

TESIS DEFENDIDA POR

Domitilo Najera Navarrete

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ:

---

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

*Director del Comité*

---

Dr. Cecilio Javier Rebollar Bustamante

*Miembro del Comité*

---

Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva

*Miembro del Comité*

---

Dr. Jesús Favela Vara

*Jefe del Depto. de Cs. de la Computación*

---

Dr. Luis Alberto Delgado Argote

*Director de Estudios de Posgrado*

Ensenada, B.C. Agosto de 2003

Centro de Investigación Científica y de  
Educación Superior de Ensenada



DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD LINEAL DE UNA  
CAPA DE FLUIDO DELGADA EN ROTACIÓN

TESIS  
que para cubrir parcialmente los requisitos  
necesarios para obtener el grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS  
presenta:

DOMITILO NAJERA NAVARRETE

Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2003.

**RESUMEN** de la Tesis de **Domitilo Najera Navarrete**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de **MAESTRO EN CIENCIAS** en **CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**. Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2003.

## **ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD LINEAL DE UNA CAPA DE FLUIDO DELGADA EN ROTACIÓN**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

*Director de Tesis*

Se presenta un estudio de una capa de fluido delgada que se extiende sobre una superficie sólida rotando con velocidad angular constante. Se obtiene el sistema de ecuaciones que modela el fenómeno tomando en cuenta la evolución en la línea de contacto. Dentro del modelo se usan aproximaciones con fuerte evidencia experimental y con suficiente apoyo teórico. Para remover la singularidad en la línea de contacto, se relaja la condición de no deslizamiento, la frontera entre el líquido y el sólido se modela como una superficie con deslizamiento: “Deslizamiento de Navier”. Por otra parte, el ángulo de contacto dinámico es una función creciente de la velocidad en la línea de contacto.

Se obtiene un sistema de evolución para el modelo, considerando los términos de Coriollis, que representa una generalización del presentado por [McKinley y Wilson, 2001]. Se soluciona el estado base del problema en forma analítica y se presentan gráficas para diferentes valores del término gravitatorio. Además, se realiza un estudio de la estabilidad lineal de los estados estacionarios axisimétricos, donde se obtiene una ecuación diferencial lineal de cuarto orden, en la cual, para cada número de onda  $q$  se establece un problema de eigenvalores para la razón de crecimiento. Se demuestra analíticamente que los eigenvalores y las eigenfunciones de la ecuación lineal son siempre reales y se muestran curvas de estabilidad lineal para diferentes valores del término gravitatorio. Se demuestra que para el caso cuasiestacionario no existen eigenvalores para el número de onda  $q = 1$ . Contrario a trabajos anteriores, se muestra una región de valores pequeños del radio estático, para los cuales las soluciones estacionarias son estables, mientras que para valores mayores a un radio crítico son inestables y en donde domina el número de onda  $q = 2$ .

**Palabras clave:** Capa delgada, línea de contacto, estabilidad lineal.

**ABSTRACT** of the thesis presented by **Domitilo Najera Navarrete**, as a partial requirement to obtain the **MASTER IN SCIENCES** degree in **COMPUTER SCIENCES**. Ensenada, Baja California, México. August 2003.

## **LINEAR STABILITY STUDY OF A ROTATING THIN LIQUID FILM**

Abstract approved by:

---

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

*Thesis Director*

A study of a thin liquid film over a rotating disk with constant angular velocity, surrounded by a passive gas is presented. The system of equations that models the phenomenon, taking into account the evolution of the contact line is obtained. In this model, approximations with strong experimental evidence and enough theoretical support are used. In order to eliminate the stress singularity at the contact line, the Navier slip condition along the solid interface is implemented. The boundary between the liquid and the solid is modeled as a surface having slip. Meanwhile, the dynamic contact angle is an increasing function of the velocity at the contact line.

An evolution system taking into account the Coriolis terms is obtained. This is a generalization of the system obtained by [McKinley y Wilson, 2001]. The steady state profiles of the film are obtained and graphics for different values of the gravitational term are presented. Additionally, a study of the linear stability of the axisymmetric steady states is done, where a fourth order linear differential equation represents an eigenvalue problem for the growth rate for each value of the wave number  $q$ . We proved that the eigenvalues and eigenfunctions are real, and presented stability lines for different values of the gravitatory term. We showed that there are no eigenvalues for  $q = 1$ . Contrary to other works, we show a region with stable solutions, for small values of the static radii and we have unstable solutions, beginning in a critical radius, where the dominating wave number is  $q = 2$ .

**Palabras clave:** Thin liquid film, contact line, linear stability.

# Dedicatoria

A *Lucy* por su cariño  
y apoyo incondicional.

A mis padres: Domitilo y Celerina,  
por darme la vida y por creer en mí  
y en los proyectos que tengo en mi vida.

A mis hermanos:  
Juan, Leopoldo e Isabel,  
por su amistad y por motivarme  
a lograr mis metas

# Agradecimientos

*Al Dr. Pedro Gilberto López Mariscal*  
por su amistad, su apoyo y valiosa ayuda.

A los miembros del comité de tesis:

*Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva y Dr. Cecilio Javier Rebollar Bustamante.*

A los amigos de la generación: *Lupita, Mirna, Daniel, Rodrigo, Oyoqui, Mike, Alex Peña, Alex Estrella, Oscar, Yobani, Chema, Everardo, Pedro y Miguel Riesgo.*

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo económico sin el cual no hubiera sido posible este trabajo de investigación.

# Tabla de Contenido

RESUMEN . . . . .	I
ABSTRACT . . . . .	II
DEDICATORIA . . . . .	III
AGRADECIMIENTOS . . . . .	IV
LISTA DE FIGURAS . . . . .	VII

CAPÍTULO	PÁGINA
I. INTRODUCCIÓN . . . . .	1
I.1. Objetivos . . . . .	3
I.2. Organización de la tesis. . . . .	3
II. FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS . . . . .	7
II.1. Leyes de conservación . . . . .	8
II.1.1. Conservación de masa . . . . .	9
II.1.2. Conservación de momento . . . . .	10
II.2. Ecuación de Navier-Stokes . . . . .	11
II.3. Ecuación de Navier-Stokes en rotación . . . . .	12
II.3.1. Efectos de la fuerza centrífuga. . . . .	13
II.3.2. Efectos de la fuerza de Coriolis. . . . .	13
III. LÍMITE DE CAPA DELGADA. . . . .	15
III.1. Ecuación de evolución. . . . .	19
III.2. Sistema adimensional . . . . .	22
IV. ESTADOS ESTACIONARIOS Y ECUACIÓN DE EVOLUCIÓN . . . . .	30
IV.1. Estados estacionarios axisimétricos . . . . .	33
IV.1.1. Comportamiento del estado base en $r = 0$ . . . . .	37
IV.1.2. Volumen del estado base . . . . .	41
IV.2. Ecuación de evolución. . . . .	44
IV.2.1. Análisis para $F \rightarrow 0$ . . . . .	53
IV.2.2. Sistema sin el término de Coriolis ( $F = 0$ ) . . . . .	54
IV.2.3. Estado cuasiestacionario . . . . .	56
V. ESTABILIDAD LINEAL. . . . .	58
V.1. Condiciones de frontera para el problema lineal. . . . .	60
V.2. Ecuación lineal en el límite $F \rightarrow 0$ . . . . .	62
V.3. Ecuación lineal en el límite $r \rightarrow 0$ . . . . .	66
V.4. Ecuación lineal cuando $r \rightarrow a_0$ . . . . .	68
V.5. Conservación de volumen. . . . .	70

# Tabla de Contenido (Continuación)

CAPÍTULO	PÁGINA
V.6. Eigenvalores. . . . .	72
V.7. Eigenvalor $\sigma = 0$ . . . . .	74
V.8. Aproximación cuasiestacionaria. . . . .	79
V.9. Resultados para el caso cuasiestacionario. . . . .	80
VI. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO . . . . .	85
VI.1. Conclusiones . . . . .	85
VI.2. Trabajo futuro . . . . .	89
BIBLIOGRAFÍA . . . . .	90



# Lista de Figuras

FIGURA	PÁGINA
1. Geometría y sistema de coordenadas de una gota modelada como un fluido Newtoniano en coordenadas cilíndricas . . . . .	16
2. Geometría de la línea de contacto. . . . .	22
3. Estado base para valores de $r = 1, 1.5, 2$ y $2.5$ , con $G = 0$ . . . . .	35
4. Estado base para valores de $r = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.6$ y $2.7$ , con $G = 2$ . . . . .	37
5. Estado base para valores de $r = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.2$ y $3.4$ , con $G = 5$ . . . . .	38
6. Estado base para valores de $r = 1, 2, 3, 4, 4.5$ y $4.6$ , con $G = 10$ . . . . .	39
7. Radios estáticos para los que tenemos una solución física como función de $G$ . . . . .	42
8. Volumen del estado base $V$ como función del radio estático $a_0$ , para diferentes valores de $G$ . . . . .	43
9. Líneas de estabilidad lineal para $G = 0$ y números de onda azimutal $q = 0, 2, 3, 4, 5$ y $6$ . . . . .	81
10. Líneas de estabilidad lineal para $G = 2$ y números de onda azimutal $q = 0, 2, 3, 4, 5$ y $6$ . . . . .	82
11. Líneas de estabilidad lineal para $G = 5$ y números de onda azimutal $q = 0, 2, 3, 4, 5$ y $6$ . . . . .	83
12. Líneas de estabilidad lineal para $G = 10$ y números de onda azimutal $q = 0, 2, 3, 4, 5$ y $6$ . . . . .	84

# Capítulo I

## Introducción

Situaciones en las que un material en forma líquida recubre un sólido son muy comunes. Este fenómeno se presenta frecuentemente en la vida diaria cuando se desliza aceite sobre un sartén o cuando se intenta recubrir con pintura una superficie. Se presenta además en procesos industriales complicados, por ejemplo manufactura de película fotográfica, cintas magnéticas, cintas adhesivas, etc.. La familiaridad que se tiene con procesos como el de pintar, sugiere que este proceso de recubrimiento es sencillo y que su modelación es inmediata. Sin embargo, cualquier persona que este familiarizada con procesos industriales donde se requiera un recubrimiento uniforme con alta velocidad de aplicación, puede decirnos lo contrario [Booth, 1970]. En todas estas situaciones, la mayor preocupación es depositar el líquido sobre la superficie sólida en forma homogénea. El análisis teórico y numérico de este tipo de problemas enfrenta mayores dificultades en la región formada por el líquido, el gas y el sólido, es decir, la línea de contacto. Este tipo de problemas no ha sido completamente resuelto. Este trabajo se relaciona con el estudio de este tipo de problemas usando aproximaciones físicas, que son aceptables desde el punto de vista macroscópico y que son manejables como un problema matemático.

El primer problema que enfrenta este tipo de estudios es encontrar la condición de frontera apropiada en la intersección líquido-sólido. [Dussan-V y Davis, 1974] encontraron en su modelo cinemático que cuando se usa la condición de adherencia entre el

líquido y el sólido, aparece una singularidad en los esfuerzos en la línea de contacto. Cuando se trata de modelar sistemas con una línea de contacto en movimiento, surgen problemas relacionados al ángulo de contacto. Es decir, el ángulo que forma la superficie de uno de los fluidos con la superficie del sólido, en el plano perpendicular a este y conteniendo la normal a la línea de contacto. Una forma de eliminar la singularidad en los esfuerzos en la línea de contacto es usar la condición de no deslizamiento tipo Navier [López *et al.*, 2001].

Aunque muchas de las relaciones usadas entre el ángulo de contacto y la velocidad de deslizamiento en la línea de contacto han sido exitosas, aún quedan muchas preguntas por resolver. Se necesita mucho trabajo teórico y numérico para encontrar una condición general y deducir una relación entre esta y la condición de frontera en la superficie sólida.

La estabilidad lineal de un fluido que involucre una línea de contacto en movimiento ha sido estudiada en diversas ocasiones. [McKinley y Wilson, 2000] estudiaron la estabilidad lineal de un fluido sujeto a una fuente de aire aplicada perpendicularmente al fluido. [López *et al.*, 2001] estudiaron la estabilidad y la evolución en un punto seco cuando se deposita un líquido sobre un sólido. [McKinley y Wilson, 2001] presentan un segundo estudio considerando la estabilidad lineal de un fluido sujeto a una fuerza centrífuga. Las conclusiones presentadas por McKinley y Wilson (MW) son semejantes en ambos estudios y en el estudio realizado en conjunto con Duffy [McKinley *et al.*, 1999] en el recubrimiento centrífugo de líquidos viscosos delgados.

En los estudios presentados por MW se presentan algunas irregularidades en los resultados de estabilidad lineal, por lo que en esta tesis se plantea una primera generalización a tal estudio. Además, en este trabajo se estudia la solución del estado base de un fluido sobre una superficie sólida en rotación constante. Se determina la

estabilidad lineal de estos estados como una función de los parámetros físicos. Además, se resuelve analíticamente el comportamiento de la interfaz alrededor de la línea de contacto y se muestra cómo estas soluciones ayudan a predecir el comportamiento de esta interfaz. La aportación principal de esta tesis radica en que se encuentran algunas irregularidades en los trabajos presentados por MW. Se prueba matemáticamente que estas irregularidades tienen gran relevancia y se presentan las correcciones necesarias.

## **I.1. Objetivos**

El objetivo general de esta tesis es el estudio de la estabilidad lineal de un fluido sobre una superficie sólida en rotación constante.

Los objetivos particulares son:

- Obtener el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de una capa de fluido delgada en rotación constante y establecer las condiciones de frontera y condiciones laterales para complementar el sistema.
- Encontrar una ecuación de evolución reteniendo los términos de Coriolis y presentar un análisis de esta ecuación cuando los términos se aproximan a cero.
- Resolver el sistema que gobierna el estado base y estudiar su comportamiento.
- Determinar y analizar la estabilidad lineal de los estados estacionarios axisimétricos.
- Comparar los resultados del estudio de estabilidad lineal con los obtenidos por MW.

## **I.2. Organización de la tesis.**

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el segundo capítulo se presenta una introducción a la mecánica de fluidos, donde se muestran los conceptos básicos necesarios para establecer las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema. En el tercer capítulo se obtiene el sistema de ecuaciones que rigen el movimiento de una capa de fluido delgada en rotación constante. El sistema se establece a partir de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación de continuidad que expresa conservación de masa. Para obtener el sistema de capa delgada se introducen escalas longitudinales. Se escala el sistema y aparecen números adimensionales de importancia sustantiva: el número de Reynolds  $Re$ , el parámetro gravitatorio  $G$ , el número de Eckman  $Ek$ , el número de Rosby  $Ro$  y un número adimensional  $J$  introducido por [McKinley *et al.*, 1999]. Se toma particular importancia al cociente entre las escalas horizontales  $H$  y las verticales  $L$ , es decir, cuando  $\epsilon = L/H \rightarrow 0$ . Se establecen las condiciones de frontera en la superficie libre y en la línea de contacto. Para establecer las condiciones de frontera se usa la condición de no deslizamiento tipo Navier [López *et al.*, 2001], donde aparece una función  $\tilde{\lambda}$  que representa la longitud de deslizamiento. Se plantean las condiciones laterales, donde se obtiene una condición para la evolución de la componente normal de la velocidad en la línea de contacto (velocidad de deslizamiento  $U_s$ ), como una función del ángulo de contacto dinámico  $\theta$ .

En el cuarto capítulo se obtiene la ecuación de evolución reteniendo los términos de Coriolis. Es decir, se encuentra una expresión general que explica el comportamiento del fluido para diferentes unidades de tiempo. Esta ecuación considera el parámetro de Coriolis  $F$ , a diferencia de la ecuación de evolución que presentan [McKinley *et al.*, 1999], donde simplifican suponiendo el parámetro de Coriolis  $F = 0$ . También en el mismo capítulo se encuentra la solución al sistema que gobierna el estado base. Se obtiene una expresión que determina el comportamiento de los estados estacionarios axisimétricos que son función de  $G$  y del radio estático  $a_0$  con el paráme-

tro  $J = 1$ . Se muestran algunas gráficas del estado base para diferentes valores del radio estático  $a_0$  y diferentes valores del parámetro gravitatorio  $G$ . Cabe mencionar que estas gráficas son introducidas por primera vez en este tipo de estudios. Además, se analiza el comportamiento del estado base, en  $r = 0$ . Se grafican los radios estáticos para los cuales se tiene una solución física como función del parámetro  $G$ . Se establece una expresión para el volumen del estado base como función de  $G$  y  $a_0$  y se grafica el volumen  $V$  como función de  $a_0$ , para  $G = 0, 1, 2, \dots, 20$ .

En el quinto capítulo se presenta un análisis extenso de la estabilidad lineal de los estados estacionarios axisimétricos, donde se obtiene una ecuación diferencial lineal de cuarto orden, en donde para cada número de onda  $q$  se establece un problema de eigenvalores. Esta ecuación lineal, incluye la contribución de los términos de Coriollis. Se realiza una primera generalización a los resultados de estabilidad lineal para  $F = 0$  presentados por MW. En esta generalización se realiza la aproximación  $F \rightarrow 0$  donde se ve que los efectos de Coriollis son de orden  $F^2$ . En éste mismo capítulo se obtienen las condiciones de frontera para el problema lineal partiendo de las condiciones de los estados estacionarios. Se realiza además, un estudio exhaustivo de la ecuación lineal. Cuando  $r \rightarrow 0$  aparece una nueva condición para el problema lineal. Por otro lado, se encontró que cuando  $r \rightarrow a_0$  y se usa una longitud de deslizamiento constante se llega a contradicciones. Lo que pone en duda los resultados de estabilidad mostrados por [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001] para el caso  $G = 0$ . Se demuestra que los eigenvalores y las eigenfunciones de la ecuación lineal son siempre reales. Se presenta un estudio exhaustivo del eigenvalor  $\sigma = 0$ , donde se obtiene que se cumple una condición lineal para  $q = 2, 3, \dots$ , pero no para  $q = 1$ , en cuyo caso no existen eigenfunciones para  $\sigma = 0$ . Además, se realiza un estudio cuasiestacionario de la ecuación lineal obtenida, con lo que se obtiene una representación general para el eigenvalor  $\sigma$  y se

comprueban los resultados obtenidos por MW cuando se hace la aproximación  $G \rightarrow 0$ . Se muestran curvas de estabilidad lineal para diferentes valores de  $G$ , mostrando con ello la no existencia del eigenvalor  $q = 1$  presentado por [McKinley y Wilson, 2001].

Por último, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo y se indican posibles líneas de investigación.

# Capítulo II

## Fundamentos de Mecánica de Fluidos

En este capítulo se muestran los conceptos básicos de la mecánica de fluidos, necesarios para establecer las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema. En la literatura existen diversos textos donde se derivan las ecuaciones por ejemplo [Batchelor, 1967] y [Chandrasekhar, 1961]. Sin pérdida de formalidad, en este texto se siguen las ideas presentadas por [Kundu, 1990] debido a su fácil manejo.

Para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales se necesita establecer las leyes de conservación de masa y de movimiento. Estas leyes se aplican a una masa fija o materia identificada cuyas propiedades cambian conforme pasa el tiempo. La forma natural para expresar estas leyes es usar la descripción Lagrangiana, porque ésta describe la historia de una partícula de identidad fija. Pero para describir un fluido se necesita establecer una expresión Euleriana, ya que describe el cambio de cualquier propiedad del fluido conforme éste esta en movimiento. El cambio con respecto del tiempo de una propiedad de un fluido medida por un observador moviéndose con el fluido se llama la derivada material de esa propiedad.



Si se considera que  $F$  es cualquier campo, entonces para incrementos arbitrarios e independientes  $d\mathbf{x}$  y  $dt$ , el incremento en  $F(\mathbf{x}, t)$  es:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i, \quad (1)$$

donde índices repetidos indican sumatoria. Los incrementos  $d\mathbf{x}$  y  $dt$  no son independientes, pero se relacionan a las componentes de velocidad como  $dx_i = u_i dt$ . Sustituyendo en 1 se tiene:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Para enfatizar que la derivada material incluye derivadas parciales temporales y espaciales se introduce una notación especial  $DF/Dt$ , con lo que 2 se escribe como:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (3)$$

## II.1. Leyes de conservación

Los flujos de fluidos obedecen las leyes de conservación de masa, momento y energía. Estas leyes pueden establecerse en forma diferencial, aplicable a un punto o en forma integral, aplicada a una región. Las formas diferencial e integral pueden derivarse una de la otra. Para convertir la derivada de una integral de superficie en integral de volumen (o viceversa) se utiliza el teorema de Gauss

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial x_i} dV = \int_A F dA_i,$$

donde  $F(\mathbf{x}, t)$  es un tensor de cualquier rango (incluyendo vectores y escalares),  $V$  puede ser un volumen fijo o volumen material y  $A$  es la superficie acotada.

### II.1.1. Conservación de masa

Si se considera un volumen fijo en el espacio, la proporción de incremento de masa en el volumen esta dado por:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

donde  $\rho$  es la densidad. La proporción de flujo de masa que sale, es la integral de superficie

$$\int_A \rho \mathbf{u} \cdot dA,$$

ya que  $\rho \mathbf{u} \cdot dA$  es el flujo exterior en un elemento de área  $dA$  [ $dA$  denotará  $\mathbf{n}dA$ , donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie]. La ley de conservación de masa expresa que el incremento de masa en un volumen fijo debe ser igual a la masa que sale de este volumen. Esto indica que,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho \mathbf{u} \cdot dA. \quad (4)$$

La forma diferencial se obtiene transformando la integral de superficie (lado derecho de 4) a una integral de volumen por medio del teorema de la divergencia, con lo que se obtiene,

$$\int_A \rho \mathbf{u} \cdot dA = - \int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{u} dV,$$

es decir, la ecuación 4 se convierte en

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right] dV = 0,$$

donde se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

La ecuación 5 se llama ecuación de continuidad y expresa la forma diferencial del principio de conservación de masa. Reescribiendo la divergencia, la ecuación de continuidad se convierte en

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

Un fluido es normalmente llamado incompresible si la densidad no cambia a diferentes presiones. Si se considera un fluido incompresible la ecuación 6 se convierte en

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

### II.1.2. Conservación de momento

El momento es simplemente la masa de un objeto multiplicado por su velocidad. La ley de conservación de momento expresa que la cantidad de momento permanece constante y no puede ser creado o destruido, pero puede ser cambiando a través de la acción de fuerzas. Tratar con momento es mas difícil que tratar con masa y energía debido a que es una cantidad vectorial que tiene magnitud y dirección. Es mas difícil en fluidos compresibles porque las fuerzas en una dirección pueden afectar el momento en otra dirección a través de las colisiones de partículas. La ley de conservación de momento se expresa en forma diferencial aplicando directamente la segunda ley de Newton a un elemento de fluido infinitesimal.

Considere el movimiento de un elemento de fluido, la segunda ley de Newton requiere que la fuerza neta sobre un elemento debe ser igual a la aceleración del elemento por su masa. La suma de las fuerzas de superficie en la dirección de  $x_1$  es

$$\left(\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3 = \frac{\partial\tau_{j1}}{\partial x_j}d\mathcal{V},$$

donde  $\tau_{ij}$  son los esfuerzos y  $d\mathcal{V}$  es el volumen del elemento. Generalizando, la componente  $i$  es,

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j},$$

donde se ha usado la propiedad  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Si  $\mathbf{g}$  es la fuerza de cuerpo por unidad de masa, entonces  $\rho\mathbf{g}$  es la fuerza de cuerpo por unidad de volumen. Así, de la ley de Newton se obtiene,

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (7)$$

La expresión 7 es la ecuación del movimiento que relaciona aceleración y la fuerza neta sobre un punto y es válida para cualquier continuo, sólido o fluido, sin importar que tensor de esfuerzos  $\tau_{ij}$  es relacionado al campo de deformación. La ecuación 7 se conoce como la ecuación del movimiento de Cauchy.

## II.2. Ecuación de Navier-Stokes

La ecuación de Navier-Stokes describe el movimiento de fluidos no turbulentos o Newtonianos. Esta ecuación se obtiene caracterizando el tensor de esfuerzos  $\tau_{ij}$  que aparece en la ecuación de movimiento de Cauchy 7. La expresión que caracteriza al tensor  $\tau_{ij}$  es llamada la *ecuación constitutiva* y relaciona el esfuerzo y la deformación en un continuo.[Kundu, 1990] expresa la ecuación constitutiva para un fluido Newtoniano como

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (8)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $p$  es la presión y  $e_{ij}$  es el tensor de deformación dado por

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (9)$$

Cuando  $i = j$ ,  $e_{mm} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

La ecuación de Navier-Stokes se obtiene sustituyendo la ecuación constitutiva 8 en la ecuación de Cauchy 7, obteniendo:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (10)$$

La viscosidad  $\mu$  puede ser función del estado termodinámico. En efecto, para la mayoría de los fluidos,  $\mu$  tiene una fuerte dependencia de la temperatura  $T$ , decrece con  $T$  para los líquidos y se incrementa con  $T$  para los gases. En este estudio  $\mu$  se considera constante.

### II.3. Ecuación de Navier-Stokes en rotación

En un marco de referencia en rotación, la aceleración  $\mathbf{a}_F$  es,

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \Omega^2 \mathbf{R}, \quad (11)$$

donde  $\mathbf{a}$  es la aceleración en un marco de referencia sin rotación,  $\boldsymbol{\Omega}$  es la velocidad angular  $\Omega^2 \mathbf{R}$  es la fuerza centrífuga y  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$  es la fuerza de Coriolis.

La ecuación 11 expresa que la aceleración real o aceleración inercial es igual a la aceleración  $\mathbf{a}$  medida en un sistema en rotación en conjunto con la aceleración de Coriolis ( $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ ) mas la aceleración centrípeta ( $-\Omega^2 \mathbf{R}$ ). Es decir, la aceleración centrípeta y la aceleración de Coriolis tienen que considerarse si se esta en un marco de referencia en rotación. Luego la ecuación del movimiento 10 en un marco de referencia

en rotación se convierte en:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{g}_n + \Omega^2 \mathbf{R}) - 2\Omega \times \mathbf{u}, \quad (12)$$

en donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática. El lado derecho expresa los términos de la aceleración de Coriolis  $\mathbf{g}_n + \Omega^2 \mathbf{R}$  y la aceleración centrípeta  $-2\Omega \times \mathbf{u}$  (nombrándose ahora fuerza de Coriolis y fuerza centrífuga), en donde se ha añadido  $\mathbf{g}_n = g/\mu$  que es la fuerza de cuerpo por unidad de masa debido a las fuerzas gravitatorias.

### II.3.1. Efectos de la fuerza centrífuga.

La fuerza adicional aparente  $\Omega^2 \mathbf{R}$  se añade a la fuerza gravitacional Newtoniana  $\mathbf{g}_n$ , para definir la fuerza de gravitación efectiva  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_n + \Omega^2 \mathbf{R}$ . La gravedad Newtoniana sería uniforme sobre la superficie de la tierra y centralmente dirigida, si la tierra fuera esféricamente simétrica y homogénea. Pero La tierra es elipsoide con 42 km de diámetro ecuatorial mayor que el diámetro polar. Además la existencia de fuerzas centrífugas hace que la gravedad efectiva disminuya mas en el ecuador que en los polos, donde  $\Omega^2 \mathbf{R}$  es cero. En términos de la gravedad efectiva, 12 se convierte en:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} - 2\Omega \times \mathbf{u}. \quad (13)$$

### II.3.2. Efectos de la fuerza de Coriolis.

Imagínese un cañón en el ártico tratando de bombardear la posición del enemigo en el polo norte. Un proyectil lanzado desde ese cañón tenderá a desviarse lateralmente debido a que la rotación de la tierra esta llevando el cañón a su derecha. Esto quiere decir que se deberá dirigir el proyectil ligeramente a la izquierda del objetivo (es claro que esto ignora los efectos del viento y la atenuación debida a la fricción)

Existe una ley aplicable a todo objeto que vuele hacia el hemisferio norte, este objeto se comportará como si hubiera una fuerza misteriosa que lo jala al este. Esta acción es llamada erronéamente fuerza de Coriollis, pero no hay una fuerza presente, es solo una ilusión. Por lo cual debería ser llamada efecto de Coriollis. Este desplazamiento misterioso aparenta pasar solo porque el sistema de referencia esta en la superficie de la tierra, de hecho la superficie de la tierra es quien realiza el desplazamiento.

Una explicación clara de la fuerza de Coriollis es dada en el folleto [Ripa, 1996].

## Capítulo III

### Límite de capa delgada.

En este capítulo se estudia una capa de fluido delgada sobre un disco sólido en rotación constante. Este fenómeno se modela como un fluido Newtoniano tri-dimensional rodeado por un gas pasivo. El disco rota sobre su propio plano con velocidad angular constante  $\Omega$ . Debido a la geometría del problema, se eligen coordenadas cilíndricas polares  $(r, \phi, z)$ , con un campo de velocidades  $(u, v, w)$ . La superficie libre se localiza en  $z = h(r, \phi, t)$  donde  $z$  es perpendicular al plano, mientras que la línea de contacto se coloca en  $r = a(\phi, t)$ . La Geometría y el sistema de coordenadas se puede observar en la figura 1. El sistema hidrodinámico se describe por las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas [Kundu, 1990],

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) + \Omega^2 r + 2\Omega v, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left( \nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r^2} \right) - 2\Omega u, \quad (15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w, \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (17)$$

En estas ecuaciones la densidad  $\rho$ , la viscosidad cinemática  $\nu = \mu/\rho$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica y la aceleración debida a la gravedad  $g$  son constan-



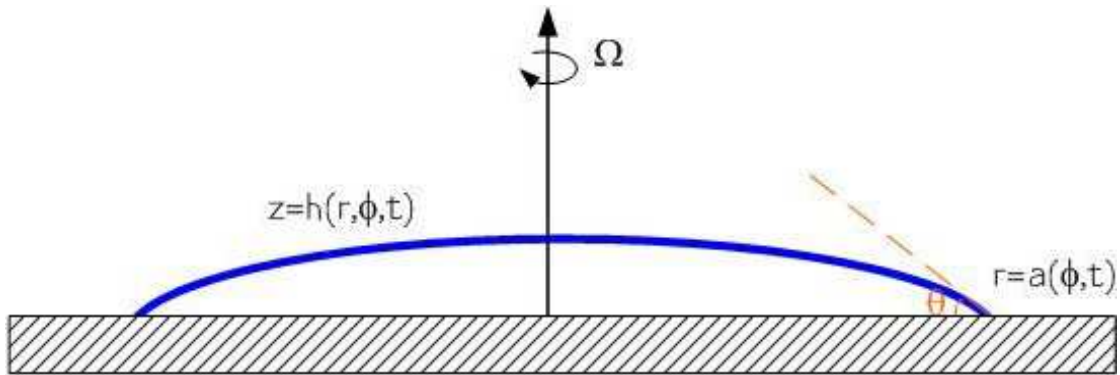


Figura 1. Geometría y sistema de coordenadas de una gota modelada como un fluido Newtoniano en coordenadas cilíndricas

tes. El campo de presión se denota por  $p$ . En coordenadas cilíndricas; los operadores gradiente, laplaciano y divergencia se expresan como:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\nabla \cdot = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r), \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \quad .$$

En la superficie sólida  $z = 0$ , se tiene la condición de que el fluido no penetra sobre la superficie,

$$w = 0. \quad (18)$$

Para eliminar la singularidad de los esfuerzos en la línea de contacto, se necesita relajar la condición de no deslizamiento [Dussan-V y Davis, 1974] y [Greenspan, 1978]. Esto se puede hacer usando la condición de no deslizamiento tipo Navier [López *et al.*, 2001]

en la interfaz del sólido:

$$u - \tilde{\lambda}(h)(u_z + w_r) = 0, \quad v - \tilde{\lambda}(h)\left(v_z + \frac{1}{r}w_\phi\right) = 0, \quad (19)$$

aquí los subíndices denotan derivadas parciales. La función  $\tilde{\lambda}(h)$  representa la longitud de deslizamiento alrededor de la línea de contacto. Existen diferentes estudios con distintas formas para la función  $\tilde{\lambda}$ . Un estudio comparativo fue realizado por [Haley y Miksis, 1991]. En este trabajo, se tomará a la función  $\tilde{\lambda}$  en forma general, y en su momento se considerarán las dos formas mas representativas

$$\tilde{\lambda}(h) = \lambda \quad (20)$$

y

$$\tilde{\lambda}(h) = \frac{\lambda}{h}, \quad (21)$$

donde  $\lambda$  es una constante positiva. La función dada por la relación 21 fue primero introducida por [Greenspan, 1978] en el estudio de la evolución de una gota sobre un sólido.

En la interfaz líquido-gas  $z = h(r, \phi, t)$ , se tiene la condición cinemática,

$$w = h_t + uh_r + \frac{v}{r}h_\phi, \quad (22)$$

y las condiciones de balance en los esfuerzos en las direcciones normal y tangencial [Burelbach *et al.*, 1988],

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}^{(g)} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 2\mathbb{R}\sigma, \quad (23)$$

$$\mathbf{t}^{(r)} \cdot (\mathbf{T}^{(g)} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{t}^{(\phi)} \cdot (\mathbf{T}^{(g)} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (24)$$

en estas ecuaciones  $\sigma$  denota el coeficiente de tensión superficial, mientras que  $\mathbf{T}^{(g)}$  y  $\mathbf{T}$  son los tensores de esfuerzos del gas pasivo a una presión  $p^{(g)}$  y del líquido, respectivamente. El vector unitario normal a la superficie se denota por  $\mathbf{n}$ ,

$$\mathbf{n} = \frac{(-h_r, -h_\phi/r, 1)}{\sqrt{1 + h_r^2 + (h_\phi/r)^2}} = \frac{1}{N} \left( -h_r, -\frac{h_\phi}{r}, 1 \right) \quad (25)$$

mientras que  $\mathbf{t}^{(r)}$  y  $\mathbf{t}^{(\phi)}$  denotan los dos vectores unitarios tangenciales a la superficie en la dirección  $r$  y  $\phi$

$$\mathbf{t}^{(r)} = \frac{(1, 0, h_r)}{\sqrt{1 + h_r^2}} = \frac{1}{N_r} (1, 0, h_r) \quad \mathbf{t}^{(\phi)} = \frac{(0, 1, h_\phi/r)}{\sqrt{1 + (h_\phi/r)^2}} = \frac{1}{N_\phi} (0, 1, h_\phi/r), \quad (26)$$

respectivamente. La curvatura media  $2\mathbb{R}$  de la superficie está dada por,

$$2\mathbb{R} = -\nabla \cdot \mathbf{n}. \quad (27)$$

En el sistema de coordenadas en rotación,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= \mathbf{T}_{rr} = -p + 2\mu u_r \\ \mathbf{T}_{12} &= \mathbf{T}_{r\phi} = \mu \left( r \left( \frac{v}{r} \right)_r + \frac{1}{r} u_\phi \right) \\ \mathbf{T}_{13} &= \mathbf{T}_{rz} = \mu (u_z + w_r) \\ \mathbf{T}_{22} &= \mathbf{T}_{\phi\phi} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} v_\phi + \frac{u}{r} \right) \\ \mathbf{T}_{23} &= \mathbf{T}_{\phi z} = \mu \left( \frac{1}{r} w_\phi + v_z \right) \\ \mathbf{T}_{33} &= \mathbf{T}_{zz} = -p + 2\mu w_z. \end{aligned} \quad (28)$$

### III.1. Ecuación de evolución.

La evolución del sistema definido por las ecuaciones 14-17 se encuentra acoplada con la de la interfaz  $z = h(r, \phi, t)$ . La ecuación de evolución para la superficie libre  $z = h$ , se obtiene integrando la ecuación de continuidad en la dirección de  $z$  y usando la condición 18,

$$w(h) = -\frac{1}{r} \int_0^h (ru)_r dz - \frac{1}{r} \int_0^h v_\phi dz. \quad (29)$$

De la condición cinemática se tiene que:

$$w = h_t + u(h) h_x + \frac{v(h)}{r} h_\phi, \quad (30)$$

igualando:

$$h_t + u h_r + \frac{v}{r} h_\phi + \frac{1}{r} \int_0^h (ru)_r dz + \frac{1}{r} \int_0^h v_\phi dz = 0. \quad (31)$$

Usando la regla de Leibnitz's para derivar una función  $f(x, y)$  dentro del argumento de la integral, [Courant y John, 1982] la cual esta dada por,

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f_x dy = \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f dy - b'(x) f(x, b) + a'(x) f(x, a).$$

Aplicando esta relación, se tiene que las integrales son,

$$\int_0^h (ru)_r dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h r u dz - r u(h) h_r, \quad (32)$$

$$\int_0^h v_\phi dz = \frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^h v dz - v(h) h_\phi, \quad (33)$$

sustituyendo y reacomodando términos se obtiene

$$h_t + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_0^h u dz + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^h v dz = 0. \quad (34)$$

Esta ecuación se puede escribir en términos del flujo

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2) = \left( \int_0^h u dz, \int_0^h v dz \right),$$

como:

$$h_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0. \quad (35)$$

Esta ecuación, se resuelve en:

$$r \in (0, a(\phi, t)),$$

$$\phi \in (0, 2\pi],$$

con  $t > 0$ . El sistema se cierra cuando se consideran consideramos condiciones laterales en  $r = 0$  y  $r = a(\phi, t)$  y bajo ciertas condiciones iniciales.

En  $r = 0$  se toman condiciones de regularidad:

$$h_r = 0, \quad (36)$$

$$q_1 = \int_0^h u dz = 0. \quad (37)$$

En  $r = a(\phi, t)$

$$h = 0, \quad (38)$$

junto con una condición para la evolución de la componente normal de la velocidad en la línea de contacto (velocidad de deslizamiento  $U_s$ ), como una función del ángulo de contacto dinámico  $\theta$ . Este tipo de condiciones han sido utilizadas en diferentes investigaciones teóricas de flujos en donde se presenta una línea de contacto en movimiento [Greenspan, 1978], [Ehrhard y Davis, 1991], [McKinley y Wilson, 2000] y [López *et al.*, 2001]. Tales condiciones se sustentan en evidencia experimental y trabajo teórico relevante. Una de las formas mas utilizadas y que se adopta en este estudio, es

$$U_s = \frac{\varpi\sigma}{3\mu} (\theta - \theta_s)^m. \quad (39)$$

Datos experimentales realizados por [Hoffman, 1975] sugieren el uso de  $m = 3$ , lo cual resulta en la llamada ley de Tanner y que  $\varpi$  es una constante positiva que depende solo de la interacción del líquido con el gas y no de las propiedades del sólido o del líquido. En ese estudio,  $1/25 \leq \varpi \leq 1/13$ , mientras que  $\theta_s$  es el ángulo de contacto estático. La relación 39 es en realidad válida para ángulos pequeños [Greenspan y McCay, 1981]. Si se considera a la línea de contacto como una curva material  $r = a(\phi, t)$ ,

$$u|_{r=a} = a_t + \frac{a_\phi}{a} v|_{r=a}, \quad (40)$$

con componente normal saliente

$$\hat{\mathbf{n}}_c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a_\phi^2}} \left( 1, -\frac{a_\phi}{a}, 0 \right),$$

y su correspondiente componente tangencial:

$$\hat{\mathbf{t}}_c = \left( \frac{a_\phi}{a}, 1, 0 \right) \frac{-a}{\sqrt{a^2 + a_\phi^2}},$$

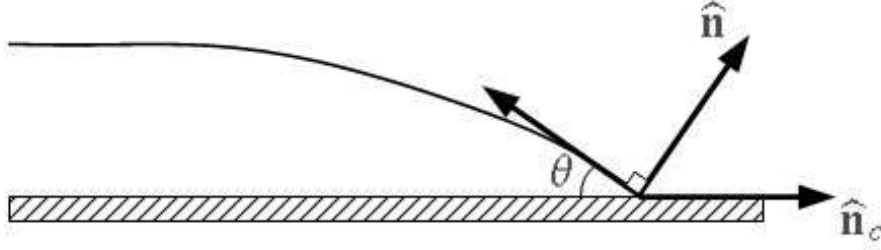


Figura 2. Geometría de la línea de contacto.

de esta manera

$$U_s = (u, v, 0)|_{r=a} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + a_\phi^2}} \left(1, -\frac{a_\phi}{a}, 0\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a_\phi^2}} \left(u - \frac{a_\phi}{a}v\right)|_{r=a}.$$

Usando 40,

$$U_s = \frac{a_t}{\sqrt{1 + (a_\phi/a)^2}}. \quad (41)$$

El ángulo de contacto es el ángulo formado entre la tangente a la superficie libre en el plano que contiene a la normal a la superficie libre  $\hat{n}$ , y la normal interna a la línea de contacto  $-\hat{n}_c$ , en el plano  $z = 0$  (ver figura 2). El ángulo de contacto está dado por,

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + h_r^2 + (h_\phi/a)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (a_\phi/a)^2}} \left(-h_r + \frac{h_\phi a_\phi}{a^2}\right). \quad (42)$$

### III.2. Sistema adimensional

Para llegar al sistema de capa delgada se introducen primero ciertas escalas longitudinales. Las coordenadas paralelas a la superficie  $z = 0$ , se escalan con  $L$ , mientras

que  $H$  es la escala vertical, por lo tanto,

$$(r, \phi, z) \rightarrow (Lr, \phi, Hz). \quad (43)$$

El límite de capa delgada, se cumple cuando el cociente

$$\varepsilon = \frac{H}{L}, \quad (44)$$

es pequeño, es decir,

$$\varepsilon \rightarrow 0. \quad (45)$$

Similarmente, se elige una escala de velocidades  $U$ , para las componentes paralelas a  $z = 0$ . Para que se cumpla la conservación de masa dada por la ecuación 17 en el sistema asintótico 45, las velocidades en la dirección vertical son de un orden menor

$$(u, v, w) \rightarrow (Uu, Uv, U\varepsilon w). \quad (46)$$

El tiempo y la presión se escalan por

$$t \rightarrow \frac{L}{U}t, \quad (47)$$

$$p - p_g \rightarrow \mathbf{P}p. \quad (48)$$

Cuando se introducen las expresiones 43-44 y 46-48 en el sistema 14-17. La ecuación de continuidad permanece como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (49)$$



Mientras que las tres componentes de las ecuaciones de Navier-Stokes en forma adimensional quedan como,

$$\begin{aligned} \frac{H^2 U}{\nu L} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} \right) &= -\frac{H^2 \mathbf{P}}{\nu U L \rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{H^2 L \Omega^2}{\nu U} r + 2 \frac{H^2 \Omega}{\nu} v + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right], \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{H^2 U}{\nu L} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + \frac{uv}{r} \right) &= -\frac{H^2 \mathbf{P}}{\nu U L \rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \frac{H^2 \Omega}{\nu} u + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{H U}{\nu} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w \right) &= -\frac{H^2 \mathbf{P}}{\nu U L \rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{H^3 g}{\nu U L} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \varepsilon^4 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

De forma natural la escala de presión queda como,

$$\mathbf{P} = \frac{\nu U L \rho}{H^2} = \frac{\mu U L}{H^2}, \quad (53)$$

de tal manera que,

$$\frac{H^2 \mathbf{P}}{\nu U L \rho} = 1.$$

Las cantidades que multiplican a cada uno de los términos de las ecuaciones 50-52 representan números adimensionales que indican la importancia relativa dentro del balance de fuerzas. El número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{L U}{\nu}, \quad (54)$$

representa la importancia de los términos inerciales con respecto a los términos viscosos.

El número gravitacional

$$G = \frac{H^3 g}{\nu U L}, \quad (55)$$

pondera los términos gravitatorios con los términos viscosos. Mientras que el número de Ekman

$$Ek = \sqrt{\frac{\nu}{2H^2\Omega}}, \quad (56)$$

relaciona a los términos viscosos con los términos de Coriolis. Este se puede representar en términos del número de Rosby,

$$Ro = \frac{U}{2H\Omega},$$

que representa la importancia de los términos inerciales con respecto a los términos de Coriolis, de la siguiente manera

$$Ek = \sqrt{\frac{Ro}{Re}}. \quad (57)$$

En lugar del número de Ekman, se usará su inverso,

$$2F^2 = \frac{1}{Ek^2} = 2\frac{H^2\Omega}{\nu} = \frac{Re}{Ro}.$$

Por último se considera el parámetro  $J$  definido por [McKinley y Wilson, 2001] que representa términos centrífugos con respecto a términos viscosos,

$$J = \frac{H^2 L \Omega^2}{\nu U}. \quad (58)$$

Posteriormente, se escogerán escalas longitudinales apropiadas, que hacen al sistema independiente de este parámetro. En los trabajos de MW se conserva este parámetro, a pesar de que sus resultados mostrados utilizan  $J = 1$ .

En términos de estos parámetros, el sistema adimensional 50-52 queda como

$$\begin{aligned} \text{Re } \varepsilon^2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + Jr + 2F^2 v + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right] \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \varepsilon^2 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + \frac{uv}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2F^2 u + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right] \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\text{Re } \varepsilon^4 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - G + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \varepsilon^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] \varepsilon^4. \quad (61)$$

Introduciendo las escalas definidas por las expresiones 43-44 y 46-48, en las condiciones de frontera, se tiene que en la superficie sólida  $z = 0$ ,

$$w = 0, \quad (62)$$

mientras que la condición de deslizamiento en el sólido se convierte en

$$u - \frac{\tilde{\lambda}(h)}{H} (u_z + \varepsilon^2 w_r) = 0, \quad v - \frac{\tilde{\lambda}(h)}{H} \left( v_z + \varepsilon^2 \frac{1}{r} w_\phi \right) = 0. \quad (63)$$

En la interfaz  $z = h(r, \phi, t)$ , la condición cinemática se mantiene

$$w = h_t + u h_r + \frac{v}{r} h_\phi. \quad (64)$$

Tomando en cuenta la escala para la presión definida por 53, el (salto del) tensor de esfuerzos toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{11} &= \mathbf{T}_{rr} = -\mathbf{P}p + 2\frac{\mu U}{H}\varepsilon u_r = \mathbf{P}[-p + 2u_r\varepsilon^2] \\
\mathbf{T}_{12} &= \mathbf{T}_{r\phi} = \frac{\mu U}{H}\varepsilon \left( r \left( \frac{v}{r} \right)_r + \frac{1}{r}u_\phi \right) = \mathbf{P} \left( r \left( \frac{v}{r} \right)_r + \frac{1}{r}u_\phi \right) \varepsilon^2 \\
\mathbf{T}_{13} &= \mathbf{T}_{rz} = \frac{\mu U}{H} (u_z + \varepsilon^2 w_r) = \mathbf{P} (u_z + w_r\varepsilon^2) \varepsilon \\
\mathbf{T}_{22} &= \mathbf{T}_{\phi\phi} = -\mathbf{P}p + 2\frac{\mu U}{H}\varepsilon \left( \frac{1}{r}v_\phi + \frac{u}{r} \right) = \mathbf{P} \left[ -p + 2 \left( \frac{1}{r}v_\phi + \frac{u}{r} \right) \varepsilon^2 \right] \\
\mathbf{T}_{23} &= \mathbf{T}_{\phi z} = \frac{\mu U}{H} \left( \frac{1}{r}\varepsilon^2 w_\phi + v_z \right) = \mathbf{P} \left( v_z + \frac{1}{r}\varepsilon^2 w_\phi \right) \varepsilon \\
\mathbf{T}_{33} &= \mathbf{T}_{zz} = -\mathbf{P}p + 2\frac{\mu U}{H}\varepsilon w_z = \mathbf{P}[-p + 2w_z\varepsilon^2].
\end{aligned}$$

De esta manera en términos adimensionales, el salto de los esfuerzos en la dirección normal, está dado por,

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} &= -p + \frac{2\varepsilon^2}{N^2} \left[ w_z - h_r u_z - \frac{h_\phi}{r} v_z \right] \\
&+ \frac{2\varepsilon^4}{N^2} \left[ u_r h_r^2 + \left( \frac{v_\phi}{r} + \frac{u}{r} \right) \left( \frac{h_\phi}{r} \right)^2 + \frac{h_r h_\phi}{r} \left( r \left( \frac{v}{r} \right)_r + \frac{u_\phi}{r} \right) - h_r w_r - \frac{h_\phi}{r^2} w_\phi \right],
\end{aligned} \tag{65}$$

donde

$$N = \sqrt{1 + \left( h_r^2 + \left( \frac{h_\phi}{r} \right)^2 \right) \varepsilon^2}.$$

El término 65 es igual al término dado por la tensión superficial,

$$2\mathbb{R}\sigma = -\frac{1}{N^3} \left[ \nabla^2 h - \varepsilon^2 \left( h_r^2 h_{rr} + 2\frac{h_r h_\phi h_{r\phi}}{r^2} - \frac{h_r h_\phi^2}{r^3} + \frac{h_\phi^2 h_{\phi\phi}}{r^4} - \alpha^2 \nabla^2 h \right) \right], \tag{66}$$

igualando y reacomodando términos,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{N^3} \nabla^2 h - p \\
&+ \frac{2\varepsilon^2}{N^2} \left[ w_z - h_r u_z - \frac{h_\phi}{r} v_z - \frac{1}{2N} \left( h_r^2 h_{rr} + 2 \frac{h_r h_\phi h_{r\phi}}{r^2} - \frac{h_r h_\phi^2}{r^3} + \frac{h_\phi^2 h_{\phi\phi}}{r^4} - \alpha^2 \nabla^2 h \right) \right] \\
&+ \frac{2\varepsilon^4}{N^2} \left[ u_r h_r^2 + \left( \frac{v_\phi}{r} + \frac{u}{r} \right) \left( \frac{h_\phi}{r} \right)^2 + \frac{h_r h_\phi}{r} \left( r \left( \frac{v}{r} \right)_r + \frac{u_\phi}{r} \right) - h_r w_r - \frac{h_\phi}{r^2} w_\phi \right].
\end{aligned} \tag{67}$$

Similarmente, los esfuerzos tangenciales en términos de variables adimensionales, están dados por,

$$\begin{aligned}
0 &= u_z + \left[ -u_z h_r^2 + 2(w_z - u_r) h_r - \left( r \left( \frac{v}{r} \right)_r + \frac{u_\phi}{r} \right) \frac{h_\phi}{r} - v_z \frac{h_r h_\phi}{r} \right] \varepsilon^2 \\
&+ \left[ -w_r h_r^2 - \frac{w_\phi}{r} \frac{h_r h_\phi}{r} \right] \varepsilon^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= v_z + \left[ -\left( \frac{h_\phi}{r} \right)^2 v_z + 2 \left( w_z - \frac{v_\phi}{r} - \frac{u}{r} \right) \frac{h_\phi}{r} - \left( r \left( \frac{v}{r} \right)_r + \frac{u_\phi}{r} \right) h_r - \frac{h_r h_\phi}{r} u_z \right] \varepsilon^2 \\
&+ \left[ -\frac{w_\phi}{r} \left( \frac{h_\phi}{r} \right)^2 - \frac{h_r h_\phi}{r} w_r \right] \varepsilon^4.
\end{aligned}$$

Lateralmente, se tiene que en  $r = 0$

$$h_r = 0 \tag{68}$$

y

$$q_1 = \int_0^h u dz = 0. \tag{69}$$

Mientras que, en  $r = a(\phi, t)$

$$h = 0 \quad (70)$$

y

$$a_t = \frac{-1}{D} \left( 1 + \left( \frac{a_\phi}{a} \right)^2 \right)^{1/2} \left( \left( h_r - \frac{h_\phi a_\phi}{a^2} \right)^m + 1 \right). \quad (71)$$

Aquí,

$$\frac{a_t}{\left( 1 + (a_\phi/a)^2 \right)^{1/2}},$$

es la componente normal a la línea de contacto, la cual es positiva cuando el fluido regresa y negativa cuando avanza. El parámetro adimensional  $D$  contiene la información de las interacciones entre el sólido y los dos fluidos [López *et al.*, 2001] y esta dado por:

$$D = \frac{\varepsilon^{3-m}}{\varpi}.$$

Se debe tener en cuenta que en la línea de contacto  $r = a(\phi, t)$ :

$$D = 0.$$

## Capítulo IV

# Estados estacionarios y ecuación de evolución

La evolución del sistema se obtiene al resolver las ecuaciones 59-61 para el campo de velocidades  $(u, v, w)$ , sujeto a las condiciones de frontera expresadas por las ecuaciones 68-71 y sustituirlas en la ecuación de evolución 35. Para el caso de capa delgada, se considera el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , considerando a los números adimensionales definidos por 54-58 de orden uno. El sistema resultante es un sistema de ecuaciones diferenciales que se puede resolver en forma cerrada. Por otra parte, los términos inerciales se pueden retener al considerar un número de Reynolds  $O(\varepsilon^{-2})$  en las ecuaciones, es decir, se define un número de Reynolds Modificado como

$$\overline{\text{Re}} = \text{Re} \varepsilon^2 = \frac{UH^2}{\nu L}. \quad (72)$$

A su vez, este sistema se puede resolver numéricamente o usando la aproximación de Kármán-Pohlhausen [López *et al.*, 1997].

Aquí se considera el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para el cual el sistema 59-61 se convierte en,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2F^2 v = \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad (73)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2F^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \phi}, \quad (74)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -G^2. \quad (75)$$

donde  $\eta$  es una *presión efectiva*, que contiene los efectos de la fuerza centrípeta,

$$\eta = p - \frac{Jr^2}{2}. \quad (76)$$

Nótese que siempre se puede elegir una escala longitudinal  $L$ , tal que

$$J = \frac{H^2 L \Omega^2}{\nu U} = 1,$$

sustituyendo el valor de la escala de velocidad  $U$

$$J = \frac{L^4 \Omega^2 \rho}{\sigma H} = 1,$$

es decir,

$$L = \left( \frac{\sigma H}{\rho \Omega^2} \right)^{1/4}. \quad (77)$$

Al integrar 75, se obtiene que la presión efectiva varía linealmente con la altura menos una función  $P$  independiente de  $z$ ,

$$\eta = -G^2 z - P(r, \phi, t), \quad (78)$$

la cual se puede obtener usando el término dominante en la condición que da el salto en los esfuerzos normales en  $z = h$ .

$$\eta(h) = p(h) - \frac{Jr^2}{2} = -\nabla^2 h - \frac{Jr^2}{2}, \quad (79)$$



que al sustituir en 78

$$\eta(h) = -G^2h - P(r, \phi, t). \quad (80)$$

De esta manera, P representa los efectos de la tensión superficial, la gravedad y los debidos a la fuerza centrípeta,

$$P(r, \phi, t) = \nabla^2 h - G^2h + \frac{Jr^2}{2}. \quad (81)$$

El balance de fuerzas se obtiene al sustituir 81 en 73-74,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2F^2 v = -\frac{\partial P}{\partial r}, \quad (82)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2F^2 u = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi}. \quad (83)$$

El cual se resuelve sujeto a los términos dominantes en las condiciones de frontera,

$$u - \tilde{\lambda}(h)u_z = 0, \quad v - \tilde{\lambda}(h)v_z = 0.$$

en  $z = 0$ , y

$$u_z = 0, \quad v_z = 0.$$

en  $z = h$ .

Una vez resuelto el problema para  $u$  y  $v$ , se calcula el flujo

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2) = \left( \int_0^h u dz, \int_0^h v dz \right), \quad (84)$$

y se obtiene la ecuación de evolución:

$$h_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0.$$

## IV.1. Estados estacionarios axisimétricos

Antes de calcular la ecuación de evolución, se calcula un estado estacionario simétrico con respecto al eje de rotación. Este estado base, son soluciones estacionarias axisimétricas que representan un balance de fuerzas entre la tensión superficial y los términos gravitatorios, medidos en el sistema de referencia que rota con velocidad angular constante, es decir se necesita resolver,

$$\nabla P = 0, \tag{85}$$

para variables independientes de  $\phi$  y de  $t$ ,

$$h(r, \phi, t) \rightarrow \alpha(r), \tag{86}$$

$$a(\phi, t) \rightarrow a_0, \tag{87}$$

$$P(r, \phi, t) \rightarrow \Phi(r). \tag{88}$$

Las condiciones de frontera para el problema estacionario, se obtienen de las condiciones laterales 68, 69, 70 y 71 obteniendo,

$$\alpha'(0) = 0, \tag{89}$$

$$\Phi'(0) = 0, \tag{90}$$

$$\alpha(a_0) = 0, \quad (91)$$

$$\alpha'(a_0) = -1. \quad (92)$$

Una primera integración de 85,

$$\Phi(r) = cte,$$

haciendo la constante igual a  $-G^2C$  la ecuación explícita es,

$$\Phi(r) = \alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - G^2\alpha + \frac{Jr^2}{2} = -G^2C.$$

La solución a la ecuación homogénea son funciones modificadas de Bessel de la primera especie  $I_0(Gr)$  y  $K_0(Gr)$ ,

$$\alpha(r) = AI_0(Gr) + BK_0(Gr) + \frac{J}{2G^2}r^2 + \frac{2J}{G^4} + C,$$

pero tan sólo  $I_0(Gr)$  (y sus derivadas) está acotada en el origen, por lo que,

$$\alpha(r) = AI_0(Gr) + \frac{J}{2G^2}r^2 + \frac{2J}{G^4} + C.$$

Utilizando las condiciones 91 y 92 se obtiene que las constantes  $A$  y  $C$  que están dadas por:

$$A = -\frac{G^2 + Ja_0}{G^3 I_1(Ga_0)},$$

$$C = \frac{G^2 + Ja_0}{G^3 I_1(Ga_0)} I_0(Ga_0) - \frac{J}{2G^2} a_0^2 - \frac{2J}{G^4},$$

de esta forma, la solución del estado base está dado por,

$$\alpha(r) = \frac{G^2 + Ja_0}{G^3 I_1(Ga_0)} (I_0(Ga_0) - I_0(Gr)) - \frac{J}{2G^2} (a_0^2 - r^2). \quad (93)$$

Desarrollando la solución para  $G \rightarrow 0$  [Abramowitz y Stegun, 1965],

$$\alpha(r) = \left( 2J \left( \frac{1}{64}a_0^4 - \frac{1}{64}r^4 \right) + 2\frac{1 - \frac{1}{8}Ja_0^3}{a_0} \left( \frac{1}{4}a_0^2 - \frac{1}{4}r^2 \right) \right) + O(G^2),$$

simplificando,

$$\alpha(r) = \frac{1}{32a_0} (a_0^2 - r^2) (16 - Ja_0 (a_0^2 - r^2)) + O(G^2), \quad (94)$$

que es el mismo resultado obtenido por MW. A continuación se mostrarán los estados base para diferentes valores del parámetro gravitatorio  $G$  y diferentes valores del radio estático  $a_0$  con el parámetro  $J = 1$ , utilizado por [McKinley y Wilson, 2001].

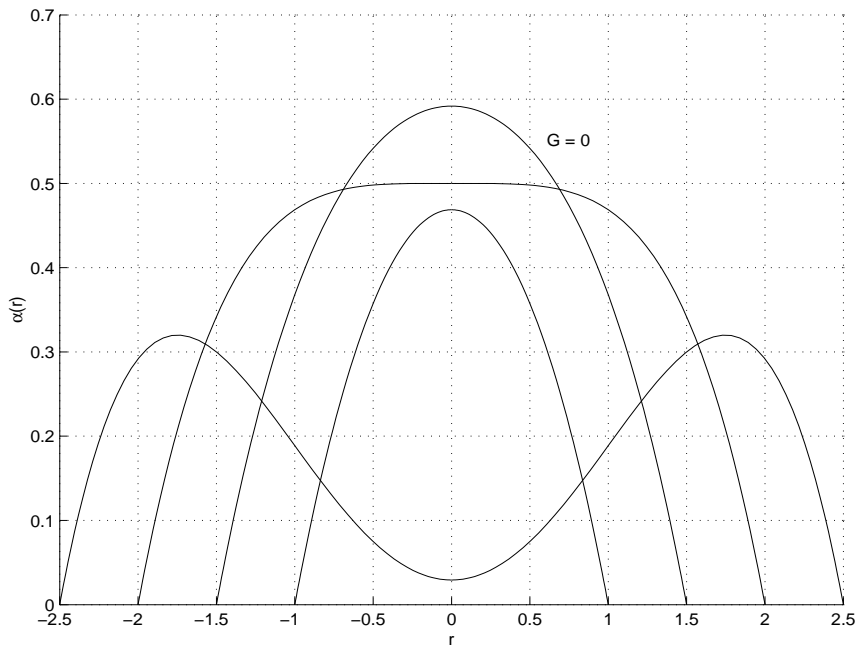


Figura 3. Estado base para valores de  $r = 1, 1.5, 2$  y  $2.5$ , con  $G = 0$ .

En la figura 3 se grafican los estados estacionarios para  $G = 0$  y diferentes valores del radio estacionario  $a_0 = 1, 1.5, 2$ , y  $2.5$ . La gráfica muestra que para diferentes valores

de  $a_0$  menores que cierto valor crítico  $a_c$  existen soluciones físicas, es decir,  $\alpha(r) \geq 0$  en todo el dominio, y no existen soluciones físicas para radios mayores que  $a_c$ . De la gráfica se ve que la altura del estado base disminuye en  $r = 0$  por los efectos de la fuerza centrípeta, de esta manera, el valor de  $a_c$  es, aparentemente el valor máximo  $a_0$  para el cual  $\alpha(0) = 0$ . En este caso  $a_c \approx 2.54$ , sin embargo, el valor exacto será calculado a continuación. Como se esperaba, los resultados concuerdan con los presentados por [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001].

En las figura 4, 5 y 6 se muestran gráficas de los estados base como función del radio  $r$  para valores de  $G = 2, 5$  y  $10$ , respectivamente, y diferentes valores del radio estático  $a_0$ ,  $a_0 = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.6$ , y  $2.7$ , para  $G = 2$ ;  $a_0 = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.2$ , y  $3.4$ , para  $G = 5$ , y  $a_0 = 1, 2, 3, 4, 4.5$  y  $4.6$  para  $G = 10$ . Se observa que al igual que el caso  $G = 0$ , la solución decrece en  $r = 0$  al aumentar el valor de  $a_0$ . En cada caso, se ha graficado el estado base para valores ligeramente menores al valor para el se tienen soluciones físicas  $a_c$ .

Nótese que para un fluido dado, y un valor de  $G$  fijo, al aumentar  $a_0$ , se puede interpretar como la disminución en la escala longitudinal  $L$ , dada por 77, correspondiente a un aumento en la velocidad angular  $\Omega$ . Es decir se aísla el efecto de la fuerza centrípeta, con lo que se demuestra que en efecto, el retener el parámetro  $J$  dado por [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001] es inconsecuente para el análisis de los resultados. Por otra parte, nótese que al introducir la escala de velocidades  $U$  y la escala longitudinal  $L$ , el parámetro gravitacional  $G$  queda como,

$$G^2 = \sqrt{\frac{\rho H}{\sigma}} \frac{g}{\Omega}, \quad (95)$$

es decir, expresa claramente los efectos de la gravedad, la rotación y la tensión superficial, lo cual está de acuerdo a los resultados mostrados para diferentes valores de este parámetro.

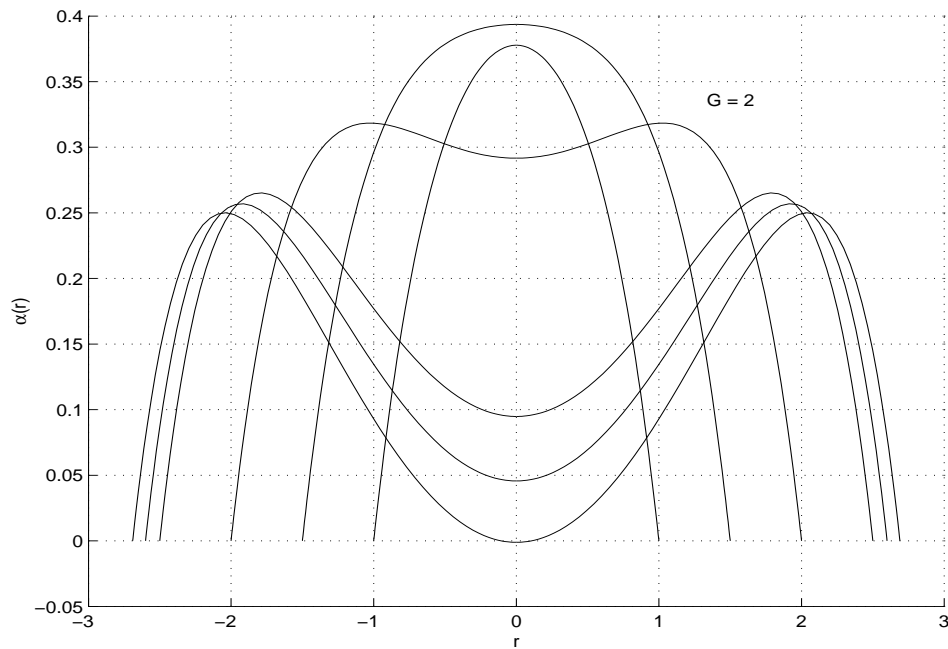


Figura 4. Estado base para valores de  $r = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.6$  y  $2.7$ , con  $G = 2$ .

#### IV.1.1. Comportamiento del estado base en $r = 0$

Las figuras 3-6 sugieren que la existencia de soluciones físicas están regidas por el valor del estado base  $\alpha$  en  $r = 0$ ,

$$\alpha(0) = \frac{2(G^2 + Ja_0)(I_0(Ga_0) - 1) - Ja_0^2GI_1(Ga_0)}{2G^3I_1(Ga_0)}.$$

La derivada de  $\alpha(r)$  está dada por,

$$\frac{d}{dr}\alpha(r) = \frac{JrI_1(Ga_0) - I_1(Gr)(G^2 + Ja_0)}{G^2I_1(Ga_0)},$$

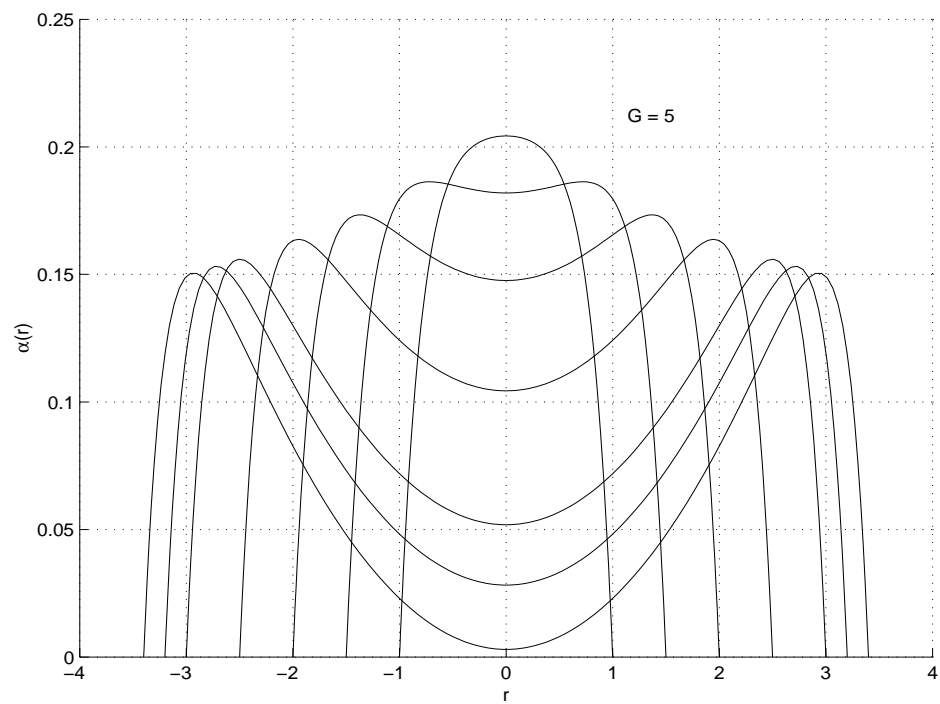


Figura 5. Estado base para valores de  $r = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.2$  y  $3.4$ , con  $G = 5$ .

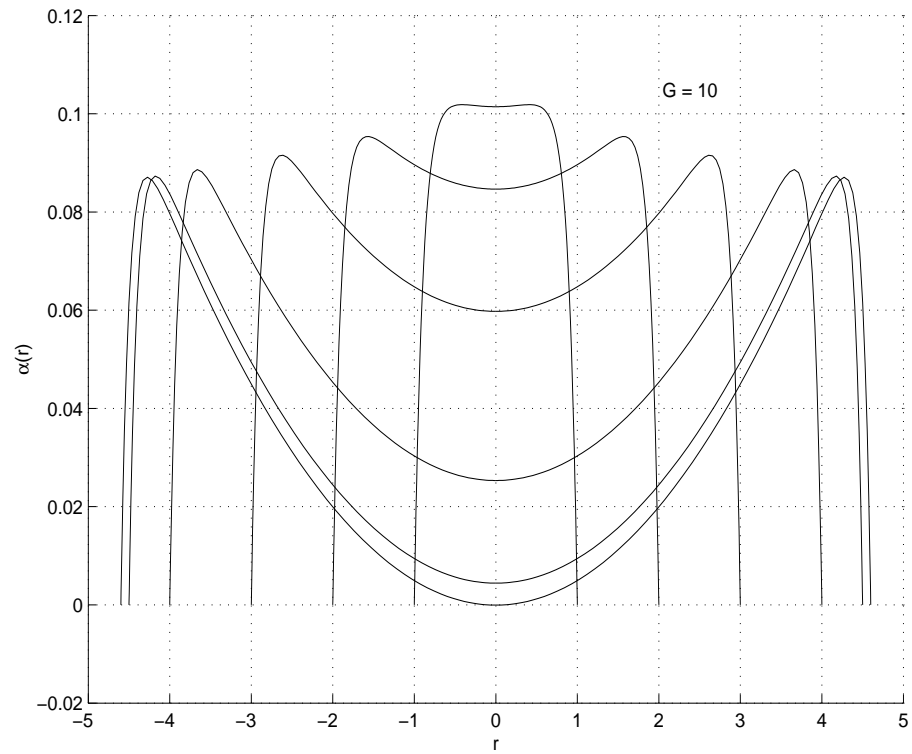


Figura 6. Estado base para valores de  $r = 1, 2, 3, 4, 4.5$  y  $4.6$ , con  $G = 10$ .



se tienen extremos cuando

$$JrI_1(Ga_0) - I_1(Gr)(G^2 + Ja_0) = 0.$$

Obviamente  $r = 0$  es un extremo. La segunda derivada de  $\alpha(r)$  es,

$$\frac{d^2}{dr^2}\alpha(r) = \frac{J}{G^2} + \frac{G^2 + Ja_0}{G^2r} \frac{I_1(Gr)}{I_1(Ga_0)} - \frac{G^2 + Ja_0}{G} \frac{I_0(Gr)}{I_1(Ga_0)},$$

evaluando en  $r = 0$ ,

$$\left. \frac{d^2}{dr^2}\alpha(r) \right|_{r=0} = \frac{1}{G^2 I_1(Ga_0)} \left[ JI_1(Ga_0) - \frac{G^2 + Ja_0}{2} G \right].$$

El denominador es siempre positivo. Si se considera  $J = 1$  se tendrá un mínimo cuando

$$I_1(Ga_0) - \frac{G^2 + a_0}{2} G > 0.$$

Expresando  $I_1(Ga_0)$  en una serie de potencias, considerando valores de  $G$  y de  $a_0$  suficientemente grandes se tiene

$$I_1(Ga_0) - \frac{G^2 + a_0}{2} G = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a_0 G)^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (k+1)!} + \frac{a_0^3 - 8}{16} G^3,$$

En este caso, se debe tener cuidado en que  $\alpha(0)$  sea positivo para asegurar soluciones físicas. Si se calcula  $\alpha(0)$  para valores de  $G$  pequeños, se tiene:

$$\alpha(0) = \frac{1}{2} a_0 \left( 1 - \frac{1}{16} J a_0^3 \right) + O(G^2),$$

el cual, es el resultado obtenido por [McKinley y Wilson, 2001]. De esta manera, para tener soluciones físicas es necesario que el numerador

$$N(a_0, G, J) = 2(G^2 + Ja_0)(I_0(Ga_0) - 1) - Ja_0^2GI_1(Ga_0), \quad (96)$$

sea positivo. La curva  $N(a_0, G, 1)(0) = 0$  divide el plano  $G-a_0$  en dos regiones, una con soluciones físicas para radios estáticos pequeños y otra para radios estáticos grandes, donde en esta última no existen soluciones físicas. En la figura 7 se grafican los radios estáticos para los cuales se tiene una solución física como función del parámetro  $G$ . Se puede observar que se tienen soluciones físicas para radios menores de cierto valor  $a_0 = a_c$ , similarmente se puede concluir que esta región crece al aumentar el valor de  $G$ .

#### IV.1.2. Volumen del estado base

El volumen del estado base se determina por,

$$V = 2\pi \int_0^{a_0} r\alpha(r) dr = 2\pi \left( \frac{G^2 + Ja_0}{2G^3I_1(Ga_0)} I_0(Ga_0) a_0^2 - \frac{G^2 + Ja_0}{G^4} a_0 - \frac{J}{8G^2} a_0^4 \right).$$

De nueva cuenta, cuando  $G \rightarrow 0$

$$V = \frac{2\pi}{192} a_0^3 (24 - Ja_0^3) + O(G^2),$$

el cual es el resultado presentado por [McKinley y Wilson, 2001].

En la figura 8 se grafica el volumen del estado base,  $V$  como una función de  $a_0$ , para  $G = 0, 1, 2, \dots, 20$ . Cada una de estas curvas se grafica hasta  $a_0 = a_c$ , el valor para el cuál se tienen soluciones físicas. Se nota que al aumentar  $G$ , aumenta el valor de  $a_0$ . En estas curvas se aprecia que para una  $G$  fija, no existirán soluciones estacionarias axisimétricas

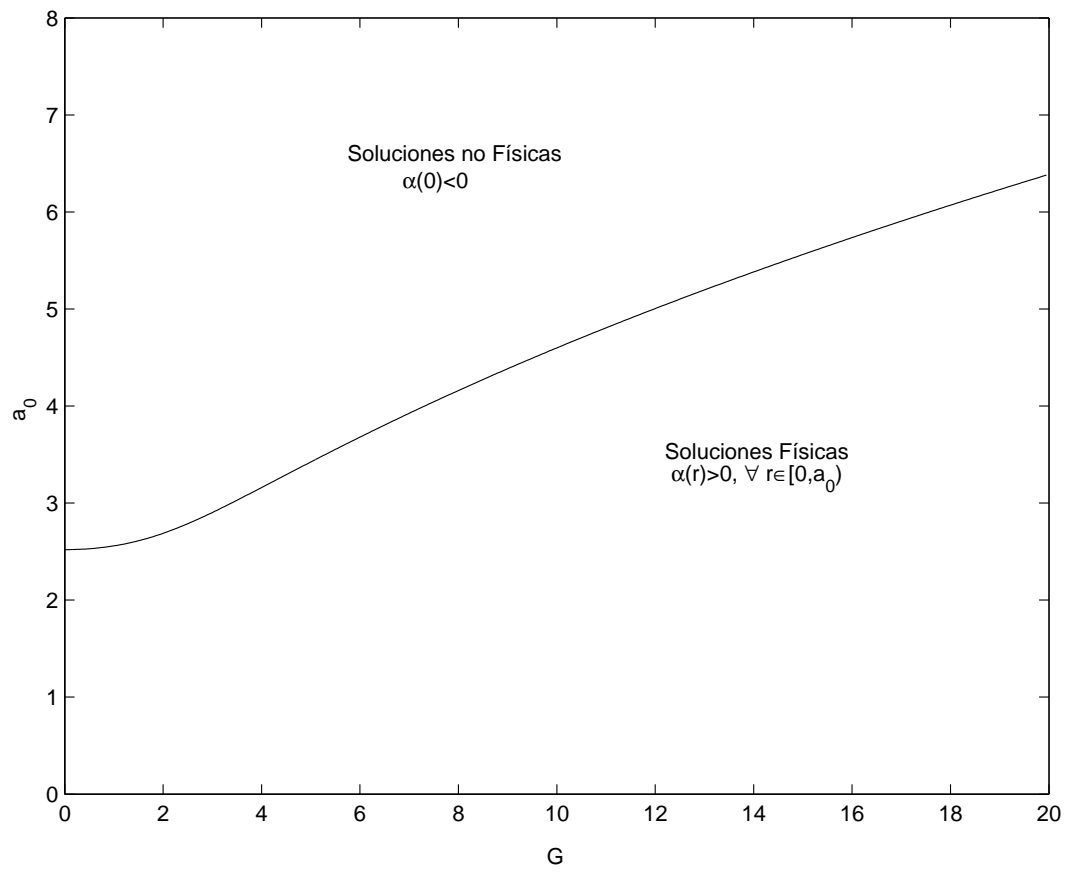


Figura 7. Radios estáticos para los que tenemos una solución física como función de  $G$ .

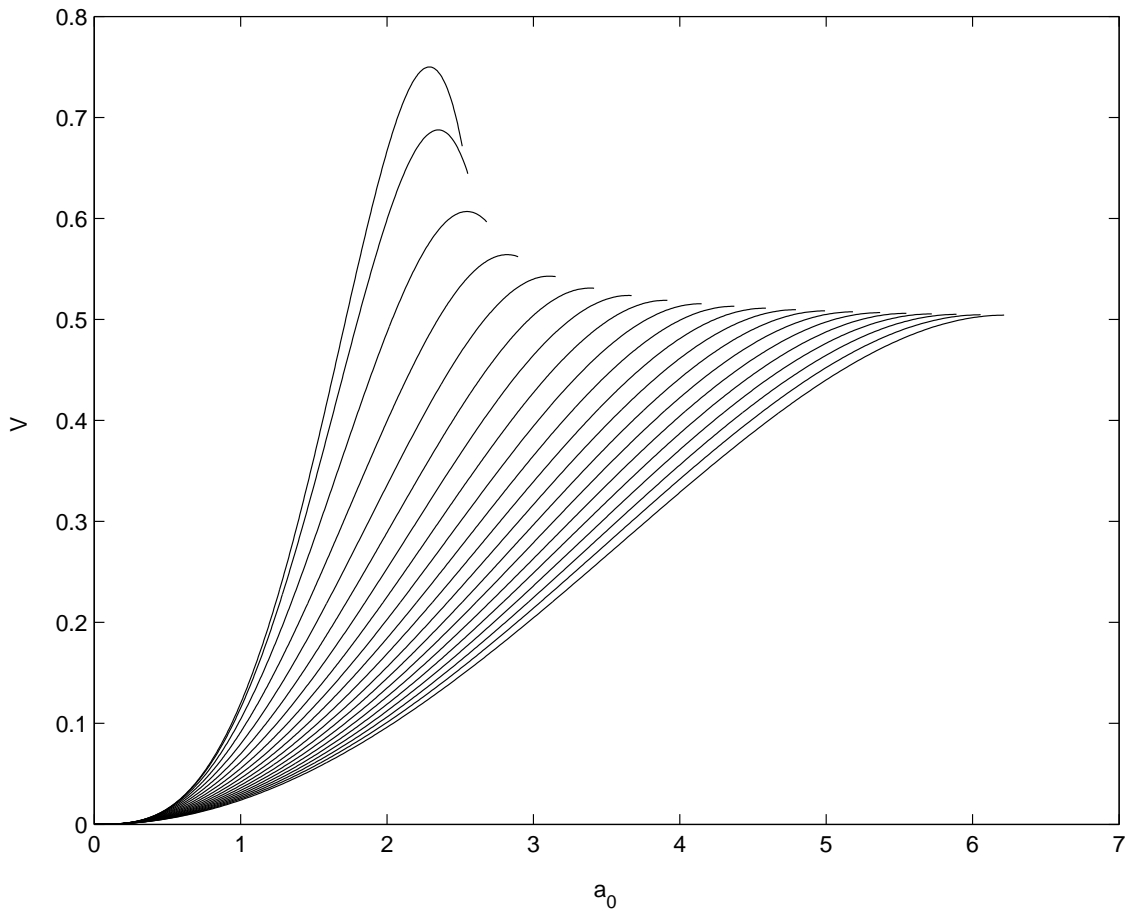


Figura 8. Volumen del estado base  $V$  como función del radio estático  $a_0$ , para diferentes valores de  $G$ .

para volúmenes mayores que cierto valor  $V_{max}$ . Se observa que para valores pequeños de  $G$ , existen soluciones para dos valores distintos del radio estático. Sin embargo, al aumentar  $G$  el volumen máximo  $V_{max}$ , tiende a un valor fijo, correspondiente al valor crítico del radio estático  $a_c$ . Es decir, que para valores de  $G$  suficientemente grandes, tenemos tan solo una solución para volúmenes menores que  $V_{max}$ .

Para calcular el volumen máximo, se tiene que encontrar el punto  $a_0$  con  $G$  fija, donde,

$$V(a_0) = \frac{G^2 + Ja_0}{2G^3 I_1(G a_0)} I_0(G a_0) a_0^2 - \frac{G^2 + Ja_0}{G^4} a_0 - \frac{J}{8G^2} a_0^4,$$

es máximo. Si se toma  $J = 1$  y se calcula la derivada,

$$\frac{dV}{da_0} = \frac{1}{2G^2} \left[ - (G^2 a_0^2 + a_0^3) \frac{I_0 (Ga_0)^2}{I_1 (Ga_0)^2} + \frac{3G^2 + 4a_0}{G} a_0 \frac{I_0 (G a_0)}{I_1 (G a_0)} - 2 \frac{G^2 + 2a_0}{G^2} + G^2 a_0^2 \right],$$

multiplicando por  $G^2 I_1 (Ga_0)^2$ , se define la función

$$M(a_0, G) = -G^2 (G^2 a_0^2 + a_0^3) I_0 (Ga_0)^2 I_1 (Ga_0)^2 + Ga_0 (3G^2 + 4a_0) I_0 (G a_0) I_1 (Ga_0) - [2 (G^2 + 2a_0) - G^4 a_0^2] I_1 (Ga_0)^2, \quad (97)$$

de tal manera, que el volumen será máximo en el punto del plano  $a_0 - G$  en que

$$M(a_0, G) = 0.$$

## IV.2. Ecuación de evolución.

Para encontrar la ecuación de evolución explícita se necesita calcular las velocidades  $u$  y  $v$  en las ecuaciones 82 y 83

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2F^2 v = -P_r,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2F^2 u = \frac{-P_\phi}{r},$$

con condiciones de frontera:

$$u - \tilde{\lambda}(h) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad v - \tilde{\lambda}(h) \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

en  $z = 0$  y

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

en  $z = h$ .

Por simplicidad, se introducen momentáneamente el siguiente cambio de variables,

$$z \rightarrow \frac{z}{F}, \quad (98)$$

$$P \rightarrow F^2 P, \quad (99)$$

de esta manera, el sistema 82-83 se convierte en,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2v = -P_r, \quad (100)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2u = \frac{-P_\phi}{r}. \quad (101)$$

Sea

$$y = u + iv, \quad (102)$$

sumando la primera ecuación con  $i$  veces la segunda, se tiene que,

$$y_{zz} - 2iy = -2iB \quad (103)$$

con

$$B = a - ib,$$

$$a - ib = \frac{P_\phi}{2r} - i\frac{P_r}{2}.$$

La solución general a la ecuación 103 es:

$$y = C(r, \phi, t) \cosh \{\gamma z\} + D(r, \phi, t) \sinh \{\gamma z\} + B(r, \phi, t),$$

donde  $\gamma = (1 + i)$ , aplicando la condición

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \text{ es decir } \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

en  $z = h$ . Se obtiene que

$$D = -C \frac{\sinh \{\gamma h\}}{\cosh \{\gamma h\}}.$$

Se introduce,

$$E(r, \phi, t) = \frac{C(r, \phi, t)}{\cosh \{\gamma h\}},$$

donde  $E$  se determina de la condición de deslizamiento en  $z = 0$

$$\begin{aligned} y - \tilde{\lambda} \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_{z=0} &= E [\cosh \{\gamma h\} \cosh \{\gamma z\} - \sinh \{\gamma h\} \sinh \{\gamma z\}] + B(r, \phi, t) \\ &\quad - \tilde{\lambda} E \gamma [\cosh \{\gamma h\} \sinh \{\gamma z\} - \sinh \{\gamma h\} \cosh \{\gamma z\}], \end{aligned}$$

con lo que

$$E = -\frac{B}{\cosh \{\gamma h\} + \tilde{\lambda} \gamma \sinh \{\gamma h\}}.$$

Así, la solución explícita es:

$$y = B \left[ 1 - \frac{\cosh \gamma (h - z)}{\cosh \gamma h + \tilde{\lambda} \gamma \sinh \gamma h} \right]. \quad (104)$$

Desarrollando el denominador de 104 y usando  $\gamma$  se obtiene

$$\frac{1}{\cosh \gamma h + \tilde{\lambda} \gamma \sinh \gamma h} = \frac{e - if}{e^2 + f^2},$$

donde

$$e = \cosh h \cos h + \tilde{\lambda} (\sinh h \cos h - \cosh h \sin h),$$

$$f = \sinh h \sin h + \tilde{\lambda} (\sinh h \cos h + \cosh h \sin h).$$

El numerador es,

$$\cosh \gamma (h - z) = r + is,$$

donde

$$r = \cosh (h - z) \cos (h - z),$$

$$s = \sinh (h - z) \sin (h - z).$$

Por lo tanto la solución 104 se puede expresar como:

$$y = [a - ib] \left[ 1 - (r + is) \left( \frac{e - if}{e^2 + f^2} \right) \right],$$

lo cual, queda finalmente como

$$y = a - ib - \left[ \frac{(ae - bf)r + (af + be)s}{e^2 + f^2} \right] - i \left[ \frac{(-af - be)r + (ae - bf)s}{e^2 + f^2} \right],$$

y las velocidades en las direcciones  $u$  y  $v$  como:

$$u = a - \left[ \frac{(ae - bf)r + (af + be)s}{e^2 + f^2} \right],$$



$$v = -b + \left[ \frac{(\text{af} + \text{be}) r - (\text{ae} - \text{bf}) s}{e^2 + f^2} \right].$$

Una vez encontradas las velocidades

$$u = a - \frac{(\text{ae} - \text{bf}) \cosh(h - z) \cos(h - z) + (\text{af} + \text{be}) \sinh(h - z) \sin(h - z)}{e^2 + f^2},$$

$$v = -b + \frac{(\text{af} + \text{be}) \cosh(h - z) \cos(h - z) - (\text{ae} - \text{bf}) \sinh(h - z) \sin(h - z)}{e^2 + f^2},$$

se calcula el flujo

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2) = \left( \int_0^h u dz, \int_0^h v dz \right),$$

donde

$$q_1 = ah - \frac{\text{ae} - \text{bf}}{e^2 + f^2} \int_0^h r dz - \frac{\text{af} + \text{be}}{e^2 + f^2} \int_0^h s dz,$$

$$q_2 = -bh + \frac{\text{af} + \text{be}}{e^2 + f^2} \int_0^h r dz - \frac{\text{ae} - \text{bf}}{e^2 + f^2} \int_0^h s dz.$$

Las integrales de  $r$  y  $s$  están dadas por

$$\int_0^h r dz = \frac{1}{2} (\cosh h \sin h + \sinh h \cos h),$$

$$\int_0^h s dz = \frac{1}{2} [\cosh(h) \sin(h) - \sinh(h) \cos(h)].$$

Si se define,

$$\sinh h = S,$$

$$\cosh h = C,$$

$$\sin h = \sigma,$$

$$\cos h = \kappa,$$

entonces:

$$q_1 = ah - \frac{a}{2(e^2 + f^2)} [(e + f) C\sigma + (e - f) S\kappa] - \frac{b}{2(e^2 + f^2)} [(e - f) C\sigma - (e + f) S\kappa]$$

y

$$q_2 = -bh + \frac{b}{2(e^2 + f^2)} ((e + f) C\sigma + (e - f) S\kappa) - \frac{a}{2(e^2 + f^2)} ((e - f) C\sigma - (e + f) S\kappa),$$

sustituyendo,

$$\begin{aligned} e - f &= \cosh h \cos h - \sinh h \sin h - 2\tilde{\lambda} \cosh h \sin h = C\kappa - S\sigma - 2\tilde{\lambda}C\sigma, \\ e + f &= \cosh h \cos h + \sinh h \sin h + 2\tilde{\lambda} \sinh h \cos h = C\kappa + S\sigma + 2\tilde{\lambda}S\kappa, \\ e^2 + f^2 &= C^2\kappa^2 + S^2\sigma^2 + 2\tilde{\lambda} [C\sigma - \kappa\sigma] + 2\tilde{\lambda}^2 [(S^2\kappa^2 + C^2\sigma^2)], \end{aligned}$$

asimismo,

$$\begin{aligned} (e + f) C\sigma + (e - f) S\kappa &= (C\kappa + S\sigma + 2\tilde{\lambda}S\kappa) C\sigma + (C\kappa - S\sigma - 2\tilde{\lambda}C\sigma) S\kappa \\ &= \kappa\sigma + CS, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e - f) C\sigma - (e + f) S\kappa &= (C\kappa - S\sigma - 2\tilde{\lambda}C\sigma) C\sigma - (C\kappa + S\sigma + 2\tilde{\lambda}S\kappa) S\kappa \\ &= \kappa\sigma - CS - 2\tilde{\lambda} (C^2\sigma^2 + S^2\kappa^2). \end{aligned}$$

Con lo que,

$$q_1 = ah - \frac{a}{2(e^2 + f^2)} [\kappa\sigma + CS] - \frac{b}{2(e^2 + f^2)} [\kappa\sigma - CS - 2\tilde{\lambda} (C^2\sigma^2 + S^2\kappa^2)],$$

$$q_2 = -bh - \frac{a}{2(e^2 + f^2)} \left( \kappa\sigma - CS - 2\tilde{\lambda}(C^2\sigma^2 + S^2\kappa^2) \right) + \frac{b}{2(e^2 + f^2)} (\kappa\sigma + CS).$$

Sustituyendo los valores de a y b

$$q_1 = \frac{P_r}{4(e^2 + f^2)} \left[ CS - \kappa\sigma + 2\tilde{\lambda}(C^2\sigma^2 + S^2\kappa^2) \right] + \frac{P_\phi}{2r} \left[ h - \frac{1}{2(e^2 + f^2)} (\kappa\sigma + CS) \right],$$

$$q_2 = -\frac{P_r}{2} \left[ h - \frac{1}{2(e^2 + f^2)} (\kappa\sigma + CS) \right] + \frac{P_\phi}{4r(e^2 + f^2)} \left[ CS - \kappa\sigma + 2\tilde{\lambda}(C^2\sigma^2 + S^2\kappa^2) \right].$$

Lo cual se expresa en forma condensada como

$$q_1 = P_r F(h) + \frac{P_\phi}{r} G(h),$$

$$q_2 = -P_r G(h) + \frac{P_\phi}{r} F(h),$$

donde,

$$F(h) = \frac{CS - \kappa\sigma + 2\tilde{\lambda}(C^2\sigma^2 + S^2\kappa^2)}{4(e^2 + f^2)},$$

$$G(h) = \frac{h}{2} - \frac{1}{4(e^2 + f^2)} (\kappa\sigma + CS).$$

Así la ecuación de evolución

$$h_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0,$$

está dada por,

$$-h_t = \nabla \cdot \left[ P_r F(h) + \frac{P_\phi}{r} G(h), -P_r G(h) + \frac{P_\phi}{r} F(h) \right] \quad (105)$$

En términos de las variables originales,

$$\begin{aligned} h &\rightarrow Fh, \\ P &\rightarrow \frac{P}{F^2}, \\ \tilde{\lambda} &\rightarrow F\tilde{\lambda}, \end{aligned}$$

y al integrar

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow Fq_1, \\ q_2 &\rightarrow Fq_2, \end{aligned}$$

de esta manera,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{P_r}{F^3}F(h) + \frac{P_\phi}{F^3r}G(h), \\ q_2 &= -\frac{P_r}{F^3}G(h) + \frac{P_\phi}{F^3r}F(h), \end{aligned}$$

donde las funciones  $F(h)$  y  $G(h)$  están dadas por

$$F(h) = \frac{\cosh Fh \sinh Fh - \cos Fh \sin Fh + 2F\tilde{\lambda}(\cosh^2 Fh \sin^2 Fh + \sinh^2 Fh \cos^2 Fh)}{4(e^2 + f^2)},$$

$$G(h) = \frac{Fh}{2} - \frac{\cosh Fh \sinh Fh + \cos Fh \sin Fh}{4(e^2 + f^2)},$$

donde,

$$e = \cosh Fh \cos Fh + F\tilde{\lambda}(\sinh Fh \cos Fh - \cosh Fh \sin Fh) = C\kappa + F\tilde{\lambda}(S\kappa - C\sigma),$$

$$f = \sinh Fh \sin Fh + F\tilde{\lambda}(\cosh Fh \sin Fh + \sinh Fh \cos Fh) = S\sigma + F\tilde{\lambda}(S\kappa + C\sigma),$$

con lo que,

$$e^2 + f^2 = \left[ C\kappa + F\tilde{\lambda}(S\kappa - C\sigma) \right]^2 + \left[ S\sigma + F\tilde{\lambda}(S\kappa + C\sigma) \right]^2,$$

usando las relaciones para el doble de los argumentos y los cuadrados de las funciones hiperbólicas y trigonométricas,

$$e^2 + f^2 = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) \\ + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \end{array} \right].$$

Finalmente las funciones  $F(h)$  y  $G(h)$  quedan como

$$F(h) = \frac{\sinh 2Fh - \sin 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\cosh 2Fh - \cos 2Fh)}{4 \left( \begin{array}{c} \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) \\ + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \end{array} \right)},$$

$$G(h) = \frac{Fh}{2} - \frac{\cosh Fh \sinh Fh + \cos Fh \sin Fh}{2 \left( \begin{array}{c} \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) \\ + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \end{array} \right)}.$$

Así la ecuación de evolución es:

$$h_t + \nabla \cdot \left[ \frac{P_r}{F^3} F(h) + \frac{P_\phi}{F^3 r} G(h), -\frac{P_r}{F^3} G(h) + \frac{P_\phi}{F^3 r} F(h) \right] = 0. \quad (106)$$

### IV.2.1. Análisis para $F \rightarrow 0$

Expandiendo en series de Taylor para valores de  $F$  pequeños las expresiones encontradas para el flujo  $\mathbf{Q} = (q_1, q_2)$  se tiene que,

$$\sinh 2Fh - \sin 2Fh = \frac{8}{3}h^3F^3 + \frac{16}{315}h^7F^7 + O(F^{11})$$

$$\cosh 2Fh - \cos 2Fh = 4h^2F^2 + \frac{8}{45}h^6F^6 + O(F^{10})$$

$$\sinh 2Fh + \sin 2Fh = 4hF + \frac{8}{15}h^5F^5 + O(F^{11})$$

$$\cosh 2Fh + \cos 2Fh = 2 + \frac{4}{3}h^4F^4 + \frac{4}{315}h^8F^8 + O(F^{12})$$

con lo que,

$$e^2 + f^2 = 1 + 2 \left[ \frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2 \right] h^2F^4 + \frac{2}{45} \left[ \frac{1}{7}h^2 + \frac{8}{7}h\tilde{\lambda} + 4\tilde{\lambda}^2 \right] h^6F^8 + O(F^{12})$$

así que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^2 + f^2} &= 1 - 2 \left[ \frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2 \right] h^2F^4 \\ &+ 2 \left[ \left( \frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2 \right)^2 h^4 - \frac{1}{45} \left[ \frac{1}{7}h^2 + \frac{8}{7}h\tilde{\lambda} + 4\tilde{\lambda}^2 \right] h^6 \right] F^8 + O(F^{12}). \end{aligned}$$

Con ello, se obtienen las funciones

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{\sinh 2Fh - \sin 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\cosh 2Fh - \cos 2Fh)}{8(e^2 + f^2)} \\ &= \left( \frac{1}{3}h + \tilde{\lambda} \right) h^2F^3 - 2 \left( \frac{34}{315}h^3 + \frac{34}{45}h^2\tilde{\lambda} + 2h\tilde{\lambda}^2 + 2\tilde{\lambda}^3 \right) h^4F^7 + O(F^{11}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 G(h) &= \frac{Fh}{2} - \frac{\sinh 2Fh + \sin 2Fh}{8(e^2 + f^2)} \\
 &= \frac{Fh}{2} - \left(4hF + \frac{8}{15}h^5F^5 + O(F^{11})\right) \frac{1}{8(e^2 + f^2)} \\
 &= \left(\frac{2}{5}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2\right) h^3F^5 + O(F^9).
 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= P_r \left(\frac{1}{3}h + \tilde{\lambda}\right) h^2 + \frac{P_\phi}{r} \left(\frac{2}{5}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2\right) F^2h^3 + O(F^4), \\
 q_2 &= \frac{P_\phi}{r} \left(\frac{1}{3}h + \tilde{\lambda}\right) h^2 - P_r \left(\frac{2}{5}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2\right) F^2h^3 + O(F^4),
 \end{aligned}$$

así, a primer orden se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= P_r \left(\frac{1}{3}h + \tilde{\lambda}\right) h^2, \\
 q_2 &= \frac{P_\phi}{r} \left(\frac{1}{3}h + \tilde{\lambda}\right) h^2,
 \end{aligned}$$

el cual, es exactamente el resultado que obtienen MW para  $F = 0$ .

#### IV.2.2. Sistema sin el término de Coriolis ( $F = 0$ )

Para hacer una comparación con los resultados obtenidos por [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001], en esta sección se simplifica el sistema de ecuaciones 73-74 considerando  $F = 0$ . El nuevo sistema es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial P}{\partial r}, \tag{107}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi}. \quad (108)$$

donde  $P(r, \phi, t)$  esta dado por 81

$$P(r, \phi, t) = \nabla^2 h - G^2 h + \frac{Jr^2}{2}.$$

sujeto a las siguientes condiciones

$$u - \tilde{\lambda}(h)u_z = 0, \quad v - \tilde{\lambda}(h)v_z = 0.$$

en  $z = 0$ , y  $u_z = 0$ ,  $v_z = 0$  en  $z = h$ .

La solución general para  $u$  y  $v$  tiene la forma:

$$u = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{z^2}{2} + A_u(r, \phi, t)z + B_u(r, \phi, t),$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} \frac{z^2}{2} + A_v(r, \phi, t)z + B_v(r, \phi, t),$$

las funciones  $A_u$ ,  $B_u$ ,  $A_v$  y  $B_v$  se encuentran usando la parte dominante de los esfuerzos tangenciales en  $z = h$ , donde  $u_z = v_z = 0$  y la condición de Navier, con lo cual se obtiene que:

$$u = -\frac{\partial P}{\partial r} \left[ \frac{z^2}{2} - h \left( z + \tilde{\lambda}(h) \right) \right],$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} \left[ \frac{z^2}{2} - h \left( z + \tilde{\lambda}(h) \right) \right].$$



Una vez encontradas las velocidades  $u$  y  $v$ , el flujo 84 para  $F = 0$  es dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (q_1, q_2) = \left( \int_0^h u dz, \int_0^h v dz \right) \\ &= - \left( P_r, \frac{P_\phi}{r} \right) \int_0^h \left[ \frac{z^2}{2} - h \left( z + \tilde{\lambda}(h) \right) \right] dz \\ &= \left( P_r, \frac{P_\phi}{r} \right) F(h), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} P(r, \phi, t) &= \nabla^2 h - G^2 h + \frac{Jr^2}{2}, \\ F(h) &= \frac{h^3 + 3h^2 \tilde{\lambda}(h)}{3}. \end{aligned}$$

lo que nos lleva a la ecuación de evolución:

$$\begin{aligned} h_t + \nabla \cdot \mathbf{Q} &= 0 \\ &= h_t + \nabla \cdot \left[ F(h) \left( P_r, \frac{P_\phi}{r} \right) \right] \\ &= h_t + F(h) \nabla \cdot \left( P_r, \frac{P_\phi}{r} \right) + \nabla F(h) \cdot \left( P_r, \frac{P_\phi}{r} \right) \quad (109) \\ &= h_t + F(h) \nabla \cdot \left( P_r, \frac{P_\phi}{r} \right) + F'(h) \nabla h \cdot \left( P_r, \frac{P_\phi}{r} \right), \end{aligned}$$

que es exactamente la encontrada por [McKinley y Wilson, 2001] y la encontrada al hacer tender  $F \rightarrow 0$  en 106.

### IV.2.3. Estado cuasiestacionario

El estado cuasiestacionario se obtiene al introducir una nueva escala de tiempo:

$$t \rightarrow tD,$$

en la ecuación 109 y reteniendo la condición 71 donde aparece el parámetro adimensional  $D$  que contiene la información de las interacciones entre el sólido y los dos fluidos [López *et al.*, 2001].

El límite  $D = 0$  representa un ángulo de contacto dinámico igual al estático y ha sido utilizado extensivamente por [Hocking, 1995]. Tomando el límite cuando  $D \rightarrow \infty$ , esto hace que la evolución temporal de  $h$  en la ecuación de evolución 109 desaparezca obteniendo

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (110)$$

y se establezca un balance de fuerzas en la interfaz  $z = h$ , mientras que la evolución está dada por 71, en términos de la nueva escala temporal.

$$a_t = - \left( 1 + \left( \frac{a_\phi}{a} \right)^2 \right)^{1/2} \left( \left( h_r - \frac{h_\phi a_\phi}{a^2} \right)^m + 1 \right). \quad (111)$$

Este límite cuasiestático, ha sido estudiado por diferentes autores para gotas en superficies sólidas ver por ejemplo [Greenspan, 1978] y [Ehrhard y Davis, 1991] mientras que [López *et al.*, 2001] lo usan en otros flujos.

# Capítulo V

## Estabilidad lineal.

El sistema obtenido, es un sistema de evolución acoplado y no lineal. Como en muchos otros casos, el sistema es intratable analíticamente. Una forma de caracterizar al sistema es cuando la estabilidad de cierto estado base describe el sistema y representa un estado estacionario del mismo. Aquí, se hace un análisis de estabilidad lineal de los estados estacionarios axisimétricos encontrados en el capítulo anterior.

Primero, se perturba el estado base 112-118 en términos de sus modos normales, es decir, las variables involucradas sufren cambios pequeños con respecto a las soluciones estacionarias axisimétricas,

$$a(\phi, t) \rightarrow a_0 + \delta a_1 \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \quad (112)$$

$$h(r, \phi, t) \rightarrow \alpha(r) + \delta \beta(r) \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \quad (113)$$

con

$$P(r, \phi, t) \rightarrow \Phi(r) + \delta \Psi(r) \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \quad (114)$$

$$\Phi(r) = D^2 \alpha(r) - G \alpha(r) + \frac{J r^2}{2}, \quad (115)$$

$$\Psi(r) = D^2 \beta(r) - \frac{q^2}{r^2} \beta(r) - G^2 \beta(r), \quad (116)$$

donde

$$D^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}. \quad (117)$$

Sea

$$\Delta(\phi, t) = \delta \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \quad (118)$$

introduciendo las expresiones 112-118 en la ecuación de evolución 106 y reteniendo solo los términos lineales en  $\delta$ ,

$$\begin{aligned} -\sigma\beta\Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left[ \frac{(\Phi_r + \Delta\Psi_r)}{F^3} F(\alpha) + iq \frac{\Delta\Psi}{F^3 r} G(\alpha) \right] \right) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ -\frac{(\Phi_r + \Delta\Psi_r)}{F^3} G(\alpha) + iq \frac{\Delta\Psi}{F^3 r} F(\alpha) \right], \end{aligned}$$

pero la solución estática cumple con,

$$\frac{d\Phi}{dr} = \Phi_r = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} -\sigma\beta\Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left[ \frac{\Delta\Psi_r F(\alpha)}{F^3} + iq \frac{\Delta\Psi}{F^3 r} G(\alpha) \right] \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\Delta\Psi_r G(\alpha)}{F^3} + iq \frac{\Delta\Psi}{F^3 r} F(\alpha) \right] \\ &= \Delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \Psi_r F(\alpha)}{F^3} \right) + iq \Delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{F^3} \Psi G(\alpha) \right) - \frac{1}{r} iq \Delta \frac{1}{F^3} \Psi_r G(\alpha) \\ &- \Delta \frac{q^2}{F^3 r^2} \Psi F(\alpha), \end{aligned}$$

dividiendo entre  $\Delta$  y notando que las variables involucradas son funciones de  $r$ , se obtiene la ecuación lineal que se debe resolver,

$$-\sigma\beta = \frac{1}{F^3} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi}{dr} F(\alpha) \right) + \frac{1}{r} q^2 \frac{\Psi}{r} F(\alpha) + iq \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} (\Psi G(\alpha)) - \frac{d\Psi}{dr} G(\alpha) \right] \right], \quad (119)$$

con

$$\Psi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \beta(r) \right) - \frac{q^2}{r^2} \beta(r) - G^2 \beta(r), \quad (120)$$

$$F(h) = \frac{\sinh 2Fh - \sin 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\cosh 2Fh - \cos 2Fh)}{4 \left( \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \right)},$$

$$G(h) = \frac{Fh}{2} - \frac{\cosh Fh \sinh Fh + \cos Fh \sin Fh}{2 \left( \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \right)}.$$

La ecuación 119 es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden, en donde para cada número de onda  $q$  de la perturbación se establece un problema de eigenvalores del operador diferencial de cuarto orden.

Esta ecuación se complementa con una serie de condiciones de frontera que se obtienen al sustituir las ecuaciones 112-118 en las condiciones 68-71 y linealizando con respecto a  $\delta$ .

## V.1. Condiciones de frontera para el problema lineal.

Al introducir las variables linealizadas en las condiciones de regularización en  $r = 0$ , tenemos que

$$\alpha_r + \delta\beta_r \exp\{\sigma t + i q\phi\} = 0, \quad (121)$$

mientras que la condición para el flujo toma la forma,

$$\Phi_r + \delta\Psi_r \exp\{\sigma t + i q\phi\} = 0. \quad (122)$$

Usando las condiciones de frontera para el estado base, tenemos que las condiciones para el problema lineal en  $r = 0$  están dadas por,

$$\beta'(0) = 0, \quad (123)$$

$$\Psi'(0) = 0. \quad (124)$$

En la línea de contacto la condición de no penetración toma la forma,

$$\alpha(a_0 + \delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}) + \delta \beta(a_0 + \delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}) \exp\{\sigma t + i q \phi\} = 0, \quad (125)$$

a primer orden en  $\delta$

$$\alpha(a_0) + \delta \exp\{\sigma t + i q y\} [\alpha'(a_0) a_1 + \beta(a_0)] = 0.$$

Al sustituir los valores para  $\alpha(a_0)$  y  $\alpha'(a_0)$  se obtiene una condición en términos de la amplitud de la perturbación  $a_1$ ,

$$\beta(a_0) = a_1. \quad (126)$$

La evolución en la línea de contacto toma la forma,

$$Da_1 \delta \sigma \exp\{\sigma t + i q y\} = - \left[ \begin{array}{c} \alpha'(a_0 + \delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}) \\ + \delta \beta'(a_0 + \delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}) \exp\{\sigma t + i q \phi\} \end{array} \right]^m + 1] + O(\delta^2),$$

ignorando potencias mayores que la primera en  $\delta$

$$Da_1 \delta \sigma \exp\{\sigma t + i q y\} = - [\alpha'(a_0)]^m - 1 - \delta m (a_1 \alpha''(a_0) + \beta'(a_0)) \exp\{\sigma t + i q \phi\}.$$

De la condición para  $\alpha'(a_0)$  y dividiendo entre  $\delta\sigma \exp\{\sigma t + i qy\}$

$$Da_1\sigma = -m(a_1\alpha''(a_0) + \beta'(a_0)).$$

Sustituyendo  $a_1$  de la condición 126, y usando el hecho de que  $\alpha'(a_0) = -1$

$$-\frac{D}{m}\beta(a_0)\sigma = \beta(a_0)\alpha''(a_0) + \beta'(a_0). \quad (127)$$

La ecuación lineal 119 se resuelve sujeta a las condiciones de frontera, 123, 124 y 127. Estas relaciones son las *condiciones naturales* del problema, pero el operador lineal, es un operador de cuarto orden, y el problema es un problema de eigenvalores para la razón de crecimiento  $\sigma$ , es decir de alguna manera el sistema se debe de sobredeterminar. Esta situación se resuelve al notar que la ecuación lineal 119 es singular en las fronteras, por lo que vale la pena considerar el comportamiento de la ecuación lineal en la vecindad de las fronteras.

## V.2. Ecuación lineal en el límite $F \rightarrow 0$

La ecuación lineal 119, incluye la contribución de los términos de Coriolis. Se considera que una caracterización del problema lineal para  $F$  pequeños reteniendo los efectos gravitatorios es de interés particular, ya que significa una primera generalización de los resultados presentados en [McKinley y Wilson, 2001]. Primero se muestra la ecuación lineal tomando el límite en que  $F \rightarrow 0$  en la ecuación lineal 119. Para ello, se

necesita expandir en series de Taylor para valores de  $F$  pequeños las expresiones para

$$F(h) = \frac{\sinh 2Fh - \sin 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\cosh 2Fh - \cos 2Fh)}{4 \left( \begin{array}{l} \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) \\ + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \end{array} \right)},$$

y

$$G(h) = \frac{Fh}{2} - \frac{\cosh Fh \sinh Fh + \cos Fh \sin Fh}{2 \left( \begin{array}{l} \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) \\ + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \end{array} \right)}.$$

En estos cálculos se introducen nuevamente las representaciones

$$e = \cosh Fh \cos Fh + F\tilde{\lambda}(\sinh Fh \cos Fh - \cosh Fh \sin Fh) = C\kappa + F\tilde{\lambda}(S\kappa - C\sigma),$$

$$f = \sinh Fh \sin Fh + F\tilde{\lambda}(\cosh Fh \sin Fh + \sinh Fh \cos Fh) = S\sigma + F\tilde{\lambda}(S\kappa + C\sigma),$$

con lo que,

$$e^2 + f^2 = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \cosh 2Fh + \cos 2Fh + 2F\tilde{\lambda}(\sinh 2Fh - \sin 2Fh) \\ + 2F^2\tilde{\lambda}^2(\cosh 2Fh - \cos 2Fh) \end{array} \right].$$

En series de Taylor,

$$e^2 + f^2 = 1 + 2 \left[ \frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2 \right] h^2 F^4 + \frac{2}{45} \left[ \frac{1}{7}h^2 + \frac{8}{7}h\tilde{\lambda} + 4\tilde{\lambda}^2 \right] h^6 F^8 + O(F^{12}),$$



y

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^2 + f^2} &= 1 - 2 \left[ \frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2 \right] h^2 F^4 \\ &+ 2 \left[ \left( \frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2 \right)^2 h^4 - \frac{1}{45} \left[ \frac{1}{7}h^2 + \frac{8}{7}h\tilde{\lambda} + 4\tilde{\lambda}^2 \right] h^6 \right] F^8 + O(F^{12}). \end{aligned}$$

Así, las expansiones para  $F(h)$  y  $G(h)$  están dadas por,

$$F(h) = \left( \frac{1}{3}h + \tilde{\lambda} \right) h^2 F^3 - 2 \left( \frac{34}{315}h^3 + \frac{34}{45}h^2\tilde{\lambda} + 2h\tilde{\lambda}^2 + 2\tilde{\lambda}^3 \right) h^4 F^7 + O(F^{11}),$$

$$G(h) = \left( \frac{2}{5}h^2 + \frac{4}{3}\tilde{\lambda}h + 2\tilde{\lambda}^2 \right) h^3 F^5 + O(F^9).$$

Sustituyendo en 119 y tomando el límite cuando  $F \rightarrow 0$ , se tiene que solo sobreviven los términos de  $F(h)$  y  $G(h)$  que están multiplicados por  $F^3$ , es decir la ecuación 119 se transforma en:

$$-\sigma\beta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi}{dr} F(\alpha) \right) + \frac{1}{r} q^2 \frac{\Psi}{r} F(\alpha) + O(F^2) \quad (128)$$

Para obtener directamente la ecuación lineal con  $F = 0$  así como en el caso con  $F \neq 0$ , se desarrollan las ecuaciones 112-118

$$h(r, \phi, t) \rightarrow \alpha(r),$$

$$a(\phi, t) \rightarrow a_0,$$

$$P(r, \phi, t) \rightarrow \Phi(r).$$

Los términos  $\nabla P$ ,  $F(h) \nabla P$ ,  $\nabla \cdot (F(h) \nabla P)$  de la ecuación de evolución 109 están dados por,

$$\begin{aligned} \nabla P &= \left( \Phi'(r) + \delta \Psi'(r) \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \delta \frac{i q}{r} \Psi(r) \exp \{ \sigma t + i q \phi \} \right) \\ &= (\Phi'(r), 0) + \delta \left( \Psi'(r), \frac{i q}{r} \Psi(r) \right) \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(h) \nabla P &= f(r) (\Phi'(r), 0) + \delta f(r) \left( \Psi'(r), \frac{i q}{r} \Psi(r) \right) \exp \{ \sigma t + i q \phi \} \\ &\quad + \delta g(r) (\Phi'(r), 0) \exp \{ \sigma t + i q \phi \} \\ &= f(r) (\Phi'(r), 0) + \delta \left( f(r) \Psi'(r) + g(r) \Phi'(r), \frac{i q}{r} f(r) \Psi(r) \right) \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (F(h) \nabla P) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ r [f(r) \Phi'(r) + \delta (f(r) \Psi'(r) + g(r) \Phi'(r))] \exp \{ \sigma t + i q \phi \} \} \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \delta \frac{i q}{r} f(r) \Psi(r) \exp \{ \sigma t + i q \phi \} \right\} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r f(r) \Phi'(r)] + \delta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r (f(r) \Psi'(r) + g(r) \Phi'(r))] \exp \{ \sigma t + i q \phi \} \\ &\quad - \delta \frac{q^2}{r^2} f(r) \Psi(r) \exp \{ \sigma t + i q \phi \}, \end{aligned}$$

respectivamente. Pero el estado base cumple con:

$$\Phi'(r) = 0,$$

entonces

$$\nabla \cdot (F(h) \nabla P) = \delta \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r f(r) \Psi'(r)] - \frac{q^2}{r} f(r) \Psi(r) \right\} \exp \{ \sigma t + i q \phi \}.$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación de evolución se tiene la ecuación lineal,

$$-\sigma\beta(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rf(r)\Psi'(r)] - \frac{q^2}{r^2} f(r)\Psi(r), \quad (129)$$

donde,

$$f(r) = \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2\tilde{\lambda}(\alpha)}{3},$$

$$\begin{aligned} \Psi(r) &= D^2\beta(r) - \frac{q^2}{r^2}\beta(r) - G\beta(r) \\ &= \frac{d^2\beta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\beta(r)}{dr} - \frac{q^2}{r^2}\beta(r) - G^2\beta(r). \end{aligned}$$

### V.3. Ecuación lineal en el límite $r \rightarrow 0$

Para calcular explícitamente una nueva condición, se considera el límite cuando  $r \rightarrow 0$  en la ecuación 129. Para esto, es conveniente escribir la ecuación lineal en forma desarrollada

$$-\sigma r^4 \beta(r) = r^4 f(r) \Psi''(r) + r^3 (f(r) + r f'(r)) \Psi'(r) - q^2 r^2 f(r) \Psi(r).$$

Calculando las derivadas de

$$\begin{aligned} \Psi(r) &= \frac{d^2\beta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\beta(r)}{dr} - \frac{q^2}{r^2}\beta(r) - G^2\beta(r), \\ \Psi'(r) &= \frac{d^3\beta(r)}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\beta(r)}{dr^2} - \left( \frac{q^2 + 1}{r^2} + G^2 \right) \frac{d\beta(r)}{dr} + \frac{2q^2}{r^3}\beta(r), \\ \Psi''(r) &= \frac{d^4\beta(r)}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3\beta(r)}{dr^3} - \left( \frac{q^2 + 2}{r^2} + G^2 \right) \frac{d^2\beta(r)}{dr^2} + 2 \frac{2q^2 + 1}{r^3} \frac{d\beta(r)}{dr} - \frac{6q^2}{r^4}\beta(r). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación lineal 129 y multiplicando por  $r^4$ ,

$$-\sigma r^4 \beta(r) = r^4 f(r) \left[ \frac{d^4 \beta(r)}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \beta(r)}{dr^3} - \left( \frac{q^2 + 2}{r^2} + G^2 \right) \frac{d^2 \beta(r)}{dr^2} + 2 \frac{2q^2 + 1}{r^3} \frac{d\beta(r)}{dr} - \frac{6q^2}{r^4} \beta(r) \right] \quad (130)$$

$$+ r^3 (f(r) + r f'(r)) \left[ \frac{d^3 \beta(r)}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \beta(r)}{dr^2} - \left( \frac{q^2 + 1}{r^2} + G^2 \right) \frac{d\beta(r)}{dr} + \frac{2q^2}{r^3} \beta(r) \right] - q^2 r^2 f(r) \left[ \frac{d^2 \beta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\beta(r)}{dr} - \left( \frac{q^2}{r^2} + G^2 \right) \beta(r) \right]. \quad (131)$$

Suponiendo que todos los términos están acotados en  $r = 0$ , y el hecho de que  $f'(0) = 0$ ,

$$2q^2 (q^2 - 2) \beta(0) f(0) = 0,$$

es decir, para  $q \neq 0$ , la condición se convierte en

$$\beta(0) = 0. \quad (132)$$

Si  $q = 0$ ,

$$-\sigma r^3 \beta(r) = r^3 f(r) \left[ \frac{d^4 \beta(r)}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \beta(r)}{dr^3} - \left( \frac{2}{r^2} + G^2 \right) \frac{d^2 \beta(r)}{dr^2} + 2 \frac{1}{r^3} \frac{d\beta(r)}{dr} \right] + r^2 (f(r) + r f'(r)) \left[ \frac{d^3 \beta(r)}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \beta(r)}{dr^2} - \left( \frac{1}{r^2} + G^2 \right) \frac{d\beta(r)}{dr} \right],$$

en  $r = 0$ ,

$$0 = 2f(0)\beta'(0) - \beta'(0)f(0)$$

con lo que las condición es,

$$\beta'(0) = 0. \quad (133)$$

la cual es la condición 123.

De esta manera, se obtiene una condición implícita 132 para  $q \neq 0$ . Esta condición es aún mas fuerte si se divide 131 entre  $r$  y se toma el límite cuando  $r \rightarrow 0$ . Teniendo en cuenta que  $f'(0) = 0$  y  $\beta'(0) = 0$  se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) \left[ -\frac{4q^2}{r} \beta(r) + \frac{q^4}{r} \beta(r) \right] = 0,$$

es decir, para  $q \neq 0$  y  $q \neq \pm 2$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\beta(r)}{r} = 0.$$

#### V.4. Ecuación lineal cuando $r \rightarrow a_0$ .

Si se considera nuevamente la ecuación lineal desarrollada 131 con una función de deslizamiento constante

$$\tilde{\lambda}(\alpha) = \lambda, \tag{134}$$

(ver por ejemplo [McKinley y Wilson, 2001] y [Haley y Miksis, 1991]) y se fuerza  $r \rightarrow a_0$  y se supone que  $\Psi(r)$  y sus derivadas están acotadas en  $a_0$ , se tiene que todo el lado derecho se anula ya que

$$f(a_0) = F(\alpha(a_0)) = \frac{\alpha^3(a_0) + 3\lambda\alpha^2(a_0)}{3} = 0,$$

y

$$f'(a_0) = \left[ \frac{dF}{d\alpha} \right] \alpha'(a_0) = -\alpha^2(a_0) - 2\lambda\alpha(a_0) = 0.$$

Por lo que,

$$-\sigma\beta(a_0) = 0.$$

Es decir que  $\beta(a_0) = 0$  o  $\sigma = 0$ . La primera posibilidad implica que por la condición 126 la perturbación a la línea de contacto  $a_1$  es cero, es decir que la línea de contacto aparentemente no se mueve. Esta situación es completamente inaceptable.

Si por otra parte,  $\sigma = 0$ , se tiene que el único eigenvalor es cero, al menos para valores finitos del parámetro  $D$ . En el caso contrario, i.e.  $D$  infinito, caemos en el caso cuasiestacionario, en donde se toma un límite en que  $D \rightarrow \infty$  (ver por ejemplo 110). El problema lineal cuasiestacionario se estudiará a fondo mas adelante. En cualquiera de los dos casos, se ponen en duda los resultados de estabilidad mostrados por [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001] para el caso  $G = 0$ . El problema con el uso de una longitud de deslizamiento constante 134 fue señalado por [Greenspan, 1978].

Debido a lo anterior, de ahora en adelante se usará una longitud de deslizamiento singular

$$\tilde{\lambda}(\alpha) = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad (135)$$

introducida por Greenspan y usada por otros autores (ver [López *et al.*, 2001]). Al sustituir en la ecuación lineal se tiene que la derivada no se anula en  $a_0$ , es decir,

$$f'(a_0) = \left[ \frac{dF}{d\alpha} \right] \alpha'(a_0) = -\alpha^2(a_0) - \lambda = -\lambda.$$

Al tomar el límite cuando  $r \rightarrow a_0$  en 134, se tiene que,

$$-\sigma\beta(a_0) = -\lambda\Psi'(a_0). \quad (136)$$

De nueva cuenta, se obtiene una nueva condición implícita 136 para el problema lineal.

## V.5. Conservación de volumen.

Se espera que la perturbación al estado base sea capaz de preservar el volumen

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a r h d\phi dr,$$

en el término dominante en  $\delta$ . Introduciendo 112 y 113, el volumen está dada por,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0 + \delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}} r [\alpha(r) + \delta \beta(r) \exp\{\sigma t + i q \phi\}] d\phi dr + O(\delta^2).$$

Separando esta integral,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} r \alpha(r) d\phi dr + \delta \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} r \beta(r) \exp\{\sigma t + i q \phi\} d\phi dr \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}} r \alpha(r) d\phi dr \\ &+ \delta \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}} r \beta(r) \exp\{\sigma t + i q \phi\} d\phi dr + O(\delta^2), \end{aligned}$$

el primer término es tan solo el volumen  $V$  dado por el estado base, y se cancela con el lado izquierdo, mientras que la tercera integral es  $O(\delta^2)$ , con lo que,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}} r \alpha(r) d\phi dr + \delta \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} r \beta(r) \exp\{\sigma t + i q \phi\} d\phi dr = 0.$$

Al realizar las integrales con respecto a  $\phi$ , para  $q \neq 0$  se tiene que,

$$2\pi \int_0^{\delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}} r \alpha(r) dr + \frac{\delta}{i q} \exp\{\sigma t + i q \phi\} \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_0^{a_0} r \beta(r) dr = 0.$$

Al sustituir el valor de la solución estática en la primera integral

$$\int_0^{\delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}} r \alpha(r) dr = \left[ \frac{r^2}{2} \left( \frac{G^2 + J a_0}{G^3 I_1(G a_0)} (I_0(G a_0)) - \frac{J}{2G^2} (a_0^2 - r^2) \right) - \frac{1}{G} r I_1(G r) \right]_0^{\delta a_1 \exp\{\sigma t + i q \phi\}},$$

resulta ser  $O(\delta^2)$ , por lo que a primer orden

$$\frac{\delta}{i q} \exp\{\sigma t + i q \phi\} \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_0^{a_0} r \beta(r) dr = 0.$$

Esto se hace cero para un número entero positivo. Es decir que el sistema lineal conserva volumen para  $q = 1, 2, 3, 4, \dots$ .

Para  $q = 0$ ,

$$2\pi \exp\{\sigma t\} \int_0^{a_0} r \beta(r) dr = 0.$$

Usando la ecuación lineal 129 con  $q = 0$ , multiplicando por  $r$  e integrando,

$$-\sigma \int_0^{a_0} r \beta(r) dr = \int_0^{a_0} \frac{d}{dr} [r f(r) \Psi'(r)] dr = [r f(r) \Psi'(r)]_0^{a_0} = 0.$$

Para  $\sigma \neq 0$  y  $q = 0$  el volumen se conserva implícitamente en la ecuación.

En el caso en que  $q = 0$  y  $\sigma = 0$  ó el caso cuasiestacionario en que  $\sigma$  aparece tan solo en la condición en  $a_0$  y no en la ecuación lineal, por lo que se debe hacer cumplir la condición,

$$\int_0^{a_0} r \beta(r) dr = 0. \quad (137)$$



## V.6. Eigenvalores.

En general, en el problema lineal definido por 123, 124, 127, 129 y 136 se pueden tener eigenvalores y eigenfunciones complejas. Si se considera 129 multiplicada por  $r\bar{\Psi}(r)$  (complejo conjugado), y se integra de 0 a  $a_0$ ,

$$-\sigma \int_0^{a_0} r \bar{\Psi}(r) \beta(r) dr = \int_0^{a_0} \bar{\Psi}(r) \frac{d}{dr} [r f(r) \Psi'(r)] dr - q^2 \int_0^{a_0} \frac{\bar{\Psi}(r)}{r} f(r) \Psi(r) dr,$$

$$-\sigma LI = LD = LD1 + LD2.$$

La integral  $LI$  es,

$$LI = \int_0^{a_0} r \left[ \frac{d^2 \bar{\beta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\beta}}{dr} - \left( \frac{q^2}{r^2} + G^2 \right) \bar{\beta} \right] \beta dr = LI1 + LI2 + LI3,$$

donde  $LI1$  es,

$$\begin{aligned} LI1 &= \int_0^{a_0} r \frac{d^2 \bar{\beta}}{dr^2} \beta dr = \left[ r \frac{d\bar{\beta}}{dr} \beta \right]_0^{a_0} - \int_0^{a_0} \frac{d\bar{\beta}}{dr} \frac{d(r\beta)}{dr} dr \\ &= a_0 \bar{\beta}'(a_0) \beta(a_0) - \int_0^{a_0} r \frac{d\bar{\beta}}{dr} \frac{d\beta}{dr} dr - \int_0^{a_0} \frac{d\bar{\beta}}{dr} \beta dr \\ &= a_0 \left( -\frac{D}{m} \bar{\beta}(a_0) \bar{\sigma} - \bar{\beta}(a_0) \alpha''(a_0) \right) \beta(a_0) - \int_0^{a_0} r \|\beta'\|^2 dr - LI2 \\ &= a_0 \left( -\frac{D}{m} \bar{\sigma} - \alpha''(a_0) \right) \|\beta\|^2 - \int_0^{a_0} r \|\beta'\|^2 dr - LI2. \end{aligned}$$

Es decir, no se tiene la necesidad de calcular  $LI2$ . La integral  $LI3$  es,

$$LI3 = - \int_0^{a_0} r \left( \frac{q^2}{r^2} + G^2 \right) \|\beta\|^2.$$

Por último, las integrales  $LD1$  y  $LD2$  están dadas por,

$$LD1 = [rf(r)\overline{\Psi}\Psi]_0^{a_0} - \int_0^{a_0} rf(r)\overline{\Psi}'\Psi' dr = - \int_0^{a_0} rf(r) \|\overline{\Psi}'\|^2 dr,$$

$$LD2 = -q^2 \int_0^{a_0} \frac{\overline{\Psi}(r)}{r} f(r)\Psi(r) dr = -q^2 \int_0^{a_0} \frac{f(r)}{r} \|\Psi\|^2 dr,$$

respectivamente. De esta manera se tiene que

$$\sigma \left[ a_0 \left( \frac{D}{m} \overline{\sigma} + \alpha''(a_0) \right) \|\beta(a_0)\|^2 + \int_0^{a_0} r \left[ \|\beta'\|^2 + \left( \frac{q^2}{r^2} + G^2 \right) \|\beta\|^2 \right] dr \right] \quad (138)$$

$$= - \int_0^{a_0} f(r) \left[ r \|\overline{\Psi}'\|^2 + \frac{q^2}{r} \|\Psi\|^2 \right] dr, \quad (139)$$

es decir,

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{D}{m} \|\sigma\beta(a_0)\|^2 + \sigma \left[ a_0 \alpha''(a_0) \|\beta(a_0)\|^2 + \int_0^{a_0} r \|\beta'\|^2 dr + \int_0^{a_0} r \left( \frac{q^2}{r^2} + G^2 \right) \|\beta\|^2 dr \right] \\ & = - \int_0^{a_0} f(r) \left[ r \|\overline{\Psi}'\|^2 + \frac{q^2}{r} \|\Psi\|^2 \right] dr. \end{aligned}$$

Si se toma ahora la ecuación compleja conjugada, se multiplica por  $r\Psi(r)$  y se integra, se llega a que,

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{D}{m} \|\sigma\beta(a_0)\|^2 + \overline{\sigma} \left[ a_0 \alpha''(a_0) \|\beta(a_0)\|^2 + \int_0^{a_0} r \|\beta'\|^2 dr + \int_0^{a_0} r \left( \frac{q^2}{r^2} + G^2 \right) \|\beta\|^2 dr \right] \\ & = - \int_0^{a_0} f(r) \left[ r \|\overline{\Psi}'\|^2 + \frac{q^2}{r} \|\Psi\|^2 \right] dr. \end{aligned}$$

Restando estas dos ecuaciones,

$$(\sigma - \overline{\sigma}) \left[ a_0 \alpha''(a_0) \|\beta(a_0)\|^2 + \int_0^{a_0} r \|\beta'\|^2 dr + \int_0^{a_0} r \left( \frac{q^2}{r^2} + G^2 \right) \|\beta\|^2 dr \right] = 0.$$

Suponiendo que la cantidad entre corchetes es diferente de cero, se tiene que  $(\sigma - \bar{\sigma}) = 0$ , es decir los eigenvalores y las eigenfunciones son siempre reales.

## V.7. Eigenvalor $\sigma = 0$

Si se toma  $\sigma = 0$ , la ecuación 129 es,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r f(r) \Psi'(r)] - \frac{q^2}{r^2} f(r) \Psi(r) = 0, \quad (140)$$

integrando se tiene que,

$$\int_0^{a_0} r f(r) (\Psi')^2 dr + q^2 \int_0^{a_0} \frac{f(r)}{r} \Psi^2 dr = 0, \quad (141)$$

ambas cantidades son positivas, por lo que se deben anular independientemente. Para  $q \neq 0$

$$\Psi(r) = \frac{d^2 \beta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\beta(r)}{dr} - \frac{q^2}{r^2} \beta(r) - G^2 \beta(r) = 0.$$

La solución general son funciones modificadas de Bessel,  $I_q(Gr)$  y  $K_q(Gr)$ , pero tan solo la primera está acotada en el origen y cumple con 123, por lo que las eigenfunciones deben tener la forma,

$$\beta(r) = A I_q(Gr).$$

Calculando la primera derivada,

$$\beta'(r) = A \frac{d \text{Bessel} I_q(Gr)}{dr} = A \frac{Gr I_{q-1}(Gr) - q I_q(Gr)}{r} = A \left[ G I_{q-1}(Gr) - \frac{q}{r} I_q(Gr) \right],$$

tomando el límite cuando  $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} \beta'(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} A \left[ G I_{q-1}(Gr) - \frac{q}{r} I_q(Gr) \right] = A \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{G (Gr)^{q-1}}{2^{q-1} (q-1)!} - \frac{q (Gr)^q}{r 2^q q!} \right] \\
&= A G^q \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{(2q-1) r^{q-1}}{2^q q!} \right] \\
&= 0 \quad \text{para } q = 2, 3, \dots, \\
&= \frac{GA}{2} \quad \text{para } q = 1,
\end{aligned}$$

por lo que la condición 123 se cumple para  $q = 2, 3, \dots$ , pero no para  $q = 1$ , en cuyo caso no existen eigenfunciones para  $\sigma = 0$  (ya que se debería tomar  $A = 0$ ), es decir para  $q = 1$ ,  $\sigma = 0$  no es un eigenvalor.

Estas eigenfunciones deben cumplir con 127, es decir,

$$\beta(a_0) \alpha''(a_0) + \beta'(a_0) = 0, \quad (142)$$

$$I_q(Ga_0) \alpha''(a_0) + G I_{q-1}(Ga_0) - \frac{q}{a_0} I_q(Ga_0) = 0, \quad (143)$$

acomodando términos,

$$I_q(Ga_0) \left[ \alpha''(a_0) - \frac{q}{a_0} \right] + G I_{q-1}(Ga_0) = 0, \quad (144)$$

pero,

$$\begin{aligned}
\alpha'(r) &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{G^2 + Ja_0}{G^3 I_1(Ga_0)} (I_0(Ga_0) - I_0(Gr)) - \frac{J}{2G^2} (a_0^2 - r^2) \right] \\
&= \left( -\frac{G^2 + Ja_0}{G^2 I_1(Ga_0)} \right) I_1(Gr) + \frac{Jr}{G^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha''(r) &= \frac{d}{dr} \left[ \left( -\frac{G^2 + Ja_0}{G^2 I_1(Ga_0)} \right) I_1(Gr) + \frac{Jr}{G^2} \right] \\ &= \left( -\frac{G^2 + Ja_0}{G^2} \right) \frac{I_0(Gr)G}{I_1(Ga_0)} + \frac{G^2 + Ja_0}{G^2 r} + \frac{J}{G^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha''(a_0) &= \left( -\frac{G^2 + Ja_0}{G} \right) \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} + \frac{G^2 + Ja_0}{G^2 a_0} + \frac{J}{G^2} \\ &= \left( -\frac{G^2 + Ja_0}{G} \right) \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} + \frac{1}{a_0} + \frac{2J}{G^2}.\end{aligned}$$

De aquí que  $a_0$  debe satisfacer (tomando  $J = 1$ ),

$$I_q(Ga_0) \left[ \left( -\frac{G^2 + a_0}{G} \right) \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} + \frac{1}{a_0} + \frac{2}{G^2} - \frac{q}{a_0} \right] + GI_{q-1}(Ga_0) = 0. \quad (145)$$

Para valores de  $G$  pequeños,

$$I_q(Ga_0) \sim \frac{(Ga_0)^q}{2^q q!} + \frac{(Ga_0)^{q+2}}{2^{q+2} (q+1)!}, \quad (146)$$

$$\begin{aligned}\alpha''(a_0) &= \left( -\frac{G^2 + a_0}{G} \right) \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} + \frac{1}{a_0} + \frac{2}{G^2} \\ &\sim -\frac{G^2 + a_0}{G} \left( \frac{2}{Ga_0} + \frac{1}{4} a_0 G \right) + \frac{1}{a_0} + \frac{2}{G^2} \\ &\sim -\frac{2}{a_0} - \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{a_0} = -\frac{4 + a_0^3}{4a_0},\end{aligned}$$

$$\frac{(Ga_0)^q}{2^q q!} \left[ -\frac{4 + a_0^3}{4a_0} - \frac{q}{a_0} \right] + G \frac{(Ga_0)^{q-1}}{2^{q-1} (q-1)!} = 0, \quad (147)$$

$$-\frac{4 + a_0^3}{4} - q + 2q = 0 \quad (148)$$

$$a_0^3 = 4(q - 1), \quad (149)$$

lo cual es el resultado esperado [McKinley y Wilson, 2001].

Si  $q = 0$

$$\Psi'(r) = 0, \quad (150)$$

$$\Psi(r) = \frac{d^2\beta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\beta(r)}{dr} - G^2\beta(r) = -G^2C,$$

$$\beta(r) = AI_0(Gr) + C,$$

pero ahora se debe hacer cumplir la condición de conservación de volumen,

$$\begin{aligned} \int_0^{a_0} r\beta(r)dr &= \int_0^{a_0} r(AI_0(Gr) + C)dr = 0 \\ &= \left[ \frac{A}{G}rI_1(Gr) + \frac{Cr^2}{2} \right]_0^{a_0} \\ &= \frac{A}{G}a_0I_1(Ga_0) + \frac{Ca_0^2}{2}, \end{aligned}$$

de aquí que,

$$C = -\frac{2A}{Ga_0},$$

$$\beta(r) = A \left( I_0(Gr) - \frac{2}{Ga_0} I_1(Ga_0) \right).$$

Estas eigenfunciones deben cumplir con 127,

$$0 = \left( I_0(Ga_0) - \frac{2}{Ga_0} I_1(Ga_0) \right) \alpha''(a_0) + GI_1(Ga_0),$$

$$0 = \left( I_0(Ga_0) - \frac{2}{Gx} I_1(Ga_0) \right) \left( \frac{G^2 + 2Jx}{G^2 a_0} - \frac{G^2 + a_0}{G} \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} \right) + G I_1(Ga_0),$$

dividiendo entre  $I_1(Ga_0)$ ,

$$0 = \left( \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} - \frac{2}{Ga_0} \right) \left( \frac{G^2 + 2x}{G^2 a_0} - \frac{G^2 + a_0}{G} \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} \right) + G,$$

multiplicando por  $Ga_0^2$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{I_0(Gx)}{I_1(Gx)} - \frac{2}{Ga_0} \right) \left( \frac{G^2 + 2x}{G} a_0 - (G^2 a_0^2 + a_0^3) \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} \right) + G^2 a_0^2 \\ &= \frac{G^2 + 2a_0}{G} a_0 \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} - (G^2 a_0^2 + a_0^3) \frac{I_0(Ga_0)^2}{I_1(Ga_0)^2} - \frac{2}{Ga_0} \frac{G^2 + 2a_0}{G} a_0 \\ &\quad + \frac{2}{Gx} (G^2 a_0^2 + a_0^3) \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} + G^2 a_0^2 \\ &= - (G^2 a_0^2 + a_0^3) \frac{I_0(Ga_0)^2}{I_1(Ga_0)^2} + \frac{3G^2 + 4a_0}{G} a_0 \frac{I_0(Ga_0)}{I_1(Ga_0)} - 2 \frac{G^2 + 2a_0}{G^2} a_0 + G^2 a_0^2, \end{aligned}$$

esta es la misma condición para obtener el volumen máximo.

Para valores de  $G$  pequeños,

$$\left( 1 + \frac{1}{4} a_0^2 G^2 - \frac{2}{Ga_0} \left( \frac{1}{2} a_0 G + \frac{1}{16} a_0^3 G^3 \right) \right) \left[ -\frac{4 + a_0^3}{4a_0} \right] + G \frac{1}{2} a_0 G = 0,$$

$$\left( \frac{1}{4} a_0^2 G^2 - \frac{1}{8} a_0^2 G^2 \right) \left[ -\frac{4 + a_0^3}{4a_0} \right] + \frac{1}{2} a_0 G^2 = 0,$$

$$\left( \frac{1}{8} a_0^2 G^2 \right) \left( -\frac{4 + a_0^3}{4a_0} \right) + \frac{1}{2} a_0 G^2 = 0,$$

$$\left( -\frac{4 + a_0^3}{4} \right) + 4 = 0,$$

$$\frac{12 - a_0^3}{4} = 0.$$

El cual es el mismo resultado que se presenta en el artículo.

## V.8. Aproximación cuasiestacionaria.

En la aproximación cuasiestacionaria, se realiza se hace tender,

$$\sigma \rightarrow \frac{m\sigma}{D},$$

al mismo tiempo que  $D \rightarrow \infty$ . Es decir, se debe resolver el problema lineal 129 con  $\sigma = 0$ , pero reteniéndolo en la condición de frontera 127,

$$-\beta(a_0) \sigma = \beta(a_0) \alpha''(a_0) + \beta'(a_0).$$

Para  $q = 2, 3, \dots$  la solución esta dada por,

$$\beta(r) = AI_q(Gr),$$

sustituyendo en 127,

$$-I_q(Ga_0) \sigma = I_q(Ga_0) \alpha''(a_0) + GI_{q-1}(Ga_0) - \frac{q}{a_0} I_q(Ga_0), \quad (151)$$

acomodando términos,

$$-I_q(Ga_0) \sigma = I_q(Ga_0) \left[ \alpha''(a_0) - \frac{q}{a_0} \right] + GI_{q-1}(Ga_0), \quad (152)$$



de donde,

$$\sigma = \left[ \frac{q}{a_0} - \alpha''(a_0) \right] - G \frac{I_{q-1}(Ga_0)}{I_q(Ga_0)}. \quad (153)$$

Para valores de  $G$  pequeños,

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[ \frac{q}{a_0} + \frac{4 + a_0^3}{4a_0} \right] - G \frac{(Ga_0)^{q-1}}{2^{q-1}(q-1)!} \frac{2^q q!}{(Ga_0)^q} \\ &= \left[ \frac{q}{a_0} + \frac{4 + a_0^3}{4a_0} \right] - \frac{2q}{a_0} = -\frac{q}{a_0} + \frac{4 + a_0^3}{4a_0} \\ &= \frac{4(1-q) + a_0^3}{4a_0}. \end{aligned}$$

Si  $q = 0$

$$\beta(r) = A \left( I_0(Gr) - \frac{2}{Ga_0} I_1(Ga_0) \right),$$

y

$$\sigma = -\alpha''(a_0) - \frac{G^2 a_0 I_1(Ga_0)}{Ga_0 I_0(Ga_0) - 2I_1(Ga_0)}. \quad (154)$$

Para valores de  $G$  pequeños,

$$Ga_0 I_0(Ga_0) - 2I_1(Ga_0) = \left( \frac{1}{8} a_0^3 \right) G^3 + O(G^5),$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4 + a_0^3}{4a_0} - G^2 a_0 \frac{8Ga_0}{2G^3 a_0^3} = \frac{4 + a_0^3}{4a_0} - \frac{4}{a_0} \\ &= \frac{a_0^3 - 12}{4a_0}. \end{aligned}$$

## V.9. Resultados para el caso cuasiestacionario.

En esta sección se presentan los resultados de estabilidad lineal para el caso estacionario.

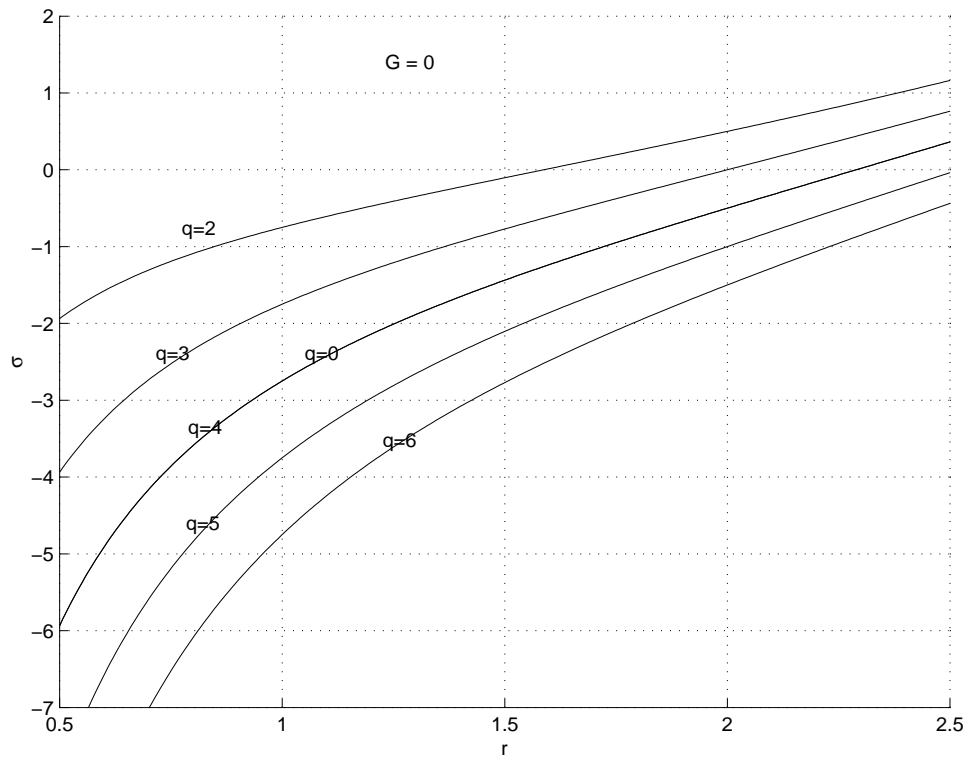


Figura 9. Líneas de estabilidad lineal para  $G = 0$  y números de onda azimutal  $q = 0, 2, 3, 4, 5$  y  $6$

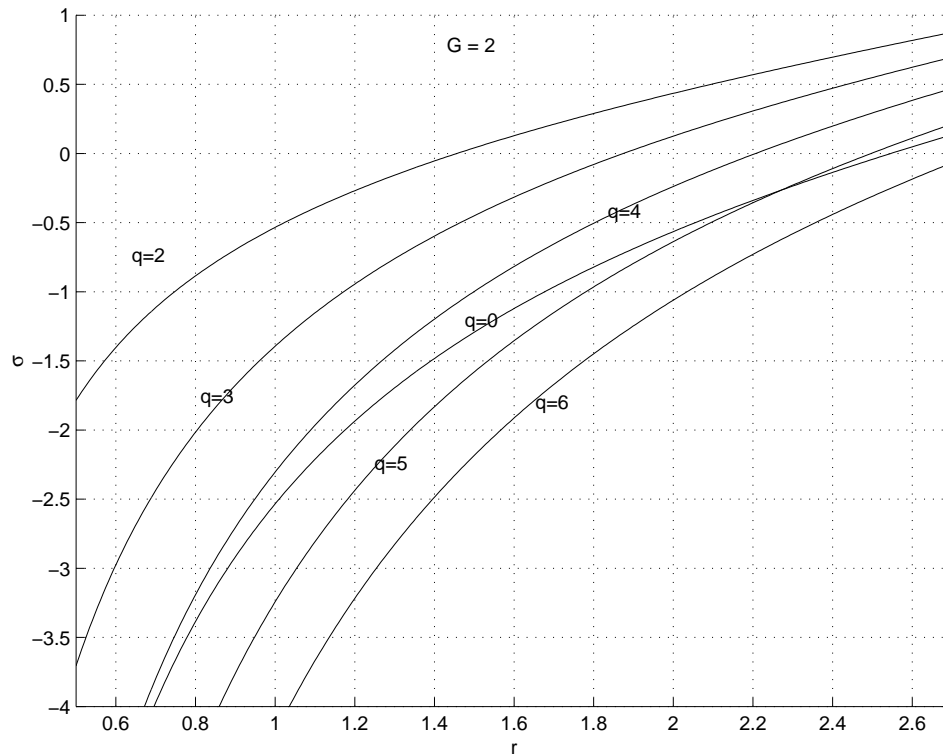


Figura 10. Líneas de estabilidad lineal para  $G = 2$  y números de onda azimutal  $q = 0, 2, 3, 4, 5$  y  $6$

En la figura 9 se han graficado las líneas de estabilidad lineal para  $q = 0, 2, 3, 4, 5$  y  $6$  considerando  $G = 0$ . Se observa que las líneas de estabilidad para  $q = 0$  y  $q = 4$  son las iguales, debido que al sustituir  $q = 4$  en la ecuación 153 se obtiene la expresión 154 dada para  $q = 0$ . Nótese que para que el primer eigenvalor para el cual las soluciones dejan de ser estables es  $q = 2$ . Las soluciones físicas corresponden para valores de  $a_0 \leq 2.5198$ .

Asimismo en la figuras 10, 11 y 12 se grafican las líneas de estabilidad lineal para  $G = 2, 5$  y  $10$  considerando en todos los caso los valores de  $q = 0, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ . Se observa que en todas las gráficas el eigenvalor para el cual las soluciones dejan de ser estables es  $q = 2$  (esto se puede ver recorriendo la gráfica en el eje de las  $r$  y encontrando el eigenvalor para el cual la primera línea de estabilidad se hace cero). Como se ve las

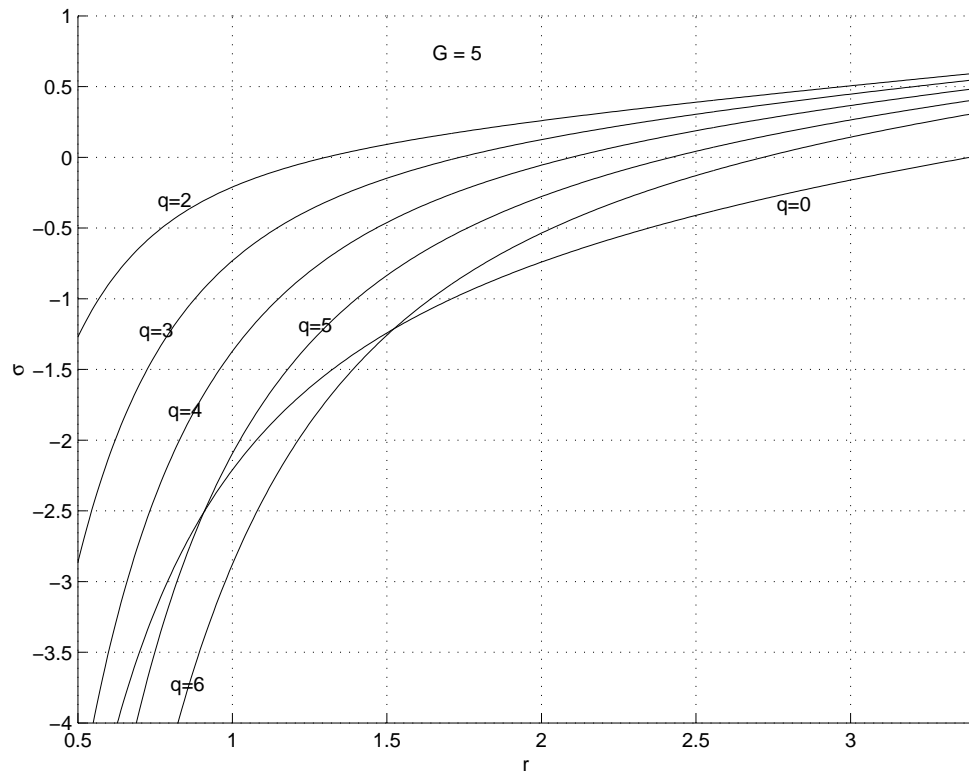


Figura 11. Líneas de estabilidad lineal para  $G = 5$  y números de onda azimutal  $q = 0, 2, 3, 4, 5$  y  $6$

tres figura las líneas de estabilidad tienden a unirse conforme el radio  $r$  aumenta. En el caso  $G = 2$  existen soluciones físicas para valores de  $a_0 \leq 2.6879$ . Si  $G = 5$  para valores de  $a_0 \leq 3.4230$  y para  $G = 10$  radios estáticos  $a_0 \leq 4.5990$ .

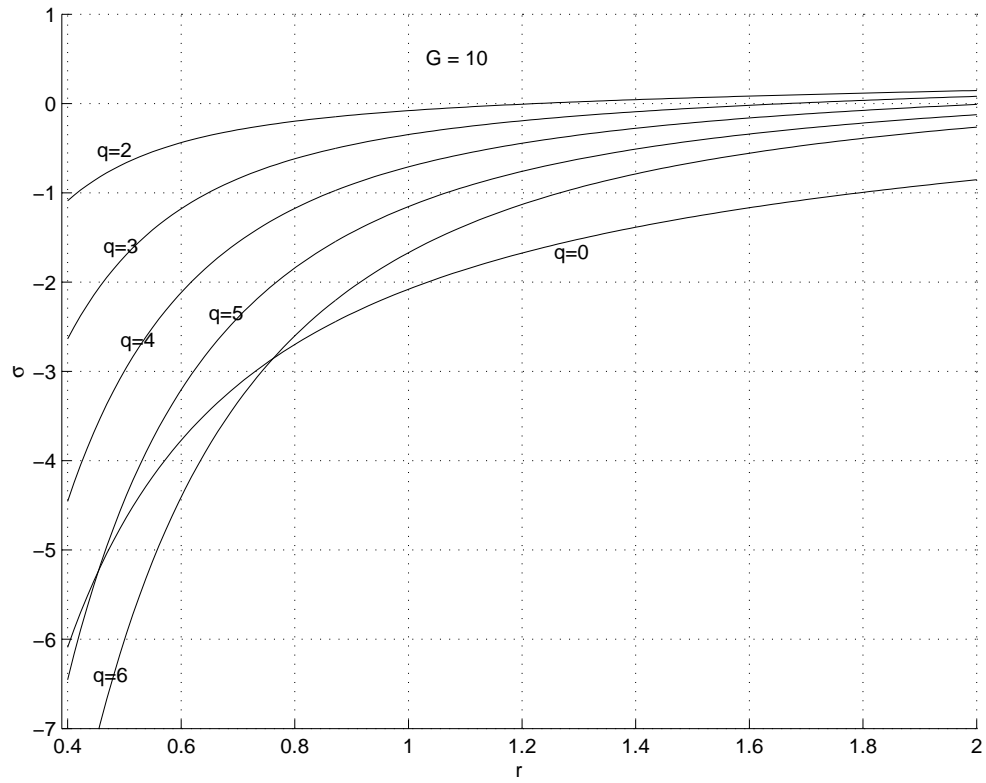


Figura 12. Líneas de estabilidad lineal para  $G = 10$  y números de onda azimutal  $q = 0, 2, 3, 4, 5$  y  $6$

# Capítulo VI

## Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación y se proponen nuevas líneas de investigación y sugerencias para llevarlas a cabo.

### VI.1. Conclusiones

Los resultados de esta tesis radican principalmente en la generalización de los trabajos presentados por [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001] y en la demostración de algunas irregularidades encontradas en esos trabajos.

Primero se obtuvo el sistema de ecuaciones que rigen el movimiento de una capa delgada de fluido en rotación constante. Este sistema se establece a partir de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación de continuidad que expresa conservación de masa. Para llegar al sistema de capa delgada se introdujeron ciertas escalas longitudinales. En el sistema escalado aparecen algunos números adimensionales de importancia sustantiva: el número de Reynolds  $Re$ , el parámetro gravitatorio  $G$ , el número de Eckman  $Ek$ , el número de Rosby  $Ro$  y un número adimensional  $J$  introducido por [McKinley *et al.*, 1999]. Se hizo especial énfasis en el caso en el que el cociente entre las dimensiones horizontales y las verticales son pequeñas, es decir, cuando  $\epsilon = L/H \rightarrow 0$ ; obteniéndose con esto, el límite de capa delgada. Como el sistema tratado es un sistema acoplado, se necesitaron condiciones de frontera para la super-

ficie y condiciones laterales para la línea de contacto. En las condiciones de frontera se usó la condición de no deslizamiento tipo Navier [López *et al.*, 2001], donde aparece una función  $\tilde{\lambda}$  que representa la longitud de deslizamiento. Existen diversas formas para la función  $\tilde{\lambda}$ , por lo que es importante estudiar la mas conveniente. De hecho, en este trabajo se muestra que la función  $\tilde{\lambda}(h) = \lambda$  usada por [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001] conlleva a ciertas irregularidades en los resultados. Dentro de las condiciones laterales se obtuvo una condición para la evolución de la componente normal de la velocidad en la linea de contacto (velocidad de deslizamiento  $U_s$ ), como una función del ángulo de contacto dinámico  $\theta$ . Una de las formas mas utilizadas y que se adoptó en este estudio, fue  $U_s = \varpi\sigma/3\mu(\theta - \theta_s)^m$ . Datos experimetales realizados por [Hoffman, 1975] sugieren el uso de  $m = 3$ , que es la ley de Tanner y donde  $\varpi$  es una constante positiva que depende solo de la interacción del líquido con el gas y no de las propiedades del sólido o del líquido. La relación para  $U_s$  es en realidad válida para ángulos pequeños [Greenspan y McCay, 1981], donde  $\theta_s$  es el ángulo de contacto estático.

Además, en esta tesis se obtuvo la ecuación de evolución reteniendo los términos de Coriollis. Es decir, se encontró una expresión general que explica el comportamiento del fluido para diferentes unidades de tiempo. Esta ecuación es totalmete original, ya que considera el parámetro de Coriollis  $F$ , a diferencia de la ecuacion de evolución encontrada por [McKinley *et al.*, 1999], donde simplifican suponiendo el parámetro de Coriollis  $F = 0$ . Ademas, se presentó un estudio de esta ecuacion en donde se hace tender  $F$  a cero recuperándose la expresión obtenida por MW.

Tambien en este trabajo se resolvió el sistema que gobierna el estado base. Este estado base consiste de soluciones estacionarias axisimétricas que representan un balance de fuerzas entre la tensión superficial y los términos gravitatorios, medidos en

el sistema de referencia que rota con velocidad angular constante. Se encontró una expresión que determina el comportamiento de los estados estacionarios axisimétricos y es función del parámetro gravitatorio  $G$  y del radio estático  $a_0$  con el parámetro  $J = 1$ . Se muestran algunas gráficas del estado base para diferentes valores del radio estático  $a_0$  y diferentes valores del parámetro gravitatorio  $G$ . Cabe mencionar que estas gráficas son introducidas por primera vez en este tipo de estudios. Con esto, se tienen mas herramientas para poder predecir el comportamiento del estado base, a diferencia de [McKinley *et al.*, 1999]-[McKinley y Wilson, 2001] que solo presentan resultados del estado base para  $G = 0$ . Se analizó el comportamiento del estado base, obteniéndose que existe un mínimo en  $r = 0$ , con lo que existen soluciones físicas si  $\alpha(0) > 0$ . Se graficaron los radios estáticos para los cuales se tiene una solución física como función del parámetro  $G$ . Con esto, se concluye que la región donde hay soluciones crece al aumentar el valor de  $G$ . Tambien se encontró una expresión para el volumen dependiente de  $G$  y  $a_0$ . Se graficó el volumen del estado base,  $V$  como una función de  $a_0$ , para  $G = 0, 1, 2, \dots, 20$ , donde se encontró que para valores pequeños de  $G$ , existen soluciones para dos valores distintos del radio estático. Sin embargo, al aumentar  $G$  el volumen máximo tiende a un valor fijo.

Aunado a lo anterior, en esta se realizó un análisis extenso de la estabilidad lineal de los estados estacionarios axisimétricos, para ello se perturbaron las variables involucradas sufriendo cambios pequeños con respecto a las soluciones estacionarias. La ecuación obtenida 119 es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden, en donde para cada número de onda  $q$  de la perturbación se establece un problema de eigenvalores del operador diferencial de cuarto orden. Dicha ecuación lineal, incluye la contribución de los términos de Coriolis. Se consideró que una caracterización del problema lineal para  $F$  pequeños reteniendo los efectos gravitatorios es de interés par-



particular, ya que significa una primera generalización de los resultados presentados por [McKinley y Wilson, 2001]. Al realizarse la aproximación  $F \rightarrow 0$  se vio que los efectos de coriolis son de orden  $F^2$  (Ver 128).

Se obtuvieron las condiciones de frontera para el problema lineal partiendo de las condiciones para los estados estacionarios. Se realizó un estudio exhaustivo de la ecuación lineal 129, obteniéndose una nueva condición para el problema lineal cuando  $r \rightarrow 0$ . Por otro lado, se encontró que cuando  $r \rightarrow a_0$  y se usa una longitud de deslizamiento constante se llega a contradicciones. Lo que pone en duda los resultados de estabilidad mostrados por [McKinley *et al.*, 1999]- [McKinley y Wilson, 2001] para el caso  $G = 0$ . El problema con el uso de una longitud de deslizamiento constante fué señalado por [Greenspan, 1978]. Se demostró que en la ecuación lineal 129, los eigenvalores y las eigenfunciones son siempre reales. Se realizó un estudio exhaustivo del eigenvalor  $\sigma = 0$ , donde se obtuvo que la condición lineal 123 se cumple para  $q = 2, 3, \dots$ , pero no para  $q = 1$ , en cuyo caso no existen eigenfunciones para  $\sigma = 0$ , es decir para  $q = 1$ ,  $\sigma = 0$  no es un eigenvalor. Además se estudió el caso cuasiestacionario de la ecuación 129, para ello se hizo la aproximación  $\sigma \rightarrow m\sigma/D$ , al mismo tiempo que  $D \rightarrow \infty$ . Es decir, se resolvió el problema lineal 129 con  $\sigma = 0$ , pero reteniéndolo en la condición de frontera 127. Con esto, se obtuvo una representación general para el eigenvalor  $\sigma$ , 153 y 154, comprobándose los resultados obtenidos por McKinley y Wilson cuando se hizo la aproximación  $G \rightarrow 0$ .

Se profundizó en una primera generalización de los resultados obtenidos por [McKinley *et al.*, 1999] y [McKinley y Wilson, 2001]. Para ello se encontraron curvas de estabilidad lineal para diferentes valores de  $G$ , obteniéndose que al aumentar el valor de  $G$  disminuye el radio estático para el cual las soluciones son estables (Ver figuras 9-12).

## VI.2. Trabajo futuro

En el estudio realizado en esta tesis, existen diversas líneas de investigación en las cuales se necesita ahondar en un estudio futuro. Primero se recomienda tratar de encontrar evidencia del comportamiento de los eigenvalores para  $q = 1$  y la estabilidad lineal para el caso completo no cuasiestacionario, ya que existe un trabajo previo en esta dirección [Juárez, 2002], sin embargo, pero los resultados numéricos de ecuaciones parecidas no son concluyentes. Por otra parte, existe el estudio de problemas teóricos similares, pero difieren, ya que en ese trabajo se obtienen resultados experimentales donde solo se muestran resultados para fluidos no Newtonianos. Por lo que sería interesante un estudio experimental para fluidos Newtonianos, que es el tipo de fluido que se supone en esta tesis. De particular importancia es resolver numéricamente la evolución del sistema y de alguna manera representar el comportamiento del fluido en función del tiempo. Es decir simular como se espere el fluido y la línea de contacto en la superficie sólida para diferentes intervalos de tiempo. Ya hay un trabajo de tesis propuesto en esta dirección.

# Bibliografía

- [Abramowitz y Stegun, 1965] Abramowitz, M. y Stegun, I. A. 1965. “Handbook of mathematical functions”. Dover Publications. Primera edición. New York. 1046 pp.
- [Batchelor, 1967] Batchelor, G. K. 1967. “An introduction to fluid dynamics”. Cambridge University Press. Primera edición. Great Britain. 615 pp.
- [Booth, 1970] Booth, G. L. 1970. “Coating Equipment and Processes”. Lockwood. Primera edición. New York. 453 pp.
- [Burelbach *et al.*, 1988] Burelbach, J. P., Bankoff, S. G., y Davis, S. H. 1988. “Stability of evaporating condensing liquid-films”. *J. Fluid Mech.*, 195:463-494 p.
- [Chandrasekhar, 1961] Chandrasekhar, S. 1961. “Hydrodynamic and hydromagnetic stability”. Dover Publications. Primera edición. New York. 652 pp.
- [Courant y John, 1982] Courant, R. y John, F. 1982. “Introducción al cálculo y al análisis matemático”. Ed. Limusa. Cuarta edición. New York. 678 pp.
- [Dussan-V y Davis, 1974] Dussan-V, E. B. y Davis, S. H. 1974. “On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface”. *J. Fluid Mech.*, 65:71 p.
- [Ehrhard y Davis, 1991] Ehrhard, P. y Davis, S. H. 1991. “Non-isothermal spreading of liquid drops on horizontal plates”. *J. Fluid Mech.*, 229:365-388 p.
- [Greenspan, 1978] Greenspan, H. P. 1978. “On the motion of a small viscous droplet that wets a surface”. *J. Fluid Mech.*, 84:125-143 p.
- [Greenspan y McCay, 1981] Greenspan, H. P. y McCay, B. M. 1981. “On the wetting of a surface by a very viscous fluid”. *Stud. Appl. Math.*, 64:95-112 p.
- [Haley y Miksis, 1991] Haley, P. J. y Miksis, M. J. 1991. “The effect of the contact line on droplet spreading”. *J. Fluid Mech.*, 223:57-81 p.
- [Hocking, 1995] Hocking, L. M. 1995. “On contact angles in evaporating liquids”. *Phys. Fluids*, 7:2950-2955 p.
- [Hoffman, 1975] Hoffman, R. L. 1975. “A study of the advancing interface, interface shape in liquid gas systems”. *J. Colloid Interface Sci.*, 50:228-241 p.
- [Juárez, 2002] Juárez, M. M. 2002. “Estudio numérico de ecuaciones diferenciales de tercer y cuarto orden con métodos semiespectrales”. Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C.

- [Kundu, 1990] Kundu, P. K. 1990. "Fluid mechanics". Academic Press. Primera edición. San Diego, CA. 638 pp.
- [López *et al.*, 1997] López, P. G., Miksis, M. J., Bankoff, S. G., y Miksis, M. J. 1997. "Inertial effects on contact line instability in the coating of a dry inclined plate". *Phys. Fluids*, 9:2177-2183 p.
- [López *et al.*, 2001] López, P. G., Miksis, M. J., Bankoff, S. G., y Miksis, M. J. 2001. "Stability and evolution of a dry spot". *Phys. Fluids*, 13:1601-1614 p.
- [McKinley y Wilson, 2000] McKinley, I. S. y Wilson, S. K. 2000. "The linear stability of a ridge of fluid subject to a jet of air". *Phys. Fluids*, 13:872-883 p.
- [McKinley y Wilson, 2001] McKinley, I. S. y Wilson, S. K. 2001. "The linear stability of a ridge of fluid subject to a jet of air". *Phys. Fluids*, 14:133-142 p.
- [McKinley *et al.*, 1999] McKinley, I. S., Wilson, S. K., y duffy, B. R. 1999. "The linear stability of a ridge of fluid subject to a jet of air". *Phys. Fluids*, 11:65-88 p.
- [Ripa, 1996] Ripa, P. 1996. "La increíble historia de la malentendida fuerza de Coriolis". Fondo de Cultura Económica. Primera edición. Mexicok. 98 pp.