
CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA



DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE ÓPTICA

**ESPARCIMIENTO DE LUZ EN UN MEDIO
AMPLIFICADOR**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

Héctor Igor Pérez Aguilar

Ensenada, Baja California. Agosto de 2003

TESIS DEFENDIDA POR
Héctor Igor Pérez Aguilar
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez
Director del Comité

Dra. Diana Tentori Santacruz
Miembro del Comité

Dr. Raúl Rangel Rojo
Miembro del Comité

Dr. Kevin Arthur O'Donnell
Miembro del Comité

Dr. J. Apolinar Reynoso Hernández
Miembro del Comité

Dr. Anatolii Khomenko
Jefe del Departamento de Óptica

Dr. Luis Alberto Delgado Argote
Director de Estudios de Posgrado

19 de Junio de 2003

RESUMEN de la tesis de **HÉCTOR IGOR PÉREZ AGUILAR**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de **MAESTRO EN CIENCIAS en ÓPTICA** con especialidad en **ÓPTICA FÍSICA**.

Ensenada, Baja California. Agosto de 2003.

ESPARCIMIENTO DE LUZ EN UN MEDIO AMPLIFICADOR

Resumen aprobado por:

DR. EUGENIO RAFAEL MÉNDEZ MÉNDEZ

Director de Tesis

Se presenta un estudio numérico del esparcimiento de luz en un medio amplificador unidimensional. El estudio está basado en dos métodos. Un método basado en la multiplicación de matrices y una técnica numérica llamada de *diferencias finitas en el dominio del tiempo*. Con el primer método se estudia la propagación de la luz a través de un sistema lineal aleatorio. Se presentan resultados para sistemas con dos, tres y varios centros esparcidores, considerando superposiciones coherentes e incoherentes. También se estudia la propagación de una onda armónica a través de un medio amplificador rodeado de dos centros esparcidores. El medio amplificador se modela de manera sencilla, a través del signo de la parte imaginaria de la constante dieléctrica. Los resultados que se obtienen son sorprendentes, ya que bajo ciertas circunstancias, la intensidad de la onda se atenúa en vez de amplificarse. Debido a que en la literatura se han expresado dudas sobre la validez de esta técnica para estudiar sistemas con amplificación, implementamos el segundo método, que está basado en la solución numérica directa de las ecuaciones de Maxwell y permite incorporar las no linealidades del sistema. De los resultados obtenidos con este método concluimos que la atenuación de la intensidad transmitida encontrada con el método matricial es incorrecta y que, para resolver correctamente el problema, es necesario considerar la saturación de la ganancia en el medio amplificador.

Palabras clave: esparcimiento de luz, localización, retroesparcimiento reforzado, medio amplificador, láser aleatorio.

ABSTRACT of the thesis presented by **HÉCTOR IGOR PÉREZ AGUILAR**, as a partial requirement to obtain the **MASTER IN SCIENCES** degree in **OPTICS** with speciality in **PHYSICAL OPTICS**.

Ensenada, Baja California. August 2003.

LIGHT SCATTERING IN AN AMPLIFYING MEDIUM

Abstract approved by:

DR. EUGENIO RAFAEL MÉNDEZ MÉNDEZ

Thesis advisor

We present a numerical study of light scattering in a one-dimensional amplifying medium. The study is based on two methods; a matrix-multiplication method, and a numerical technique called the finite-difference time-domain method. With the first method we study the propagation of light through a random linear system. Results for systems with two, three, and several scattering centers are presented considering both, incoherent and coherent superpositions. We also study the propagation of a harmonic wave through an amplifying medium surrounded by two scattering centers. The amplifying medium is modeled in simple manner, through the sign of the imaginary part of the complex dielectric constant. The results are rather surprising since, under certain circumstances, the intensity of the wave is attenuated, instead of amplified. Since the validity of this technique for the study of amplifying media has been questioned in the literature, we implement the second method, that is based on the direct numerical solution of Maxwell's equations, and allows to include the nonlinearities of the system. From the results obtained with this method we conclude that the attenuation of the transmitted intensity found with the matrix multiplication method is incorrect, and that in order to solve the problem, is necessary to take into account the saturation of the gain in the amplifying medium.

Keywords: light scattering, localization, enhanced backscattering, amplifying medium, random laser.

*A una mujer muy especial
que me hizo sentir el amor*

Agradecimientos

Al Dr. Eugenio Méndez, quien me ayudó incondicionalmente en la realización de la presente tesis, además de su apoyo y comprensión cuando más lo necesitaba. Mi más sincero agradecimiento por dedicarme su valioso tiempo y paciencia.

A los Doctores Diana Tentori, Raúl Rangel, Kevin O'Donnell y Apolinar Reynoso por sus valiosas opiniones que me permitieron terminar este trabajo.

A mis amigos y compañeros de generación Luis Ríos, Hiram Ramírez y Victor Valles por compartir las aventuras durante la trayectoria de estudio.

A los Doctores Victor Ruíz, Georgina Navarrete, María Orozco, Alejandro Ruíz, Efrén García y Juan Tapia por su gran compañía y ayuda que me brindaron.

A todos los investigadores, estudiantes y personal del departamento de óptica por su enseñanza académica.

A mi familia y amigos por la motivación que me brindaron durante la formación educativa.

Al CONACyT y proyecto de investigación por su apoyo económico.

Contenido

| | |
|---|------------|
| Resumen | i |
| Abstract | ii |
| Agradecimientos | iv |
| Lista de Figuras | vii |
| Lista de Programas | x |
| I INTRODUCCIÓN | 1 |
| I.1 Estructura de la tesis | 7 |
| II PROPAGACIÓN EN UN MEDIO UNIDIMENSIONAL LINEAL | 8 |
| II.1 Descripción Fenomenológica | 8 |
| II.2 Descripción del Método Matricial | 9 |
| II.2.1 Preliminares | 9 |
| II.2.2 Propagación a través de un medio homogéneo | 11 |
| II.2.3 Propagación a través de una interfase | 13 |
| II.2.4 Propagación a través de una película | 15 |
| II.3 El caso de Dos Centros Esparcidos | 17 |
| II.3.1 La fórmula incoherente | 17 |
| II.3.2 Promedio sobre realizaciones | 19 |
| II.3.3 Promedio sobre longitudes de onda | 22 |
| II.4 El caso de Tres Centros Esparcidos | 23 |
| II.4.1 La fórmula incoherente | 23 |
| II.4.2 Promedio sobre realizaciones | 25 |
| II.4.3 Promedio sobre longitudes de onda | 28 |
| II.5 Efectos de Localización en un Medio Aleatorio Unidimensional | 29 |
| II.6 Medios Amplificadores | 34 |
| II.6.1 Cavidad con dos centros esparcidos | 37 |

| | |
|--|-----------|
| III MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO | 43 |
| III.1 Ecuaciones de Maxwell | 44 |
| III.2 Algoritmo de Yee para Medios Lineales | 45 |
| III.2.1 Aproximaciones de diferencias finitas | 46 |
| III.3 Análisis Numérico del Algoritmo FDTD | 50 |
| III.3.1 Dispersión | 51 |
| III.3.2 Estabilidad | 53 |
| III.4 Condiciones de truncamiento | 54 |
| III.4.1 Propagación de un pulso gaussiano | 55 |
| III.4.2 Propagación de una onda monocromática | 56 |
| III.5 El Caso de Dos Centros Esparcidores en un Medio 1D | 58 |
| III.5.1 Resultados | 59 |
| III.6 Método FDTD para Medios con Amplificación y Saturación | 62 |
| III.6.1 Modelo de un medio con saturación de la ganancia | 63 |
| III.6.2 Descripción del Método FDTD | 65 |
| III.6.3 Resultados | 69 |
| IV RESUMEN Y COMENTARIOS FINALES | 71 |
| A Programas para simular la propagación de una onda a través de un medio | 75 |
| A.1 Propagación de una onda a través de un medio con dos centros esparcidores | 75 |
| A.2 Propagación de una onda a través de un medio con tres centros esparcidores | 77 |
| A.3 Propagación de una onda a través de un sistema de multicapas | 80 |
| B Programas para simular la propagación de una onda a través de medios lineales y no lineales | 82 |
| B.1 Propagación de una onda a través de una película dieléctrica por el método matricial | 82 |
| B.2 Propagación de una onda a través de un medio lineal por el método FDTD | 84 |
| B.3 Propagación de una onda a través de un medio no lineal por el método FDTD | 87 |
| Bibliografía | 92 |

Lista de Figuras

| Figura | Página |
|---|--------|
| 1 El logaritmo del coeficiente de transmitancia, $\ln T$, en función de la longitud de separación, L , de un Fabry-Perot con ganancia. La constante dieléctrica del medio interior es $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = 2.0 - 0.01i$ y el medio exterior es aire ($\varepsilon = 1$). Las placas que forman el Fabry-Perot tienen una reflectividad del 10%. Los datos son tomados de [Jiang <i>et al.</i> , 1999]. | 5 |
| 2 Propagación de las amplitudes del campo electromagnético a través de un medio homogéneo. | 12 |
| 3 Propagación de las amplitudes del campo electromagnético a través de una película de espesor d e índice de refracción n_2 | 15 |
| 4 Caso incoherente. Propagación de la onda a través de un medio con dos centros esparcidores con reflectividades R_1 y R_2 , y transmitancias T_1 y T_2 , respectivamente. | 18 |
| 5 Propagación de un haz a través de dos centros esparcidores. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción del medio variando la separación promedio, $L_{20} = 10 \mu\text{m}$, entre las dos interfases en el intervalo $L_{20} - 4 \mu\text{m} < L_2 < L_{20} + 4 \mu\text{m}$ | 21 |
| 6 Propagación de un haz a través de dos centros esparcidores. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción variando la longitud de onda central, $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$, en el intervalo $\lambda_0 - 0.5 \mu\text{m} < \lambda < \lambda_0 + 0.5 \mu\text{m}$ | 22 |
| 7 Caso incoherente. Propagación de la onda a través de un medio con tres centros esparcidores con reflectividades R_1 , R_2 y R_3 , y transmitancias T_1 , T_2 , y T_3 , respectivamente. | 23 |
| 8 Propagación de un haz a través de tres centros esparcidores. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción del medio variando las separaciones promedio, $L_{10} = 10 \mu\text{m}$ y $L_{20} = 14 \mu\text{m}$, entre las tres placas en los intervalos $L_{10} - 4 \mu\text{m} < L_1 < L_{20} + 4 \mu\text{m}$. y $L_{20} - 4 \mu\text{m} < L_2 < L_{20} + 4 \mu\text{m}$ | 28 |

| Figura | Página | |
|--------|---|----|
| 9 | Propagación de un haz a través de tres centros esparcidos. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción variando la longitud de onda central, $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$, en el intervalo $\lambda_0 - 0.5 \mu\text{m} < \lambda < \lambda_0 + 0.5 \mu\text{m}$ | 29 |
| 10 | Esquema de retroesparcimiento reforzado en un medio desordenado con elementos esparcidos. Las dos ondas que se propagan en direcciones opuestas adquieren la misma fase y por lo tanto interfieren constructivamente. | 30 |
| 11 | Intensidad de la luz esparcida, desde un medio con desorden, como función del ángulo de la dirección de retroesparcimiento. El reforzamiento corresponde al valor cero sobre el eje x . El resultado experimental es tomado de [Wiersma <i>et al.</i> , 1995b]. | 31 |
| 12 | Propagación de una onda plana a través de un sistema de multicapas aleatorio. M_L es la matriz de transferencia que describe la propagación de la onda a través del medio con índice de refracción n_2 y separación L aleatoria y M_a corresponde a la matriz del medio con índice de refracción n_1 | 32 |
| 13 | Propagación de una onda plana a través de un sistema aleatorio de 20 placas transparentes. (a) y (b) Reflectancia y transmitancia para una sola realización y sus promedios coherente e incoherente al variar la separación entre las placas. (c) El logaritmo del promedio de la transmitancia para la propagación incoherente y coherente comparado con el logaritmo de la transmitancia para una sola realización y, (d) el promedio del logaritmo de la transmitancia para el caso coherente comparado con el logaritmo de la transmitancia para una realización. | 33 |
| 14 | Propagación de una onda plana a través de un sistema aleatorio de 20 placas con un medio amplificador ($\varepsilon'' = -0.01$). El logaritmo de la transmitancia para una realización y su promedio coherente. | 35 |
| 15 | Ilustración de la propagación de una onda plana de la forma $E_0 e^{i\omega t}$ a través de un medio entre dos interfases reflectoras. | 38 |
| 16 | Propagación de una onda plana a través de una película reflectora, $R = 80\%$, con un medio (a) transparente ($\varepsilon'' = 0$) y con (b) absorción ($\varepsilon'' = 0.01$). | 40 |

| Figura | Página | |
|--------|--|----|
| 17 | Propagación de una onda plana a través de una película con un medio amplificador de (a) ganancia pequeña ($\varepsilon'' = -0.005$) y de ganancia grande ($\varepsilon'' = -0.1$) variando la reflectancia de las placas (b) 80%, (c) 50% y (d) 30%. | 41 |
| 18 | Esquema de los elementos del problema electromagnético unidimensional. | 46 |
| 19 | Malla utilizada en el espacio-tiempo para discretizar el campo electromagnético. | 47 |
| 20 | Propagación de un pulso mostrando la distribución del campo eléctrico, con polarización \mathbf{s} , en el espacio para varios tiempos. | 51 |
| 21 | Condiciones de frontera del campo electromagnético para la propagación de un pulso. | 56 |
| 22 | Condición de frontera para la propagación del campo electromagnético a través de dos placas separadas por una distancia de tres longitudes de onda. | 58 |
| 23 | Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos como función de su separación L para un medio transparente ($\varepsilon'' = 0.0$). Los puntos representan los resultados numéricos y la línea continua los resultados analíticos. | 60 |
| 24 | Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos como función de su separación L para un medio con absorción ($\varepsilon'' = 0.01$). | 60 |
| 25 | Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos como función de su separación L para un medio con ganancia ($\varepsilon'' = -0.01$). | 61 |
| 26 | Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos como función de su separación L para un medio con ganancia ($\varepsilon'' = -0.085$). | 61 |
| 27 | Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos como función de su separación en el intervalo $0.8 \mu\text{m} < L < 5.6 \mu\text{m}$, para un medio con ganancia ($\varepsilon'' = -0.085$) e intensidad de saturación $I_s = 6.52 \times 10^{12} \text{ erg/s cm}^2$ | 69 |

Lista de Programas

| Programa | Página |
|--|--------|
| A.1 Doscoherente.m Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con dos centros esparcidos. El promedio se obtiene bajo el número de realizaciones de los coeficientes de amplitud en función del índice de refracción del medio por el método matricial. | 75 |
| A.2 Dosincoherente.m Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con dos centros esparcidos para el caso incoherente. | 76 |
| A.3 Trescoherente.m Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con tres centros esparcidos. El promedio se obtiene bajo el número de realizaciones de los coeficientes de amplitud en función del índice de refracción del medio por el método matricial. | 77 |
| A.4 Tresincoherente.m Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con tres centros esparcidos para el caso incoherente. | 79 |
| A.5 Multiprog.m Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio para un medio transparente con respecto a la separación entre las placas para un sistema de 20 placas. Además el cálculo del promedio del logaritmo de la transmitancia para un medio transparente y con amplificación. . . | 80 |
| B.6 FPMatriz.m Cálculo de la reflectancia y transmitancia de la propagación de una onda plana a través de un Fabry-Perot por el método matricial. Se consideraron los siguientes tipos de medios cambiando el signo a la parte imaginaria de la constante dieléctrica: transparente, con absorción y con amplificación. | 82 |

| Programa | Página |
|---|--------|
| B.7 <code>OPFPL.for</code> Cálculo de la reflectancia y transmitancia de la propagación de una onda plana a través de un Fabry-Perot con un medio lineal por el método de Diferencias Finitas en el dominio del tiempo. Se consideraron los siguientes tipos de medios cambiando el signo a la parte imaginaria de la constante dieléctrica: transparente, con absorción y con amplificación. | 84 |
| B.8 <code>OPFPNL.for</code> Cálculo de la reflectancia y transmitancia de la propagación de una onda plana a través de un Fabry-Perot con un medio no lineal por el método de Diferencias Finitas en el dominio del tiempo. Se considerará el medio amplificador con saturación de la ganancia. | 87 |

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Fenómenos espectaculares, como el amanecer o la puesta de sol, producidos por la interacción de la radiación solar con la atmósfera, han despertado el interés del hombre desde tiempos inmemoriales. En este fenómeno, las moléculas que componen a la atmósfera actúan como centros esparcidores, desviando a la luz de su trayectoria original cuando ésta choca contra ellas. A este fenómeno se le conoce como “*Esparcimiento de luz*”.

El esparcimiento y la propagación de ondas en medios desordenados, ha sido objeto de una gran cantidad de estudios en las últimas décadas. Las aproximaciones clásicas para tratar el problema son la llamada aproximación de Born [Cho, 1990; Jackson, 1975], en la que la onda pasa por el medio sin perturbarse interactuando solamente con un elemento del medio esparcidor (esparcimiento sencillo), y la teoría de difusión [Ishimaru, 1978; Morse y Feshbach, 1953; John y Pang, 1996], que supone que la luz interactúa con muchos elementos del medio (esparcimiento múltiple), perdiendo de esta manera la capacidad de producir interferencia al promediar sobre un conjunto de realizaciones del medio aleatorio (esparcimiento incoherente). La primera aproximación es aplicable a situaciones en las que el medio contiene centros esparcidores “débiles” separados por distancias relativamente grandes, como es el caso de la atmósfera. La segunda aproximación se puede aplicar a medios con una densidad de esparcidores mucho más alta, como el caso de propagación de luz a través de leche o pintura blanca.

Hasta hace algunos años, las aproximaciones descritas se veían como situaciones extremas de la interacción de luz con medios aleatorios. Es decir, que la ruta que

comenzaba al introducir un pequeño desorden en el medio, terminaba con un medio desordenado denso, donde los efectos de interferencia se borraban en promedio y en el que la teoría de difusión describía bien la situación.

Sin embargo, ahora sabemos que al aumentar el desorden (incluso en el ejemplo de la leche) se pueden dar procesos de esparcimiento múltiple que producen efectos de interferencia que sobreviven (y de hecho se hacen más notorios) al promediar sobre el conjunto de realizaciones. Estos efectos se han llamado efectos coherentes o de localización [Anderson, 1958; John, 1997; Wiersma *et al.*, 1995a].

El ejemplo más palpable de estos efectos en óptica es el efecto de retroesparcimiento reforzado, que se manifiesta como un pico en la dirección de retroesparcimiento en la distribución angular de luz esparcida por el medio [Wiersma *et al.*, 1995b]. Es decir, que en la ruta descrita anteriormente del esparcimiento débil hacia el fuerte, se pasa por las siguientes etapas:

- Para un medio con poco desorden, gran parte del haz pasa por el medio sin ser perturbado (componente coherente), generándose también algo de luz difusa (componente incoherente) en otras direcciones.
- Al aumentar el desorden, desaparece eventualmente la componente coherente y solamente se tiene luz difusa.
- Si el medio aleatorio se hace más denso, aparece un pico en la dirección de retroesparcimiento como parte de la componente difusa. Es decir, como si la luz empezara a tratar de regresar hacia la fuente.

El retroesparcimiento reforzado conocido también como *localización débil* debido a efectos de interferencia constructiva. Es decir, las ondas que salen de la fuente y regresan a ella después de haberse propagado a lo largo de una misma trayectoria de

esparcimiento múltiple pero en direcciones opuestas, interfieren constructivamente al encontrarse nuevamente [van Albada *et al.*, 1987], pues los caminos ópticos recorridos son exactamente los mismos.

De manera cualitativa, podemos decir que los efectos de localización impiden la propagación de la luz en el medio, por lo que se deben reflejar en una disminución de la luz transmitida. Eventualmente, la luz que se propaga en un medio desordenado podría llegar a ser atrapada debido a efectos de esparcimiento múltiple e interferencia. Cabe resaltar el hecho de que en la mayoría de los estudios teóricos del tema se suponen medios no absorbentes, por lo que dicha atenuación es debida simplemente a las dificultades de la luz para propagarse (por interferencia destructiva) y no a absorción en el medio.

La posibilidad de observar la localización de luz en medios tridimensionales es todavía motivo de discusiones [Wiersma *et al.*, 1995b; Scheffold *et al.*, 1999]. Sin embargo, para medios aleatorios unidimensionales e infinitos siempre se tendrá localización. Es en parte debido a esto que los sistemas unidimensionales han sido campo fértil para estudios de esparcimiento múltiple. Sin embargo, las suposiciones que se hacen normalmente en los estudios teóricos del problema no resultan fácilmente realizables experimentalmente. En particular se requiere que el medio no sea absorbente y que tanto la iluminación como el medio sean invariantes en dos direcciones. Una situación equivalente se puede lograr empleando como medio de propagación fibras ópticas unimodales. A pesar de que el trabajo presentado aquí es netamente teórico, forma parte de un proyecto más completo del grupo de trabajo en el que se realiza trabajo experimental con este tipo de sistemas.

Otros aspectos que han llamado poderosamente la atención en la propagación de ondas en medios desordenados que presentan esparcimiento múltiple, son las no linealidades del sistema (generación de armónicos, por ejemplo), así como los efectos que pueda tener un aumento de la señal dentro del medio desordenado [Berger *et al.*, 1997]

y la posibilidad de obtener acción láser. Observaciones sobre sistemas aleatorios con amplificación que producen acción láser, en los que el mecanismo de retroalimentación se debe a esparcimiento múltiple, han sido objeto de estudios teóricos [Burin *et al.*, 2001] y experimentales [Wiersma y Cavaleri, 2001; Wiersma y Lagendijk, 1996; Shukri y Armstrong, 2000]. A este tipo de sistema se le conoce como *láser aleatorio*. Las emisiones tipo láser observadas en sistemas con ganancia y aleatoriedad fuerte presentan características distintas a las que se obtienen en láseres convencionales. Por ejemplo, la emisión láser de una colección de micropartículas suspendidas en una solución de colorante puede ser observada en muchas direcciones [Cao *et al.*, 1999; Lawandy *et al.*, 1994] y sus características espectrales pueden ser también variadas y fuertemente dependientes de parámetros como la temperatura [Wiersma y Cavaleri, 2001]. Los reportes experimentales de los láseres aleatorios han motivado estudios teóricos para explicar los resultados observados [John y Pang, 1996; Frolov *et al.*, 1999; Zyuzin, 1995].

Recientemente, se han reportado estudios teóricos de la propagación en medios amplificadores que presentan esparcimiento múltiple basados en una técnica en la que, para modelar la amplificación, se cambia el signo a la parte imaginaria de la constante dieléctrica [Zhang, 1995; Pradhan y Kumar, 1994; Joshi y Jayannavar, 1997]. De esta manera, al considerar una parte imaginaria negativa de la constante dieléctrica la onda se amplifica en vez de atenuarse, como se tendría en la situación más usual. Los resultados que se obtienen con esta técnica para sistemas multicapas son interesantes y controversiales, ya que se presenta cierta simetría entre los efectos de amplificación y absorción [Paasschens *et al.*, 1996; Freilikher *et al.*, 1997]. En particular, al aumentar la longitud del medio activo, inicialmente la intensidad de la radiación transmitida crece, como era de esperarse. Sin embargo, llega un momento en el que la transmitancia empieza a decrecer, como se muestra en la figura 1 para el caso de un sistema con dos centros esparcidos, que podrían representar un interferómetro Fabry-Perot que rodea

al medio amplificador.

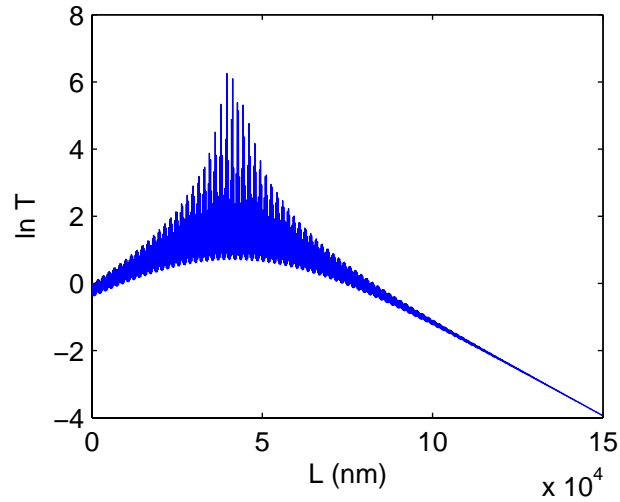


Figura 1: El logaritmo del coeficiente de transmitancia, $\ln T$, en función de la longitud de separación, L , de un Fabry-Perot con ganancia. La constante dieléctrica del medio interior es $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = 2.0 - 0.01i$ y el medio exterior es aire ($\varepsilon = 1$). Las placas que forman el Fabry-Perot tienen una reflectividad del 10%. Los datos son tomados de [Jiang *et al.*, 1999].

Sobre estos resultados se ha argumentado, por un lado, que la atenuación se debe a efectos de localización o de retroesparcimiento coherente [Paasschens *et al.*, 1996]. Por otro lado, se han criticado estas conclusiones, indicando que el origen de estos resultados paradójicos estriba en partir de ecuaciones independientes del tiempo que no toman en cuenta las no linealidades del medio [Jiang *et al.*, 1999; van Soest *et al.*, 2001]. En particular, no se toman en cuenta efectos de saturación de la ganancia que, por consideraciones físicas, deben jugar un papel importante en los resultados. El estudio de esta controversia constituye la principal motivación del trabajo que se describe en esta tesis. Los resultados que presentamos permiten comprender mejor las consecuencias y los efectos que la amplificación tiene en la propagación de luz en un medio desordenado. Como veremos en los siguientes capítulos, no es posible separar estos efectos de las no linealidades del problema.

Estudios sobre láseres aleatorios basados en ecuaciones dependientes del tiempo ya han sido reportados [Jiang y Soukoulis, 2000]. Para modelar la ganancia, estos autores utilizan el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, **FDTD**¹ [Taflove, 1995] y las ecuaciones de razón para determinar el estado poblacional en los diferentes niveles energéticos del láser [Jiang y Soukoulis, 2000]. Se han considerado tanto sistemas periódicos como aleatorios con ganancia [Jiang *et al.*, 1999; Joshi *et al.*, 2000].

La dependencia temporal del medio y la saturación de la ganancia en un medio amplificador pueden ser modeladas a través de varias técnicas. Además del método de las ecuaciones de razón [Jiang y Soukoulis, 2000], se puede considerar una constante dieléctrica dependiente de la frecuencia [Takayama y Klaus, 2002; Basinger y Brady, 1994], una susceptibilidad dieléctrica dependiente de la frecuencia [Joseph y Taflove, 1997; Hawkins y Kallman, 1994] o una conductividad eléctrica dependiente de la frecuencia [Hagness *et al.*, 1996].

En esta tesis se presenta un estudio similar al de Jiang y Soukoulis [Jiang y Soukoulis, 2000] pero, en nuestro caso, la dependencia temporal de las propiedades del medio no está basada en las ecuaciones de razón, sino en una conductividad saturable dependiente de la frecuencia. Con este método realizamos cálculos con sistemas multicapas aleatorios en una dimensión en los cuales podemos incluir amplificación e incorporar las no linealidades del medio. De los resultados se concluye que la atenuación de la intensidad transmitida obtenida con el otro método no se debe a efectos de localización reforzada, sino a una solución no física del problema.

A continuación, se describe brevemente la organización de la tesis.

¹Por sus siglas en inglés, Finite-Difference Time-Domain.

I.1 Estructura de la tesis

En el capítulo II se inicia con una descripción fenomenológica del problema a estudiar. Posteriormente, se describe un método matricial para describir la propagación de una onda en un medio unidimensional. El método está basado en la caracterización de la propagación de una onda plana electromagnética a través de medios homogéneos, interfases y películas dieléctricas por medio de matrices. Utilizando el método matricial se calculan promedios sobre realizaciones y longitudes de onda para los casos coherente e incoherente, considerando dos y tres centros esparcidos. Se generaliza después el problema a un sistema de placas distribuidas aleatoriamente para estudiar efectos de localización de luz en un medio desordenado. En la última parte del capítulo se estudia el caso de una película dieléctrica con ganancia. Los resultados ilustran de manera gráfica la motivación de este trabajo.

En el capítulo III se implementa un método numérico tipo FDTD que permite resolver problemas electromagnéticos con materiales cuyas propiedades dependen del tiempo. Se describen las bases del algoritmo y se estudia inicialmente la propagación de un pulso gaussiano y de una onda plana a través de un medio lineal. Se presentan también resultados para la propagación de una onda plana a través de un Fabry-Perot con amplificación, encontrándose discrepancias con el otro método. Se aplica también el algoritmo al estudio de la propagación de una onda plana a través de medios con amplificación y saturación, y se presentan los resultados correspondientes.

En capítulo IV se presenta las conclusiones de este trabajo, anexando dos apéndices con los programas desarrollados en fortran y matlab.

Capítulo II

PROPAGACIÓN EN UN MEDIO UNIDIMENSIONAL LINEAL

En este capítulo se presenta un análisis de la propagación de luz en un medio unidimensional, modelado como una sucesión de capas de medios homogéneos. Se inicia con una descripción fenomenológica del problema, para posteriormente describir un método matricial que nos permitirá tratar el caso de propagación en un medio lineal e independiente del tiempo para un número arbitrario de capas. Pondremos después especial atención en el caso de dos y tres centros esparcidores, haciendo un análisis de los diferentes procesos de esparcimiento y de las consecuencias de promediar sobre un conjunto de realizaciones y sobre la longitud de onda. Los resultados serán comparados con las correspondientes fórmulas incoherentes.

II.1 Descripción Fenomenológica

Al pasar la luz de un medio a otro, dependiendo de los índices de refracción involucrados, se presenta el fenómeno de la reflexión. Por ejemplo, para una interfase aire-vidrio, la potencia reflejada es de alrededor del 4% de la potencia incidente. Es por esto que en instrumentos o dispositivos que cuentan con muchas lentes y elementos ópticos se puede perder mucha luz, y es necesario recubrirlas con películas antirreflejantes. Para las personas que trabajan en óptica, es familiar la alta reflectividad que tiene un apilamiento de placas como los portaobjetos utilizados en microscopia. Dicha reflectividad resulta, además, relativamente independiente de la longitud de onda.

En la situación descrita, debido a que las placas no son perfectamente planas y

no están alineadas interferométricamente (es decir que, estrictamente, el medio no es unidimensional), el resultado se puede modelar con la fórmula incoherente que describiremos más adelante. Aunque en este caso no hay efectos de localización, la atenuación de la onda transmitida nos es familiar, a pesar de que los efectos de absorción sean despreciables.

Por otro lado, si las placas fueran perfectamente planas y paralelas, el resultado diferiría, produciéndose una reflectividad mayor debido a efectos de interferencia (aún con luz blanca). En las siguientes secciones presentaremos un tratamiento y un análisis aplicable a este tipo de situaciones.

II.2 Descripción del Método Matricial

Consideremos la propagación de una onda electromagnética a través de interfases, medios homogéneos y películas de estos medios. La idea es relacionar los coeficientes de reflexión y transmisión que se tiene para incidencia por ambos lados del sistema con las propiedades de éste.

El método matricial, se construye a partir de la descripción de la propagación de una onda plana a través de un medio homogéneo y de la propagación a través de una película delgada.

II.2.1 Preliminares

En el sistema CGS, la ley de Ampere y la ley de Faraday para un medio isotrópico, homogéneo y no conductor tienen la forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{H} son el campo eléctrico y magnético y, \mathbf{D} y \mathbf{B} son la densidad de flujo eléctrico y magnético, respectivamente. Para ondas armónicas planas que tienen una dependencia temporal del tipo $e^{-i\omega t}$, las ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir como

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mu\mathbf{H}, \quad (4)$$

donde ε es la permitividad eléctrica, μ la permeabilidad magnética y ω la frecuencia angular de la onda armónica que se propaga a través de un medio lineal.

Para el problema que se desea estudiar, se considera la propagación de la onda plana en dirección del eje z a través de un medio invariante en el plano $x-y$. De las ecuaciones (3) y (4) se obtienen dos juegos de ecuaciones desacopladas. El primero, es el caso de la polarización \mathbf{p} :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{i\omega\mu}{c}H_y, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{i\omega\varepsilon}{c}E_x \quad (6)$$

y el segundo, el caso de la polarización \mathbf{s} :

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{i\omega\mu}{c}H_x, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{i\omega\varepsilon}{c}E_y. \quad (8)$$

En ambos casos, las componentes del campo H_y (polarización \mathbf{p}) y E_y (polarización \mathbf{s}), que son suficientes para conocer las otras dos componentes del campo electromagnético, satisfacen la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k_c^2 U(z) = 0, \quad (9)$$

donde $k_c = n_c \frac{\omega}{c}$ es la constante de propagación compleja, $n_c = \sqrt{\varepsilon_c \mu}$ es el índice de refracción complejo y U representa las componentes del campo electromagnético para cada tipo de polarización.

La solución general a la ecuación de Helmholtz unidimensional es de la forma

$$U(z) = A^{(+)} \exp(ik_c z) + A^{(-)} \exp(-ik_c z), \quad (10)$$

donde $A^{(+)}$ y $A^{(-)}$ son las amplitudes para ambas direcciones.

Entonces, para la polarización \mathbf{p} , las componentes del campo electromagnético se pueden escribir de la forma

$$H_y(z) = A_p^{(+)} \exp(ik_c z) + A_p^{(-)} \exp(-ik_c z), \quad (11)$$

$$E_x(z) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} [A_p^{(+)} \exp(ik_c z) - A_p^{(-)} \exp(-ik_c z)] \quad (12)$$

y para la polarización \mathbf{s}

$$E_y(z) = A_s^{(+)} \exp(ik_c z) + A_s^{(-)} \exp(-ik_c z), \quad (13)$$

$$H_x(z) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\mu}} [A_s^{(+)} \exp(ik_c z) - A_s^{(-)} \exp(-ik_c z)]. \quad (14)$$

En notación compacta, las componentes del campo electromagnético para ambas polarizaciones, (11) - (14), se pueden escribir como

$$U(z) = A^{(+)} \exp(ik_c z) + A^{(-)} \exp(-ik_c z), \quad (15)$$

$$V(z) = K [A^{(+)} \exp(ik_c z) - A^{(-)} \exp(-ik_c z)], \quad (16)$$

donde la constante K depende de la polarización

$$K^{(p)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \text{y} \quad K^{(s)} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (17)$$

II.2.2 Propagación a través de un medio homogéneo

A continuación, se considera la propagación de la onda plana a través de un medio homogéneo con índice de refracción complejo n_c , como se muestra en la figura 2.

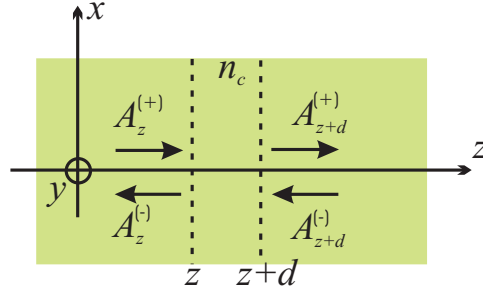


Figura 2: Propagación de las amplitudes del campo electromagnético a través de un medio homogéneo.

Sobre el plano z , las componentes del campo electromagnético, se pueden escribir como

$$U(z) = A_z^{(+)} \exp(ik_c z) + A_z^{(-)} \exp(-ik_c z), \quad (18)$$

$$V(z) = K [A_z^{(+)} \exp(ik_c z) - A_z^{(-)} \exp(-ik_c z)], \quad (19)$$

y similarmente, sobre el plano $z + d$

$$U(z + d) = A_{z+d}^{(+)} \exp(ik_c z) + A_{z+d}^{(-)} \exp(-ik_c z), \quad (20)$$

$$V(z + d) = K A_{z+d}^{(+)} \exp(ik_c z) - K A_{z+d}^{(-)} \exp(-ik_c z), \quad (21)$$

donde

$$A_{z+d}^{(+)} = A_z^{(+)} \exp(ik_c d), \quad (22)$$

$$A_{z+d}^{(-)} = A_z^{(-)} \exp(-ik_c d). \quad (23)$$

Se puede ver que las funciones son de la misma forma excepto por los coeficientes $A^{(+)}$ y $A^{(-)}$, obteniéndose de esta forma la relación

$$\begin{pmatrix} A_{z+d}^{(+)} \\ A_{z+d}^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(ik_c d) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_c d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_z^{(+)} \\ A_z^{(-)} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, la matriz que relaciona las amplitudes del campo en los planos z y $z + d$ está dada por

$$\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} \exp(ik_c d) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_c d) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

II.2.3 Propagación a través de una interfase

Ahora, se considera el caso de una interfase que separa a dos medios con índice de refracción n_l y n_r , localizada en el plano z_i . Las componentes tangenciales de los campos son continuos a través de la interfase. Entonces, las amplitudes del campo del lado izquierdo (l) y derecho (r) de la interfase, son

$$\begin{aligned} U_l(z_i) &= A_l^{(+)} \exp(ik_l z_i) + A_l^{(-)} \exp(-ik_l z_i), \\ V_l(z_i) &= K_l \left[A_l^{(+)} \exp(ik_l z_i) - A_l^{(-)} \exp(-ik_l z_i) \right], \\ U_r(z_i) &= A_r^{(+)} \exp(ik_r z_i) + A_r^{(-)} \exp(-ik_r z_i), \\ V_r(z_i) &= K_r \left[A_r^{(+)} \exp(ik_r z_i) - A_r^{(-)} \exp(-ik_r z_i) \right]. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad consideramos $z_i = 0$, reduciendo las ecuaciones anteriores

$$A_r^{(+)} = \left(\frac{K_r + K_l}{2K_r} \right) A_l^{(+)} + \left(\frac{K_r - K_l}{2K_r} \right) A_l^{(-)}, \quad (25)$$

$$A_r^{(-)} = \left(\frac{K_r - K_l}{2K_r} \right) A_l^{(+)} + \left(\frac{K_r + K_l}{2K_r} \right) A_l^{(-)}, \quad (26)$$

o, en forma matricial ,

$$\begin{pmatrix} A_r^{(+)} \\ A_r^{(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2K_r} \begin{pmatrix} K_r + K_l & K_r - K_l \\ K_r - K_l & K_r + K_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l^{(+)} \\ A_l^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

donde la constante $K_{l,r}$ depende de la polarización y está dada por

$$K_{l,r}^{(p)} = \sqrt{\frac{\mu_{l,r}}{\varepsilon_{l,r}}} \quad \text{y} \quad K_{l,r}^{(s)} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_{l,r}}{\mu_{l,r}}}. \quad (28)$$

Polarización p

Primero consideremos el caso de la polarización **p**. Sustituyendo los valores correspondientes de la ecuación (28) en la ecuación (27), se obtiene que

$$\begin{pmatrix} A_r^{(+)} \\ A_r^{(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\frac{\mu_l \varepsilon_r}{\mu_r \varepsilon_l}} & 1 - \sqrt{\frac{\mu_l \varepsilon_r}{\mu_r \varepsilon_l}} \\ 1 - \sqrt{\frac{\mu_l \varepsilon_r}{\mu_r \varepsilon_l}} & 1 + \sqrt{\frac{\mu_l \varepsilon_r}{\mu_r \varepsilon_l}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l^{(+)} \\ A_l^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Como

$$\sqrt{\frac{\mu_l \varepsilon_r}{\mu_r \varepsilon_l}} = \frac{\mu_l}{\mu_r} \sqrt{\frac{\mu_r \varepsilon_r}{\mu_l \varepsilon_l}} = \frac{\mu_l n_r}{\mu_r n_l},$$

la ecuación (29), para un medio no magnético ($\mu \approx 1$), se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} A_r^{(+)} \\ A_r^{(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \nu_{rl} & 1 - \nu_{rl} \\ 1 - \nu_{rl} & 1 + \nu_{rl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l^{(+)} \\ A_l^{(-)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

donde $\nu_{rl} = n_r/n_l$. Por consiguiente, la matriz que relaciona el campo de la derecha con el de la izquierda para la polarización **p** es

$$\mathbf{M}_{rl}^{(p)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \nu_{rl} & 1 - \nu_{rl} \\ 1 - \nu_{rl} & 1 + \nu_{rl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

con lo que las amplitudes están relacionadas de la forma

$$\begin{aligned} A_r^{(+)} &= m_{11}A_l^{(+)} + m_{12}A_l^{(-)}, \\ A_r^{(-)} &= m_{21}A_l^{(+)} + m_{22}A_l^{(-)}. \end{aligned}$$

Por definición, el coeficiente de reflexión para incidencia normal por la izquierda y sin propagación del campo por la derecha ($A_r^{(-)} = 0$) es:

$$r_p = \frac{A_l^{(-)}}{A_l^{(+)}} = -\frac{m_{21}}{m_{22}} = -\frac{1 - \nu_{rl}}{1 + \nu_{rl}} = \frac{n_r - n_l}{n_r + n_l}. \quad (32)$$

Similarmente, el coeficiente de transmisión está dado por

$$t_p = \frac{A_r^{(+)}}{A_l^{(+)}} = \frac{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}{m_{22}} = \frac{2\nu_{rl}}{1 + \nu_{rl}} = \frac{2n_r}{n_r + n_l}. \quad (33)$$

Polarización **s**

Para el caso de la polarización **s**, utilizando el valor correspondiente de la ecuación (28) en la ecuación (27), se obtiene la relación de las amplitudes del campo derecho en función de las amplitudes del lado izquierdo

$$\begin{pmatrix} A_r^{(+)} \\ A_r^{(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \nu_{lr} & 1 - \nu_{lr} \\ 1 - \nu_{lr} & 1 + \nu_{lr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l^{(+)} \\ A_l^{(-)} \end{pmatrix} \quad (34)$$

donde $\nu_{lr} = n_l/n_r$. En este caso, los coeficientes de reflexión y transmisión son de la forma:

$$r_s = \frac{A_l^{(-)}}{A_l^{(+)}} = -\frac{m_{21}}{m_{22}} = -\frac{1 - \nu_{lr}}{1 + \nu_{lr}} = -\frac{n_r - n_l}{n_r + n_l}, \quad (35)$$

$$t_s = \frac{A_r^{(+)}}{A_l^{(+)}} = \frac{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}{m_{22}} = \frac{2\nu_{lr}}{1 + \nu_{lr}} = \frac{2n_l}{n_r + n_l}. \quad (36)$$

II.2.4 Propagación a través de una película

Ahora se considera una película formada por un medio de índice de refracción n_2 y espesor d , rodeado por dos medios de índice de refracción n_1 y n_3 , respectivamente, como se muestra en la figura 3. Los coeficientes de reflexión y transmisión de la propagación de una onda electromagnética a través de la película, se obtienen a partir de las expresiones (32) y (33) para la polarización **p** y de las expresiones (35) y (36) para la polarización **s**, que representan las matrices de transferencia respectivas.

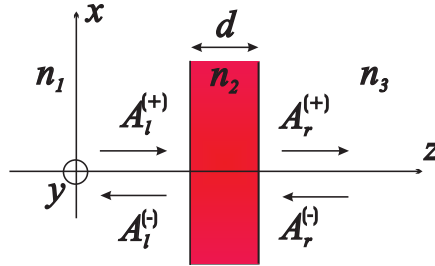


Figura 3: Propagación de las amplitudes del campo electromagnético a través de una película de espesor d e índice de refracción n_2 .

Polarización **p**

Para el caso de la polarización **p**, las amplitudes del campo están relacionadas por

$$\begin{pmatrix} A_r^{(+)} \\ A_r^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{123} \begin{pmatrix} A_l^{(+)} \\ A_l^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

donde la matriz de transferencia a través de los tres medios, \mathbf{M}_{123} , está formada por la matriz del medio de espesor d , \mathbf{M}_d , y por las matrices de ambas interfases, \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_3

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{123} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_d \mathbf{M}_3 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \nu_{21} & 1 - \nu_{21} \\ 1 - \nu_{21} & 1 + \nu_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(ik_c d) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_c d) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \nu_{32} & 1 - \nu_{32} \\ 1 - \nu_{32} & 1 + \nu_{32} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (38)$$

Por consiguiente, de la ecuación (38), el coeficiente de reflexión de todo el sistema es

$$r = -\frac{m_{21}}{m_{22}} = \frac{r_{32} + r_{21} \exp(i2k_c d)}{1 + r_{21} r_{32} \exp(i2k_c d)}, \quad (39)$$

donde

$$r_{21} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad \text{y} \quad r_{32} = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}$$

son los coeficientes de reflexión para cada interfase.

Por otro lado, el coeficiente de transmisión de todo el sistema es

$$t = \frac{m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}}{m_{22}} = \frac{t_{21} t_{32} \exp(ik_c d)}{1 + r_{21} r_{32} \exp(i2k_c d)}, \quad (40)$$

donde

$$t_{21} = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} \quad \text{y} \quad t_{32} = \frac{2n_3}{n_3 + n_2}$$

son los coeficientes de transmisión para cada interfase.

Polarización **s**

Similarmente, para el caso de la polarización **s**, se obtienen los coeficientes de reflexión y transmisión de todo el sistema

$$r = -\frac{m_{21}}{m_{22}} = \frac{r_{23} + r_{12} \exp(i2k_c d)}{1 + r_{12} r_{23} \exp(i2k_c d)}, \quad (41)$$

$$t = \frac{m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}}{m_{22}} = \frac{t_{12} t_{23} \exp(ik_c d)}{1 + r_{12} r_{23} \exp(i2k_c d)}, \quad (42)$$

donde

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \quad t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{y} \quad t_{23} = \frac{2n_2}{n_2 + n_3}$$

son los coeficientes de reflexión y transmisión de cada interfase, respectivamente.

En forma general, se ha encontrado que la matriz de transferencia para una película rodeada por un sólo tipo de medio, tiene la forma

$$\mathbf{M}_{123} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{r^*}{t^*} \\ \frac{r}{t} & \frac{1}{t^*} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

donde r^* y t^* son los coeficientes de reflexión y transmisión complejos. De la ecuación (43), se tiene que su determinante es

$$\Delta = \frac{1 - R}{T} = 1,$$

para el caso de un sistema sin pérdidas.

II.3 El caso de Dos Centros Esparcidores

En esta sección estudiamos la propagación de la onda, a través de un medio con dos centros esparcidores. En los casos en que los efectos de interferencia desaparecen después de promediar, podemos tratar el problema en términos de la intensidad, en vez de la amplitud del campo. Esta situación de incoherencia se asume comúnmente en tratamientos de propagación de ondas en medios inhomogéneos, como por ejemplo en la teoría de transferencia radiativa o en la teoría de difusión. Es ilustrativo considerar esta situación, por lo que iniciamos con este caso.

II.3.1 La fórmula incoherente

Estudiamos la propagación de una onda de intensidad I_0 , a través de dos interfases planas y paralelas actuando como dos centros esparcidores. Sea el medio homogéneo

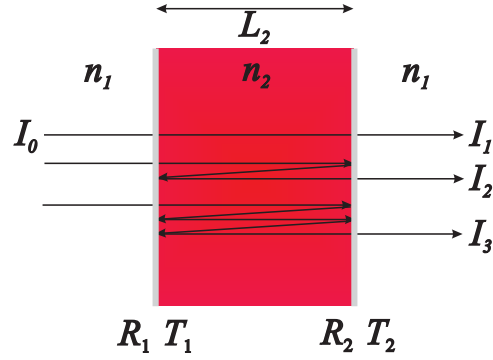


Figura 4: Caso incoherente. Propagación de la onda a través de un medio con dos centros esparcidos con reflectividades R_1 y R_2 , y transmitancias T_1 y T_2 , respectivamente.

de índice de refracción n_2 formado por las dos interfases de reflectividades R_1 y R_2 , y transmitancias T_1 y T_2 , separadas a una distancia L_2 (ver figura 4).

Como se muestra en la figura 4, si la intensidad de la onda transmitida se puede escribir como una suma de las intensidades debidas a los diferentes procesos de esparcimiento se tiene que

$$\begin{aligned} I &= I_{t1} + I_{t2} + I_{t3} + \dots \\ &= I_0 [T_1 T_2 + T_1 T_2 R_1 R_2 + T_1 T_2 R_1^2 R_2^2 + \dots] . \end{aligned}$$

Por consiguiente, la transmitancia total del sistema es

$$\begin{aligned} T &= \frac{I}{I_0} = T_1 T_2 [1 + R_1 R_2 + R_1^2 R_2^2 + \dots] \\ &= T_1 T_2 \sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2} . \end{aligned} \quad (44)$$

De igual forma, de la figura 4, la suma de las intensidades de las ondas reflejadas es

$$\begin{aligned} I &= I_{r1} + I_{r2} + I_{r3} + \dots \\ &= I_0 [R_1 + T_1 R_2 T_1 + T_1 R_2 R_1 R_2 T_1 + T_1 R_2 R_1^2 R_2^2 T_1 + \dots] , \end{aligned}$$

por consiguiente, la reflectancia total del sistema es

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{I}{I_0} = R_1 + T_1^2 R_2 [1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots] \\
 &= R_1 + T_1^2 R_2 \sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n = R_1 + \frac{T_1^2 R_2}{1 - R_1 R_2} \\
 &= \frac{R_1 + R_2 - 2R_1 R_2}{1 - R_1 R_2}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Los resultados (44) y (45) contrastan con las fórmulas coherentes (para la amplitud del campo) encontradas en la sección anterior [fórmulas (39) y (40)].

A continuación, consideramos el promedio de los coeficientes de reflexión y transmisión a través de una película basados en la fórmula coherente.

II.3.2 Promedio sobre realizaciones

Transmitancia

Para el caso coherente, el coeficiente de transmisión para un sistema de dos interfases [ecuación (40)] tiene la forma

$$t_{12} = t_1 t_2 \exp(ik_2 L_2) [1 - r_1 r_2 \exp(i2k_2 L_2) + r_1^2 r_2^2 \exp(i4k_2 L_2) - \dots], \tag{46}$$

donde k_2 es un número de onda (que suponemos es real) para el medio de índice de refracción n_2 , situado entre las dos interfases separadas a una distancia L_2 , y r_1 , r_2 , t_1 y t_2 corresponden a los coeficientes de reflexión y transmisión de cada interfase, respectivamente, para incidencia por la izquierda.

Por consiguiente, la transmitancia es

$$\begin{aligned}
 T_{12} &= T_1 T_2 [1 - r_1 r_2 \exp(i2k_2 L_2) + r_1^2 r_2^2 \exp(i4k_2 L_2) - \dots] \times \\
 &\quad [1 - (r_1 r_2)^* \exp(-i2k_2 L_2) + (r_1^2 r_2^2)^* \exp(-i4k_2 L_2) - \dots].
 \end{aligned} \tag{47}$$

Construyendo un conjunto estadístico (ensamble) en el que se varía la separación L_2 aleatoriamente, de tal manera que la fase $\varphi = k_2 L_2$ resultante está uniformemente

distribuida en el intervalo $(-\pi, \pi)$, los términos cruzados promedian a cero y por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle T_{12} \rangle_{L_2} &= T_1 T_2 [1 + R_1 R_2 + R_1^2 R_2^2 + \dots] \\ &= \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2} = \frac{1}{1 + \rho_1 + \rho_2},\end{aligned}\quad (48)$$

donde $\rho_1 = T_1^{-1} - 1$ y $\rho_2 = T_2^{-1} - 1$.

Podemos ver que la ecuación (48) coincide con la fórmula incoherente (44).

Reflectancia

De igual forma expandiendo el coeficiente de reflexión (39) para el sistema de dos interfases

$$\begin{aligned}r_{12} &= [r_2 + r_1 \exp(ik_2 L_2)] [1 - r_1 r_2 \exp(i2k_2 L_2) \\ &\quad + r_1^2 r_2^2 \exp(i4k_2 L_2) - \dots],\end{aligned}\quad (49)$$

se obtiene el promedio de la reflectancia variando aleatoriamente L_2

$$\begin{aligned}\langle R_{12} \rangle_{L_2} &= [r_2 + r_1 \exp(ik_2 L_2)] [1 - r_1 r_2 \exp(i2k_2 L_2) \\ &\quad + r_1^2 r_2^2 \exp(i4k_2 L_2) - \dots] \times [r_2^* + r_1^* \exp(-ik_2 L_2)] \\ &\quad \times [1 - (r_1 r_2)^* \exp(-i2k_2 L_2) + (r_1^2 r_2^2)^* \exp(-i4k_2 L_2) - \dots] \\ &= (R_2 + R_1 - 2R_1 R_2) [1 + R_1 R_2 + R_1^2 R_2^2 + \dots] \\ &= \frac{R_1 + R_2 - 2R_1 R_2}{1 - R_1 R_2}.\end{aligned}\quad (50)$$

Podemos ver que la ecuación (50) coincide con la fórmula incoherente (45).

Como ilustración del comportamiento de la propagación de un haz, a través del sistema con dos centros esparcidores, se calculan con una simulación tipo Montecarlo, la transmitancia y reflectancia promedio con la fórmula coherente y se compara con los resultados de las fórmulas incoherentes (44) y (45). Los resultados se muestran en la figura 5 (ver los programas A.1 y A.2).

El promedio de la reflectancia y transmitancia se obtuvo a partir de los coeficientes de reflexión (39) y transmisión (40) formados por la matriz del sistema para una película dieléctrica. Para los cálculos se considera luz con una longitud de onda $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ y dos interfases separadas por una distancia promedio $L_{2_0} = 10 \mu\text{m}$. Se considera el medio exterior con índice de refracción $n_1 = 1$. Se forma entonces un conjunto de realizaciones, variando aleatoriamente la separación entre las placas en el intervalo $L_{2_0} - 4 \mu\text{m} < L_2 < L_{2_0} + 4 \mu\text{m}$.

En la figura 5 se muestran la reflectancia y transmitancia promedio como función del índice de refracción n_2 del medio entre las interfases, recordando que el medio externo es el aire.

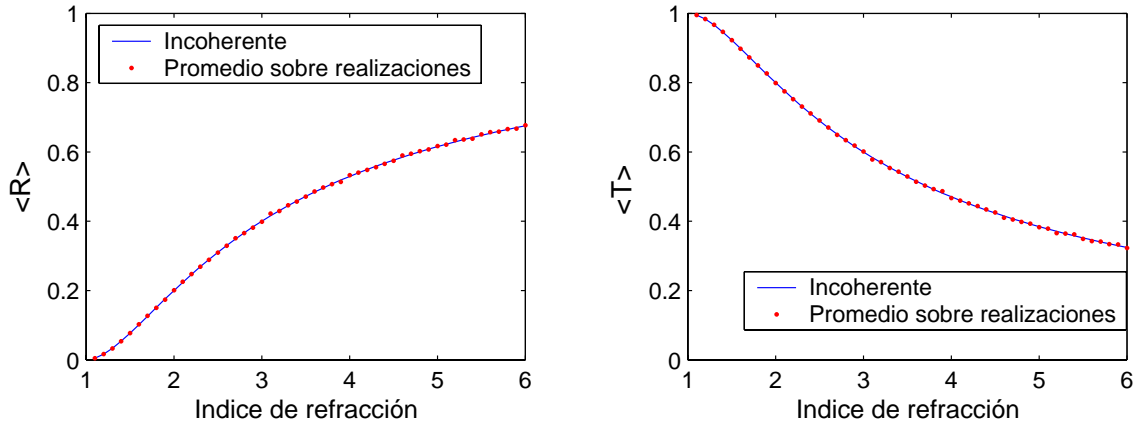


Figura 5: Propagación de un haz a través de dos centros esparcidos. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción del medio variando la separación promedio, $L_{2_0} = 10 \mu\text{m}$, entre las dos interfases en el intervalo $L_{2_0} - 4 \mu\text{m} < L_2 < L_{2_0} + 4 \mu\text{m}$.

Las gráficas de la figura 5 muestran que la fórmula incoherente coincide con los resultados de los promedios calculados con el método matricial.

II.3.3 Promedio sobre longitudes de onda

Ahora se desea construir un ensamble manteniendo una separación fija entre las interfases, pero variando la longitud de onda del haz incidente sobre un intervalo relativamente grande, de manera que la fase $\phi = \frac{2\pi}{\lambda_2} n_2 L_2$ esté uniformemente distribuida sobre todo el intervalo elemental $(-\pi, \pi)$. Con argumentos similares a los empleados en la sección anterior, se obtienen los mismos resultados para la reflectancia (48) y transmitancia (50) promedio cuando se varía la separación entre las interfases.

Con el método matricial, se hace el promedio de la reflectancia y transmitancia a partir de los coeficientes de reflexión (39) y transmisión (40), variando aleatoriamente la longitud de onda λ del haz que se propaga a través de las dos interfases separadas por una distancia fija, $L = 16 \mu\text{m}$. La longitud de onda central es $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ y la variación se hace dentro del intervalo $\lambda_0 - 0.5 \mu\text{m} < \lambda < \lambda_0 + 0.5 \mu\text{m}$.

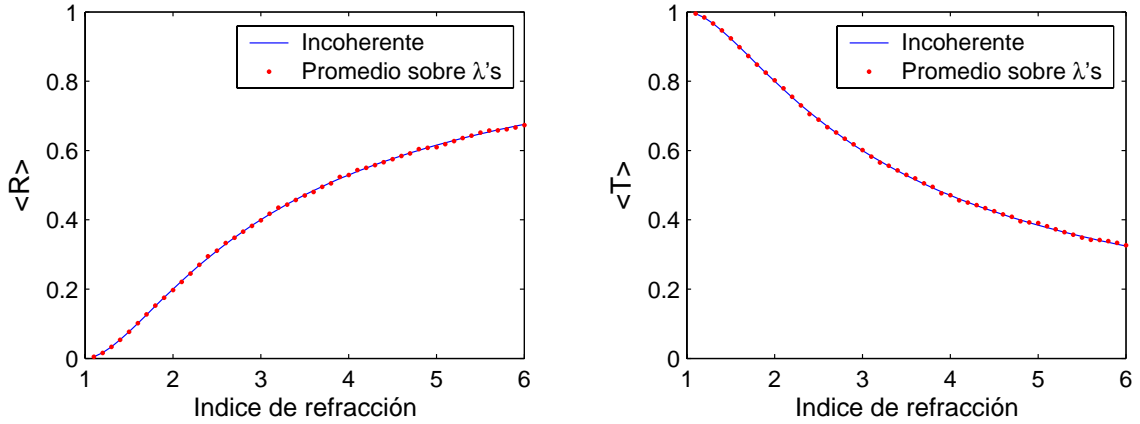


Figura 6: Propagación de un haz a través de dos centros esparcidos. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción variando la longitud de onda central, $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$, en el intervalo $\lambda_0 - 0.5 \mu\text{m} < \lambda < \lambda_0 + 0.5 \mu\text{m}$.

En la figura 6, se muestra el comportamiento del promedio de la reflectancia y la transmitancia en función del índice de refracción n_2 . Se observa una equivalencia entre la fórmula incoherente, los promedios de ensamble y los promedios en longitud de onda.

II.4 El caso de Tres Centros Esparcidores

Consideremos ahora el caso de la propagación de una onda electromagnética a través de tres centros esparcidores separados por distancias L_2 y L_3 , respectivamente. Cada centro esparcidor es una película dieléctrica con índice de refracción n_p y un espesor optimizado para incrementar su reflectividad ($d = \lambda_0/4n_p$), como se muestra en la figura 7. Como en el caso anterior consideramos primero el caso incoherente.

II.4.1 La fórmula incoherente

Se considera entonces la propagación de una onda de intensidad I_0 , a través de un medio homogéneo dividido por tres centros esparcidores de reflectividades R_1 , R_2 y R_3 , y transmitancias T_1 , T_2 y T_3 , respectivamente. Entre el primer y segundo centro esparcidor el medio tiene un índice de refracción n_2 y entre el segundo y tercer centro esparcidor el índice de refracción del medio es n_3 . Se considera un medio exterior con índice de refracción $n_1 = 1.0$.

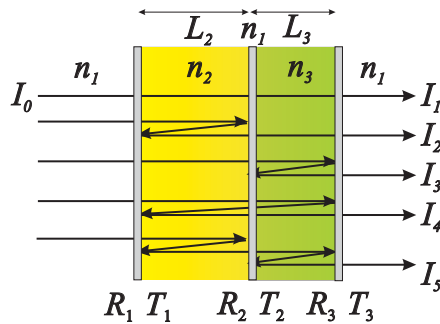


Figura 7: Caso incoherente. Propagación de la onda a través de un medio con tres centros esparcidores con reflectividades R_1 , R_2 y R_3 , y transmitancias T_1 , T_2 , y T_3 , respectivamente.

Con referencia a la figura 7, vemos que la suma de las intensidades de las ondas

transmitidas se puede representar por la serie

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots \\ &= I_0 T_1 T_2 T_3 [1 + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 - 2R_1 R_2 R_3 + 2R_1 R_2^2 R_3 + \dots]. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la transmitancia total del sistema es

$$\begin{aligned} T &= \frac{I}{I_0} = T_1 T_2 T_3 [1 + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 - 2R_1 R_2 R_3 + 2R_1 R_2^2 R_3 + \dots] \\ &= T_1 T_2 T_3 \sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 - 2R_1 R_2 R_3)^n \\ &= \frac{T_1 T_2 T_3}{1 - R_1 R_2 - R_1 R_3 - R_2 R_3 + 2R_1 R_2 R_3}. \end{aligned} \quad (51)$$

A continuación, consideramos los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud del campo, para posteriormente proceder a calcular los promedios correspondientes.

Para tres centros esparcidos, de forma similar a la ecuación (39), el coeficiente de reflexión correspondiente es

$$r_{123} = \frac{r_3 + r_{12} \exp(i2k_3 L_3)}{1 + r_{12} r_3 \exp(i2k_3 L_3)}, \quad (52)$$

donde r_{12} es el coeficiente de reflexión del sistema de las dos primeras placas (dado por la ecuación (39)), r_3 es el coeficiente de reflexión del tercer centro esparcido, $k_3 = k_0 n_3$, con n_3 el índice de refracción del tercer medio y L_3 es la separación entre la segunda y tercera placa.

Similarmente, el coeficiente de transmisión correspondiente a los tres centros esparcidos es

$$t_{123} = \frac{t_{12} t_3 \exp(ik_3 L_3)}{1 + r_{12} r_3 \exp(i2k_3 L_3)}, \quad (53)$$

donde t_{12} es el coeficiente de transmisión del sistema de la primera y segunda placa [ecuación (40)] y t_3 es el coeficiente de transmisión de la tercera placa.

II.4.2 Promedio sobre realizaciones

Transmitancia

Primero se analiza el valor de la transmitancia. Desarrollando en serie la ecuación (53), se tiene que

$$t_{123} = t_{12}t_3 \exp(ik_3L_3) [1 - r_{12}r_3 \exp(i2k_3L_3) + r_{12}^2r_3^2 \exp(i4k_3L_3) - \dots]. \quad (54)$$

Para la intensidad transmitida, se tiene que

$$T_{123} = T_{12}T_3 [1 - r_{12}r_3 \exp(i2k_3L_3) + r_{12}^2r_3^2 \exp(i4k_3L_3) - \dots] \times [1 - (r_{12}r_3)^* \exp(-i2k_3L_3) + (r_{12}^2r_3^2)^* \exp(-i4k_3L_3) - \dots]. \quad (55)$$

Para obtener el promedio de la transmitancia, primero fijamos el sistema 1-2 variando la distancia L_3 . Entonces

$$\langle T_{123} \rangle_{L_3} = T_{12}T_3 [1 + R_{12}R_3 + R_{12}^2R_3^2 + \dots] = \frac{T_{12}T_3}{1 - R_{12}R_3}, \quad (56)$$

donde las reflectancias R_{12} y transmitancias T_{12} corresponden al sistema formado por las dos primeras placas y, R_3 y T_3 son de la tercera placa.

Promediando ahora sobre la distancia L_2 , encontramos que

$$\begin{aligned} \langle T_{123} \rangle_{L_3, L_2} &= \left\langle \frac{T_{12}T_3}{1 - R_{12}R_3} \right\rangle_{L_2} = \frac{T_3}{1 - R_3} \left\langle \frac{T_{12}}{1 + \frac{R_3}{T_3}T_{12}} \right\rangle_{L_2} \\ &= \frac{T_3}{1 - R_3} \left\langle T_{12} \left[1 - \frac{R_3}{T_3}T_{12} + \left(\frac{R_3}{T_3}T_{12} \right)^2 - \dots \right] \right\rangle_{L_2}, \end{aligned} \quad (57)$$

donde se consideró la relación $R_{12} + T_{12} = 1$, válida para medios no absorbentes.

En general, sabemos que los promedios estadísticos $\langle T_{12}^m \rangle_{L_2}$ y $\langle T_{12} \rangle_{L_2}^m$ no son iguales [Goodman, 1985]. Sin embargo, consideremos lo que ocurre si se cumple la igualdad.

Bajo esta suposición, de la ecuación (57) encontramos que

$$\begin{aligned}\langle T_{123} \rangle_{L_3, L_2} &= \frac{T_3}{1 - R_3} \langle T_{12} \rangle_{L_2} \left[1 - \frac{R_3}{T_3} \langle T_{12} \rangle_{L_2} + \left(\frac{R_3}{T_3} \right)^2 \langle T_{12} \rangle_{L_2}^2 - \dots \right] \\ &= \frac{T_3 \langle T_{12} \rangle_{L_2}}{1 - R_3 (1 - \langle T_{12} \rangle_{L_2})}.\end{aligned}\quad (58)$$

Sustituyendo la ecuación (48) en (58) y expandiendo el denominador encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{T_3 \langle T_{12} \rangle_{L_2}}{1 - R_3 (1 - \langle T_{12} \rangle_{L_2})} &= \frac{T_1 T_2 T_3}{1 - R_1 R_2 - R_1 R_3 - R_2 R_3 + 2R_1 R_2 R_3} \\ &= T_1 T_2 T_3 [1 + (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - 2R_1 R_2 R_3) \\ &\quad + (R_1^2 R_2^2 + R_1^2 R_3^2 + R_2^2 R_3^2 - 4R_1^2 R_2^2 R_3^2 + 2R_1 R_2^2 R_3 \\ &\quad + 2R_1^2 R_2 R_3 + \dots)] \\ &= T_1 T_2 T_3 [1 + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 - 2R_1 R_2 R_3 \\ &\quad + 2R_1 R_2^2 R_3 + \dots].\end{aligned}\quad (59)$$

Observamos ahora que la ecuación anterior coincide con la fórmula incoherente (51). Dado que el resultado (59) está basado en una relación que consideramos incorrecta, es de esperarse que el promedio de la transmitancia para el caso incoherente no coincida con el promedio basado en la fórmula para la amplitud que si toman en cuenta los procesos físicos involucrados de manera correcta. Además, volviendo a la figura 7, observamos que los procesos de esparcimiento etiquetados como 4 y 5 implican el mismo camino óptico, por lo que deben interferir, sin importar la distancia entre las placas o la longitud de onda. Esto se mostrará gráficamente más adelante.

Reescribiendo la ecuación (58) en términos del parámetro $\rho = \frac{1}{T} - 1$, encontramos que

$$\langle T_{123} \rangle_{\text{incoh}} = \frac{1}{1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3}.\quad (60)$$

De los resultados para dos y tres placas, se intuye que el promedio de la transmitancia

para un sistema de N placas para el caso incoherente es de la forma

$$\langle T_{1\dots N} \rangle_{\text{incoh}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \rho_i}. \quad (61)$$

Reflectancia

De forma similar para el caso de tres centros esparcidos, se obtiene la reflectancia a partir de la ecuación (52)

$$\begin{aligned} R_{123} &= [r_3 + r_{12} \exp(i2k_3 L_3)] [1 - r_{12} r_3 \exp(i2k_3 L_3) \\ &\quad + r_{12}^2 r_3^2 \exp(i4k_3 L_3) - \dots] \times [r_3^* + r_{12}^* \exp(-i2k_3 L_3)] \\ &\quad \times [1 - (r_{12} r_3)^* \exp(-i2k_3 L_3) + (r_{12}^2 r_3^2)^* \exp(-i4k_3 L_3) - \dots]. \end{aligned} \quad (62)$$

El promedio de la reflectancia, variando solamente a L_3 , es

$$\langle R_{123} \rangle_{L_3} = \frac{R_3 + R_{12} - 2R_{12}R_3}{1 - R_{12}R_3}. \quad (63)$$

Promediando ahora sobre L_2 y haciendo las mismas consideraciones que en el caso de la transmitancia, se obtiene la reflectancia promedio incoherente

$$\langle R_{123} \rangle_{\text{incoh}} = \frac{\langle R_{12} \rangle_{L_2} + R_3 - 2 \langle R_{12} \rangle_{L_2} R_3}{1 - \langle R_{12} \rangle_{L_2} R_3}. \quad (64)$$

Los promedios basados en las relaciones de amplitud se estimaron sobre un conjunto de realizaciones, partiendo de los coeficientes de reflexión (52) y transmisión (53). Para esto, se considera la propagación del haz a una longitud de onda $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ a través de tres centros esparcidos separados por distancias promedio $L_{10} = 10 \mu\text{m}$ y $L_{20} = 14 \mu\text{m}$, respectivamente. Como se hizo en el caso incoherente se forma un conjunto de realizaciones variando aleatoriamente la separación L_1 y L_2 entre las tres placas con probabilidad uniforme en un intervalo de $4 \mu\text{m}$. La gráfica 8 muestra la reflectancia y transmitancia promedio variando el índice de refracción del medio entre las tres placas

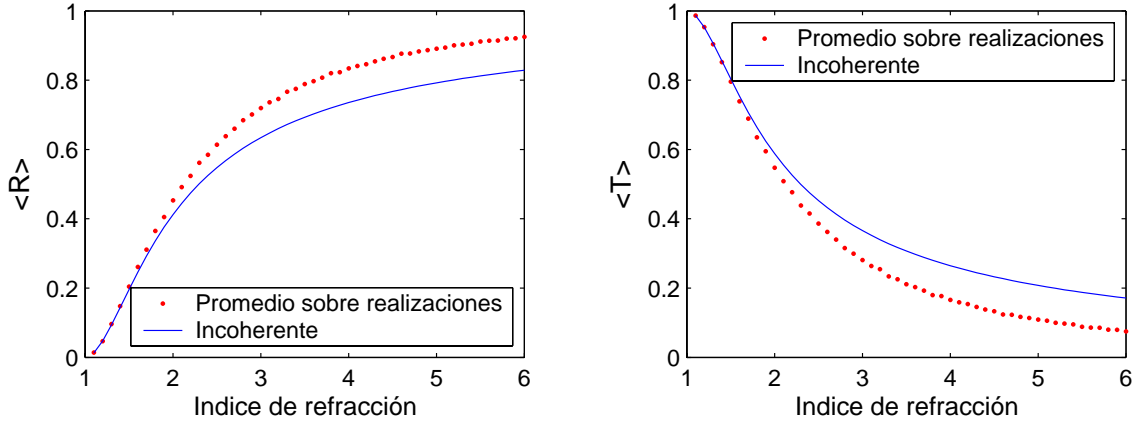


Figura 8: Propagación de un haz a través de tres centros esparcidores. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción del medio variando las separaciones promedio, $L_{10} = 10 \mu\text{m}$ y $L_{20} = 14 \mu\text{m}$, entre las tres placas en los intervalos $L_{10} - 4 \mu\text{m} < L_1 < L_{20} + 4 \mu\text{m}$. y $L_{20} - 4 \mu\text{m} < L_2 < L_{20} + 4 \mu\text{m}$.

($n_2 = n_3$), sobre un conjunto de 20 000 realizaciones. Consideramos las placas con un índice de refracción $n_p = 1.0$ (ver los programas A.3 y A.4).

La figura 8 muestra que las fórmulas coherente e incoherente difieren, y que las diferencias son más notorias conforme el índice de refracción crece. Este aumento del índice de refracción conduce a un crecimiento de la reflectividad de cada interfase, haciendo más evidentes los procesos de esparcimiento múltiple. Observamos que la transmitancia decrece más rápido en el caso coherente que en el incoherente.

II.4.3 Promedio sobre longitudes de onda

De igual forma, para estimar el promedio sobre las longitudes de onda, se calcula el promedio de la reflectancia y transmitancia variando la longitud de onda, teniendo separaciones fijas $L_1 = 16 \mu\text{m}$ y $L_2 = 10 \mu\text{m}$ entre las tres placas, respectivamente. Se escogió una longitud de onda promedio $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ y un intervalo de variación uniforme de $\pm 0.5 \mu\text{m}$. Los resultados se presentan en la figura 9.

La figura 9 muestra el promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción. Se observa el mismo comportamiento que en el caso de variaciones

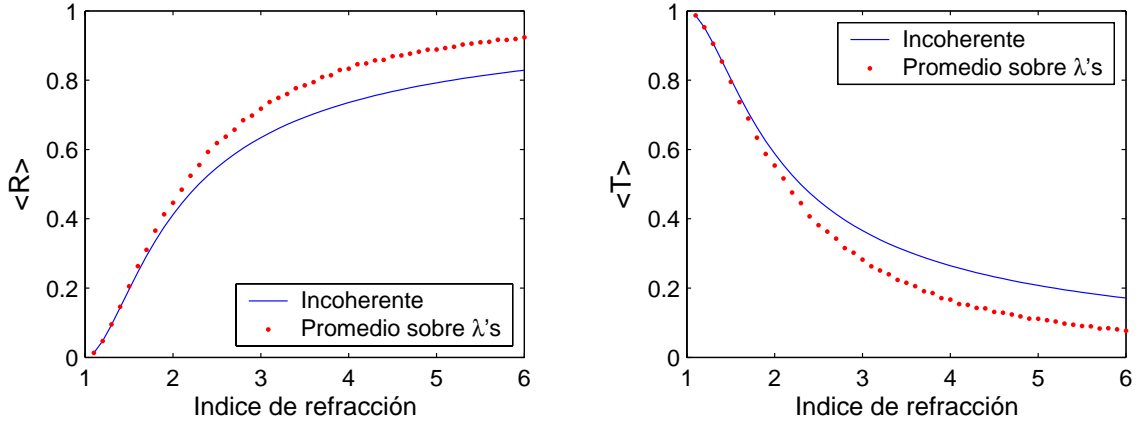


Figura 9: Propagación de un haz a través de tres centros esparcidos. Promedio de la reflectancia y transmitancia en función del índice de refracción variando la longitud de onda central, $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$, en el intervalo $\lambda_0 - 0.5 \mu\text{m} < \lambda < \lambda_0 + 0.5 \mu\text{m}$.

aleatorias de la separación entre tres centros esparcidos.

Esto muestra que existe una especie de ergodicidad¹ y que podemos intercambiar promedios de conjunto o ensamble por promedios en longitud de onda. Por otro lado, dado que la fórmula incoherente no predice el resultado correcto, es claro que existen efectos de interferencia que sobreviven estos promedios. Es decir, que ya con tres centros esparcidos el comportamiento de la onda no se puede describir con métodos basados en superposiciones incoherentes.

II.5 Efectos de Localización en un Medio Aleatorio Unidimensional

Los efectos de localización [Anderson, 1958; Anderson, 1985] están íntimamente relacionados con los términos de interferencia que persisten después de promediar. El efecto de localización más conocido es el llamado *retroesparcimiento reforzado*, que se manifiesta como un pico en la distribución angular de la intensidad esparcida en la dirección de

¹Un proceso aleatorio se llama ergódico si cualquier función muestra toma los mismos valores a lo largo del eje (de la longitud de onda, por ejemplo) con la misma frecuencia relativa observada a través de un ensamble (conjunto de realizaciones) a una longitud de onda específica [Goodman, 1985].

retroesparcimiento; es decir, hacia la fuente. Este fenómeno se identifica con efectos de localización débil y se debe a la interferencia constructiva entre ondas esparcidas múltiplemente por el sistema que, vistas desde la fuente, siguen caminos recíprocos.

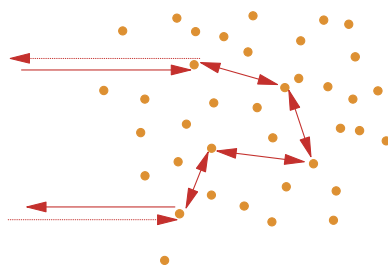


Figura 10: Esquema de retroesparcimiento reforzado en un medio desordenado con elementos esparcidos. Las dos ondas que se propagan en direcciones opuestas adquieren la misma fase y por lo tanto interfieren constructivamente.

Como se ilustra en la figura 10, las ondas que siguen la trayectoria en direcciones opuestas adquieren la misma fase (aleatoria). Por lo tanto, las dos ondas interferirán constructivamente en la dirección de regreso hacia la fuente de la luz, a pesar de que se habían esparcido múltiple y aleatoriamente. El fenómeno ha sido observado y estudiado en esparcimiento por partículas pequeñas (ver, por ejemplo, [Kuga y Ishimaru, 1984; Akkermans y Maynard, 1985; van Albada y Lagendijk, 1985]) y por superficies aleatorias [Mendez y O'Donnell, 1987; O'Donnell y Mendez, 1987; Maradudin *et al.*, 1990].

El efecto neto de esta interferencia constructiva es un reforzamiento de la intensidad esparcida que, para el caso de partículas, adquiere la forma de un cono angosto alrededor de la dirección de retroesparcimiento como se muestra en la figura 11. La anchura de este cono es proporcional a la longitud de onda e inversamente proporcional a la trayectoria libre media del esparcimiento dentro de la muestra. Por condiciones de balance de energía, es claro que el incremento de la intensidad retroesparcida debe representar una reducción en la cantidad de la luz transmitida, poniendo en evidencia las dificultades de la onda para propagarse en el medio. Si se hace la trayectoria libre media cada vez más corta, por ejemplo, incrementando la densidad de centros esparcidos, la

propagación en el medio se hace más tortuosa y la transmisión se reduce debido a efectos de interferencia.

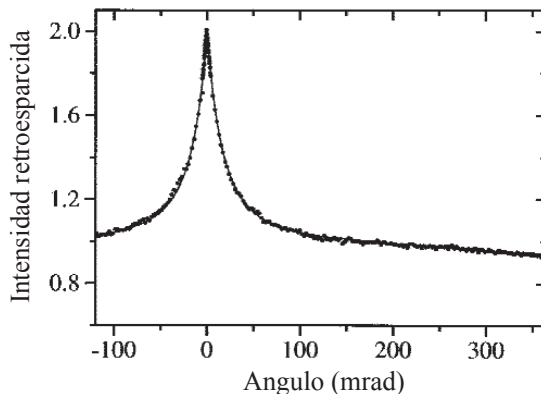


Figura 11: Intensidad de la luz esparcida, desde un medio con desorden, como función del ángulo de la dirección de retroesparcimiento. El reforzamiento corresponde al valor cero sobre el eje x . El resultado experimental es tomado de [Wiersma *et al.*, 1995b].

Si el esparcimiento es muy fuerte, se puede llegar a tener la **localización de Anderson** [Anderson, 1985]. Este concepto fue introducido por P. W. Anderson en el concepto mecánico cuántico de una partícula en un potencial aleatorio, que puede ser localizada espacialmente por la aleatoriedad del medio. De esta manera un electrón en el conductor desordenado puede dejar de propagarse, dándose una transición en el medio conductor a aislador. Una diferencia esencial entre la localización de los electrones y las ondas de luz es la ausencia de una ley de conservación para los fotones. La luz puede ser absorbida o amplificada al propagarse a través del medio, lo cual depende del signo de la parte imaginaria de la constante dieléctrica.

La posibilidad de observar localización de luz (no localización débil) en un medio tridimensional todavía es tema de controversia [Wiersma *et al.*, 1995b; Scheffold *et al.*, 1999]. Por otro lado, para medios unidimensionales suficientemente grandes, todos los estados están localizados. Es decir, que para un medio infinito, la onda transmitida decae exponencialmente debido a los efectos de interferencia ya descritos.

Dada la relativa simplicidad para tratar el problema unidimensional, y a la facilidad con la que se obtienen efectos de localización, existen una gran cantidad de trabajos que tratan sobre la propagación de ondas a través de una cadena 1D de centros esparcidos separados por distancias aleatorias.

A manera de ilustración de los efectos de localización consideramos ahora un sistema de N -placas de espesor d aleatorio, separadas por distancias L , también aleatorias. Las placas tienen índice de refracción n_2 , y el medio que las rodea tiene índice de refracción n_1 (ver la figura 12).

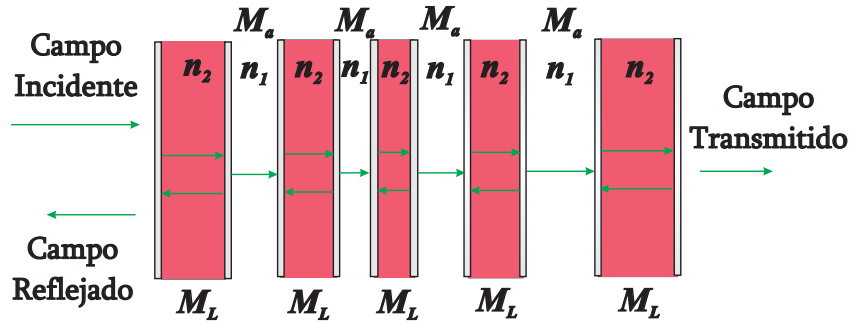


Figura 12: Propagación de una onda plana a través de un sistema de multicapas aleatorio. M_L es la matriz de transferencia que describe la propagación de la onda a través del medio con índice de refracción n_2 y separación L aleatoria y M_a corresponde a la matriz del medio con índice de refracción n_1 .

Estudiamos, en particular, la propagación de una onda electromagnética, de longitud de onda $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$, a través de un sistema de 20 placas de espesor central $d_0 = 3.2 \mu\text{m}$ y separación central $L_0 = 4.3 \mu\text{m}$. Se consideran las placas con un índice de refracción $n_2 = 3.5$ y que están rodeadas por aire ($n_1 = 1.0$). Al introducir desorden en el sistema se consideró que tanto el espesor de las placas como la separación entre ellas eran variables aleatorias. Elegimos el espesor d_n de la n -ésima placa como $d_n = d_0 (1 + W_d \gamma)$, donde $W_d = 1.1 \mu\text{m}$ representa la amplitud de la aleatoriedad y γ es un número aleatorio entre $(-0.5, 0.5)$. La distancia L_n entre las placas se consideró como $L_n = L_0 (1 + W_L \gamma)$, donde $W_L = 2.2 \mu\text{m}$ (ver el programa A.5).

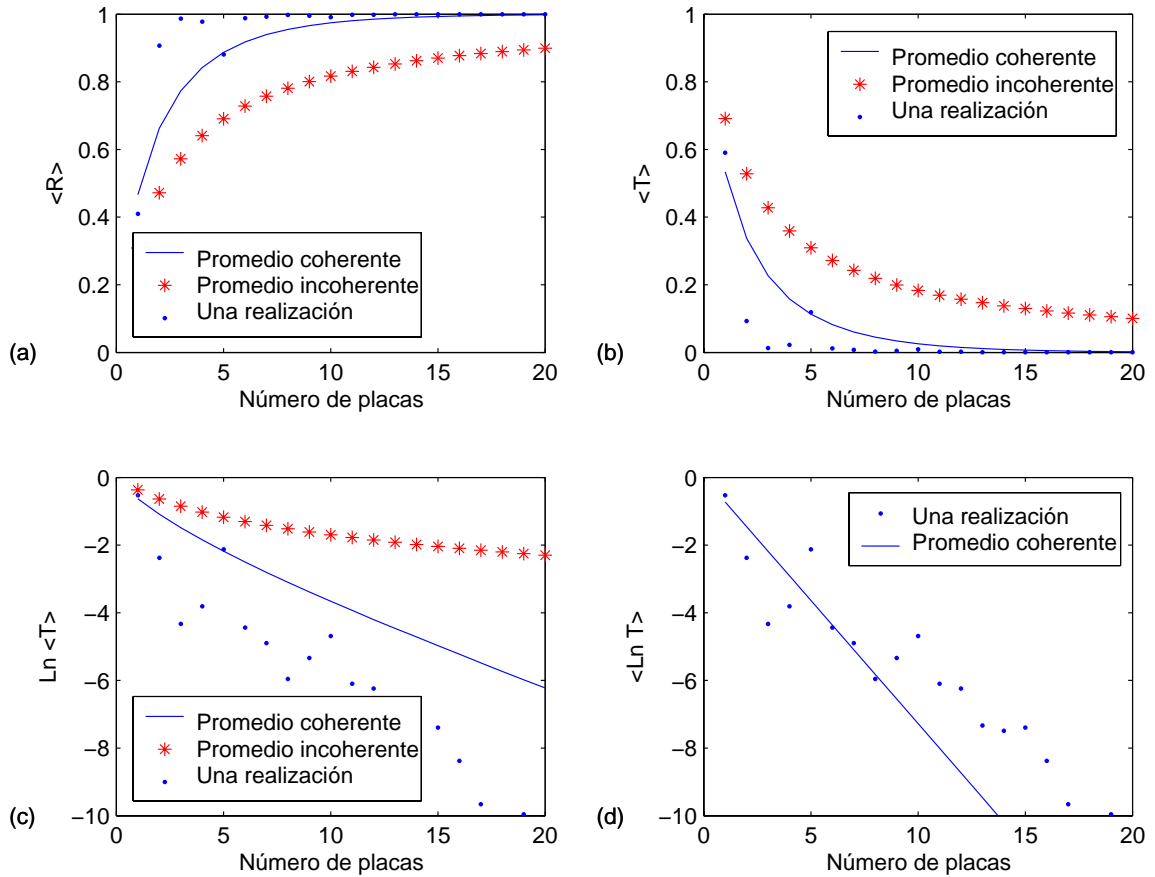


Figura 13: Propagación de una onda plana a través de un sistema aleatorio de 20 placas transparentes. (a) y (b) Reflectancia y transmitancia para una sola realización y sus promedios coherente e incoherente al variar la separación entre las placas. (c) El logaritmo del promedio de la transmitancia para la propagación incoherente y coherente comparado con el logaritmo de la transmitancia para una sola realización y, (d) el promedio del logaritmo de la transmitancia para el caso coherente comparado con el logaritmo de la transmitancia para una realización.

Las figuras 13(a) y (b) corresponden a la propagación a través de un medio transparente y se muestran la reflectancia y transmitancia para una sola realización, así como sus promedios coherente e incoherente. Vemos que para la realización particular mostrada, la reflectancia es mayor que los promedios. En el caso de la transmitancia se tiene un comportamiento complementario, debido a que el medio es no absorbente. Además, se observa que el promedio coherente de 10 000 realizaciones es diferente al

promedio incoherente como en el caso de tres centros esparcidos. En la figura 13(c) se muestra el logaritmo de la transmitancia para una sola realización, además de sus promedios coherente e incoherente. El promedio coherente presenta un comportamiento que para N grande es lineal ($\langle \ln T \rangle \simeq -N$) y corresponde a una situación a la que se ha alcanzado localización. Por otro lado, el promedio incoherente que tiene un comportamiento hiperbólico ($\langle \ln T \rangle \simeq -\ln N$) corresponde a una situación de tipo difusivo. La figura 13(d) muestra el promedio del logaritmo de la transmitancia, así como los casos coherente y de una sola realización. Aquí se encuentra un comportamiento similar como en la figura anterior, aunque con pendiente diferente.

II.6 Medios Amplificadores

Más recientemente, la combinación de efectos de esparcimiento y amplificación ha llamado poderosamente la atención. Los primeros estudios acerca de los efectos de esparcimiento y amplificación fueron realizados por Vladilen Lethokov [Letokhov, 1968], en 1968. Lethokov reportó estudios teóricos sobre la inestabilidad en el laseo de un medio con desorden. Posteriormente, A. Zyuzin y sus colaboradores [Zhang, 1995] mostraron efectos de interferencia introduciendo ganancia en un medio aleatorio. También, se han reportado estudios experimentales de la emisión láser en sistemas aleatorios observados en soluciones de tinte conteniendo micropartículas (lasers de colorantes) o en cristales pulverizados (lasers de cristales) [Lawandy *et al.*, 1994].

Algunos resultados teóricos reportados son sorprendentes. Por ejemplificar esto, en la figura 14 mostramos el logaritmo de la transmitancia promedio de un sistema unidimensional de placas. Como referencia, mostramos también el logaritmo de la transmitancia de una sola realización. El sistema de 20 placas que se está considerando tiene un medio con amplificación ($\varepsilon = 2.25 - 0.01i$). Observamos en la figura que inicialmente la amplitud de la onda transmitida aumenta pero después se presenta un cambio

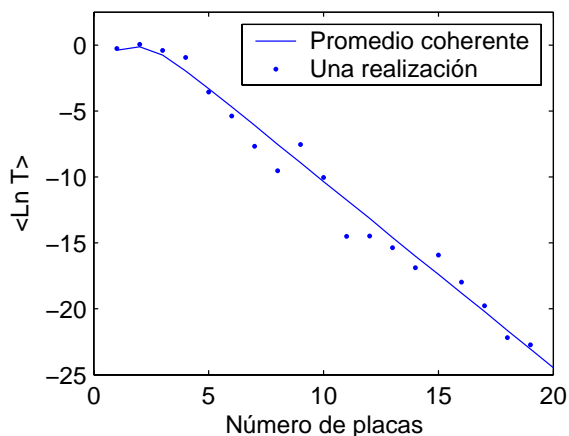


Figura 14: Propagación de una onda plana a través de un sistema aleatorio de 20 placas con un medio amplificador ($\varepsilon'' = -0.01$). El logaritmo de la transmitancia para una realización y su promedio coherente.

de pendiente. Conforme aumenta el número de placas la transmitancia decrece, a pesar de que el sistema tiene ganancia. En este caso, la ganancia implica pérdidas, como si se tratara de un medio absorbente. Este comportamiento para un medio amplificador ha sido atribuido a efectos de localización por unos autores [Paasschens *et al.*, 1996], pero se trata de resultados controversiales.

Los estudios sobre la emisión láser en sistemas aleatorios han llamado mucho la atención. Hay varias diferencias entre un láser aleatorio y un láser convencional. Para ilustrar algunas de ellas, consideramos la emisión de un láser convencional y la comparación con la de un láser de cristal pulverizado. Los láseres convencionales están basados en: un material ópticamente activo, una fuente de energía para excitar el medio y en una cavidad que atrapa la luz por un tiempo suficiente para que ocurra la acción del láser (retroalimentación de la luz que se amplifica). En cambio, en un láser aleatorio la cavidad es reemplazada por el mismo medio aleatorio que produce el esparcimiento múltiple. Sin embargo, el esparcimiento múltiple de la luz (difusión de la luz) que aparece en un medio desordenado realmente no proporciona un mecanismo de retroalimentación, ya que solamente hace que la luz se quede por un tiempo suficiente

dentro del material para que la amplificación sea eficiente. En lugar de los rebotes de un espejo a otro, las ondas de luz rebotan de una partícula a otra miles de veces antes de dejar el material aleatorio. Para que se realice el mecanismo de retroalimentación, otros procesos juegan un papel importante. Si el esparcimiento es muy fuerte, las ondas de luz rebotan aleatoriamente en la misma trayectoria cerrada. Este es el mecanismo de localización de luz descrito en la sección anterior. Pero como las condiciones son muy rigurosas para obtener la localización, es común considerar un retroesparcimiento adicional a partir de la superficie que contiene la muestra.

La condición para que ocurra el laseo en un sistema desordenado está basada en el balance entre la ganancia y las pérdidas. Como en el láser normal, si la ganancia es más grande que las pérdidas, se tiene la acción del láser con retroalimentación aleatoria. Para comparar la ganancia con las pérdidas, es necesario considerar el tamaño del sistema. Las pérdidas dentro de los límites del sistema dependen linealmente del área de la superficie que rodea el medio, mientras que la ganancia es proporcional a su volumen. Como resultado, la ganancia será más grande que las pérdidas por arriba de un volumen crítico. Se habla entonces de un medio aleatorio amplificador en condiciones supercríticas. Conforme pasa el tiempo, esto conduce a un destello de luz en todas direcciones durante la cual la mayoría de la energía escapa y el sistema se convierte en subcrítico. Sin embargo, si el mecanismo de excitación aún está presente, el sistema lentamente se convertirá en supercrítico y el proceso se repite.

Las características de emisión de un láser aleatorio son similares a las de un láser convencional. El espectro de emisión es extremadamente angosto, lo que significa que la emisión está definida a una longitud de onda particular. Pero a diferencia de un láser normal, un laser aleatorio emite aleatoriamente en todas las direcciones como la emisión de una fuente incandescente. Láseres de este tipo han sido reportados por N. Lawandy, D. Wiersma, H. Cao y otros [Lawandy *et al.*, 1994; Wiersma y Lagendijk,

1996; Wiersma y Cavalieri, 2001; Cao *et al.*, 1999].

II.6.1 Cavity con dos centros esparcidos

Como ya mencionamos en la sección anterior, se han reportado resultados teóricos sorprendentes para la propagación de un haz de luz a través de un medio aleatorio con ganancia. En los estudios realizados han supuesto las propiedades del medio independiente del tiempo [Paasschens *et al.*, 1996]. Sin embargo, en otros estudios indican que la simetría entre absorción y amplificación es un artificio que representa una solución no física de la ecuación de onda independiente del tiempo, [Jiang *et al.*, 1999].

Para ilustrar esta situación, consideremos el ejemplo de una cavidad de dos centros esparcidos con un medio amplificador. El dispositivo está formado por dos superficies planas, paralelas, altamente reflejantes y separadas por una distancia L . Consideremos que la película es de un medio lineal con índice de refracción complejo n_c . Se ilumina con una onda plana de longitud de onda λ_o que incide sobre las placas de manera perpendicular. Para una onda que incide del medio externo al interno sobre la primera interfase (ver figura 15), denotaremos por r el coeficiente de reflexión (razón entre la amplitud reflejada y la incidente) y t el coeficiente de transmisión (razón entre la amplitud transmitida y la incidente). Similarmente, r' y t' serán los coeficientes de reflexión y transmisión cuando la onda se propaga del medio interno hacia el medio exterior. Buscamos la solución a este problema en estado estacionario.

De la figura 15, vemos que las amplitudes escalares de las ondas reflejadas \mathbf{E}_{1r} , \mathbf{E}_{2r} , \mathbf{E}_{3r} , ... son respectivamente $E_0 r e^{i\omega t}$, $E_0 t r' t' e^{i(\omega t + \phi)}$, $E_0 t r' t' e^{i(\omega t + 2\phi)}$, ..., donde $E_0 e^{i\omega t}$ es la onda incidente y $\phi = 2k_c L$, con $k_c = n_c k_0$, es el desfase adquirido en cada viaje adicional por las contribuciones subsecuentes [Hecht, 1998; Born y Wolf, 1980].

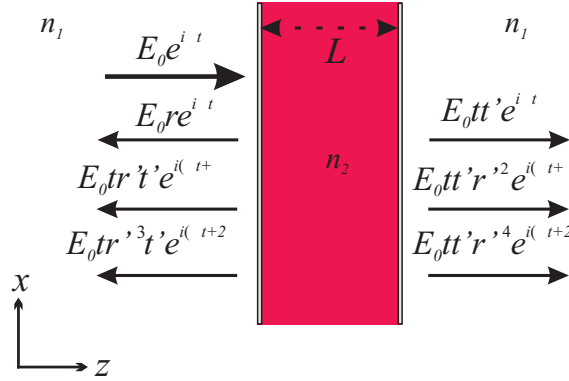


Figura 15: Ilustración de la propagación de una onda plana de la forma $E_0 e^{i\omega t}$ a través de un medio entre dos interfases reflectoras.

La onda escalar reflejada resultante es

$$\begin{aligned} E_R &= E_0 r e^{i\omega t} + E_0 t r' t' e^{i(\omega t + \phi)} + E_0 t r' r' t' e^{i(\omega t + 2\phi)} + \dots \\ &= E_0 e^{i\omega t} \left\{ r + r' t t' e^{i\phi} \left[1 + r'^2 e^{i\phi} + (r'^2 e^{i\phi})^2 + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Cuando $|r'^2 e^{i\phi}| < 1$, la serie converge. Entonces, la onda resultante (65) se transforma en

$$E_R = E_0 e^{i\omega t} \left[r + \frac{r' t t' e^{i\phi}}{1 - r'^2 e^{i\phi}} \right]$$

y por consiguiente, el coeficiente de reflexión del sistema es

$$r_s = \frac{E_R}{E_0} = e^{i\omega t} \left[r + \frac{r' t t' e^{2ik_c L}}{1 - r'^2 e^{2ik_c L}} \right]. \quad (66)$$

Multiplicando la ecuación (66) por su complejo conjugado se obtiene la reflectancia del sistema

$$R = \frac{2r^2 (1 - \cos \phi)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \phi}, \quad (67)$$

donde se utilizaron las relaciones $r = -r'$ y $tt' = 1 - r^2$ para el caso de un medio sin absorción.

Similarmente, para obtener el coeficiente de transmisión (figura 15), vemos que la luz sufre reflexiones múltiples en la cavidad y entonces la amplitud compleja resultante

se puede expresar en términos de la serie geométrica

$$\begin{aligned} E_T &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{nt} = E_o t t' e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (r'^2)^n e^{in\phi} \\ &= \frac{t t' e^{i\omega t}}{1 - r'^2 e^{i\phi}} E_o, \end{aligned}$$

Por consiguiente, el coeficiente de transmisión en amplitud es

$$t_s = \frac{E_T}{E_o} = \frac{t t' e^{i\omega t}}{1 - r'^2 e^{2ik_c L}}. \quad (68)$$

Para un medio transparente, de la ecuación (68), la transmitancia en intensidad, T , se puede escribir en términos del coeficiente de fineza F

$$T = \frac{1}{1 + F \text{sen}^2 \frac{\phi}{2}},$$

donde $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$.

Para ilustrar los resultados, consideremos la propagación de una onda electromagnética plana de longitud de onda $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$ a través de la película. El medio entre las placas tiene un índice de refracción $n_2 = 1.5$ y una constante dieléctrica real $\varepsilon' = 2.25$, y el medio exterior se considera como aire.

La gráfica 16(a) muestra la transmitancia para un medio transparente ($\varepsilon'' = 0$) como función de la separación entre las placas, que individualmente reflejan la onda en un 80%. Vemos que los máximos que se tienen cuando la fase es un múltiplo de 2π están bien definidos debido al valor alto de la fineza $\mathcal{F} = \pi\sqrt{F}/2 = 14.05$.

Para modelar un medio con absorción utilizamos la técnica del cambio de signo a la parte imaginaria de la constante dieléctrica. Para el caso de un medio con absorción la parte imaginaria es positiva ($\varepsilon'' > 0$). La gráfica 16(b) muestra la transmitancia para un medio con absorción ($\varepsilon'' = 0.01$) donde se observa una atenuación de la intensidad transmitida, conforme la separación entre las placas aumenta.

El sistema formado por dos placas reflectoras con un medio amplificador se puede considerar como una cavidad óptica del láser. Para obtener acción láser se requiere

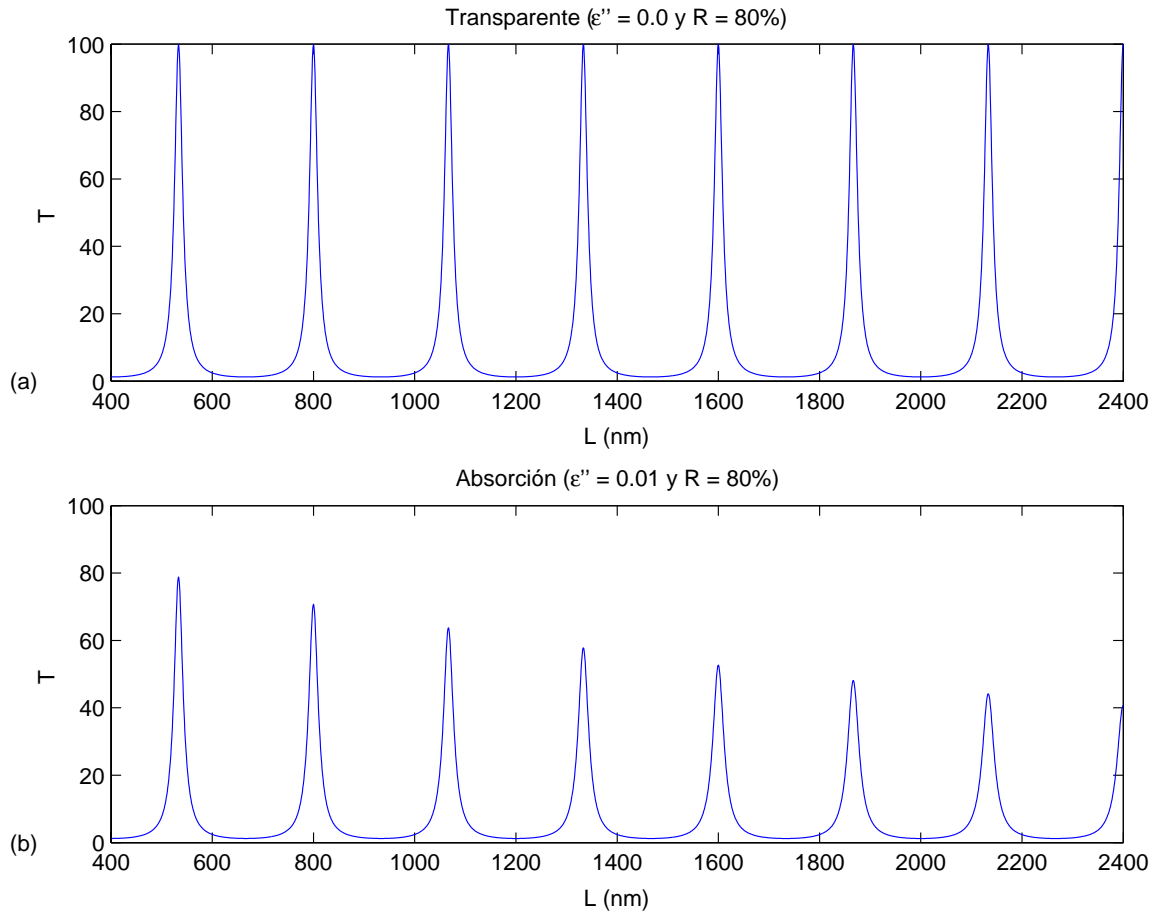


Figura 16: Propagación de una onda plana a través de una película reflectora, $R = 80\%$, con un medio (a) transparente ($\epsilon'' = 0$) y con (b) absorción ($\epsilon'' = 0.01$).

alcanzar el umbral de oscilación, que ocurre cuando

$$1 - r'^2 e^{2ik_c L} \geq 0. \quad (69)$$

En este punto, los coeficientes de reflexión (66) y transmisión (68) divergen.

Para tener más en claro los resultados anteriores, se hace un modelo para un medio con amplificación poniendo un valor negativo a la parte imaginaria de la constante dieléctrica $\epsilon'' < 0$. Similarmente, graficamos la transmitancia T como función de la distancia entre las placas.

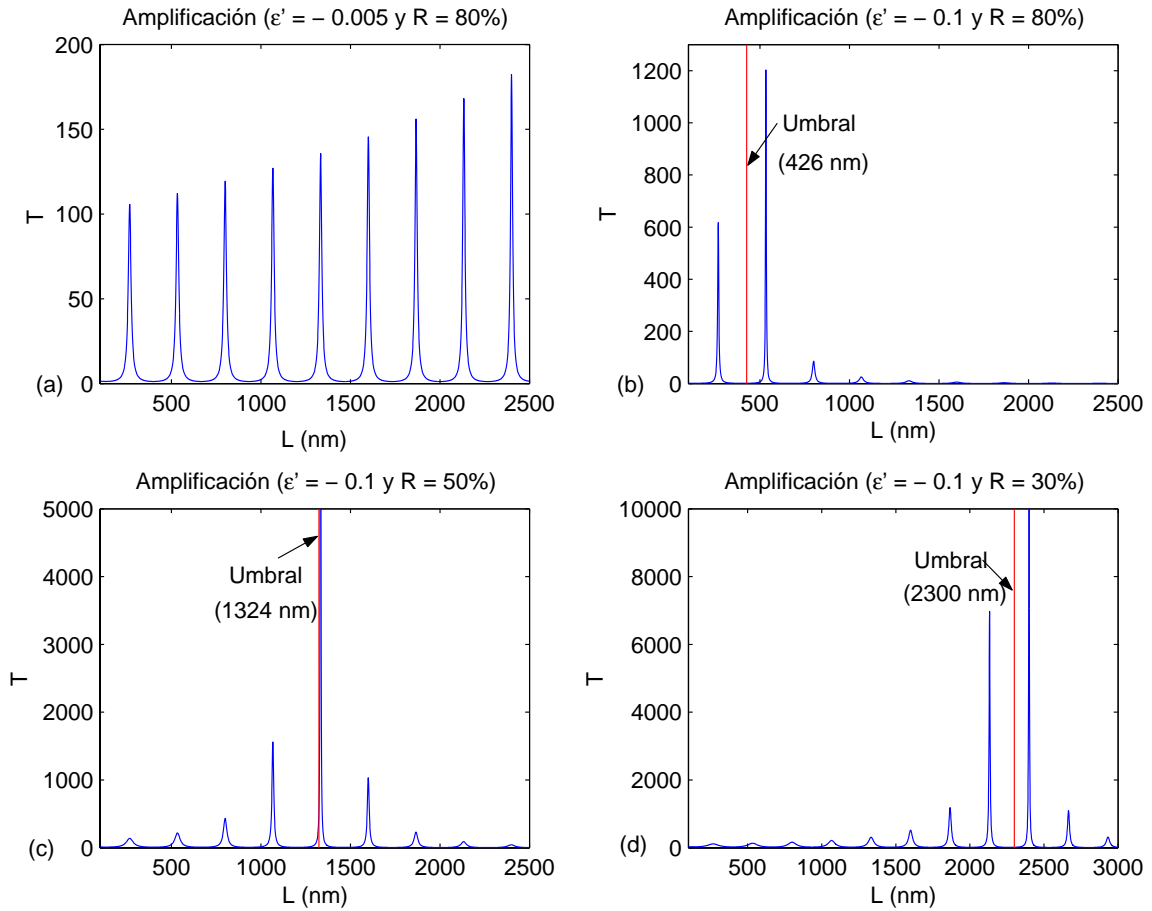


Figura 17: Propagación de una onda plana a través de una película con un medio amplificador de (a) ganancia pequeña ($\epsilon'' = -0.005$) y de ganancia grande ($\epsilon'' = -0.1$) variando la reflectancia de las placas (b) 80%, (c) 50% y (d) 30%.

La gráfica 17(a) muestra la transmitancia de una película altamente reflejante en función de la separación entre las placas para un medio con ganancia pequeña, $\epsilon'' = -0.005$. Como es de esperarse, se presenta una amplificación conforme aumenta la separación entre las interfases. En cambio, de la figura 17(b) vemos que para un valor más grande de la ganancia, $\epsilon'' = -0.1$, no solamente no se tiene una amplificación de la onda, sino que se presenta una atenuación de la intensidad transmitida. Además, utilizando la ecuación (69) vemos que el umbral se encuentra en la posición $L = 426$ nm, que es justamente cuando el sistema deja de tener ganancia y se presenta la atenuación

al aumentar la separación entre las placas. La gráfica 17(c) para una reflectividad del 50% presenta un crecimiento de la intensidad transmitida hasta la posición del umbral $L = 1324$ nm y después el comportamiento de atenuación. Similarmente, la gráfica 17(d) para una reflectividad pequeña (del 30%) muestra una amplificación y, después del umbral ($L = 2300$ nm), una atenuación de la intensidad transmitida. Dependiendo de la reflectividad de la película y del valor de la parte imaginaria de la constante dieléctrica (negativa) se pueden observar efectos de amplificación o de absorción.

Se ha argumentado que la atenuación que se encuentra cuando la ganancia del medio es alta, es un efecto de interferencia destructiva, [Pradhan y Kumar, 1994; Zhang, 1995; Freilikher *et al.*, 1997], y que representa una manifestación de efectos de localización reforzados por la amplificación del medio. Sin embargo, C. Soukoulis y otros [Jiang *et al.*, 1999], han argumentado que estas conclusiones son erróneas, por considerar un medio lineal y una solución estacionaria independiente del tiempo. Para tener resultados realistas, es necesario considerar la evolución temporal de la intensidad transmitida y las no linealidades del medio, tema que será estudiado en el siguiente capítulo.

Capítulo III

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

En este capítulo se describen las bases teóricas del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), que nos permite abordar el problema central de este trabajo de tesis. Con este método se pueden resolver problemas de propagación de ondas electromagnéticas en medios cuyas propiedades pueden depender del tiempo. El método está basado en la solución directa de las ecuaciones de Maxwell, en particular, en las leyes de Ampere y Faraday, y fue desarrollado por Kane Yee en 1966 [Yee, 1966]. Posteriormente, se han realizado muchos estudios sobre la estabilidad del método y su implementación de una gran cantidad de situaciones prácticas (ver por ejemplo, [Taflove, 1995]). En la primera parte se presentan las ecuaciones de Maxwell en forma discreta para el caso de un medio lineal. A manera de ilustración estudiamos, con este método, la propagación de un pulso gaussiano y de una onda monocromática a través de un Fabry-Perot, comparando los resultados con los correspondientes del capítulo II. En la siguiente parte se considera la propagación de la onda plana a través de un medio con amplificación y saturación de la ganancia. Para ello, se describe un modelo del medio con estas propiedades y se presentan las ecuaciones de Maxwell en forma discreta.

III.1 Ecuaciones de Maxwell

Para la descripción del método FDTD iniciamos con las ecuaciones de Maxwell para un caso general.

Como mencionamos en el capítulo anterior, consideramos un problema unidimensional, en el cual el campo electromagnético depende solamente de la coordenada z . Además, sin pérdida de generalidad para medios isotrópicos, el campo eléctrico está en la dirección y y el campo magnético está en la dirección x .

Iniciamos reescribiendo las ecuaciones de Maxwell (1) y (2) en su forma general:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (70)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{M}, \quad (71)$$

donde \mathbf{J} y \mathbf{M} son las densidades de corriente eléctrica y magnética, respectivamente.

Para materiales isotrópicos, no lineales y no dispersivos, las ecuaciones constitutivas son

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (72)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \quad (73)$$

o bien, ya que $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ y $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} + \mathbf{P}^{NL}$, las ecuaciones (72) y (73) se pueden escribir como

$$\mathbf{B} = [1 + 4\pi \chi_m] \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = [1 + 4\pi \chi] \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}^{NL} = \varepsilon \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}^{NL},$$

donde \mathbf{P}^{NL} representan la polarizabilidad no lineal y, χ y χ_m la susceptibilidad eléctrica y magnética, respectivamente. Por otro lado,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (74)$$

$$\mathbf{M} = \sigma^* \mathbf{H}, \quad (75)$$

donde σ es la conductividad eléctrica y σ^* es la pérdida magnética equivalente o resistividad magnética.

Sustituyendo las ecuaciones (74) y (75) en (70) y (71) obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E} - \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{P}^{NL}}{\partial t} \quad (76)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma^*}{\mu} \mathbf{H}. \quad (77)$$

Usamos ahora la invariancia a lo largo de las direcciones x y y . Las ecuaciones (76) y (77) producen dos conjuntos de ecuaciones desacopladas, que son:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{c}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{4\pi\sigma^*}{\mu} H_x, \quad (78)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} E_y - \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial P_y^{NL}}{\partial t}, \quad (79)$$

y

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{4\pi\sigma^*}{\mu} H_y, \quad (80)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} E_x - \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial P_x^{NL}}{\partial t}. \quad (81)$$

Vemos que las dos primeras involucran a H_x y E_y , mientras que las otras dos involucran a H_y y E_x . Sin pérdida de generalidad para medios isotrópicos, consideramos solamente las ecuaciones (78) y (79) (polarización s), que se pueden reescribir como

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma^*}{c} H_x, \quad (82)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} E_y + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial P_y^{NL}}{\partial t}. \quad (83)$$

III.2 Algoritmo de Yee para Medios Lineales

En el algoritmo de Yee [Yee, 1966] se considera una malla tridimensional de celdas cúbicas en el espacio sobre la cual se expresan las ecuaciones de Maxwell como diferencias finitas. Para nuestro problema particular, de una dimensión en el espacio, se

considera una malla espacio-temporal bidimensional (se siguió un procedimiento similar al que está descrito en [Smith, 1997]).

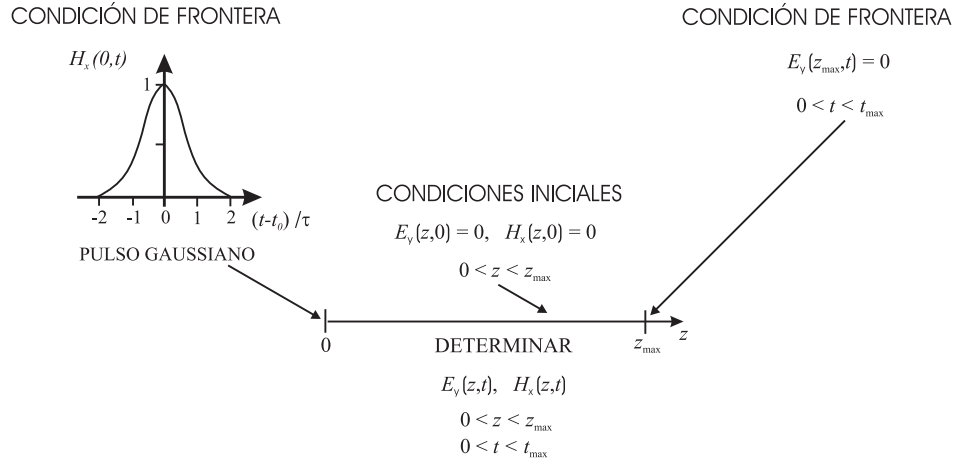


Figura 18: Esquema de los elementos del problema electromagnético unidimensional.

III.2.1 Aproximaciones de diferencias finitas

A continuación, se considera la propagación de un pulso a través de un medio lineal. El problema se muestra esquemáticamente en la figura 18. El campo electromagnético se desea calcular sobre el intervalo $0 < z < z_{\max}$ para tiempos $0 < t < t_{\max}$. Las condiciones iniciales para $t = 0$ son que el campo electromagnético es cero en todo el espacio, es decir, $E_y(z,0) = 0, H_x(z,0) = 0$. Para otros tiempos, las condiciones de frontera para el campo magnético en los puntos $z = 0$ y $z = z_{\max}$ se toman como:

$$H_x(0,t) = H_0 \exp[-(t-t_0)^2/\tau^2], \quad 0 \leq t \leq t_{\max}, \quad (84)$$

$$H_x(z_{\max},t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_{\max}. \quad (85)$$

Es decir, consideramos que la onda incidente es un pulso gaussiano, donde τ determina su anchura y t_0 un corrimiento temporal. Por otro lado, para el campo eléctrico en estos puntos de la frontera se consideran las condiciones

$$E_y(0,t) = 0 \quad \text{y} \quad E_y(z_{\max},t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_{\max}. \quad (86)$$

Por otro lado, para puntos desplazados por medio intervalo de puntos de la malla empleamos la notación:

$$F^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) \doteq F \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right],$$

con

$$i = 0, 1, 2, \dots, i_{\max}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max},$$

donde i y n representan los índices de discretización del espacio y tiempo, respectivamente.

Con referencia a la figura 19, el campo eléctrico E_y es evaluado en puntos (i, n) , representados por puntos sólidos (\bullet), y el campo magnético es evaluado en puntos $(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$, representados por cruces (\times). La derivada parcial de E_y con respecto a la coordenada espacial y la derivada temporal de H_x en el punto $(i + \frac{1}{2}, n)$, pueden ser aproximadas por los cocientes de diferencias finitas

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{i+\frac{1}{2},n} \simeq \frac{E_y^n(i+1) - E_y^n(i)}{\Delta z}, \quad (87)$$

$$\left. \frac{\partial H_x}{\partial t} \right|_{i+\frac{1}{2},n} \simeq \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2})}{\Delta t} \quad (88)$$

y el promedio aritmético de los valores de H_x en los pasos del tiempo $n - \frac{1}{2}$ y $n + \frac{1}{2}$ es

$$H_x^n \left(i + \frac{1}{2} \right) = \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) - H_x^{n-\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right)}{2}. \quad (89)$$

Sustituyendo las ecuaciones (87), (88) y (89) en la ecuación (82), obtenemos la siguiente ecuación aproximada

$$\frac{E_y^n(i+1) - E_y^n(i)}{\Delta z} = \frac{\mu}{c} \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2})}{\Delta t} \quad (90)$$

$$+ \frac{4\pi\sigma^*}{c} \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2})}{2}, \quad (91)$$

o bien,

$$H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) = D_a H_x^{n-\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) + D_b [E_y^n(i+1) - E_y^n(i)], \quad (92)$$

donde los coeficientes D_a y D_b son

$$D_a = \frac{1 - 4\pi\Delta t\sigma^*/2\mu}{1 + 4\pi\Delta t\sigma^*/2\mu}, \quad D_b = \frac{c\Delta t/\mu\Delta z}{1 + 4\pi\Delta t\sigma^*/2\mu}. \quad (93)$$

De manera similar, la derivada espacial de H_x y la derivada temporal de E_y pueden ser aproximadas en el punto $(i, n + \frac{1}{2})$,

$$\left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_{i, n + \frac{1}{2}} \simeq \frac{H_x^{n + \frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - H_x^{n + \frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2})}{\Delta z}, \quad (94)$$

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{i, n + \frac{1}{2}} \simeq \frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{\Delta t}, \quad (95)$$

y el campo eléctrico a un tiempo intermedio

$$E_y^{n + \frac{1}{2}}(i) = \frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{2}. \quad (96)$$

Sustituyendo las ecuaciones (94), (95) y (96) en la ecuación (83) se obtiene la siguiente ecuación aproximada:

$$\frac{H_x^{n + \frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - H_x^{n + \frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2})}{\Delta z} = \frac{\varepsilon E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{c \Delta t} \quad (97)$$

$$+ \frac{4\pi\sigma E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{c \cdot 2}, \quad (98)$$

o bien,

$$E_y^{n+1}(i) = C_a E_y^n(i) + C_b \left[H_x^{n + \frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n + \frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}\right) \right], \quad (99)$$

donde

$$C_a = \frac{1 - 4\pi\Delta t\sigma/2\varepsilon}{1 + 4\pi\Delta t\sigma/2\varepsilon}, \quad C_b = \frac{c\Delta t/\varepsilon\Delta z}{1 + 4\pi\Delta t\sigma/2\varepsilon}. \quad (100)$$

En las aproximaciones de las derivadas por diferencias finitas, se han despreciado los términos de orden superior debido al tamaño ínfimo de Δz y Δt . Sin embargo, si se toma en cuenta la condición del “paso mágico del tiempo”, $c\Delta t = \Delta z$, la solución de las ecuaciones en diferencias finitas es una solución exacta para las ecuaciones de Maxwell [Taflove, 1995]. En la siguiente sección se describe esta condición.

Las ecuaciones (92) y (99) nos permiten calcular H_x y E_y a un tiempo y posición particular usando los valores de H_x y E_y a tiempos y posiciones anteriores. Es decir, el nuevo valor del campo magnético, H_x , depende del valor anterior del campo H_x en el tiempo y de la diferencia espacial del campo eléctrico, E_y , de ambos lados del punto del campo H_x . En forma similar, el nuevo valor del campo E_y , depende del valor del campo E_y a un tiempo anterior y también depende del campo H_x a ambos lados del punto sobre el que se desea evaluar el campo E_y (figura 19).

Los resultados obtenidos para la distribución del campo electromagnético en el espacio a varios tiempos se ilustran en la figura 20. En el ejemplo, el campo consiste de un pulso gaussiano que tiene la forma de la ecuación (100) con un ancho temporal $\tau = 160$ ps y $t_0 = 3\tau$ a una frecuencia central de la fuente de excitación de 5 GHz (los datos son tomados del ejemplo numérico presentado en [Taflove, 1995]). El pulso se propaga a la velocidad de la luz c , a través de dos interfases con un medio de índice de refracción $n = 2.5$. Para el muestreo se consideró $\Delta z = 3$ mm y bajo la condición del “*paso mágico del tiempo*”, $\Delta t = \frac{\Delta z}{c} = 10$ ps. Para los tres primeros tiempos mostrados, $t = 800, 2000$ y 3400 ps, el pulso aún no ha llegado a la frontera derecha en $z = z_{\max}$.

Para el último tiempo $t = 3960$ ps, mostrado en la figura 20, el pulso ha llegado a la frontera derecha, donde se ve que es reflejado en forma invertida. De esta forma, la región $z \geq z_{\max}$ actúa como un conductor perfecto donde el campo eléctrico E_y es cero, lo cual es consistente con la suposición (84). Hacemos notar que esto es algo artificial, pues en principio esta zona representa el espacio libre, pero en algún punto se debe truncar el dominio computacional considerado.

III.3 Análisis Numérico del Algoritmo FDTD

En esta sección se estudia la precisión y estabilidad del método FDTD. Se muestra que la solución del método es estable, es decir, que las ecuaciones de diferencias finitas, (92)

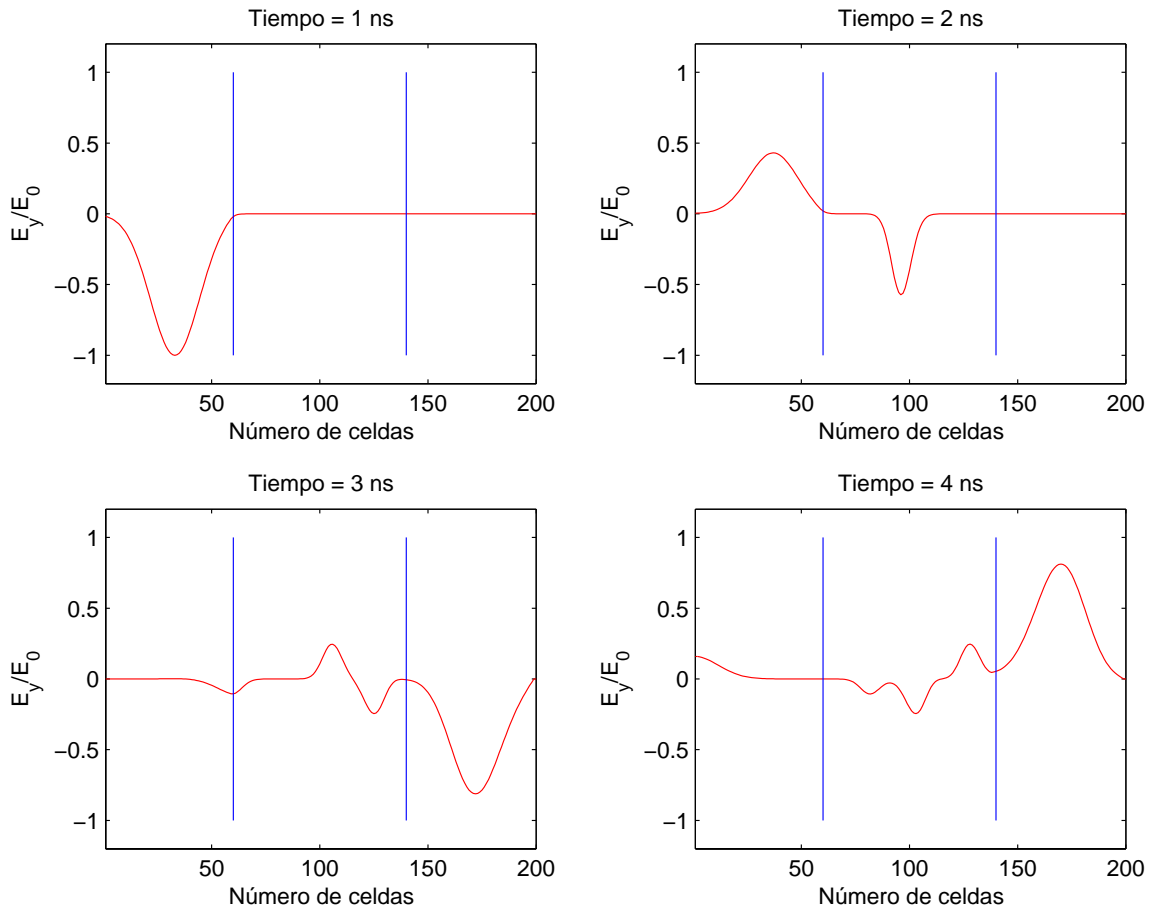


Figura 20: Propagación de un pulso mostrando la distribución del campo eléctrico, con polarización \mathbf{s} , en el espacio para varios tiempos.

y (99), producen la solución de las ecuaciones diferenciales, (82) y (83), cuando Δz y Δt tienden a cero. A continuación se explican dos de las limitaciones que rigen el método FDTD (ver la referencia [Peterson *et al.*, 1998]).

III.3.1 Dispersión

En el espacio libre todas las ondas planas se propagan a la misma velocidad y son independientes de la frecuencia o número de onda. Esto no se cumple para una malla FDTD. Este fenómeno se conoce como *dispersión numérica*. A continuación, se presenta un argumento matemático para entender dicha dispersión numérica.

Combinando las ecuaciones (1) y (2), se encuentra que E_y satisface una ecuación de onda unidimensional que se propaga en la dirección z

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}. \quad (101)$$

Las segundas derivadas que aparecen en la ecuación (101) pueden ser aproximadas en diferencias finitas en la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \right|_{j,n} = \frac{E_y^{n+1}(j) - 2E_y^n(j) + E_y^{n-1}(j)}{(\Delta t)^2}, \quad (102)$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right|_{j,n} = \frac{E_y^{n+1}(j) - 2E_y^n(j) + E_y^{n-1}(j)}{(\Delta z)^2}, \quad (103)$$

donde j y n son los índices de la posición en el espacio y tiempo, respectivamente. Sustituyendo las ecuaciones (102) y (103) en la ecuación (101), tenemos que

$$\frac{E_y^{n+1}(j) - 2E_y^n(j) + E_y^{n-1}(j)}{(c\Delta t)^2} = \frac{E_y^n(j+1) - 2E_y^n(j) + E_y^n(j-1)}{\Delta z^2}. \quad (104)$$

Ahora consideremos soluciones de la ecuación (101) de la forma

$$e^{i(kz - \omega t)}, \quad (105)$$

donde la frecuencia ω puede ser compleja (por la dispersión). Como $z = j\Delta z$ y $t = n\Delta t$, las soluciones de la ecuación (104) en la forma de (105) se pueden escribir como

$$E_y^n(j) = \exp(i(\omega n\Delta t - kj\Delta z)). \quad (106)$$

Para encontrar una relación entre ω y el número de onda k , sustituyamos la ecuación (106) en la ecuación de onda discreta (104). Simplificando la expresión, se obtiene la relación de dispersión para el método FDTD:

$$\frac{1}{(c\Delta t)^2} \text{sen}^2\left(\frac{\omega c\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{\Delta z^2} \text{sen}^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right). \quad (107)$$

En el límite cuando $\omega\Delta t$ y $k\Delta z$ tienden a cero, o bien, aplicando la condición del “*paso mágico del tiempo*”, $c\Delta t = \Delta z$, la ecuación (107) se transforma en la relación de dispersión para el caso continuo

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2. \quad (108)$$

Por consiguiente, si no se escogen Δz y Δt adecuadamente, las diferentes frecuencias de un pulso se propagan a diferentes velocidades sobre la malla, provocando una distorsión del pulso. Estos efectos pueden ser reducidos usando una malla muy fina, o bien adoptando un muestreo acorde con la condición del “*paso mágico del tiempo*”.

III.3.2 Estabilidad

Para que la solución obtenida por el método FDTD sea estable, los incrementos Δz y Δt deben, además, satisfacer ciertas condiciones. La llamada condición de *estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy* [Courant *et al.*, 1928], para el problema unidimensional en el vacío, es

$$\frac{c\Delta t}{\Delta z} \leq 1. \quad (109)$$

Para el análisis de la estabilidad consideremos soluciones del tipo (106),

$$E_y^n(j) = \xi^n e^{-ikz} \Big|_{z=j\Delta z} \quad (110)$$

donde $\xi^n = e^{-i\omega n\Delta t}$. El comportamiento de la solución (110) puede ser creciente, decreciente u oscilante con el tiempo, dependiendo del valor de ξ . Sustituyendo la expresión (110) en la ecuación de diferencias finitas (104) para $n = 1$, se obtiene

$$\frac{\xi^2 - 2\xi + 1}{(c\Delta t)^2} = \frac{\xi e^{-ik\Delta z} - 2\xi + \xi e^{ik\Delta z}}{\Delta z^2}, \quad (111)$$

o bien,

$$\xi^2 - 2A\xi + 1 = 0, \quad (112)$$

donde

$$A = 1 - 2 \left(\frac{c\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right). \quad (113)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática (112) se encuentra que

$$\xi = A \pm \sqrt{A^2 - 1}. \quad (114)$$

Se obtiene una solución creciente (inestable) si $|\xi| > 1$. Esto solamente ocurre si $|A| > 1$. Por lo tanto, de la ecuación (113), $c\Delta t > \Delta z$ implica inestabilidad.

En el otro caso, si $|A| \leq 1$, entonces $c\Delta t \leq \Delta z$ y $|\xi| = |A + \sqrt{1 - A^2}i| = 1$, implica una solución oscilante en el tiempo en forma de una onda (ecuación (110)).

Cuando la condición de Courant se satisface la malla está causalmente conectada y la información se transmite a través de ella a la velocidad de la luz.

III.4 Condiciones de truncamiento

Para utilizar el método FDTD en regiones abiertas infinitas, se requiere de algún mecanismo para truncar la malla a una distancia finita de la región de interés, sin provocar reflexiones. Existen varias técnicas para evitar estas reflexiones. Una de las más utilizadas se conoce como *Condición de frontera de absorción*, **ABC**¹. Esta condición permite que la onda electromagnética salga del espacio computacional considerado sin reflexiones o distorsiones (ver la referencia [Peterson *et al.*, 1998]).

Algunos de los mecanismos que se estudiaron en este trabajo son los siguientes:

- *Extrapolación del campo*. En esta aproximación, los campos electromagnéticos de una onda con dirección bien definida son extrapolados a un punto exterior de la región de interés. Los puntos de los campos extrapolados son utilizados en las ecuaciones de actualización del campo electromagnético evitando que el valor en las fronteras sea cero.

¹Por sus siglas en inglés, Absorbing Boundary Conditions

- *Medio material absorbente.* La técnica denominada *Capa Perfectamente Empa-
tada*, **PML**², fue desarrollada por Bérenger [Bérenger, 1994; Taflove, 1995]. Esta
técnica esta basada en el uso de una capa absorbente, especialmente, diseñada
para absorber las ondas electromagnéticas sin reflexión. Es decir, se divide la
región total del espacio computacional en dos regiones. La primera región cor-
responde al vacío con las propiedades físicas ε_0 , μ_0 e impedancia $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, y la
segunda región que forma la capa es un medio con una conductividad eléctrica σ
y una conductividad magnética σ^* , cuya impedancia es $\eta = \sqrt{\frac{\mu(1+\sigma^*/i\omega\mu)}{\varepsilon(1+\sigma/i\omega\varepsilon)}}$. Si se
cumple la condición

$$\frac{\sigma^*}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

se obliga a que la impedancia del segundo medio η sea igual a la del vacío η_0 ,
conduciendo a una reflexión nula, $\Gamma = \frac{\eta_0 - \eta}{\eta_0 + \eta} = 0$, cuando la onda se propaga
perpendicularmente a la interfase vacío-medio. Γ representa el coeficiente de
reflexión en términos de las impedancias.

III.4.1 Propagación de un pulso gaussiano

Al implementar las técnicas anteriores aún se presentaba reflexiones al truncar la región
computacional, es por eso que a continuación, se explica la condición de frontera que
se utilizó en este trabajo para evitar el problema. La figura (21) ilustra un pulso a dos
tiempos diferentes separados por Δt . Se observa que, salvo un corrimiento, los pulsos
son iguales y se tiene que

$$E_y^n(i_t) = E_y^{n+1}(i_t + 1) \quad \text{y} \quad H_x^n(i_l) = H_x^{n+1}(i_l + 1), \quad (115)$$

donde los índices i_l e i_t son los puntos espaciales de las fronteras izquierda y derecha,
respectivamente. Entonces, la condición de frontera implementada consiste en hacer

²Por sus siglas en inglés, Perfectly Matched Layer

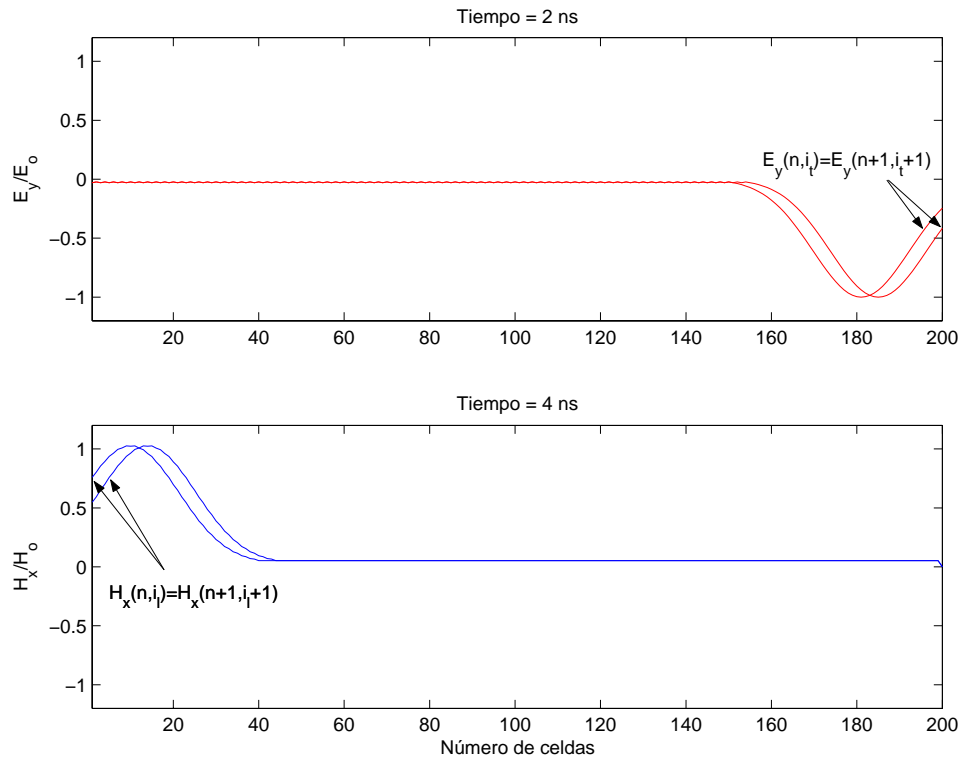


Figura 21: Condiciones de frontera del campo electromagnético para la propagación de un pulso.

que el campo electromagnético a un tiempo $n + 1$ y posición $i + 1$, tenga el mismo valor que a un tiempo y posición anterior, evitando así, el problema de no conocer el campo electromagnético después de la frontera derecha (es decir, fuera del dominio computacional). Se sigue un procedimiento similar para el campo magnético en la frontera izquierda. De esta forma, se logran evitar las reflexiones espurias debidas al tratamiento de una región finita.

III.4.2 Propagación de una onda monocromática

Ahora consideremos como fuente una onda sinusoidal. La onda sinusoidal, que se propaga a través de dos placas separadas por un medio de índice de refracción n_2 (que puede ser complejo), cambia de valor tanto en el espacio como en el tiempo a diferencia del pulso gaussiano. Como en el caso anterior, también se presentan reflexiones espurias

en las fronteras. Para evitar este problema, nuevamente se tomó en cuenta la condición (115). Sin embargo, cuando la onda incide a través del sistema, parte de ella se refleja con la primera placa e interfiere con la misma onda incidente impidiendo de esta forma que las reflexiones desaparezcan en las regiones de truncamiento. Dicho de otro modo, debido a que se tiene una superposición de ondas (la incidente mas la reflejada por el sistema) que viajan en sentidos opuestos ya no es posible implementar la condición de frontera utilizada anteriormente.

Para poder implementar la condición de frontera (115) para la onda monocromática, se utilizó la técnica de *Campo Esparcido/Campo Total (SF/TF³)* [Taflove, 1995], que separa estos campos, evitando su superposición. Con esta técnica se escriben los campos eléctricos y magnéticos totales, E_y^{total} y H_x^{total} , de la siguiente forma:

$$E_y^{\text{total}} = E_y^{\text{inc}} + E_y^{\text{scat}} \quad \text{y} \quad H_x^{\text{total}} = H_x^{\text{inc}} + H_x^{\text{scat}}, \quad (116)$$

donde E_y^{inc} y H_x^{inc} son los valores de los campos de la onda incidente, los cuales se conocen en todos los puntos del espacio y tiempo de la malla. E_y^{scat} y H_x^{scat} son los valores de los campos de la onda esparcida (reflejada), los cuales inicialmente son desconocidos.

La región bajo estudio se divide en dos regiones. En una región se calcula solamente el campo esparcido (el incidente es conocido) y en la otra se calcula el campo total (ver figura 22). En la región del campo esparcido ya sólo interviene el campo reflejado por la primera interfase y de esta forma se cumple la condición (115) para la frontera izquierda. En cambio, a la frontera derecha le corresponde la región del campo total, donde interviene solamente el campo transmitido, cumpliéndose también la condición. Debido a la modificación del valor del campo electromagnético en la interfase, que divide la región esparcida y total, es necesario modificar las ecuaciones discretas (92) y (99) bajo la condición (116). Estas nuevas ecuaciones (como se muestran en la sección B.2)

³Por sus siglas en inglés, Scattered-Field / Total-Field

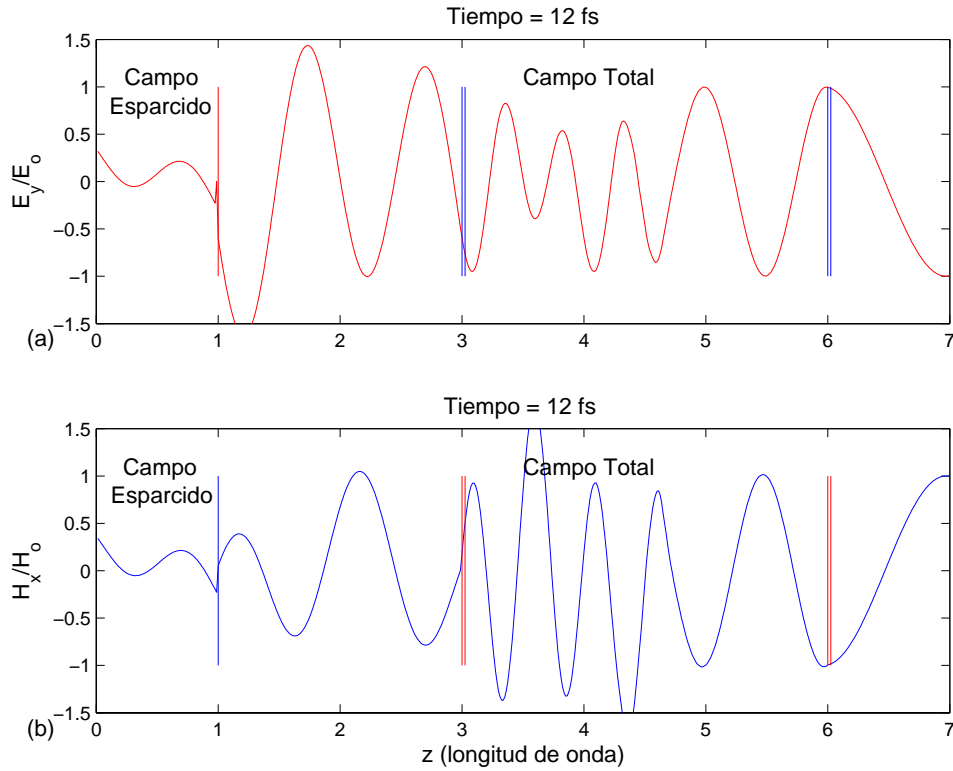


Figura 22: Condición de frontera para la propagación del campo electromagnético a través de dos placas separadas por una distancia de tres longitudes de onda.

calculan el campo electromagnético evitando las reflexiones en la región computacional de interés.

III.5 El Caso de Dos Centros Esparcidores en un Medio 1D

Para comparar con los resultados del capítulo 2, se implementó el programa para simular la propagación de una onda plana monocromática a través de un medio con dos centros esparcidores. Para calcular la reflectancia y transmitancia de la propagación de la onda a través del sistema, es necesario promediar el vector de Poynting, $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, sobre un ciclo. Es decir, se calculó

$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) dt, \quad (117)$$

a diferentes instantes de tiempo, hasta que se alcanzó un estado estacionario.

III.5.1 Resultados

Como ejemplo, se consideró una onda armónica cuyas componentes están dadas por

$$H_x = \text{sen} \left(\omega t - \frac{\omega}{c} z \right), \quad (118)$$

$$E_y = -\varepsilon \text{sen} \left(\omega t - \frac{\omega}{c} z \right), \quad (119)$$

a partir de un cierto tiempo. Se consideraron los parámetros: $\lambda_o = 0.89 \mu\text{m}$, $\omega = 2.118 \times 10^{15} \text{ Hz}$ para la propagación de la onda a través de un medio con índice de refracción $n_2 = 1.5$. Como centro esparcidor se consideró una película dieléctrica de índice de refracción $n_p = 2.5$ y de espesor $d = \frac{\lambda_o}{4n_p} = 0.089 \mu\text{m}$. Para evitar problemas asociados al muestreo, se consideró un tamaño de celda de $\Delta z = \frac{\lambda_o}{125} = 0.0071 \mu\text{m}$ (para reducir la dispersión numérica) y un $\Delta t = \frac{\Delta z}{c} = 0.024 \text{ fs}$. El tiempo máximo que se consideró para la evolución de la onda fue aproximadamente de 10 ns.

Las siguientes gráficas muestran la reflectancia y transmitancia como función de la separación de los centros esparcidores entre una y tres longitudes de onda comparando los resultados numéricos con los analíticos (ver los programas B.1 y B.2). Para un medio transparente, la constante dieléctrica es $\varepsilon = 2.25$. Para el caso de un medio absorbente consideramos la parte imaginaria de la constante dieléctrica $\varepsilon'' = 0.01$. Finalmente, para un medio con amplificación, que corresponde al valor negativo de ε'' , consideramos dos casos: $\varepsilon'' = -0.01$ y $\varepsilon'' = -0.085$.

Medio transparente ($\varepsilon'' = 0$):

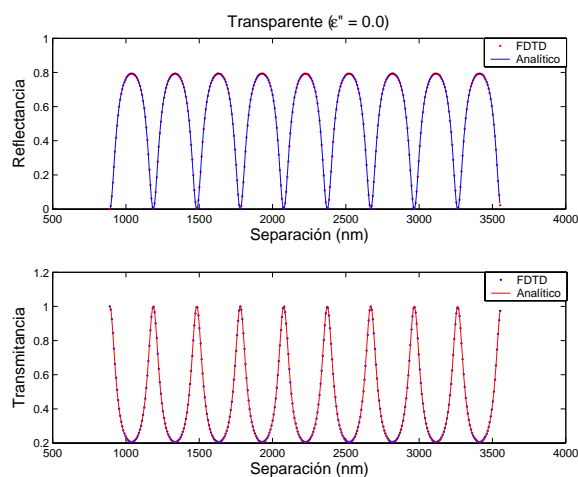


Figura 23: Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidores como función de su separación L para un medio transparente ($\varepsilon'' = 0.0$). Los puntos representan los resultados numéricos y la línea continua los resultados analíticos.

Medio absorbente ($\varepsilon'' = 0.01$):

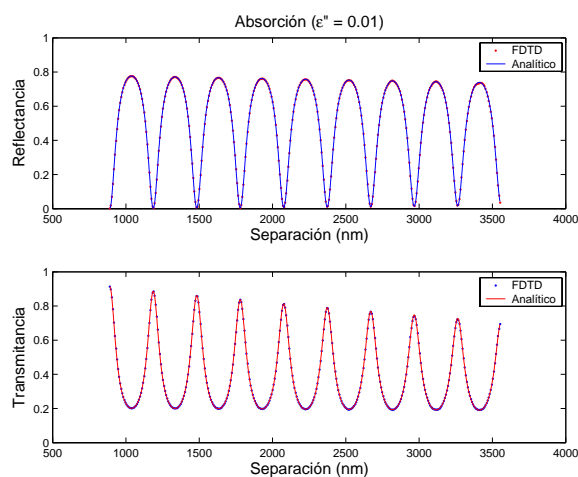


Figura 24: Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidores como función de su separación L para un medio con absorción ($\varepsilon'' = 0.01$).

Medio amplificador ($\varepsilon'' = -0.01$ y $\varepsilon'' = -0.085$):

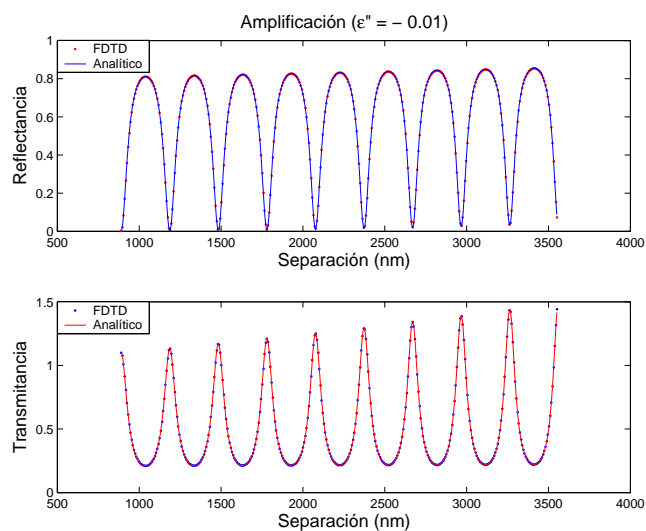


Figura 25: Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos como función de su separación L para un medio con ganancia ($\varepsilon'' = -0.01$).

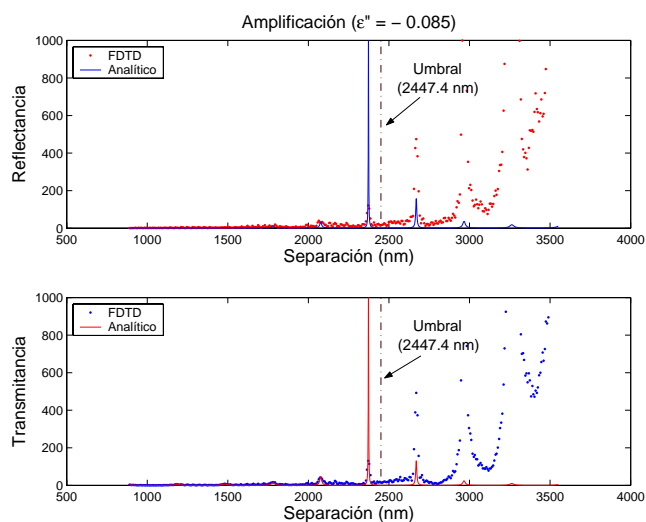


Figura 26: Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos como función de su separación L para un medio con ganancia ($\varepsilon'' = -0.085$).

La figura 23 muestra los resultados de la reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidos para un medio transparente. Se observa que el resultado por el método FDTD (puntos discretizados) coincide con el método de matrices (línea continua) desarrollado en la sección II.6. De igual forma, la figura 24 muestra un decrecimiento de la intensidad reflejada y transmitida coincidiendo los resultados obtenidos con ambos métodos. Las figuras 25 y 26 muestran la reflectancia y transmitancia para un medio amplificador con reflectividad del 61% de cada una de sus caras. En la figura 25, para una constante dieléctrica pequeña, ambos resultados coinciden. Por otro lado, en la figura 26, que corresponde a una constante dieléctrica más grande, el método FDTD presenta un crecimiento indefinido conforme transcurre el tiempo, sin alcanzarse una convergencia. En los resultados analíticos, después de la posición del umbral ($L = 2447.4 \text{ nm}$), se observan los dos efectos ya discutidos en la sección II.6 (amplificación y atenuación). Los resultados muestran que los dos métodos teóricos son inconsistentes. Por otro lado, ninguno de los dos produce resultados que parezcan físicamente posibles. Por esto, es necesario considerar las no linealidades del medio.

III.6 Método FDTD para Medios con Amplificación y Saturación

La discrepancia entre los resultados anteriores, y la aparente simetría entre la absorción y la amplificación en medios con ganancia que predicen los métodos analíticos, constituyen la principal motivación para este estudio. Se ha argumentado [Jiang *et al.*, 1999; van Soest *et al.*, 2001] que este resultado paradójico es un artefacto debido a la suposición de que el resultado es finito y a que el problema se puede tratar como un problema lineal con ecuaciones independientes del tiempo, cuando en realidad ambas amplitudes de reflexión y transmisión divergen cuando la amplificación es superior a

las pérdidas. El objetivo principal de esta sección es resolver las ecuaciones de Maxwell considerando un perfil espectral de ganancia para el medio, así como efectos de saturación de la ganancia.

III.6.1 Modelo de un medio con saturación de la ganancia

En esta sección, se presenta el modelo de un medio ensanchado homogéneamente cuyo perfil de ganancia espectral es una Lorentziana, permitiendo además que la ganancia sea saturable.

Se han desarrollado varios métodos para incorporar este tipo de efectos en el método FDTD. Soukoulis y colaboradores [Jiang y Soukoulis, 2000], desarrollaron un modelo acoplado las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones de razón para la población electrónica en un sistema desordenado. Takayama y Klaus [Takayama y Klaus, 2002], hicieron estudios considerando una permitividad eléctrica dependiente del tiempo, y resolviendo las ecuaciones con el llamado método de la *Ecuación Diferencial Auxiliar* para el FDTD. Otro método similar fue desarrollado por el grupo de Hagness y Taflove [Taflove, 1995; Hagness *et al.*, 1996], en el que se considera una conductividad eléctrica saturable y dependiente de la frecuencia. Este último método es el que adoptamos en este trabajo y se describe a continuación.

Consideremos el mismo problema unidimensional que en las secciones anteriores, con un campo electromagnético que se propaga a lo largo de la dirección z en un medio isotrópico y no magnético.

Nuevamente, se consideran las ecuaciones de Maxwell (82) y (83), que para el caso de la polarización \mathbf{s} en una dimensión resultan en lo siguiente:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{c}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (120)$$

$$\frac{4\pi}{c} J_y + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad (121)$$

donde se ha supuesto que la conductividad magnética $\sigma^* = 0$, la polarización no lineal $P_y^{NL} = 0$ y $J_y = \sigma E_y$ es la densidad de corriente eléctrica.

Para modelar un medio con ganancia ensanchado homogéneamente, se considera una conductividad eléctrica dependiente del tiempo de la forma

$$\sigma(t) = \begin{cases} A_\sigma \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \cos \omega_0 t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad (122)$$

donde $A_\sigma = \frac{\sigma_o}{T_2}$ está relacionado con el valor máximo de la ganancia y T_2 es el tiempo de relajación de una transición atómica a la frecuencia ω_0 .

Tomando la transformada de Fourier de (122) se obtiene la respuesta espectral de la conductividad eléctrica que puede ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \frac{\mathcal{J}_y(\omega)}{\mathcal{E}_y(\omega)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}} \left[\frac{\sigma_o/2}{1 - i(\omega - \omega_o)T_2} + \frac{\sigma_o/2}{1 - i(\omega + \omega_o)T_2} \right], \end{aligned} \quad (123)$$

donde se ha introducido, además, una amplitud que incorpora los efectos de saturación, a través del parámetro de la intensidad de saturación I_s .

La expresion (123) puede reescribirse como

$$\mathcal{J}_y(\omega) = \frac{s\sigma_o}{2} \left[\frac{2 - i(\omega + \omega_o)T_2 - i(\omega - \omega_o)T_2}{[1 - i(\omega - \omega_o)T_2][1 - i(\omega + \omega_o)T_2]} \right] \mathcal{E}_y(\omega), \quad (124)$$

donde $s = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$ es el coeficiente de saturación que describe el efecto no lineal debido al decrecimiento de la inversión de población con la intensidad del campo. Después de algo de álgebra y evaluando la transformada de Fourier inversa se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$(1 + \omega_o^2 T_2^2) J_y(t) + 2T_2 \frac{\partial J_y(t)}{\partial t} + T_2^2 \frac{\partial^2 J_y(t)}{\partial t^2} = s\sigma_o E_y(t) + s\sigma_o T_2 \frac{\partial E_y(t)}{\partial t}, \quad (125)$$

que está acoplada con la ecuación (121) y debe ser resuelta simultáneamente con ella.

Para resolver el sistema de ecuaciones, se hace uso del método de la *Ecuación Diferencial Auxiliar* (**ADE**⁴) [Tafløve, 1995]. Debido a que aparecen términos con segundas derivadas parciales, es conveniente definir una variable auxiliar, F_y , y reescribir la ecuación (125) en términos de dos ecuaciones diferenciales acopladas de primer grado:

$$F_y(t) = \frac{\partial J_y(t)}{\partial t}, \quad (126)$$

$$(1 + \omega_o^2 T_2^2) J_y(t) + 2T_2 F_y(t) + T_2^2 \frac{\partial F_y(t)}{\partial t} = s\sigma_o E_y(t) + s\sigma_o T_2 \frac{\partial E_y(t)}{\partial t}. \quad (127)$$

III.6.2 Descripción del Método FDTD

Para transformar el sistema de ecuaciones diferenciales (126), (127) y (121) en expresiones de diferencias finitas, por el método FDTD, se hace uso de las aproximaciones de la derivada parcial de E_y (87) y la derivada temporal de H_x (89) evaluadas en el punto $(i + \frac{1}{2}, n)$. De manera similar, se consideran la derivada espacial de H_x (94) y la derivada temporal de E_y (96) evaluadas en el punto $(i, n + \frac{1}{2})$, obteniéndose las siguientes expresiones:

De (126) se tiene que

$$\frac{F_y^{n+1}(i) + F_y^n(i)}{2} = \frac{J_y^{n+1}(i) - J_y^n(i)}{\Delta t},$$

que se puede reescribir como

$$J_y^{n+1}(i) = J_y^n(i) + \frac{\Delta t}{2} [F_y^{n+1}(i) + F_y^n(i)]. \quad (128)$$

De (121) se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{c} \frac{J_y^{n+1}(i) + J_y^n(i)}{2} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{\Delta t} \\ &= \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2})}{\Delta z}, \end{aligned}$$

⁴Por sus siglas en inglés, Auxiliary Differential Equation.

que puede ser expresada como

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i) &= E_y^n(i) - \frac{4\pi\Delta t}{2\varepsilon} [J_y^{n+1}(i) + J_y^n(i)] \\
&\quad + \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta z} \left[H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) - H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{129}$$

Similarmente, de (127) se obtiene

$$\begin{aligned}
&(1 + \omega_o^2 T_2^2) \frac{J_y^{n+1}(i) + J_y^n(i)}{2} + 2T_2 \frac{F_y^{n+1}(i) + F_y^n(i)}{2} \\
&+ T_2^2 \frac{F_y^{n+1}(i) - F_y^n(i)}{\Delta t} \\
&= s\sigma_o \frac{E_y^{n+1}(i) + E_y^n(i)}{2} + s\sigma_o T_2 + \frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{\Delta t},
\end{aligned}$$

que reescribimos como

$$\begin{aligned}
F_y^{n+1}(i) &= -\frac{\Delta t - T_2}{\Delta t + T_2} F_y^n(i) - \frac{(1 + \omega_o^2 T_2^2) \Delta t}{2T_2 (\Delta t + T_2)} [J_y^{n+1}(i) + J_y^n(i)] \\
&+ \frac{s\sigma_o (\Delta t + 2T_2)}{2T_2 (\Delta t + T_2)} E_y^{n+1}(i) + \frac{s\sigma_o (\Delta t - 2T_2)}{2T_2 (\Delta t + T_2)} E_y^n(i).
\end{aligned} \tag{130}$$

Sustituyendo las ecuaciones (128) y (129) en (130) y simplificando, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \frac{(1 + \omega_o^2 T_2^2) \Delta t^2}{4T_2 (\Delta t + T_2)} + \frac{\pi \Delta t^2 s\sigma_o (\Delta t + 2T_2)}{2\varepsilon T_2 (\Delta t + T_2)} \right] F_y^{n+1}(i) \\
&= -\left[\frac{\Delta t - T_2}{\Delta t + T_2} + \frac{(1 + \omega_o^2 T_2^2) \Delta t^2}{4T_2 (\Delta t + T_2)} + \frac{\pi \Delta t^2 s\sigma_o (\Delta t + 2T_2)}{2\varepsilon T_2 (\Delta t + T_2)} \right] F_y^n(i) \\
&+ \frac{c\Delta t s\sigma_o (\Delta t + 2T_2)}{2\varepsilon \Delta z T_2 (\Delta t + T_2)} \left[H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) - H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] \\
&- \left[\frac{(1 + \omega_o^2 T_2^2) \Delta t}{T_2 (\Delta t + T_2)} + \frac{2\pi \Delta t s\sigma_o (\Delta t + 2T_2)}{\varepsilon T_2 (\Delta t + T_2)} \right] J_y^n(i) \\
&+ \frac{s\sigma_o \Delta t}{T_2 (\Delta t + T_2)} E_y^n(i).
\end{aligned}$$

Despejando ahora $F_y^{n+1}(i)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
F_y^{n+1}(i) &= A_1 \left[H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) - H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] + A_2 E_y^n(i) \\
&\quad + A_3 J_y^n(i) + A_4 F_y^n(i),
\end{aligned} \tag{131}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{4c\Delta t s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)}{\beta \Delta z}, \\
A_2 &= \frac{8\varepsilon \sigma_o s(i) \Delta t}{\beta}, \\
A_3 &= -\frac{4\Delta t [2\varepsilon (1 + \omega_o^2 T_2^2) + 4\pi s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)]}{\beta}, \\
A_4 &= -\frac{8\varepsilon T_2 (\Delta t - T_2) + \Delta t^2 [2\varepsilon (1 + \omega_o^2 T_2^2) + 4\pi s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)]}{\beta}, \\
\beta &= 8\varepsilon T_2 (\Delta t + T_2) + \Delta t^2 [2\varepsilon (1 + \omega_o^2 T_2^2) + 4\pi s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)], \\
s(i) &= \frac{1}{1 + \frac{I(i)}{I_s}}, \quad I(i) = \frac{c}{8\pi} E_y H_y.
\end{aligned}$$

Las expresiones que hemos obtenido, permiten calcular el campo electromagnético en el espacio y tiempo deseados.

Para resolver el problema, vemos ahora que las ecuaciones (92), (128), (129) y (131) forman el siguiente sistema acoplado

$$H_x^n(i) = H_x^{n-1}(i) + \frac{c\Delta t}{\Delta z} [E_y^{n-1}(i) + E_y^{n-1}(i-1)], \quad (132)$$

$$\begin{aligned}
F_y^n(i-1) &= A_1 [H_x^n(i) - H_x^n(i-1)] + A_2 E_y^{n-1}(i-1) \\
&\quad + A_3 J_y^{n-1}(i-1) + A_4 F_y^{n-1}(i-1), \quad (133)
\end{aligned}$$

$$J_y^n(i-1) = J_y^{n-1}(i-1) + \frac{\Delta t}{2} [F_y^n(i-1) + F_y^{n-1}(i-1)], \quad (134)$$

$$\begin{aligned}
E_y^n(i-1) &= E_y^{n-1}(i-1) - \frac{4\pi\Delta t}{2\varepsilon} [J_y^n(i-1) + J_y^{n-1}(i-1)] \\
&\quad + \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta z} [H_x^n(i) - H_x^n(i-1)], \quad (135)
\end{aligned}$$

donde para E_y , i y n corresponden a $z = (i-1)\Delta z$ y $t = (n-1)\Delta t$ y para H_x , i y n corresponden a $z = (i - \frac{1}{2})\Delta z$ y $t = (n - \frac{1}{2})\Delta t$.

El algoritmo formado por la solución de este sistema de ecuaciones presenta problemas numéricos, debido a que existen varios órdenes de magnitud de diferencia entre los términos de las ecuaciones (133) y (134) que tienen como factor Δt . Por esta razón, los valores de J y F que dependen de la conductividad eléctrica o de la permitividad

tienden a cero. Así, el valor del campo electromagnético que no presenta algún cambio debido a J y F se comporta como el caso lineal.

Para evitar la inestabilidad numérica se multiplicaron las ecuaciones (121) y (123) por constantes adecuadas y se redefinieron algunas constantes, quedando las ecuaciones de la siguiente manera

$$H_x^n(i) = H_x^{n-1}(i) + \frac{c\Delta t}{\Delta z} [E_y^{n-1}(i) + E_y^{n-1}(i-1)], \quad (136)$$

$$\begin{aligned} f_y^n(i-1) &= a_1 [H_x^n(i) - H_x^n(i-1)] + a_2 E_y^{n-1}(i-1) \\ &\quad + a_3 j_y^{n-1}(i-1) + a_4 f_y^{n-1}(i-1), \end{aligned} \quad (137)$$

$$j_y^n(i-1) = j_y^{n-1}(i-1) + \frac{1}{2} [f_y^n(i-1) + f_y^{n-1}(i-1)], \quad (138)$$

$$\begin{aligned} E_y^n(i-1) &= E_y^{n-1}(i-1) - \frac{4\pi}{2\varepsilon} [j_y^n(i-1) + j_y^{n-1}(i-1)] \\ &\quad + \frac{c\Delta t}{\varepsilon\Delta z} [H_x^n(i) - H_x^n(i-1)], \end{aligned} \quad (139)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4c\Delta t^3 s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)}{\beta \Delta z}, \\ a_2 &= \frac{8\varepsilon\sigma_o s(i) \Delta t^3}{\beta}, \\ a_3 &= -\frac{4\Delta t^2 [2\varepsilon (1 + \omega_o^2 T_2^2) + 4\pi s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)]}{\beta}, \\ a_4 &= -\frac{8\varepsilon T_2 (\Delta t - T_2) + \Delta t^2 [2\varepsilon (1 + \omega_o^2 T_2^2) + 4\pi s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)]}{\beta}, \\ \beta &= 8\varepsilon T_2 (\Delta t + T_2) + \Delta t^2 [2\varepsilon (1 + \omega_o^2 T_2^2) + 4\pi s(i) \sigma_o (\Delta t + 2T_2)], \\ s(i) &= \frac{1}{1 + \frac{I(i)}{I_s}}, \quad I(i) = \frac{c}{8\pi} E_y H_y. \end{aligned}$$

Como prueba se consideraron los casos de propagación en medios con ganancia lineal y no lineal.

III.6.3 Resultados

Para un medio lineal, la intensidad de saturación es infinita, por lo que el factor de saturación $s(i) = 1$. Se hicieron varias pruebas para los diferentes tipos de medios: transparente, con absorción y amplificación; obteniéndose los mismos resultados que en la sección III.5.

Para tomar en cuenta un medio con amplificación se consideraron los mismos datos de la figura 26 y para los efectos de saturación se tomaron los siguientes datos de la referencia [Hagness *et al.*, 1996]. Para el caso de un medio no lineal, se consideró un coeficiente de saturación $s(i) = 1 / \left(1 + \frac{I(i)}{I_s}\right)$, donde $I_s = 65.2 \text{ kW/cm}^2 = 6.52 \times 10^{12} \text{ erg/s cm}^2$. La intensidad evaluada en cada punto espacial es $I(i) = cn_2 E(i) H(i) / 8\pi$. La onda plana de frecuencia central ω_o se propaga en el medio con $\lambda_o = 0.89 \mu\text{m}$, $T_2 = 0.07 \text{ ps}$ y $\sigma_o = 1.43 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$. Además, consideramos el

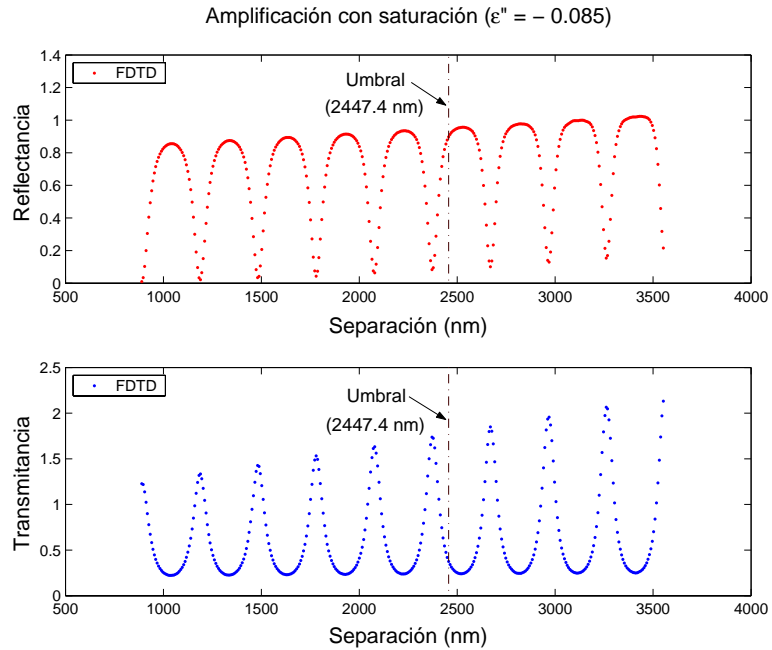


Figura 27: Reflectancia y transmitancia de dos centros esparcidores como función de su separación en el intervalo $0.8 \mu\text{m} < L < 5.6 \mu\text{m}$, para un medio con ganancia ($\epsilon'' = -0.085$) e intensidad de saturación $I_s = 6.52 \times 10^{12} \text{ erg/s cm}^2$.

muestreo de un $\Delta z = \lambda_o/125 = 0.007 \mu\text{m}$ y un $\Delta t = \Delta z/c = 0.024 \text{ fs}$. Los resultados se presentan en la figura 27 (ver el programa B.3).

De la figura 27 se observa que las oscilaciones ya no presentan la simetría entre la amplificación y la absorción o la divergencia de las amplitudes de reflexión y transmisión como se presentaron en los resultados anteriores. Se observa ahora un crecimiento lineal de la envolvente de las oscilaciones conforme se aumenta la separación entre las dos placas, debido a que la amplificación es superior a las pérdidas . Cuando se tiene esta situación el medio amplificador presenta un comportamiento similar al de un láser, lo cual concuerda mejor con lo que se puede esperar de un sistema de este tipo. Es decir, que los resultados teóricos anteriores son artificiales, y son causados por no tomar en cuenta las no linealidades del medio, que son de fundamental importancia cuando la ganancia supera a las pérdidas.

Capítulo IV

RESUMEN Y COMENTARIOS FINALES

En este capítulo se presenta un resumen y las principales conclusiones del trabajo realizado.

En esta tesis se ha descrito el desarrollo e implementación de un par de herramientas para estudiar la propagación y esparcimiento múltiple de luz en un medio unidimensional con amplificación. La primera es una técnica matricial que supone un medio lineal y está basada en ecuaciones independientes del tiempo (soluciones de la ecuación de Helmholtz). La segunda es un método numérico basado en una aproximación de diferencias finitas en el dominio del tiempo, que calcula el campo electromagnético a través del medio de manera secuencial. Con este método es posible incluir no linealidades del medio de manera dinámica.

Con la técnica matricial se trata la propagación de una onda electromagnética a través de un medio estratificado unidimensional. Se consideran varias situaciones, poniendo énfasis en aspectos relacionados con diferentes tipos de promedios (sobre un conjunto de realizaciones o sobre longitudes de onda) y las diferencias entre las superposiciones coherente e incoherente. Consideramos también el caso de medios aleatorios con amplificación. Para modelar el medio amplificador de manera sencilla, se adopta una constante dieléctrica con parte imaginaria negativa. Los resultados que se obtienen con esta técnica indican que la onda transmitida se amplifica inicialmente, pero que a partir de un punto en el que la ganancia supera a las pérdidas (el umbral del láser) se presenta una atenuación de la onda transmitida.

Debido a que estos resultados son contrarios a la intuición, y a que el uso de esta metodología para el estudio de medios amplificadores ha sido cuestionado en la literatura, procedimos a estudiar el mismo sistema con el método FDTD. Bajo la aproximación de diferencias finitas, se reescriben las ecuaciones de Maxwell en forma discreta. Con base a ellas, es posible calcular numéricamente los campos E y H en cada punto del espacio y cada tiempo. Para probar e ilustrar la técnica, consideramos primero la propagación de un pulso gaussiano, implementando una técnica para evitar reflexiones en los límites de la región computacional. Posteriormente, analizamos la propagación de una onda plana, realizando como en el caso anterior, las modificaciones necesarias para evitar estas reflexiones espurias.

Se presentan resultados de reflectancia y transmitancia para la propagación de una onda a través de diferentes sistemas lineales de multicapas, empleando los dos métodos teóricos propuestos. Los resultados del método FDTD coinciden con los obtenidos con el método matricial para el caso de medios transparentes o absorbentes. Sin embargo, cuando la amplificación supera a las pérdidas en el sistema, el método FDTD da resultados que divergen, mientras que con el método matricial se obtiene la ya mencionada atenuación. Aunque la divergencia del método FDTD es entendible, no es un resultado plausible físicamente. Esto permite argumentar que ambos resultados son incorrectos.

Para obtener resultados más acordes a la experiencia, se modificó el método FDTD para tomar en cuenta la saturación de la ganancia. Es decir, se resuelve el problema considerando cambios en el material debidos a la intensidad local. Para modelar la saturación de la ganancia en el medio amplificador, consideramos un medio dispersivo cuyo parámetro dependiente de la frecuencia fue la conductividad eléctrica. Se derivaron ecuaciones discretas para el campo electromagnético, incluyendo un coeficiente de saturación que define la no linealidad del medio. Se muestra el resultado de la reflectancia y transmitancia en función de la separación entre las placas que forman el

sistema tipo Fabry-Perot.

Del trabajo realizado se tienen las siguientes conclusiones:

- El método matricial es confiable y sencillo de implementar para el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión de un medio lineal estratificado (sistema unidimensional).
- En promedio, la propagación de la onda a través de un medio unidimensional con dos centros esparcidos en posiciones aleatorias puede ser descrito con base en la superposición de ondas en intensidad, ya que los resultados son los mismos que se obtienen superponiendo las amplitudes del campo. Es decir, los efectos de interferencia desaparecen al promediar.
- En contraste, en la propagación de la onda a través de un medio con tres o más centros esparcidos, los efectos de interferencia resultan importantes. Por consiguiente, no se puede tratar el problema con base en la superposición de intensidades. En este caso existen términos de interferencia que no desaparecen al promediar y disminuyen la transmitancia del sistema.
- En la propagación de ondas a través de sistemas aleatorios unidimensionales se presenta una especie de ergodicidad; bajo ciertas circunstancias, el promedio sobre un conjunto de realizaciones es equivalente al promedio sobre diferentes longitudes de onda.
- El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo es una técnica versátil y poderosa para resolver problemas de propagación electromagnética. El método es especialmente interesante en problemas que involucran inhomogeneidades y no linealidades en los medios involucrados. A pesar de que el método se deriva de

una aproximación de diferencias finitas, bajo ciertas circunstancias (paso mágico del tiempo) la técnica puede considerarse “exacta”.

- Ventajas del método FDTD aplicado al esparcimiento de la luz en un medio unidimensional:
 - Es conceptualmente sencillo y el requerimiento de memoria no es excesivo.
 - Permite especificar el material (dieléctrico, magnético, dispersivo, etc.) en cada punto del dominio computacional.
- Desventajas del método FDTD:
 - Aunque las ecuaciones resultantes son sencillas, la implementación del método está llena de sutilezas y fácilmente se pueden encontrar inestabilidades numéricas.
 - El muestreo debe ser lo suficientemente fino (incrementos inferiores a la longitud de onda) para evitar dispersión numérica. Por consiguiente, para dominios computacionales muy grandes, se requiere de tiempos de simulación muy largos.
 - El truncamiento del dominio computacional requiere de modificaciones que pueden ser complicadas de implementar.
- El resultado de la aparente simetría entre la amplificación y la absorción que se encuentra con métodos analíticos y con el método matricial es seguramente erróneo. El método FDTD con medios lineales produce resultados que divergen, lo cual va más de acuerdo a lo esperado con base en la consideración de los diferentes procesos de esparcimiento que ocurren en el sistema. Para describir adecuadamente la situación física, es necesario tomar en cuenta las no linealidades del medio.

Apéndice A

Programas para simular la propagación de una onda a través de un medio

En este apéndice se presentan los programas elaborados en Matlab que simulan la propagación de una onda plana a través de un medio unidimensional lineal. En la primera sección se tienen los programas de la propagación de la onda plana a través de un medio homogéneo con dos centros esparcidos. En la siguiente sección se tienen los programas de la propagación de la onda plana a través de un medio homogéneo con tres centros esparcidos. Finalmente en la tercera sección, el programa que calcula la reflectancia y transmitancia promedio a través de un sistema de multicapas para un medio transparente y el promedio del logaritmo de la transmitancia para un medio transparente y con amplificación.

A.1 Propagación de una onda a través de un medio con dos centros esparcidos

Programa A.1: `Doscoherente.m` Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con dos centros esparcidos. El promedio se obtiene bajo el número de realizaciones de los coeficientes de amplitud en función del índice de refracción del medio por el método matricial.

```
%Propagacion de la onda a traves de un medio con dos centros dispersores.  
%Promedio de la reflectancia y transmitancia sobre realizaciones por el metodo  
%matricial.  
clear;
```



```

%Indices de refraccion del medio circundante
n1=1.0;
n3=1.0;
%Longitud de onda de referencia
lo=1000;
%Separacion aleatoria entre los dos centros dispersores
rand('seed',-40);
d=10000+(14000-10000)*rand(1,20000);

n2=(1.1:0.1:6);
for m=1:50
    %Coeficientes de transmision y reflexion de las interfases para ambos
    %centros dispersores
    r12=(n2(m)-n1)/(n2(m)+n1);
    t12=(2*n2(m))/(n2(m)+n1);
    r23=(n3-n2(m))/(n3+n2(m));
    t23=(2*n3)/(n3+n2(m));

    %numero de onda
    k2=(2*pi/lo)*n2(m);
    for n=1:20000,
        %Coeficiente de reflexion y transmision de todo el sistema
        r1(n)=(r23+r12*exp(2*i*k2*d(n)))/(1+r12*r23*exp(2*i*k2*d(n)));
        t1(n)=(t12*t23*exp(i*k2*d(n)))/(1+r12*r23*exp(2*i*k2*d(n)));

        %Reflectancia y Transmitancia
        Ref(n)=(abs(r1(n)))^2;
        Tra(n)=(n1/n1)*(abs(t1(n)))^2;
    end
    meanRs(m)=mean(Ref);
    meanTs(m)=mean(Tra);
end

subplot(2,2,1),plot(n2,meanRs,'r. '),
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<R>')
axis([1,6,0,1])
hold on;
subplot(2,2,2),plot(n2,meanTs,'r. '),
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<T>')
axis([1,6,0,1])
hold on;

```

Programa A.2: `Dosincoherente.m` Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con dos centros esparcidos para el caso incoherente.

```

%Propagacion de la onda a traves de un medio con dos centros dispersores.
%Promedio de la reflectancia y transmitancia para el caso incoherente.
clear;

```

```

%Indices de refraccion del medio circundante
n1=1.0;
n3=1.0;
%longitud de onda
lo=1000;

n2=(1.1:0.1:6);
for m=1:50
    %Coeficientes de transmision y reflexion de las interfases para ambos
    %centros dispersores
    r12=(n2(m)-n1)/(n2(m)+n1);
    t12=(2*n2(m))/(n2(m)+n1);
    r23=(n3-n2(m))/(n3+n2(m));
    t23=(2*n3)/(n3+n2(m));

    %Reflectancia y Transmitancia de ambos centros dispersores
    R1(m)=(abs(r12))^2;
    T1(m)=(n1/n2(m))*(abs(t12))^2;
    R2(m)=(abs(r23))^2;
    T2(m)=(n2(m)/n3)*(abs(t23))^2;

    %Reflectancia y Transmitancia promedio de todo el sistema
    Rs(m)=(R1(m)+R2(m)-2*R1(m)*R2(m))/(1-R1(m)*R2(m));
    Ts(m)=(T1(m)*T2(m))/(1-R1(m)*R2(m));
end

subplot(2,2,1),plot(n2,Rs,'b'),
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<R>')
axis([1,6,0,1])
hold on;
subplot(2,2,2),plot(n2,Ts,'b'),
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<T>')
axis([1,6,0,1])
hold on;

```

A.2 Propagación de una onda a través de un medio con tres centros esparcidos

Programa A.3: `Trescoherente.m` Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con tres centros esparcidos. El promedio se obtiene bajo el número de realizaciones de los coeficientes de amplitud en función del índice de refracción del medio por el método matricial.

```

%Propagacion de la onda a traves de un medio con tres centros dispersores.
%Promedio de la reflectancia y transmitancia sobre realizaciones por el metodo
%matricial.
clear;

%Indices de refraccion de los medios
n1=1.0;

```

```

n3=1.0;
%Longitud de onda de referencia
lo=1000;
%numero de onda
k3=(2*pi/lo)*n3;
d3=lo/(4.0*n3);
rand('seed',-40);
%Separacion aleatoria entre los centros dispersores 1 y 2
D1=10000+(14000-10000)*rand(1,20000);
%Separacion aleatoria entre los centros dispersores 2 y 3
D2=14000+(18000-14000)*rand(1,20000);

n2=(1.1:0.1:6);
for m=1:50
    %Coeficientes de transmision y reflexion de las interfases para el
    %primer centro dispersor
    r12=(n2(m)-n1)/(n2(m)+n1);
    t12=(2*n2(m))/(n2(m)+n1);
    r23=(n3-n2(m))/(n3+n2(m));
    t23=(2*n3)/(n3+n2(m));
    %Coeficientes de transmision y reflexion de las interfases para el
    %tercer centro dispersor
    r32=(n2(m)-n3)/(n2(m)+n3);
    t32=(2*n2(m))/(n2(m)+n3);
    r21=(n1-n2(m))/(n1+n2(m));
    t21=(2*n1)/(n1+n2(m));

    %Coeficientes de reflexion y transmision del segundo centro dispersor
    rp3=(r32+r23*exp(2*i*k3*d3))/(1+r23*r32*exp(2*i*k3*d3));
    tp3=(t23*t32*exp(i*k3*d3))/(1+r23*r32*exp(2*i*k3*d3));

    %numero de onda
    k2=(2*pi/lo)*n2(m);

    for n=1:20000,
        %Coeficientes de reflexion y transmision de todo el sistema
        M1=[1/t12 conj(r12)/conj(t12); r12/t12 1/conj(t12)];
        MD1=[exp(i*k2*D1(n)) 0; 0 exp(-i*k2*D1(n))];
        M2=[1/tp3 conj(rp3)/conj(tp3); rp3/tp3 1/conj(tp3)];
        MD2=[exp(i*k2*D2(n)) 0; 0 exp(-i*k2*D2(n))];
        M3=[1/t21 conj(r21)/conj(t21); r21/t21 1/conj(t21)];
        Ms=M1*MD1*M2*MD2*M3;
        rs(n)=-Ms(2,1)/Ms(2,2);
        ts(n)=(det(Ms))/Ms(2,2);

        %Reflectancia y Transmitancia
        Ref(n)=(abs(rs(n)))^2;
        Tra(n)=(n1/n1)*(abs(ts(n)))^2;
    end
    meanRs(m)=mean(Ref);
    meanTs(m)=mean(Tra);
end
end

```

```

subplot(2,2,1),plot(n2,meanRs,'r. '),
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<R>')
axis([1,6,0,1])
hold on;
subplot(2,2,2),plot(n2,meanTs,'r. '),title('')
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<T>')
axis([1,6,0,1])
hold on;

```

Programa A.4: `Tresincoherente.m` Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio de la propagación de una onda plana a través de un medio con tres centros esparcidos para el caso incoherente.

```

%Propagacion de la onda a traves de un medio con dos centros dispersores.
%Promedio de la reflectancia y transmitancia para el caso incoherente.
clear;

%Indices de refraccion de los medios
n1=1.0;
n3=1.0;
%longitud de onda
lo=1000;
%numero de onda
k3=(2*pi/lo)*n3;
d3=lo/(4.0*n3);

n2=(1.1:0.1:6);
for m=1:50
    %Coeficientes de transmision y reflexion del primer centro dispersor
    r12=(n2(m)-n1)/(n2(m)+n1);
    t12=(2*n2(m))/(n2(m)+n1);
    r23=(n3-n2(m))/(n3+n2(m));
    t23=(2*n3)/(n3+n2(m));
    %Coeficientes de transmision y reflexion del tercer centro dispersor
    r32=(n2(m)-n3)/(n2(m)+n3);
    t32=(2*n2(m))/(n2(m)+n3);
    r21=(n1-n2(m))/(n1+n2(m));
    t21=(2*n1)/(n1+n2(m));

    %Coeficientes de reflexion y transmision del segundo centro dispersor
    rp3=(r32+r23*exp(2*i*k3*d3))/(1+r23*r32*exp(2*i*k3*d3));
    tp3=(t23*t32*exp(i*k3*d3))/(1+r23*r32*exp(2*i*k3*d3));
    %Reflectancia y Transmitancia de cada centro dispersor
    R1(m)=(abs(r12))^2;
    T1(m)=(n1/n2(m))*(abs(t12))^2;
    R2(m)=(abs(rp3))^2;
    T2(m)=(n2/n2)*(abs(tp3))^2;
    R3(m)=(abs(r21))^2;
    T3(m)=(n2(m)/n1)*(abs(t21))^2;

    %Reflectancia y Transmitancia promedio del sistema 13
    R13(m)=(R1(m)+R2(m)-R1(m)*R2(m)-R2(m)*R2(m))/(1-R2(m)*R2(m));
    T13(m)=(T1(m)*T2(m))/(1-R2(m)*R2(m));

```

```

    %Reflectancia y Transmitancia promedio de todo el sistema
    Rs(m)=(R13(m)+R3(m)-R13(m)*R3(m)-R3(m)*R3(m))/(1-R3(m)*R3(m));
    Ts(m)=(T13(m)*T3(m))/(1-R3(m)*R3(m));
end

subplot(2,2,1),plot(n2,Rs,'b'),
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<R>')
axis([1,6,0,1])
hold on;
subplot(2,2,2),plot(n2,Ts,'b'),
xlabel('Indice de refracción'); ylabel('<T>')
axis([1,6,0,1])
hold on;

```

A.3 Propagación de una onda a través de un sistema de multicapas

Programa A.5: `Multiprog.m` Cálculo de la reflectancia y transmitancia promedio para un medio transparente con respecto a la separación entre las placas para un sistema de 20 placas. Además el cálculo del promedio del logaritmo de la transmitancia para un medio transparente y con amplificación.

```

%Funcion para calcular propiedades estadisticas de la reflectancia y transmitancia
%para un sistema de multicapas aleatorias
function [Np,meanRef,meanTra,RTF,meanLnTra,Lnprom]=mult2(Nump,realiz,ep2)

%Indices de refraccion de los medios
n1=1.0;
%Para un medio transparente
n2=3.5;
%Para un medio amplificador
n2=2.5;

%Coeficientes de transmision y reflexion de la primera interfase
r12=(n2-n1)/(n1+n2)
t12=(2*n2)/(n1+n2);
%Coeficientes de transmision y reflexion de la segunda interfase
r21=(n1-n2)/(n2+n1);
t21=(2*n1)/(n2+n1);

%Longitud de onda de referencia
lo=0.8;
%Parte real de la constante dielectrica para el medio amplificador
ep1=(n2)^2;
%numero de onda
k2=(2*pi/lo)*sqrt(ep1+ep2*i);

%Parte real e imaginaria de la constante dielectrica para el aire
ep3=(n1)^2;
ep4=0.0;
%numero de onda

```

```

k3=(2*pi/lo)*sqrt(ep3+ep4*i);

rand('seed',-40);
%Matrices nulas de entrada
Np=(1:1:Nump);
meanRef = zeros(Nump,1);
meanTra = meanRef;
meanLnTra = meanRef;
RTF = meanRef;
Lnprom = meanRef;

%Numero de placas planas
for n=1:Nump,
    %Numero de iteraciones
    if n == 1
        Mt11 = 1.0 ; Mt12 = 0.0;
        Mt21 = 0.0 ; Mt22 = 1.0;
    else
        d2=4.3*(1.0+(rand(realiz,1)-0.5)*2.2);
        %Matriz del espacio
        Mm11 = exp(i*k2.*d2) ; Mm22 = exp(-i*k2.*d2);
        Mt11 = Mm11.*am11 ; Mt12 = Mm11.*am12;
        Mt21 = Mm22.*am21 ; Mt22 = Mm22.*am22;
    end

    %Espesor del Fabry-Perot
    d1=3.2*(1.0+(rand(realiz,1)-0.5)*1.1);
    %Coeficientes de reflexion y transmision de las peliculas
    ri=(r21+r12.*exp(2*k3.*d1*i))./(1+r12*r21.*exp(2*k3.*d1*i));
    ti=(t12*t21.*exp(k3.*d1*i))./(1+r12*r21.*exp(2*k3.*d1*i));
    %Matriz del Fabry-Perot
    Mp11 = 1./ti; Mp12 = conj(ri)./conj(ti);
    Mp21 = ri./ti; Mp22 = 1./conj(ti);

    %Producto de ambas matrices
    am11 = Mp11.*Mt11 + Mp12.*Mt21; am12 = Mp11.*Mt12 + Mp12.*Mt22;
    am21 = Mp21.*Mt11 + Mp22.*Mt21; am22 = Mp21.*Mt12 + Mp22.*Mt22;

    %Coeficientes de reflexion y transmision de todo el sistema
    rs= -am21./am22; ts = (am11.*am22-am12.*am21)./am22;
    auxr = (abs(rs)).^2;
    meanRef(n) = mean(auxr);
    auxr = (abs(rs)).^2;
    auxr = (abs(rs)).^2;
    meanTra(n) = mean(auxt);
    meanLnTra(n) = mean(log(auxt));
    %Fluctuaciones de transmision relativas
    RTF(n)=std(auxt)/mean(auxt);
    Lnprom(n)=log(meanTra(n));
end

```

Apéndice B

Programas para simular la propagación de una onda a través de medios lineales y no lineales

En este apéndice se presentan los programas elaborados en Matlab y Fortran que simulan la propagación de una onda plana a través de medios lineales y no lineales con saturación.

B.1 Propagación de una onda a través de una película dieléctrica por el método matricial

Programa B.6: `FPMatriz.m` Cálculo de la reflectancia y transmitancia de la propagación de una onda plana a través de un Fabry-Perot por el método matricial. Se consideraron los siguientes tipos de medios cambiando el signo a la parte imaginaria de la constante dieléctrica: transparente, con absorción y con amplificación.

```
%Calcula la reflectancia y transmitancia de la propagacion de una onda
%plana a traves de un Fabry-Perot por medio de las matrices de
%transferencia, cambiando el signo de la parte imaginaria de la constante
%dielectrica para un medio transparente, con absorcion y con amplificacion.
clear;

%Indices de refraccion de los medios
n1=1.0;
%Pelicula dielectrica
n2=2.5;
%Medio de propagacion
n3=1.5;

%Coeficientes de transmision y reflexion del primer espejo
r12=(n2-n1)/(n2+n1);
t12=(2*n2)/(n2+n1);
r23=(n3-n2)/(n3+n2);
```

```

t23=(2*n3)/(n3+n2);
%Coeficientes de transmision y reflexion del segundo espejo
r32=(n2-n3)/(n2+n3);
t32=(2*n2)/(n2+n3);
r21=(n1-n2)/(n1+n2);
t21=(2*n1)/(n1+n2);

%Longitud de onda de referencia
lo=890;
%Parte real e imaginaria de la constante dielectrica
ep1=(n2)^2;
ep2=0.0;
%numero de onda
k2=(2*pi/lo)*sqrt(ep1+ep2*i);
d=lo/(4.0*n2);
%Coeficientes de reflexion y transmision de cada espejo
ri=(r23+r12*exp(2*i*k2*d))/(1+r12*r23*exp(2*i*k2*d));
ti=(t12*t23*exp(i*k2*d))/(1+r12*r23*exp(2*i*k2*d));
rf=(r21+r32*exp(2*i*k2*d))/(1+r32*r21*exp(2*i*k2*d));
tf=(t32*t21*exp(i*k2*d))/(1+r32*r21*exp(2*i*k2*d));

%Parte real e imaginaria de la constante dielectrica
ep3=(n3)^2;
%Tipo de medio (transparente, absorbente y amplificador)
ep4=-0.01;
%numero de onda
k3=(2*pi/lo)*sqrt(ep3+ep4*i);
D=(800:1:3186.7);
for n=1:2387,
    %Coeficientes de reflexion y transmision de todo el sistema
    M123=(1/1)*[1/ti conj(ri)/conj(ti); ri/ti 1/conj(ti)];
    MD=[exp(i*k3*D(n)) 0; 0 exp(-i*k3*D(n))];
    M321=(1/1)*[1/tf conj(rf)/conj(tf); rf/tf 1/conj(tf)];
    Ms=M123*MD*M321;
    rs=-Ms(2,1)/Ms(2,2);
    ts=det(Ms)/Ms(2,2);

    %Reflectancia y Transmitancia
    Ref(n)=(abs(rs))^2;
    Tra(n)=(n1/n1)*(abs(ts))^2;
end

subplot(2,1,1),plot(D,Ref,'r')
%,title('Amplificacion')
xlabel('Separación (nm)'); ylabel('Reflectancia')
hold on;
subplot(2,1,2),plot(D,Tra,'b'),
xlabel('Separación (nm)'); ylabel('Transmitancia')

```


B.2 Propagación de una onda a través de un medio lineal por el método FDTD

Los índices no enteros no se pueden implementar en Fortran y Matlab, por lo que en los programas utilizamos una notación en la que $H_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2})$ está representado por $Hx(i)$. Por consiguiente, las ecuaciones (92) y (99) se implementaron en el código de la siguiente forma:

$$Hx(i) = Da Hx(i) + Db [Ey(i+1) - Ey(i)] \quad (140)$$

$$Ey(i) = Ca Ey(i) + Cb [Hx(i) - Hx(i-1)] \quad (141)$$

donde para E_y , los índices i y n corresponden a $z = i\Delta z$ y $t = n\Delta t$ y para H_x , los índices i y n corresponden a $z = (i + \frac{1}{2})\Delta z$ y $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$.

Programapágina

Programa B.7: `0PFPL.for` Cálculo de la reflectancia y transmitancia de la propagación de una onda plana a través de un Fabry-Perot con un medio lineal por el método de Diferencias Finitas en el dominio del tiempo. Se consideraron los siguientes tipos de medios cambiando el signo a la parte imaginaria de la constante dieléctrica: transparente, con absorción y con amplificación.

```

program Onda Plana a traves de un Fabry Perot con un medio lineal
implicit none
integer Nx,Nt,pol,n,i,Nl,Nr,ncr,nct,jMr,XMl,XMr,XL,Nlambda,Deltesp
parameter (Nx=1250,Nt=15000)
real*8 Eyi(Nx),Hxi(Nx),Eyia(Nx),Hxia(Nx),xi(Nx),Eys(Nt),Hxs(Nt)
real*8 Eysa(Nt),Hxsa(Nt),Eyt(Nt),Hxt(Nt),Eyta(Nt),Hxta(Nt),n0
real*8 lambda0,dx,dt,cc,pi,epsc,tau,tc,omega0,sigma0,sfact,eps
real*8 Inter,Intet,Intera,Inteta,Ca,Cb,Db,dd,np,nl

c --- Polarizacion s pol=1; polarizacion p pol=2
  pol=1
  pi=4.0d0*datan(1.0d0)
  Nlambda=125
c --- c en micras/seg; lambda0 en micras
  cc=2.99792458D14
  lambda0=0.89d0
  dx=lambda0/Nlambda
  dt=dx/cc
  n0=1.0d0
  n1=1.5d0
  np=2.5d0
  omega0=2.0d0*pi*cc/lambda0
  XL=Nlambda
  XMl=2*Nlambda
  tau=2.0*Nlambda*dt
  dd=4.0D0*pi*dt
  Nl=int(lambda0/dx)
  Nr=Nx-5
  Deltesp=int(lambda0/(4.0*np*dx))

```

```

open (16,file='paramt.dat')
write(16,*) cc
write(16,*) lambda0
write(16,*) Nlambda
write(16,*) Nx
write(16,*) Nt
write(16,*) XL
write(16,*) XMl
write(16,*) Deltesp
close(16)

c --- Inicializacion de los vectores igual a cero
open (17,file='xt.dat')
do i=1,Nx
  Eyt(i)=0.0D0
  Hxt(i)=0.0D0
  Eyta(i)=0.0D0
  Hxta(i)=0.0D0
  Eyi(i)=0.0D0
  Hxi(i)=0.0D0
  Eyia(i)=0.0D0
  Hxia(i)=0.0D0
  Eys(i)=0.0D0
  Hxs(i)=0.0D0
  Eysa(i)=0.0D0
  Hxsa(i)=0.0D0
  xi(i)=i*dx
  write(17,*) xi(i)
end do
close(17)

c --- Ef(n,i)=Ef a t=t0+n*dt y a x=x0+i*dx
c --- Hf(n,i)=Hf a t=t0+(n+0.5)*dt y a x=x0+(i+0.5)*dx

  if (pol.eq.1) then
c --- Polarizacion s
  sfact=cc*dt/dx
  else
c --- Polarizacion p
  sfact=-cc*dt/dx
  end if
c --- Constantes para el medio lineal (transparente, absorbente o amplificador)
  eps=n1**2
  epsc=-0.085D0
  sigma0=(omega0*epsc)/(4.0D0*pi)
  Ca=(2.0D0*eps-dd*sigma0)/(2.0D0*eps+dd*sigma0)
  Cb=(2.0D0*sfact)/(2.0D0*eps+dd*sigma0)

  ncr=0
  Inter=0.0
  open(18,file="RefAmpT.dat")
  nct=0
  Intet=0.0
  open(19,file="TraAmpT.dat")

c --- Ciclo para la separacion entre los espejos
do jMr=1,3*Nl

```

```

      XMr=XMr+Nl+Deltesp+(jMr-1)
c   --- Fuente para un tiempo t=0
      do i=1,Nx
        eps=n0**2
        Hxia(i)=sin(omega0*dt-omega0/cc*i*dx)
        Eyia(i)=-eps*sin(omega0*dt-omega0/cc*i*dx)
        Hxta(i)=Hxsa(i)+Hxia(i)
        Eyta(i)=Eysa(i)+Eyia(i)
        Hxt(i)=Hxta(i)
        Eyt(i)=Eyta(i)
      end do

c   --- Iteraciones
      do n=2,Nt
        do i=2,Nx
c   --- Fuente para un tiempo t>0
          eps=n0**2
          Hxi(i)=sin(omega0*n*dt-omega0/cc*i*dx)
          Eyi(i)=-eps*sin(omega0*n*dt-omega0/cc*i*dx)
          Hxt(i)=Hxs(i)+Hxi(i)
          Eyt(i)=Eys(i)+Eyi(i)
          if (i.lt.XL) then
c   --- Campo electromagnetico esparcido
            eps=n0**2
            Hxs(i)=Hxsa(i)+sfact*(Eysa(i)-Eysa(i-1))
            Eys(i-1)=Eysa(i-1)+(sfact/eps)*(Hxs(i)-Hxs(i-1))
            if (i.eq.(XL-1)) then
              Hxs(i)=Hxsa(i)+sfact*(Eyta(i)-Eyia(i)-Eysa(i-1))
              Eys(i-1)=Eysa(i-1)+(sfact/eps)*(Hxs(i)-Hxs(i-1))
            end if
          else
c   --- Campo electromagnetico total
            if (i.lt.XMl.or.i.gt.(XMr+Deltesp)) then
c   --- Campo electromagnetico fuera de las placas
              eps=n0**2
              if(i.eq.XL) then
                Hxt(i)=Hxta(i)+sfact*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
                Eyt(i-1)=Eyta(i-1)+(sfact/eps)*(Hxt(i)-Hxs(i-1)-Hxi(i-1))
              else
                Hxt(i)=Hxta(i)+sfact*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
                Eyt(i-1)=Eyta(i-1)+(sfact/eps)*(Hxt(i)-Hxt(i-1))
              end if
            else if (i.le.(XMl+Deltesp).or.i.ge.XMr) then
c   --- Campo electromagnetico en cada placa
              eps=np**2
              Hxt(i)=Hxta(i)+sfact*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
              Eyt(i-1)=Eyta(i-1)+(sfact/eps)*(Hxt(i)-Hxt(i-1))
            else
c   --- Campo electromagnetico en el medio lineal
              Hxt(i)=Hxta(i)+sfact*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
              Eyt(i-1)=Ca*Eyta(i-1)+Cb*(Hxt(i)-Hxt(i-1))
            end if
          end if
        end do
      end do

c   --- Condiciones de frontera
c   --- Frontera izquierda

```

```

      Hxs(1)=Hxsa(2)
      Hxs(2)=Hxsa(2)+sfact*(Eysa(2)-Eysa(1))
      Eys(1)=Eysa(1)+(sfact/eps)*(Hxs(2)-Hxs(1))
c   --- Frontera Derecha
      Eyt(Nx)=Eyta(Nx-1)
      Hxt(Nx)=Hxta(Nx)+sfact*(Eyta(Nx)-Eyta(Nx-1))
      Eyt(Nx-1)=Eyta(Nx-1)+(sfact/eps)*(Hxt(Nx)-Hxt(Nx-1))
c   --- Asignacion de los valores del campo electromagnetico a un tiempo anterior
      do i=1,Nx
          Hxta(i)=Hxt(i)
          Eyta(i)=Eyt(i)
          Hxsa(i)=Hxs(i)
          Eysa(i)=Eys(i)
          Hxia(i)=Hxi(i)
          Eyia(i)=Eyi(i)
      end do
c   --- Promedio temporal
c   --- Reflectancia
      ncr=ncr+1
      Inter=Inter+(1.0D0/(tau))*Eys(5)*Hxs(5)*dt
      if (ncr.ge.2.0D0*Nlambda) then
          ncr=0
          Intera=Inter
          Inter=0.0D0
      end if
c   --- Transmitancia
      nct=nct+1
      Intet=Intet+(1.0D0/(tau))*Eyt(Nr)*Hxt(Nr)*dt
      if (nct.ge.2.0D0*Nlambda) then
          nct=0
          Inteta=Intet
          Intet=0.0D0
      end if
      end do
      write(18,*) abs(Intera)/0.5D0
      write(19,*) abs(Inteta)/0.5D0
      end do
      close(18)
      close(19)

      end

```

B.3 Propagación de una onda a través de un medio no lineal por el método FDTD

Programa B.8: OPFPNL.for Cálculo de la reflectancia y transmitancia de la propagación de una onda plana a través de un Fabry-Perot con un medio no lineal por el método de Diferencias Finitas en el dominio del tiempo. Se considerará el medio amplificador con saturación de la ganancia.

```

c   --- Calculo de la Reflectancia y Transmitancia por el metodo FDTD

```

```

c --- para un medio con amplificacion y saturacion.
  program Onda Plana a traves de un FP con un medio No lineal
  implicit none
  integer Nx,Nt,pol,n,i,Nl,Nr,ncr,nct,jMr,XMl,XMr,XL,Nlambda,Deltesp
  parameter (Nx=1250,Nt=10000)
  real*8 Eyi(Nx),Hxi(Nx),Eyia(Nx),Hxia(Nx),xi(Nx),Eys(Nt),Hxs(Nt)
  real*8 Eysa(Nt),Hxsa(Nt),Eyt(Nt),Hxt(Nt),Eyta(Nt),Hxta(Nt),n0
  real*8 lambda0,dx,dt,cc,pi,epsc,tau,tc,omega0,sigma0,n1,sfact,eps
  real*8 Inter,Intet,Intera,Inteta,Ca,Cb,Db,dd,np
  real*8 A1,A2,A3,A4,Fyt(Nx),Jyt(Nx),Fyta(Nx),Jyta(Nx),T2,beta,s(Nx)
  real*8 Eytaa(Nx),Hxtaa(Nx),It(Nx),Is

c --- polarizacion s: pol=1; polarizacion p: pol=2
  pol=1
  pi=4.0d0*datan(1.0d0)
  Nlambda=125

c --- c en micras/seg; lambda0 en micras
  cc=2.99792458D14
  lambda0=0.89d0
  dx=lambda0/Nlambda
  dt=dx/cc

c --- Indices de refraccion para cada medio
  n0=1.0d0
  n1=1.5d0
  np=2.5d0
  eps=n0**2
  omega0=2.0d0*pi*cc/lambda0
  XL=Nlambda
  XMl=2*Nlambda
  tau=2.0*Nlambda*dt
  dd=4.0D0*pi*dt
  Nl=int(lambda0/dx)
  Nr=Nx-5
  Deltesp=int(lambda0/(4.0*np*dx))

c --- Tiempo de relajacion del dipolo (seg)
  T2=0.07D-12

c --- Intensidad de saturacion (erg/seg*cm^2)
  Is=6.52D12

c --- Guardar parametros
  open (16,file='paramsat.dat')
  write(16,*) cc
  write(16,*) lambda0
  write(16,*) Nlambda
  write(16,*) Nx
  write(16,*) Nt
  write(16,*) XL
  write(16,*) XMl
  write(16,*) Deltesp
  close(16)

c --- Definicion del vector de posicion
  open (17,file='xsat.dat')
  do i=1,Nx
    xi(i)=i*dx
    write(17,*) xi(i)
  end do

```

```

close(17)

    if (pol.eq.1) then
c --- polarizacion s
        sfact=cc*dt/dx
    else
c --- polarizacion p
        sfact=-cc*dt/dx
    end if

    ncr=0
    Inter=0.0
    open(18,file="Refsat.dat")
    nct=0
    Intet=0.0
    open(19,file="Trasat.dat")

c --- Separacion entre las placas
    do jMr=1,3*Nl
        XMr=Xl1+Nl+Deltesp+(jMr-1)
c --- Fuente para un tiempo t=0
        do i=1,Nx
            Hxia(i)=sin(omega0*dt-omega0/cc*i*dx)
            Eyia(i)=-eps*sin(omega0*dt-omega0/cc*i*dx)
            Hxta(i)=Hxsa(i)+Hxia(i)
            Eyta(i)=Eysa(i)+Eyia(i)
            Hxt(i)=Hxta(i)
            Eyt(i)=Eyta(i)
        end do

c --- Iteraciones
        do n=2,Nt
            do i=2,Nx
                eps=n0**2
c --- Fuente para un tiempo t>0
                Hxi(i)=sin(omega0*n*dt-omega0/cc*i*dx)
                Eyi(i)=-eps*sin(omega0*n*dt-omega0/cc*i*dx)
                Hxt(i)=Hxs(i)+Hxi(i)
                Eyt(i)=Eys(i)+Eyi(i)
                if (i.lt.XL) then
c --- Campo electromagnetico esparcido
                    eps=n0**2
                    epsc=0.0d0
                    sigma0=(omega0*epsc)/(4.0d0*pi)
                    Ca=(2.0d0*eps-dd*sigma0)/(2.0d0*eps+dd*sigma0)
                    Cb=(2.0d0*sfact)/(2.0d0*eps+dd*sigma0)
                    Db=sfact
                    Hxs(i)=Hxsa(i)+Db*(Eysa(i)-Eysa(i-1))
                    Eys(i-1)=Ca*Eysa(i-1)+Cb*(Hxs(i)-Hxs(i-1))
                    if (i.eq.(XL-1)) then
                        Hxs(i)=Hxsa(i)+Db*(Eyta(i)-Eyia(i)-Eysa(i-1))
                        Eys(i-1)=Ca*Eysa(i-1)+Cb*(Hxs(i)-Hxs(i-1))
                    end if
                else
c --- Campo electromagnetico total
                    if (i.lt.Xl1.or.i.gt.(XMr+Deltesp)) then
c --- Campo electromagnetico fuera de las placas

```

```

eps=n0**2
epsc=0.0d0
sigma0=(omega0*epsc)/(4.0d0*pi)
Ca=(2.0D0*eps-dd*sigma0)/(2.0D0*eps+dd*sigma0)
Cb=(2.0D0*sfact)/(2.0D0*eps+dd*sigma0)
Db=sfact
if(i.eq.XL) then
  Hxt(i)=Hxta(i)+Db*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
  Eyt(i-1)=Ca*Eyta(i-1)+Cb*(Hxt(i)-Hxs(i-1)-Hxi(i-1))
else
  Hxt(i)=Hxta(i)+Db*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
  Eyt(i-1)=Ca*Eyta(i-1)+Cb*(Hxt(i)-Hxt(i-1))
end if
else if (i.le.(Xm1+Deltesp).or.i.ge.XMr) then
c --- Campo electromagnetico en cada placa
  eps=np**2
  epsc=0.0d0
  sigma0=(omega0*epsc)/(4.0d0*pi)
  Ca=(2.0D0*eps-dd*sigma0)/(2.0D0*eps+dd*sigma0)
  Cb=(2.0D0*sfact)/(2.0D0*eps+dd*sigma0)
  Db=sfact
  Hxt(i)=Hxta(i)+Db*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
  Eyt(i-1)=Ca*Eyta(i-1)+Cb*(Hxt(i)-Hxt(i-1))
else
c --- Medio no lineal
c --- Intensidad dentro del medio no lineal
  if (Eyta(i-1).gt.Eytaa(i-1)) then
    It(i)=(cc/(8.0D0*pi))*n1*Eyta(i-1)*Eyta(i-1)
    s(i)=1.0D0/(1.0D0+It(i)/Is)
c --- Coeficiente de intensidad para un medio lineal
c --- s(i)=1.0D0
  else
    It(i)=(cc/(8.0D0*pi))*n1*Eytaa(i-1)*Eytaa(i-1)
    s(i)=1.0D0/(1.0D0+It(i)/Is)
c --- Coeficiente de intensidad para un medio lineal
c --- s(i)=1.0D0
  end if
  eps=n1**2
  epsc=-0.085D0
  sigma0=(omega0*epsc)/(4.0D0*pi)
  Db=sfact
c --- Definicion de constantes para un medio no lineal
  beta=8.0D0*eps*T2*(dt+T2)+dt*dt*(4.0D0*pi*s(i)*sigma0*(dt
& +2.0D0*T2)+2.0D0*eps*(1.0D0+(omega0*T2)**2))
  A1=(dt**2)*(4.0D0*cc*dt*s(i)*sigma0*(dt+2.0D0*T2))
& /(dx*beta)
  A2=(dt**2)*(8.0D0*eps*s(i)*sigma0*dt)/(beta)
  A3=-4.0D0*(dt**2)*(2.0D0*eps*(1.0D0+(omega0*T2)**2)
& +4.0D0*pi*sigma0*s(i)*(dt+2.0D0*T2))/(beta)
  A4=- (8.0D0*eps*T2*(dt-T2)+dt*dt*(2.0D0*eps*(1.0D0+(omega0
& *T2)**2)+4.0D0*pi*s(i)*sigma0*(dt+2.0D0*T2)))/beta
c --- Campo electromagnetico para un medio no lineal
  Hxt(i)=Hxta(i)+Db*(Eyta(i)-Eyta(i-1))
  Fyt(i-1)=A1*(Hxt(i)-Hxt(i-1))+A2*Eyta(i-1)
& +A3*Jyta(i-1)+A4*Fyta(i-1)
  Jyt(i-1)=Jyta(i-1)+1/2.0D0*(Fyt(i-1)+Fyta(i-1))

```

```

                Eyt(i-1)=Eyta(i-1)+(Db/eps)*(Hxt(i)-Hxt(i-1))
&                -4.0D0*pi/(2.0D0*eps)*(Jyt(i-1)+Jyta(i-1))
                end if
            end if
        end do
c --- Condiciones de limite
c --- Limite izquierdo
        Hxs(1)=Hxsa(2)
        Hxs(2)=Hxsa(2)+sfact*(Eysa(2)-Eysa(1))
        Eys(1)=Eysa(1)+(sfact/eps)*(Hxs(2)-Hxs(1))
c --- Limite derecho
        Eyt(Nx)=Eyta(Nx-1)
        Hxt(Nx)=Hxta(Nx)+sfact*(Eyta(Nx)-Eyta(Nx-1))
        Eyt(Nx-1)=Eyta(Nx-1)+(sfact/eps)*(Hxt(Nx)-Hxt(Nx-1))
c --- Asignacion de los valores del campo electromagnetico a un tiempo anterior
        do i=1,Nx
            Hxta(i)=Hxt(i)
            Eyta(i)=Eyt(i)
            Hxsa(i)=Hxs(i)
            Eysa(i)=Eys(i)
            Hxia(i)=Hxi(i)
            Eyia(i)=Eyi(i)
            Hxtaa(i)=Hxta(i)
            Eyttaa(i)=Eyta(i)
            Fyta(i)=Fyt(i)
            Jyta(i)=Jyt(i)
        end do
c --- Promedio temporal
c --- Reflectancia
        ncr=ncr+1
        Inter=Inter+(1.0D0/(tau))*Eys(5)*Hxs(5)*dt
        if (ncr.ge.2.0D0*Nlambda) then
            ncr=0
            Intera=Inter
            Inter=0.0D0
        end if
c --- Transmitancia
        nct=nct+1
        Intet=Intet+(1.0D0/(tau))*Eyt(Nr)*Hxt(Nr)*dt
        if (nct.ge.2.0D0*Nlambda) then
            nct=0
            Inteta=Intet
            Intet=0.0D0
        end if
    end do
    write(18,*) abs(Intera)/0.5D0
    write(19,*) abs(Inteta)/0.5D0
end do
close(18)
close(19)

end

```


Bibliografía

- Akkermans, E. y Maynard, R. (1985). Weak Localization and Anharmonicity of Phonons. *Physical Review B*, 32(12):7850–7862.
- Anderson, P. W. (1958). Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review*, 109(5):1492–1505.
- Anderson, P. W. (1985). The Question of Classical Localization. A Theory of White Paint. *Philos. Mag. B*, 52(3):505–509.
- Basinger, S. A. y Brady, D. J. (1994). Finite-Difference Time-Domain Modeling of Dispersive Nonlinear Fabry-Perot Cavities. *J. Opt. Soc. Am. B*, 11(8):1504–1511.
- Bérenger, J.-P. (1994). A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *J. Comput. Physics*, 114(9):185–200.
- Berger, G. A. Kempe, M. y Genack, A. Z. (1997). Dynamics of Stimulated Emission from Random Media. *Physical Review E*, 56(5):6118–6122.
- Born, M. y Wolf, E. (1980). *Principles of Optics*. Pergamon Press, sexta edición.
- Burin, A. L. Ratner, M. A. Cao, H. y Chang, R. P. H. (2001). Model for a Random Laser. *Phys. Rev. Lett.*, 87(21):215503 1–215503 4.
- Cao, H. Zhao, Y. G. Ho, S. T. Seeling, E. W. Wang, Q. H. y Chang, R. P. H. (1999). Random Laser Action in Semiconductor Powder. *Phys. Rev. Lett.*, 82(11):2278–2281.
- Cho, S. K. (1990). *Electromagnetic Scattering*. SpringerVerlag, primera edición.
- Courant, R. Friedrichs, K. y Lewy, H. (1928). On the partial differential equations of mathematical physics. *Math. Ann.*, 100:32–74.

- Freilikher, V. Pustilnik, M. y Yurkevich, I. (1997). Statistical Properties of the Reflectance and Transmittance of an Amplifying Random Medium. *Physical Review B*, 56(10): 5974–5977.
- Frolov, S. V. Vardeny, Z. V. Yoshino, K. Zakhidov, A. y Baughman, R. H. (1999). Stimulated Emission in High-Gain Organic Media. *Physical Review B*, 59(8): R5284–R5287.
- Goodman, J. W. (1985). *Statistical Optics*. John Wiley & Sons, primera edición.
- Hagness, S. C. Joseph, R. M. y Taflove, A. (1996). Subpicosecond Electrodynamics of Distributed Bragg Reflector Microlasers: Results from Finite Difference Time Domain Simulations. *Radio Science*, 31(4): 931–941.
- Hawkins, R. J. y Kallman, J. S. (1994). Lasing in Tilted-Waveguide Semiconductor Laser Amplifiers. *Optical and Quantum Electronics*, 26: S207–S217.
- Hecht, E. (1998). *Óptica*. Addison Wesley, tercera edición.
- Ishimaru, A. (1978). *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, volumen 1. Academic Press, primera edición.
- Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, segunda edición.
- Jiang, X. Li, Q. y Soukoulis, S. M. (1999). Symmetry between Absorption and Amplification in Disordered Media. *Physical Review B*, 59(14): R9007–R9010.
- Jiang, X. y Soukoulis, C. M. (2000). Time Dependent Theory for Random Lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 85(1): 70–73.
- John, S. (1997). Frozen Light. *Nature*, 390: 661–662.
- John, S. y Pang, G. (1996). Theory of Lasing in a Multiple-Scattering Medium. *Physical Review A*, 54(4): 3642–3652.

- Joseph, R. M. y Taflove, A. (1997). FDTD Maxwell's Equations Models for Nonlinear Electrodynamics and Optics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(3):364–374.
- Joshi, S. K. y Jayannavar, A. M. (1997). Transmission and Reflection from a Disordered Lasing Medium. *Physical Review B*, 56(19):12038–12041.
- Joshi, S. K. Sahoo, D. y Jayannavar, A. M. (2000). Modeling of Stochastic Absorption in a Random Medium. *Physical Review B*, 62(2):880–885.
- Kuga, Y. y Ishimaru, J. (1984). Retroreflectance from a Dense Distribution of Spherical Particles. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8(8):831–835.
- Lawandy, N. M. Balachandran, R. M. Gomes, A. S.L. y Sauvain, E. (1994). Laser Action in Strongly Scattering Media. *Nature*, 368:436–438.
- Letokhov, V. S. (1968). Generation of Light by a Scattering Medium with Negative Resonance Absorption. *Sov. Phys. JETP*, 26:835.
- Maradudin, A. A. Michel, T. McGurn, A. R. y Mendez, E. R. (1990). Enhanced Backscattering of Light from a Random Grating. *Annals of Physics*, 203(2):255–307.
- Mendez, E. R. y O'Donnell, K. A. (1987). Observation of Depolarization and Backscattering Enhancement in Light Scattering from Gaussian Random Surfaces. *Opt. Commun.*, 61(2):91–95.
- Morse, P. M. y Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, primera edición.
- O'Donnell, K. A. y Mendez, E. R. (1987). Experimental Study of Scattering from Characterized Random Surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(7):1194–1205.
- Paasschens, J. C. J. Misirpashaev, T. S. y Beenakker, W. J. (1996). Localization of Light: Dual Symmetry between Absorption and Amplification. *Physical Review B*, 54:11887–11890.

- Peterson, A. F. Ray, S. L. y Mittra, R. (1998). *Computational Methods for Electromagnetics*. IEEE Press, primera edición.
- Pradhan, P. y Kumar, N. (1994). Localization of Light in Coherently Amplifying Random Media. *Physical Review B*, 50(13):9644–9647.
- Scheffold, F. Lenke, R. Tweer, R. y Maret, G. (1999). Localization or Classical Diffusion of Light. *Nature*, 398(18):206–207.
- Shukri, M. y Armstrong, R. L. (2000). Coherent, Direccional, Laserlike Emission from Random Gain Media. *Applied Optics*, 39(24):4300–4305.
- Smith, G. S. (1997). *An Introduction to Classical Electromagnetic Radiation*. Cambridge University Press, primera edición.
- Taflove, A. (1995). *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, primera edición.
- Takayama, Y. y Klaus, W. (2002). Reinterpretation of the Auxiliary Differential Equation Method for FDTD. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 12(3):102–104.
- van Albada, M. P. y Lagendijk, A. (1985). Observation of Weak Localization of Light in a Random Medium. *Phys. Rev. Lett.*, 55(24):2692–2695.
- van Albada, M. P. van der Mark, M. B. y Lagendijk, A. (1987). Observation of Weak Localization of Light in a Finite Slab: Anisotropy Effects and Light-Path Classification. *Phys. Rev. Lett.*, 58(4):361–364.
- van Soest, G. Poelwijk, F. J. Sprik, R. y Lagendijk, A. (2001). Dynamics of a Random Laser above Threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 86(8):1522–1525.
- Wiersma, D. S. y Cavalieri, S. (2001). A Temperature-Tunable Random Laser. *Nature*, 414:708–709.

- Wiersma, D. S. y Lagendijk, A. (1996). Light Diffusion with Gain and Random Lasers. *Physical Review E*, 54(4):4256–4265.
- Wiersma, D. S. van Albada, M. P. y Lagendijk, A. (1995a). Coherent Backscattering of Light from Amplifying Random Media. *Phys. Rev. Lett.*, 75(9):1739–1742.
- Wiersma, D. S. van Albada, M. P. van Tiggelen, B. A. y Lagendijk, A. (1995b). Experimental Evidence for Recurrent Multiple Scattering Events of Light in Disordered Media. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21):4193–4196.
- Yee, K. S. (1966). Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 14:302–307.
- Zhang, Z.-Q. (1995). Light Amplification and Localization in Randomly Layered Media With Gain. *Physical Review B*, 52(11):7960–7964.
- Zyuzin, A. Y. (1995). Transmission Fluctuations and Spectral Rigidity of Lasing States in a Random Amplifying Medium. *Physical Review E*, 51(6):5274–5278.