mostrar siempre buena disposición cuando lo necesite.

Al Dr. Francisco Javier Esparza Hernández por sus valiosos comentarios en los avances y apoyarme con las rápidas revisiones.

Al proyecto 2015-04-268074 “GEMex: Cooperación México-Europa para la investigación de Sistemas Geotérmicos Mejorados y Sistemas Geotérmicos Supercalientes”, financiado a través del Fondo Sectorial CONACYT-SENER. Paquete de trabajo PT5.4. Métodos de Inversión. Por el apoyo económico para asistir al 5th Internacional Workshop of Induced Polarization celebrado en New Jersey, Estados Unidos, una grandiosa experiencia.

Al posgrado de Ciencias de la Tierra por el apoyo económico recibido el primer mes después de finalizar mi beca y a la dirección de Ciencias de la Tierra por la beca recibida durante mi último mes de trabajo, fue bien aprovechada.

A Enid Moran, por su empatía, atenciones, infinita ayuda y asesoría en cada situación académica, personal y administrativa que se presentó. Me sentí sumamente apoyado, ¡gracias!

Al maestro D. Frez Cardenas por esa filosofía con la que impartió el curso de inversión de datos, que nunca le falte porque mucha falta nos hace.

A la familia Cruz Salas, por su amistad y acogida a mi llegada a Ensenada, hicieron menos duro el cambio de aires. Gracias por permitirme ser parte de su familia en cada comida y reunión a la que me invitaron, los estimo mucho.

Al maestro Favio Cruz, por toda tu ayuda, por las discusiones que sin duda me ayudaron a crecer, por su amistad, por esos cursos rápidos de programación y por estar siempre dispuesto a ayudarme en cada momento que lo necesité.

A mis niños, la A³, Armando, Oswaldo y Cristian, por aceptarme como soy, por lo mucho que aprendí de ustedes, por cada risa, chela y chilaquil que pusimos como pretexto para convivir, por esos días de GYM y por la enorme cantidad de risas. Por toda la ayuda y empatía que recibí de ustedes cuando más lo necesité. Me llevo su amistad como lo mejor que encontré en esta ciudad.

A mis compañeros de generación que de una u otra forma me acompañaron en esta etapa: Eleyra Sena, Javier Hernández, Laura Velazquez, Alan Ramírez, Jesús Trejo, Aideliz Montiel, Stephany Aguilar, Josué González, Pita Olguín, Gabriela Tellez, Javier Avendaño, Salvador García y Luis Guerrero.

Al Maestro Victor Rico, por responder a mi llamada de auxilio, por su tiempo y buena disposición a ayudarme, gracias por compartir tus conocimientos sobre permitividad que ayudaron en gran medida a madurar mis ideas. Un gran colega, ¡gracias!

Al Maestro Rafael Ledesma, por abrirme las puertas de la casa en el Sauzal cuando más lo necesitaba, el mejor roomie que tuve en Ensenada.

A la Maestra Beatriz Valdéz, por las discusiones, charlas y ayuda en programación.

Al Maestro Adrián León por su ayuda para aclarar dudas en el modelado electromagnético y su respectiva programación, gracias por el tiempo.

A Astrid Luna, me faltan palabras para expresar todo lo que pienso. Gracias por cada noche de desvelo, por escuchar cada palabra, cada idea, por ayudarme a estructurar mis pensamientos por aclarar mis ideas al explicarte una y mil veces todas mis ecuaciones, tu apoyo ha sido trascendental para que lograra lo que en esta tesis se ha plasmado. Gracias por revisar puntos y comas, ¡vaya que lo necesitaba!, eres la mejor científica que conozco y agradezco a Dios por ponerte en mi camino y por el infinito apoyo, paciencia y empatía que he recibido de ti. ¡Caminemos juntos al doctorado!.

A la vida y al universo por ayudarme a llegar al camino de la ciencia.

Finalmente, el mayor de los agradecimientos para mi hermosa familia, mi hermano Adriel y mi mamá Lucia, siempre estaré agradecido hermano por esa invaluable oportunidad que me diste. La recordaré por siempre. A mi mamá, ¡caray! 123 páginas me quedarían cortas para agradecer tu ayuda y amor durante 29 años. Gracias por todo tu apoyo por confiar ciegamente en mi, por tu esfuerzo incansable para darme todo

cuanto he pedido sobretodo a mi llegada a esta bella ciudad porque se que el camino ha sido difícil y nunca me ha hecho falta nada. Toda mi gratitud por siempre impulsarme y ayudarme a volar alto. Eres mi claro ejemplo de que el trabajo duro rinde frutos, gracias por siempre estar ahí empujándome para jamás desistir. Esto es por ti y para ti, y apenas comienza.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Lista de figuras	xii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Simulación y modelado electromagnético	3
1.2. Antecedentes	4
1.3. Justificación	8
1.4. Hipótesis	9
1.5. Objetivos	10
Capítulo 2. Fundamento teórico de la técnica de PI	
2.1. Generalidades	11
2.2. Origen del fenómeno y el modelo de doble capa	12
2.2.1. Tipos de polarización	15
2.3. Modelo Cole-Cole	17
2.4. Modalidades de la Polarización Inducida	19
2.4.1. Dominio del tiempo	20
2.4.2. Dominio de la frecuencia	22
2.4.3. Espectral	23
2.5. Polarización Inducida con fuentes inductivas	24
2.5.1. Sistemas electromagnéticos aerotransportados	27
Capítulo 3. Formulación teórica del modelado 3D de PI	
3.1. Problema directo de la Polarización Inducida EM	29
3.2. Planteamiento del modelo	31
3.2.1. Función Debye	31
3.2.2. Término dispersivo	33
3.2.3. Descripción atómica del fenómeno y el Modelo de Drude	33
3.2.4. Expresión general de la función dieléctrica	37
3.3. Ecuación de Helmholtz para PI en el dominio del tiempo	40
3.3.1. Empleando campo magnético en medios heterogéneos	42
3.3.2. Empleando campo magnético en medios homogéneos	44
3.3.3. Modelo alternativo empleando campo eléctrico	45
3.4. Variables de Memoria	46
3.4.1. Principio físico	47
3.4.2. Modelos de relajación en geofísica	49
3.4.3. Velocidad de Polarización	51
3.4.4. Transformación de la convolución en una EDO	51

Capítulo 4. Expansión de la Función Debye	
4.1. Aproximación al Modelo Cole-Cole	55
4.1.1. Esquema de inversión por mínimos cuadrados	55
4.2. Estimación del número de funciones Debye	59
4.2.1. Bondad del ajuste y análisis de residuales	60
4.3. Validación del método	62
4.3.1. Prueba de Sensibilidad	62
4.3.2. Relación del muestreo con la eficiencia del ajuste	67
Capítulo 5. Experimentos numéricos	
5.1. Verificación de las ecuaciones en el dominio del tiempo.	68
5.1.1. Función dieléctrica en frecuencia y tiempo	69
5.1.2. Conductividad en el dominio del tiempo	70
5.1.3. Velocidad de polarización	71
5.2. Prueba sintética 1: Variación de parámetros del MCC	72
5.2.1. Decaimiento de la corriente	72
5.2.2. Función dieléctrica en tiempo	73
5.2.3. Comportamiento de la velocidad de polarización	74
5.3. Prueba sintética 2: Sensibilidad al parámetro c	75
Capítulo 6. Discretización del problema EM en 3D	
6.1. El método de DFDT con mallado intercalado	78
6.1.1. Derivación de las ecuaciones en diferencias finitas	83
6.1.2. Cálculo de los parámetros de PI	87
6.1.3. Actualización de la variable de memoria	91
6.2. Solución explícita del campo eléctrico	92
6.3. Cálculo del campo magnético con efecto de PI	94
Capítulo 7. Discusión y Conclusiones	
7.1. Discusión	96
7.2. Conclusiones	100
Literatura citada	102

Lista de figuras

Figura	Página
1. Diagrama de flujo generalizado para el modelado electromagnético	3
2. Representación del modelo de doble capa en una interfase electrodo-solución	13
3. Esquema del modelo de Stern, decaimiento lineal y su representación en un circuito equivalente	14
4. Polarización Inducida debido a una mineral de arcilla y/o mineral fibroso con carga negativa	15
5. Esquema del fenómeno de sobretensión en un mineral metálico inmerso en un electrolito	16
6. Circuito equivalente del Modelo Cole-Cole para permitividad dieléctrica compleja	17
7. Pequeña sección de roca mineralizada y circuito equivalente en terminos de una impedancia compleja	18
8. Modalidades en las que se realiza técnica de PI	19
9. Secuencia básica para realizar una medición de datos de PI galvánico en el dominio del tiempo	21
10. Curvas típicas de la Polarización Inducida Espectral (SIP)	24
11. Modelo de inducción electromagnética asociado a la geoelectricidad	24
12. Sistema de bucles coincidentes, coaxiales-coplanares (In-loop).	25
13. Amplitudes negativas en la respuesta de la componente vertical del campo magnético como indicador de PI	25
14. Diagrama esquemático del movimiento de los iones en un volumen de roca polarizable bajo la influencia de una bobina transmisora en un TEM	26
15. Sistema electromagnético versátil en el dominio del tiempo por sus siglas en inglés	27
16. Esquema del sistema aerotransportado BGR	28
17. Esquema del proceso de modelado directo en el que a partir de un conjunto de parámetros se calcula la respuesta del modelo	29
18. Variación del potencial observado por efecto de la polarización	30
19. Arreglo In-loop ampliamente utilizado para detectar el efecto de PI en sondeos TEM	30
20. El sistema resorte-masa-amortiguador es la representación teórica mas simple de un proceso mecánico de relajación	48
21. Circuito eléctrico resistencia-capacitor y curva de relajación característica como el mecanismo de relajación más simple para procesos eléctricos	48

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
22. Modelo reológico Cuerpo Zener Generalizado (GZB) ampliamente utilizado para describir los procesos de atenuación en la propagación de ondas sísmicas	49
23. El circuito equivalente del Modelo Cole-Cole es el mecanismo de relajación que explica el reestablecimiento al equilibrio de un suelo polarizado	50
24. Comparativa en el comportamiento del Modelo Cole-Cole con $c=1$, Función Debye con $c=1$ y expansión de la Función Debye con $\gamma = 1$	59
25. Esquema del ajuste del Modelo Cole-Cole (MCC) empleado 10 términos en la expansión de la Función Debye (EFD).	60
26. Residuales de los ajustes al MCC empleando 2, 4, 6, 8 y 10 funciones Debye	61
27. Sensibilidad de la expansión variando la conductividad a frecuencia cero .	63
28. Sensibilidad de la expansión variando la cargabilidad	64
29. Sensibilidad de la expansión variando la constante de tiempo	65
30. Sensibilidad de la expansión variando el exponente de la frecuencia c . . .	66
31. Influencia del muestreo de la frecuencia de relajación en el ajuste del Modelo Cole-Cole para un exponente de la frecuencia pequeño	67
32. Modelo Cole-Cole de referencia 1 para calcular la respuesta del modelo dieléctrico propuesto en el dominio del tiempo.	68
33. Componente real e imaginaria de la función dieléctrica	69
34. Comportamiento de la función dieléctrica en el dominio del tiempo como una curva de relajación.	69
35. La conductividad en el dominio del tiempo representa el decaimiento de la corriente de polarización al cesar la incidencia de un campo eléctrico . .	70
36. Velocidad de Polarización	71
37. Comportamiento de la corriente de polarización al variar los parámetros Cole-Cole.	72
38. Función dieléctrica variando los parámetros Cole-Cole en el dominio del tiempo	73
39. Velocidad de polarización variando los parámetros Cole-Cole	74
40. Análisis de la velocidad de polarización y el decaimiento de la corriente de polarización con once frecuencias de relajación muestreadas a 0.45 Hz. Sin presencia de inversión en las curvas	75

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
41. Análisis de la velocidad de polarización y el decaimiento de la corriente de polarización con once frecuencias de relajación muestreadas a 0.4 Hz, con inversión en las curvas	76
42. Análisis de la velocidad de polarización y el decaimiento de la corriente de polarización con 11 frecuencias de relajación muestreadas a 0.47 Hz, con inversión en las curvas	77
43. Mallado intercalado de Yee en tres dimensiones compuesta de una malla de campos eléctricos (prisma azul) sobrepuesta a una de campos magnéticos (prisma rojo)	79
44. Visualización del Mallado de Yee en 3D sobre un prisma rectangular donde los campos eléctricos y magnéticos se distribuyen de forma intercalada . .	80
45. Modelo tridimensional discretizado en prismas rectangulares sobre una malla irregular	83
46. Arreglos geométrico de nodos en dirección x , y y z de una malla 3D para un operador de doble rotacional de campo eléctrico	84
47. Distribución espacial del campo eléctrico para la componente x de un operador de doble rotacional	85
48. Distribución espacial de los campo eléctricos, variables de memoria, fuentes y propiedades físicas para una malla irregular en tres dimensiones	88
49. Sección transversal de cuatro prismas sobre una malla irregular	88
50. Stenciles complementarios para el cálculo de las propiedades físicas del medio	89

Capítulo 1. Introducción

La importancia económica de los yacimientos minerales, reservorios geohidrológicos y de hidrocarburos ha provocado que se vuelque la atención en técnicas que puedan detectar características propias de las rocas, sedimentos y fluidos que contienen; una de ellas es la cargabilidad de los materiales. La cual se presenta comunmente en minerales metálicos y arcillosos. Esta propiedad se refleja en algunas mediciones electromagnéticas; sin embargo, su identificación requiere de esquemas numéricos que predigan la respuesta de los campos electromagnéticos ante la presencia de materiales eléctricamente cargables (o polarizables).

El fenómeno de Polarización Inducida (PI) empleando fuentes inductivas es descrito a través de un proceso dispersivo donde la conductividad eléctrica varía en función de la frecuencia. Este proceso se agrega a una significativa pérdida de energía electromagnética, la cual se absorbe por unidad de distancia desplazada y en el que además de la conductividad σ , la permitividad eléctrica ϵ juega un papel importante (Seybold, 2005, p. 22). Simular la respuesta de la cargabilidad como una conductividad dependiente de la frecuencia en el dominio del tiempo es un reto computacional; sobre todo por que los modelos de relajación que describen el fenómeno de Polarización Inducida están planteados directamente en la frecuencia (Cole y Cole, 1941; Davidson y Cole, 1951; Havriliak y Negami, 1967; Kunz y Luebbers, 1993; Nigmatullin y Ryabov, 1997) y en la mayoría de los casos implica una convolución en el dominio del tiempo lo que explica que los esquemas de modelado existentes planteados tanto para el caso galvánico de corriente directa (terrestre), como para fuentes inductivas, resuelvan el problema mediante una transformación de dominios ($f \rightarrow t$). En realidad, son pocos y muy recientes los esquemas que emplean fuentes inductivas y realizan el modelado directamente en el dominio del tiempo, pudiendo listar los trabajos de Marchant *et al.* (2014, 2018); Commer *et al.* (2017); Cai y Zhdanov (2017). Notablemente, solo dos de ellos emplean el método de diferencias finitas.

En este trabajo se ha formulado la teoría para establecer un modelo matemático tridimensional planteado directamente en el dominio del tiempo capaz de incorporar el fenómeno de PI en datos electromagnéticos en el dominio del tiempo con la finalidad de implementar un esquema numérico que prediga la respuesta de estos campos en

presencia de materiales polarizables. A diferencia de todas las formulaciones anteriores, se plantea incorporar la permitividad eléctrica partiendo del supuesto de que el efecto de polarización en las rocas puede explicarse no solo como un fenómeno dispersivo de la conducción eléctrica sino también como un fenómeno capacitivo-dispersivo gobernado por la permitividad absoluta del medio.

Se partió de las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia para obtener una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) de tipo parabólica, en términos de campo eléctrico. Posteriormente, empleando la transformada inversa de Fourier se definió una nueva ecuación de Helmholtz en términos de convoluciones en el dominio del tiempo, las cuales contienen los parámetros de polarización del medio. Nuestra formulación permite estimar valores de permitividad eléctrica a partir de un modelo de conductividad eléctrica compleja denominado Modelo Cole-Cole. El cálculo de la permitividad permite estimar la respuesta de campo eléctrico ante la presencia de sobrecarga o polarización inducida en el subsuelo.

El principal reto computacional que trae consigo la ecuación resultante de Helmholtz en el dominio del tiempo, es el resolver la integral de convolución entre la derivada temporal del campo eléctrico y una nueva variable que se ha definido como la velocidad de polarización. Este reto se abordó empleando el concepto de variables de memoria, ampliamente utilizado en el modelado de la atenuación en la propagación de ondas sísmicas (Carcione *et al.*, 1988a; Carcione, 1990; Xu y McMechan, 1995; Hestholm, 2002; Moczo y Kristek, 2005; Moczo *et al.*, 2007) para evitar almacenar la serie de tiempo completa.

La metodología es diferente a las convencionales aplicadas en la exploración geofísica del subsuelo pues es la primera en abordar el modelado directo de la Polarización Inducida empleando la ecuación de Helmholtz con la permitividad en función del tiempo.

1.1. Simulación y modelado electromagnético

El modelado electromagnético computacional es un área de las ciencias que surge de tratar de reproducir (entender, aplicar y resolver) los fenómenos electromagnéticos que surgen de la interacción de las ondas electromagnéticas con la materia. Este comportamiento en general es predicho por la teoría electromagnética resumida en las ecuaciones de Maxwell las cuales se pueden resolver de forma analítica o con métodos de simulación numérica. Desafortunadamente, los modelos que pueden resolverse con formulaciones analíticas se limitan a la propagación de campos electromagnéticos en medios sumamente simplificados, tal es el caso de un modelo de capas estratificadas. En general, para calcular la respuesta electromagnética de un modelo en 2 o 3 dimensiones se requiere de aproximaciones numéricas sofisticadas, gran cantidad de memoria y tiempo de computo. Los campos que se transmiten en los medios geológicos heterogéneos requieren de este tipo de soluciones.

En general, el desarrollo de un esquema de modelado directo de campos electromagnéticos consta de varias etapas que pueden resumirse en la figura siguiente:

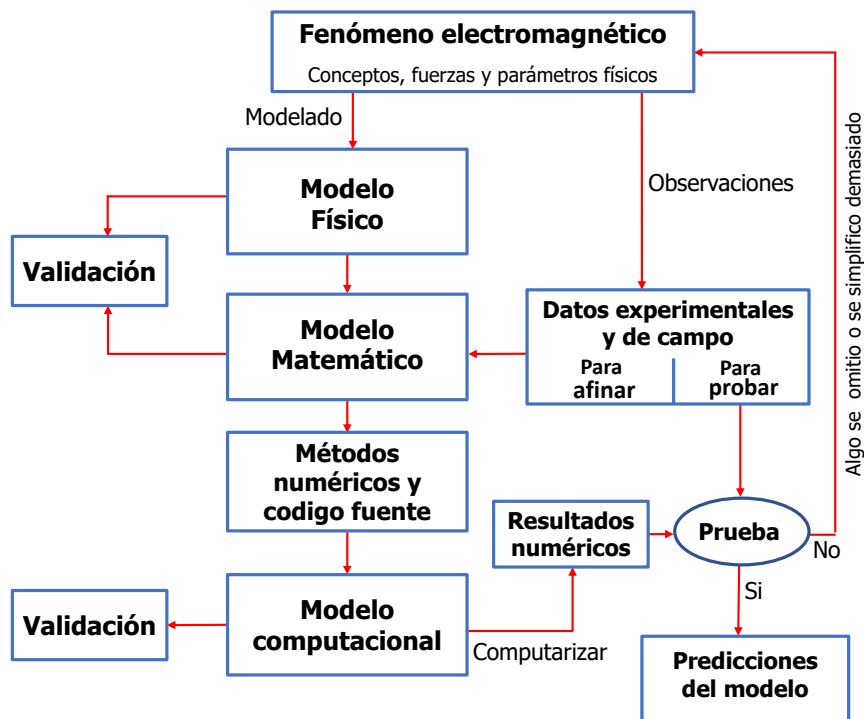


Figura 1. Diagrama de flujo generalizado para el modelado electromagnético (modificado de Alik Ismail-Zadeh 2010)

Con el continuo desarrollo de los métodos de modelado numérico ha sido posible realizar problemas electromagnéticos tridimensionales y modelar ambientes y estructuras geológicas más realistas. Además, el uso combinado de los métodos de modelado e inversión numéricos ha permitido la interpretación cuantitativa de los campos electromagnéticos medidos en campo.

Los métodos electromagnéticos aplicados a exploraciones mineras, ambientales (geotermia) y de hidrocarburos emplean técnicas computacionales para el desarrollo de esquemas de modelado directo que son útiles en varias etapas de un proyecto geofísico: desde la planeación para la adquisición de datos, para entender del método y para formar parte del proceso iterativo en la inversión de datos.

1.2. Antecedentes

La técnica de Polarización Inducida (PI) con fuentes inductivas ha tenido un creciente desarrollo principalmente al implementarse a través de sondeos electromagnéticos transitorios (TDEM)(Palacky y West, 1991). En los últimos años este desarrollo se ha extendido a los sistemas electromagnéticos aerotransportados (AEM) en donde, empleando un sistema de bucles centrales, se busca medir el efecto de PI en la derivada temporal de la componente vertical del campo magnético lo que a menudo se refleja como una inversión de signo o amplitud negativa en el voltaje medido (Flis *et al.*, 1989; Dentith y Mudge, 2014) debido justamente al aspecto dispersivo de la conductividad y que no se explica con un medio puramente resistivo.

Numerosos trabajos han comprobado que empleando únicamente la amplitud de los datos medidos en sistemas de bucles centrales, no es suficiente para detectar voltajes negativos producidos por la PI (Flis *et al.*, 1989). Esto requiere el uso de conductividades dispersivas a través de un modelo de impedancia compleja planteado directamente en el dominio de la frecuencia mejor conocido como Modelo Cole-Cole (Pelton *et al.*, 1978). Su implementación en la frecuencia evita calcular la convolución que surgiría en el dominio del tiempo entre la resistividad compleja y el campo eléctrico (Ley de Ohm) por lo que es común trabajar los datos de PI inductiva en el dominio de la frecuencia y regresarlos al dominio original mediante una transformación inversa de dominios.

Algunos otros trabajos están planteados para el caso galvánico (corriente directa) en los que se resuelve la ecuación de continuidad (Weller *et al.*, 1996; Fiandaca *et al.*, 2012; Liu *et al.*, 2017; Kenkel *et al.*, 2012)

Por otro lado, el Modelo Cole-Cole (MCC) que es un caso particular del Modelo Havriliak-Negami (Havriliak y Negami, 1967) es un modelo dispersivo no lineal, principal limitante para introducirlo directamente en un esquema analítico. Además, de no poseer una expresión analítica en el dominio del tiempo que se pueda agregar directamente a las ecuaciones de Maxwell. El Modelo Debye, que a su vez es un caso particular de Cole-Cole (Kelley *et al.*, 2007) es un modelo dispersivo lineal con un amplio rango de aplicación (Hz - GHz) aunque lineal y fácilmente incorporable a una formulación analítica por ser una función exponencial en el dominio del tiempo, es un modelo muy simple para describir procesos dispersivos más complicados en la mayoría de materiales y para un rango de frecuencias de dos o más décadas (Kelley *et al.*, 2007; Sandrolini *et al.*, 2011) como las que se emplean en PI, fenómeno bien descrito por el modelo Cole-Cole.

Para resolver esta situación, Kelley y Luebbers (2003) propusieron una sumatoria finita y ponderada de modelos Debye para reproducir modelos más complejos, emplearon un estimador de error cuadrático medio para resolver un sistema de ecuaciones lineales y determinar las p ponderaciones que al agregarlas a la sumatoria de funciones Debye reprodujeran el modelo Cole-Cole de permitividades eléctricas en un rango de frecuencias del orden de GHz. Tiempo después, Kelley *et al.* (2007) emplean un esquema híbrido de mínimos cuadrados y optimización por enjambre de partículas para estimar los parámetros de los modelos Debye que sumándolos lograron reproducir con gran exactitud el Modelo Havriliak-Negami también en un rango de frecuencias de GHz. Ambas formulaciones demostraron tener buenos resultados al representar modelos dispersivos más elaborados en términos de sumas de un modelo dispersivo simple (Debye). El método que desarrollaron probó brindar estabilidad y precisión al agregarlo a un esquema de diferencias finitas.

En el caso de las convoluciones que surgen al considerar medios dispersivos en el dominio del tiempo, Kelley y Luebbers (1996) emplearon un esquema de integración recursiva evitando acumular la serie de tiempo completa del campo eléctrico. Por su parte Siushansian y Lovetri (1997), empleando un esquema de integración cuasi-trapezoidal logran de igual manera este objetivo. Estos dos trabajos centran su meto-

dología en considerar un sistema dispersivo de relajación lineal, el cual tiene la gran ventaja de que su transformada inversa de Fourier es una expresión de tipo exponencial, lo que permite calcular la integral de convolución de manera recursiva. Estos trabajos están desarrollados para el modelado electromagnético a altas frecuencias (MHz y GHz), lo que traería como limitante en la geofísica la forma de propagación de las ondas electromagnéticas pues sus modelos se basan en la propagación de ondas en antenas y la difusión en medios dieléctricos.

Un problema similar se presenta en el fenómeno de atenuación de ondas sísmicas en medios viscosos. Para modelar este fenómeno, Carcione *et al.* (1988a) introdujo a la geofísica, específicamente en el área de la sismología, el concepto de *variables de memoria* cuyo procedimiento está basado en considerar un sistema mecánico de relajación lineal (resorte-masa-amortiguador). Las convoluciones que surgen de emplear el principio de superposición de Boltzmann en el dominio del tiempo, son remplazadas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en tiempo que, al resolverlas con diferencias finitas, evitan acumular la historia de tiempo completa de la deformación. Aunque en esencia los trabajos desarrollados en antenas, dieléctricos y sismología son similares en la formulación (reproducen el fenómeno en términos de una función exponencial en el dominio del tiempo), el desarrollo e implementación resulta completamente diferente en el caso de ondas electromagnéticas propagándose en la Tierra.

Hasta la fecha solo dos trabajos de modelado electromagnético de PI en el dominio del tiempo han sido reportados. En ambos trabajos evitan el cálculo de la integral de convolución. Marchant *et al.* (2014) emplea un desarrollo en polinomios de Padé a partir de las ecuaciones de Maxwell y la Ley de Ohm reescrita en términos de las variables del modelo Cole-Cole:

$$\nabla \times \vec{e} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{h} - \vec{j} = \vec{j}_s$$

y

$$\sigma_0 \vec{e} + \tau \sigma_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \vec{j} + \tau(1 - \eta) \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}.$$

Por su parte, Commer *et al.* (2017) emplea el concepto de variables de memoria evitando almacenar la historia completa de los campos electromagnéticos, y la convolución puede verse como un sistema de EDO que junto con los campos electromagnéticos los discretiza empleando el método de diferencias finitas y calcula la evolución de un sistema acoplado a cada paso de tiempo. La formulación se basa en la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \vec{e} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{h} - \vec{j} - \gamma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \vec{j}_s$$

y

$$\vec{j}(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t') \vec{e}(t - t') dt'.$$

Ambas formulaciones emplean el Modelo Cole-Cole, pero en esta última se utiliza la expansión de la Función Debye para evitar el uso directo del Modelo propuesto por Pelton *et al.* (1978).

Un tercer trabajo de modelado de PI en datos electromagnéticos aéreos es desarrollado por Marchant *et al.* (2018), siguiendo una metodología similar que la empleada cuatro años antes (Marchant *et al.*, 2014). Todas las formulaciones demostraron estabilidad y precisión en su resultados.

Se puede resumir que hasta la realización de la presente investigación existen tres trabajos publicados que modelan el efecto de PI en datos electromagnéticos en el dominio del tiempo. A esta recopilación se debe incluir los desarrollos tecnológicos propios de Geotech (2018) que como principal servicio realizan sondeos transitorios aerotransportados cuyos algoritmos numéricos no se encuentran publicados

1.3. Justificación

Los nuevos horizontes en la aplicación de los métodos EM conduce inevitablemente a la mejora, desarrollo e innovación de esquemas numéricos que permitan por ejemplo: entender el comportamiento de nuevos sistemas de adquisición de datos, analizar la respuesta de los campos EM en situaciones geológicas complejas o implementarlos como parte de un esquema de inversión de datos. Tal es el caso de la técnica de Polarización Inducida, la cual recientemente se ha modernizado en la adquisición de datos empleando sistemas EM sobre todo, aerotransportados lo que involucra ahora, no sólo el cálculo de los campos sino además, de la respuesta dispersiva de la propiedad física. Aunque ampliamente desarrollados los esquemas numéricos para la adquisición convencional de los campos EM durante las últimas décadas, es de muy reciente desarrollo, incorporar el fenómeno de PI a la señal EM.

Los sistemas aerotransportados y terrestres desarrollados para detectar cuerpos polarizables de interés económico-minero se basan en medir la señal de los campos durante un periodo de tiempo generando una serie de tiempo, la cual e la mayoría de los casos se transforma al dominio de la frecuencia en el que se analiza y procesa para finalmente regresarla al dominio en que fue adquirida lo que involucra algunas desventajas como no recuperar toda la información que se adquirio en tiempo, el decremento en la amplitud de la señal registrada y el tiempo de computo. Existen así contados intentos de proponer un modelo planteado directamente en el dominio del tiempo que pueda ser eficientemente aplicado tanto en sistemas terrestres como aéreos éste último donde las ecuaciones de Maxwell están débilmente acopladas.

1.4. Hipótesis

Debido a que este trabajo involucra aspectos de modelado directo y la reproducción de la respuesta electromagnética con efecto de PI que se presenta en las rocas, se han planteado varias preguntas. Primero y como pregunta fundamental: ¿Es posible reproducir el efecto de polarización inducida como un fenómeno capacitivo descrito por la permitividad eléctrica? y de ser posible, ¿Cómo podría este modelo dieléctrico agregarse a las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo para definir una ecuación diferencial?, ¿Tendría una solución numérica eficiente en términos computacionales? ¿Qué ventajas tendría sobre el típico modelo de conductividad?.

Como hipótesis se establece lo siguiente:

- La propiedad que caracteriza a los condensadores, está descrita por la permitividad eléctrica que describe la cantidad de carga necesaria para producir una cantidad de flujo eléctrico. El modelo empírico que describe el efecto de PI nace de un modelo dieléctrico empleado para describir los procesos de absorción en dieléctrico. Estos materiales dan lugar a la corriente de polarización responsable de las amplitudes negativas en la componente vertical del campo magnético por lo que en principio, es un fenómeno ampliamente relacionado con la permitividad y puede ser reproducido en términos de este parámetro.

Un circuito eléctrico que aproxima el efecto de PI en las rocas, se interpreta como una impedancia compleja, cuya parte imaginaria es una reactancia que describe la oposición al paso de la corriente alterna en un condensador y que como se ha explicado antes está descrito por su permitividad.

Obtener una ecuación de segundo orden en espacio aseguraría la adaptación de técnicas de solución numérica conocidas, además de brindar mayor acoplamiento de los campo electromagnéticos en el aire.

Finalmente, las diferencias ante los modelos convencionales de conductividad en la aproximación cuasi-estática se verificarán con la implementación computacional del esquema numérico. Se supone como principal diferencia la de disponer de un modelo directo planteado directamente en el dominio del tiempo que de cuenta del efecto de PI en datos electromagnéticos.

1.5. Objetivos

Para acotar los alcances de este trabajo, se han planteado los siguientes objetivos:

Objetivo general

Establecer la teoría para incorporar el efecto de Polarización Inducida en datos electromagnéticos en el dominio del tiempo empleando la permitividad eléctrica dispersiva en las ecuaciones de Maxwell.

Objetivos específicos

1. Desarrollar un módulo de inversión para aproximar el Modelo Cole-Cole empleando una suma ponderada de funciones exponenciales (Función Debye).
2. Plantear un esquema de solución numérica implementando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo con mallado intercalado.
3. Desarrollar un algoritmo computacional para el esquema propuesto.

Capítulo 2. Fundamento teórico de la técnica de Polarización Inducida

2.1. Generalidades

La técnica de Polarización Inducida tiene un fundamento teórico complejo de explicar, pues se sustenta en un fenómeno electro-químico independiente del volumen, por lo que se considera como un fenómeno de superficie. Después de los métodos potenciales, la PI tiene gran aplicación en la industria minera, a través de la detección de un fenómeno característico que se presenta al medir el potencial eléctrico para el caso de los métodos galvanicos o el campo magnético en el caso inductivo. Este fenómeno de sobretensión o de polarización inducida se debe a la capacidad de carga o carga-bilidad de los granos de roca como una propiedad para almacenar cargas eléctricas reversibles debido a la polarización de la doble capa eléctrica (Slater y Lesmes, 2002).

Aunque en proporciones variables, los poros y capilares de las rocas contienen casi siempre partículas de arcilla, las que habitualmente tienen un exceso superficial de cargas negativas que hace que iones positivos (cationes) del electrolito inmediato formen una rígida capa adyacente alrededor de ella conocido como capa de Stern. En esta capa, durante el flujo de corriente eléctrica los iones se acumulan cerca de la interfase e impiden el flujo de iones en el electrolito. Al cortar la corriente, los iones regresan lentamente a sus posiciones de equilibrio, este proceso de relajación es el principal indicador de la presencia de Polarización Inducida.

Debido a las diferencias en los mecanismos de transporte de cargas, una vez cortada la corriente, el voltaje medido entre dos electrodos no decae a cero instantáneamente, sino que lo hace de manera cuasi-exponencial hasta que todos los elementos polarizados restauran su condición de equilibrio. Debido a su capacidad de diferenciar ambos mecanismos de conducción, la polarización inducida ha sido una técnica muy usada para la exploración, prospección y caracterización de yacimientos minerales.

2.2. Origen del fenómeno y el modelo de doble capa

Cuando un conductor electrónico (metales, sulfuros, o semiconductores) entra en contacto con un conductor iónico sólido o líquido (electrolito), aparece una frontera común (interfaz) entre las dos fases. El modelo de doble capa explica la interacción entre estas dos fases y cómo podrían producir una diferencia de potencial. Hermann von Helmholtz (1879) propuso el primer modelo de la doble capa eléctrica al observar que los electrodos cargados sumergidos en soluciones electrolíticas repelen los co-iones (iones de baja masa molecular y misma polaridad) de la carga y atraen contraiones (cualquier ion de carga opuesta a otro en una solución u otro sistema electroquímico) en sus superficies formando así, dos capas de polaridad opuesta en la interfaz entre el electrodo y el electrolito. Éste proceso es la Polarización Inducida que conocemos en geofísica. En 1853 Helmholtz demostró que una doble capa eléctrica es esencialmente un dieléctrico molecular y almacena la carga electrostáticamente. Una vez que el electrolito se descompone al paso de la corriente, la carga almacenada depende linealmente de la tensión aplicada.

Este primer modelo predijo una capacitancia diferencial constante pero no consideraba factores importantes como la difusión. Tiempo después, Louis Georges Gouy en 1910 y David Leonard Chapman en 1913 observaron que la capacitancia no era una constante y que dependía del potencial aplicado y la concentración iónica. El "Modelo Gouy-Chapman"(MGC) hizo mejoras significativas al introducir un modelo difuso de la doble capa. Sin embargo, el MGC falla para una doble capa altamente cargada.

En 1924, Otto Stern sugirió combinar el modelo de Helmholtz con el de Gouy-Chapman dando lugar al "Modelo de Stern". En este modelo, algunos iones se adhieren al electrodo (como sugiere Helmholtz) dando lugar a una capa interna (1), posterior a ella se forma el plano externo de Helmholtz (2), es donde surge la mayor acumulación de iones, otros más forman una capa difusa (3), denominada capa de Gouy-Chapman en la que gradualmente se comienzan a difundir los iones hasta llegar a la zona de iones solvatados (4) denominados cationes. Este proceso electroquímico da lugar iones adsorbidos (5) y a la separación de moléculas del solvente electrolítico (6) como se ejemplifica en la figura 2.

El modelo Stern tiene sus propias limitaciones, trata iones como cargas puntuales, asu-

me que todas las interacciones significativas en la capa difusa son de tipo Coulomb (transportadas por una corriente constante de 1 Ampere por segundo [As]) y asume que la permitividad dieléctrica es constante en toda la doble capa principal motivación para girar esta investigación y desarrollo matemático en incluir la permitividad eléctrica en la formulación de un nuevo modelo EM de PI a partir de las ecuaciones de Maxwell.

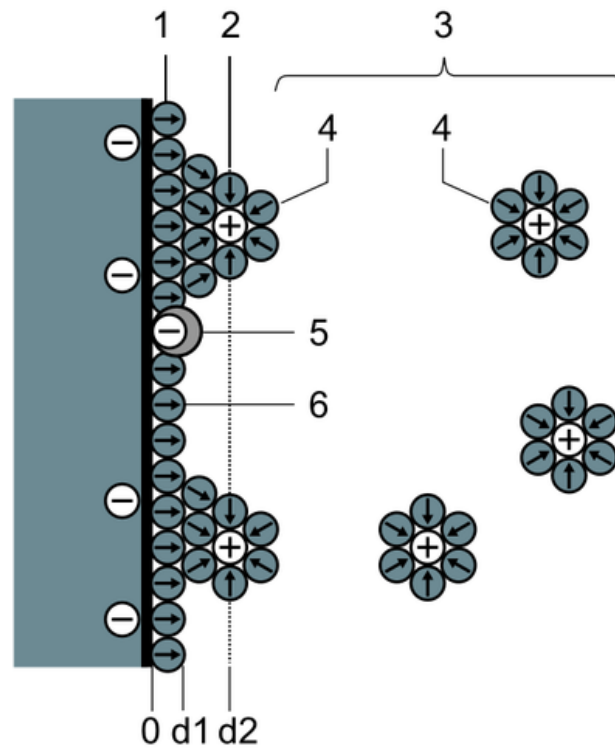


Figura 2. Representación del modelo de doble capa en una interfase electrodo-solución. (Tosaka 2008. Ilustración de la doble capa eléctrica. Recuperado de Commons 2018)

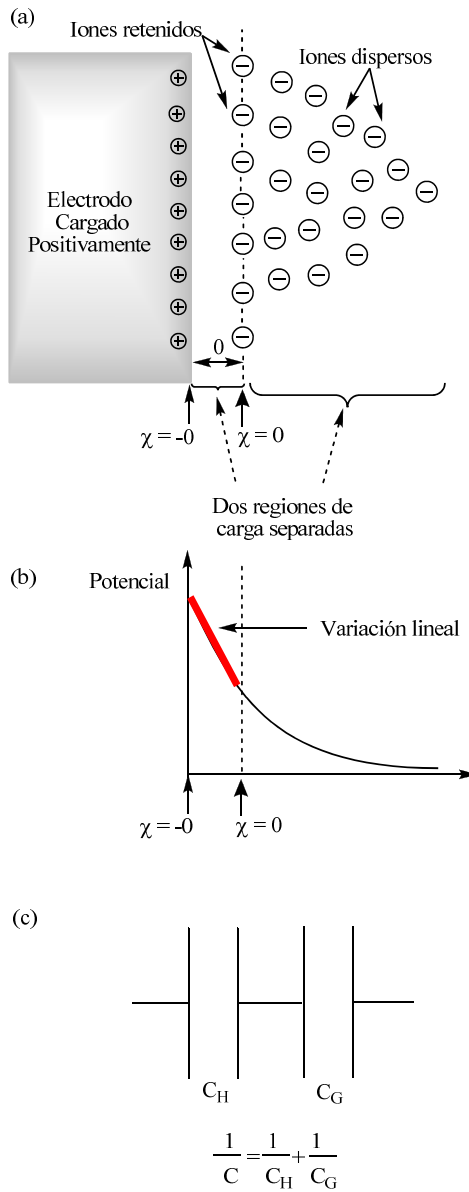


Figura 3. a) Esquema del modelo de Stern, b) Decaimiento lineal, explica el instante de tiempo después de cortar la corriente donde el potencial no puede ser medido c) Circuito equivalente: se explica como el comportamiento teórico de dos capacitores conectados en serie (Tomado de <https://ocw.uca.es/mod/resource/view.php?id=1908&forceview=1>)

2.2.1. Tipos de polarización

Dependiendo del contenido mineral, la composición química y la salinidad, el fenómeno de PI en las rocas se produce por dos principales mecanismos de polarización: membrana y metálica.

Polarización electrolítica o de membrana

Se presenta en cuerpos con poca o nula presencia de minerales conductores. Es debida a granos cargados negativamente que se acumulan en las paredes de los poros donde los cationes son repelidos y los aniones son atraídos formando una doble capa superficial o membrana de iones de alrededor de $100 \mu\text{m}$ de espesor. Lo anterior provoca que el poro se estreche impidiendo el movimiento de los cationes a través del fluido del poro (Dentith y Mudge, 2014), como consecuencia la corriente deja de fluir y da como resultado una concentración local de aniones en un lado del poro y una deficiencia en el otro, es decir, hay una polarización eléctrica.

Generalmente, el efecto de PI en este tipo de polarización es de menor intensidad. Las arcillas y los minerales fibrosos tienen cargas superficiales particularmente fuertes y son el elemento principal aunque no indispensable para producir este efecto. Lo anterior produce gradientes de concentración que tardan en desaparecer cierto tiempo después de cortar la corriente y que originan por lo tanto una sobretensión residual.

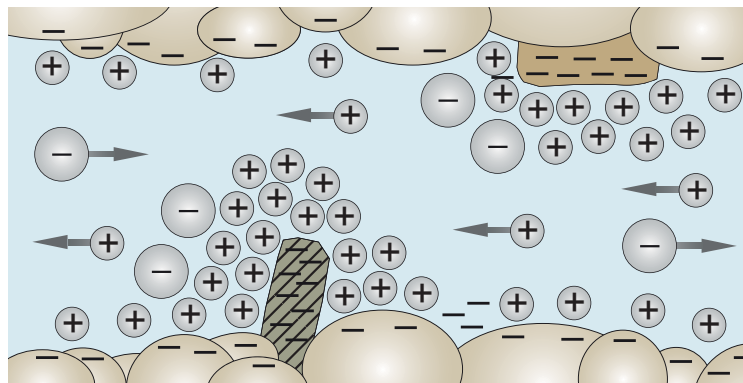


Figura 4. Polarización Inducida debido a una mineral de arcilla (arriba) y/o mineral fibroso (abajo) con carga negativa (Tomado de Dentith y Mudge 2014)

Metálica, de grano o de electrodos

Tiene lugar en minerales muy conductores como sulfuros o minerales de óxido como el manganeso. De hecho, los minerales disseminados presentan un fuerte efecto de PI que se origina cuando los iones fluyen a través del fluido de los poros en respuesta a un potencial aplicado formando una barrera (doble capa eléctrica) en la interfase partícula-electrolito. Para que la corriente fluya, los iones en un lado de la barrera deben intercambiar electrones con el grano conductor, que a su vez intercambia electrones con iones en el otro lado de la barrera.

El circuito eléctrico equivalente consiste en una combinación de conducción iónica y electrónica e implica una reacción química entre el mineral (formada por electrones o protones) y el fluido de poro que es la solución, formada por iones (aniones o cationes) (Dentith y Mudge, 2014; Flores, 2017). El intercambio de electrones da como resultado que el grano conductor se polarice, es decir, las cargas opuestas se acumulen en lados opuestos del grano. Los iones de polaridad opuesta tenderán a concentrarse al lado del límite de grano. Al cortar la corriente, los iones regresan lentamente a sus posiciones de equilibrio.

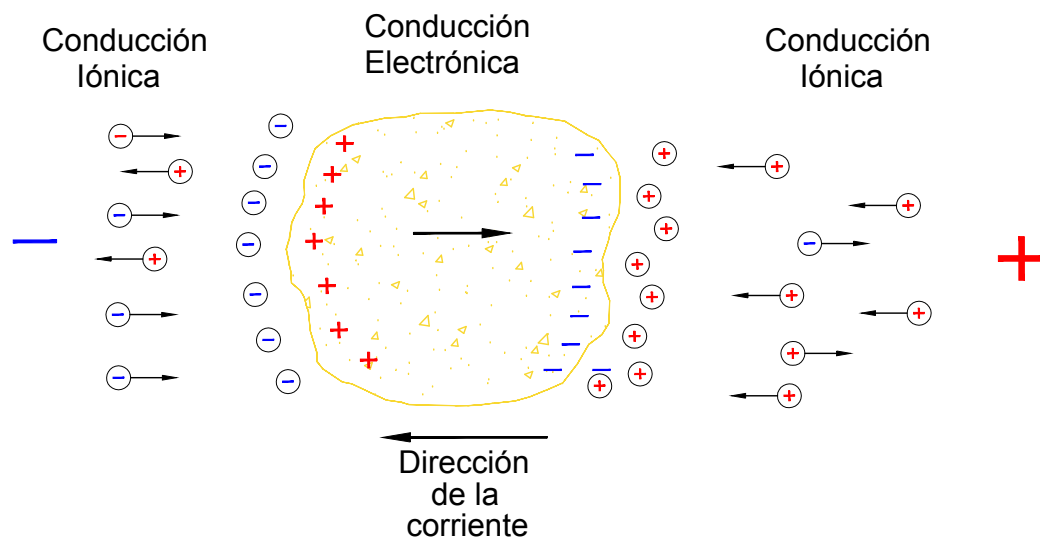


Figura 5. Esquema del fenómeno de sobretensión en un mineral metálico inmerso en un electrolito (redibujado de Orellana 1991).

2.3. Modelo Cole-Cole

La ecuación o Modelo Cole-Cole (MCC), es un modelo matemático ampliamente utilizado en el área de dieléctricos para describir un proceso de relajación (capítulo 3), está formulado en términos de permitividad eléctrica y se le atribuye a los hermanos Kenneth Stewart Cole y Robert Hugh Cole (Wikipedia contributors, 2018) quienes lo formularon alrededor de 1940 (Cole y Cole, 1941) para modelar muestras de tejido como un circuito eléctrico con propiedades resistivas-capacitivas y describir la dispersión y absorción en materiales dieléctricos (figura 6).

$$\varepsilon^* - \varepsilon_\infty = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{1 + (i\omega\tau_0)^{1-\alpha}} \quad (2.1)$$

Donde ε_0 y ε_∞ son la permitividad eléctrica estática y la frecuencia infinita respectivamente, ω es la frecuencia angular, τ_0 es el tiempo de relajación generalizado y α es un parámetro que puede variar entre 0 y 1. El MCC se representa en un circuito eléctrico equivalente que consta de dos capacitores conectados en paralelo y una reactancia en serie a uno de ellos

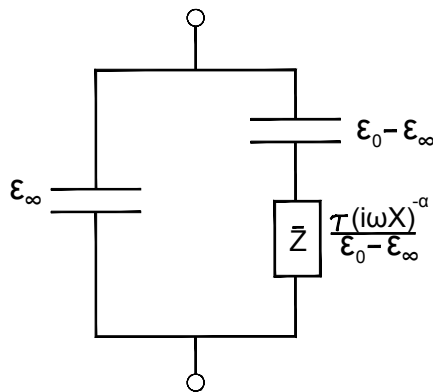
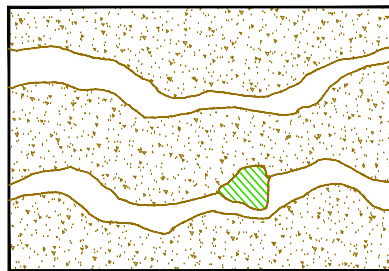


Figura 6. Circuito equivalente del Modelo Cole-Cole para permitividad dieléctrica compleja (redibujado de Cole y Cole 1941).

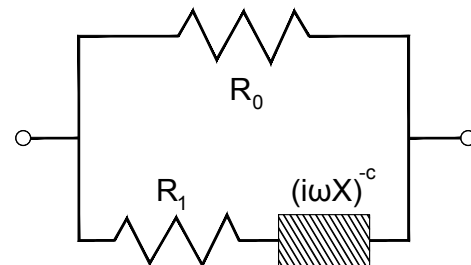
Resultado del trabajo de los hermanos Cole, Pelton *et al.* (1978) introduce a la geofísica el MCC (2.2) en términos de una impedancia compleja redefiniendo algunos parámetros como la cargabilidad o polarizabilidad m y la R_0 como la resistividad del medio en CD y finalmente engloban el exponente $1 - \alpha$ en un nuevo parámetro definido como la dependencia de la frecuencia c , con el mismo rango de variación de 0 a 1.

$$Z(\omega) = R_0 \left[1 - m \left(1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^c} \right) \right] \quad (2.2)$$

El modelo introducido por Pelton, dio lugar al método conocido como PI espectral o de conductividad compleja (sección 2.4.3). El modelo de Pelton, que él denominó Modelo Cole-Cole, permite representar la respuesta que tendría una roca mineralizada con un poro libre y uno con presencia de partículas metálicas como se detalla en la figura 6.



ROCA MINERALIZADA



CIRCUITO EQUIVALENTE

Figura 7. a) Pequeña sección de roca mineralizada con dos poros, uno bloqueado por un mineral metálico y otro libre b) Circuito equivalente en términos de una impedancia compleja (redibujado de Pelton *et al.* 1978).

Tiempo después, Davydycheva *et al.* (2006) emplea el modelo equivalente de Cole-Cole en términos de conductividad y posteriormente, Tarasov y Titov (2007) demuestran su equivalencia al propuesto por Pelton *et al.* (1978) tras una serie de pruebas de laboratorio definiendo el siguiente MCC equivalente en términos de conductividad.

$$\sigma(\mathbf{r}, \omega) = \sigma_{\infty}(\mathbf{r}) \left(1 - \frac{m(\mathbf{r})}{1 + (i\omega\tau(\mathbf{r}))^{c(\mathbf{r})}} \right) \quad (2.3)$$

Donde definidos la conductividad medida a frecuencia máxima, σ_{∞} ; la conductividad medida a muy baja frecuencia (frecuencia cero) σ_0 ; el tiempo de relajación τ y el exponente de la frecuencia c . El modelo equivalente (2.3) a diferencia del propuesto por Pelton (2.2) es mucho más fácil de introducir en formulaciones matemáticas.

2.4. Modalidades de la Polarización Inducida

Dependiendo del objetivo de estudio, la técnica de Polarización Inducida se puede realizar empleando fuentes galvánicas e inductivas. Esta última permite su aplicación empleando fuentes aerotransportadas. Las mediciones en estos levantamientos generalmente se realizan en el dominio del tiempo. Estos levantamientos son más útiles en etapas de prospección donde se cubren grandes áreas de terreno donde es más importante identificar los objetivos que enfocarse en gran medida en su resolución espacial. Los objetivos que resultan de interés regularmente se verifican empleando fuentes galvánicas o inductivas terrestres.

A continuación se detallan brevemente estas modalidades.

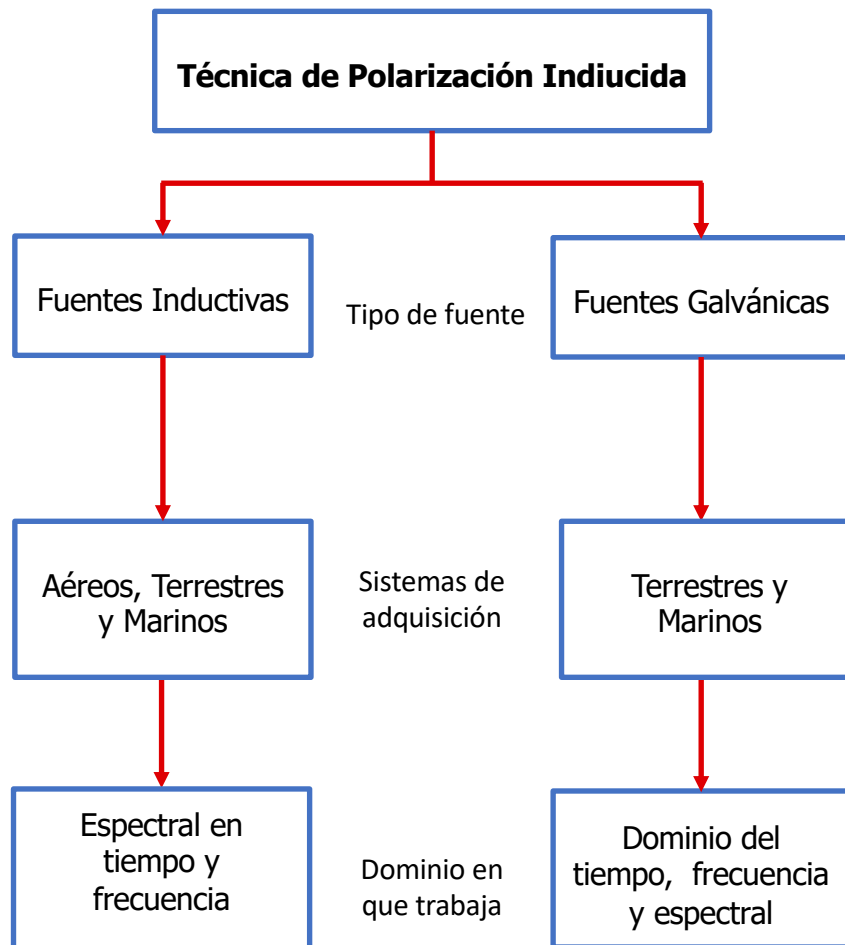


Figura 8. Modalidades en las que se realiza técnica de PI

2.4.1. Dominio del tiempo

La manera más común de observar el efecto de la Polarización Inducida es en el dominio del tiempo o TIP. Para realizarla se requiere de grandes voltajes para producir (si los hay) efectos de PI medibles, además de requerir equipo especializado como son los electrodos impolarizables necesarios para detectar algunos pocos milivolts de la señal transitoria (Milsom, 2003)

En el dominio del tiempo se busca medir solo un parámetro que da cuenta del efecto de PI. Este parámetro es denominado cargabilidad o polarizabilidad (M), puede medirse de dos formas distintas, siendo la más empleada la integral normalizada (Slater y Lesmes, 2002).

$$M = \frac{\int_{t_s}^{t_f} V_s dt}{V_m \Delta t} \quad (2.4)$$

Donde, V_s es un voltaje residual entre los electrodos MN integrado sobre una ventana de tiempo definida entre el tiempo t_s y t_f una vez cortada la corriente de carga (Orellana, 1991; Slater y Lesmes, 2002), V_m es el voltaje medido en un tiempo dado durante la inyección de corriente y Δt es el largo de la ventana de integración. Debido a que es un método de corriente directa, se busca evitar los efectos de acoplamiento electromagnético evitando realizar mediciones en tiempos muy cortos después del corte de corriente (Flores, 2017) así como la polarización de los electrodos al invertir la corriente entre sucesivos ciclos de encendido-apagado que rondan entre 1 y 4 segundos (Diethelm y Freed, 2006).

Regularmente, la adquisición de datos de PI en el dominio del tiempo se lleva a cabo de la siguiente manera. Se enciende la corriente provocando un incremento inmediato y abrupto del potencial, el cual se va incrementándose de forma lenta hasta alcanzar cierto valor estacionario. Este voltaje estacionario se conoce como *voltaje primario* V_p . Este proceso de carga, es análogo al de un capacitor que estuviese enterrado en el subsuelo.

Cuando la corriente de transmisión se apaga, se origina un decaimiento brusco del potencial, primario así como del *voltaje secundario* V_s , el cual dependerá de las propiedades de polarización del terreno. Este proceso es similar a la descarga o relajación

de un condensador. Esta última medición es el objetivo de la técnica de PI, mientras más intenso los efectos de PI en el subsuelo, mayor será el tiempo de descarga del voltaje secundario y viceversa.

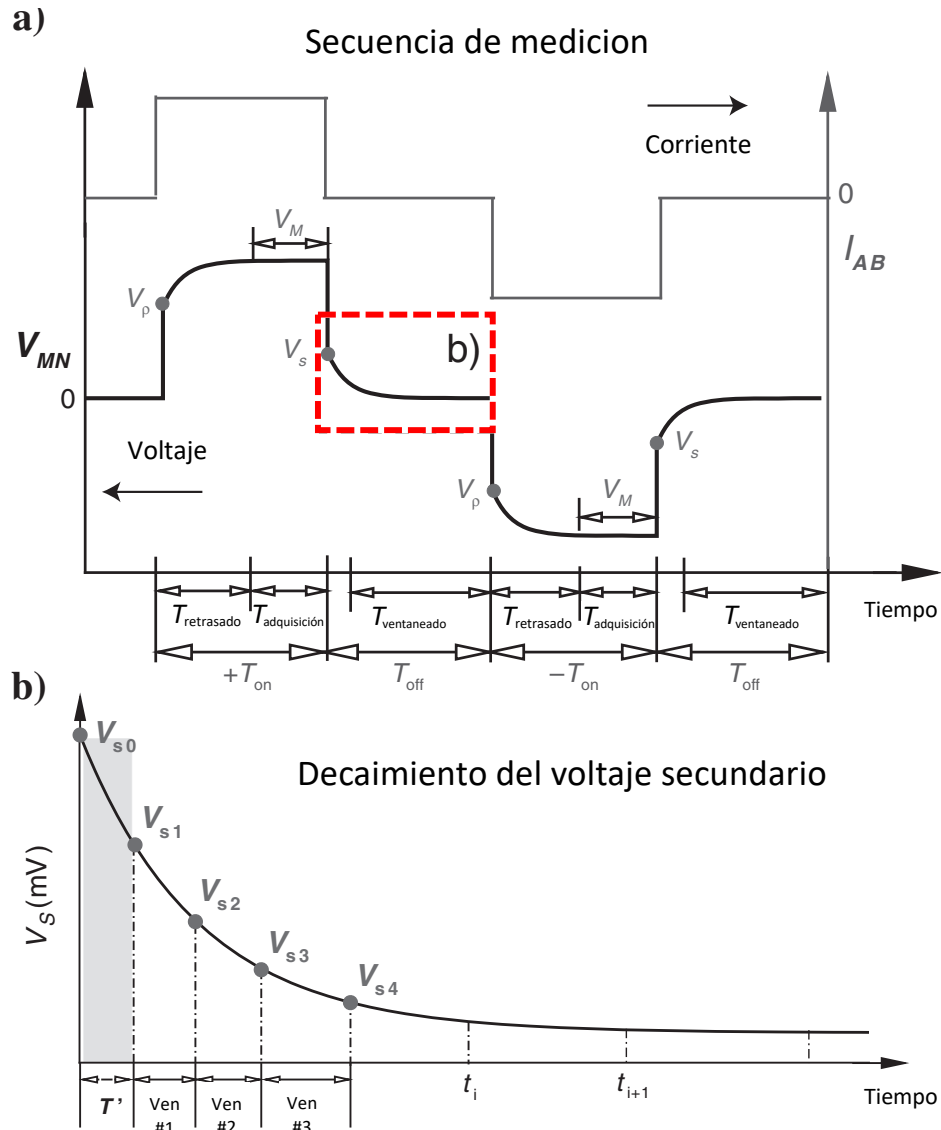


Figura 9. Secuencia básica para realizar una medición de datos de TIP. a) La inyección de corriente cesa hasta alcanzar el voltaje estacionario V_M . b) La medición se realiza instantes después de apagar la corriente de emisión, tras éste *periodo de retardo inicial* T' , se pueden medir varias ventanas de voltajes secundarios o una sola empleando la ecuación 2.4 (modificado de Mao et al. 2016).

2.4.2. Dominio de la frecuencia

En esta modalidad se espera observar un desfase entre la corriente inyectada y la diferencia de potencial medido entre los electrodos M y N además de observar un decremento de la resistividad aparente a medida que se incremente la frecuencia de la corriente inyectada. La variación de la resistividad con la frecuencia tiene lugar con mayor intensidad para valores inferiores a los 10^3Hz , y es a esta variación la que se denomina como porcentaje del efecto de frecuencia (Orellana, 1991) definido como:

$$EF = \frac{\rho_b(\omega_1) - \rho_a(\omega_0)}{\rho_a(\omega_0)} \times 100. \quad (2.5)$$

Donde ρ_a y ρ_b son la resistividad del medio medida a frecuencia ω_1 y ω_0 ($\omega_1 > \omega_0$) respectivamente, además del porcentaje del efecto de la frecuencia. Orellana (1991) define un segundo parámetro denominado factor metálico.

$$FM = \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a \rho_b} \times 2\pi 10^5 \quad (2.6)$$

De la PI en el dominio de la frecuencia, es importante resaltar dos hechos: 1) La PI en el dominio del tiempo y la frecuencia no emplean directamente el MCC, en lugar de ello emplean algunas formulaciones matemáticas para calcular la cargabilidad empleando principalmente esquemas de corriente directa. 2) El dominio de la frecuencia brindó las primeras bases para desarrollar la PI espectral, también llamada PI dispersiva o método de conductividad compleja.

En la actualidad, ambos dominios de la PI son ampliamente utilizados y es aún tema de discusión acerca de cual de los dominios tiene mayor ventaja sobre el otro aunque en la comunidad de PI concuerdan que es más eficiente la toma de datos en el dominio del tiempo principalmente por la instrumentación y portabilidad de estos.

2.4.3. Espectral

La técnica de Polarización Inducida Espectral (SIP por sus siglas en ingles), también conocida como técnica de conductividad o resistividad compleja es relativamente nueva y utiliza la variación de la conductividad en función de la frecuencia en un rango de aplicación, por lo general de 10^{-2} a 10^2 Hz lo que permite determinar los parámetros espectrales y distribución espacial de estructuras geológicas. En general, podemos definir que la SIP es una técnica para estudiar las características en frecuencia y/o tiempo de los efectos de PI. La base física de este método es el mismo que el de PI pero con énfasis en las características de frecuencia y tiempo (Luo y Zhang, 1997).

Es en esta técnica donde, a partir del trabajo de Pelton *et al.* (1978), se introduce a la geofísica el modelo definido como Cole-Cole, el cual fue modificado y reescrito a partir del trabajo de los hermanos Cole y Cole (1941). Apartir de esto, el fenómeno de polarización eléctrica en las rocas, pudo ser descrito en términos de los cuatro parámetros que conforman el modelo como se ha detallado en la Sección 2.3

Una ventaja del método espectral, es la factibilidad de emplear fuentes inductivas, lo que permite detectar la PI en zonas de capa superficial muy resistiva o desde el aire (Orellana, 1991).

A diferencia de la PI en el dominio de la frecuencia donde se emite una corriente a muy bajas frecuencias (de 0.1 a 3 Hz) y donde además se miden solo dos frecuencias, en la SIP se inyecta una corriente alterna en un espectro de frecuencias que van desde los 0.01 Hz hasta alrededor de los 1000 Hz de forma continua (Dentith y Mudge, 2014).

En un sondeo típico de SIP con fuentes galvánicas o inductivas, durante la inyección de corriente la diferencia de potencial entre los electrodos MN para el caso galvánico o el inducido en la bobina receptora para el método inductivo es medida junto con la amplitud de la corriente inyectada o la amplitud del campo eléctrico inducido, también requiere ser medida la fase entre la corriente y el voltaje medido. Son justamente estos parámetros, los indicativos de efectos de polarización, donde el desfase medido entre corriente y voltaje dará cuenta de efecto de PI (figura 10)

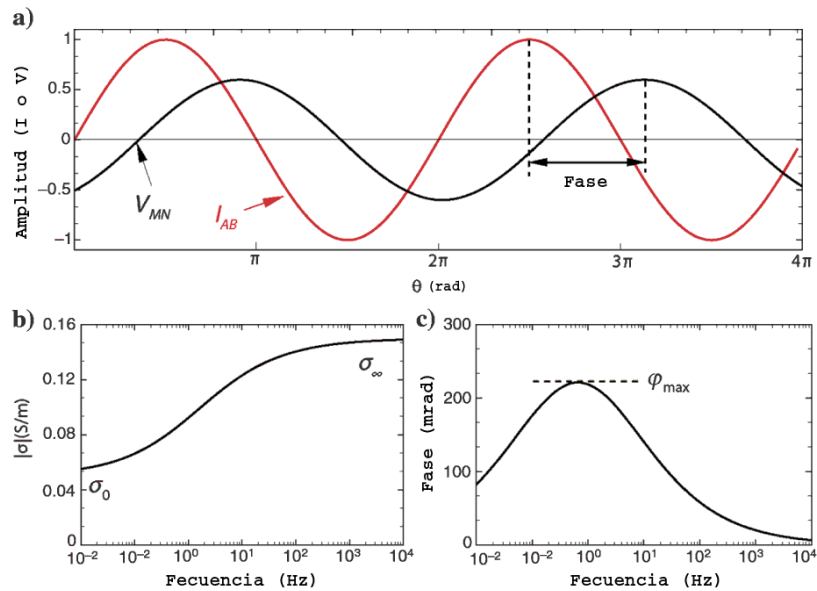


Figura 10. Curvas típicas de la Polarización Inducida Espectral (SIP), a) Desfase de curvas. b) Amplitud. c) Espectro de fase (modificado de Mao *et al.* 2016).

2.5. Polarización Inducida con fuentes inductivas

En la modalidad inductiva de la técnica de PI se emplean fuentes electromagnéticas con bucles o bobinas coaxiales, coplanares o coaxiales-coplanares. La medición se realiza siguiendo el principio de inducción electromagnética (figura 11). Un transmisor genera un campo magnético primario y un receptor que registra el campo magnético secundario que se generará a partir de la corriente inducida en un cuerpo conductor por el fenómeno de inducción electromagnética.

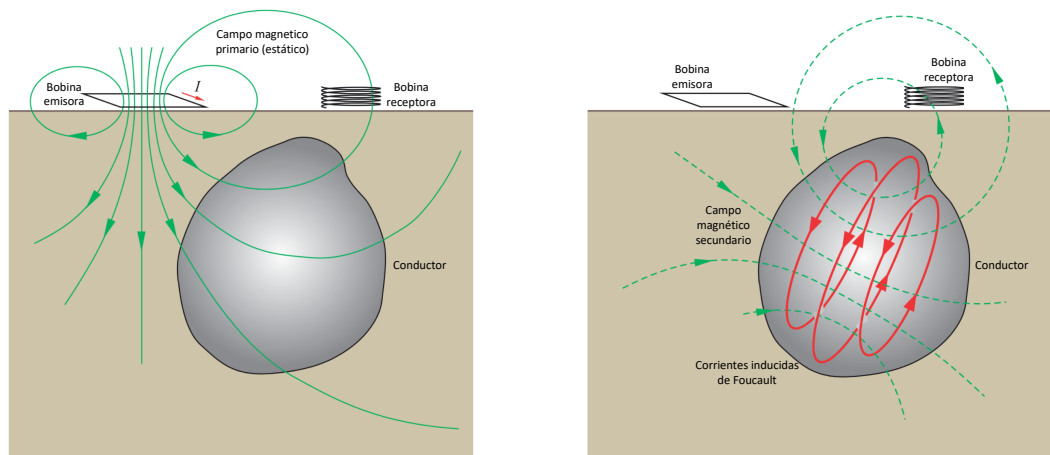


Figura 11. Modelo de inducción electromagnética asociado a la geoelectricidad (modificado de Dentith y Mudge 2014).

En la práctica, la detección de cuerpos polarizables se suele llevar a cabo empleando arreglos de bucles centrales coaxiales-coplanares o “In-loop ” (figura 12) pues poseen la propiedad de que la inversión de signo que pudiera registrar se debe únicamente a efectos de PI de los cuerpos que contengan partículas de conducción electrónica. En otras palabras, las amplitudes negativas en la componente vertical de la derivada temporal del campo magnético medido (figura 13), son asociadas únicamente a efectos de PI y no a factores geométricos como en el caso de la medición fuera del bucle transmisor (Dentith y Mudge, 2014).

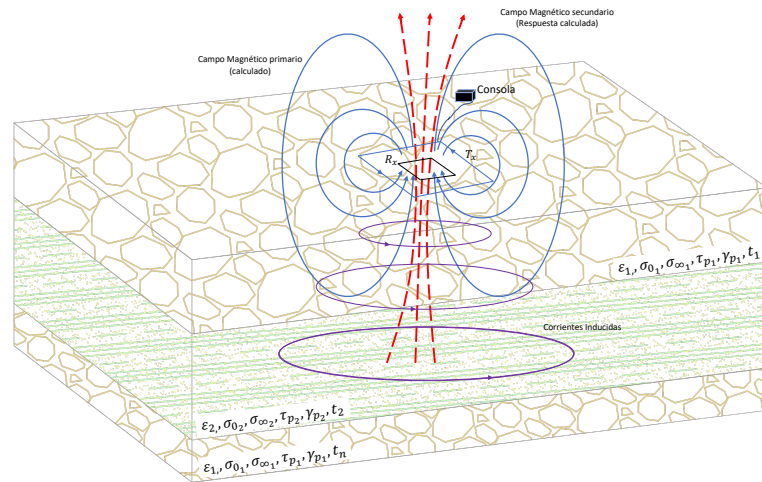


Figura 12. Sistema de bucles coincidentes, coaxiales-coplanares (In-loop).

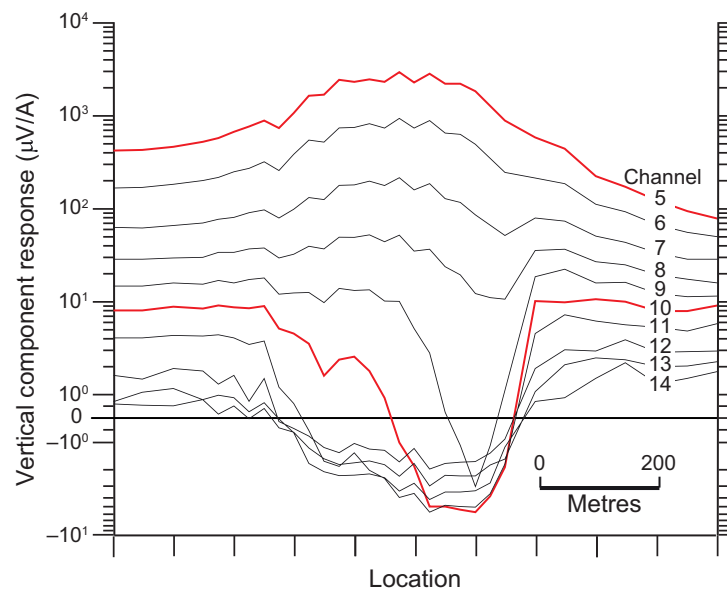


Figura 13. La amplitud negativa en los datos TDEM es un indicativo del efecto de PI (tomado de Dentith y Mudge 2014 y Flis *et al.* 1989).

En general, el fenómeno de Polarización Inducida debido a la influencia de un campo electromagnético se da la siguiente manera: (a) Antes de apagar el transmisor, los iones en el medio se encuentran en equilibrio eléctrico con cualquier grano metálico y/o carga negativa debido a la presencia de arcillas, en otras palabras, existe un perfecto equilibrio. (b) Durante el apagado y durante un corto tiempo después del apagado, los cationes se desplazan en la misma dirección que la corriente de vórtice generando una corriente de polarización positiva. (c) En cierto momento, los iones alcanzan un estado de carga completa y la corriente de polarización se vuelve cero. (d) Tiempo después, la corriente de vórtice en decaimiento no logra mantener este estado de carga completa y los iones viajan de regreso a su posición original produciendo en ese instante, una corriente de polarización negativa (Flis *et al.*, 1989)

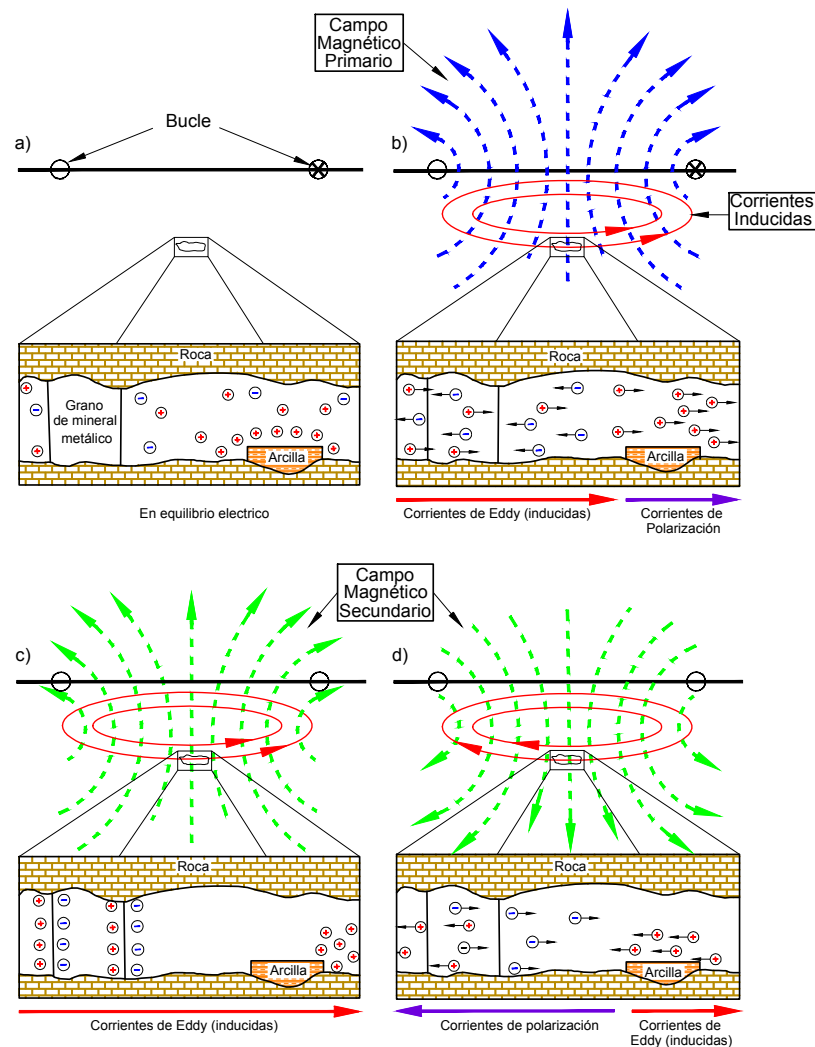


Figura 14. Diagrama esquemático del movimiento de los iones en un volumen de roca polarizable bajo la influencia de una bobina transmisora en un TDEM (redibujado de Flis *et al.* 1989).

2.5.1. Sistemas electromagnéticos aerotransportados

La adquisición de datos de PI empleando fuentes inductivas permite implementar los sistemas electromagnéticos aerotransportados (AEM, por sus siglas en inglés), cuya principal ventaja es cubrir grandes áreas de terreno en poco tiempo, razón por la cual son ampliamente utilizados en las etapas de prospección. Hoy en día la evolución de estos sistemas ha alcanzado su auge con las nuevas tecnologías de posicionamiento y navegación impulsando ampliamente su desarrollo con la limitante de disponer de pocos algoritmos de modelado e inversión para el tratamiento de estos datos.



Figura 15. Sistema electromagnético versátil en el dominio del tiempo por sus siglas en inglés VTEM (tomado de Geotech <http://geotech.ca>).

Los sistemas AEM, trabajan de la misma manera que lo hacen los sistemas terrestres como la aeronave de la figura 15 que emplea un sistema de bucles in-loop, con la diferencia de estar diseñados para incorporar en la medición de los campos electromagnéticos la influencia de la capa de aire. Este tipo de equipos puede medir únicamente la derivada temporal de la componente vertical del campo magnético, algunos otros con mayor potencia y penetración como el sistema ZTEM, son capaces de medir además, la componente horizontal del campo magnético.

Debido a que en los arreglos in-loop se ha comprobado que los voltajes negativos son asociados únicamente a efectos de PI (Lee, 1981), este tipo de arreglos ha tomado gran auge en los sistemas AEM.

Por otro lado, existen otro tipo de sistemas AEM en donde el transmisor y receptor se encuentran en diferente posición formando sistemas coplanares conocidos como pájaro remolcado o towed bird.

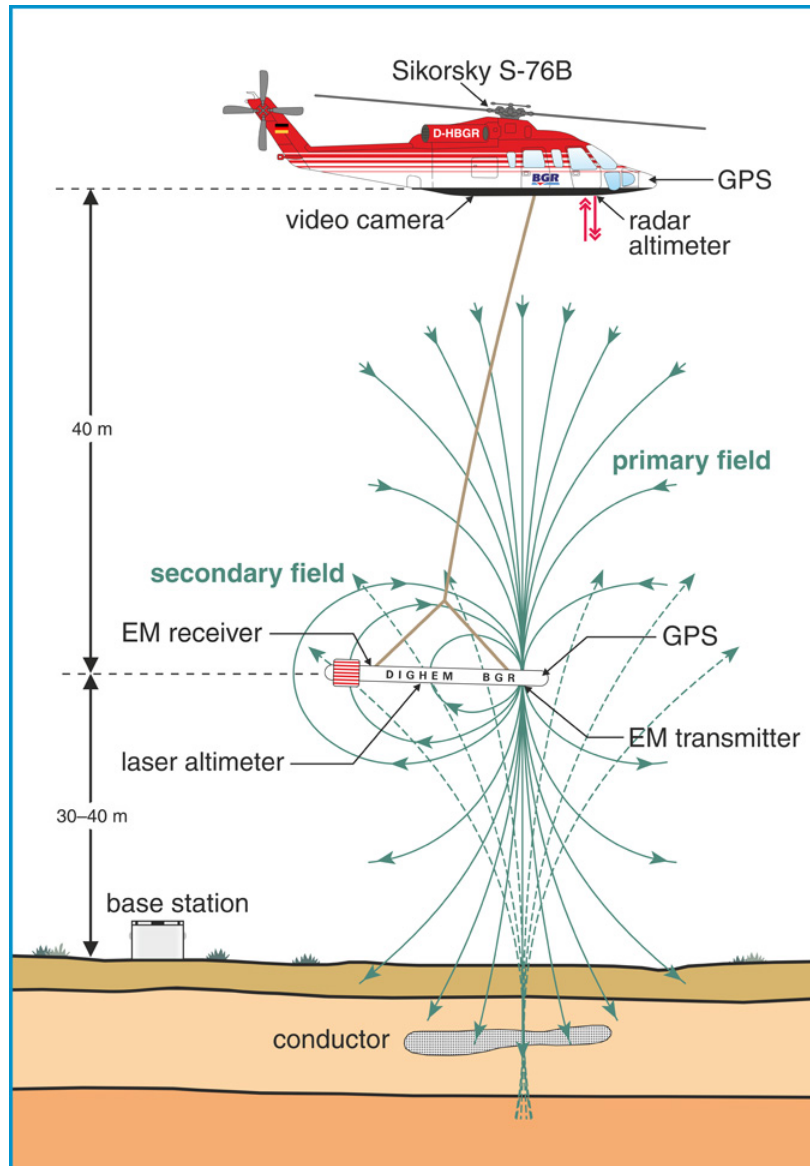


Figura 16. Esquema del sistema BGR, en donde el transmisor y receptor van dentro del cilindro operando a frecuencia de entre 380 Hz y 130 KHz (tomado de BGR, <https://www.bgr.bund.de>).

Capítulo 3. Formulación teórica del modelado 3D de Polarización Inducida

En este capítulo se detalla la formulación matemática que se ha desarrollado para plantear un modelo en el dominio del tiempo en términos de la permitividad eléctrica absoluta ε , cuyo termino se ha definido como función dieléctrica la cual, Maier (2007) define como permitividad relativa ε_r , que es adimensional.

3.1. Problema directo de la Polarización Inducida EM

El problema o modelado directo de la Polarización Inducida con fuentes inductivas, se basa en predecir la respuesta que produciría un medio polarizable con propiedades eléctricas dispersivas, a partir de la medición de los campos electromagnéticos en superficie.

En la SIP la conductividad dispersiva está gobernada por cuatro parámetros además de la frecuencia y/o el tiempo que se conocen como parámetros Cole-Cole (Subsecc. 2.3), los cuales describen completamente el fenómeno de polarización del medio.

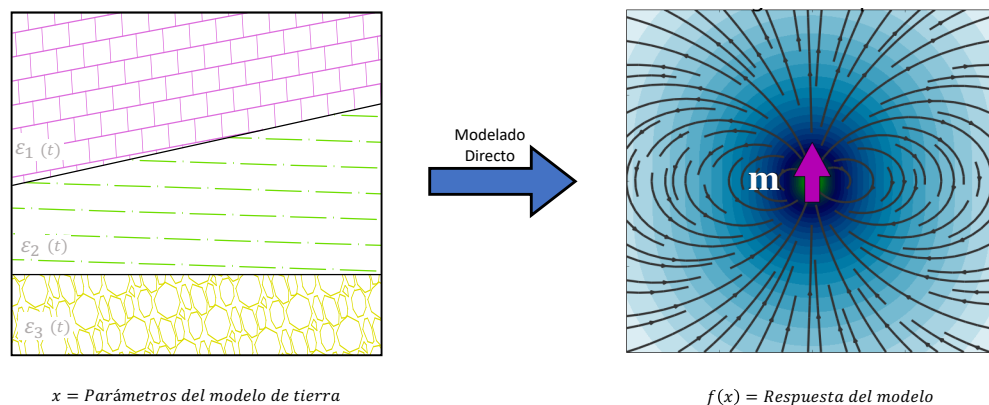


Figura 17. Esquema del proceso de modelado directo en el que a partir de un conjunto de parámetros se calcula la respuesta del modelo (modificado de www.geosci.xyz)

A diferencia de los sondeos de resistividad en CD en donde el voltaje medido entre los electrodo de potencial MN decae a cero en cuanto la inyección de corriente cesa, en sondeos de Polarización Inducida esto no ocurre, pues al cesar la inyección de

corriente, el voltaje medido no decae a cero inmediatamente, sino que lo hace de forma casi exponencial, es decir, un poco más lento. Esta respuesta de relajación de un medio perturbado es lo que se busca reproducir en el modelado de la PI.

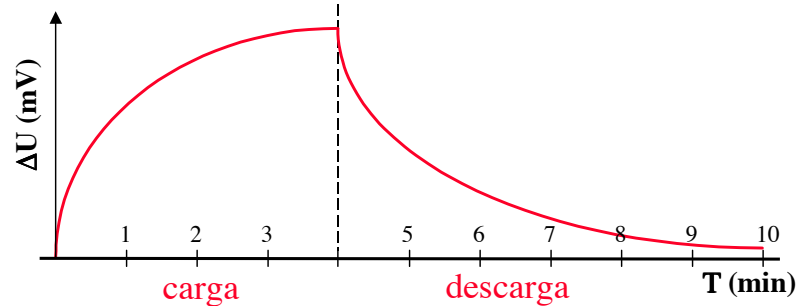


Figura 18. Variación del potencial observado por efecto de la polarización (tomado de Admin 2007)

Por otro lado respecto a los sondeos TDEM, el indicador del efecto de PI (la respuesta a reproducir en el modelado directo) es la amplitud negativa de la componente vertical del campo magnético (figura 13). En los registros convencionales (figura 19b), los voltajes negativos registrados son debido a un factor geométrico y no al efecto de PI, a diferencia con los arreglos tipo in-loop (coaxial-coplanar) (figura 19a) donde los voltajes negativos son asociados únicamente al efecto de PI y no puede haber otra manera de que ello suceda como lo demostró Lee (1981).

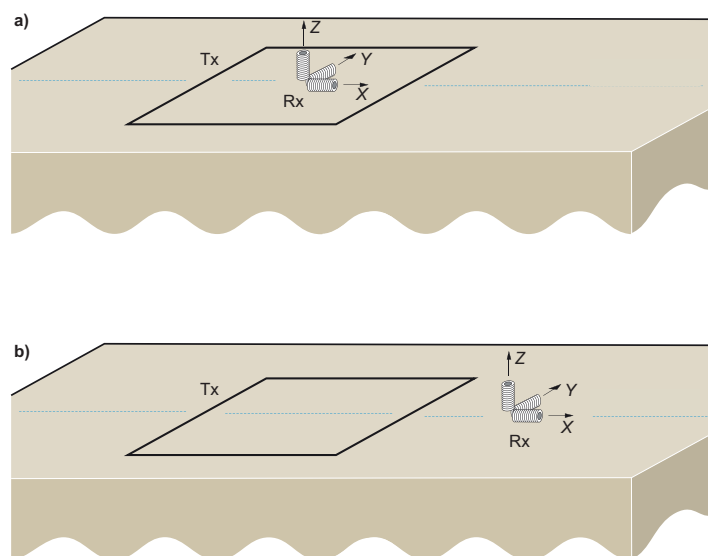


Figura 19. Secuencia de medición para un sondeo transitorio electromagnético. a) El receptor se encuentra coaxial-coplanar al transmisor. b) El receptor se lleva fuera del transmisor formando un arreglo coplanar (tomado de Dentith y Mudge 2014)

3.2. Planteamiento del modelo

Como hemos visto, plantear un modelo de PI directamente en el dominio del tiempo implica principalmente dos complicaciones. Primero: agregar el MCC a un esquema numérico en diferencias finitas en el dominio del tiempo resulta en una formulación matemática complicada que no siempre se puede conseguir. Segundo, considerar la conductividad dependiente de la frecuencia cuyo producto con el campo eléctrico define la densidad de corriente, implica una convolución en el dominio del tiempo la que regularmente es difícil de tratar pues requiere almacenar la historia de tiempo completa del medio o de los campos electromagnéticos lo que se traduce en un severo esfuerzo computacional. En este capítulo se aborda la metodología seguida para incluir el MCC en las ecuaciones de Maxwell introduciendo la función dieléctrica como término dispersivo que permite estimar, además de la conductividad, la permitividad eléctrica absoluta del medio.

3.2.1. Función Debye

La mayoría de los trabajos de PI que se desarrollan en la modalidad espectral en el dominio de la frecuencia emplean el MCC que como se explicado antes, es un modelo empírico y el más aceptado para reproducir el fenómeno de PI. Sin embargo, la expresión matemática que lo define analíticamente, no es tan fácil de tratar en un desarrollo matemático lo que se vuelve parte de la complejidad en el modelado de esta técnica.

Davydycheva *et al.* (2006) utilizó una forma alternativa del MCC aplicado a la búsqueda de hidrocarburos obteniendo buenos resultados. Tiempo después, Tarasov y Titov (2007) mediante pruebas de laboratorio, determinan que el modelo propuesto por Pelton (2.2) puede simplificarse a un modelo equivalente cuya expresión matemática es más simple y versátil de incorporar en un desarrollo matemático 2.3 coincidiendo con el utilizado por Davydycheva. Así pues, de 2.3 hacemos $c = 1$ y factorizando el signo en m obtenemos el modelo o **Función Debye** en el dominio de la frecuencia.

$$\sigma(\mathbf{r}, \omega) = \sigma_{\infty} + \frac{(\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r}))}{1 + (i\omega\tau(\mathbf{r}))} \quad (3.1)$$

Es importante resaltar que la Función Debye es un caso particular del MCC obtenida haciendo $c=1$. La Función Debye, que puede escribirse en terminos de permitividad o conductividad, es el el modelo dieléctrico más simple que existe y tiene la bondad que en el dominio del tiempo, es una función exponencial y es ésta la principal característica que nos lleva a utilizar este modelo en nuestro desarrollo. Por lo tanto, tomando la Transformada Inversa de Fourier de la expresión anterior obtenemos la Función Debye en el dominio del tiempo.

$$\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma_{\infty}(\mathbf{r})\delta(t) + \frac{(\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r}))}{\tau(\mathbf{r})} e^{-\left(\frac{t}{\tau(\mathbf{r})}\right)} H(t) \quad (3.2)$$

Del modelo de Pelton (2.2), Flores y Peralta-Ortega (2009) analizan la variación de los parámetros del modelo siendo la cargabilidad y/o polarizabilidad m la de mayor variación en amplitud y fase respecto a los otros parámetros. Luego entonces, podemos aproximar el comportamiento del MCC (2.3) a través de una suma ponderada de funciones Debye (3.2) (Kunz y Luebbers, 1993; Siushansian y Lovetri, 1997; Kelley y Luebbers, 2003; Kelley *et al.*, 2007). De la siguiente forma:

$$\sigma(\omega) = \sigma_{\infty} - (\sigma_{\infty} - \sigma_0) \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^c} \approx \sigma_{\infty} + (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{1 + i\omega\tau_p} \quad (3.3)$$

donde F_D es el número total de funciones Debye, γ_p son las p -ésimas ponderaciones y τ_p los p -ésimos tiempos de relajación. Finalmente, expresamos la Expansión de la Función Debye en el dominio de la frecuencia como:

$$\sigma(\mathbf{r}, \omega) = \sigma_{\infty}(\mathbf{r}) + (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r})) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p(\mathbf{r})}{1 + i\omega\tau_p(\mathbf{r})} \quad (3.4)$$

Tomando la transformada inversa de Fourier de la expresión en frecuencia, obtenemos la expansión de la Función Debye en el dominio del tiempo:

$$\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma_{\infty}(\mathbf{r})\delta(t) + (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r})) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p(\mathbf{r})}{\tau_p(\mathbf{r})} e^{-\left(\frac{t}{\tau_p(\mathbf{r})}\right)} H(t) \quad (3.5)$$

La expresión 3.4 ofrece una forma de modelar la respuesta de materiales que no pueden ser descritos directamente por el modelo Debye mientras que la expresión 3.5

permite agregar el MCC fácilmente a un esquema de DFDT. Así mismo, el esquema es inherentemente estable si los parámetros γ_p son todos positivos y los tiempos de relajación τ_p son todos calculados (Kelley *et al.*, 2007).

3.2.2. Término dispersivo

La idea básica al comienzo del desarrollo matemático fue buscar un término dispersivo que diera cuenta del efecto de PI al agregarlo a las ecuaciones de Maxwell. La idea más sencilla es emplear la conductividad dependiente de la frecuencia (Commer *et al.*, 2017) pero, considerando las limitaciones del modelo de doble capa (Sec 2.2) en el que se asume constante la permitividad eléctrica absoluta. Se optó por analizar el efecto de PI desde el punto de vista de la permitividad la cual, evidentemente no es constante debido a la concentración desigual de iones al interior de las partículas de sulfuros, arcillas, y en general, de los granos de roca. Por esta razón, el objetivo principal fue modelar el efecto de PI empleando la permitividad absoluta. Se tomó la consideración de que los campos pueden propagarse por medios de baja conductividad que pueden ser descritos por la permitividad la cual es compleja y cuya parte imaginaria se relaciona con la conductividad del medio (Maier, p. 7). Esta relación entre conductividad y permitividad, se ha definido a través de un término denominado: **función dieléctrica** (p. 9 Maier, 2007; Ward y Hohmann, 1988; Kunz y Luebbers, 1993) que como se ha dicho antes, es una permitividad absoluta.

3.2.3. Descripción atómica del fenómeno y el Modelo de Drude

Para la propuesta del término dispersivo recurrimos al estudio detallado del modelo propuesto por Paul Drude en 1900 (Drude, 1900; Heaney, 2003) el cual explica como la resistividad en los metales se relaciona con el movimiento de los electrones y conduce a la Ley de Ohm (Serway, 2016, p. 129).

El modelo de Drude describe las propiedades del transporte de electrones en aquellos materiales que se comportan como metales. El modelo se basa en considerar un

conductor como un arreglo rectangular de iones más un conjunto de electrones libres que en ausencia de un campo eléctrico se mueven al azar a través del conductor. El movimiento está amortiguado por las colisiones con los iones que se determina a partir de un factor γ . Cuando es aplicado un campo eléctrico, los electrones libres se arrastran lentamente en una dirección opuesta a la del campo eléctrico siendo estos los responsables de la conductividad en un metal.

El movimiento del electrón, su amortiguamiento, el campo eléctrico externo y la velocidad de su movimiento pueden describirse a partir de la ecuación diferencial de segundo orden de un sistema amortiguado resorte-masa.

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -e\mathbf{E} \quad (3.6)$$

donde m es la masa del electrón, \mathbf{x} su desplazamiento, γ la frecuencia de las colisiones, e la carga del electrón y \mathbf{E} el campo eléctrico. Asumiendo un movimiento armónico:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}, \quad (3.7)$$

y proponiendo como solución a la ecuación de segundo orden:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

Transformando a frecuencia la ecuación diferencial y sustituyendo el movimiento armónico y la solución propuesta en la ecuación diferencial, se obtiene el desplazamiento inicial del electrón:

$$\mathbf{x}_0 = \frac{e}{m(\omega^2 - i\omega\gamma)} \mathbf{E}_0 \quad (3.9)$$

Por otro lado, la Polarización macroscópica del material esta dada por:

$$\mathbf{P}(\omega) = -n e \mathbf{x} \quad (3.10)$$

donde n es el número de electrones, si se sustituye (3.9) en la polarización y se factoriza el signo del denominador se obtiene:

$$\mathbf{P}(\omega) = \frac{ne^2}{m(i\omega\gamma - \omega^2)} \mathbf{E} \quad (3.11)$$

Reconsiderando el vector de desplazamiento eléctrico

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\omega) + \mathbf{P}(\omega) \quad (3.12)$$

Factorizando la permitividad en el vacío y sustituyendo la polarización en la expresión anterior, se llega a:

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E}(\omega) + \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \right) \frac{ne^2}{m(i\omega\gamma - \omega^2)} \mathbf{E}(\omega) \right) \quad (3.13)$$

Factorizando el campo eléctrico, se define la función dieléctrica:

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 \underbrace{\left(1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0(i\omega\gamma - \omega^2)} \right)}_{\text{funcion dielectrica}} \mathbf{E}(\omega) \quad (3.14)$$

Donde la expresión general de la función dieléctrica queda definida como:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0\omega(i\gamma - \omega)}, \quad (3.15)$$

donde ε_r es la permitividad relativa adimensional. De acuerdo con Maier (2007), es posible relacionar la función dieléctrica con la conductividad a través de la *Ley Microscópica de Ohm*. De esta forma se puede agregar la expansión del modelo Debye (la conductividad) 3.4 a la función dieléctrica misma.

$$\mathbf{J}(\omega) = -ne\tilde{\nu} \quad (3.16)$$

Donde la velocidad $\tilde{\nu}$ es la primera derivada de la distancia respecto al tiempo.

$$\mathbf{J}(\omega) = -ne \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (3.17)$$

Sustituyendo \mathbf{x} por la solución propuesta en 3.8 y a su vez, en 3.8 sustituimos la

solución 3.9 de la EDO de segundo orden, la derivada temporal del desplazamiento del electrón (velocidad de arrastre) queda como:

$$\mathbf{J}(\omega) = -ne \frac{d}{dt} \left[\frac{e}{m(\omega^2 - i\omega\gamma)} \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \right] \quad (3.18)$$

La solución de la derivada nos lleva a la Ley de Ohm en términos de propiedades microscópicas.

$$\mathbf{J}(\omega) = \frac{ne^2}{m(i\omega + \gamma)} \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

De donde:

$$\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \quad (3.20)$$

Y la conductividad en frecuencia queda definida como:

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m(i\omega + \gamma)} \quad (3.21)$$

Si $\omega = 0$, la conductividad en frecuencia se reduce a la conductividad a frecuencia cero o en corriente directa:

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m\gamma} \quad (3.22)$$

Para simplificar el procedimiento, reescribimos la conductividad dependiente de la frecuencia en términos de la conductividad en CD, factorizando γ del denominador en 3.21 obtenemos la siguiente expresión:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{\left(1 + \frac{i\omega}{\gamma}\right)} \quad (3.23)$$

Donde el inverso de la frecuencia de las colisiones entre electrones e iones, es el tiempo de relajación: $\frac{1}{\gamma} = \tau$ y podemos reescribir $\sigma(\omega)$ como:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{(1 + i\omega\tau)} \quad (3.24)$$

Reconsiderando la expresión de la función dieléctrica (3.15). Se factoriza la frecuencia

de colisión γ del denominador y se sustituye la conductividad en frecuencia cero para llegar a:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0\omega\gamma(i - \frac{\omega}{\gamma})} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega(i - \frac{\omega}{\gamma})} \quad (3.26)$$

Multiplicando y dividiendo por i la parte imaginaria y con $\frac{1}{\gamma} = \tau$ se tiene:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega(-1 - i\omega\tau)} \quad (3.27)$$

Finalmente, se factrizo el signo del denominador y se sustituyo la conductividad dependiente de a frecuencia para obtener:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega} \quad (3.28)$$

Es importante resaltar el hecho de que la expresión anterior ya no es la misma que en 3.14 pues a partir de la Ley de Ohm microscópica se relacionan las corrientes de conducción y desplazamiento por lo que sustituir 3.28 en 3.14 y sumar ésta a la densidad de corriente \mathbf{J} en la Ley de Ampère, llevaría a una redundancia matemática.

Por último, multiplicamos y dividimos por i la parte imaginaria y multiplicamos 3.28 por ε_0 para expresar la función dieléctrica como una permitividad compleja.

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{i\omega} \quad (3.29)$$

3.2.4. Expresión general de la función dieléctrica

Además del desarrollo presentado en la sección anterior en donde, a partir de parámetros microscópicos se define la función dieléctrica, en este apartado, empleamos

el concepto de corriente total en la Ley de Ampère y demostramos que el desarrollo matemático anterior lleva a la misma expresión de la función dieléctrica.

Partiendo del hecho de que la onda EM se propaga por medios lineales, dispersivos y con pérdidas, este último en el que la corriente de conducción no es despreciable (como en dieléctricos), entonces la densidad de corriente total J_{tot} que se induce en el medio es:

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d = \sigma \mathbf{E} + i\omega \epsilon' \mathbf{E}. \quad (3.30)$$

La magnitud de la corriente de desplazamiento depende de la frecuencia del campo eléctrico aplicado por lo que no existen corrientes de desplazamiento en campos constantes. Factorizando 3.30 podemos escribir:

$$\mathbf{J}_{tot} = -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} = i\omega \epsilon' \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega \epsilon'} \right) \mathbf{E} = i\omega \left(\epsilon + \frac{\sigma}{i\omega} \right) \mathbf{E}, \quad (3.31)$$

si las mediciones de conductividad se realizan en un rango de frecuencias sobre medios heterogéneos y tomando ϵ' como ϵ_0 podemos describir 3.28 como:

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 + \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{i\omega}, \quad (3.32)$$

dónde $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$ está definido por 3.4. La expresión en 3.29 y 3.32 es la misma, obtenida por el Modelo de Drude y por la corriente total en las ecuaciones de Maxwell. Si expresamos la permitividad absoluta que acabamos de obtener como:

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\epsilon_0 i\omega} \right), \quad (3.33)$$

la parte imaginaria del término entre parentesis representa las características de pérdida del medio. Esta expresión es una permitividad relativa como en 3.28

Para calcular la expresión en tiempo de la función dieléctrica (3.29 o 3.32) empleamos el teorema de la transformada de una integral e integramos la Expansión de la Función Debye en el dominio del tiempo (3.4). Siguiendo a (Oneil, 2008) tenemos.

Teorema 3.1 (Transformada de Fourier de una integral) Sea f continua a pedazos en todo intervalo $[-L, L]$. Suponiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ converge. Admita $F(0) = 0$. Entonces

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\int_{-\infty}^t f(\psi) d\tau \right] (\omega) = \frac{1}{i\omega} F(\omega) \quad (3.34)$$

Demostración. Sea $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\psi) d\tau$. Entonces $g'(t) = f(t)$ para cualquier t en donde f es continua, y $g(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow -\infty$. Mas aún:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi) d\psi = F(0) = 0 \quad (3.35)$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de la transformada de una derivada a g obtenemos:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \mathcal{F}[g'(t)](\omega) \\ &= i\omega \mathcal{F}^{-1}[g(t)](\omega) \\ &= i\omega \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\psi) d\psi \right] (\omega) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Esto equivale a la conclusión a probar ■

Aplicando \mathcal{F}^{-1} a ambos lados de 3.32:

$$\mathcal{F}^{-1} [\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega)] (t) = \mathcal{F}^{-1} [\epsilon_0] (t) + \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{i\omega} \right] (t) \quad (3.37)$$

Podemos despejar la integral de convolución de la última expresión en la demostración anterior, y obtener la expresión necesaria para calcular la transformada inversa de la función dieléctrica

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{F(\omega)}{i\omega} \right] (t) = \int_{-\infty}^t f(\psi) d\psi \quad (3.38)$$

Empleando 3.38 al segundo término del lado derecho en 3.37 se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega)](t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t) + \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, \psi) d\psi \quad (3.39)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}(\psi)$ es la Expansión de la Función Debye en el dominio del tiempo (3.5) evaluada en ψ

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \delta(t) + \boldsymbol{\sigma}_\infty \int_{-\infty}^t \delta(\psi) d\psi + (\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\infty) \sum_{\rho=1}^{F_D} \frac{\gamma_\rho}{\tau_\rho} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\psi}{\tau_\rho}} H(\psi) d\psi \quad (3.40)$$

Resolvemos las integrales empleando las propiedades de las funciones generalizadas (James, 2013) obteniendo finalmente nuestro término dispersivo al que hemos definido como la **función dieléctrica en el dominio del tiempo**.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \delta(t) + \left(\boldsymbol{\sigma}_\infty(\mathbf{r}) + (\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\sigma}_\infty(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \gamma_\rho(\mathbf{r}) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\rho(\mathbf{r})}} \right) \right) H(t) \quad (3.41)$$

3.3. Ecuación de Helmholtz para PI en el dominio del tiempo

Con la propuesta del término dispersivo, describimos el procedimiento realizado para establecer la ecuación diferencial que modele el efecto de PI en datos EM en el dominio del tiempo. Partimos de las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) \right] = \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}_F(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.42)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.43)$$

De 3.42 el término \mathbf{J}_F es la corriente de la bobina transmisora y \mathbf{M} es el momento dipolar de la magnetización del medio. Podemos relacionar las propiedades del medio y los campos vectoriales a través de las relaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{r}, t, T, P) \mathbf{E}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{B} = \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{r}, t, T, P) \mathbf{H}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{J} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{r}, t, T, P) \mathbf{E}. \quad (3.46)$$

Donde los tensores $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$ y $\underline{\sigma}$ son la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica respectivamente todas dependientes de la frecuencia ω , intensidad del campo \mathbf{E} o \mathbf{H} , posición \mathbf{r} , tiempo t , temperatura T , y presión P . Cada uno de estos tensores, en general, es complejo permitiendo que la fase de \mathbf{H} y \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{E} , así como de \mathbf{J} y \mathbf{E} sean diferentes (Ward y Hohmann, 1988).

Si despreciando la suposición de que el medio es lineal, isótropo, homogéneo con propiedades eléctricas independientes del tiempo pero con la presión y temperatura constantes, simplificamos las relaciones anteriores y podemos escribirlas como:

$$\mathbf{D} = [\epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)] \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{J} = [\sigma'(\omega) - i\sigma''(\omega)] \mathbf{E} = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E} \quad (3.48)$$

y

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3.49)$$

donde $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$ esta descrita por la expansión de la Función Debye 3.4.

Hasta que se indique lo contrario, simplificamos la notación como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{M},$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J},$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{D},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}$$

Para campos en la frecuencia usaremos la notación convencional de mayúsculas y para campos en el tiempo, minúsculas.

En las tres secciones siguientes se detalla el desarrollo para obtener modelos que predigan las respuesta de los campo electromagnéticos con efecto de PI. Las diversas pruebas teóricas llevaron a explorar la posibilidad de un modelo heterogéneo y homogéneo para campo magnético y finalmente el de mayor posibilidad empleando campo eléctrico en medios heterogéneos.

3.3.1. Empleando campo magnético en medios heterogéneos

Comenzamos sustituyendo 3.47 y 3.48 en 3.42 y despejando \mathbf{B} para obtener:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \quad (3.50)$$

Factorizando \mathbf{E} y sumando los términos de fuente eléctrica y magnética:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 [\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \epsilon_0] \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{J}_{FM} \quad (3.51)$$

Aplicando $\vec{\nabla} \times$ a ambos lados de la ecuación:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times ([\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \epsilon_0] \mathbf{E}) + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.52)$$

Empleando la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \times (f\mathbf{A}) = \vec{\nabla} f \times \mathbf{A} + f \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (3.53)$$

A la expresión anterior y obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \vec{\nabla} (\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \epsilon_0) \times \mathbf{E} + \mu_0 (\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \epsilon_0) \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.54)$$

Simplificando:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 [\vec{\nabla} \sigma(\mathbf{r}, \omega) + \vec{\nabla} i\omega \epsilon_0] \times \mathbf{E} + \mu_0 (\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \epsilon_0) (-i\omega \mathbf{B}) + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.55)$$

La expresión se reduce a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \sigma(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{E} - \mu_0 (\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \epsilon_0) i\omega \mathbf{B} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.56)$$

De 3.32 podemos despejar $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$ como:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{i\omega} \quad \therefore \quad \sigma(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \epsilon(\omega) - i\omega \epsilon_0 \quad (3.57)$$

Debido a que $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$ depende de la posición consecuentemente $\varepsilon(\omega)$ también lo hará.

Sustituyendo $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$ en 3.56:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \vec{\nabla} (i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \varepsilon_0) \times \mathbf{E} - \mu_0 (i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \varepsilon_0 + i\omega \varepsilon_0) i\omega \mathbf{B} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.58)$$

Simplificando:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \vec{\nabla} (i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \varepsilon_0) \times \mathbf{E} - \mu_0 i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) i\omega \mathbf{B} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.59)$$

El término $i\omega \varepsilon_0$ no depende de la posición por lo tanto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 [\vec{\nabla} (i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)) - \vec{\nabla} (i\omega \varepsilon_0)] \times \mathbf{E} - \mu_0 i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) i\omega \mathbf{B} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.60)$$

Obteniendo de esta forma el modelo difusivo para Polarización Inducida en el dominio de la frecuencia:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 i\omega \vec{\nabla} \varepsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{E} - \mu_0 i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) i\omega \mathbf{B} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.61)$$

Reordenando la expresión anterior y aplicando Transformada Inversa de Fourier \mathcal{F}^{-1} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{B}] + \mu_0 \mathcal{F}^{-1}[i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) i\omega \mathbf{B}] = \mu_0 \vec{\nabla} \mathcal{F}^{-1}[i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)] \times \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{E}] + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{J}_{FM}] \quad (3.62)$$

Se establece la ecuación de Helmholtz para campo magnético con efecto de PI en medios heterogéneos.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \left(\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} * \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \otimes \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{j}_{fm}(\mathbf{r}, t) \quad (3.63)$$

El símbolo \otimes indica las convoluciones (varias) que se generan al realizar el producto cruz entre la velocidad de polarización y el campo eléctrico mientras que $*$ indica la convolución (solo una) entre la velocidad de polarización y campo magnético.

3.3.2. Empleando campo magnético en medios homogéneos

Suponiendo que el efecto de PI se origine en medios homogéneos ($\sigma(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega)$), partimos de la Ley de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma(\omega) \mathbf{E} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \quad (3.64)$$

Podemos reducir el procedimiento matemático de la Subsección 3.3.1 si se factoriza \mathbf{E} de la expresión anterior:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 [\sigma(\omega) + i\omega \epsilon_0] \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \quad (3.65)$$

Donde \mathbf{J}_F y \mathbf{J}_M son los términos de corriente de la fuente y corriente de magnetización respectivamente. Factorizando $i\omega$ obtenemos la forma de la función dieléctrica (3.66) y que escribimos en terminos de permitividad (3.67):

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 i\omega \left(\left[\epsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{i\omega} \right] \mathbf{E} \right) + \mu_0 \mathbf{J}_{FM} \quad (3.66)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 i\omega [\epsilon(\omega) \mathbf{E}] + \mu_0 \mathbf{J}_{FM} \quad (3.67)$$

Tomando el rotacional en ambos lados de (3.67) y sustituyendo la *Ley de Faraday* (3.43) tenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 i\omega \epsilon(\omega) \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.68)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = -\mu_0 i\omega \epsilon(\omega) i\omega \mathbf{B} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{J}_{FM} \quad (3.69)$$

Tomando su Transformada Inversa de Fourier, obtenemos la expresión para PI empleando campo magnético en medios homogéneos.

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \left(\frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t} * \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{j}_{fm}(\mathbf{r}, t)} \quad (3.70)$$

3.3.3. Modelo alternativo empleando campo eléctrico

Si partimos de la *Ley de Faraday* (3.43), podemos simplificar la complejidad de las ecuaciones para campo magnético y además, considerar medios heterogéneos en el desarrollo. Por lo tanto, tomamos el rotacional en ambos lados de la *Ley de Faraday* para obtener 3.71, se sustituyó en la Ley de Ampère (3.50) llegando a 3.72 y se factorizó el campo eléctrico para obtener 3.73.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \vec{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.71)$$

$$= -i\omega [\mu_0 \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M)] \quad (3.72)$$

$$= -i\omega [\mu_0 (\sigma(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \epsilon_0) \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M)] \quad (3.73)$$

Siguiendo el desarrollo empleado en las expresiones de campo magnético para introducir la función dieléctrica (3.32), se factoriza $i\omega$ como sigue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \left[\mu_0 \left(\frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{i\omega} + \epsilon_0 \right) i\omega \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \right] \quad (3.74)$$

Donde el término $\left(\frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{i\omega} + \epsilon_0 \right)$ es la función dieléctrica $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$. Reescribiendo tenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega [\mu_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) i\omega \mathbf{E} + \mu_0 (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M)] \quad (3.75)$$

Simplificando 3.75 se llega a la expresión final en la frecuencia:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 i\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega) i\omega \mathbf{E} - \mu_0 i\omega (\mathbf{J}_F + \mathbf{J}_M) \quad (3.76)$$

Con la Transformada Inversa de Fourier, se define a la **ecuación de Helmholtz para campo eléctrico con efecto de PI en medios heterogéneos**.

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \left(\frac{\partial \epsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} * \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_{fm}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}} \quad (3.77)$$

3.4. Variables de Memoria

Trabajar con medios dispersivos en el dominio del tiempo involucra calcular costosas convoluciones en términos computacionales pues implica almacenar la serie de tiempo completa del medio. En este caso, la velocidad de polarización que se refleja en severos consumos en el tiempo de computo lo que hace poco factible esta labor.

Para evitar este problema, hemos empleado el concepto de variables de memoria las cuales permiten convertir la integral de convolución en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden en tiempo (Carcione et al., 1988 a,b). El número de variables de memoria dependerá del total de mecanismo de relajación F_D , definiendo una variable de memoria por cada mecanismo (Función de Debye), teniendo un total de p variables de memoria con $1 \leq p \leq F_D$.

Las variables de memoria desarrolladas por Carcione *et al.* (1988a) para el tratamiento de la atenuación en la propagación de ondas sísmicas en el dominio del tiempo han sido empleadas por diversos autores con resultados satisfactorios (Carcione *et al.*, 1988a; Xu y McMechan, 1995; Moczo *et al.*, 2007). Recientemente se han utilizado para detectar el efecto de Polarización Inducida en la difusión de campos electromagnéticos transitorios (Commer *et al.*, 2017). El método se basa en la más simple descripción teórica de la relajación, esto es, una función exponencial que decae en el tiempo. Por lo general, una variable de memoria, también llamada función anelástica, o variable interna (Moczo *et al.*, 2014) presenta la siguiente forma:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^t f(\psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau}\right)} d\psi \quad (3.78)$$

Donde $\zeta(t)$, es la variable de memoria definida por la integral de convolución; ψ , es el retraso en el tiempo propio de la convolución; τ , es el tiempo de relajación del medio perturbado y $f(\psi)$, es la función evaluada en el retraso de tiempo ψ (definición de la convolución).

La expresión 3.78 evita acumular la serie de tiempo completa del medio, pues la función que se evaluaba en el tiempo retrasado $(t - \psi)$, se convierte en una función exponencial causal $\psi \geq 0$, evaluada en ese punto.

La transformación de la integral de convolución a una EDO se obtiene tomando la derivada en tiempo de 3.78.

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t f(\psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau}\right)} d\psi \quad (3.79)$$

La reconstrucción completa de la serie de tiempo del medio se realiza a partir del valor de la velocidad de polarización en el tiempo pasado $\varepsilon(t - 1)$ y en el tiempo presente $\varepsilon(t)$ siendo ambos valores conocidos y actualizables empleando un esquema de diferencias finitas por lo que la historia de tiempo completa ya no es necesaria y la difusión de los campos electromagnéticos con efecto de PI puede simularse utilizando solo dos niveles de tiempo.

3.4.1. Principio físico

Las variables de memoria se basan en el fenómeno de relajación que usualmente se asocia al proceso de restablecimiento al equilibrio de un sistema perturbado en un lapso de tiempo. Cada proceso de relajación está caracterizado por un tiempo de relajación denominado τ que representa el tiempo que toma un sistema perturbado para regresar al equilibrio. La aplicabilidad de este método matemático está restringida a si el fenómeno en cuestión puede describirse a través de una función exponencial de la forma $e^{-\frac{t}{\tau}}$. Donde t , es la dependencia del tiempo del fenómeno mismo y e la función exponencial.

En geofísica se utiliza el concepto de relajación para describir el restablecimiento al equilibrio de sistemas dinámicos. Por ejemplo, la atenuación sísmica se fundamenta en un modelo analógico de un sistema resorte masa (figura 20) mientras que la Polarización Inducida se describe como un circuito resistencia-capacitor (figura 21), ambos se consideran como mecanismos de relajación lineal para cada fenómeno respectivamente.

Todo mecanismo de relajación está descrito por un modelo mecánico, el cual a su vez está representado por un modelo matemático que describe la relajación empleando al menos una función exponencial. El caso de un modelo de relajación mecánico

describe el desplazamiento amortiguado en función del tiempo. Matemáticamente se expresa como:

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \cos(c_1 t - c_2). \quad (3.80)$$

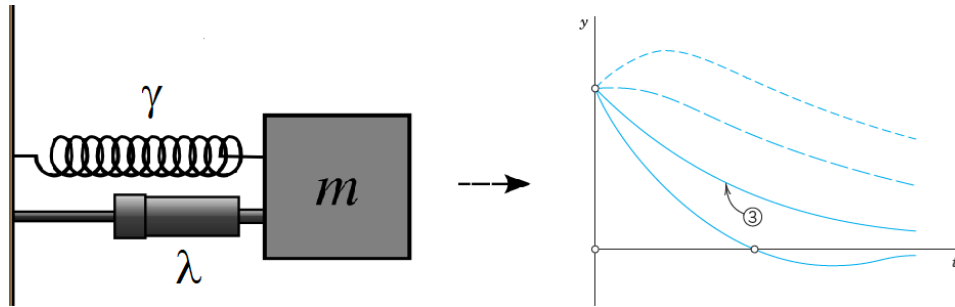


Figura 20. El sistema resorte-masa-amortiguador es la representación teórica más simple de un proceso de relajación mecánico (modificado de Kreyszig 2011)

Por otro lado, un modelo de relajación eléctrica describe el proceso de descarga de un capacitor en función del tiempo y puede expresarse como:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.81)$$

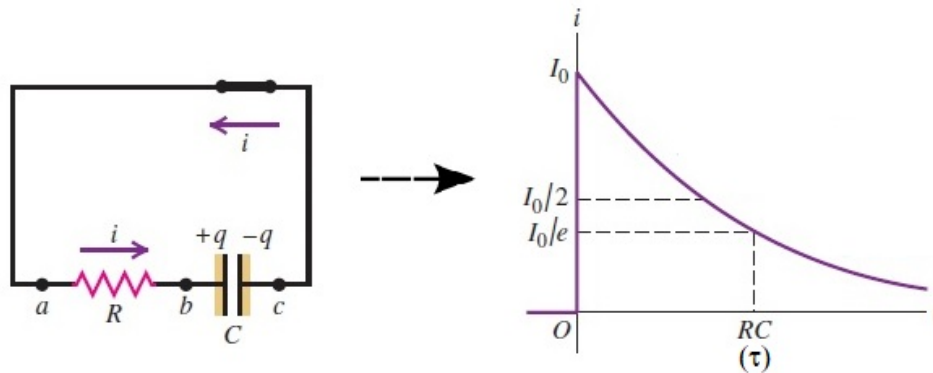


Figura 21. Circuito eléctrico resistencia-capacitor y curva de relajación característica son ejemplo del mecanismo de relajación más simple para procesos eléctricos (tomado de Serway 2016)

3.4.2. Modelos de relajación en geofísica

En la mayoría de los casos, los modelos mecánicos más simples no describen en su totalidad los complejos fenómenos que se producen en el subsuelo por lo que deben modificarse agregando partes mecánicas al modelo físico lo que se refleja en complejas expresiones matemáticas, tal es el caso del fenómeno de atenuación que se produce en la propagación de ondas sísmicas, en el que numerosos autores (Day y Minster, 1984; Carcione *et al.*, 1988a; Carcione, 1990, 1993; Xu y McMechan, 1995; Moczo y Kristek, 2005) han utilizado modelos reológicos para describirla los cuales se basan en la descripción teórica más simple de un proceso de relajación mecánica (figura 20).

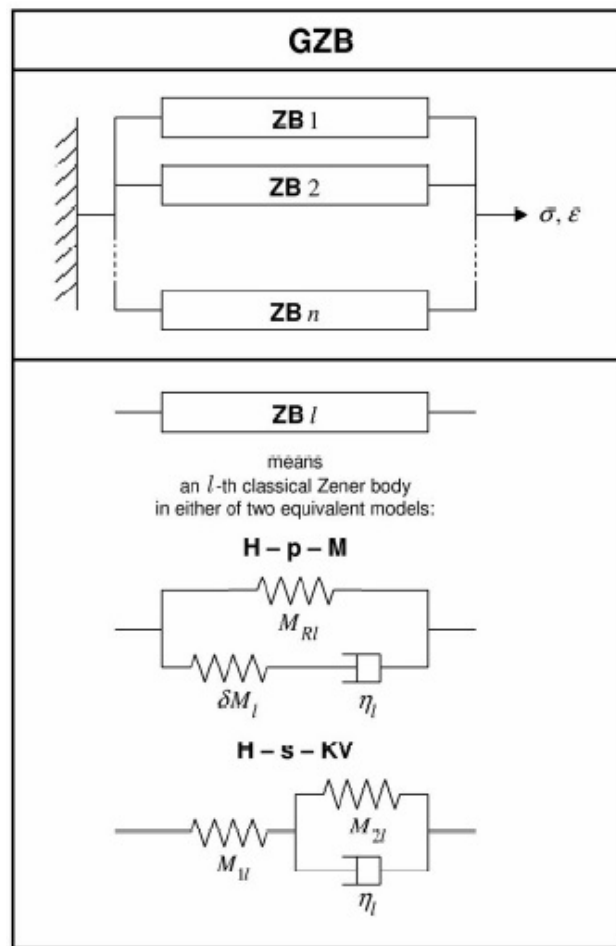


Figura 22. Modelo reológico Cuerpo Zener Generalizado (GZB) utilizado para describir los procesos de atenuación en la propagación de ondas sísmicas conformado por l -ésimos Cuerpos Zener (ZB) H-p-M consiste en un elemento de Hook conectado en paralelo con un cuerpo de Maxwell (tomado de Moczo *et al.* 2007)

La expresión matemática del modelo en la figura anterior se define a través del modulo de rigidez dependiente de la frecuencia $M(\omega)$, y dos l -simos tiempos de relajación. Uno para el esfuerzo aplicado σ y otro para la deformación ε , aplicada en el medio.

$$M(\omega) = \sum_{l=1}^n M_{Rl} \frac{1 + i\omega\tau_{\varepsilon l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}} \quad (3.82)$$

$$\tau_{\varepsilon l} = \frac{\eta_l}{\delta M_l} \frac{M_{Ul}}{M_{Rl}} \quad (3.83)$$

$$\tau_{\sigma l} = \frac{\eta_l}{\delta M_l} \quad (3.84)$$

Respecto a la exploración geoelectrica, es ampliamente utilizado el MCC para describir la relajación de un suelo polarizado, en términos de una impedancia imaginaria denominada reactancia $Z = R + iX$.

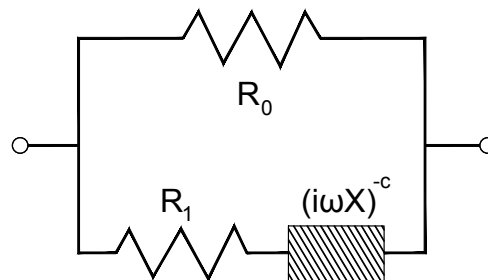


Figura 23. El circuito equivalente del Modelo Cole-Cole es el mecanismo de relajación que explica el reestablecimiento al equilibrio de un suelo polarizado (redibujado de Pelton *et al.* 1978)

Del cual, el tiempo de relajación esta dado por:

$$\tau = X \left(\frac{R_0}{m} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (3.85)$$

Recalamos que ambos modelos están planteados en el dominio de la frecuencia principal razón por la que los trabajos de modelado se desarrollan en ese dominio pues obtener expresiones en tiempo de 2.2 o de 3.82 representa un reto en el desarrollo matemático y solución numérica.

3.4.3. Velocidad de Polarización

Para definir nuestra variable de memoria, requerimos calcular la derivada temporal de la función dieléctrica en el dominio del tiempo. Por lo tanto, tomamos la derivada temporal en ambos lados de 3.41:

$$\frac{\partial \epsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \delta(t) + \left[\sigma_\infty(\mathbf{r}) + (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_\infty(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \gamma_\rho(\mathbf{r}) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\rho(\mathbf{r})}} \right) \right] H(t) \right) \quad (3.86)$$

donde $H(t)$ es la función escalon unitario. Con la derivada de un producto obtenemos la expresión 3.87 que hemos definido como **Velocidad de Polarización**, mecanismo de relajación lineal de la PI.

$$\boxed{\frac{\partial \epsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \epsilon_0 \dot{\delta}(t) + \sigma_\infty(\mathbf{r}) \delta(t) + (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_\infty(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \gamma_\rho(\mathbf{r}) \left[\delta(t) \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} \right) - \frac{H(t)}{\tau_\rho(\mathbf{r})} e^{-\left(\frac{t}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} \right]} \quad (3.87)$$

La expresión anterior, y la necesidad de expresar el fenómeno como una función exponencial (un capacitor que se carga y descarga definido por la Función Debye) fueron elementos suficientes para que durante el desarrollo matemático de 3.77 en el dominio de la frecuencia, decidieramos expresarla como un producto de derivadas temporales de primer orden (3.76) en lugar de obtener una derivada de orden superior.

3.4.4. Transformación de la convolución en una EDO

En esta subsección detallamos el procedimiento que empleamos para resolver analíticamente la integral de convolución entre velocidad de polarización (3.87) y la derivada temporal del campo eléctrico que se define como:

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) * \dot{\epsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} * \frac{\partial \epsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \right) \left(\frac{\partial \epsilon(\mathbf{r}, t - \psi)}{\partial t} \right) \right] d\psi \quad (3.88)$$

El resultado obtenido es una expresión en términos de derivadas temporales de campo

eléctrico, parámetros de la Función de Debye y una variable de memoria definida como la integral entre la derivada temporal del campo eléctrico y la función exponencial.

Comenzamos sustituyendo 3.87 en 3.88 y asumimos que ambas señales son causales (no hay inducción electromagnética antes de que la bobina transmisora se apague) por lo tanto, podemos reescribir la integral de convolución como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} * \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \left(\frac{d\delta(t-\psi)}{dt} \right) d\psi \\
&+ \sigma_{\infty}(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \delta(t-\psi) d\psi \\
&+ (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \left[\int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \delta(t-\psi) d\psi - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})}\right)} \delta(t-\psi) d\psi \right] \\
&- (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \frac{\gamma_{\rho}(\mathbf{r})}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})}\right)} H(t-\psi) d\psi \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Del tercer término del lado derecho vemos que, al aplicar la propiedad de integración de la función delta: $\int_{-\infty}^t f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$ y recordando que $e^0 = 1$, el término se reduce a una resta de derivadas de campo eléctrico que resulta ser igual a cero.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} * \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \left(\frac{d\delta(t-\psi)}{dt} \right) d\psi \\
&+ \sigma_{\infty}(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \delta(t-\psi) d\psi \\
&+ (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \left[\int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \delta(t-\psi) d\psi - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})}\right)} \delta(t-\psi) d\psi \right] \\
&- (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \frac{\gamma_{\rho}(\mathbf{r})}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})}\right)} H(t-\psi) d\psi \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Que se reduce a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} * \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \left(\frac{d\delta(t-\psi)}{dt} \right) d\psi \\
&+ \sigma_{\infty}(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} \delta(t-\psi) d\psi \\
&- (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_{\infty}(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \frac{\gamma_{\rho}(\mathbf{r})}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_{\rho}(\mathbf{r})}\right)} H(t-\psi) d\psi \quad (3.91)
\end{aligned}$$

Para resolver las integrales en 3.91 empleamos las propiedades de las funciones generalizadas (James, 2013) y obtenemos:

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) * \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \sigma_\infty(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_\infty(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \frac{\gamma_\rho(\mathbf{r})}{\tau_\rho(\mathbf{r})} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} d\psi \quad (3.92)$$

La expresión anterior representa el resultado analítico de la convolución que queda escrita en términos de derivadas temporales de campo eléctrico, parámetros de la expansión de la Función Debye y una integral de convolución que sustituiremos por una variable de memoria.

Podemos simplificar la integral en 3.92 para definir la variable de memoria en términos del campo eléctrico y no de su derivada, el producto de una función algebraica y una exponencial permite resolver la integral por partes como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} d\psi &= \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} \left(\frac{1}{\tau_\rho(\mathbf{r})} \right) d\psi \\ u &= e^{-\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}} \quad dv = \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} d\psi \\ du &= e^{-\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}} \left(\frac{1}{\tau_\rho(\mathbf{r})} \right) d\psi \quad v = \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Simplificando:

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi)}{\partial \psi} e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} d\psi = \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau_\rho(\mathbf{r})} \int_{-\infty}^t \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} d\psi \quad (3.94)$$

Con el resultado de la integración por partes, reescribimos 3.92 como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) * \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \sigma_\infty(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &\quad - (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_\infty(\mathbf{r})) \sum_{\rho=1}^{F_D} \frac{\gamma_\rho(\mathbf{r})}{\tau_\rho(\mathbf{r})} \left(\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau_\rho} \int_{-\infty}^t \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_\rho(\mathbf{r})}\right)} d\psi \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

De donde se definen la variable de memoria como:

$$\chi_p(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_p(\mathbf{r})}\right)} d\psi \quad (3.96)$$

Reescribiendo 3.95 obtenemos la expresión general de la convolución entre la velocidad de polarización y la derivada temporal del campo eléctrico:

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) * \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \sigma_\infty(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - (\sigma_0(\mathbf{r}) - \sigma_\infty(\mathbf{r})) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p(\mathbf{r})}{\tau_p(\mathbf{r})} \left(\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) - \frac{\chi_p(\mathbf{r}, t)}{\tau_p(\mathbf{r})} \right). \quad (3.97)$$

Siguiendo a Carcione *et al.* (1988a,b) y Moczo *et al.* (2007), la solución de la variable de memoria (3.96) se encuentra calculando su derivada temporal:

$$\frac{d\chi_p(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^t \mathbf{e}(\mathbf{r}, \psi) e^{-\left(\frac{t-\psi}{\tau_p(\mathbf{r})}\right)} d\psi \right]. \quad (3.98)$$

Evaluamos 3.98 empleando la regla de integración de Leibniz (Commer *et al.*, 2017):

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \psi) d\psi = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, \psi)}{\partial t} d\psi + f(t, b(t)) \frac{db}{dt} - f(t, a(t)) \frac{da}{dt} \quad (3.99)$$

El resultado de 3.99 nos permite definir la ecuación de primer orden de la variable de memoria en tiempo:

$$\dot{\chi}_p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) - \frac{\chi_p(\mathbf{r}, t)}{\tau_p(\mathbf{r})}. \quad (3.100)$$

Las ecuaciones 3.96, 3.97 y 3.100 describen completamente la respuesta de polarización del medio (Carcione *et al.*, 1988a).

Capítulo 4. Expansión de la Función Debye

En este capítulo seguimos la metodología desarrollada por Kelley y Luebbbers (2003) para realizar la expansión de la Función Debye con la finalidad de aproximar el Modelo Cole-Cole (MCC) y estimar los parámetros de ponderación γ , necesarios para obtener la respuesta de las ecuaciones planteadas en tiempo 3.41 y 3.87 y agregar el efecto de PI a los campo electromagnéticos en 3.77.

4.1. Aproximación al Modelo Cole-Cole

El objetivo de emplear la expansión de la función de Debye, radica en el hecho de que el modelo de conductividad empleado en el desarrollo matemático de 3.15 y 3.77 es la Función Debye (3.1) pues como se ha explicado, es más sencillo su implementación en el dominio del tiempo que la del MCC con la limitante de que es un caso particular de éste último cuando $c = 1$. Para solucionar esta limitante empleamos una suma ponderada de funciones Debye lo que involucra un problema inverso combinado. Por un lado, la parte lineal (el cálculo de las ponderaciones) se emplea un esquema simple de mínimos cuadrados. Por el otro, la parte no lineal (las frecuencias de relajación) se utiliza un esquema de optimización. Esta combinación de métodos de inversión, asegura precisión y estabilidad en un esquema numérico de diferencias finitas además de requerir pocos términos en la sumatoria de 3.4.

Hacemos notar que el desarrollo siguiente es únicamente para calcular las ponderaciones pues al requerir esquemas de inversión robustos en la parte no lineal, queda fuera de los alcances de esta tesis.

4.1.1. Esquema de inversión por mínimos cuadrados

La metodología consiste en aproximar la parte real e imaginaria del MCC (2.3) empleando la parte real e imaginaria de la función Debye (3.1), a través de una suma ponderada de funciones lineales dichas ponderaciones en principio son desconocidas

y se calculan al resolver un sistema de ecuaciones lineales. A manera de simplificación, escribimos la conductividad $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$ como $\sigma(\omega)$ aunque esta siga teniendo dependencia de la posición hasta que se indique lo contrario. Siguiendo a Kelley *et al.* (2007), el inverso del tiempo de relajación es la frecuencia de relajación, $\tau_r = \frac{1}{\omega_r}$ y reescribimos 3.4 como sigue:

$$\hat{\sigma}_{FD}(\omega) = \sigma_{\infty} + (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{1 + i \frac{\omega}{\omega_{rp}}} \quad (4.1)$$

donde $\hat{\sigma}_{FD}$ es la conductividad compleja de la Función Debye. La expresión 4.1 tiene la forma de:

$$\hat{\sigma}_{FD}(\omega) = \sigma' - \sigma^*(\omega) \quad (4.2)$$

donde σ' es la parte real y σ^* es la parte compleja definida como:

$$\sigma^*(\omega) = (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{1 + i \frac{\omega}{\omega_{rp}}} \quad (4.3)$$

Se requiere expresar 4.3 en parte real $\sigma'(\omega)$ y parte imaginaria $i\sigma''(\omega)$ por lo que multiplicamos y dividimos 4.3 por su complejo conjugado como sigue:

$$\sigma^*(\omega) = (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{1 + i \frac{\omega}{\omega_{rp}}} \left(\frac{1 - i \frac{\omega}{\omega_{rp}}}{1 - i \frac{\omega}{\omega_{rp}}} \right), \quad (4.4)$$

simplificando obtenemos la parte real e imaginaria de σ^* :

$$\sigma^*(\omega) = (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{1 + i \frac{\omega}{\omega_{rp}}} = (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \left(\frac{\gamma_p}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2} - i \gamma_p \frac{\frac{\omega}{\omega_r}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2} \right). \quad (4.5)$$

Sustituyendo 4.5 en 4.1 tenemos:

$$\hat{\sigma}_{FD}(\omega) = \sigma_{\infty} + (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \left(\frac{\gamma_p}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2} - i \gamma_p \frac{\frac{\omega}{\omega_r}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2} \right), \quad (4.6)$$

reordenando los términos obtenemos la forma explícita de la expansión de la Función Debye en parte real σ' e imaginaria σ'' :

$$\hat{\sigma}_{FD}(\omega) = \underbrace{\sigma_{\infty} + (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p^{Re}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2}}_{\sigma'} - i \underbrace{(\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \gamma_p^{Im} \frac{\frac{\omega}{\omega_{rp}}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2}}_{\sigma''}. \quad (4.7)$$

Igualamos 4.7 con el lado derecho del MCC (2.3):

$$\sigma_{\infty} \left(1 - \frac{m}{1 + (i\omega\tau)^c}\right) \approx \left[\sigma_{\infty} + (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p^{Re}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2} - i (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \gamma_p^{Im} \frac{\frac{\omega}{\omega_{rp}}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2} \right]. \quad (4.8)$$

La metodología indica que el MCC debe muestrearse en un rango de frecuencias de interés en la parte real e imaginaria definidos por σ'_{cc} y σ''_{cc} respectivamente. Igualamos cada una a su correspondiente en 4.8 estableciendo un sistema de ecuaciones sobredeterminado (Kelley y Luebbers, 2003; Kelley *et al.*, 2007).

En la parte real

$$\sigma'_{cc} \approx \sigma_{\infty} + (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p^{Re}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2}, \quad (4.9)$$

y la parte imaginaria:

$$\sigma''_{cc} \approx (\sigma_0 - \sigma_{\infty}) \sum_{p=1}^{F_D} \gamma_p^{Im} \frac{\frac{\omega}{\omega_{rp}}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{rp}}\right)^2}. \quad (4.10)$$

Las ecuaciones 4.9 y 4.10 representan las funciones objetivo a minimizar.

Cada muestra del MCC en su parte real σ' e imaginaria σ'' se divide por un factor $(\sigma_0 - \sigma_{\infty})$ y se establece igual a una suma ponderada de su correspondiente parte real e imaginaria de la expansión de la Función Debye (4.7).

Reordenando 4.9 y 4.10 obtenemos las siguientes ecuaciones matriciales.

En parte real:

$$\sum_{p=1}^{F_D} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega_{rp}} \right)^2} \right) \gamma_p^{Re} = \frac{\sigma'_{cc}(\omega_i) - \sigma_\infty}{(\sigma_0 - \sigma_\infty)}, \quad (4.11)$$

y parte imaginaria:

$$\sum_{p=1}^{F_D} \left(\frac{\frac{\omega_i}{\omega_{rp}}}{1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega_{rp}} \right)^2} \right) \gamma_p^{Im} = \frac{\sigma''_{cc}(\omega_i)}{(\sigma_0 - \sigma_\infty)}, \quad (4.12)$$

que tienen la forma:

$$D\gamma = \mathbf{c}. \quad (4.13)$$

Las dimensiones de las matrices D son de $[N_f \times F_D]$ elementos donde N_f el número de frecuencias muestreadas y F_D el número de Funciones Debye. El vector \mathbf{c} contiene $[N_f \times 1]$ elementos pudiendo expresar 4.13 como:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1p} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{i1} & D_{i2} & \dots & D_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_i \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Los sistemas de ecuaciones 4.11 4.12, se resuelven empleando un estimador de mínimo cuadrado estándar:

$$\gamma = (D^T D)^{-1} D^T \mathbf{c}. \quad (4.15)$$

Las ponderaciones obtenidas empleando 4.15 se sustituyen en las funciones objetivo ajustando la parte real e imaginaria del MCC de lo contrario, pudiendo iniciar un proceso iterativo hasta alcanzar un buen ajuste.

Verificado el ajuste, empleamos las matrices D y vectores \mathbf{c} reales e imaginarios para definir una nueva matriz y vector total de la forma:

$$D_{tot} = \begin{vmatrix} D_{ip}^{Im} \\ D_{ip}^{Re} \end{vmatrix}. \quad (4.16)$$

y

$$C_{tot} = \begin{vmatrix} C_i^{Im} \\ C_i^{Re} \end{vmatrix}. \quad (4.17)$$

Para estimar las ponderaciones totales γ_p^{tot} , usamos nuevamente 4.15 y el resultado se sustituye en 3.5, 3.41 y 3.87 para obtener la respuesta en tiempo del modelo dieléctrico que hemos propuesto.

4.2. Estimación del número de funciones Debye

Comenzamos remarcando el hecho de que si $p = 1$ en la sumatoria de la expansión 3.4 esto no es equivalente al MCC cuando $c = 1$ pues el ajuste no depende por si solo del número de Funciones Debye (F_D) empleadas sino de calcular adecuadamente γ_p , ω_{r_p} y aún más importante, la calidad del muestreo. La figura 24 ejemplifica este caso.

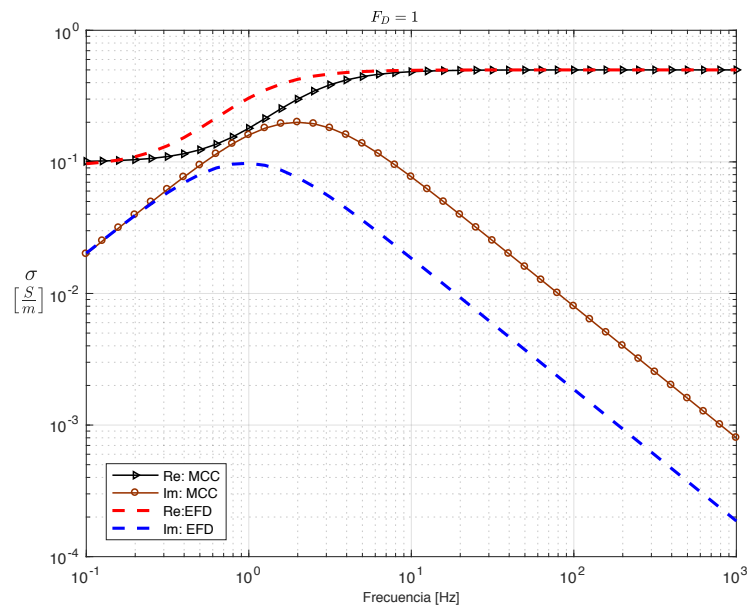


Figura 24. Comportamiento del MCC con $c = 1$, y de la EFD con $p = 1$. No son equivalentes.

4.2.1. Bondad del ajuste y análisis de residuales

Para verificar la bondad en el ajuste y determinar el número mínimo de funciones Debye para un buen ajuste comenzamos proponiendo un MCC de referencia con una cargabilidad $m = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{\sigma_\infty} = 0.2$. Empleamos 3.4 con $p = 1, 2, 3, \dots, F_D$ con $F_D = 10$ y analizamos el comportamiento de los residuales (figura 26) en cada aproximación.

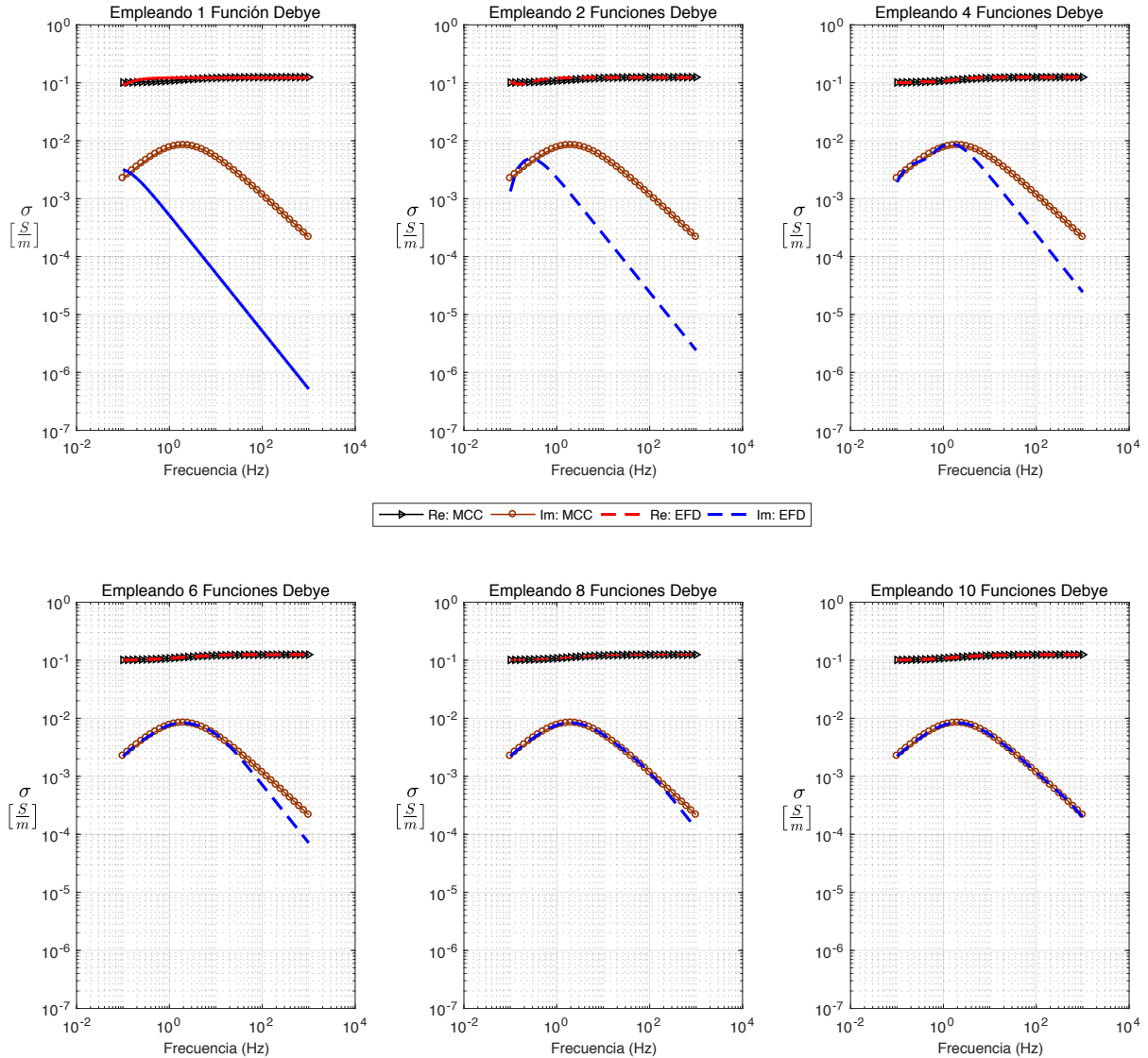


Figura 25. Esquema del ajuste del Modelo Cole-Cole (MCC) empleado 10 términos ($F_D = 10$) en la expansión de la Función Debye (EFD). Modelo Cole-Cole de referencia: $\sigma_0 = 0.100$, $\sigma_\infty = 0.125$, $\tau = 1$ y $c = 0.75$.

Recalcamos el hecho que cuando $p = 1$, la expansión de la Función Debye (3.4) o en su versión explícita como parte real e imaginaria (4.7) no representa estrictamente

el comportamiento de un capacitor, más bien se presenta como una señal capacitiva ponderada que se va pareciendo cada vez más a la señal original conforme se va aumentando el número de Funciones Debye.

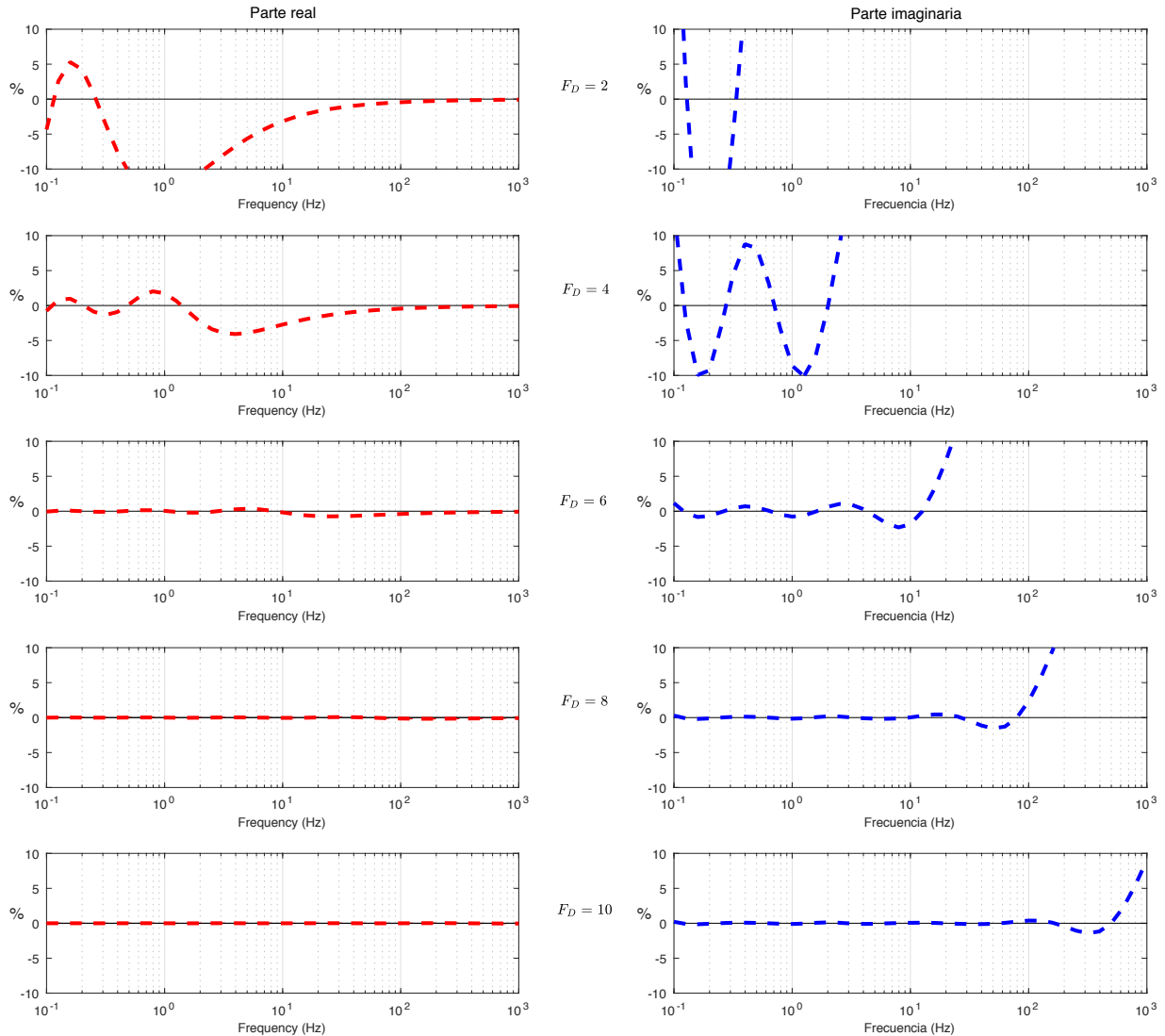


Figura 26. Residuales de los ajustes al MCC empleando 2, 4, 6, 8 y 10 funciones Debye ($F_D = 10$) respectivamente en parte real (curva roja) e imaginaria (curva azul).

Los resultados del ajuste anterior, se deben en gran medida a que el valor utilizado para el parámetro c en el MCC ($c = 0.75$) está muy cerca de su valor máximo ($c = 1$), lo que mejora en gran medida el ajuste, por lo que esperaríamos encontrar un empobrecimiento en el ajuste a medida que decrece el parámetro c . Un comportamiento similar en el exponente de la frecuencia lo reportó Marchant *et al.* (2014) y después Commer *et al.* (2017) empleando este mismo método de aproximación.

4.3. Validación del método

Hemos determinado que para obtener un ajuste suficientemente bueno en la aproximación del MCC (2.3) empleando la expansión de la Función Debye (3.4) o 4.7 se requiere al menos de ocho a diez términos en la sumatoria ($\gamma = 8, 9$ o 10), sin embargo, los residuales imaginarios en altas frecuencias indican un error en el ajuste superior al 5%. Este problema puede ser debido a varios factores:

- La calidad en el muestreo del MCC (al menos 4 muestras por década)
- La sensibilidad de la expansión ante los parámetros Cole-Cole
- El muestreo de las frecuencias de relajación
- La falta de iteraciones en el cálculo de las ponderaciones, etc.

En la siguiente subsección realizamos dos pruebas, la primera en relación con la sensibilidad de la expansión ante la variación de los parámetros Cole-Cole y la segunda relacionada con el muestreo en las frecuencias de relajación ($\omega_{r\rho}$).

4.3.1. Prueba de Sensibilidad

Este ejercicio consistió en variar los parámetros Cole-Cole asignando diferentes valores para cada uno y analizar como dependiendo del valor que tome cada parámetro (σ_0 , m , τ y c) afecta el ajuste de la expansión (3.4) al MCC. Para esto, empleamos un nuevo MCC de referencia con los siguientes parámetros $\sigma_0 = 0.005 \left[\frac{S}{m} \right]$, $\sigma_\infty = 0.01 \left[\frac{S}{m} \right]$, $\tau = 0.1$ s y $c = 0.8$, seguido de esto mantenemos constantes tres de los cuatro parámetros y variamos uno por uno para determinar la sensibilidad del ajuste a cada uno de ellos.

Nótese que aunque el modelo de referencia emplea la conductividad a frecuencia máxima σ_∞ podemos calcular la cargabilidad como $m = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{\sigma_\infty} = 0.5$ (Seigel, 1959).

Variando σ_0

:

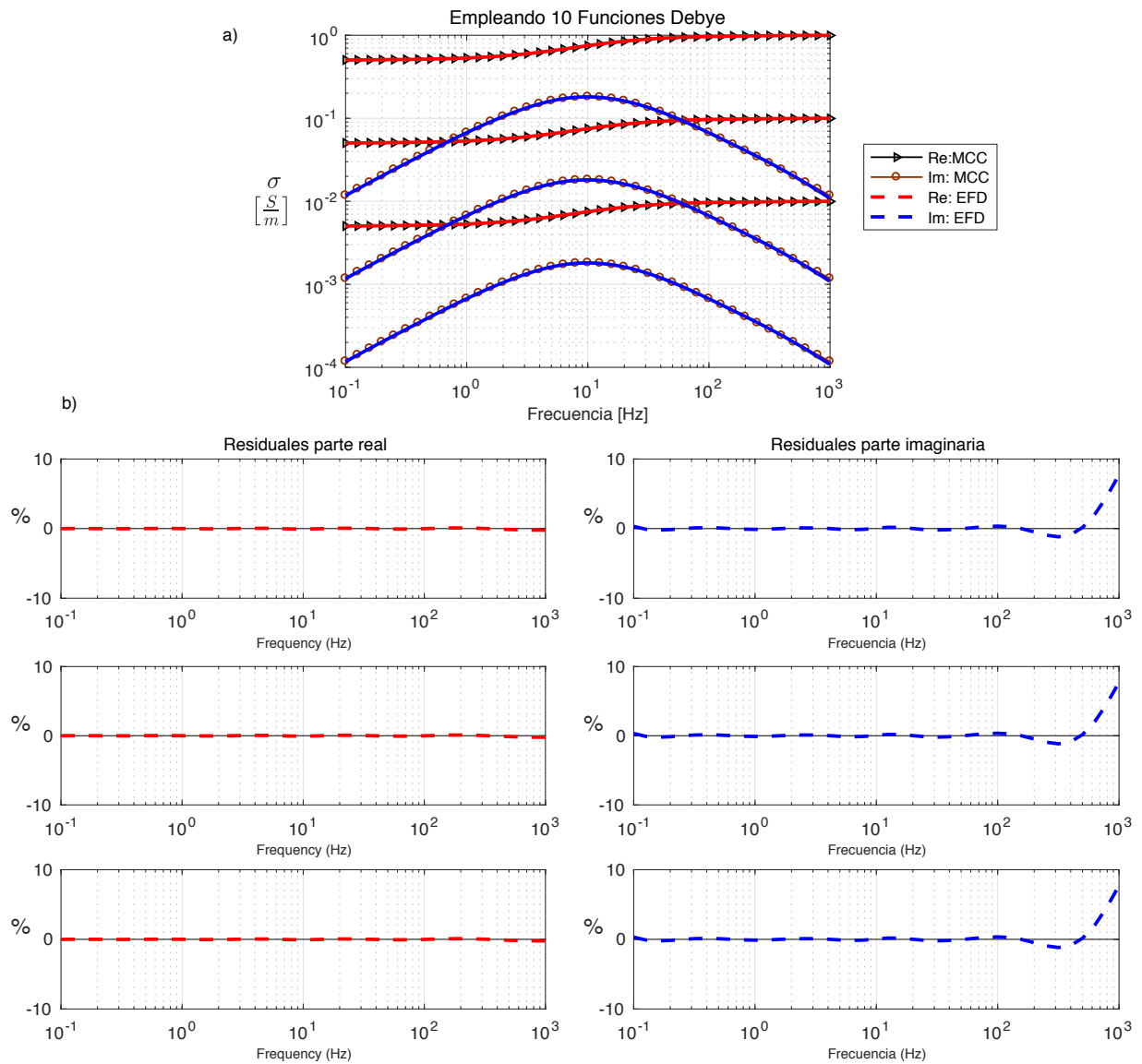


Figura 27. Sensibilidad de la expansión variando la conductividad a frecuencia cero σ_0 . Arriba, el ajuste al Modelo Cole-Cole empleando la expansión de la Función Debye (EFD) con 10 términos. Abajo, los residuales reales e imaginarios de cada ajuste

Variando m :

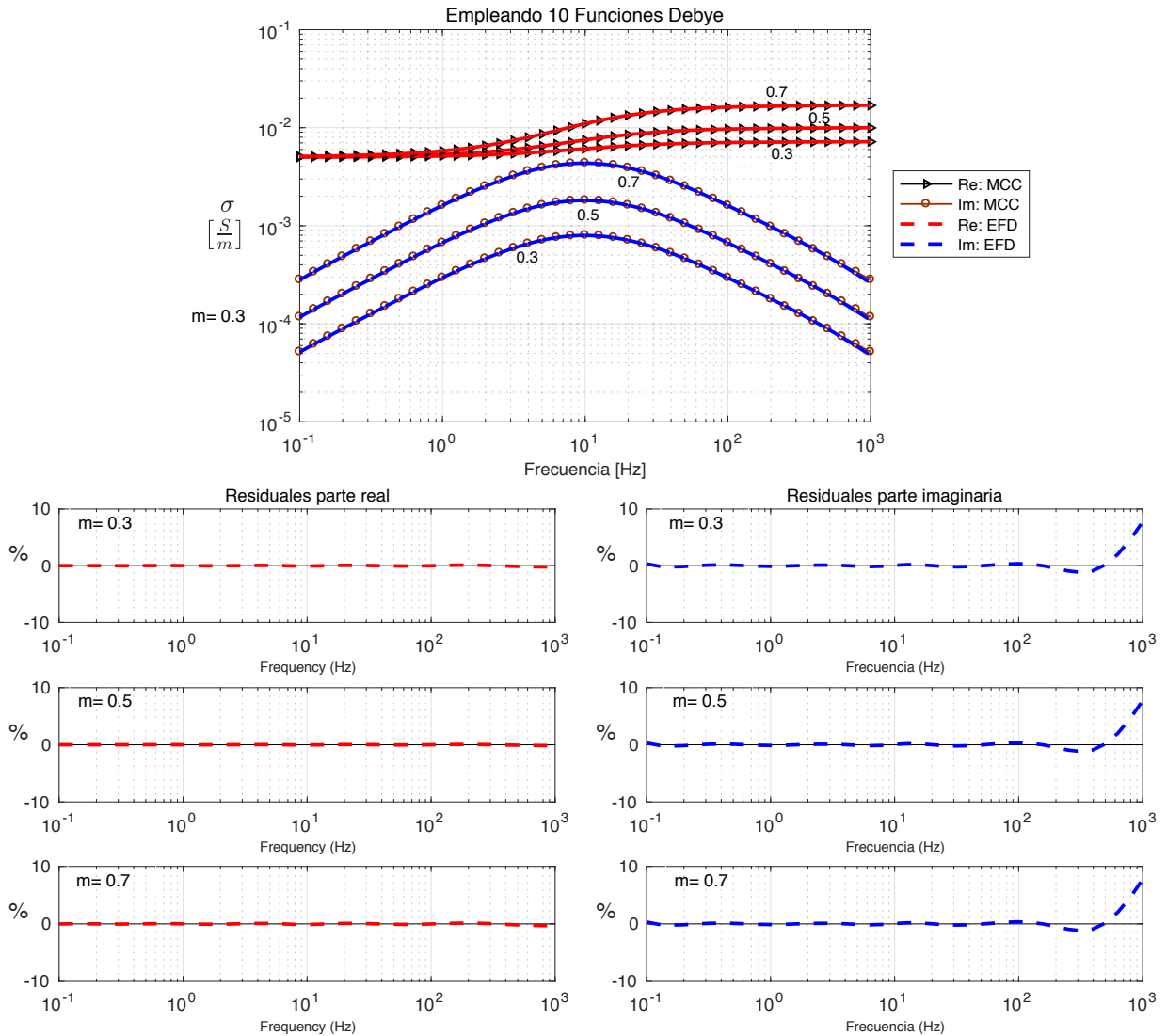


Figura 28. Sensibilidad de la expansión variando la cargabilidad m . Arriba, el ajuste al Modelo Cole-Cole (MCC) empleando la expansión de la Función Debye (EFD) con 10 términos. Abajo, los residuales reales e imaginarios de cada ajuste.

La variación en la conductividad a frecuencia cero (figura 27) y la cargabilidad (figura 28) del medio, no influyen en lo absoluto en el desajuste de la expansión, únicamente incrementan la magnitud de la parte real e imaginaria.

Variando τ :

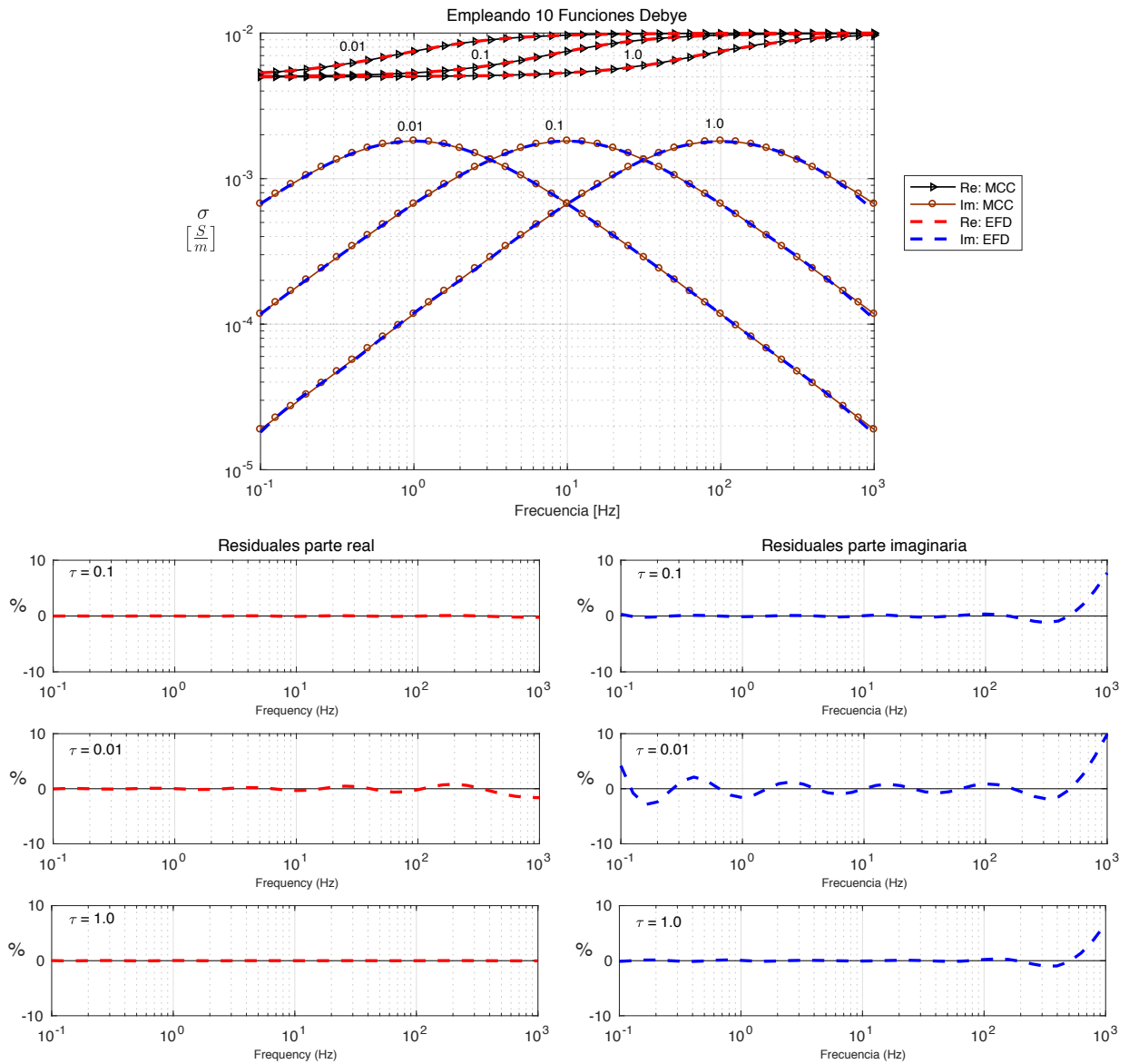


Figura 29. Sensibilidad de la expansión variando la constante de tiempo τ . Arriba, el ajuste al Modelo Cole-Cole (MCC) empleando la expansión de la Función Debye (EFD) con 10 términos. Abajo, los residuales reales e imaginarios de cada ajuste.

Por el contrario, con la constante de tiempo que influye ligeramente en la parte real e igualmente con pequeñas fluctuaciones en la parte imaginaria del ajuste únicamente para valores por debajo de 10^{-3}

Variando c :

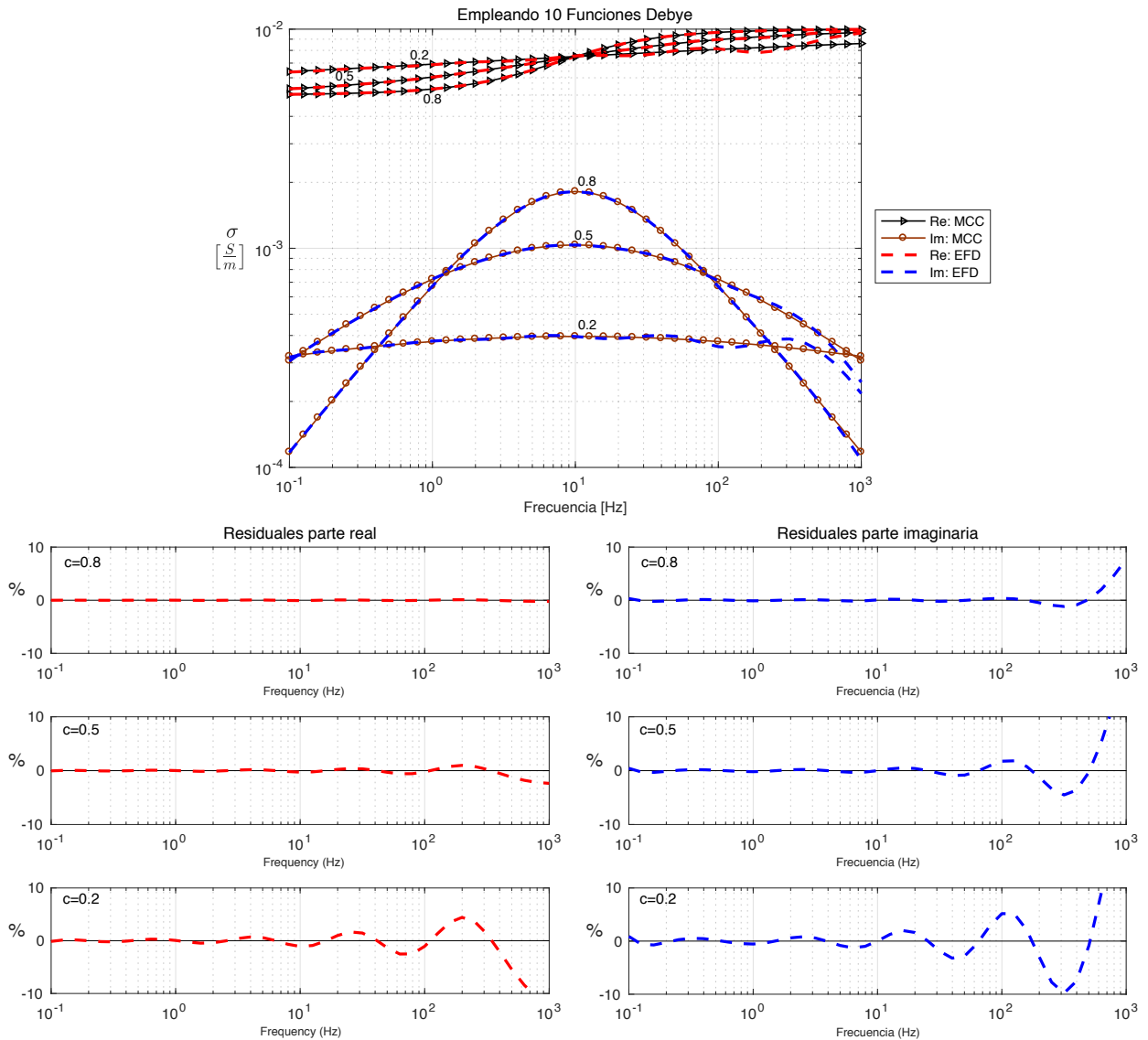


Figura 30. Sensibilidad de la expansión variando el exponente de la frecuencia c . Arriba, el ajuste al Modelo Cole-Cole (MCC) empleando la expansión de la Función Debye (EFD) con 10 términos. Abajo, los residuales reales e imaginarios de cada ajuste.

Notamos que el parámetro que más contribuye en el desajuste de la aproximación es el exponente de la frecuencia para valores de 0.2 y menores. Este desajuste puede mejorarse afinando el muestreo de las frecuencias de relajación (ω_{rp}).

4.3.2. Relación del muestreo con la eficiencia del ajuste

De acuerdo a Kelley y Luebbers (1996), la metodología en la expansión de la Función Debye depende en gran medida en la calidad del muestreo tanto del MCC como de las frecuencias de relajación.

De las pruebas realizadas hemos determinado que las p-ésimas frecuencias de relajación (ω_{r_p}) que se encuentren dentro del rango de las frecuencias muestreadas (ω_i), mejoran el ajuste para valores pequeños de τ y c (menor a 0.1 y 3 respectivamente). Por el contrario, si las frecuencias de relajación cubren el rango de las frecuencias de muestreo entonces el ajuste del MCC para τ y c grandes se mejora considerablemente como se detalla en la figura 31.

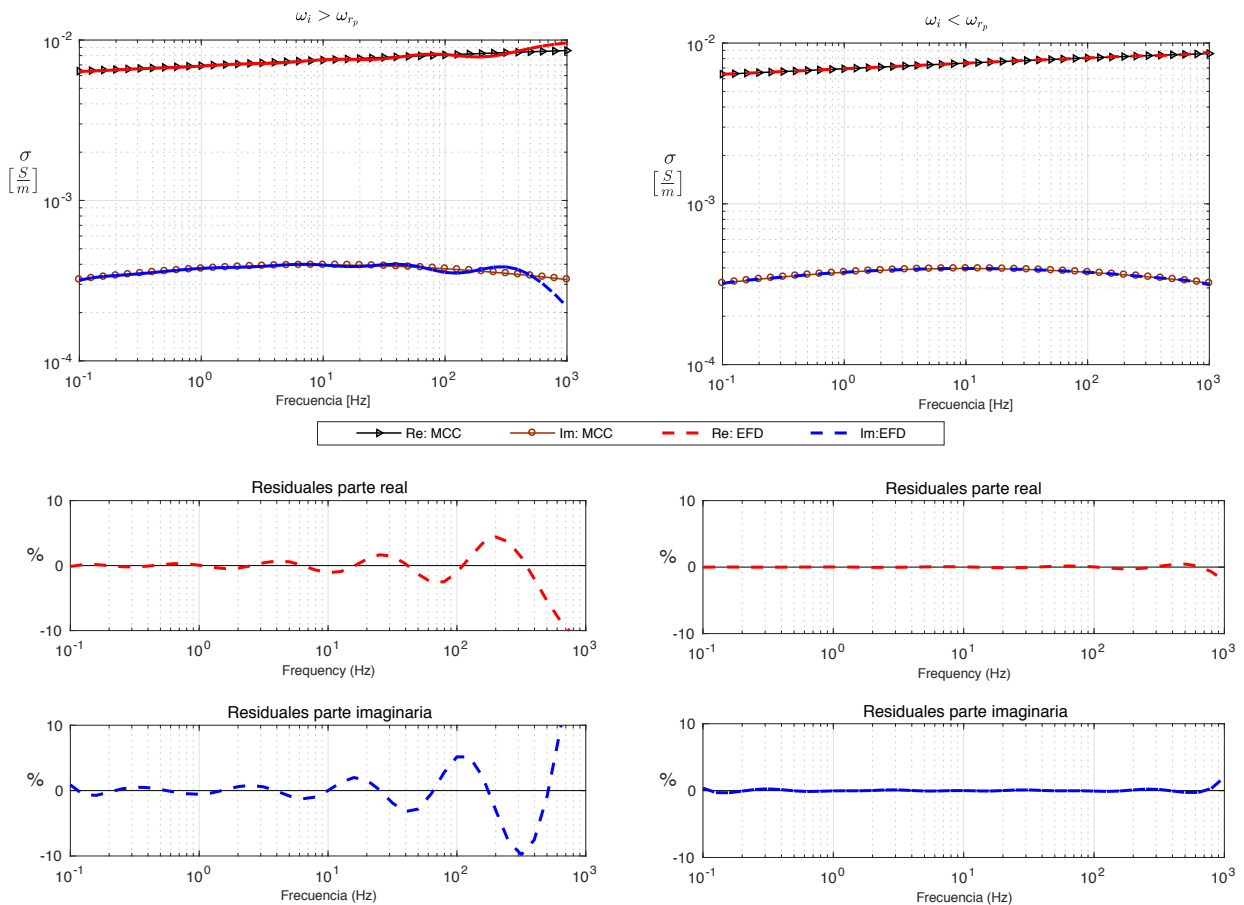


Figura 31. Influencia del muestreo de la frecuencia de relajación en la bondad del ajuste. Izquierda: La frecuencia muestreada cubre el rango de la frecuencia de relajación, ($\omega_i > \omega_{r_p}$) para c pequeña lo que dificulta el ajuste. Derecha: La frecuencia de relajación cubre el rango de las frecuencias muestreadas ($\omega_i < \omega_{r_p}$) para una c pequeña mejorando relativamente el ajuste (El MCC de referencia empleado es el mismo que en la sección anterior con $c = 0.2$).

Capítulo 5. Experimentos numéricos

En esta sección se emplean las ponderaciones γ_p calculadas con la expansión de la Función Debye para obtener la respuesta en tiempo de la función dieléctrica (3.41), la conductividad en el dominio del tiempo (3.5) y la velocidad de polarización (3.87). Se ha tomado constante a uno el valor del p -ésimo tiempo de relajación $\tau_p = 1$ debido a que el esquema de inversión desarrollado en la sección anterior solo estima el parámetro γ_p y no los tiempos de relajación τ_p , pues este hecho involucra un problema de inversión no lineal fuera de los alcances de esta tesis.

5.1. Verificación de las ecuaciones en el dominio del tiempo.

Comenzamos suponiendo un MCC de referencia con los siguientes parámetros:

$$\sigma_0 = 0.06 \left[\frac{S}{m} \right], \sigma_\infty = 0.3 \left[\frac{S}{m} \right], \tau = 1.0 \text{ s y } c = 0.8 \text{ con } m = 0.8$$

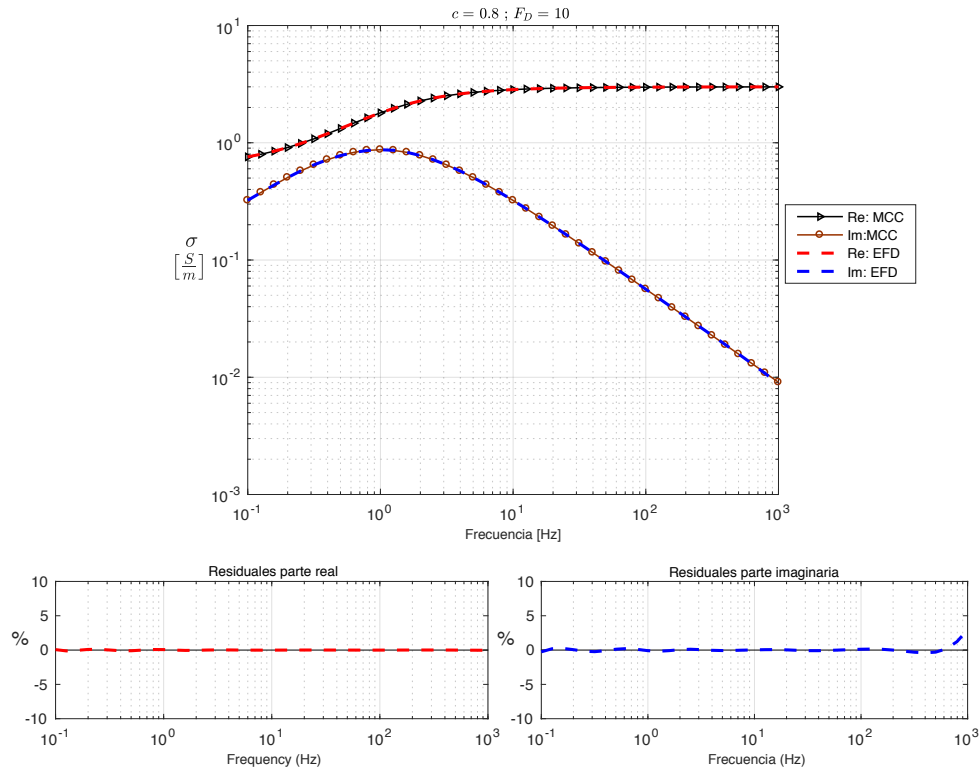


Figura 32. Arriba: Modelo Cole-Cole (MCC) de referencia ajustado por la Expansión de la Función Debye (EFD) empleando 10 términos. Abajo: Residuales de la expansión.

5.1.1. Función dieléctrica en frecuencia y tiempo

Si se sustituye el resultado real e imaginario de 4.15 en 4.7 se puede reescribir 3.32 para obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia.

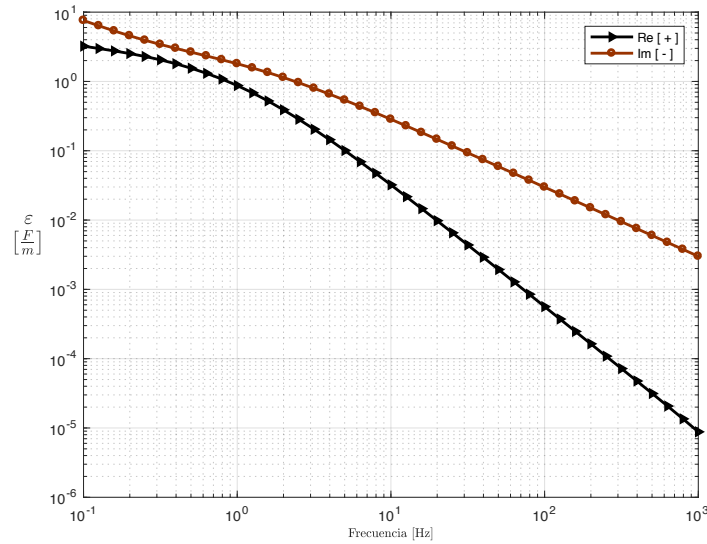


Figura 33. Componente real e imaginaria de la función dieléctrica.

De igual manera, sustituyendo 4.15 en 3.41 obtenemos la respuesta en el dominio del tiempo.

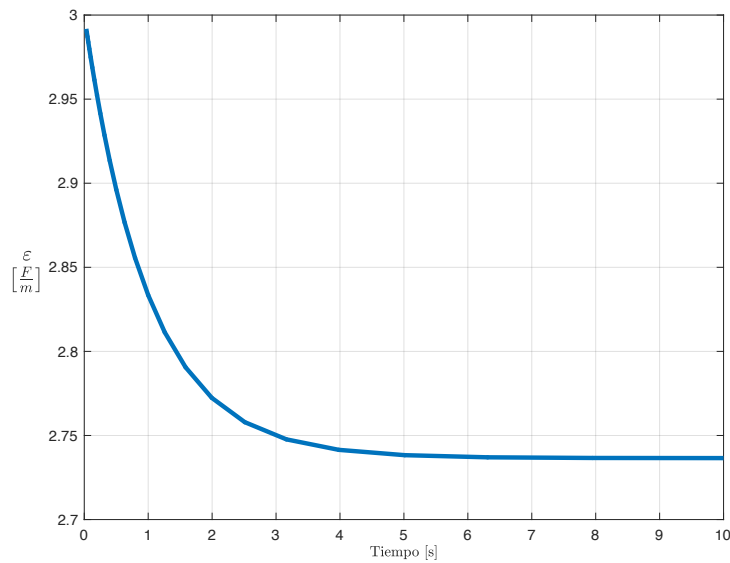


Figura 34. Comportamiento de la función dieléctrica en el dominio del tiempo como una curva de relajación de la permitividad eléctrica.

5.1.2. Conductividad en el dominio del tiempo

Sustituimos las ponderaciones calculadas con 4.15 en 3.5 para obtener la conductividad en el dominio del tiempo. El MCC definido por Pelton *et al.* (1978) describe el Modelo Cole-Cole como una impedancia compleja Z dependiente de la frecuencia (2.2) la cual, en el dominio del tiempo se define como (Nordsiek y Weller, 2008):

$$Z(t) = \frac{U(t)}{I} = \frac{V}{I}, \quad (5.1)$$

y se explica como la caída de voltaje V , normalizado por la intensidad de corriente constante I , expresada en volts sobre ampère. Para el caso del modelo empleado en este trabajo, la expresión 3.5 posee unidades de conductividad por segundo lo que representaría un decremento en la corriente. Ésta se ha asociado con la corriente de polarización (Flis *et al.*, 1989) (figura 7).

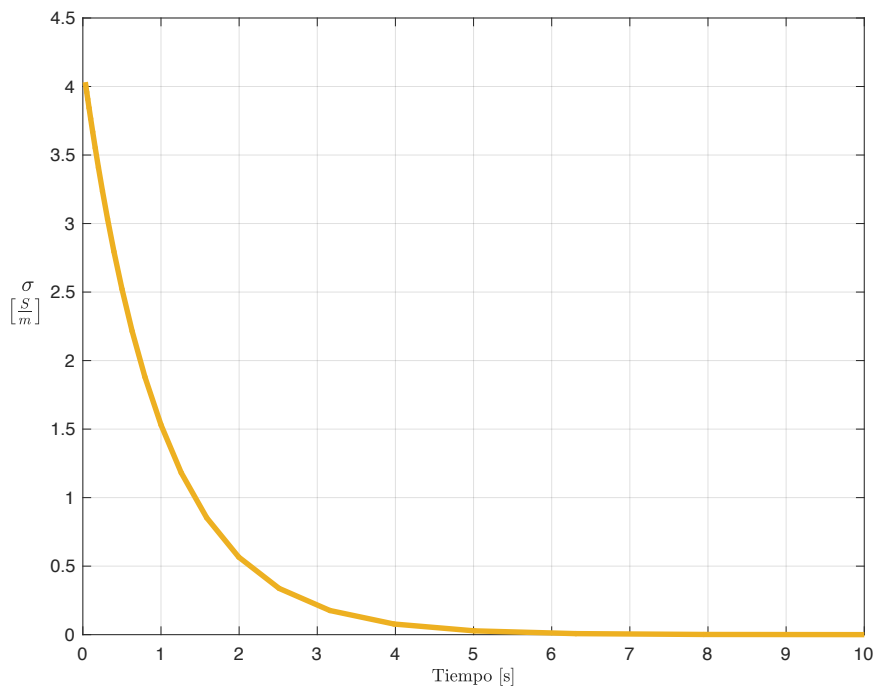


Figura 35. La conductividad en el dominio del tiempo representa el decaimiento de la corriente de polarización al cesar la incidencia de un campo eléctrico

5.1.3. Velocidad de polarización

Para obtener la respuesta de la velocidad de polarización, se sustituyen las ponderaciones totales obtenidas mediante 4.15 en 3.87

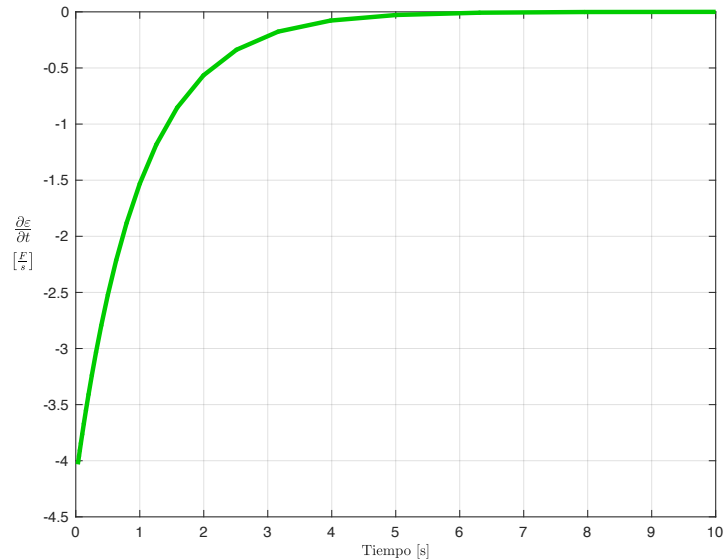


Figura 36. Velocidad de polarización

La respuesta de la velocidad de polarización es similar a la de corriente de polarización y puede verse como una curva del decaimiento de la corriente de polarización expresada en valores negativos, es decir, es un “espejo” de ella. Aunque esto es consecuencia directa de la función dieléctrica en frecuencia y su correspondiente tratamiento en tiempo (transformar a tiempo y sustituir 3.32 en 3.87), lo anterior no explica la naturaleza en el cambio de signo, pues en el ejemplo anterior la curva del decaimiento de la corriente de polarización pudo presentarse negativa y la velocidad de polarización positiva lo que según las pruebas realizadas, se define a partir del valor que tome el parámetro c del MCC como se discute más adelante.

5.2. Prueba sintética 1: Variación de parámetros del MCC

La bondad en el ajuste del MCC empleando la EFD, depende en gran medida del valor que tomen ciertos parámetros Cole-Cole, observando el mayor desajuste a la variación de τ y c , sin embargo este sigue siendo lo suficientemente bueno para considerar efectivo el método de ajuste. Ahora deseamos entender el comportamiento de las ecuaciones propuestas (3.5; 3.41; 3.87) a la variación de los parámetros Cole-Cole.

5.2.1. Decaimiento de la corriente

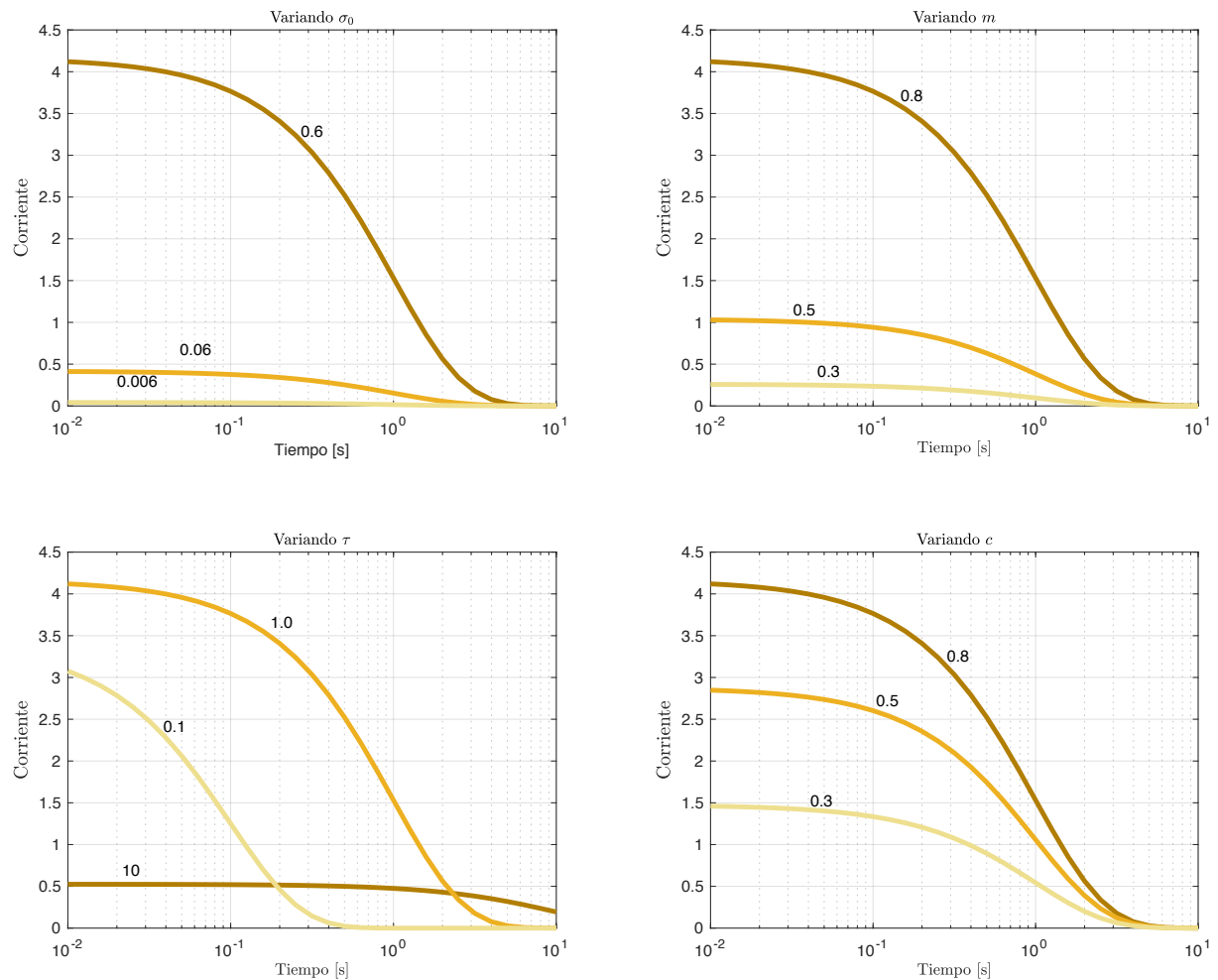


Figura 37. Comportamiento de la corriente de polarización al variar los parámetros Cole-Cole. La respuesta es similar a la variación de cada parámetro.

5.2.2. Función dieléctrica en tiempo

La respuesta del término dispersivo en el dominio del tiempo que hemos propuesto presenta mayor sensibilidad en amplitud a los parámetros τ y c a diferencia de la cargabilidad m la cual no influye en gran medida en la magnitud de la permitividad como ocurre al analizarla empleando la conductividad (figura 37).

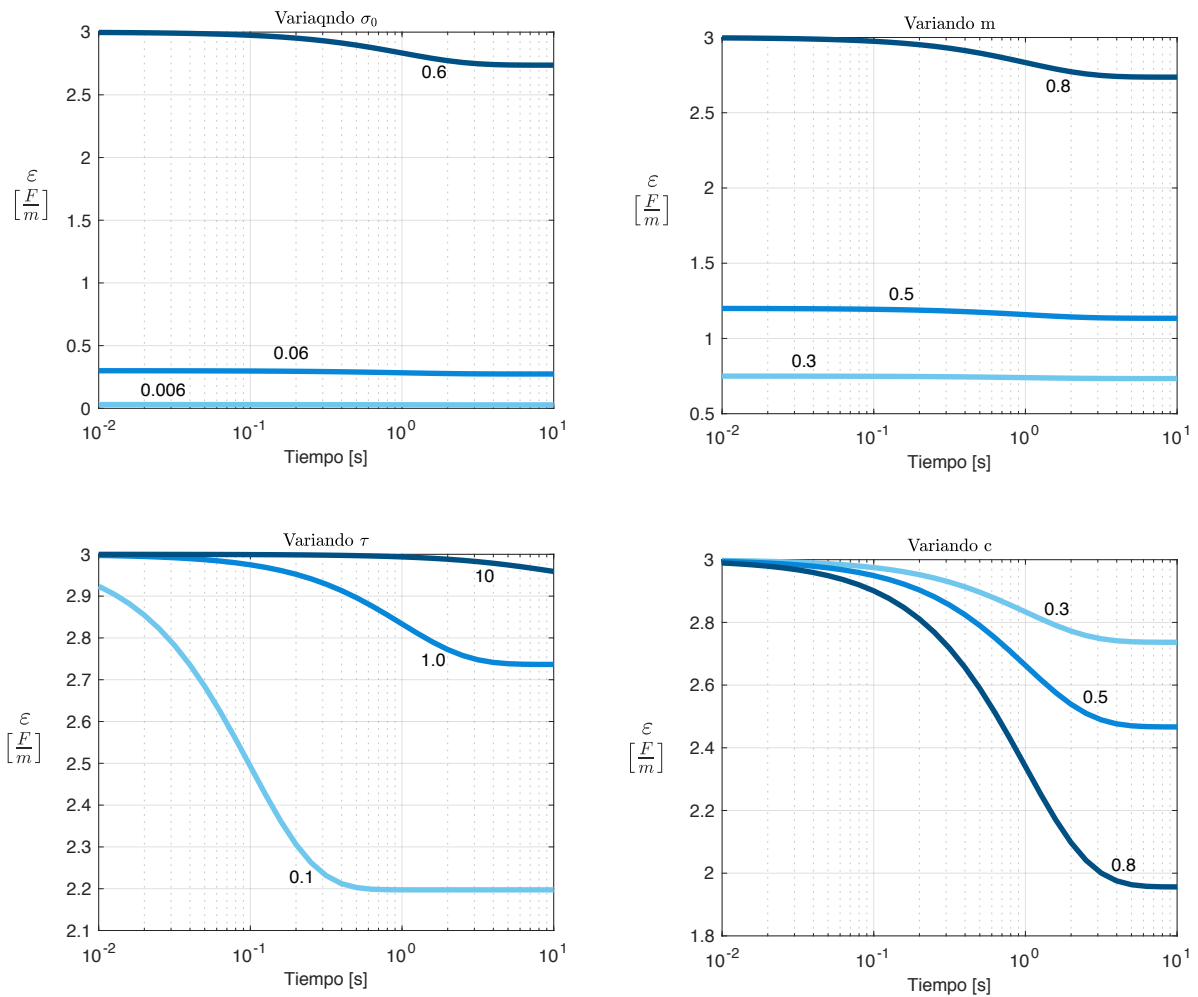


Figura 38. Respuesta de la función dieléctrica en el dominio del tiempo variando los parámetros Cole-Cole la cual presenta mayor sensibilidad a los parámetros τ y c

5.2.3. Comportamiento de la velocidad de polarización

Por su parte la velocidad de polarización presenta el mismo comportamiento que el decaimiento de la corriente pero en valores negativos.

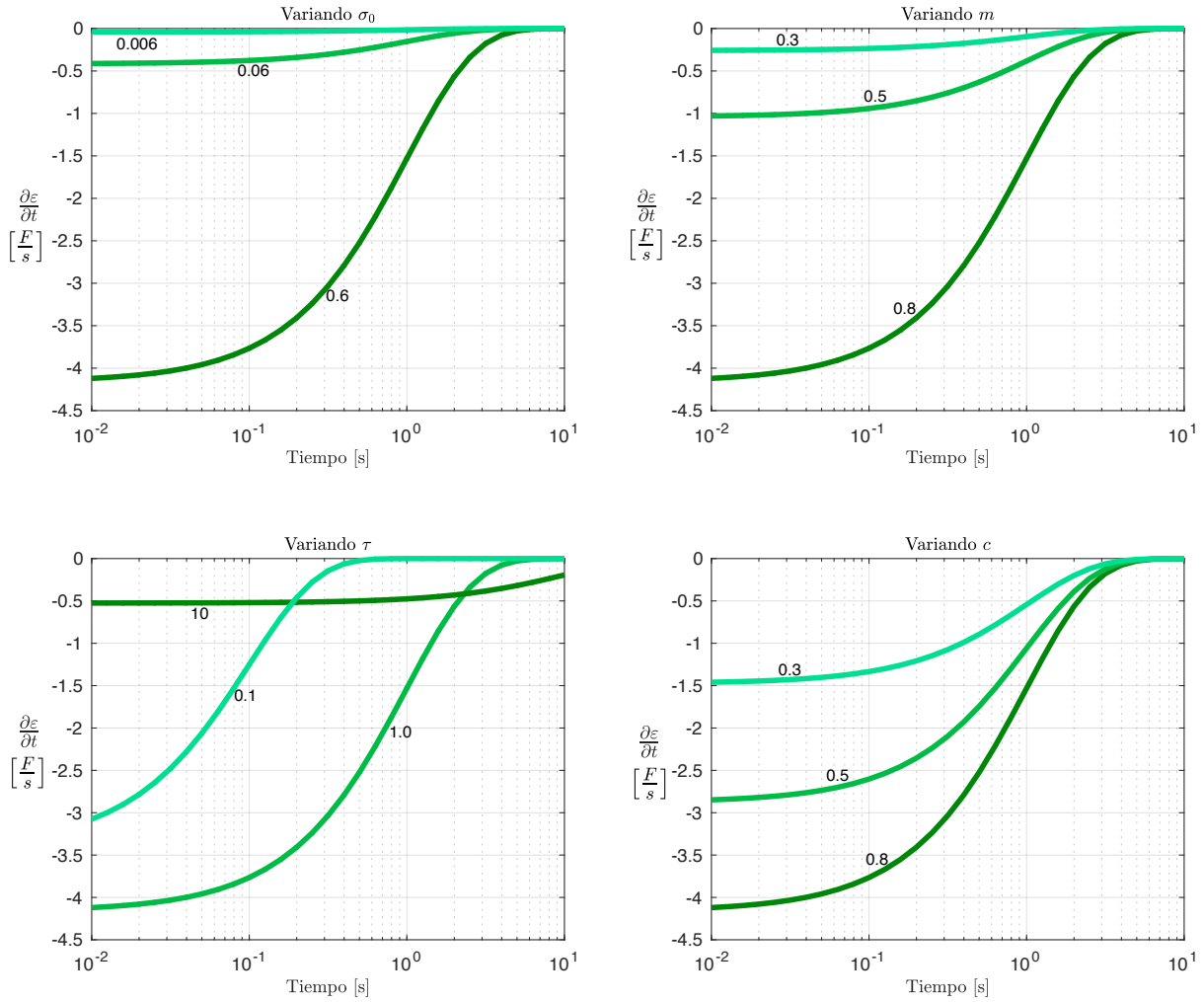


Figura 39. Velocidad de polarización variando los parametros Cole-Cole

5.3. Prueba sintética 2: Sensibilidad al parámetro c

Durante el desarrollo de los modelos anteriores, resalto el peculiar comportamiento de la velocidad de polarización y la conductividad (Expansión de la Función Debye) ante el parámetro c . Para analizar este hecho, seguimos el procedimiento convencional: Mantenemos el MCC de referencia de la figura 32 y comparamos el decaimiento de la corriente de polarización (figura 35) con la velocidad de polarización figura 36) al variar únicamente el exponente de la frecuencia c con 0.8, 0.5, 0.3 y 0.2 definiendo tres posibles casos:

Caso 1: Un desajuste exponencial donde no existe inversión en las curvas.

El muestreo implementado en este caso fue de 11 frecuencias de relajación a 0.45 Hz que cubrieron un rango de 0.0501 Hz - 1584.9 Hz. Se emplearon 10 funciones Debye ($F_D = 10$). Existe un desajuste despreciable para $C=0.8$ pero que se incrementa conforme el valor de c va reduciendo.

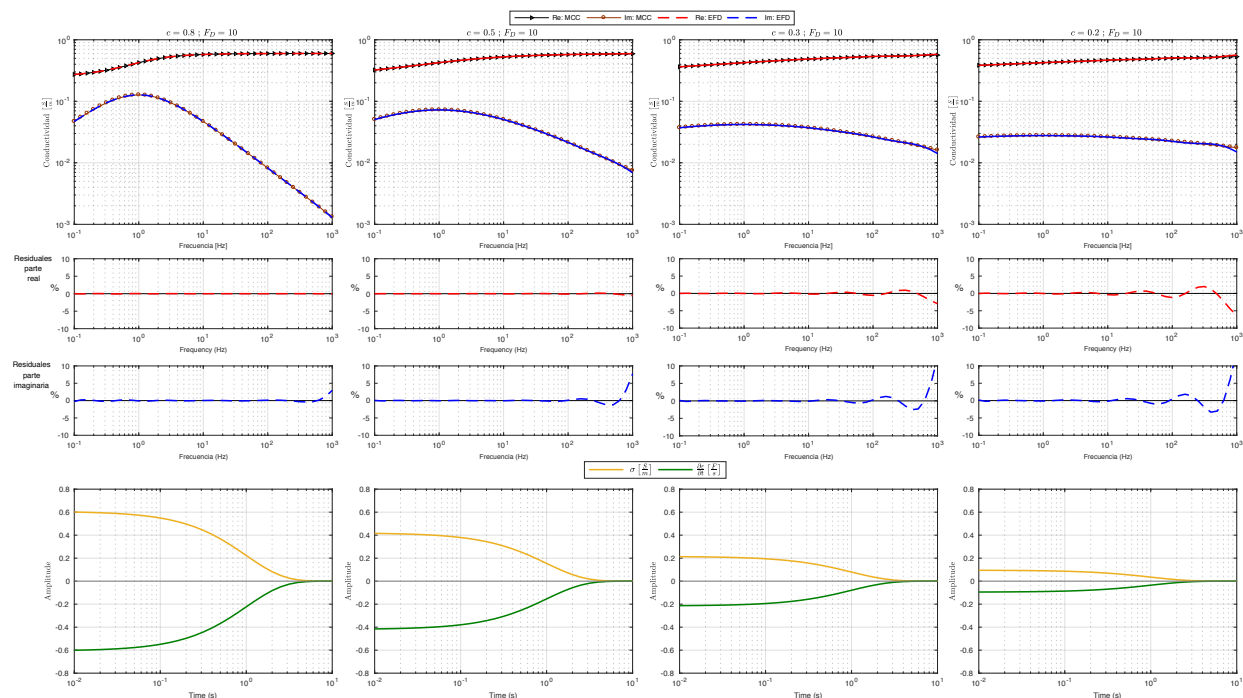


Figura 40. Análisis de la velocidad de polarización y el decaimiento de la corriente. Arriba: El ajuste al MCC seguido de los residuales en parte real (curva roja) e imaginaria (curva azul). Abajo: La respuesta de la corriente y velocidad de polarización. El ajuste se realiza en el rango de $0.8 \geq c \geq 0.2$ de izquierda a derecha. No se presenta inversión en las curvas para $c \leq 0.2$

Caso 2: Un ajuste ineficiente con un rápido incremento en los residuales y con evidencia en la inversión de las curvas.

El muestreo consistió en 11 frecuencias de relajación a 0.4 Hz. El rango de muestreo fue de 0.0794 Hz - 794.3282 Hz empleando 10 funciones Debye ($F_D = 10$). Las altas frecuencias en la parte imaginaria del MCC presentan un desajuste que se incrementa hasta las frecuencias medias donde es mayor al 10% conforme el valor de c decrece, ahí mismo el ajuste en la parte real se incrementa para valores de c menores a 0.5, aunque no lo suficientemente altos como para tomarse en cuenta. Se presenta la inversión de las curvas para $c \leq 0.25$

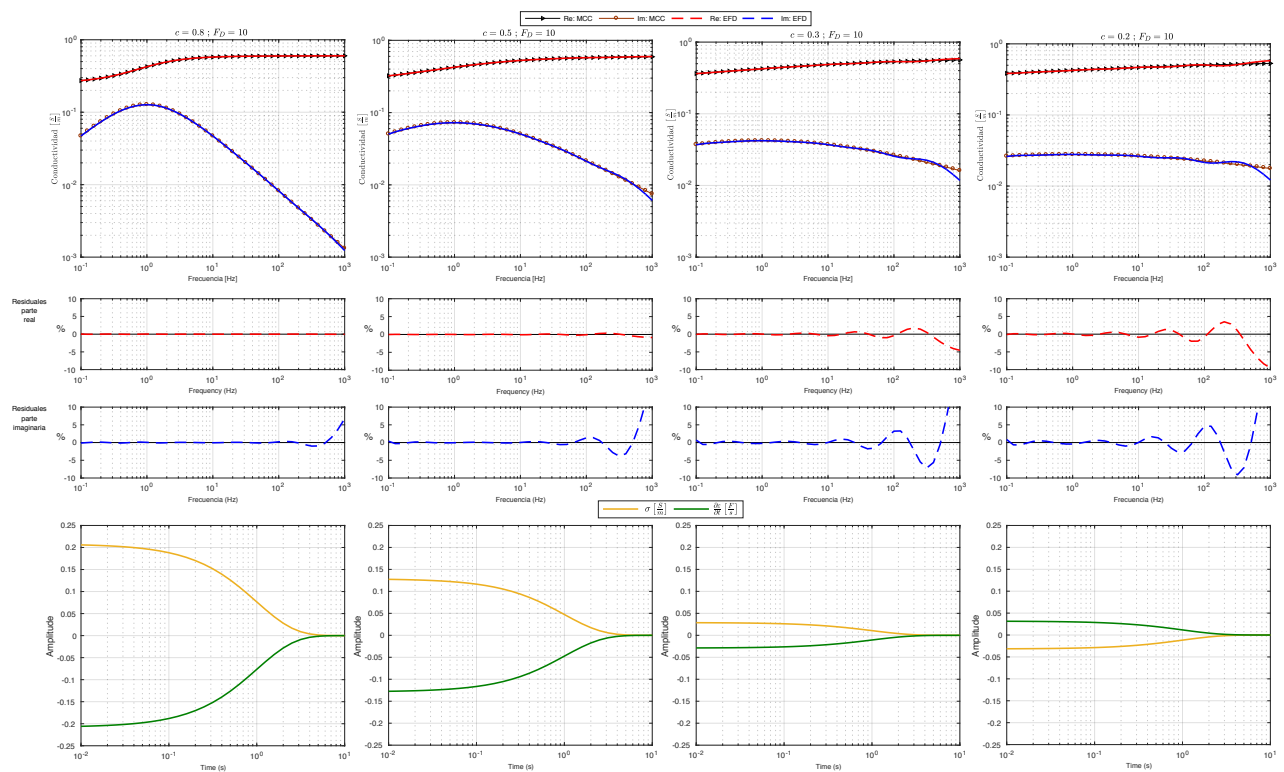


Figura 41. Análisis de la velocidad de polarización y el decaimiento de la corriente. Arriba: El ajuste al MCC seguido de los residuales en parte real (curva roja) e imaginaria (curva azul). Abajo: La respuesta de la corriente y velocidad de polarización. El ajuste se realiza en el rango de $0.8 \geq c \geq 0.2$ de izquierda a derecha. Se presenta una inversión en las curvas para $c \leq 0.2$

Caso 3: Ajuste eficiente que se mantiene para todos los valores de c y donde se presenta también, la inversión de curvas

Se implementaron 10 frecuencias de relajación muestreadas cada 0.47 Hz cubriendo un rango desde 0.0794 Hz - 1349 Hz con 10 funciones Debye. El ajuste en la parte real e imaginaria de la aproximación se mantiene estable para todos los valores de c . El mayor desajuste se presenta para $c = 0.8$ en altas frecuencias de la parte imaginaria no superando el 10% de error. Se presenta la inversión en las curvas de corriente de polarización ($\sigma(t)$) y velocidad de polarización ($\dot{\epsilon}$) para $c \geq 0.35$ donde el desajuste se sigue manteniendo por debajo del 5%.

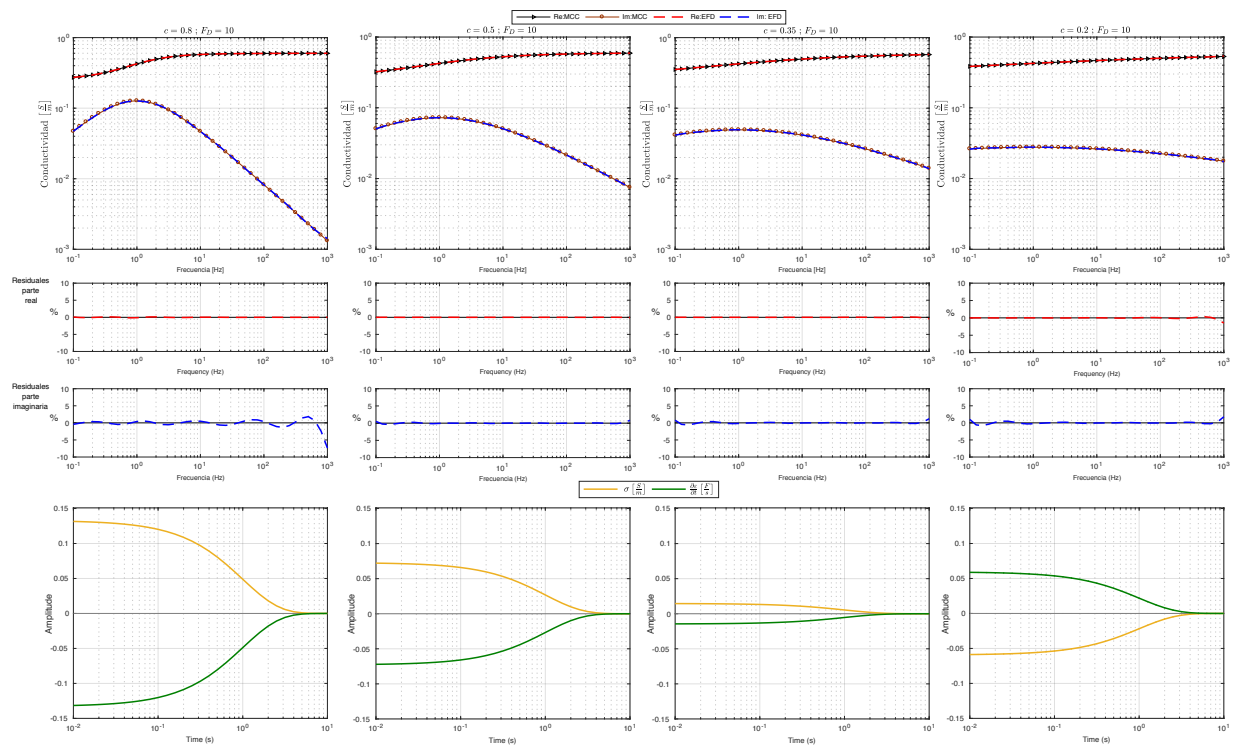


Figura 42. Análisis de la velocidad de polarización y el decaimiento de la corriente. Arriba: El ajuste al MCC seguido de los residuales en parte real (curva roja) e imaginaria (curva azul). Abajo: La respuesta de la corriente y velocidad de polarización. El ajuste se realiza en el rango de $0.8 \geq c \geq 0.2$ de izquierda a derecha. Se presenta una inversión en las curvas para $c \leq 0.3$

Este caso se toma como el de mejor ajuste pues cumple con las recomendaciones del muestreo descritas por Kelley y Luebbers (2003) y Kelley *et al.* (2007) y además, el muestreo se mantiene constante para todo el experimento lo que es deseable en un esquema evolutivo en diferencias finitas.

Capítulo 6. Discretización del problema EM en 3D

Hasta ahora se ha desarrollado la formulación teórica para describir el fenómeno de PI en función de la permitividad través de la función dieléctrica (3.32). Se implementó el Modelo Debye (3.1) para aproximar el Modelo Cole-Cole (2.3) debido a que éste último no posee una expresión analítica en tiempo que se pueda obtener directamente empleando la transformada Inversa de Fourier. Se comprobó que expandiendo el Modelo o Función Debye (3.4) es posible reproducir satisfactoriamente el comportamiento del MCC y obtener ponderaciones a través de un sencillo esquema de inversión para obtener la respuesta del modelo dieléctrico propuesto (3.41 y 3.87).

En esta sección se desarrolla la solución discreta de la ecuación de Helmholtz para campo eléctrico con efecto de PI (3.77), se emplea el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo con mallado intercalado y se definen algunos aspectos de modelado directo para implementar la solución numérica en un esquema computacional.

6.1. El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo con mallado intercalado

Las ecuaciones que rigen la difusión de partículas en movimiento o la conducción de calor, son ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico cuyos métodos de solución numérica son importantes en campos como la difusión molecular, la transferencia de calor o la propagación de ondas electromagnéticas (Nakamura, 1998). Sin embargo, la mayoría de ecuaciones que representan este tipo de fenómenos no puede resolverse empleando métodos analíticos debido a causas como (Sadiku, 2000):

1. La EDP no es lineal y no puede linealizarse sin afectar el resultado.
2. Las condiciones de frontera son de diferente tipo.
3. Las condiciones de frontera son dependientes del tiempo.
4. El medio es inhomogéneo o anisotrópico.

En general, las ecuaciones de Maxwell presentan estas características y requieren de algoritmos numéricos para resolverse. La solución de una ecuación diferencial parcial puede dividirse en general, en tres etapas (Sadiku, 2000).

1. Dividir la región de solución en una malla de nodos (figura 45).
2. Aproximar la ecuación diferencial dada en diferencias finitas que relacionen las variables dependientes en cada punto de la región de solución con sus valores en los puntos vecinos de la malla (figura 44).
3. Resolver la ecuación diferencial sujeta a las condiciones iniciales y de frontera.

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT) con mallado intercalado analiza el problema de la propagación electromagnética en pequeñas particiones espaciales denominadas celdas. En estas, los campos eléctricos y magnéticos están alternadamente distribuidos (figura 43). Las celdas o nodos también están intercaladas en el tiempo. Para resolver este conjunto de ecuaciones se desarrolla un proceso iterativo en el tiempo (López-Esquer *et al.*, 2006). Para una derivada de orden p , el número mínimo de datos necesarios para obtener una aproximación por diferencias es $p+1$ por lo que podemos emplear los puntos ubicados por delante, por detrás o en ambos lados respecto del punto donde deseamos conocer el valor de la función dando lugar a las diferencias adelantadas, atrasadas y centradas respectivamente.

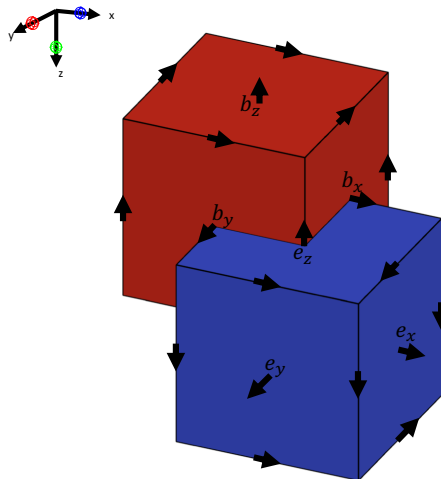


Figura 43. Mallado intercalado de Yee en tres dimensiones compuesta de una malla de campos eléctricos (prisma azul) sobrepuesta a una de campos magnéticos (prisma rojo)

Para el caso de modelado electromagnético en 3D se implementaron dos mallas en las que se ubican los campos eléctricos y magnéticos respectivamente (figura 43). Este tipo de malla se denomina tipo Yee en honor al matemático que desarrollo el método en 1966 (Yee, 1966). Algunas de las características principales de éste método son:

1. Las condiciones físicas en las fronteras se satisfacen de forma natural.
2. Se calcula los campos eléctricos \mathbf{E} y magnéticos \mathbf{B} en tiempo y espacio usando las ecuaciones de Maxwell en lugar de resolverlo para un solo campo usando la ecuación de onda.
3. La expresión discreta de la derivada en espacio del operador rotacional utiliza una diferencia finita centrada, por lo tanto se genera naturalmente un operador con precisión de segundo orden.
4. El algoritmo de Yee centra las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{B} en un espacio de tres dimensiones lo que implica que cada componente de \mathbf{E} está rodeada por cuatro componentes de \mathbf{B} circulantes y cada componente de \mathbf{B} a su vez, está rodeada de cuatro componentes de \mathbf{E} circulantes (figura 44).

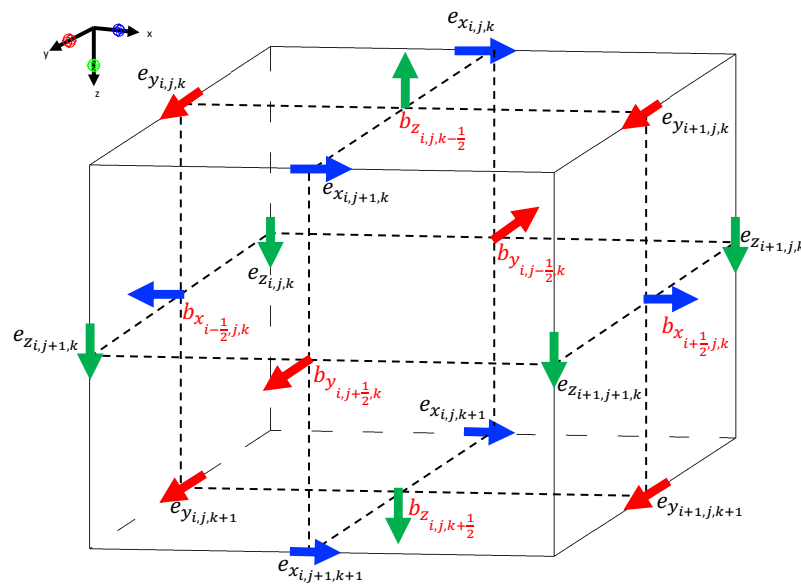


Figura 44. Visualización del mallado de Yee en 3D sobre un prisma rectangular donde los campos eléctricos (flechas sobre vértices) y magnéticos (flechas sobre caras) se distribuyen de forma intercalada. Un operador de doble rotacional considera únicamente la posición de los campos eléctricos

El método de DFDT consiste en obtener las expresiones en diferencias adelantadas, atrasadas y centradas a partir de expandir la función de interés, por ejemplo, $f(x)$ en una Serie de Taylor (6.1):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (6.1)$$

Siguiendo a Nakamura (1998), empezamos deduciendo la aproximación por diferencias para $f'_i = f'(x_i)$ utilizando $f_i = f(x_i)$ y $f_{i+1} = f(x_{i+1})$. El desarrollo de Taylor de f_{i+1} alrededor de x_i es:

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i + \dots \quad (6.2)$$

Despejando f'_i se obtiene:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{1}{2}hf''_i - \frac{1}{6}h^2f'''_i - \dots \quad (6.3)$$

Si truncamos después del primer término se obtiene la *aproximación por diferencias hacia adelante*:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad (6.4)$$

Donde:

$$O(h) = -\frac{1}{2}hf''_i \quad (6.5)$$

Es el error de truncamiento proporcional al intervalo y/o a la segunda derivada de f . De manera similar para la aproximación atrasada, utilizamos f_{i-1} y f_i . El desarrollo de Taylor para f_{i-1} es:

$$f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i - \frac{h^3}{6}f'''_i + \dots \quad (6.6)$$

Despejando f'_i , la *aproximación por diferencias atrasadas* se expresa como:

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad (6.7)$$

Donde:

$$O(h) = \frac{1}{2}hf''_i \quad (6.8)$$

Para la aproximación por diferencias centrales, usamos f_{i+1} y f_{i-1} restando 6.7 de 6.4 y obtenemos:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + \frac{1}{3}h^3f'''_i + \dots \quad (6.9)$$

Al despejar f_i tenemos:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{1}{6}h^2 f_i''' + \dots \quad (6.10)$$

Finalmente la aproximación por diferencias centradas se expresa como:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (6.11)$$

Donde:

$$O(h^2) = -\frac{1}{6}h^2 f_i''' \quad (6.12)$$

Es el error de truncamiento de la diferencia central el cual es proporcional a h^2 . Al decrecer h , el error decrece más rápido que en las otras dos aproximaciones. En otras palabras, una diferencia finita con la máxima exactitud es tal que el término de error es el de mayor orden posible (Nakamura, 1998). La ecuación de Helmholtz que hemos propuesto, involucra una primera derivada en tiempo y segundas derivadas en espacio y tiempo. Podemos obtener las expresiones en diferencias finitas centrales para una derivada de segundo orden con $p = 2 + 1$ términos discretos. Sumamos los desarrollos de Taylor en 6.4 y 6.7, como sigue.

$$\begin{aligned} f_{i+1} + f_{i-1} &= f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f_i'' + \frac{h^3}{6}f_i''' + \dots + f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f_i'' - \frac{h^3}{6}f_i''' + \dots \\ f_{i+1} + f_{i-1} &= 2f_i + h^2f_i'' + \frac{1}{12}h^4f_i'''' \end{aligned} \quad (6.13)$$

Restando $2f_i$:

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2f_i'' + \frac{1}{12}h^4f_i'''' \quad (6.14)$$

Truncando después del término f'' y despejando para éste obtenemos la *aproximación en diferencias centrales para la segunda derivada*:

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (6.15)$$

Donde el error de truncamiento está dado por:

$$O(h^2) = -\frac{1}{12}h^2 f_i'''' \quad (6.16)$$

Empleamos las ecuaciones 6.4, 6.7 o 6.11 y 6.15 para discretizar la ecuación de Helmholtz para campo eléctrico obtenida en el Capítulo 3.

6.1.1. Derivación de las ecuaciones en diferencias finitas

Comenzamos sustituyendo la convolución 3.97 en 3.77 para obtener la forma explícita de la ecuación de Helmholtz.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \left[\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \sigma_\infty \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - (\sigma_0 - \sigma_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{\tau_p} \left(\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) - \frac{\chi_p(t)}{\tau_p} \right) \right] = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (6.17)$$

El término de la segunda derivada en tiempo al estar multiplicada por $\mu_0 \epsilon_0$ representa una cantidad muy pequeña que a bajas frecuencias puede ser despreciable. Simplificando tenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \sigma_\infty \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mu_0 (\sigma_0 - \sigma_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{\tau_p} \left(\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) - \frac{\chi_p(t)}{\tau_p} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (6.18)$$

La expresión anterior corresponde al caso particular del modelo dieléctrico planteado, el caso puramente conductivo, el cual discretizaremos en sus tres componentes para una malla de $N_x \times N_y \times N_z$ celdas con n niveles de tiempo.

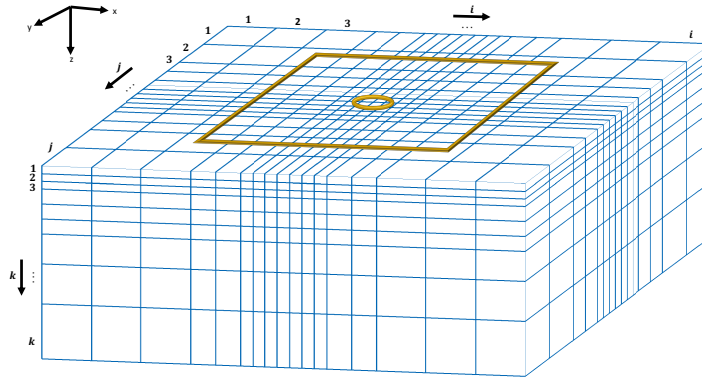


Figura 45. Modelo tridimensional discretizado en prismas rectangulares sobre una malla irregular

Obtenemos las componentes del doble rotacional evaluando el determinante:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \end{vmatrix}$$

Expresamos 6.18 en sus tres componentes vectoriales:

$$\frac{\partial^2 e_y^n(\mathbf{r})}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 e_x^n(\mathbf{r})}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_x^n(\mathbf{r})}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 e_z^2(\mathbf{r})}{\partial z \partial x} + \mu_0 \sigma_\infty \frac{\partial e_x^n(\mathbf{r})}{\partial t} - \mu_0 (\sigma_0 - \sigma_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{\tau_p} \left(e_x^n(\mathbf{r}) - \frac{\chi_{px}^n}{\tau_p} \right) = -\mu_0 \frac{\partial j_x^n(\mathbf{r})}{\partial t} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial^2 e_z^n(\mathbf{r})}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 e_y^n(\mathbf{r})}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 e_y^n(\mathbf{r})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_x^2(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} + \mu_0 \sigma_\infty \frac{\partial e_y^n(\mathbf{r})}{\partial t} - \mu_0 (\sigma_0 - \sigma_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{\tau_p} \left(e_y^n(\mathbf{r}) - \frac{\chi_{py}^n}{\tau_p} \right) = -\mu_0 \frac{\partial j_y^n(\mathbf{r})}{\partial t} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial^2 e_x^n(\mathbf{r})}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 e_z^n(\mathbf{r})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_z^n(\mathbf{r})}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_y^2(\mathbf{r})}{\partial y \partial z} + \mu_0 \sigma_\infty \frac{\partial e_z^n(\mathbf{r})}{\partial t} - \mu_0 (\sigma_0 - \sigma_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\gamma_p}{\tau_p} \left(e_z^n(\mathbf{r}) - \frac{\chi_{pz}^n}{\tau_p} \right) = -\mu_0 \frac{\partial j_z^n(\mathbf{r})}{\partial t} \quad (6.21)$$

Para evaluar las derivadas espaciales del campo eléctrico en un punto de la malla se requiere de doce puntos vecinos lo que representamos en la figura 46 como un arreglo geométrico de nodos para cada componente x , y e z que asemeja la forma de una veleta o regilete.

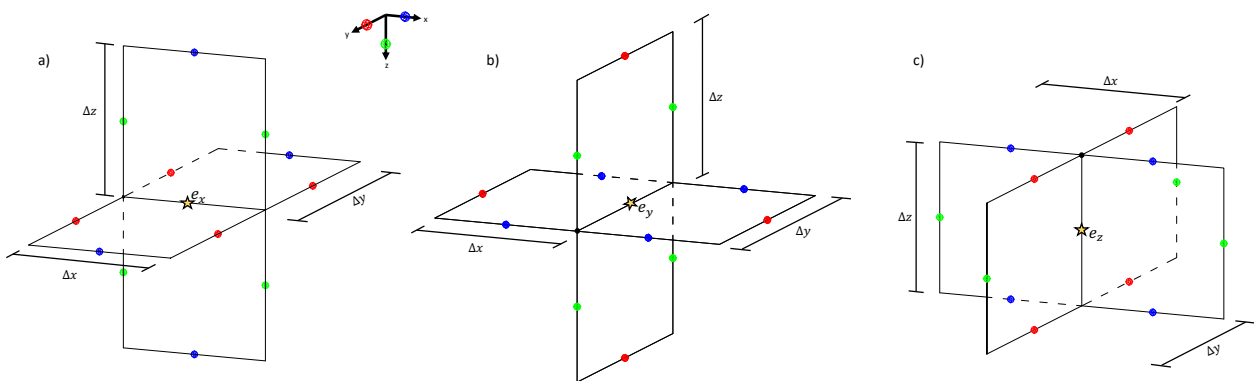


Figura 46. Arreglos geométrico de nodos en dirección x , y y z (a, b y c) de una malla 3D para un operador de doble rotacional de campo eléctrico

La figura 47 detalla la distribución espacial de los nodos vecinos en la componente x.

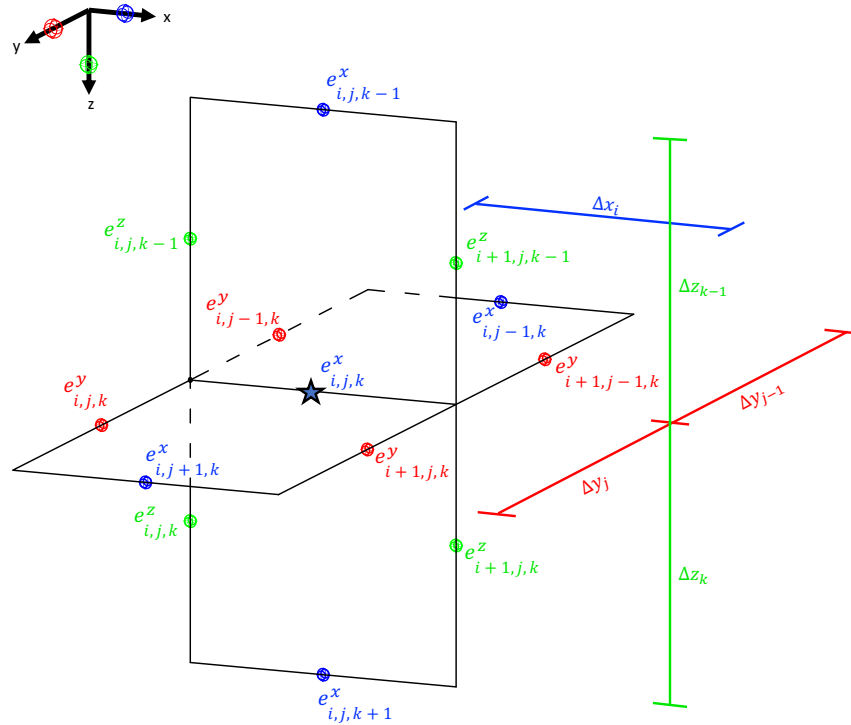


Figura 47. Distribución espacial del campo eléctrico para la componente x de un operador de doble rotacional (Figura 46)

Comenzamos por la componente x empleando la ecuación de segundo orden en diferencias finitas centradas (6.15) para discretizar las derivadas espaciales en 6.19 para una malla irregular :

$$\frac{\partial^2 e_y^n(\mathbf{r})}{\partial y \partial x} = \left[(e_{y_{i+1,j,k}}^n - e_{y_{i+1,j-1,k}}^n) \left(\frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) - (e_{y_{i,j,k}}^n - e_{y_{i,j-1,k}}^n) \left(\frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \right] \frac{1}{\Delta x_i} \quad (6.22)$$

$$-\frac{\partial^2 e_x^n(\mathbf{r})}{\partial y^2} = - \left[(e_{x_{i,j,k}}^n - e_{x_{i,j-1,k}}^n) \left(\frac{1}{\Delta y_{j-1}} \right) - (e_{x_{i,j+1,k}}^n - e_{x_{i,j,k}}^n) \left(\frac{1}{\Delta y_j} \right) \right] \left(\frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \quad (6.23)$$

$$-\frac{\partial^2 e_x^n(\mathbf{r})}{\partial z^2} = - \left[(e_{x_{i,j,k}}^n - e_{x_{i,j,k-1}}^n) \left(\frac{1}{\Delta z_{k-1}} \right) - (e_{x_{i,j,k+1}}^n - e_{x_{i,j,k}}^n) \left(\frac{1}{\Delta z_k} \right) \right] \left(\frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \quad (6.24)$$

$$-\frac{\partial^2 e_z^n(\mathbf{r})}{\partial z \partial x} = - \left[(e_{z_{i,j,k}}^n - e_{z_{i,j,k-1}}^n) \left(\frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) - (e_{z_{i+1,j,k}}^n - e_{z_{i+1,j,k-1}}^n) \left(\frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \right] \frac{1}{\Delta x_i} \quad (6.25)$$

De la figura 46b, 46c y siguiendo la distribución espacial del campo eléctrico detallada en la figura 47 podemos inferir las ecuaciones en diferencias finitas para las dos componentes restantes (y e z) del doble rotacional.

Siguiendo a Oristaglio y Hohmann (1984) empleamos la ecuación de primer orden en diferencias finitas adelantadas (6.4) para discretizar la derivada temporal en 6.18. que junto con el operador discreto de doble rotacional (figura 47) permite obtener la versión discreta de 6.19, 6.20 y 6.21.

Comenzamos con la componente x:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{e^n y_{i+1,j,k} - e^n y_{i+1,j-1,k}}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} - \frac{e^n y_{i,j,k} - e^n y_{i,j-1,k}}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta x_i} - \right. \\
 & \left(\frac{e^n x_{i,j,k} - e^n x_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1}} - \frac{e^n x_{i,j+1,k} - e^n x_{i,j,k}}{\Delta y_j} \right) \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} - \\
 & \left(\frac{e^n x_{i,j,k} - e^n x_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1}} - \frac{e^n x_{i,j,k+1} - e^n x_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right) \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} - \\
 & \left. \left(\frac{e^n z_{i,j,k} - e^n z_{i,j,k-1}}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} - \frac{e^n z_{i+1,j,k} - e^n z_{i+1,j,k-1}}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \frac{2}{\Delta x_i} \right] + \\
 & \mu_0 \tilde{\sigma}_\infty \frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t_n} - \mu_0 (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\sigma}_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\tilde{\gamma}_p}{\tilde{\tau}_p} \left(e^n x_{i,j,k} - \frac{\chi_{x_{i,j,k,p}}^n}{\tilde{\tau}_p} \right) = -\mu_0 \frac{j^{n+1} - j^n}{\Delta t_n},
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

la componente y:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{e^n z_{i,j+1,k} - e^n z_{i,j+1,k-1}}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} - \frac{e^n z_{i,j,k} - e^n z_{i,j,k-1}}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \frac{2}{\Delta y_j} - \right. \\
 & \left(\frac{e^n y_{i,j,k+1} - e^n y_{i,j,k}}{\Delta z_k} - \frac{e^n y_{i,j,k} - e^n y_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1}} \right) \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} - \\
 & \left(\frac{e^n y_{i,j,k} - e^n y_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}} - \frac{e^n y_{i,j,k} - e^n y_{i+1,j,k}}{\Delta x_i} \right) \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} - \\
 & \left. \left(\frac{e^n x_{i-1,j,k} - e^n x_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} - \frac{e^n x_{i-1,j+1,k} - e^n x_{i-1,j+1,k}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right) \frac{2}{\Delta y_j} \right] + \\
 & \mu_0 \tilde{\sigma}_\infty \frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t_n} - \mu_0 (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\sigma}_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\tilde{\gamma}_p}{\tilde{\tau}_p} \left(e^n y_{i,j,k} - \frac{\chi_{y_{i,j,k,p}}^n}{\tilde{\tau}_p} \right) = -\mu_0 \frac{j^{n+1} - j^n}{\Delta t_n},
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

y la componente z:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{e^n x_{i,j,k+1} - e^n x_{i-1,j,k+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} - \frac{e^n x_{i,j,k} - e^n x_{i-1,j,k}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \frac{2}{\Delta z_k} - \right. \\
& \left(\frac{e^n z_{i+1,j,k} - e^n z_{i,j,k}}{\Delta x_i} - \frac{e^n z_{i,j,k} - e^n z_{i-1,j,k}}{\Delta x_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} - \\
& \left(\frac{e^n z_{i,j+1,k} - e^n z_{i,j,k}}{\Delta y_j} - \frac{e^n z_{i,j,k} - e^n z_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} - \\
& \left. \left(\frac{e^n y_{i,j,k} - e^n y_{i,j-1,k}}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} - \frac{e^n y_{i,j,k+1} - e^n y_{i,j-1,k+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta z_k} \right] + \\
& \mu_0 \tilde{\sigma}_\infty \frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t_n} - \mu_0 (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\sigma}_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\tilde{\gamma}_p}{\tilde{\tau}_p} \left(e^n z_{i,j,k} - \frac{\chi_{z_{i,j,k,p}}^n}{\tilde{\tau}_p} \right) = -\mu_0 \frac{j^{n+1} - j^n}{\Delta t_n}.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

De las tres ecuaciones anteriores, las variables $\tilde{\sigma}_\infty$, $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\gamma}_p$, $\tilde{\tau}_p$ representan las propiedades del medio calculadas a partir de un promedio de las propiedades de las celdas vecinas al punto de interés. En la Sección 6.1.2 se detalla el cálculo de estas variables.

Las ecuaciones discretas 6.26, 6.27 y 6.28 se pueden resolver implementando un método implícito que involucra la solución de un sistema de ecuaciones a través del costoso cálculo de la inversa de una matriz dominante tridiagonal o bien, un método explícito en el que se puede “avanzar” en el tiempo punto a punto sin resolver sistemas de ecuaciones.

6.1.2. Cálculo de los parámetros de PI

La representación de un operador de doble rotacional es un *stencil* tipo veleta de doce puntos en el que solo se considera la posición de los campos eléctricos (figura 47) para calcular las propiedades físicas debemos ubicar en dicho *stencil* su posición, lo que regularmente se establece al centro de la celda. Respecto a la fuente, la densidad de corriente debe evaluarse en la misma posición que el campo eléctrico, es decir, en el centro del doble rotacional por lo que la hemos colocado en la arista del modelo consistente con 6.18. Finalmente, de 3.96 y 3.97 vemos que el campo eléctrico y la variable de memoria son dependientes uno de la otra lo que significa que ambos se encuentran en la misma posición en cada celda.

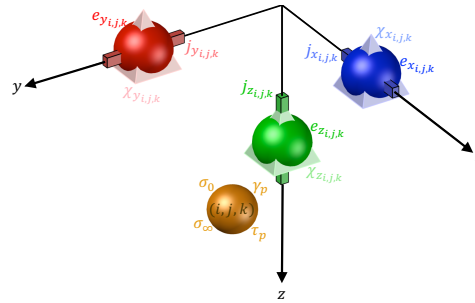


Figura 48. Distribución espacial de los campo eléctricos, variables de memoria, fuentes y propiedades físicas para una malla irregular en tres dimensiones

Para calcular el promedio de las propiedades físicas consideremos una sección transversal de cuatro prismas sobre una malla irregular (figura 49) en este tipo de malla no basta considerar el promedio de de las propiedades de las celdas vecinas pues físicamente, no tienen la misma influencia en el nodo de interés al no encontrarse a la misma distancia por lo cual, para asegurar la misma influencia de las celdas vecinas consideramos el área de cada celda y el área total de las celdas vecinas.

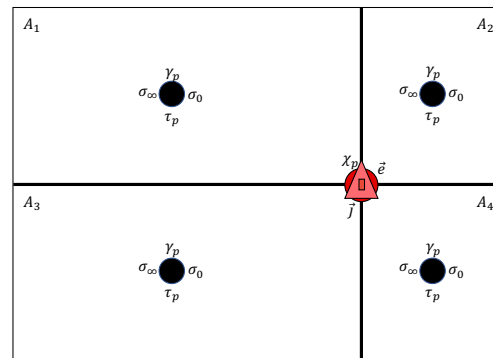


Figura 49. Sección transversal de cuatro prismas sobre una malla irregular

De la figura 49 podemos definir una una fórmula para calcular las propiedades físicas del medio (los parámetros de PI) y el término de fuente.

$$P(\mathbf{r}) = \left(\frac{A_4}{A_T}\right)P_1 + \left(\frac{A_3}{A_T}\right)P_2 + \left(\frac{A_2}{A_T}\right)P_3 + \left(\frac{A_1}{A_T}\right)P_4 \quad (6.29)$$

Donde $P(\mathbf{r})$ es el parámetro a calcular (propiedad física) A_1, \dots, A_4 son las áreas de las celdas vecinas en el *stencil* de doble rotacional y A_T el área total de los cuatro prismas vecinos al centro del doble rotacional. Si combinamos la figura 48 y 49 obtenemos una representación de las propiedades físicas en un stencil 3D para cada componente.

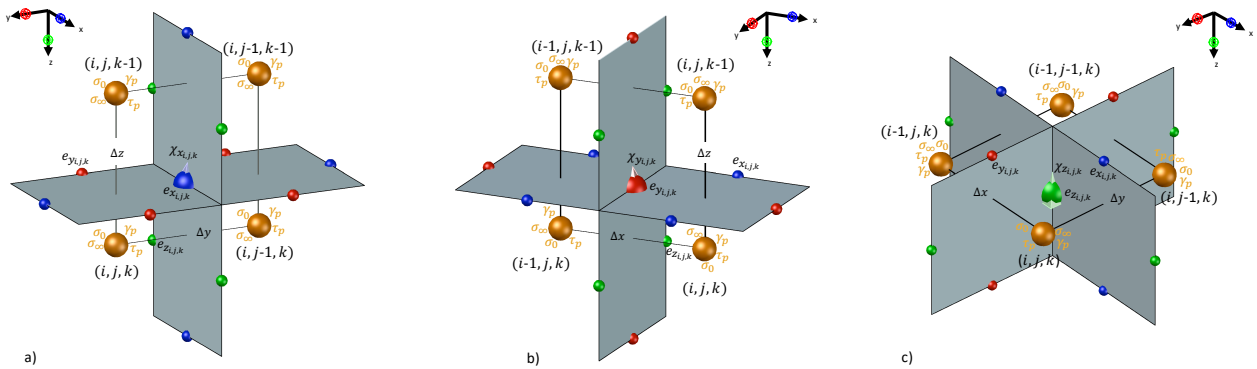


Figura 50. Stencils complementarios para el cálculo de las propiedades físicas del medio a), b) y c) en la componente x, y e z respectivamente

Implementamos 6.29 y la figura anterior se establecen las ecuaciones discretas para calcular las propiedades del medio en cada componente.

Para la componente x (figura 50a):

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_{0_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}) + \sigma_{0_{i,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta z_{k-1}) + \sigma_{0_{i,j-1,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_j) + \sigma_{0_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.30)$$

$$\tilde{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_{\infty_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}) + \sigma_{\infty_{i,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta z_{k-1}) + \sigma_{\infty_{i,j-1,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_j) + \sigma_{\infty_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.31)$$

$$\tilde{\gamma}_p = \frac{\gamma_{p_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}) + \gamma_{p_{i,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta z_{k-1}) + \gamma_{p_{i,j-1,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_j) + \gamma_{p_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.32)$$

y

$$\tilde{\tau}_p = \frac{\tau_{p_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}) + \tau_{p_{i,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta z_{k-1}) + \tau_{p_{i,j-1,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_j) + \tau_{p_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.33)$$

Las propiedades del medio en la componente y (figura 50b):

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_{0_{i,j,k}} (\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}) + \sigma_{0_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta z_{k-1}) + \sigma_{0_{i-1,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_i) + \sigma_{0_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_{i-1})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.34)$$

$$\tilde{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_{\infty_{i,j,k}} (\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}) + \sigma_{\infty_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta z_{k-1}) + \sigma_{\infty_{i-1,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_i) + \sigma_{\infty_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_{i-1})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.35)$$

$$\tilde{\gamma}_\rho = \frac{\gamma_{\rho_{i,j,k}} (\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}) + \gamma_{\rho_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta z_{k-1}) + \gamma_{\rho_{i-1,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_i) + \gamma_{\rho_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_{i-1})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.36)$$

y

$$\tilde{\tau}_\rho = \frac{\tau_{\rho_{i,j,k}} (\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}) + \tau_{\rho_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta z_{k-1}) + \tau_{\rho_{i-1,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_i) + \tau_{\rho_{i,j,k-1}} (\Delta z_k \Delta x_{i-1})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (6.37)$$

Y en la componente z (figura 50c):

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_{0_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta x_{i-1}) + \sigma_{0_{i,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta x_{i-1}) + \sigma_{0_{i-1,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta x_i) + \sigma_{0_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \quad (6.38)$$

$$\tilde{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_{\infty_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta x_{i-1}) + \sigma_{\infty_{i,j-1,k}} (\Delta x_{i-1} \Delta y_j) + \sigma_{\infty_{i-1,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta x_i) + \sigma_{\infty_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \quad (6.39)$$

$$\tilde{\gamma}_\rho = \frac{\gamma_{\rho_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta x_{i-1}) + \gamma_{\rho_{i,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta x_{i-1}) + \gamma_{\rho_{i-1,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta x_i) + \gamma_{\rho_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \quad (6.40)$$

y

$$\tilde{\tau}_\rho = \frac{\tau_{\rho_{i,j,k}} (\Delta y_{j-1} \Delta x_{i-1}) + \tau_{\rho_{i,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta x_{i-1}) + \tau_{\rho_{i-1,j-1,k}} (\Delta y_j \Delta x_i) + \tau_{\rho_{i-1,j,k}} (\Delta x_i \Delta y_{j-1})}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \quad (6.41)$$

6.1.3. Actualización de la variable de memoria

Para actualizar la variable de memoria de 3.96 vemos que se requiere conocer el campo eléctrico el que a su vez requiere de la variable de memoria a cada paso de tiempo. Este hecho produce un sistema de ecuaciones acoplado entre la ecuación diferencial de la variable de memoria (3.100) y la ecuación diferencial de Helmholtz (6.18) colocando ambas en la misma posición de la malla (figura 48).

La EDO de la variable de memoria (3.100) al igual que los campos electromagnéticos puede calcularse de dos maneras. 1.- Empleando un **esquema implícito**, donde se resuelve un sistema de p ecuaciones, resultante de las p variables de memoria generadas por los p mecanismos de relajación ($p = 1, \dots, F_D$) a través de la inversa de una matriz. 2.- Empleando un **esquema explícito** donde la variable de memoria en el tiempo futuro se obtiene a partir de valores de la misma en tiempos anteriores.

Usando la aproximación explícita, expandimos 3.96 en una serie de Taylor truncandola en el segundo término correspondiente a la primera derivada.

$$\chi_p^{n+1} = \chi_p^n + \frac{d\chi_p^n}{dt} \Delta t_n, \quad (6.42)$$

se sustituye 3.100 en la serie de Taylor para obtener:

$$\chi_p^{n+1} = \chi_p^n + \left(\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) - \frac{\chi_p(t)}{\tilde{\tau}_p} \right) \Delta t_n, \quad (6.43)$$

simplificando, se obtiene la variable de memoria en el tiempo futuro:

$$\boxed{\chi_p^{n+1} = \chi_p^n \left(1 - \frac{\Delta t_n}{\tilde{\tau}_p} \right) + \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \Delta t_n}. \quad (6.44)$$

La expresión anterior permite actualizar la variable de memoria empleando solo un nivel de tiempo con lo cual la serie de tiempo completa del medio debida a la convolución, ya no es necesaria.

Expresamos 6.44 en su componentes vectoriales.

Para la componente x

$$\chi_{x_{i,j,k,p}}^{n+1} = \chi_{x_{i,j,k,p}}^n \left(1 - \frac{\Delta t_n}{\tilde{\tau}_p} \right) + e_{x_{i,j,k}}^n \Delta t_n, \quad (6.45)$$

la componente y

$$\chi_{y_{i,j,k,p}}^{n+1} = \chi_{y_{i,j,k,p}}^n \left(1 - \frac{\Delta t_n}{\tilde{\tau}_p} \right) + e_{y_{i,j,k}}^n \Delta t_n, \quad (6.46)$$

y la componente z

$$\chi_{z_{i,j,k,p}}^{n+1} = \chi_{z_{i,j,k,p}}^n \left(1 - \frac{\Delta t_n}{\tilde{\tau}_p} \right) + e_{z_{i,j,k}}^n \Delta t_n. \quad (6.47)$$

Las componentes de la variable de memoria junto con 6.26, 6.27 y 6.28 representan un sistema de ecuaciones acopladas que se resuelven simultáneamente a cada paso de tiempo.

6.2. Solución explícita del campo eléctrico

Para conocer la respuesta del campo electromagnético en un medio polarizable, se requiere conocer la evolución del campo eléctrico en cada paso de tiempo. Siguiendo a Nakamura (1998) se emplea el método explícito de Euler hacia adelante, el cual es adecuado para una programación rápida debido a su sencillez.

Este método se obtiene reescribiendo la aproximación en diferencias finitas empleando 6.4 como sigue:

$$f_{n+1} = f_n + hf'_n, \quad (6.48)$$

donde $f'_i = E(f_i, t_n)$. Mediante 6.48, se calcula f_i en forma recursiva como:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + hE(f_0, t_0) \\ f_2 &= f_1 + hE(f_1, t_1) \\ f_3 &= f_2 + hE(f_2, t_2) \\ &\vdots \\ f_{n+1} &= f_n + hE(f_i, t_n) \end{aligned}$$

Implementando el método de Euler hacia adelante, podemos reescribir la derivada temporal del campo eléctrico en 6.26 y despejar el campo eléctrico en el tiempo futuro como una aproximación adelantada en términos de los tiempo anteriores como sigue,

$$\begin{aligned}
 e_{x_{i,j,k}}^{n+1} = e_{x_{i,j,k}}^n + \frac{\Delta t_n}{\mu_0 \tilde{\sigma}_\infty} & \left[\mu_0 (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\sigma}_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\tilde{\gamma}_p}{\tilde{\tau}_p} \left(e_{x_{i,j,k}}^n - \frac{\chi_{x_{i,j,k,p}}^n}{\tilde{\tau}_p} \right) + \right. \\
 & \left(\frac{e_{x_{i,j,k}}^n - e_{x_{i,j-1,k}}^n}{\Delta y_{j-1}} - \frac{e_{x_{i,j+1,k}}^n - e_{x_{i,j,k}}^n}{\Delta y_j} \right) \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} + \\
 & \left(\frac{e_{x_{i,j,k}}^n - e_{x_{i,j,k-1}}^n}{\Delta z_{k-1}} - \frac{e_{x_{i,j,k+1}}^n - e_{x_{i,j,k}}^n}{\Delta z_k} \right) \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} + \\
 & \left(\frac{e_{z_{i,j,k}}^n - e_{z_{i,j,k-1}}^n}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} - \frac{e_{z_{i+1,j,k}}^n - e_{z_{i+1,j,k-1}}^n}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \frac{2}{\Delta x_i} - \\
 & \left. \left(\frac{e_{y_{i+1,j,k}}^n - e_{y_{i+1,j-1,k}}^n}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} - \frac{e_{y_{i,j,k}}^n - e_{y_{i,j-1,k}}^n}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta x_i} - \mu_0 \frac{j^{n+1} - j^n}{\Delta t_n} \right], \quad (6.49)
 \end{aligned}$$

de igual forma, reescribimos 6.27 para la componente y.

$$\begin{aligned}
 e_{y_{i,j,k}}^{n+1} = e_{y_{i,j,k}}^n + \frac{\Delta t_n}{\mu_0 \tilde{\sigma}_\infty} & \left[\mu_0 (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\sigma}_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\tilde{\gamma}_p}{\tilde{\tau}_p} \left(e_{y_{i,j,k}}^n - \frac{\chi_{y_{i,j,k,p}}^n}{\tilde{\tau}_p} \right) + \right. \\
 & \left(\frac{e_{y_{i,j,k+1}}^n - e_{y_{i,j,k}}^n}{\Delta z_k} - \frac{e_{y_{i,j,k}}^n - e_{y_{i,j,k-1}}^n}{\Delta z_{k-1}} \right) \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} + \\
 & \left(\frac{e_{y_{i,j,k}}^n - e_{y_{i-1,j,k}}^n}{\Delta x_{i-1}} - \frac{e_{y_{i,j,k}}^n - e_{y_{i+1,j,k}}^n}{\Delta x_i} \right) \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} + \\
 & \left(\frac{e_{x_{i-1,j,k}}^n - e_{x_{i,j,k}}^n}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} - \frac{e_{x_{i-1,j+1,k}}^n - e_{x_{i-1,j,k}}^n}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right) \frac{2}{\Delta y_j} - \\
 & \left. \left(\frac{e_{z_{i,j+1,k}}^n - e_{z_{i,j+1,k-1}}^n}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} - \frac{e_{z_{i,j,k}}^n - e_{z_{i,j,k-1}}^n}{\Delta z_k + \Delta z_{k-1}} \right) \frac{2}{\Delta y_j} - \mu_0 \frac{j^{n+1} - j^n}{\Delta t_n} \right], \quad (6.50)
 \end{aligned}$$

y para la componente z.

$$\begin{aligned}
 e_{z_{i,j,k}}^{n+1} = e_{z_{i,j,k}}^n + \frac{\Delta t_n}{\mu_0 \tilde{\sigma}_\infty} & \left[\mu_0 (\tilde{\sigma}_0 - \tilde{\sigma}_\infty) \sum_{p=1}^{F_D} \frac{\tilde{\gamma}_p}{\tilde{\tau}_p} \left(e_{z_{i,j,k}}^n - \frac{\chi_{z_{i,j,k,p}}^n}{\tilde{\tau}_p} \right) + \right. \\
 & \left(\frac{e_{z_{i+1,j,k}}^n - e_{z_{i,j,k}}^n}{\Delta x_i} - \frac{e_{z_{i,j,k}}^n - e_{z_{i-1,j,k}}^n}{\Delta x_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} + \\
 & \left(\frac{e_{z_{i+1,j,k}}^n - e_{z_{i,j,k}}^n}{\Delta y_j} - \frac{e_{z_{i,j,k}}^n - e_{z_{i,j-1,k}}^n}{\Delta y_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} + \\
 & \left(\frac{e_{y_{i,j,k}}^n - e_{y_{i,j-1,k}}^n}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} - \frac{e_{y_{i,j,k+1}}^n - e_{y_{i,j-1,k+1}}^n}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right) \frac{2}{\Delta z_k} \\
 & \left. \left(\frac{e_{x_{i,j,k+1}}^n - e_{x_{i-1,j,k+1}}^n}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} - \frac{e_{x_{i,j,k}}^n - e_{x_{i-1,j,k}}^n}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \frac{2}{\Delta z_k} - \mu_0 \frac{j_{z_{i,j,k}}^{n+1} - j_{z_{i,j,k}}^n}{\Delta t_n} \right]. \quad (6.51)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones 6.49, 6.50 y 6.51 permiten conocer la evolución de los campos eléctricos con efecto de PI a cada paso de tiempo los cuales, una vez calculados se sustituyen en la Ley de Faraday para simular la señal electromagnética con efecto de PI que se esperarí medir en campo como amplitudes negativas en la derivada temporal de la componente vertical del campo magnético

6.3. Cálculo del campo magnético con efecto de PI

Como se detallo en la sección 2.5, el efecto de PI en la señal electromagnética se presenta como una amplitud negativa en la componente vertical de la derivada temporal del campo magnetico. En otras palabras, se presenta como un voltaje negativo ($-\frac{\partial b_z}{\partial t}$).

Para simular el efecto de PI en la señal electromagnética tomamos la transformada inversa de Fourier de 3.43 obteniendo la expresión en tiempo:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (6.52)$$

Expresamos la ecuación anterior en sus componentes vectoriales:

$$\frac{\partial \mathbf{b}_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} \right), \quad (6.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_y(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} \right), \quad (6.54)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{b}_z(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right). \quad (6.55)$$

Empleamos la aproximación en diferencias adelantadas 6.4 para obtener la versión discreta de las componentes en la Ley de Faraday, e implementando el método de Euler adelantado, es posible obtener expresiones en diferencias para el campo magnético en tiempo futuro.

$$b_{x_{i,j,k}}^{n+1} = b_{x_{i,j,k}}^n + \Delta t_n \left(\frac{e_{z_{i,j+1,k}}^n - e_{z_{i,j,k}}^n}{\Delta y_j} - \frac{e_{y_{i,j,k+1}}^n - e_{y_{i,j,k}}^n}{\Delta z_k} \right), \quad (6.56)$$

$$b_{y_{i,j,k}}^{n+1} = b_{y_{i,j,k}}^n + \Delta t_n \left(\frac{e_{x_{i,j,k+1}}^n - e_{x_{i,j,k}}^n}{\Delta z_k} - \frac{e_{z_{i+1,j,k}}^n - e_{z_{i,j,k}}^n}{\Delta x_i} \right), \quad (6.57)$$

y

$$b_{z_{i,j,k}}^{n+1} = b_{z_{i,j,k}}^n + \Delta t_n \left(\frac{e_{y_{i+1,j,k}}^n - e_{y_{i,j,k}}^n}{\Delta x_i} - \frac{e_{x_{i,j+1,k}}^n - e_{x_{i,j,k}}^n}{\Delta y_j} \right). \quad (6.58)$$

Finalmente, si se sustituyen los campos eléctricos obtenidos con 6.49, 6.50 y 6.51 en las expresiones anteriores de campo magnético, se puede simular el efecto de PI en la señal electromagnética.

Capítulo 7. Discusión y Conclusiones

Es este capítulo contrastamos los resultados obtenidos y la teoría desarrollada con la convencional para el tratamiento de la PI y el modelado electromagnético. Finalmente, exponemos de manera concisa los hallazgos mas importantes de la presente investigación.

7.1. Discusión

Se comienza con los fundamentos teóricos de la propia técnica de PI hasta los aspectos de modelado que se han desarrollado haciendo especial énfasis en los resultados numéricos del modelo de permitividad propuesto.

A diferencia la técnica de PI galvánica, la PI inductiva cuenta con pocos esquemas de modelado e inversión, lo que se contrapone con el uso de sistemas aerotransportados capaces de cubrir grandes áreas en poco tiempo.

En la mayoría de los casos, los datos de PI por contacto galvánico se adquieren al mismo tiempo que los datos de resistividad y se procesan con los mismo esquemas para corriente directa. Sin embargo, esta tarea para adquisiciones electromagnéticas requiere del modelo de impedancia empleado por Pelton *et al.* (1978) para la detección de la señal de PI que además de incluir la cargabilidad agrega tres parámetros más lo que incrementa la complejidad del método.

En este trabajo se formuló la solución empleando la permitividad eléctrica como la propiedad intrínseca del medio. Esta aproximación en geofísica ha sido discutida solamente por Davydycheva *et al.* (2006). La formulación resultante es novedosa y en todos los aspectos parece equivalente.

El fundamento teórico propuesto en este trabajo, fue describir el fenómeno de PI como un mecanismo puramente capacitivo en función de la permitividad eléctrica compleja a bajas frecuencias denominado función dieléctrica. Este término en esencia es una permitividad absoluta compleja dependiente de la frecuencia y explica como un die-

léctrico pobre deja de comportarse como tal y comienza a ser un conductor (Chen *et al.*, 2005).

La primera ecuación que se planteó (campo magnético en medios heterogéneos), implicó no solo la convolución entre la velocidad de polarización y la derivada temporal del campo magnético sino además, una serie de convoluciones debidas al producto cruz en la frecuencia tras aplicar la identidad vectorial 3.53, como resultado se obtuvo una ecuación de complejidad alta cuya propuesta se desechó principalmente por las convoluciones del producto cruz que deberían calcularse a cada paso de tiempo lo que resultaría en un esquema de modelado poco eficiente.

La segunda opción (campo magnético en medios homogéneos), simplificó en gran medida la que se obtuvo para medios heterogéneos pero con la limitante de que la función dieléctrica es constante en espacio. Aunque prometedora, no cumplía con los objetivos planteados por la cual se rechazó de igual forma esta propuesta.

La tercera propuesta empleando campo eléctrico resultó ser la más prometedora pues permitió considerar sin mayor complicación medios heterogéneos. La convolución en esta ecuación (3.77) se debe propiamente al tratamiento de la PI y no al desarrollo matemático como en las propuestas anteriores. Esta ecuación fue el principal resultado de la presente investigación y posee los siguientes beneficios.

1. Brinda un mejor acomplamiento de los campo electromagnéticos en el aire por lo que es factible para aplicaciones en sistemas aerotransportados.
2. La respuesta de polarización del medio puede ser causada no solo por las corrientes de conducción sino también por las de desplazamiento ampliando la aplicabilidad del modelo ante escenarios geológicos complejos.

Estas corrientes de desplazamiento se originarían en medios con baja conductividad eléctrica y alta permitividad como los suelos congelados y en general, sobre materiales secos (p. 141 Ward y Hohmann, 1988; Davydycheva *et al.*, 2006). La formulación hecha podría ser capaz de simular ambos fenómenos de PI por efecto de diferentes mecanismos de propagación, difusivos y de onda respectivamente.

La convolución que surge al considerar medios con propiedades eléctricas dispersi-

vas, contiene los parámetros de polarización del medio (σ_0 , m , τ y c). Su tratamiento implicó severos problemas que de no haberse tomado en cuenta hubiesen implicado almacenar la serie de tiempo completa del medio, situación que en términos computacionales resulta imposible de tratar. Las variables de memoria que se implementaron como método de solución a la integral de convolución permitieron transformarla en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en tiempo 6.45, 6.46 y 6.47 las cuales se implementaron en diferencias finitas para incorporarlas en el esquema evolutivo de los campos eléctricos.

La función dieléctrica en el dominio del tiempo (3.41) no permitía por si misma definir una variable de memoria debido a que el mecanismo de relajación no se basa en solo un término de la expresión, en otras palabras, no es un mecanismo de relajación lineal. Resolvimos esta problemática introduciendo desde la frecuencia un término que definimos como velocidad de polarización (3.87) y a partir del cual, se establece la variable de memoria.

La integral de convolución entre la velocidad de polarización y la derivada temporal del campo eléctrico se resolvió de forma analítica dando lugar a cinco integrales de convolución (regla distributiva) de las cuales, cuatro se resolvieron empleando las propiedades de las funciones generalizadas (3.92) y una más se utilizó para definir la variable de memoria. El desarrollo matemático es similar a la que se implementa para el estudio de la atenuación sísmica (Carcione *et al.*, 1988a; Moczo *et al.*, 2007) y resultó eficiente para el tratamiento de la PI en el dominio del tiempo.

Como primera opción para agregar el efecto de PI a la formulación se empleó el conocido Modelo Cole-Cole (MCC). Este modelo es el que mejor explica el fenómeno de polarización que ocurre en la tierra pero con la limitante en la complejidad de la expresión matemática que lo define. Se realizó varios intentos para incorporar el MCC a la formulación planteada en 3.77 y se encontró que no es posible obtener una expresión en el dominio del tiempo calculada directamente por transformada inversa de Fourier debido principalmente al exponente de la frecuencia.

Se empleó la expansión de la Función Debye 3.4 que es una simplificación del MCC al considerar $c = 1$. La función Debye presenta grandes ventajas como la simplicidad de la expresión así como la versatilidad para incorporarlo en un desarrollo matemático.

En la expansión, se sustituye el exponente c del MCC por un factor de peso γ_p y el tiempo de relajación τ por un tiempo de relajación ponderado τ_p .

Los parámetros desconocidos γ_p y τ_p que se requieren calcular dan lugar a un problema inverso combinado, del cual únicamente se resolvió el caso lineal (γ_p). El esquema desarrollado para estimar las ponderaciones y calcular la respuesta en tiempo del modelo propuesto (3.41), requiere de trabajo y algoritmos de inversión robustos para reducir las anomalías presentes en altas frecuencias de la parte imaginaria de la conductividad y reducir el número de Funciones Debye en la sumatoria de 3.4.

El resultado de la respuesta de la función dieléctrica en el dominio del tiempo descrita por 3.41 se presenta como un decaimiento similar al de la conductividad con la diferencia de que éste no decae a cero sino que se vuelve estacionario en cierto valor tras un corto periodo de tiempo debido a la naturaleza misma de la expresión en 3.29. Este decaimiento se asocia al restablecimiento en la alineación de los dipolos eléctricos del medio al cesar la incidencia de un campo eléctrico. Esta respuesta se asocia a lo que se esperaría medir en zonas de baja conductividad donde no solo la corriente de conducción penetra el medio, sino también, la corriente de desplazamiento (Davydycheva *et al.*, 2006). Éste comportamiento junto con el de la conductividad corrobora que la formulación desarrollada puede ser capaz de simular el efecto de PI que se esperaría medir en medios conductores o aislantes (resistivos).

Se registró una relación entre la conductividad en el dominio del tiempo $\sigma(t)$ y la velocidad de polarización $\dot{\epsilon}(t)$. Ambas representan la respuesta intrínseca del circuito equivalente al MCC. El exponente de la frecuencia c influye fuertemente la reversión de signo de ambos parámetros lo que podría estar asociado al tipo de propagación predominante en el medio (dieléctrico o conductor). Esto requiere de más investigación y la optimización del código de inversión desarrollado para la expansión de la función Debye.

La reversión de signo que se presenta entre las curvas de conductividad $\sigma(t)$, y velocidad de polarización $\dot{\epsilon}(t)$, podría estar relacionada con el tipo de propagación de la onda electromagnética como lo menciona Davydycheva *et al.* (2006). Esta reversión está fuertemente influenciada por el valor que tome el exponente de la frecuencia en el MCC. Se requiere de mayor investigación en este ámbito para verificar la relación

que existe entre estos parámetros.

El desarrollo teórico para la implementación de 6.18 se desarrolló como es convencional en el tratamiento numérico de los campos electromagnéticos, se optó por un esquema explícito evolutivo en tiempo. Las variables de memoria se discretizaron empleando diferencias finitas adelantadas y se estableció, junto con los campos eléctricos un sistema de ecuaciones acopladas en tiempo.

7.2. Conclusiones

Con los resultados obtenidos se concluye lo siguiente:

- La técnica de PI describe un fenómeno electroquímico del mismo nombre, y se basa en un modelo de compleja explicación denominado doble capa eléctrica. Entre sus postulados, considera la permitividad eléctrica constante lo que justifica su empleo como posible explicación del fenómeno mismo.
- Describir el efecto de PI desde el punto de vista dieléctrico usando la permitividad absoluta, permite considerar no solo mecanismos de difusión, sino también de propagación donde este último se produce en zonas de alta resistividad con efecto de PI.
- Se ha empleado la función dieléctrica como término dispersivo para agregar el efecto de PI a las ecuaciones de Maxwell. Esta expresión se define como una permitividad absoluta compleja que varía en función de la frecuencia. Explica el comportamiento de un medio dieléctrico pobre o conductor.
- La formulación matemática desarrollada en este trabajo se centró en proponer una ecuación diferencial fundamental que simulara el efecto de Polarización Inducida en la señal electromagnética en el dominio del tiempo.
- El modelo o Función Debye es un caso particular del MCC cuando $c = 1$ y no es equivalente al emplear $\gamma = 1$ en la expansión de la Función Debye pues representaría solo el valor de una ponderación y no a la Función Debye. Los parámetros γ y c son distintos y no deben confundirse.

- El concepto de variables de memoria permitió tratar la convolución en tiempo de forma eficiente, pudiendo reconstruir la historia de tiempo completa del medio empleando solo dos niveles de tiempo. Esto se traduce en una reducción significativa en el tiempo de computo.
- La ecuación diferencial de Helmholtz que se obtuvo de la formulación desarrollada, brinda mayor acoplamiento de los campos eléctricos y magnéticos en el aire. Además, permite considerar no solo los efectos de PI debido a las corrientes de conducción sino también a los producidos por las corrientes de desplazamiento a bajas frecuencias.
- La mayor contribución del presente trabajo ha sido explicar el efecto de polarización inducida que se presente en la tierra, a través de la formulación y desarrollo teórico resumido en una ecuación diferencial parcial en el dominio del tiempo. Lo anterior partiendo del supuesto que los campos electromagnéticos se difunden en un medio que puede comportarse como un dieléctrico con pérdidas, en el cual la parte imaginaria de la permitividad está ampliamente relacionada con la conductividad del medio.

Literatura citada

- admin (2007). Metodos eléctricos de prospección:polarización inducida. <http://catedras.fcaglp.unlp.edu.ar>. Retrieved May 22, 2018, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata.
- Alik Ismail-Zadeh, P. T. (2010). *Computational Methods for Geodynamics*. CAMBRIDGE UNIV PR.
- Ballesteros, A. (2011). Propagación de ondas electromagnéticas en medios materiales dispersivos. Bloque 2. Ondas electromagnéticas en medios materiales.
- Blakely, R. J. (1996). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press.
- Cai, H. y Zhdanov, M. S. (2017). Finite-element time-domain electromagnetic modeling with induced-polarization effects using adaptive Padé series. En: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017*, aug. Society of Exploration Geophysicists.
- Carcione, J. M. (1990). Wave propagation in anisotropic linear viscoelastic media: theory and simulated wavefields. *Geophysical Journal International*, **101**(3): 739–750.
- Carcione, J. M. (1993). Seismic modeling in viscoelastic media. *GEOPHYSICS*, **58**(1): 110–120.
- Carcione, J. M., Kosloff, D., y Kosloff, R. (1988a). Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium. *Geophysical Journal International*, **93**(2): 393–401.
- Carcione, J. M., Kosloff, D., y Kosloff, R. (1988b). Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophysical Journal International*, **95**(3): 597–611.
- Chen, L. F., Ong, C. K., Neo, C. P., Varadan, V. V., y Varadan, V. K. (2005). Electromagnetic Properties of Materials. En: *Microwave Electronics*. John Wiley & Sons, Ltd, pp. 1–36.
- Cole, K. S. y Cole, R. H. (1941). Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, **9**(4): 341–351.
- Commer, M., Petrov, P. V., y Newman, G. A. (2017). FDTD modelling of induced polarization phenomena in transient electromagnetics. *Geophysical Journal International*, **209**(1): 387–405.
- Commons, W. (2018). File:electric double-layer (bmd model) nt.png — wikimedia commons, the free media repository. [Online; accessed 4-December-2018].
- Davidson, D. W. y Cole, R. H. (1951). Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol, and n-Propanol. *The Journal of Chemical Physics*, **19**(12): 1484–1490.
- Davydycheva, S., Rykhlin, N., y Legeido, P. (2006). Electrical-prospecting method for hydrocarbon search using the induced-polarization effect. *GEOPHYSICS*, **71**(4): 179–189.
- Day, S. M. y Minster, J. B. (1984). Numerical simulation of attenuated wavefields using a Padé approximant method. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **78**(1): 105–118.

- Dentith, M. y Mudge, S. T. (2014). *Geophysics for the Mineral Exploration Geoscientist*. Cambridge University Press.
- Diethelm, K. y Freed, A. D. (2006). An efficient algorithm for the evaluation of convolution integrals. *Computers and Mathematics with Applications*, **51**(1): 51–72.
- Drude, P. (1900). Zur Elektronentheorie der Metalle. *Annalen der Physik*, **306**(3): 566–613.
- Farquharson, C. G. (2009). Numerical Modelling for Geophysical Electromagnetic Methods. A short course given at the Dublin Institute of Advanced Studies.
- Fiandaca, G., Auken, E., Christiansen, A. V., y Gazoty, A. (2012). Time-domain-induced polarization: Full-decay forward modeling and 1D laterally constrained inversion of Cole-Cole parameters. *GEOPHYSICS*, **77**(3): 213–225.
- Flis, M. F., Newman, G. A., y Hohmann, G. W. (1989). Induced-polarization effects in time-domain electromagnetic measurements. *GEOPHYSICS*, **54**(4): 514–523.
- Flores, C. (2017). Curso de métodos eléctricos en geofísica. Aspectos teóricos de Polarización Inducida.
- Flores, C. y Peralta-Ortega, S. A. (2009). Induced polarization with in-loop transient electromagnetic soundings: A case study of mineral discrimination at El Arco porphyry copper, Mexico. *Journal of Applied Geophysics*, **68**(3): 423–436.
- Gallardo, L. A. (2017). Curso de simulación de ondas y flujo en geomateriales: Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales elípticas y parabólicas. Lecturas de modelación matemática.
- Geotech (2018). Homepage Services. <http://geotech.ca/services/>. Accessed: 2018-11-12.
- Grahame, D. C. (1947). The Electrical Double Layer and the Theory of Electrocapillarity. *Chemical Reviews*, **41**(3): 441–501. PMID: 18895519.
- Havriliak, S. y Negami, S. (1967). A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. *Polymer*, **8**: 161 – 210.
- Heaney, M. (2003). Electrical Conductivity and Resistivity. Unknown.
- Hestholm, S. (2002). Composite memory variable velocity-stress viscoelastic modeling. *Geophysical Journal International*, **148**(1): 153–162.
- Hill, R. y Dissado, L. (1985). Debye and non-Debye relaxation. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **18**(19): 3829.
- Hirt, C., Featherstone, W. E., y Claessens, S. J. (2011). On the Accurate Numerical Evaluation of Geodetic Convolution Integrals. *Journal of Geodesy*, **85**(8): 519–538.
- James (2013). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, 2/ed.*. Pearson Education.
- Jaysaval, P., Shantsev, D. V., y de la Kethulle de Ryhove, S. (2015). Efficient 3-D controlled-source electromagnetic modelling using an exponential finite-difference method. *Geophysical Journal International*, **203**(3): 1541–1574.

- Kelley, D. F. y Luebbers, R. J. (1996). Piecewise linear recursive convolution for dispersive media using FDTD. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, **44**(6): 792–797.
- Kelley, D. F. y Luebbers, R. J. (2003). Debye function expansions of empirical models of complex permittivity for use in FDTD solutions. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, **4**: 372–375.
- Kelley, D. F., Destan, T. J., y Luebbers, R. J. (2007). Debye function expansions of complex permittivity using a hybrid particle swarm-least squares optimization approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **55**(7): 1999–2005.
- Kenkel, J., Hördt, A., y Kemna, A. (2012). 2D modelling of induced polarization data with anisotropic complex conductivities. *Near Surface Geophysics*, **10**(1957).
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley.
- Kunz, K. S. y Luebbers, R. J. (1993). *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. CRC Press.
- Kurtis D. Fink, J. H. M. (1999). *Métodos numéricos con Matlab*. Prentice Hall.
- Kwan, K., Prikhodko, A., Legault, J., Plastow, G., Xie, J., y Fisk, K. (2015a). Airborne Inductive Induced Polarization Chargeability Mapping of VTEM Data. *ASEG Extended Abstracts*, **2015**.
- Kwan, K., Prikhodko, A., Legault, J. M., y Goncharov, E. (2015b). Airborne Inductively Induced Polarization effects in and their removal from the VTEM data from Mirny, Russia. En: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015*, aug. Society of Exploration Geophysicists.
- Landau, L. D. (2006). *Electrodinámica de los Medios Continuos (Volume 8) (Spanish Edition)*. Reverté.
- Lee, T. (1981). Transient electromagnetic response of a polarizable ground. *GEOPHYSICS*, **46**(7): 1037–1041.
- Leppin, M. (1992). Electromagnetic modeling of 3-D sources over 2-D inhomogeneities in the time domain. *Geophysics*, **57**(8): 994–1003.
- Liu, W., Lin, P., Lv, Q., Chen, R., Yao, H., Shen, R., y Cai, H. (2017). FORWARD MODELING OF INDUCED POLARIZATION IN AN ANISOTROPIC CONDUCTIVE SUBSURFACE. En: *Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems 2017*, mar. Society of Exploration Geophysicists and Environment and Engineering Geophysical Society.
- Luebbers, R. (1992). FDTD for Nth order Dispersive media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **40**(11): 5.
- Luebbers, R., Hunsberger, F. P., Kunz, K. S., Standler, R. B., y Schneider, M. (1990). A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, **32**(3): 222–227.
- Luo, Y. y Zhang, G. (1997). *Theory and Application of Spectral Induced Polarization (Geophysical Monograph Series)*. Soc of Exploration Geophysicists.

- López-Esquer, M., Gaspar-Armenta, J., y Manzanares-Martinez, J. (2006). Aplicación del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo a la simulación del campo electromagnético usando Matlab. *Revista mexicana de física Asica E*, **52**: 58 – 64.
- Maier, S. A. (2007). *Plasmonics: Fundamentals and Applications*. Springer.
- Mao, D., Revil, A., y Hinton, J. (2016). Induced polarization response of porous media with metallic particles — Part 4: Detection of metallic and nonmetallic targets in time-domain induced polarization tomography. *GEOPHYSICS*, **81**(4): D359–D375.
- Marchant, D., Haber, E., y Oldenburg, D. W. (2014). Three-dimensional modeling of IP effects in time-domain electromagnetic data. *GEOPHYSICS*, **79**(6).
- Marchant, D., Kang, S., McMillian, M., y Haber, E. (2018). Modelling IP effects in airborne time domain electromagnetics. *ASEG Extended Abstracts*, **2018**(1): 1.
- Milsom, J. (2003). *Field Geophysics (Geological Field Guide)*. Wiley.
- Moczo, P. y Kristek, J. (2005). On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation. *Geophysical Research Letters*, **32**(1): 1–5.
- Moczo, P., Robertsson, J. O. A., y Eisner, L. (2007). The Finite-Difference Time-Domain Method for Modeling of Seismic Wave Propagation. En: *Advances in Wave Propagation in Heterogenous Earth*. Elsevier, pp. 421–516.
- Moczo, P., Kristek, J., y Gális, M. (2014). *The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions: Waves and Ruptures*. Cambridge University Press.
- Nabighian, M. N. (1988). *Electromagnetic Methods Vol.1: Theory (Investigations in Geophysics Series No. 3)*, Vol. 1 de 3. Society Of Exploration Geophysicists.
- Nakamura, S. (1998). *Metodos Numericos Aplicados Con Software (Spanish Edition)*. Prentice Hall.
- Newman, G. A. y Alumbaugh, D. L. (1995). Frequency-domain modelling of airborne electromagnetic responses using staggered finite differences1. *Geophysical Prospecting*, **43**(8): 1021–1042.
- Nigmatullin, R. R. y Ryabov, Y. E. (1997). Cole-Davidson dielectric relaxation as a self-similar relaxation process. *Physics of the Solid State*, **39**(1): 87–90.
- Nordsiek, S. y Weller, A. (2008). A new approach to fitting induced-polarization spectra. *GEOPHYSICS*, **73**(6): F235–F245.
- Oneil, P. V. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería / Advanced Engineering Mathematics (Spanish Edition)*. Cengage Learning Latin America.
- Orellana, E. (1991). *Prospeccion Geoelectrica Campos Variables (Spanish Edition)*. Paraninfo.
- Orfanidis, S. J. (2016). Maxwell's Equations. En: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, pp. 1–36.
- Oristaglio, M. L. y Hohmann, G. W. (1984). Diffusion of electromagnetic fields into a two-dimensional earth: A finite-difference approach. *Geophysics*, **49**(7): 870–894.

- Palacky, G. J. y West, G. F. (1991). 10. Airborne Electromagnetic Methods. En: M. N. Nabighian (ed.), *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, Vol. 2. Society of Exploration Geophysicists, pp. 811–880.
- Pelton, W. H., Ward, S. H., Hallof, P. G., Sill, W. R., y Nelson, P. H. (1978). Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP. *Geophysics*, **43**(3): 588–609.
- Roden, J. A. y Gedney, S. D. (2000). Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. *Microwave and Optical Technology Letters*, **27**(5): 334–339.
- Sadiku, M. N. O. (2000). *Numerical Techniques in Electromagnetics, Second Edition*. Taylor & Francis.
- Sandrolini, L., Reggiani, U., y Artioli, M. (2011). Electric and Magnetic Characterization of Materials. En: A. Akdagli (ed.), *Behaviour of Electromagnetic Waves in Different Media and Structures*. InTech, Rijeka, capítulo 1.
- Schlumberguer (2009). Levantamientos electromagnéticos someros. En: Schlumberguer (ed.), *Oilfield Review*, Vol. 23. Schlumberguer, 23to edición, resreport 5, pp. 40–59.
- Schlumberguer (2011). Irradiación de rocas. En: Schlumberguer (ed.), *Oilfield Review*, Vol. 23. Schlumberguer, 23to edición, resreport 5, pp. 40–59.
- Seigel, H. O. (1959). Mathematical formulation and type curves for induced polarization. *Geophysics*, **24**(3): 547–565.
- Serway (2016). *FISICA ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO / 9 ED.*. Cengage Learning.
- Seybold, J. S. (2005). *Introduction to RF Propagation*. Wiley-Interscience.
- Siegel, D. (1986). The Origin of the Displacement Current. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, **17**(1): 99–146.
- Siushansian, R. y Lovetri, J. (1997). Efficient evaluation of convolution integrals arising in FDTD formulations of electromagnetic dispersive media. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **11**(1): 101–117.
- Slater, L. D. y Lesmes, D. (2002). IP interpretation in environmental investigations. *GEOPHYSICS*, **67**(1): 77–88.
- Streich, R. (2009). 3D finite-difference frequency-domain modeling of controlled-source electromagnetic data: Direct solution and optimization for high accuracy. *GEOPHYSICS*, **74**(5): F95–F105.
- Tarasov, A. y Titov, K. (2007). Relaxation time distribution from time domain induced polarization measurements. *Geophysical Journal International*, **170**(1): 31–43.
- Ustra, A., Mendonça, C. A., Ntarlagiannis, D., y Slater, L. D. (2016). Relaxation time distribution obtained from a Debye decomposition of spectral induced polarization data. *GEOPHYSICS*, **81**(2): E129–E138.
- Wang, T. y Hohmann, G. W. (1993). A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling. *Geophysics*, **58**(6): 797–809.

- Ward, S. H. y Hohmann, G. W. (1988). 4. Electromagnetic Theory for Geophysical Applications. En: M. N. Nabighian (ed.), *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, Vol. 1. Society of Exploration Geophysicists, pp. 130–311.
- Weller, A., Seichter, M., y Kampke, A. (1996). Induced-polarization modelling using complex electrical conductivities. *Geophysical Journal International*, **127**(2): 387–398.
- Wikipedia contributors (2018). Kenneth Stewart Cole — Wikipedia, The Free Encyclopedia. [Online; accessed 16-July-2018].
- Xu, T. y McMechan, G. A. (1995). Composite memory variables for viscoelastic synthetic seismograms. *Geophysical Journal International*, **121**(2): 634–639.
- Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **14**(3): 302–307.
- Zhdanov, M. S. (1988). *Integral Transforms In Geophysics*. Springer Berlin Heidelberg.
- Zhdanov, M. S. (2017). *Foundations Of Geophysical Electromagnetic Theory And Methods*. Elsevier S&T.

