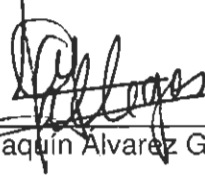
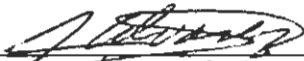


TESIS DEFENDIDA POR
Domingo de Jesús Cortés Rodríguez
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director del Comité



Dr. Jaime Álvarez Gallegos

Miembro del Comité



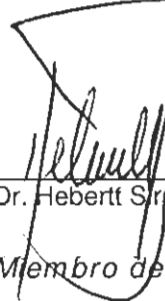
Dr. Enrique Mitrani Abenchuchan

Miembro del Comité



Dr. Iouri Orlov Kuchina

Miembro del Comité



Dr. Hebert Sira Ramirez

Miembro del Comité



Dr. Arturo Velázquez Ventura

*Coordinador del programa en
Electrónica y Telecomunicaciones*



Dr. Federico Graef Zieml

Director de Estudios de Posgrado

1 de noviembre de 2004

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**GENERACIÓN DE VOLTAJES DE CORRIENTE ALTERNA MEDIANTE
CONVERTIDORES DE ALTA FRECUENCIA DE CONMUTACIÓN**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

DOMINGO DE JESÚS CORTÉS RODRÍGUEZ

Ensenada, Baja California, México, Noviembre de 2004.

RESUMEN de la tesis de **Domingo de Jesús Cortés Rodríguez**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California. Noviembre de 2004.

GENERACIÓN DE VOLTAJES DE CORRIENTE ALTERNA MEDIANTE CONVERTIDORES DE ALTA FRECUENCIA DE CONMUTACIÓN

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director de Tesis

Los convertidores cd-cd son circuitos muy importantes dentro del área de la electrónica de potencia. Muchos otros circuitos están basados en dichos convertidores. A estos circuitos se les conoce como convertidores cd-cd por ser su aplicación más común. Sin embargo, nada impide, de entrada, que mediante los mismos circuitos se puedan generar voltajes variables, por el contrario, esto sería bastante útil en muchas aplicaciones. La diferencia entre generar voltajes constantes (cd) y voltajes variables (ca) reside fundamentalmente en el control de estos dispositivos. Desde el punto de vista de teoría de control se trata de un mismo sistema, pero en un caso el objetivo es la regulación y en el otro el objetivo es el seguimiento de una referencia.

Todos los convertidores electrónicos son sistemas conmutados, no lineales, con un parámetro (la carga) altamente variable. Por otra parte, la mayoría de ellos son de fase no mínima y uno de los requerimientos es que tengan una respuesta rápida. Por ello, el control de estos dispositivos es difícil para el caso de regulación y mucho más para el caso de seguimiento. El trabajo reportado en esta memoria aborda este último problema. Se muestra que hay un compromiso entre el rizo del voltaje de salida y la rapidez de los voltajes que un convertidor puede generar. Se establecen los límites de los voltajes que un convertidor puede generar. Se obtienen expresiones para guiar el diseño de convertidores adecuados para generar ca. Se proponen varios controladores. Uno de ellos resalta porque a pesar de ser un controlador no lineal, es sencillo de diseñar e implementar, robusto, con buen desempeño en lazo cerrado y sólo requiere mediciones de voltaje.

Uno de los objetivos primordiales de la tesis fue buscar conjuntar la formalidad de los resultados obtenidos y su posibilidad de aplicación práctica. Por esta razón, se evitaron algunas soluciones directas, por ejemplo, emplear algoritmos de adaptación complicados para resolver el problema que presenta la variación de la carga. Y es por ello que además del control, se dedica una parte considerable al análisis.

Palabras clave: Control de sistemas conmutados, Convertidores electrónicos, Sistemas no lineales.

ABSTRACT of the thesis presented by **Domingo de Jesús Cortés Rodríguez** as a partial requirement to obtain the DOCTOR OF PHILOSOPHY degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS. Ensenada, Baja California, Mexico. November 2004

ALTERNING CURRENT VOLTAGE GENERATION USING HIGH FREQUENCY SWITCHING CONVERTERS

Dc-to-dc converters are very important circuits in the power electronics field. Many other circuits are based upon these converters. These circuits are regarded as dc-to-dc converters due to the fact that dc-to-dc conversion is their most common application. Nevertheless, there is no problem in generating variable voltages by means of the circuits themselves. On the contrary, this would be quite useful in many applications. The difference between generating constant voltages (dc) and generating variable voltages (ac) consists in the control of these devices. From the control theory viewpoint, it is the same system, however, in a case, the goal is regulation and in the other, the goal is tracking of a reference.

All the electronic converters are switching systems, nonlinear, and with a highly variable parameter (the load). On the other hand, most of them are non-minimum phase systems, and one of the most important requirements is having a rapid response. Such characteristics make these devices difficult to control for the regulation case and much more difficult for the tracking case. The reported work in this thesis deals with the problem of tracking. It is shown that there is a compromise between the output voltage ripple and the voltages rate of change that a converter can generate. Limits for the voltages that a converter can generate are established. Expressions in order to guide the design of converters so that they can generate ac are obtained. Several controllers are proposed. One of them is highlighted due to the fact that although it is a nonlinear controller, it is easy to design and implement, robust, with good closed-loop performance and only requires voltage measures.

One of the main goals of the thesis was to merge the formality of the obtained results with the applicability. For this reason, some direct solutions were avoided, such as, using complicated adaptation algorithms in order to handle the problem of the varying load. For all the aforementioned reasons, a considerable part of the thesis is focused on analysis in addition to control.

Keywords: Switching systems control, Power electronics converters, Nonlinear systems.

A Consuelo, Domingo, Paúl y Ricardo

...quienes están conmigo porque los tengo presentes.

Agradecimientos

Quiero agradecer a algunas instituciones y personas sin las cuales el trabajo reportado en esta memoria no hubiera sido posible.

Agradezco al CONACYT, institución que me otorgó el apoyo económico y que me permitió desarrollar este proyecto. Por supuesto, al CICESE, sobre todo, por ese ambiente de trabajo que se respira en sus instalaciones que hicieron sentirme siempre cómodo. En este punto quisiera agradecer a Rosy Fuentes y Citlali Romero, las personas del área administrativa del CICESE con quienes más contacto tuve y que generosamente me facilitaron mucho los trámites que hubo lugar durante mi estancia en el CICESE. Agradezco a la Sección de Mecatrónica del CINVESTAV, ya que, dentro de sus instalaciones desarrollé algunas partes sustantivas de este trabajo.

Al Dr. Joaquín Álvarez, director de mi comité de tesis por las innumerables horas de sugerencias, discusiones, argumentos y consejos invertidas para que este trabajo pudiera seguir adelante. Pero sobre todo, le agradezco esa visión positiva y esa palabra de ánimo en los momentos más difíciles.

A los doctores Jaime Álvarez, Enrique Mitrani, Iouri Orlov y Hebertt Sira, miembros de mi comité de tesis. Los comentarios, observaciones y críticas que hicieron a lo largo del desarrollo de esta tesis, contribuyeron en gran medida a su terminación. A ellos les debo mucho de mi formación en esta etapa.

A Nimrod Vázquez con quien colaboré en la realización de este trabajo; algunos de los resultados de esta tesis son fruto de esa colaboración.

A Eva, mi compañera, porque hemos caminado, aprendido y soñado juntos estos años.

A los amigos que no voy a nombrar. Durante el tiempo que duró esta aventura, recibí apoyo y ayuda de muchas, muchas personas. Sin embargo, no me atrevo a nombrar a algunos, porque tengo la seguridad de que olvidaría a otros. A todos ellos, muchas gracias.

Índice general

	Página
1. Introducción	1
2. Antecedentes	8
2.1. Convertidores de alta frecuencia de conmutación	9
2.2. Los convertidores en la generación de ca	11
2.3. Revisión bibliográfica	13
3. Modelado de convertidores	17
3.1. Modo de conducción continuo y discontinuo	19
3.2. Modelos discontinuos	23
3.2.1. Obtención de modelos discontinuos	23
3.2.2. El concepto de solución en los modelos discontinuos	27
3.3. Modelos promedio	34
3.3.1. Obtención de modelos promedio mediante aproximación heurística	35
3.3.2. Obtención formal de modelos promedio a partir de modelos discontinuos	39
3.3.3. Implementación de controladores diseñados en base al modelo promedio	42
3.4. Modelos normalizados	44
3.5. Otros tipos de modelos	48
3.5.1. Modelos lineales	48
3.5.2. Modelos discretos	50
3.5.3. Modelos Euler-Lagrange	51
3.6. Objetivo de control	53
3.7. Conclusiones	54
4. Análisis	56
4.1. Introducción	56
4.2. Propiedades de los convertidores	58
4.2.1. Puntos de equilibrio y ganancia en voltaje	59
4.2.2. Estabilidad de la dinámica cero	62
4.2.3. Linealización entrada salida	65
4.2.4. Pasividad	68

Índice general (continuación)

	Página
4.3. Forma de onda de la corriente en el inductor	70
4.4. Selección de parámetros en los convertidores	75
4.4.1. Valores mínimos de los parámetros	76
4.4.2. Valores mínimos de L y C para el convertidor boost	77
4.4.3. Valores máximos de los parámetros	88
4.4.4. Ejemplo	92
4.5. Conclusiones	94
5. Control de convertidores	96
5.1. Introducción	96
5.2. Algunos controladores previamente propuestos	99
5.2.1. Control por modos deslizantes	99
5.2.2. Control por linealización mediante retroalimentación del estado	102
5.2.3. Controladores basados en pasividad	104
5.2.4. Control de corriente programada	106
5.3. Una ley de control indirecto	109
5.4. Control por “backstepping”	117
5.5. Obtención de controladores discontinuos	120
5.6. Conclusiones	123
6. Control por modos deslizantes	125
6.1. Introducción	125
6.2. Obtención del controlador	126
6.3. Relación con otros controladores	127
6.4. Análisis de estabilidad	131
6.5. Aspectos prácticos	143
6.6. Ejemplo	149
6.7. Conclusiones	153
7. Conclusiones	158
7.1. Aportaciones	158
7.2. Trabajo futuro	162
7.3. Comentarios finales	163
Bibliografía	165

Índice general (continuación)

	Página
A. Apéndice	176
A.1. Conceptos de control geométrico	176
A.1.1. Derivadas direccionales y paréntesis de Lie	177
A.1.2. Grado relativo y forma normal	178
A.1.3. Linealización por retroalimentación del estado	181
A.1.4. Dinámica cero	183
A.2. Pasividad y sistemas Euler-Lagrange	185

Índice de figuras

	Página
1. Inversor tradicional.	7
2. Convertidores básicos de alta frecuencia de conmutación.	9
3. Solución actual para generar voltajes variables mayores que la amplitud de la fuente de alimentación de cd.	12
4. El convertidor buck y la implementación del interruptor.	20
5. El convertidor boost y una forma de implementación.	21
6. El convertidor buck-boost y una opción de implementación.	22
7. El convertidor Ćuk.	23
8. Otra forma de implementar el convertidor buck.	23
9. La recta $x = 0$ es solución de $\dot{x} = 2 - 3u$, $u = \text{sgn}(x)$	29
10. Modo deslizante en un sistema con lado derecho discontinuo.	31
11. Función de conmutación y valor promedio (ciclo de trabajo).	36
12. Parte no lineal en el convertidor boost.	38
13. Representación en circuitos del comportamiento promedio del subcircuito de la fig. 12.	38
14. Esquema simplificado de un modulador por amplitud de pulso (PWM).	44
15. Forma de onda de la corriente cuando el voltaje es senoidal.	75
16. Formas de corriente y voltaje en estado estacionario del convertidor boost.	78
17. Formas de corriente y voltaje en estado estacionario del convertidor buck.	84
18. Inversor con salida de mayor amplitud que la fuente de alimentación.	93
19. Simulación del convertidor boost con los parametros dados en la tabla II.	94
20. Limitación de la frecuencia de conmutación en un algoritmo de control por modos deslizantes.	101
21. Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (141).	102
22. Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (144).	104
23. Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (148).	106
24. Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (150).	107
25. Diagrama básico de un controlador de corriente programada.	108

Índice de figuras (continuación)

	Página
26. Desempeño del controlador (154) con $z_{2d} = a + b \sin(\omega t)$, $\omega = 2\pi 60$	117
27. Desempeño del controlador (154) con $z_{2d} = a + b \sin(\omega t)$, $\omega = 2\pi 20$	117
28. Desempeño del controlador (177).	120
29. Zona donde un régimen deslizante puede existir.	137
30. Un ciclo de histéresis introduce una capa frontera, limitando la frecuencia de conmutación.	146
31. Examinando de cerca el rizo en la corriente.	147
32. Diagrama de bloques del sistema controlado.	148
33. Esquema del controlador.	148
34. Respuesta del convertidor boost en lazo cerrado.	150
35. Respuesta a perturbaciones del convertidor boost controlado.	151
36. Desempeño en la generación de un voltaje senoidal.	151
37. Desempeño robusto en la generación de un voltaje senoidal.	152
38. Foto del inversor bajo prueba.	154
39. Inversor alimentando a una carga no lineal. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de salida y corriente en la carga.	154
40. Desempeño del inversor ante cambios en el voltaje de entrada. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de entrada, voltaje de salida y corriente en la carga.	155
41. Desempeño del inversor ante variaciones en la carga. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de entrada, voltaje de salida y corriente en la carga.	155
42. Desempeño del inversor ante variaciones en la carga. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de entrada, voltaje de salida y corriente en la carga.	156

Índice de tablas

	Página
I. Punto de equilibrio y ganancia en voltaje de los convertidores básicos.	62
II. Parámetros de un convertidor boost.	94

Capítulo 1

Introducción

La electrónica de potencia es un campo multidisciplinario cuyas principales materias son: los dispositivos electrónicos y magnéticos, la teoría de circuitos y el control. Mediante la electrónica de potencia se puede convertir el voltaje de corriente directa (cd) de una batería a un voltaje de corriente alterna (ca); reducir o elevar un voltaje de cd; rectificar un voltaje de ca o variar su frecuencia; hacer que una carga con dinámica fuertemente no lineal sea vista por la fuente como una carga resistiva simple, o producir voltaje de ca con amplitud y frecuencia variable. Todo esto en un tamaño reducido, con un costo mínimo y una alta eficiencia en la conversión. Debido a que los circuitos electrónicos de potencia convierten la energía eléctrica de una forma a otra, se les conoce también como convertidores electrónicos de potencia o simplemente convertidores.

El importante avance de la electrónica de potencia en los últimos años se ha dado gracias a las mejoras introducidas en tres áreas:

- Componentes electrónicos y magnéticos.

- Topología.

- Control.

La mejora en los componentes electrónicos y en los materiales ferromagnéticos es quizá la parte que más ha contribuido a ampliar el número de aplicaciones de la electrónica de potencia. El aumento en la eficiencia y confiabilidad de los dispositivos electrónicos de potencia, además de la reducción significativa de su precio con el consiguiente incremento de su disposición comercial, han hecho que éstos sean empleados en un número creciente de aplicaciones. Se prevee que esta tendencia continúe en el futuro.

Topología, en electrónica, se refiere a la forma en que están conectados los componentes electrónicos y magnéticos para realizar una conversión determinada. Recientemente, se han introducido nuevos arreglos en los circuitos que mejoran significativamente la eficiencia y confiabilidad de los mismos. Técnicas como la conmutación suave permiten reducir, algunas veces de forma drástica, la energía que se disipa por efectos de la conmutación.

Actualmente hay una gran actividad de investigación dedicada a la búsqueda de nuevas topologías que permitan hacer más eficiente y confiable la conversión. Se busca, por ejemplo, realizar en una sola etapa funciones que normalmente se realizan en dos o más (Cáceres y Barbi, 1999; Vázquez *et al.*, 2002a). Así, se exploran topologías de convertidores que, además de la conversión propiamente dicha, proporcionen el aislamiento de la fuente y corrijan el llamado factor de potencia, el cual es un indicador de la eficiencia del convertidor. Otro ejemplo de la reducción de etapas mediante nuevas topologías, es la búsqueda de un convertidor capaz de producir un voltaje variable de amplitud mayor al de la fuente (Cáceres y

Barbi, 1999; Nava, 19997; Vázquez *et al.*, 1998). Ésta es la aplicación que motivó el trabajo que se reporta en esta memoria, como se explica en la sección 2.2.

La búsqueda de topologías que sean capaces de realizar más funciones, o las mismas pero con menos etapas, continuará dentro de la electrónica de potencia debido a varios factores entre los que se encuentran:

- Las posibilidades que abren los nuevos dispositivos electrónicos.
- El interés por aprovechar mejor la energía eléctrica causado por motivos ecológicos y económicos ha ocasionado que los sistemas electrónicos de potencia se empleen cada vez más.
- Relacionado con el punto anterior, el uso masivo de sistemas electrónicos conmutados, como son los sistemas de potencia, introducen perturbaciones severas a la red de distribución de energía eléctrica, afectando la calidad de la misma. Cambios en la topología y el control de sistemas electrónicos de potencia pueden ayudar a eliminar este efecto.
- El extraordinario avance que se sigue dando en lo que hemos llamado la electrónica para procesar información, está demandando fuertes requerimientos de la electrónica de potencia. El voltaje al cual se operan los nuevos procesadores, la necesidad de disminuir las variaciones en el voltaje de alimentación etc. impone la necesidad de convertidores con especificaciones más restrictivas en comparación con los que requerían los chips de antaño.

Asociado a la investigación de nuevas topologías, va siempre el requerimiento de algoritmos de control más elaborados, que no significa necesariamente que tengan que ser complejos

en su implementación. Por el contrario, en un buen número de aplicaciones es necesario que los esquemas de control sean sencillos de implementar, sin que esto implique que dichos esquemas deban ser simples. Por otra parte, un esquema de control que incremente eficiencia y rapidez (dos de los requerimientos principales de muchos sistemas electrónicos de potencia), manteniendo robustez y sencillez puede requerir de herramientas muy elaboradas para su análisis.

El control es una parte fundamental de los sistemas electrónicos de potencia. Las mejoras que el control introduce en estos sistemas hace que los dispositivos de electrónica de potencia sin un lazo de control sean realmente escasos. El control puede mejorar significativamente la rapidez de respuesta, manteniendo la robustez que en lazo abierto tienen estos dispositivos. Además, en muchos casos el control incrementa radicalmente la eficiencia.

Desde el surgimiento de la electrónica de potencia como un campo importante dentro de la ingeniería eléctrica, la búsqueda de controladores que mejoren, aunque sea en mínima proporción el desempeño de estos sistemas, ha sido continua. Hasta hace algunos años la gran mayoría de los controladores propuestos estaban basados en la teoría de control lineal. Motivados por algunas características de gran interés para los especialistas en control, éstos han propuesto recientemente un buen número de esquemas de control no lineal para dichos sistemas. Sin embargo, en la gran mayoría de estos trabajos los convertidores son empleados como un ejemplo para mostrar la aplicabilidad de alguna técnica de control. Desde esta perspectiva los detalles de la técnica bajo estudio tienen más relevancia que la aplicación en sí. Esto tiene como consecuencia que algunos aspectos importantes para la aplicación se dejen de lado. En (Escobar *et al.*, 1999b), por ejemplo, se hace una comparación de diversas téc-

nicas para el convertidor boost propuestas a su vez en (Sira-Ramírez, 1987; Sira-Ramírez y Lischinsky-Arenas, 1991; Sira-Ramírez *et al.*, 1996; Sira-Ramírez *et al.*, 1997; Sira-Ramírez *et al.*, 1998). Sin embargo, todas las técnicas no lineales empleadas en la comparación, excepto la reportada en (Sira-Ramírez *et al.*, 1995; Sira-Ramírez *et al.*, 1998), dependen de la carga, la cual, en general, es desconocida en la práctica. Esto hace que dichos controladores no sean robustos ante cambios de carga. La introducción de un algoritmo de adaptación como en (Sira-Ramírez *et al.*, 1998) no es una solución en muchísimos casos, pues la implementación se vuelve bastante difícil. En (Escobar *et al.*, 1999b), argumentando la importancia de la comparación del transitorio entre las técnicas evaluadas, se emplea un convertidor boost con parámetros con valores más grandes que los empleados en la práctica. Como se discute en el capítulo 4, el uso de valores más grandes para los parámetros hace que no se aprecie gran diferencia entre las técnicas comparadas, lo que sí sucede cuando se emplean parámetros realistas.

El no tomar en cuenta los aspectos prácticos de la aplicación hace que muchos de los controladores no lineales propuestos, y aún algunos lineales, resultan en algoritmos sumamente complejos para ser implementados mediante la electrónica comúnmente empleada para controlar los convertidores. Por otra parte, la complejidad (desde el punto de vista de implementación) de estos algoritmos tiene como resultado la pérdida de una de las mayores ventajas de los convertidores electrónicos: la confiabilidad derivada de la gran simplicidad de estos circuitos.

Las técnicas y procedimientos de análisis y control de sistemas dinámicos no lineales desarrollados en las últimas dos décadas, permiten conocer a detalle y de ser posible modificar

el comportamiento dinámico de clases cada vez más amplias de sistemas. Los convertidores electrónicos, en particular el convertidor elevador (“boost”), han sido extensivamente empleados como ejemplo de aplicación para diversas técnicas de análisis y control. Sin embargo, en el camino hacia la construcción de nuevos dispositivos, algunos aspectos de la aplicación (el control de convertidores en nuestro caso), que a veces no es posible incluir en el enfoque más abstracto del desarrollo de una técnica de análisis o control, deben ser tomados en cuenta. En este enfoque, la aplicación más que el desarrollo o prueba de una técnica tiene la mayor relevancia. Los métodos se emplean en tanto que ayuden a alcanzar el objetivo. Así, es necesario emplear diversas técnicas y posiblemente adecuarlas. Las características propias de la aplicación (por ejemplo, imposibilidad de usar el valor de la carga en el lazo de control o lo permisible del seguimiento aproximado contra el exacto) pueden hacer una gran diferencia entre la aplicabilidad de una técnica o no, o entre la complejidad del controlador obtenido en uno u otro caso. En el caso del desarrollo de controladores para circuitos electrónicos de potencia, es necesario la colaboración entre personas que conozcan los métodos de análisis y control y personas que conozcan lo que se exige de los circuitos en las aplicaciones y lo que es posible modificar en ellos. En lo que se refiere al análisis y control, se deben tener presentes los aspectos prácticos en todo momento.

Dentro de este marco, en el presente documento se aborda el problema de la conversión cd-ca, o inversión, como es más comúnmente conocida. Éste es uno de los problemas clásicos de la electrónica de potencia. Sin embargo, a pesar de ello las topologías que se conocen para realizar dicha conversión son, en su mayoría, variaciones de una topología conocida como el inversor (fig. 1). En (Cáceres y Barbi, 1999; Vázquez *et al.*, 1999) se muestra que el inversor

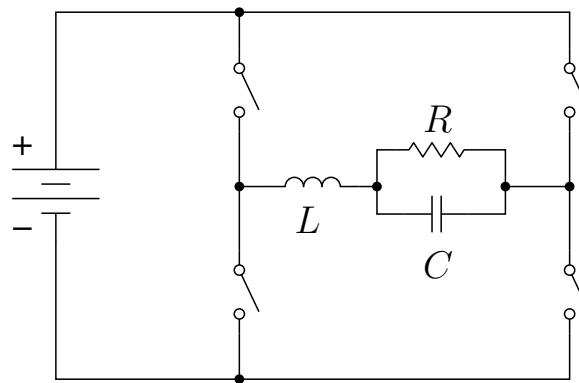


Figura 1: Inversor tradicional.

tradicional puede verse como una topología derivada de un convertidor cd-cd muy común, el convertidor reductor (“buck”). Esta forma de ver al inversor permite a los autores obtener otras topologías para realizar la conversión cd-ca basadas en otros convertidores básicos. En (Cáceres y Barbi, 1999; Vázquez *et al.*, 1999) no se pone énfasis en el control de los nuevos inversores propuestos. Sin embargo, en (Sira-Ramírez, 1987) se muestra que el control de estos dispositivos no es un problema menor. En (Cortes *et al.*, 2001; Cortes *et al.*, 2004) y de manera más amplia en el capítulo 4 de esta memoria, se establece que el uso de convertidores básicos en la conversión cd-ca es bastante más complicado que lo que podría ser la conversión cd-cd.

En el siguiente capítulo se establecen los antecedentes del problema de conversión cd-ca empleando convertidores básicos, se describen las dificultades presentes en la solución de dicho problema y cuál es el interés práctico de su solución.

Capítulo 2

Antecedentes

En las siguientes secciones de este capítulo se introducen los convertidores básicos como objeto de estudio y, a la vez, se establece más concretamente el objetivo inicial y las aportaciones del trabajo. En la sección 2.1 se introducen las cuatro topologías de convertidores básicos que se tratan en esta memoria: los convertidores reductor, elevador, reductor-elevador y \acute{C} uk. Los tres primeros son muy conocidos por sus nombres en inglés “buck”, “boost”, “buck-boost” por lo que de aquí en adelante se les refiere así. El convertidor \acute{C} uk se nombra así por quien lo propuso (Cuk y Middlebrook, 1977). El empleo de los convertidores boost, buck-boost y \acute{C} uk en la generación de corriente alterna es relativamente nueva; las ventajas que esto podría tener se plantean de manera general en la sección 2.2. En la sección 2.3 se explica porqué los convertidores son difíciles de controlar y porqué son usados como ejemplo de aplicación de numerosas técnicas. En esta misma sección se hace una revisión de cómo se aborda el control de convertidores en los trabajos previos y porqué el interés en continuar investigando estos dispositivos, particularmente para la generación de voltajes variables.

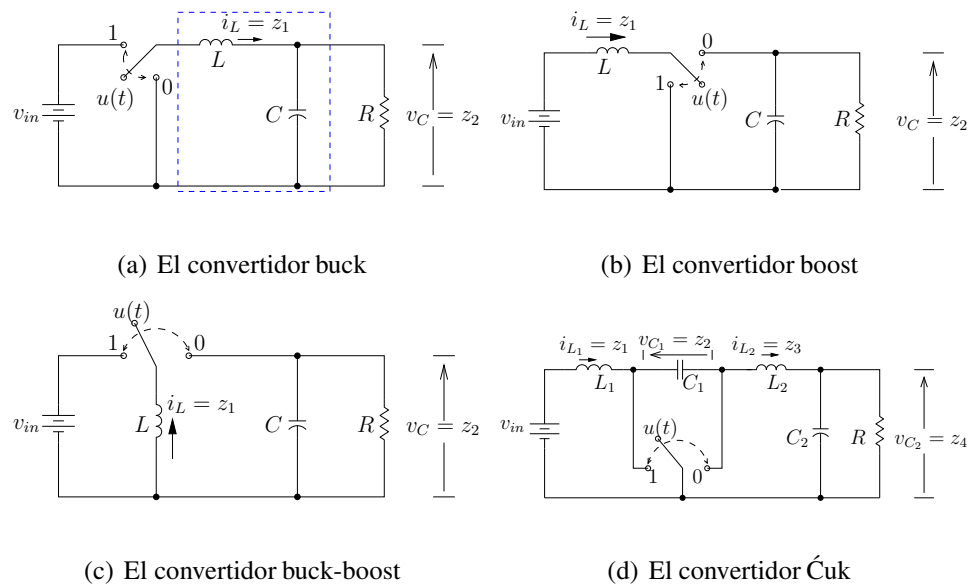


Figura 2: Convertidores básicos de alta frecuencia de conmutación.

2.1. Convertidores de alta frecuencia de conmutación

La figura 2.2(a) muestra uno de los convertidores más empleados en la práctica, conocido como el convertidor buck. El funcionamiento de este convertidor es el más sencillo de entender, pues se puede identificar el conjunto inductor-capacitor como un filtro pasabajos. El voltaje de entrada es conmutado por el interruptor, generando un voltaje pulsante. El valor promedio de este voltaje pulsante depende directamente de la relación entre el tiempo en que el interruptor está en la posición 1 y el tiempo en el que está en la posición 0. A esta relación se le conoce como ciclo de trabajo (ver la sección 3.3 para una definición precisa). El filtro pasabajos elimina los componentes de alta frecuencia del voltaje pulsante dejando pasar, en el caso ideal, sólo el componente de cd. Así, controlando el ciclo de trabajo del interruptor, se controla la energía que es entregada a la carga.

Además del buck, existen otros circuitos para realizar la conversión de la energía de ma-

nera conmutada. Todos ellos están contruídos alrededor de los mismos componentes: interruptores, inductores y capacitores conectados de una u otra forma. Las topologías más conocidas, además del buck, se muestran en la figura 2, y se conocen como convertidores boost, buck-boost y Ćuk, respectivamente. En (Bose, 1992) se presenta un procedimiento heurístico para obtener estos tres convertidores a partir del buck. Las cuatro topologías mencionadas son las más comunes y muchas otras topologías están basadas en ellas. Por esto, son las que se abordan en el resto del documento.

A la entrada del filtro LC que se destaca en la figura 2.2(a) hay un voltaje pulsante cuya primera armónica tiene la frecuencia de conmutación del interruptor, por lo que el filtro es más efectivo para recuperar el valor promedio del voltaje si la frecuencia de conmutación del interruptor es mucho mayor que la frecuencia de corte del filtro. En el resto de los convertidores, los inductores y capacitores no se encuentran formando un filtro tan fácil de distinguir como en el caso del convertidor buck, sin embargo, su función es la misma. Como cabe esperar y se muestra formalmente en el capítulo 4, para los cuatro convertidores básicos se cumple que entre mayor es la frecuencia de conmutación mejor es la calidad de la energía de cd obtenida. Por ello, la frecuencia de conmutación en los convertidores mencionados es, en general, alta. Es por esta razón que se les conoce como convertidores de alta frecuencia de conmutación. En el capítulo 4 se precisa el significado de “alta”.

2.2. Empleo de los convertidores para la obtención de energía de ca

En la gran mayoría de las aplicaciones actuales, los convertidores de alta frecuencia de conmutación se emplean como convertidores cd-cd. Esto es cierto particularmente para el caso de los convertidores boost, buck-boost y $\hat{C}uk$. Por este hecho, se les conoce como convertidores de potencia cd-cd de alta frecuencia de conmutación (el nombre es más común en inglés: “high switching frequency DC-DC power converters”), o a veces, simplemente convertidores cd-cd. De hecho, la gran mayoría de los esquemas de control propuestos están orientados a la conversión cd-cd. Sin embargo, el empleo de estos convertidores no tiene que estar limitado a la obtención de voltajes constantes en la salida. Conmutando adecuadamente el interruptor, se puede en principio obtener un voltaje o corriente de una forma preestablecida a la salida.

La generación de voltajes y corrientes variables (de ca) tiene muchas aplicaciones. Se usa entre otras cosas en el control dispositivos electromecánicos, en la generación de campos magnéticos controlados, en equipos de respaldo de energía eléctrica, etc. Actualmente, en la mayoría de estas aplicaciones se emplea el inversor tradicional. Como se mencionó antes, el inversor tradicional está basado en el convertidor buck. Sin embargo, el convertidor buck tiene una importante desventaja: a la salida sólo se puede obtener un voltaje de menor amplitud que el voltaje de la fuente de alimentación. De hecho, esta característica da nombre al convertidor. Esta característica reductora es heredada por el inversor tradicional. No obstante, en muchas ocasiones es necesario generar un voltaje de ca de amplitud mayor al de la fuente de

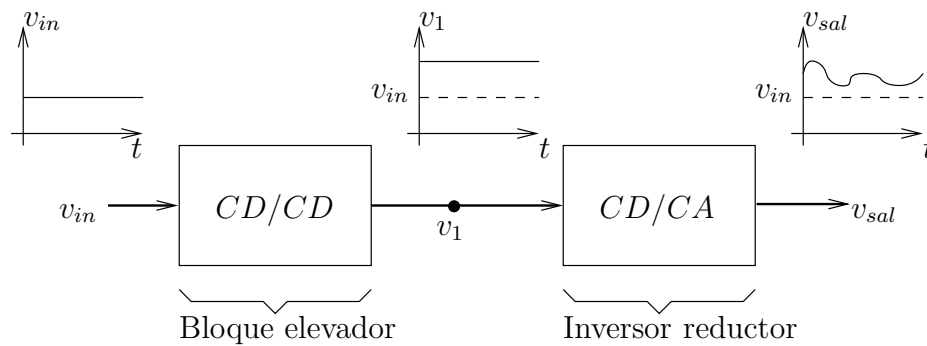


Figura 3: Solución actual para generar voltajes variables mayores que la amplitud de la fuente de alimentación de cd.

alimentación del convertidor. La forma como este requerimiento se resuelve actualmente se muestra en la figura 3. Consiste en usar dos bloques, el primero es un bloque de conversión cd-cd que genera un voltaje de cd mayor al de la fuente. Una vez obtenido este voltaje, el segundo bloque, basado en el convertidor buck, genera el voltaje de ca requerido.

Los nuevos inversores propuestos en (Cáceres y Barbi, 1999; Vázquez *et al.*, 1999) basados en convertidores distintos al buck, no tienen la restricción de reducir el voltaje del inversor tradicional. Estos inversores podrían realizar la conversión cd-ca en una sola etapa con el consiguiente incremento en la confiabilidad y eficiencia; a su vez, el costo se reduciría. En empleo de los nuevos inversores en la generación de voltajes variables presentaría importantes ventajas en aplicaciones tales como:

- Control de sistemas electromecánicos. Particularmente, en aquellos dispositivos móviles alimentados por baterías en los que es necesario obtener voltajes variables mayores a los de la batería.
- Fuentes de alimentación ininterrumpible.

- En general, todas aquellas aplicaciones en las que se desee amplificar la potencia de una señal variable.

Para poder ser empleados en las aplicaciones mencionadas es necesario resolver primero el problema de control que los nuevos inversores plantean. Dicho problema de control está estrechamente relacionado con la generación de voltajes de ca mediante los convertidores sobre los cuales están basados. Esto es, primero es necesario plantear soluciones para la generación de voltajes de ca mediante los convertidores boost, buck-boost y Ćuk. Este último problema es el que se aborda en esta tesis.

2.3. Revisión bibliográfica

Como se muestra en el capítulo 4 los convertidores boost, buck-boost y Ćuk son sistemas no lineales con control discontinuo o acotado (dependiendo del modelo), de fase no mínima y con un parámetro (la carga) desconocido y altamente variable. Estas características juntas, hacen que los convertidores mencionados sean sistemas bastante difíciles de controlar. Por estas mismas propiedades los convertidores han llamado la atención de los especialistas en control. En el caso del uso más común de estos convertidores, el de la conversión cd-cd, el problema de control es un problema de regulación para el cual se han propuesto numerosas soluciones basadas en las más diversas técnicas. Así se tienen esquemas propuestos utilizando modos deslizantes (Mattavelli *et al.*, 1993; Mattavelli *et al.*, 1997b; Mattavelli *et al.*, 1997a; Sira-Ramírez, 1987; Sira-Ramírez y Ríos-Bolívar, 1994; Sira-Ramírez *et al.*, 1995; Sira-Ramírez *et al.*, 1996), H^∞ (Kugi y Schlacher, 1999; Naim *et al.*, 1997), lqr (Leung

et al., 1991; Leung *et al.*, 1993), pasividad (Escobar *et al.*, 1999a; Escobar, 1999; Rodríguez *et al.*, 2000; Sira-Ramírez y Ortega, 1995; Sira-Ramírez *et al.*, 1997), planitud (Angulo-Nuñez y Sira-Ramírez, 1998), μ síntesis (Buso, 1999), control óptimo (Garofalo *et al.*, 1994), control adaptable (Karsenti *et al.*, 1995; Sira-Ramírez *et al.*, 1998), PI generalizado (Sira-Ramírez *et al.*, 2001), linealización extendida (Ríos-Bolívar y Sira-Ramírez, 1991), etc. Pero aún en el caso de la conversión cd-cd muchos de los esquemas propuestos, particularmente los no lineales son difíciles de implementar y/o dependen de la carga con el consecuente detrimento de la robustez. Por ello el controlador de uso más extendido en la práctica sigue siendo el controlador por corriente programada (Kimhi y Ben-Yaakov, 1991; Middlebrook, 1989; Ridley, 1991). Sin embargo, este controlador fue propuesto de manera heurística y no existe un procedimiento sistemático de diseño y una prueba que determine su estabilidad, aunque algunas aportaciones se han hecho en este sentido recientemente (Alvarez-Ramírez *et al.*, 2001; Alvarez-Ramírez y Espinosa-Pérez, 2002).

Las características de fase no mínima y control acotado (en el caso de los modelos promedio) son dificultades fuertes para el control. En muchos de los esquemas la dificultad que representa la no minimalidad de fase, se resuelve redefiniendo la salida. Típicamente, la corriente en un inductor es empleada como nueva salida. Al ser ésta de fase mínima, el problema se transforma en encontrar cuál es la corriente necesaria en el inductor para que el voltaje de salida sea el deseado. Este planteamiento de la redefinición de la salida se conoce como control indirecto y ha sido empleado en buen número de trabajos (Escobar *et al.*, 1999a; Escobar, 1999; Rodríguez *et al.*, 2000; Sira-Ramírez, 1987; Sira-Ramírez y Ríos-Bolívar, 1994; Sira-Ramírez *et al.*, 1995; Sira-Ramírez *et al.*, 1996; Sira-Ramírez y Or-

tega, 1995; Sira-Ramírez *et al.*, 1997). La cuestión de la saturación en el control no se aborda en general, con excepción del control por pasividad reportado en (Rodríguez *et al.*, 2000) y los controladores discontinuos (Ríos-Bolívar y Sira-Ramírez, 1991; Sira-Ramírez, 1987; Sira-Ramírez y Ríos-Bolívar, 1994; Sira-Ramírez *et al.*, 1996), en los cuales es forzoso tenerla en cuenta para demostrar la existencia de un modo deslizante.

El problema es más complicado en la generación de voltajes variables. En este caso el problema de control es el de seguimiento de trayectorias y las características dinámicas mencionadas adquieren mayor relevancia en la dificultad del control; y más aún, si se pretende que el controlador sea sencillo de implementar con el fin de mantener la confiabilidad y sencillez de todo el sistema. Por esta dificultad y porque el empleo de los convertidores boost, buck-boost y Ćuk en la generación de voltajes variables es reciente, el número de esquemas propuestos para este problema es mucho menor (Fossas-Colet y Olm-Miras, 2002; Sira-Ramírez, 1999; Sira-Ramírez, 2001; Sira-Ramírez y Silva-Navarro, 2002; Zinober *et al.*, 1998). Si se emplea el enfoque del control indirecto entonces la diferencia entre la conversión cd-cd y cd-ca es la referencia para la corriente. En el caso de la conversión cd-cd la corriente necesaria en el inductor es fácil de encontrar. La conversión cd-ca implica encontrar la solución acotada de una ecuación diferencial cuyas soluciones son generalmente no acotadas y no se pueden encontrar en forma analítica. Algunos trabajos sobre la conversión cd-ca se enfocan en realidad a encontrar dicha solución acotada (Fossas-Colet y Olm-Miras, 2002; Sira-Ramírez, 1999; Sira-Ramírez, 2001; Zinober *et al.*, 1998). Sin embargo, con el enfoque del control indirecto, el inconveniente de la dependencia de la carga se presenta tanto en la conversión cd-cd como en la conversión cd-ca, pues en ambos casos la referencia para la corriente depende de la car-

ga. Por lo tanto, todos los esquemas que emplean la redefinición de la salida para controlar indirectamente el voltaje dependen generalmente de la carga.

Capítulo 3

Modelado de los convertidores de alta frecuencia de conmutación

Existen diversas metodologías para la obtención de modelos para el análisis y control de los dispositivos electrónicos de potencia más comunes. La gran mayoría de estos modelos son modelos promedio o bien modelos estrechamente vinculados a los modelos promedio, como por ejemplo, los modelos gráficos reportados en (Veerachary *et al.*, 2001). En este capítulo se presentan los modelos que serán utilizados más adelante, así como algunas cuestiones importantes alrededor de ellos.

En los desarrollos formales que se presentan a lo largo de la tesis se consideran convertidores ideales representados por los diagramas de las figuras 2. Una de las diferencias que puede surgir entre los convertidores reales y los ideales es que en los reales, el interruptor puede no estar en ninguna de las dos posiciones marcadas en las figuras 2. Si esto sucede, el comportamiento dinámico puede ser radicalmente distinto. Tal situación depende de la

implementación de los interruptores y se comenta en la sección 3.1.

En la sección 3.2 se obtienen modelos de conmutación o discontinuos de los convertidores. La obtención de modelos de conmutación es sencilla pues consiste en obtener un modelo para cada posición del interruptor y combinarlos en uno solo. Sin embargo, en dichos modelos el control sólo toma dos valores.

Los modelos más comúnmente usados son los modelos promedio, ya que, permiten el uso de las técnicas para el control de sistemas diferenciables más largamente investigadas y conocidas por los ingenieros. Aunque los modelos promedio pueden obtenerse formalmente a partir de los modelos discontinuos, la forma de obtención de los mismos ha sido tradicionalmente por métodos heurísticos. En la sección 3.3 se presentan el tipo de ideas heurísticas empleadas en la obtención de modelos promedio. En la misma sección se presenta también un procedimiento formal para la obtención de modelos promedio a partir de modelos discontinuos. Estas técnicas dan por lo general un control también diferenciable. Así, es necesario transformar la señal de control en pulsos para cambiar la posición del interruptor. El dispositivo más comúnmente empleado para ello es el modulador por amplitud de pulso, descrito en la sección 3.3

En la sección 3.5 se presentan otras formas de modelar los convertidores. Estos modelos no se emplearon durante el desarrollo de la tesis pero se presentan aquí porque son bastante comunes en el desarrollo de controladores.

La normalización, cuyo propósito es reducir el número de parámetros de un sistema, es ampliamente conocida y empleada en el análisis de circuitos. En la sección 3.4, mediante un procedimiento de normalización (utilizado ya en (Zinober *et al.*, 1998)), se obtienen modelos

normalizados de los convertidores. Los modelos normalizados presentados son convenientes en algunas etapas de la obtención de controladores, sobre todo en el análisis. La normalización también es útil en la simulación de los convertidores. Generalmente, en un modelo no normalizado de un convertidor intervienen tiempos muy pequeños, transitorios muy rápidos y valores grandes de los estados. Esta conjugación de cantidades muy pequeñas y grandes puede hacer que los algoritmos numéricos de simulación no sean estables. La normalización reduce significativamente esta posibilidad, además de que puede servir para la selección de parámetros de controladores, como se ilustra en la sección 6.5

Una vez que se cuenta con los modelos, se puede establecer el objetivo de control. Esto se hace en la sección 3.6. Sin embargo, existen algunas características deseables del controlador que no se pueden expresar formalmente. Estas características se enfatizan también en la sección 3.6.

3.1. Implementación de los interruptores y los modos de conducción continuo y discontinuo

Quizá el elemento más importante de los dispositivos estudiados aquí es el de conmutación. Como se mencionó en el capítulo 1, la eficiencia de tales dispositivos, así como la no linealidad y dificultad del control, se deben esencialmente a este elemento. El comportamiento dinámico, y en general, la operación del circuito, depende sensiblemente de la forma de implementar el interruptor, como se discute brevemente a continuación.

Como se observa en los diagramas de la figura 2, en cada uno de los convertidores hay un

interruptor de un polo doble tiro. La implementación de dicho interruptor mediante dispositivos electrónicos, se puede hacer de varias maneras. El diseñador elige la forma adecuada a partir de especificaciones técnicas como la potencia manejada por el convertidor y la frecuencia máxima necesaria, además de otras consideraciones como el costo final del convertidor. En la figura 4 se muestra nuevamente el convertidor buck junto con una de las formas más comunes de implementar el interruptor, la cual consiste en un transistor MOSFET y un diodo cuyo estado de conducción o no conducción es determinado por el MOSFET; en general, el estado de ambos es complementario. De la figura 3.4(b) se observa que cuando el transistor conduce, el voltaje de la fuente polariza en forma inversa el diodo, poniéndolo en estado de no conducción. De esta manera, el circuito resultante es el mismo que se obtendría con el interruptor en la posición $u = 1$ (fig. 3.4(a)). Por el contrario, cuando el transistor está abierto, la corriente que circula por el inductor hace que el diodo conduzca, de tal manera que el circuito resultante es el que se obtendría si la posición del interruptor estuviera en $u = 0$.

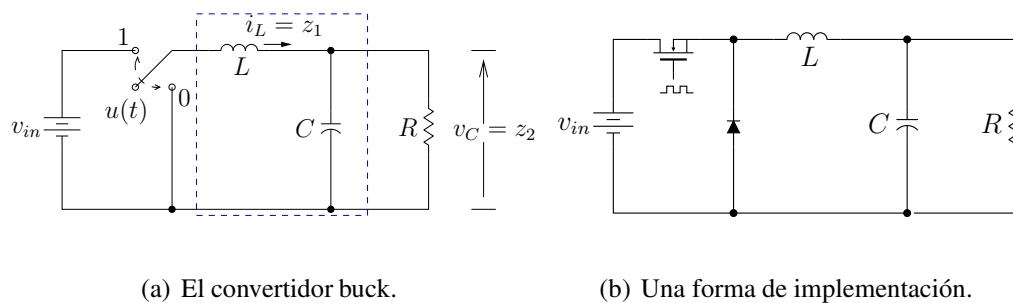


Figura 4: El convertidor buck y la implementación del interruptor.

Sin embargo, la combinación de diodo y transistor no emula totalmente la función del interruptor, pues puede ocurrir que el MOSFET y el diodo estén abiertos. Esto sucede cuando, dentro de un periodo de conmutación, el transistor está en estado abierto y la corriente del

inductor es tan pequeña que no ocasiona que el diodo conduzca. Cuando esto pasa durante varios periodos de conmutación, se dice que el convertidor está operando en modo discontinuo. Tal situación se da cuando el valor de la carga R es grande, la frecuencia de conmutación es baja o el inductor es muy pequeño. El modo discontinuo también se presenta en los demás convertidores. La implementación más común del interruptor en cada caso se presenta en las figuras 5–7.

El comportamiento dinámico de un convertidor es bastante diferente en función de si dentro de un periodo de conmutación entra en el modo discontinuo o no, pues en el primer caso el modelo correspondiente conmuta entre dos estructuras, mientras que en el segundo conmuta entre tres estructuras diferentes. Particularmente, si los parámetros de un convertidor son tales que éste se encuentra en el límite de entrar en el modo de operación discontinuo, se pueden presentar comportamientos dinámicos sumamente complejos (Aroudi *et al.*, 2000; di Bernardo y Vasca, 2000).

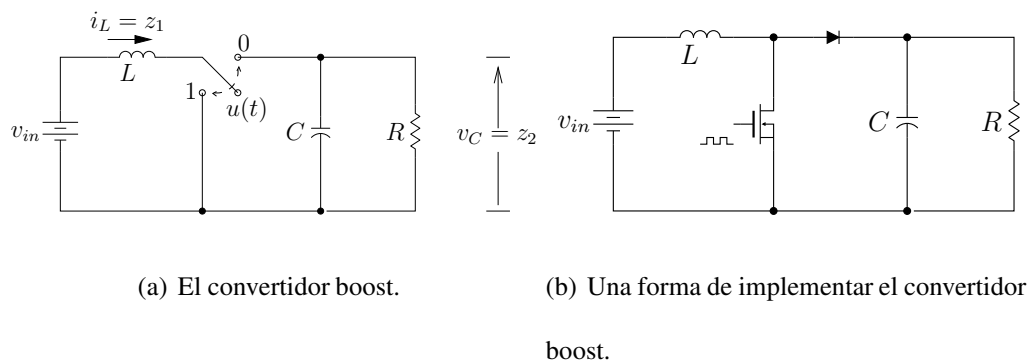


Figura 5: El convertidor boost y una forma de implementación.

Es importante hacer notar que el término “modo discontinuo de operación” se refiere a la condición de que dentro de un periodo de conmutación haya un intervalo en que el

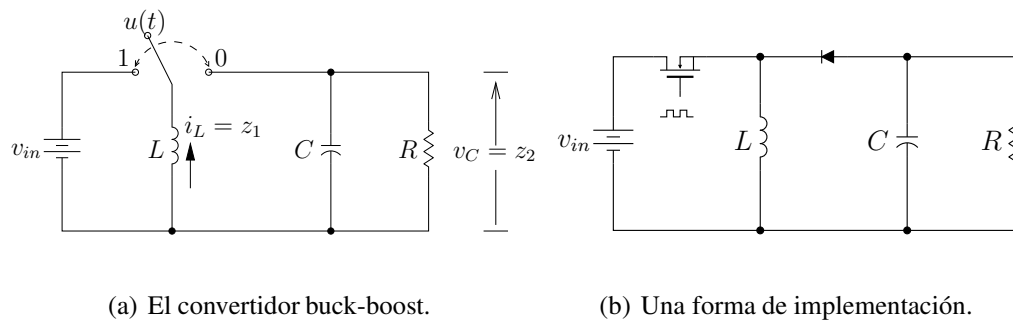
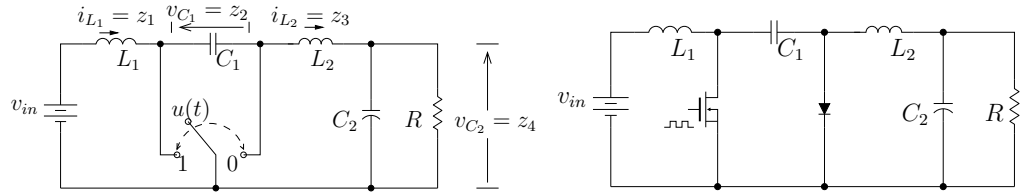


Figura 6: El convertidor buck-boost y una opción de implementación.

interruptor no esté en ninguna de las posiciones 1 ó 0; no se refiere a que el modelo del circuito sea discontinuo. En efecto, un convertidor se puede modelar con ecuaciones que tienen el lado derecho discontinuo independientemente de que opere o no en modo discontinuo. En la sección 3.2 se obtienen modelos discontinuos para los convertidores básicos, suponiendo que éstos no entran en el “modo discontinuo de operación”.

El modo de operación discontinuo surge de la forma de implementar los interruptores. Si el interruptor del convertidor buck se implementa, por ejemplo, con dos transistores operando complementariamente, como se muestra en la figura 8, entonces sí se emula completamente la función del interruptor de la figura 3 y, aunque la corriente del inductor sea cero, el interruptor está siempre en una de las dos posiciones. De esta manera, se evita el modo discontinuo independientemente de los parámetros del convertidor. En la práctica, por consideraciones de costo, es más común que el interruptor se implemente con un solo transistor. En los modelos desarrollados en este capítulo se supone que los convertidores no operan en modo discontinuo. Para hacer corresponder esta suposición con la práctica, la implementación de los interruptores debe ser tal que efectivamente los componentes electrónicos los emulen completamente (como se muestra en la figura 8 para el caso del buck); o bien, seleccionar los

parámetros del convertidor y el controlador de tal manera que se asegure que el convertidor no entrará en modos discontinuo.



(a) El convertidor Ćuk.

(b) Una forma de implementar el convertidor Ćuk.

Figura 7: El convertidor Ćuk.

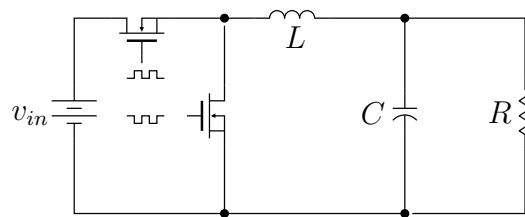


Figura 8: Otra forma de implementar el convertidor buck.

3.2. Modelos discontinuos

3.2.1. Obtención de modelos discontinuos

Una de las formas más sencillas de obtener un modelo de los convertidores conveniente para el diseño de controladores, es suponer que todos los elementos son ideales. Bajo esta suposición, el único elemento no lineal que interviene en los convertidores es el interruptor, que cambia la estructura del sistema al cambiar de posición. Para cada uno de los convertidores mencionados en el capítulo 1, la aplicación directa de las leyes de Kirchhoff permite obtener

un modelo para cada posición del interruptor. Ambos modelos pueden entonces combinarse en uno solo y así obtener un modelo de conmutación para cada convertidor. A continuación, se ejemplifica este proceso de forma detallada para el convertidor buck.

- Modelo discontinuo del convertidor buck

Haciendo la suposición de que los elementos son ideales se puede, a partir de la figura 4, obtener las ecuaciones del convertidor buck para cada posición del interruptor. Si el interruptor está en la posición $u = 0$, el circuito puede describirse mediante las ecuaciones:

$$\dot{z}_1 = \frac{-z_2}{L} \quad (1a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_1}{C} - \frac{z_2}{RC} \quad (1b)$$

donde z_1 es la corriente en el inductor y z_2 es el voltaje en el capacitor. Los parámetros v_{in} , L , C y R se suponen, para fines de análisis, constantes, siendo R , en general, desconocida. Cuando el interruptor está en la posición $u = 1$ se tiene la siguiente descripción:

$$\dot{z}_1 = \frac{-z_2}{L} + \frac{v_{in}}{L} \quad (2a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_1}{C} - \frac{z_2}{RC} \quad (2b)$$

Combinando (1) y (2) resulta:

$$\dot{z}_1 = \frac{-z_2}{L} + \frac{v_{in}}{L}u \quad (3a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_1}{C} - \frac{z_2}{RC}, \quad u \in \{0, 1\} \quad (3b)$$

Aplicando el mismo procedimiento seguido para obtener el modelo del convertidor buck a partir de la figura 4, se puede obtener el modelo de los convertidores boost, buck-boost y Cúk a partir de las figuras 5, 6 y 7, respectivamente. Así, resultan los siguientes modelos:

- Modelo discontinuo del convertidor boost

$$\dot{z}_1 = \frac{v_{in}}{L} - \frac{(1-u)z_2}{L} \quad (4a)$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{z_2}{RC} + \frac{(1-u)z_1}{C}, \quad u \in \{0, 1\} \quad (4b)$$

- Modelo discontinuo del convertidor buck-boost

$$\dot{z}_1 = -\frac{uv_{in}}{L} - \frac{(1-u)z_2}{L} \quad (5a)$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{z_2}{RC} + \frac{(1-u)z_1}{C}, \quad u \in \{0, 1\} \quad (5b)$$

- Modelo discontinuo del convertidor Cúk

$$\dot{z}_1 = \frac{v_{in}}{L_1} - \frac{(1-u)z_2}{L_1} \quad (6a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{(1-u)z_1}{C_1} + \frac{uz_3}{C_1} \quad (6b)$$

$$\dot{z}_3 = \frac{-uz_2}{L_2} - \frac{z_4}{L_2} \quad (6c)$$

$$\dot{z}_4 = \frac{z_3}{C_2} - \frac{z_4}{RC_2}, \quad u \in \{0, 1\} \quad (6d)$$

Es importante hacer énfasis en que los modelos presentados arriba han sido obtenidos bajo la suposición de que los elementos son ideales. Suposición que, por supuesto, no se da en la práctica. Sin embargo, bajo un buen diseño tanto del convertidor como del controlador,

esta aproximación puede arrojar resultados muy cercanos a la realidad. Las no linealidades de los componentes del circuito y del controlador provocan en la práctica una degradación del comportamiento respecto del que predicen los modelos presentados. Esta diferencia entre el comportamiento esperado y el real depende de muchos factores, como la complejidad del control, el diseño del convertidor y las condiciones de operación del circuito.

Aunque son fáciles de obtener y reflejan de manera directa la discontinuidad intrínseca de los convertidores electrónicos, los modelos discontinuos no son ampliamente empleados por la comunidad de electrónica de potencia. Ello se debe a que los métodos de análisis y diseño de controladores para sistemas discontinuos no son tan conocidos por los ingenieros como los métodos para sistemas diferenciables. Por otra parte, el uso de métodos para sistemas discontinuos obliga a acercarse más a formalismos matemáticos que en general no forman parte del currículum clásico de las carreras de ingeniería.

Observación 1 *En lazo abierto, cuando u no depende del estado, los modelos presentados arriba son discontinuos en el tiempo y no en el estado. La precisión es importante porque el concepto y los métodos de solución cambian fuertemente en un caso u otro (Filippov, 1988). Sin embargo, en lazo cerrado, usualmente $u = \varphi(z)$, con φ una función discontinua. En este caso los convertidores son sistemas discontinuos en el estado.*

Observación 2 *La asignación de cuál es la posición $u = 1$ y cuál la posición $u = 0$ del interruptor en la figura 3.4(a) se ha hecho de forma arbitraria. Es decir, cualquiera de las posiciones pudo haber sido asignada con $u = 1$. Si por ejemplo, las asignaciones hubieran*

ido al revés de como está en la figura 3.4(a), se hubiera obtenido el modelo

$$\dot{z}_1 = \frac{-z_2}{L} + \frac{v_{in}}{L}(1-u) \quad (7a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_1}{C} - \frac{z_2}{RC} \quad (7b)$$

Si se hace $u' = 1 - u$ se obtiene el mismo modelo (3), con u cambiado por u' . Es muy común en la bibliografía asignar la posición $u = 1$ a la posición que corresponde a la posición de encendido del semiconductor activo en la síntesis del interruptor. En el caso de las figuras 4 y 5-7 es el MOSFET. Por supuesto, el argumento anterior sólo se puede seguir si en la síntesis del interruptor sólo interviene un elemento activo. De cualquier manera, es claro que cualquier conclusión respecto a las propiedades dinámicas o el control de los convertidores no deben depender de la posición a la que se le asigne el valor $u = 1$ o $u = 0$. La asignación contraria siempre se podrá obtener haciendo $u' = 1 - u$, o en el caso que el control sea el ciclo de trabajo, $d' = 1 - d$

3.2.2. El concepto de solución en los modelos discontinuos

En esta sección se discute brevemente el concepto de solución de una ecuación diferencial cuando el lado derecho es discontinuo, como sucede con los modelos (3), (4-6). Ésta no es una cuestión menor, como lo prueba la gran diversidad de trabajos que han sido publicados alrededor de este punto. En (Filippov, 1988) se revisan y se presentan sobre una base común muchos de los enfoques con que este punto se ha abordado. Dicho trabajo es uno de los trabajos más amplios y completos sobre la materia. Aquí se presenta uno de los enfoques analizados en (Filippov, 1988) que resultó particularmente útil en el desarrollo de esta tesis.

Considérese el sistema afín en u :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x, t) \quad (8)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^m$, f y g son campos vectoriales continuos y $u \in \mathfrak{R}$ es una función continua por partes en cada uno de sus argumentos. Si u es una función que sólo depende del tiempo, entonces la solución se puede encontrar empleando técnicas similares a los sistemas continuos y algunos argumentos puramente matemáticos. Si además u varía rápidamente, como es el caso de los convertidores en lazo abierto¹, se pueden usar técnicas de promediación como las descritas en (Khalil, 2001). Si u depende de x , la cuestión es diferente, como se ilustra a continuación.

Ejemplo: Considere la ecuación $\dot{x} = 2 - 3u$ con $u = \text{sgn}(x)$. Si $x > 0$ la ecuación adquiere la forma $\dot{x} = -1$ y la solución es $x = -t + c_1$. Si $x < 0$, entonces la solución es $x = 5t + c_2$. La figura 9 muestra la solución de esta ecuación para distintas condiciones iniciales. Por la dirección con que inciden las soluciones en la recta $x = 0$ la trayectoria no puede salir después de incidir en ella. Por otra parte, cualquier solución alcanza dicha recta. Así, $x = 0$ es una solución de la ecuación diferencial; sin embargo, no satisface la expresión de la ecuación. Surge entonces el problema de encontrar una descripción de la trayectoria cuando ésta evoluciona sobre la recta $x = 0$. Más específicamente se debe responder la pregunta: ¿cuál es la velocidad cuando la trayectoria se mueve a lo largo de esta recta?

La situación descrita arriba presenta un problema interesante por sí mismo, desde el punto de vista analítico, que implica la necesidad de generalizar el concepto de solución de ecua-

¹En el caso de lazo cerrado u depende de x

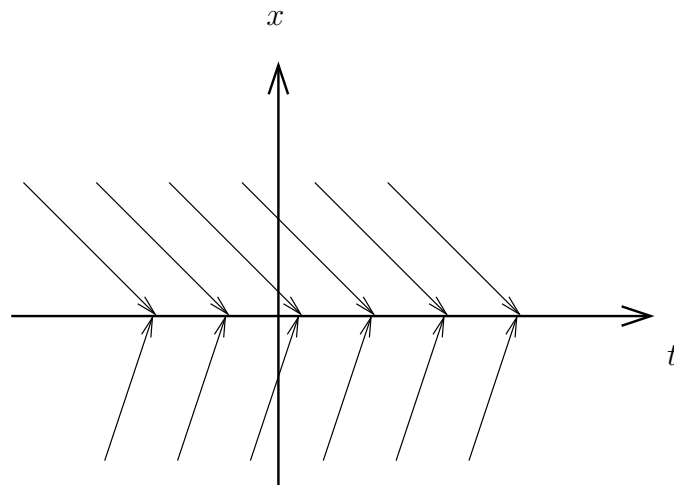


Figura 9: La recta $x = 0$ es solución de $\dot{x} = 2 - 3u$, $u = \text{sgn}(x)$

ciones diferenciales. Sin embargo, para fines prácticos se puede argumentar que la función signo, que introduce la discontinuidad, no puede implementarse con dispositivos reales, ya que, cualquier dispositivo real tiene un tiempo de reacción, un retardo o una zona de histéresis. Al tomar en cuenta estos efectos se pueden resolver muchos problemas sin tener que usar un nuevo concepto de solución de ecuaciones diferenciales. Hay algunos trabajos reportados que usan este enfoque (ver (Filippov, 1988) y las referencias citadas ahí). Sin embargo, abordar la situación tomando en cuenta los efectos prácticos no es eficiente, pues dichos efectos son muy variados y no se puede asegurar que las conclusiones obtenidas para una situación práctica determinada sean aplicables a otra. No obstante, una conclusión alcanzada a partir de los diversos enfoques con que se ha abordado el problema de la solución de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, es que la generalización del concepto de solución se puede y se debe hacer de varias maneras en función de los casos prácticos que se quiera incluir. Como consecuencia, existen definiciones distintas de solución para diferentes tipos

de sistemas y de discontinuidades. En (Filippov, 1988), se presentan varias definiciones de solución para este tipo de sistemas. La situación es más sencilla para sistemas de la forma (8). Muchas de las definiciones de solución que darían diferentes soluciones para sistemas en general, resultan en las mismas soluciones para sistemas afines en el control. La definición basada en el método de control equivalente es de especial interés en la tesis por la aplicación directa en el diseño y análisis de controladores. Esta definición se presenta a continuación.

Supongamos que $u(x, t)$ en (8) es discontinua en una superficie suave S caracterizada por $\sigma(x) = 0$, con $\sigma : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$. La superficie S separa (al menos en su vecindad) el espacio de estado en dos dominios, uno donde $u = u^+$ y otro donde $u = u^-$. Si en ambos dominios el campo vectorial se dirige hacia la superficie S (fig 10), entonces la trayectoria del sistema alcanza la superficie y no la puede abandonar. Cuando la trayectoria se mueve sobre la superficie S no está regida por $\dot{x} = f(x) + g(x)u^+$ ni por $\dot{x} = f(x) + g(x)u^-$; cuando esto sucede se dice que el sistema está en régimen deslizante o en modo deslizante. Es natural pensar entonces que a lo largo de la superficie la trayectoria está regida por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq} \quad (9)$$

donde u_{eq} es una función continua conocida como control equivalente y debe cumplir que $u^+ < u_{eq} < u^-$ o bien $u^- < u_{eq} < u^+$. Para mantener la trayectoria del sistema sobre la superficie, el control equivalente debe ser tal que el campo vectorial $f(x) + g(x)u_{eq}$ sea tangente a la superficie S (fig. 10). De aquí se puede plantear la definición: una solución de la ecuación (8) es una función continua que fuera de la superficie satisface (8) y sobre la superficie satisface (9).

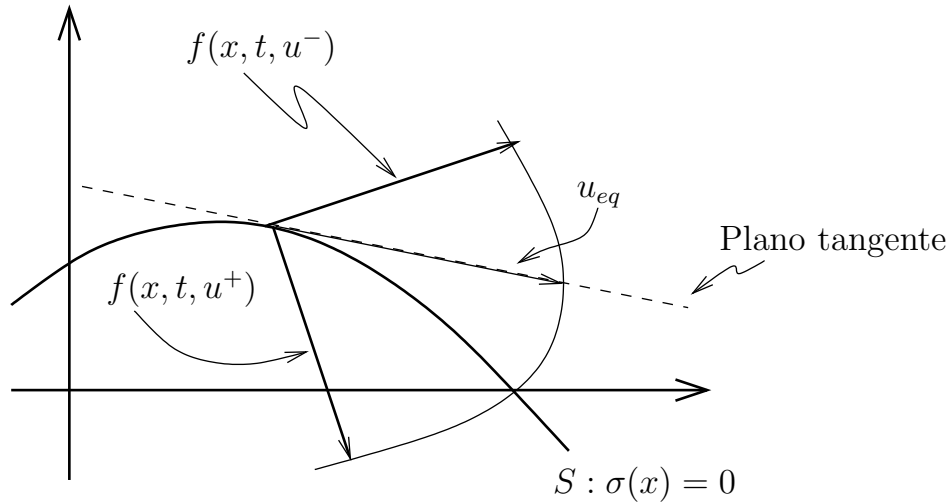


Figura 10: Modo deslizante en un sistema con lado derecho discontinuo.

El control equivalente u_{eq} se puede calcular como sigue. Si la trayectoria evoluciona sobre la superficie S , es decir, si $\sigma(x) = 0$, entonces

$$\dot{\sigma}(x) = L_f \sigma + (L_g \sigma)u = 0 \quad (10)$$

(ver el apéndice para una descripción de la notación $L_f \sigma$ y $L_g \sigma$). u_{eq} , es decir, la función u que satisface (10), resulta

$$u_{eq} = -\frac{L_f \sigma}{L_g \sigma} \quad (11)$$

La ecuación que rige el movimiento en el régimen deslizante se obtiene al sustituir (11) en (9).

Se ha presentado un procedimiento para obtener las ecuaciones que describen la trayectoria en el régimen deslizante; sin embargo, quedan las cuestiones de si en la práctica en realidad existe un movimiento así y si este movimiento está únicamente determinado por (9)-(11). La primera cuestión se responde con los numerosos casos prácticos que existen, entre

ellos el de los convertidores; más aún, el concepto de control equivalente fue sugerido por el análisis de estos casos. Estrictamente hablando, el movimiento sobre la superficie S no se puede dar, para ello la conmutación de u^+ a u^- debería ser instantánea, lo que es imposible en la práctica. Lo que sí se observa es que cuando la conmutación es rápida, la trayectoria evoluciona en una región cercana a S y tiende a S conforme la conmutación es más rápida. El teorema presentado a continuación proporciona una justificación teórica a lo observado y establece formalmente las ideas de los modos deslizantes para sistemas del tipo (8). En la presentación de este resultado es necesario diferenciar la descripción del sistema sobre la superficie deslizante de la descripción cerca de la superficie. Para ello denotaremos la solución de (9), momentáneamente como $x^*(t)$ e introducimos la siguiente ecuación que describe la evolución de las trayectorias del sistema cuando están cerca de la superficie S

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\hat{u}(x, t) \quad (12)$$

donde \hat{u} es una aproximación de u que hace que el sistema evolucione cerca de la superficie, en el conjunto donde $\|\sigma(x)\| < \Delta$ para algún Δ pequeño.

Teorema 3 (Utkin, 1991) *Si se cumple que:*

- a) *existe una solución del sistema (12) que en el intervalo $[0, T]$ está en la Δ -vecindad de la superficie S , esto es, que la desigualdad $\|\sigma\| \leq \Delta$ es válida;*
- b) *que $L_g\sigma \neq 0$ y el lado derecho de*

$$\dot{x}^* = f(x^*) + g(x^*)u_{eq}(x^*, t) \quad (13)$$

sea Lipschitz, donde u_{eq} está dado por (11);

c) que las derivadas parciales de $g/(\partial\sigma/\partial x)$ con respecto a cada uno de sus argumentos existan y estén acotadas en cualquier dominio acotado, y

d) que para el lado derecho de (12) existan dos constantes M y N tales que

$$\|f(x) + g(x)\hat{u}(x,t)\| \leq M + N\|x\|$$

Entonces para cualquier par de soluciones de (12) y (9), con condiciones iniciales tales que $\|x(0) - x^*(0)\| \leq P\Delta$ con P una constante positiva, existe una constante positiva H tal que

$$\|x(t) - x^*(t)\| \leq H\Delta \quad \text{para } t \in [0, T]$$

Demostración. Una prueba de este teorema que incluye el caso multivariable ($u \in \mathfrak{R}^m$) se puede encontrar en (Utkin, 1991) ■

Si un sistema tiene un modo deslizante, éste es creado por la conmutación instantánea de u entre u^+ y u^- . Como la conmutación instantánea no se puede dar en la práctica, un modo deslizante es una idealización. El control real \hat{u} que tarda cierto tiempo en conmutar entre u^+ y u^- es el que se aplica al sistema y de acuerdo al teorema 3, hace que el sistema evolucione cerca de la superficie. \hat{u} está relacionado con el control equivalente, como se muestra a continuación.

Tomando la derivada de σ con respecto a t a lo largo de la trayectoria del sistema se tiene

$$\dot{\sigma} = L_f\sigma + (L_g\sigma)\hat{u} \quad (14)$$

De (14) resulta

$$\hat{u} = -\frac{L_f\sigma}{L_g\sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{L_g\sigma} \quad (15)$$

combinando (11) y (15) se puede escribir

$$\hat{u} = u_{eq} + \frac{\dot{\sigma}}{L_g \sigma} \quad (16)$$

En sistemas de control en general, u^+ y u^- son funciones continuas que toman valores en los reales, en el caso de los convertidores estos valores son binarios pues denotan la posición de un interruptor. En particular, para los modelos presentados en la sección 3.2 toman los valores 1 ó 0. Los procedimientos y resultados que han sido presentados en esta sección pueden extenderse al caso multivariable, es decir, al caso en que $u \in \mathfrak{R}^m$. En este caso, en lugar de una se tienen m superficies de discontinuidad. El lector interesado puede consultar (Filippov, 1988; Utkin, 1991)

3.3. Modelos promedio

Es posible obtener modelos promedio a partir de los modelos discontinuos presentados anteriormente mediante un procedimiento formal. Sin embargo, en la práctica, los ingenieros obtienen generalmente los modelos mediante la aplicación heurística de conceptos derivados de la teoría de circuitos. Una vez obtenidos estos modelos promedio, el ingeniero puede diseñar controladores empleando ideas y conceptos de circuitos a los que está habituado, o bien linealizar el modelo obtenido y aplicar todas las técnicas conocidas para sistemas lineales diferenciables. En particular, las técnicas de control clásico largamente conocidas y estudiadas han sido aplicadas con éxito en el control de convertidores a partir de un modelos lineales obtenidos heurísticamente.

Existen varios procedimientos para la obtención heurística de modelos promedio. Aquí

sólo se presentará uno de ellos con el propósito de ilustrar el tipo de ideas empleadas. Para ello se utilizará como ejemplo el convertidor boost. Posteriormente, en esta misma sección se presenta un método formal para la obtención de modelos promedio a partir de los modelos discontinuos presentados anteriormente.

3.3.1. Obtención de modelos promedio mediante aproximación heurística

Cada convertidor de la figuras 4-7 tiene dos configuraciones. Como se mencionó en la sección 3.2, es fácil obtener un modelo para cada configuración. Si el interruptor conmuta rápidamente, cabe esperar que el sistema se pueda modelar promediando, en algún sentido, los modelos de ambas configuraciones. Un procedimiento para encontrar tal modelo promedio es encontrar el comportamiento promedio de cada elemento y cada variable del circuito.

Con referencia a las figuras 4-7, sea $u(t)$ la posición del interruptor en el instante t . A la función u se le conoce como *función de conmutación* y sólo adquiere valores en el conjunto $\{0, 1\}$. El tiempo T que transcurre entre dos conmutaciones sucesivas de 0 a 1 (o conmutaciones de 1 a 0) del interruptor se conoce como *periodo de conmutación*. La *frecuencia de conmutación* f está dada por $1/T$. El valor de T no es necesariamente constante; sin embargo, dado que las armónicas de los voltajes y corrientes del circuito son múltiplos de T , es deseable que T sea constante. A menos que se especifique lo contrario, en este trabajo se considera que T es constante. El valor promedio de la función u en un periodo de conmutación se conoce como *porcentaje del ciclo de trabajo* del interruptor, o simplemente, *ciclo de trabajo*

y se denota por d . Frecuentemente, para simplificar la notación es conveniente introducir el complemento del ciclo de trabajo: $d' = 1 - d$. La figura 11 muestra la relación entre la función de conmutación u , el intervalo de conmutación T y el ciclo de trabajo d .

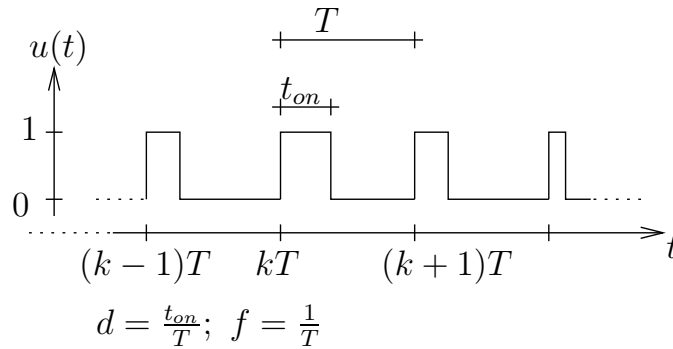


Figura 11: Función de conmutación y valor promedio (ciclo de trabajo).

El promedio de una variable del circuito en un periodo de conmutación está dado por:

$$\bar{z}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(\tau) d\tau \quad (17)$$

En el caso especial de que $z(t)$ sea periódica de periodo T , $\bar{z}(t)$ es constante. Éste es el caso que se presenta en el estado estacionario de los convertidores cd-cd. Dado que la función de promediación (17) es lineal, entonces las leyes de Kirchhoff, que también son lineales, se pueden aplicar al promedio de las variables, de la misma forma que se aplican a los valores instantáneos. Por la misma justificación, las relaciones entre voltaje promedio y corriente promedio en cada elemento lineal e invariante en el tiempo (LIT) del circuito tienen la misma forma que para valores instantáneos. Por ejemplo, la relación corriente-voltaje en un inductor está dada por $v(t) = L di(t)/dt$; si aplicamos (17) para encontrar la relación entre las variables promedio, resulta:

$$\bar{v}(t) = L \frac{d}{dt} \bar{i}(t)$$

Es posible entonces construir un circuito promedio reemplazando todas las variables instantáneas por sus valores promedio, dejando los elementos LIT sin cambio. El interruptor es el único elemento no lineal en los convertidores, por lo que se debe sustituir por otros elementos. Éste se puede caracterizar en términos de las relaciones que impone a las variables promedio del circuito.

Si en el convertidor boost (fig. 5) se toma el interruptor y los elementos a los que está conectado directamente, se obtiene el subcircuito de la figura 12. Para obtener un modelo promedio de este subcircuito, es conveniente (y necesario) hacer las siguientes suposiciones:

- a) El rizo es pequeño. Es decir, el voltaje $v_C(t)$ y la corriente $i_L(t)$ están cercanos a su valor promedio para todo t .
- b) La variación del promedio es lenta. Es decir \tilde{v}_C y \tilde{i}_L no cambian de manera brusca entre dos periodos de conmutación consecutivos.

De la figura 12 se observa que $i_b = (1 - u(t))i_a$. Tomando el promedio, se tiene entonces que $\tilde{i}_b = \text{prom}((1 - u)i_a)$, donde prom es la función promedio. Por las suposiciones anteriores se puede considerar que i_a es casi constante en un intervalo de conmutación, así

$$\tilde{i}_b = \text{prom}((1 - u)i_a) \approx (1 - \tilde{u}(t))\tilde{i}_a = (1 - d(t))\tilde{i}_L(t) \quad (18)$$

Similarmente, se puede considerar que v_{bc} es aproximadamente constante en el intervalo T , resultando

$$\tilde{v}_{ac}(t) = \text{prom}((1 - u)v_{bc}) \approx (1 - \tilde{u}(t))\tilde{v}_{bc} = (1 - d(t))\tilde{v}_C \quad (19)$$

Las expresiones (18) y (19) describen el comportamiento promedio del interruptor en el conjunto de la figura 12, (un elemento de tres terminales se determina con dos ecuaciones).

Dos representaciones con circuitos de las ecuaciones (18) y (19) se muestran en 13. Sustituyendo cualquiera de los circuitos de la figura 13 en el circuito del convertidor boost (fig. 5) se obtiene una representación promedio en circuitos del convertidor boost. A partir de esta representación es fácil encontrar las siguientes expresiones para el modelo promedio del convertidor

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= \frac{v_{in}}{L} - \frac{(1-d)\bar{z}_2}{L} \\ \dot{\bar{z}}_2 &= -\frac{\bar{z}_2}{RC} + \frac{(1-d)\bar{z}_1}{C} \end{aligned}$$

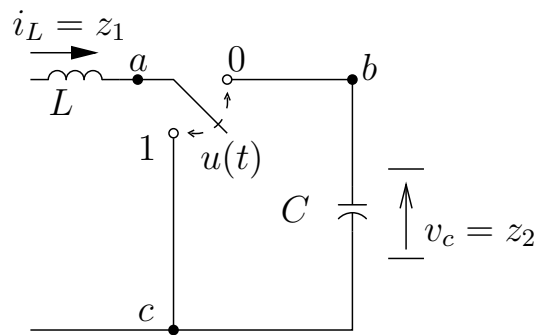


Figura 12: Parte no lineal en el convertidor boost.

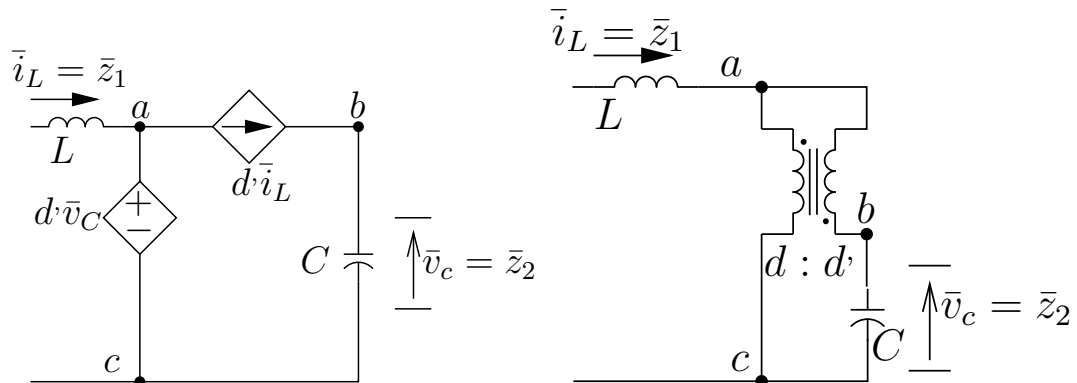


Figura 13: Representación en circuitos del comportamiento promedio del subcircuito de la fig. 12.

Siguiendo un procedimiento similar, se pueden obtener los modelos promedio y representaciones en circuitos de tales modelos para los convertidores buck, buck-boost y Ćuk.

3.3.2. Obtención formal de modelos promedio a partir de modelos discontinuos

Se puede plantear el problema de la obtención de un modelo promedio como la búsqueda de ecuaciones diferenciales cuya solución esté cercana a la solución del modelo discontinuo (en el sentido definido en la sección 3.2.2). En lazo abierto, es decir, si u sólo depende del tiempo, se pueden aplicar fácilmente técnicas de promediación como las presentadas en (Khalil, 2001). La idea detrás de estas técnicas es que si u cambia rápidamente, el sistema filtra las altas frecuencias presentes en u , por lo que su efecto se puede despreciar. Así, la solución se puede aproximar por la solución de un sistema construido tomando en cuenta el promedio de u . Es decir, si u cambia muy rápidamente, la solución de $\dot{x} = f(x) + g(x)u(t)$ se puede aproximar por la solución de $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) + g(\bar{x})\bar{u}(t)$. Este resultado, que es muy conocido en sistemas lineales, se puede extrapolar para algunos sistemas no lineales (Khalil, 2001).

Si u depende del estado, aunque la situación es un poco más complicada, también hay resultados de promediación. En este caso, para obtener un modelo promedio se puede emplear un resultado presentado en (Utkin, 1991) a propósito de buscar una interpretación física del concepto de control equivalente (sección 3.2.2). Dicho resultado se presenta a continuación.

Sea \hat{u} el control real aplicado al sistema. Para obtener el promedio \bar{u} de \hat{u} , se puede hacer

pasar \hat{u} por un filtro lineal pasabajos. Esto es

$$\delta \dot{\tilde{u}} + \tilde{u} = \hat{u} \quad (20)$$

donde δ es una constante positiva. De (16) se tiene

$$\delta \dot{\tilde{u}} + \tilde{u} = u_{eq} + \frac{\dot{\sigma}}{L_g \sigma} \quad (21)$$

El siguiente lema es útil para establecer una relación entre \tilde{u} y u_{eq}

Lema 4 *Sea la ecuación diferencial*

$$\eta \dot{z} + z = h(t) + H(t) \dot{\sigma}$$

donde z , h , H , y σ son funciones y $\eta > 0$ es una constante. Si:

a) las funciones $h(t)$ y $H(t)$ y sus derivadas de primer orden están acotadas por un cierto número M , y

b) $\|\sigma\| \leq \Delta$,

entonces para cualquier par de números positivos Δt y ε existe un $\delta(\varepsilon, \Delta t, z(0))$ tal que

$$\|z(t) - h(t)\| \leq \varepsilon, \text{ con } 0 < \eta \leq \delta, \Delta/\eta \leq \delta \text{ y } t \geq \Delta t$$

Demostración. Ver (Utkin, 1991) para una demostración de este resultado. ■

Supongamos que las condiciones del teorema 3 (página 32) se satisfacen. Entonces en cualquier intervalo finito $[0, T_1]$, la solución $x(t)$ difiere de la solución $x^*(t)$ del caso ideal (ecuación (13)) a lo más por un valor Δ y existe una constante Lipschitz para el lado derecho de (13), por lo tanto, $x(t)$ está acotada. De aquí se sigue que u_{eq} y $1/L_g \sigma$ junto con sus

primeras derivadas, están acotadas. Por lo tanto, el lema 4 puede ser aplicado a (21) con $t \in [0, T_1]$. Se concluye que dentro del intervalo $[0, T_1]$, \tilde{u} tiende a u_{eq} . Esto es que para cualesquier $\Delta t < T_1$ y ε se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < \eta \leq \delta$ y $\Delta/\eta < \delta$ se cumple que $\|\tilde{u} - u_{eq}\| \leq \varepsilon$ para $\Delta t \leq t \leq T_1$.

Resumiendo, de (9) y de la aplicación del lema 4 a la ecuación 21 se tiene que, cuando el sistema está en el régimen deslizando, su solución puede ser aproximada por

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x})\tilde{u} \quad (22)$$

De la definición de ciclo de trabajo presentado en la sección 3.3.1 se tiene que $\tilde{u}(t) = d(t)$, por lo tanto, se tiene que en el régimen deslizando

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x})d \quad (23)$$

Si se considera la saturación de d , es decir, si

$$d = \begin{cases} 0 & \text{para } u_{eq} < 0 \\ u_{eq} & \text{para } 0 < u_{eq} < 1 \\ 1 & \text{para } u_{eq} > 1 \end{cases} \quad (24)$$

entonces la ecuación (23) también describe de forma aproximada la solución del sistema fuera de la superficie deslizando.

Aplicando el argumento anterior, la obtención de modelos promedio para los convertidores es directa a partir de los modelos discontinuos (3)-(6), sustituyendo u por d .

- Modelo promedio del convertidor buck

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \frac{-\tilde{z}_2}{L} + \frac{v_{in}}{L}d \quad (25a)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = \frac{\tilde{z}_1}{C} - \frac{\tilde{z}_2}{RC} \quad (25b)$$

- Modelo promedio del convertidor boost

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \frac{v_{in}}{L} - \frac{\tilde{z}_2}{L}(1-d) \quad (26a)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = -\frac{\tilde{z}_2}{RC} + \frac{\tilde{z}_1}{C}(1-d) \quad (26b)$$

- Modelo promedio del convertidor buck-boost

$$\dot{\tilde{z}}_1 = -\frac{v_{in}}{L}(d) - \frac{\tilde{z}_2}{L}(1-d) \quad (27a)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = -\frac{\tilde{z}_2}{RC} + \frac{\tilde{z}_1}{C}(1-d) \quad (27b)$$

- Modelo promedio del convertidor Ćuk

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \frac{v_{in}}{L_1} - \frac{\tilde{z}_2}{L_1}(1-d) \quad (28a)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = \frac{\tilde{z}_1}{C_1}(1-d) + \frac{\tilde{z}_3}{C_1}d \quad (28b)$$

$$\dot{\tilde{z}}_3 = -\frac{\tilde{z}_2}{L_2}d - \frac{\tilde{z}_4}{L_2} \quad (28c)$$

$$\dot{\tilde{z}}_4 = \frac{\tilde{z}_3}{C_2} - \frac{\tilde{z}_4}{RC_2} \quad (28d)$$

3.3.3. Implementación de controladores diseñados en base al modelo promedio

Los modelos promedio permiten la aplicación de técnicas de control para sistemas diferenciables. Generalmente, estas técnicas dan como resultado un control también diferenciable.

ble. Sin embargo, el elemento de control de los convertidores es la conmutación adecuada de un interruptor. Así es necesario transformar la señal diferenciable del controlador en pulsos para cambiar la posición del interruptor. Una de las formas más comunes de realizar tal transformación es empleando un modulador por ancho de pulso (bloque PWM). El bloque PWM genera pulsos de frecuencia constante cuyo ancho es una función lineal del voltaje de entrada. La salida de un bloque PWM está dada por

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } t_k < t < t_k + t_{on} \\ 0 & \text{si } t_k + t_{on} < t < t_{k+1} \end{cases}, \quad t_{on} = \text{máx}(0, \text{mín}(\frac{T}{a_s}d(k), T)) \quad t_{k+1} - t_k = T \quad (29)$$

con a_s constante. Aplicando (17) se obtiene que el valor promedio de u está dado por

$$\tilde{u} = \text{máx}(0, \text{mín}(d/a_s, 1)) \quad (30)$$

La figura 14 muestra la forma básica de implementar el PWM. El circuito real debe generar la señal diente de sierra e impedir que la salida cambie de estados más de una vez dentro de un solo periodo. Para fines de análisis se puede considerar que $a_s = 1$, entonces

$$\tilde{u} = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0 \\ d & \text{si } 0 < d < 1 \\ 1 & \text{si } d > 1 \end{cases} \quad (31)$$

Además del PWM existen otros métodos para transformar la señal de un controlador promedio en señales adecuadas para conmutar el interruptor como la reportada en (Veerachary *et al.*, 2001)

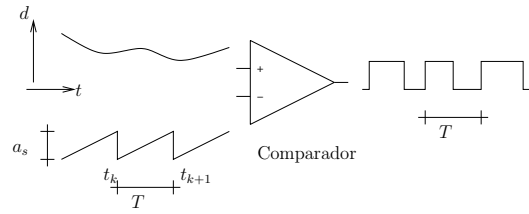


Figura 14: Esquema simplificado de un modulador por amplitud de pulso (PWM).

3.4. Modelos normalizados

El análisis y el diseño de controladores para los convertidores de alta frecuencia de conmutación se puede simplificar reduciendo el número de parámetros en el modelo mediante un proceso de normalización. Aunque la normalización se usa ampliamente en el análisis de circuitos, la mayoría de los trabajos reportados sobre el diseño de controladores emplea modelos sin normalizar. A continuación, se presenta el proceso de normalización, tomando al convertidor boost como ejemplo.

Aplicando la transformación de coordenadas

$$\xi_1 = \frac{1}{v_{in}\sqrt{C/L}}z_1 \quad (32a)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{v_{in}}z_2 \quad (32b)$$

al modelo del convertidor boost expresado por (4), se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{LC}\dot{\xi}_1 &= 1 - (1-u)\xi_2 \\ \sqrt{LC}\dot{\xi}_2 &= -\frac{\xi_2}{R\sqrt{C/L}} + (1-u)\xi_1 \end{aligned}$$

Haciendo un escalamiento de t

$$x_i(\tau) = \xi_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (33)$$

con τ dado por

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad (34)$$

se obtiene el siguiente modelo normalizado para el convertidor boost

$$\dot{x}_1 = 1 - (1 - u)x_2 \quad (35a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + (1 - u)x_1 \quad (35b)$$

donde

$$R_n = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (36)$$

Al término R_n usualmente se le conoce como el factor de calidad del circuito, y está relacionado con el amortiguamiento de la respuesta del circuito a una entrada escalón. Es importante hacer notar que el “tiempo” en (35) es τ . Así \dot{x}_i , denota la derivada de x_i , $i = 1, 2$ con respecto a τ .

Las transformaciones (32) y (33) empleadas para obtener (35) a partir de (4), se pueden escribir en una sola como

$$x_1(\tau) = \frac{1}{v_{in}\sqrt{C/L}}z_1(t) \quad (37a)$$

$$x_2(\tau) = \frac{1}{v_{in}}z_2(t) \quad (37b)$$

Aplicando la transformación (37) al modelo del convertidor buck, dado por (3), se obtiene

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u \quad (38a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + x_1 \quad (38b)$$

De la misma manera, al aplicar (37) a (5) se obtiene un modelo normalizado para el convertidor buck-boost

$$\dot{x}_1 = u - (1 - u)x_2 \quad (39a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + (1 - u)x_1 \quad (39b)$$

Nótese que los modelos normalizados (35), (38) y (39) pueden obtenerse fácilmente haciendo $v_{in} = L = C = 1$ y $R = R_n$ en los modelos originales. En este sentido el único parámetro que aparece en los modelos normalizados, R_n , puede verse como una carga normalizada.

El proceso para normalizar el convertidor Cúk es similar; de hecho, sería el mismo si $L_1 = L_2$ y $C_1 = C_2$, pero ello no siempre ocurre en la práctica. Aplicando la transformación

$$x_1(\tau) = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{z_1(t)}{v_{in}} \quad (40a)$$

$$x_2(\tau) = \frac{z_2(t)}{v_{in}} \quad (40b)$$

$$x_3(\tau) = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{z_3(t)}{v_{in}} \quad (40c)$$

$$x_4(\tau) = \frac{z_4(t)}{v_{in}} \quad (40d)$$

donde

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

se obtiene el siguiente modelo normalizado para el convertidor Ćuk.

$$\dot{x}_1 = 1 - (1 - u)x_2 \quad (41a)$$

$$\dot{x}_2 = (1 - u)x_1 + ux_3 \quad (41b)$$

$$\dot{x}_3 = -\eta_L(x_4 + ux_2) \quad (41c)$$

$$\dot{x}_4 = \eta_C \left(x_3 - \frac{x_4}{R_n} \right) \quad (41d)$$

con

$$R_n = R \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}, \quad \eta_L = \frac{L_1}{L_2}, \quad \eta_C = \frac{C_1}{C_2} \quad (42)$$

Note que el símbolo R_n en (42) y en (36) no es exactamente igual; sin embargo, se ha usado el mismo símbolo porque no causa confusión.

El proceso para obtener modelos normalizados a partir de los modelos promedio es completamente igual al seguido para normalizar los modelos discontinuos. Para referencia posterior se presentan a continuación los modelos promedio normalizados de los distintos convertidores.

- Modelo promedio normalizado del convertidor buck

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 + u \quad (43a)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\tilde{x}_2}{R_n} + \tilde{x}_1 \quad (43b)$$

- Modelo promedio normalizado del convertidor boost

$$\dot{\tilde{x}}_1 = 1 - (1 - u)\tilde{x}_2 \quad (44a)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\tilde{x}_2}{R_n} + (1 - u)\tilde{x}_1 \quad (44b)$$

- Modelo promedio normalizado del convertidor buck-boost

$$\dot{\tilde{x}}_1 = u - (1 - u)\tilde{x}_2 \quad (45a)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\tilde{x}_2}{R_n} + (1 - u)\tilde{x}_1 \quad (45b)$$

- Modelo promedio normalizado del convertidor Ćuk

$$\dot{\tilde{x}}_1 = 1 - (1 - u)\tilde{x}_2 \quad (46a)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = (1 - u)\tilde{x}_1 + u\tilde{x}_3 \quad (46b)$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = -\eta_L(\tilde{x}_4 + u\tilde{x}_2) \quad (46c)$$

$$\dot{\tilde{x}}_4 = \eta_C \left(\tilde{x}_3 - \frac{\tilde{x}_4}{R_n} \right) \quad (46d)$$

3.5. Otros tipos de modelos

En esta sección se mencionan algunos otros modelos que no fueron empleados en la obtención de los resultados de esta tesis, pero que son bastante usados en la obtención de controladores.

3.5.1. Modelos lineales

Linealizando los modelos (26), (27) y (28) se obtienen modelos de la forma $\dot{e} = Ae + bD$ donde $e = [\tilde{x}_1 - \bar{x}_1, \tilde{x}_2 - \bar{x}_2]$, para los convertidores boost y buck-boost y $e = [\tilde{x}_1 - \bar{x}_1, \tilde{x}_2 - \bar{x}_2, \tilde{x}_3 - \bar{x}_3, \tilde{x}_4 - \bar{x}_4]$ para el convertidor Ćuk. La entrada D se define por $D = d - \bar{d}$; donde \bar{d} es la entrada (ciclo de trabajo) constante que establece el punto de equilibrio en $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

en los convertidores boost y buck-boost y en $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{x}_3, \bar{x}_4$) para el convertidor Ćuk. Las matrices A y b están dadas por:

- Convertidor boost

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-\bar{d}}{L} \\ \frac{1-\bar{d}}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} \frac{v_{in}}{(1-\bar{d})L} \\ -\frac{v_{in}}{(1-\bar{d})^2 RC} \end{bmatrix} \quad (47)$$

- Convertidor buck-boost

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-\bar{d}}{L} \\ \frac{1-\bar{d}}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} -\frac{v_{in}}{(1-\bar{d})L} \\ \frac{\bar{d}v_{in}}{(1-\bar{d})^2 RC} \end{bmatrix} \quad (48)$$

- Convertidor Ćuk

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-\bar{d}}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1-\bar{d}}{C_1} & 0 & \frac{\bar{d}}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{d}}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} \frac{v_{in}}{(1-\bar{d})L_1} \\ -\frac{\bar{d}v_{in}}{(1-\bar{d})^2 RC_1} \\ -\frac{v_{in}}{(1-\bar{d})L_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

El gran número de técnicas que existen para sistemas lineales, y la relativa facilidad con que muchas de ellas se pueden aplicar e implementar, hace que los modelos lineales sean extensamente usados en la práctica. Por otra parte, la robustez intrínseca de los convertidores hace que los controladores lineales sean estables para un amplio rango de valores de carga y que en muchas aplicaciones el desempeño sea aceptable, particularmente en la conversión CD-CD. Sin embargo, debido a que los modelos lineales son válidos sólo alrededor de un punto de equilibrio, su uso en el problema de generación de voltajes variables (conversión CD-CA) es bastante restringido.

3.5.2. Modelos discretos

A partir de los modelos lineales obtenidos arriba se pueden obtener, mediante discretización exacta, modelos discretos (lineales) de los convertidores básicos. La naturaleza de este procedimiento implica que, además de los parámetros v_{in} , L y C , que de hecho se suponen conocidos, deben conocerse también la frecuencia de conmutación y los valores nominales de voltaje deseado en la salida y la carga R . La discretización exacta de los sistemas lineales es un procedimiento estándar en la bibliografía del control, programada inclusive en los paquetes de software numérico más conocidos. (ver (Chen, 1998)).

Los modelos discretos han recibido muy poca atención en la bibliografía. Una de las razones es que el periodo de muestreo en un controlador digital debe ser del orden del periodo de conmutación, que en general es de 20kHz-200kHz. Para lograr una frecuencia de muestreo de esta magnitud se establece un compromiso entre lo complejo que puede ser el controlador y la potencia de cálculo que debe tener el procesador. Prácticamente, cualquier algoritmo de control más complejo que una retroalimentación lineal del estado hace necesario un procesador con gran capacidad de cálculo, con el consecuente incremento en costo. Dicho costo del sistema de control sólo se justifica en aplicaciones de gran potencia. Sin embargo, es muy probable que en un futuro se incremente la capacidad de cálculo y se abarate el costo de los procesadores a un nivel tal que se puedan implementar algoritmos digitales complejos.

3.5.3. Modelos Euler-Lagrange

Es conocido que los circuitos eléctricos, sin acoplamientos magnéticos entre sus mallas, se pueden modelar mediante la forma general

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F} \quad (50)$$

derivada directamente de las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). En (50), $q \in \mathfrak{R}^n$ representa el vector de cargas eléctricas y constituyen las llamadas coordenadas generalizadas, que describen el estado del circuito. La derivada \dot{q} es el vector de corrientes que fluyen por el circuito. La función $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$ es la energía magnética y $\mathcal{V}(q)$ es la energía almacenada en forma de campo eléctrico del circuito. \mathcal{D} es la función de disipación de Rayleigh del sistema. El vector $\mathcal{F} \in \mathfrak{R}^n$ representa las fuentes de voltaje asociadas con las coordenadas generalizadas del circuito. Para ser consistente con la notación estándar empleada en los sistemas EL, en el caso de los convertidores, la corriente z_1 en el inductor se reescribe como la derivada de la carga que circula en el mismo; mientras que el voltaje en el capacitor z_2 se escribe como q_C/C , donde q_C es la carga almacenada en el capacitor. De esta manera, q_L y q_C son las coordenadas generalizadas.

De (50) se tiene que un modelo EL se puede especificar completamente mediante la cuadrupla ordenada

$$\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F}) \quad (51)$$

El proceso general para obtener el modelo EL de un convertidor es obtener primero el modelo EL para cada posición del interruptor y después combinar los dos modelos resultantes en uno que en cierto sentido sea el promedio de los dos. A continuación, se presentan las expresio-

nes de los cuatro parámetros EL para cada uno de los convertidores básicos. Una discusión amplia de los modelos EL de los convertidores, así como los detalles de la obtención de los parámetros, se pueden ver en (Escobar, 1999)

- Parámetros EL para el convertidor buck

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}L\dot{\tilde{q}}_L^2; \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2C}\tilde{q}_C^2; \quad (52)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}R(\dot{\tilde{q}}_L - \dot{\tilde{q}}_C)^2; \quad \mathcal{F} = \left(dv_{in}, 0 \right)^T \quad (53)$$

- Parámetros EL para el convertidor boost

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}L\dot{\tilde{q}}_L^2; \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2C}\tilde{q}_C^2; \quad (54)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}R(\dot{\tilde{q}}_C - (1-d)\dot{\tilde{q}}_L)^2; \quad \mathcal{F} = (v_{in}, 0)^T \quad (55)$$

- Parámetros EL para el convertidor buck-boost

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}L\dot{\tilde{q}}_L^2; \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2C}\tilde{q}_C^2; \quad (56)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}R((1-d)\dot{\tilde{q}}_L - \dot{\tilde{q}}_C)^2; \quad \mathcal{F} = \left(dv_{in}, 0 \right)^T \quad (57)$$

- Parámetros EL para el convertidor Ćuk

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}L_1\dot{\tilde{q}}_{L_1}^2 + \frac{1}{2}L_3\dot{\tilde{q}}_{L_3}^2; \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2C_2}((1-d)\tilde{q}_{L_1} + d\tilde{q}_{L_3})^2 + \frac{1}{2C_4}\tilde{q}_{C_4}^2; \quad (58)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}R(\dot{\tilde{q}}_{L_3} - \dot{\tilde{q}}_{C_4})^2; \quad \mathcal{F} = \left(v_{in}, 0, 0, 0 \right)^T \quad (59)$$

Los modelos EL de los convertidores han sido usados en la obtención de controladores basados en el concepto de pasividad, particularmente empleando la técnica llamada *moldeo*

de energía e inyección de amortiguamiento (Ortega *et al.*, 1994; Ortega *et al.*, 1998) Los modelos EL de los convertidores son modelos promedio; de hecho, si se simplifica un modelo EL de un determinado convertidor, se obtiene su modelo promedio. Sin embargo, las ventajas de un modelo EL es que permite identificar cierta estructura y obtener interpretaciones físicas. Por ejemplo, permite conocer los parámetros que cambian con la conmutación del interruptor y darle una interpretación física. Por otra parte, la aplicación de la técnica de *moldeo de energía e inyección de amortiguamiento*, es directa una vez que se cuenta con un modelo EL.

3.6. Objetivo de control

El objetivo de control planteado en el capítulo 1 como la generación de voltajes variables puede establecerse ahora para el convertidor boost de la manera siguiente.

Dado el modelo (4), diseñar una política de conmutación u tal que

$$|\tilde{z}_2 - z_{2d}| \leq \Delta \quad (60)$$

se cumpla para $t > t_0$, para algún t_0 . Note que aunque el modelo es discontinuo, el objetivo de control se expresa en términos de variables promedio.

Para el modelo promedio el objetivo de control se expresa como: dado el modelo (26) diseñar un control $d(t)$ tal que

$$|\tilde{z}_2 - z_{2d}| \leq \Delta, \quad d(t) \in [0, 1] \quad (61)$$

para $t > t_0$. A veces es conveniente introducir explícitamente la restricción $z_{2d}(t) > 0$. El caso particular $z_{2d} = a + b \sin(\omega t)$ se considera en los ejemplos de esta tesis. El objetivo de

control se plantea de manera muy similar para los demás convertidores y para los modelos normalizados.

Otras propiedades que no se pueden establecer formalmente pero que es conveniente que tenga el controlador son: a) un tiempo de respuesta rápido, esto es que el tiempo t_0 sea pequeño; b) un sobretiro pequeño c) una implementación sencilla, de preferencia con componentes estándar (amplificadores operacionales, componentes pasivos e interruptores); d) que no necesite de la medición de la corriente.

3.7. Conclusiones

En este capítulo se han obtenido distintos tipos de modelos para los convertidores básicos que serán empleados más adelante. Los modelos discontinuos son empleados en el diseño y análisis de los controladores por modos deslizantes, así como en la mayoría de las simulaciones presentadas a lo largo de la tesis. Los modelos promedio se usan en la obtención de algunas leyes de control mientras que los modelos normalizados se usan principalmente en el análisis para aprovechar el número reducido de parámetros. También fueron presentados los modelos lineales y Euler-Lagrange. Estos modelos no se emplean en esta tesis para la obtención de controladores, sin embargo, su uso es muy común.

Fueron presentados también desarrollos que relacionan el control equivalente de un controlador por modos deslizantes y el control promedio de un controlador PWM. Dicho resultado se emplea en el capítulo 5 para la obtención de controladores por modos deslizantes a partir de controladores promedio.

La obtención de modelos discontinuos a partir de combinar los modelos obtenidos para cada posición del interruptor sólo requiere de la aplicación directa de las leyes de Kirchhoff y se puede considerar como un procedimiento estándar. La obtención de modelos promedio por aproximación heurística ha recibido mucha atención en la bibliografía de electrónica de potencia, al grado de que existen ya distintos procedimientos bien establecidos como el presentado en este capítulo tomado de (Kassakian *et al.*, 1991). Los argumentos empleados para obtener modelos promedio a partir de modelos discontinuos son comunes en la teoría de sistemas discontinuos (Tsytkin, 1964; Utkin, 1991), pero se aplican aquí por primera vez a los convertidores básicos. Es conocida la interpretación física del control equivalente como control promedio (Utkin, 1991), pero el uso de esta relación para obtener controladores discontinuos a partir de controladores promedio no se ha reportado.

Una vez establecidos los modelos es sencillo plantear formalmente el objetivo de generar voltajes variables en la carga del convertidor. Sin embargo, los convertidores tienen ciertas características dinámicas que dificultan el logro de este objetivo; además de que las restricciones que suponen otras características deseables del controlador como la sencillez de la implementación, la rapidez de respuesta y la no medición de la corriente. Con base en los modelos desarrollados, en el capítulo siguiente se examinan las características dinámicas de los convertidores con el fin de caracterizar los voltajes que los convertidores pueden generar, mientras que los dos últimos capítulos abordan el problema de control.

Capítulo 4

Análisis de los convertidores de potencia de alta frecuencia de conmutación

4.1. Introducción

En este capítulo se analizan varios aspectos de los convertidores electrónicos. En primer lugar, se presentan algunas propiedades ya conocidas de los convertidores. Así, se examinan los puntos de equilibrio, la ganancia en voltaje, el modelado como sistemas Euler-Lagrange, las propiedades de pasividad y linealización por retroalimentación del estado. Estas propiedades han sido examinadas previamente en distintas referencias (Sira-Ramírez, 1987; Sira-Ramírez y Ilic-Spong, 1989; Sira-Ramírez y Ortega, 1995; Sira-Ramírez, 1999). Aquí se presentan como el punto de partida del material presentado en el resto del capítulo y son la base de algunos controladores mencionados en el siguiente capítulo.

En la sección 4.3 se examina cómo es la corriente en el inductor cuando el voltaje de salida

es una función conocida, o puesto de otra manera: ¿cómo debe ser la corriente para que a la salida se obtenga un voltaje deseado? El desarrollo presentado en este capítulo para responder esta cuestión establece un límite en la rapidez de cambio del voltaje que un convertidor puede generar. Por otra parte, el conocimiento de la forma de onda de la corriente en el inductor es necesario para los métodos de control indirecto que se presentan en el siguiente capítulo, pues una de las dificultades de dichos métodos es que requieren de una referencia para la corriente en el inductor. Por último, conocer la forma de onda de la corriente en el inductor puede ayudar a diseñar mejor los inductores.

Tradicionalmente, el diseño o selección de parámetros de los convertidores se hace a partir de expresiones desarrolladas en forma heurística (Erickson y Maksimovic, 2001; Kasakian *et al.*, 1991). Dichas expresiones determinan los valores mínimos de la inductancia y capacitancia necesarios para mantener el rizo bajo un determinado valor especificado como condición de diseño. En la sección 4.4 se obtienen estas mismas expresiones empleando herramientas formales. Tales herramientas, muy comunes para los especialistas en control, son básicamente la aproximación lineal de la solución de ecuaciones diferenciales y la aproximación en base a despreciar términos muy pequeños en comparación a otros. En la misma sección se muestra que mientras las especificaciones de rizados máximos determinan valores mínimos de los parámetros L y C , la rapidez de cambio del voltaje deseado restringe el valor máximo que los mismos parámetros pueden tener. Puesto de otra manera, los valores de los parámetros limitan el tipo de voltajes que se pueden generar mediante un convertidor dado. Estas limitaciones son independientes del controlador.

Como se muestra en la sección 4.4 hay un compromiso entre el buen desempeño de un

convertidor como generador de voltajes y el rizo en el voltaje de salida. Las expresiones obtenidas en dicha sección permiten conocer si determinadas especificaciones de diseño pueden ser cumplidas o no. Estas expresiones constituyen una herramienta útil para el diseño de convertidores, lo cual se ilustra mediante un ejemplo realista en la sección 4.4.4.

En algunas secciones de este capítulo, los métodos se desarrollan exclusivamente para el convertidor boost, pero los procedimientos pueden aplicarse al resto de los convertidores básicos. Parte de los resultados contenidos en las secciones 4.3 y 4.4, han sido reportados en (Alvarez *et al.*, 2000; Cortes *et al.*, 2001; Cortes *et al.*, 2004).

4.2. Propiedades de los convertidores de alta frecuencia de conmutación

En esta sección se presentan las propiedades más importantes de los convertidores electrónicos. Estas propiedades son bastante conocidas pero aparecen dispersas en varias referencias (Sira-Ramírez, 1987; Sira-Ramírez y Ilic-Spong, 1989; Sira-Ramírez y Ortega, 1995; Sira-Ramírez, 1999). Aquí se presentan de forma unificada para referencia posterior. Los conceptos de esta sección se definen normalmente para sistemas diferenciables; de hecho, algunos de ellos sólo pueden definirse para este tipo de sistemas. Por ello, a lo largo de esta sección se utilizan los modelos promedio de los convertidores.

4.2.1. Puntos de equilibrio y ganancia en voltaje

Se dice que un convertidor opera en lazo abierto cuando el ciclo de trabajo d no depende del estado del sistema. Cuando $d = \bar{d}$, con \bar{d} constante, existe un punto de equilibrio en el convertidor. A partir del punto de equilibrio se puede calcular la ganancia en voltaje definida como $g = \bar{v}_o/v_{in}$, donde \bar{v}_o es el voltaje de salida (en estado estacionario). La ganancia en voltaje es una de las características más distintivas de cada convertidor. A continuación, se calcula el punto de equilibrio y la ganancia en voltaje de los convertidores básicos.

- Convertidor buck

Del modelo del convertidor buck (25) se tiene que, cuando $d = \bar{d}$, con \bar{d} constante, éste tiene un solo punto de equilibrio (\bar{z}_1, \bar{z}_2) dado por

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \left(\frac{v_{in}}{R} \bar{d}, v_{in} \bar{d} \right) \quad (62)$$

En el caso del convertidor buck, $\bar{v}_o = \bar{z}_2$, la ganancia del convertidor puede obtenerse de (62) y resulta

$$\frac{\bar{v}_o}{v_{in}} = \bar{d}$$

Dado que $0 < \bar{d} < 1$, entonces $\bar{v}_o < v_{in}$, por lo que el convertidor buck sólo puede proporcionar (en estado estacionario) voltajes de menor amplitud que el voltaje de la fuente de entrada, de ahí el nombre de convertidor reductor o convertidor “buck”.

Es interesante calcular la relación entre la corriente consumida por la carga y la corriente demandada a la fuente. De la figura (4) se puede establecer que el promedio de la

corriente demandada a la fuente es

$$i_{in} = \bar{z}_1 \bar{d} = \frac{v_{in}}{R} \bar{d}^2 \quad (63)$$

Por otra parte, la corriente de salida está dada por

$$i_o = \bar{z}_2 / R = v_{in} \bar{d} / R \quad (64)$$

Así, se tiene que en estado estacionario, para el convertidor buck,

$$\frac{i_o}{i_{in}} = \frac{1}{\bar{d}} \quad (65)$$

Esto es, la ganancia en corriente es el inverso de la ganancia en voltaje. Lo mismo ocurre con el resto de los convertidores. Esto no es raro, pues en el caso del convertidor ideal la energía suministrada por la fuente sólo se consume en la carga. Por lo tanto, un convertidor que reduce el voltaje eleva la corriente y viceversa.

■ Convertidor boost

Del modelo (26) se observa que cuando $d = \bar{d}$ se tiene un equilibrio dado por

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \left(\frac{v_{in}}{R \bar{d}^2}, \frac{v_{in}}{\bar{d}'} \right) \quad (66)$$

De (66) se obtiene que la ganancia de voltaje del convertidor boost es

$$\frac{\bar{v}_o}{v_{in}} = \frac{1}{\bar{d}'}$$

por lo que $\bar{v}_o > v_{in}$; es decir, el convertidor boost sólo puede proporcionar (en estado estacionario) voltajes mayores que el voltaje de la fuente de alimentación.

- Convertidor buck-boost

Del modelo (27) se obtiene que el punto de equilibrio, cuando $d = \bar{d}$, es

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \left(-\frac{v_{in}\bar{d}}{R\bar{d}'^2}, -v_{in}\frac{\bar{d}}{\bar{d}'} \right) \quad (67)$$

De (67) se puede calcular la ganancia en voltaje del convertidor buck-boost, resultando

$$\frac{\bar{v}_o}{v_{in}} = -\frac{\bar{d}}{\bar{d}'} \quad (68)$$

Se puede concluir que el convertidor buck-boost puede proporcionar voltajes mayores y menores que los de la fuente de alimentación. Esta propiedad es lo que da nombre al convertidor. Note también (ecuación (68)), que a diferencia de los convertidores buck y boost, en el convertidor buck-boost la polaridad del voltaje de salida es de signo contrario al de la fuente de alimentación.

- Convertidor Ćuk

Del modelo del convertidor Ćuk dado por (28) el punto de equilibrio, cuando $d = \bar{d}$, resulta

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4) = \left(\frac{v_{in}\bar{d}^2}{R\bar{d}'^2}, \frac{v_{in}}{\bar{d}'}, -\frac{v_{in}\bar{d}}{R\bar{d}'}, -\frac{v_{in}\bar{d}}{\bar{d}'} \right)$$

de donde se puede encontrar que la ganancia en voltaje del convertidor Ćuk es

$$\frac{\bar{v}_o}{v_{in}} = -\frac{\bar{d}}{\bar{d}'}$$

El cuadro I resume los puntos de equilibrio y las ganancias de voltaje para cada uno de los convertidores.

Tabla I: Punto de equilibrio y ganancia en voltaje de los convertidores básicos.

Convertidor	Punto de equilibrio	Ganancia en voltaje
Buck	$\left(\frac{v_{in}\bar{d}}{R}, v_{in}\bar{d}\right)$	\bar{d}
Boost	$\left(\frac{v_{in}}{R\bar{d}^2}, \frac{v_{in}}{\bar{d}'}\right)$	$\frac{1}{\bar{d}}$
Buck-boost	$\left(-\frac{v_{in}\bar{d}}{R\bar{d}'^2}, -v_{in}\frac{\bar{d}}{\bar{d}'}\right)$	$-\frac{\bar{d}}{\bar{d}'}$
Ćuk	$\left(\frac{v_{in}\bar{d}^2}{R\bar{d}'^2}, \frac{v_{in}}{\bar{d}'}, -\frac{v_{in}\bar{d}}{R\bar{d}'}, -\frac{v_{in}\bar{d}}{\bar{d}'}\right)$	$-\frac{\bar{d}}{\bar{d}'}$

4.2.2. Estabilidad de la dinámica cero

La estabilidad de la dinámica cero es una característica importante en el control de sistemas dinámicos. Los algoritmos de control para sistemas con dinámica cero estable no se pueden aplicar, en general, a sistemas con dinámica cero inestable o sistemas de fase no mínima, como comúnmente se les llama. Se sabe (Grizzle *et al.*, 1994; Isidori, 1997) que en un sistema de fase no mínima no es posible el seguimiento exacto de una trayectoria, pues si la salida se hace idénticamente igual a una función deseada, la dinámica interna se hace inestable. En la sección A.1.4 del apéndice se presenta una definición de la dinámica cero. Para una discusión más amplia de este concepto el lector puede consultar (Isidori, 1997; Nijmeijer y Schaft", 1996).

Es conocido que, con excepción del circuito buck, los convertidores básicos son de fase no mínima cuando se toma como salida el voltaje del capacitor. Esto se muestra a continuación analizando la dinámica cero que resulta al tomar como salida el error entre el voltaje que interesa regular y un valor constante. Se usan modelos normalizados para simplificar la

notación.

- Convertidor buck

El modelo promedio (43) del convertidor buck es de fase mínima cuando la salida es $y(t) = \tilde{x}_2 - \bar{x}_2 d$, pues en este caso el grado relativo es 2 y el sistema no tiene dinámica cero.

- Convertidores boost y buck-boost

Proposición 5 *Los modelos (44) y (45) de los convertidores boost y buck-boost, respectivamente, son de fase no mínima cuando la salida es $y(t) = \tilde{x}_2 - \bar{x}_2$, con \bar{x}_2 constante.*

Demostración. Considérese primero el caso del modelo (44) del convertidor boost. La condición inicial y el control necesario para hacer $y(t) = 0$ en este modelo son $\tilde{x}_2(0) = \bar{x}_2$ y $d = 1 - \frac{\bar{x}_2}{R_n \tilde{x}_1}$, respectivamente. Con tales control y condición inicial, la dinámica cero del sistema (44) resulta

$$\dot{\tilde{x}}_1 = 1 - \frac{\bar{x}_2^2}{R_n \tilde{x}_1} \quad (69)$$

Tomando la aproximación lineal de (69) alrededor del punto de equilibrio $\bar{x}_1 = \bar{x}_2^2/R_n$, se tiene

$$\dot{\tilde{x}}_1 \approx \frac{R_n}{\bar{x}_2^2} (\tilde{x}_1 - \bar{x}_2^2/R_n) \quad (70)$$

cuyo polo $\lambda = R_n/\bar{x}_2^2$ es inestable y, por lo tanto, el modelo (44) del convertidor boost es de fase no mínima.

Para el caso del modelo (45) del convertidor buck-boost, el control que hace la salida idénticamente cero es el mismo que para el convertidor boost. En este caso, la dinámica cero

resulta

$$\dot{\tilde{x}}_1 = 1 - \frac{\bar{x}_2(1 + \bar{x}_2)}{R_n} \frac{1}{\tilde{x}_1} \quad (71)$$

tomando la aproximación lineal de (71) alrededor del punto de equilibrio $x_1 = (\bar{x}_2(1 + \bar{x}_2))/R_n$

se tiene la aproximación

$$\dot{\tilde{x}}_1 \approx \frac{R_n}{\bar{x}_2(1 + \bar{x}_2)} \left(\tilde{x}_1 - \frac{\bar{x}_2(1 + \bar{x}_2)}{R_n} \right) \quad (72)$$

de donde se sigue que el único punto de (71) es inestable, y por tanto, el convertidor buck-boost es de fase no mínima. ■

Proposición 6 *El modelo (46) del convertidor Ćuk es de fase no mínima si la salida es $y(t) = \tilde{x}_4 - \bar{x}_4$, con \bar{x}_4 constante.*

Demostración.

De (46), la condición inicial $\tilde{x}_3(0) = \frac{\bar{x}_4}{R_n}$ y el control $d = -\frac{\bar{x}_4}{\bar{x}_2}$ son necesarios para hacer $y(t) = 0$. Sustituyendo dicha condición inicial y control en (46) resulta la dinámica cero

$$\dot{\tilde{x}}_1 = 1 - \bar{x}_4 - \tilde{x}_2 \quad (73a)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 - \frac{\bar{x}_4^2}{R_n \tilde{x}_2} + \frac{\bar{x}_4 \tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} \quad (73b)$$

cuyo punto de equilibrio es $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\bar{x}_4^2/R_n, 1 - \bar{x}_4)$. El sistema lineal que se obtiene al linealizar (73) alrededor del punto de equilibrio tiene como matriz

$$A_{cuk} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{1 - \bar{x}_4} & \frac{\bar{x}_4^2}{R_n(1 - \bar{x}_4)} \end{pmatrix} \quad (74)$$

cuyos valores propios están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\bar{x}_4^2 \pm \sqrt{\bar{x}_4^4 + 4R_n^2(\bar{x}_4 - 1)}}{2R_n(\bar{x}_4 - 1)} \quad (75)$$

De (75) se tiene que la matriz A_{cuk} tiene al menos un valor propio con parte real positiva. Por lo tanto, el punto de equilibrio de la dinámica cero es inestable. ■

4.2.3. Linealización entrada salida

La teoría del control geométrico establece condiciones bajo las cuales es posible diseñar un controlador que haga que en lazo cerrado el mapeo entrada salida sea lineal. Para sistemas de una entrada–una salida tales condiciones son simples de aplicar. Si bien se sabe que muchas veces no es recomendable imponer una dinámica lineal a un sistema no lineal, la manera sistemática de diseño hace que el control por linealización del estado se tome como referencia contra el cual comparar otros controladores no lineales. En esta subsección se muestra que, con excepción del convertidor $\hat{C}uk$, los convertidores básicos son linealizables por retroalimentación del estado. Note que en el caso del convertidor buck no es necesario realizar ningún análisis, ya que éste es lineal en lazo abierto. A lo largo de esta sección se utilizan resultados básicos del control geométrico resumidos en la parte A.1 del apéndice. La mayor parte del material presentado aquí se basa en las referencias (Isidori, 1997; Nijmeijer y Schaft", 1996).

Proposición 7 *Los modelos (44) y (45) de los convertidores boost, y buck-boost son linealizables por retroalimentación del estado.*

Demostración. Cada uno de los convertidores puede escribirse de la forma $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x})d$, con $f(\tilde{x})$ y $g(\tilde{x})$ dados por:

a) para el convertidor boost

$$f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1 - \frac{\tilde{x}_2}{R_n} \end{pmatrix}, \quad g(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ -\tilde{x}_1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

b) para el convertidor buck-boost

$$f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} -\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1 - \frac{\tilde{x}_2}{R_n} \end{pmatrix}, \quad g(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} (1 + \tilde{x}_2) \\ -\tilde{x}_1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

De acuerdo al teorema 31 y la observación 32 del apéndice, para que un sistema de dos estados sea linealizable por retroalimentación del estado basta con que la matriz $(g(\tilde{x}), [f(\tilde{x}), g(\tilde{x})])$ sea de rango 2. Para el convertidor boost resulta

$$(g(\tilde{x}), [f(\tilde{x}), g(\tilde{x})]) = \begin{pmatrix} -\tilde{x}_2 & \frac{\tilde{x}_2}{R_n} \\ \tilde{x}_1 & 1 + \frac{\tilde{x}_1}{R_n} \end{pmatrix} \quad (78)$$

cuyo determinante es

$$-\left(1 + 2\frac{\tilde{x}_1}{R_n}\right)\tilde{x}_2 \quad (79)$$

De donde se sigue que la matriz (78) tiene rango 2 si $\tilde{x}_1 \neq -\frac{R_n}{2}$, $\tilde{x}_2 \neq 0$, lo cual siempre sucede en la práctica, ya que, usualmente $\tilde{x}_2, \tilde{x}_1 > 0$.

En el caso del convertidor buck-boost se tiene

$$(g(\tilde{x}), [f(\tilde{x}), g(\tilde{x})]) = \begin{pmatrix} 1 + \tilde{x}_2 & -\frac{\tilde{x}_2}{R_n} \\ -\tilde{x}_1 & -\left(1 + \frac{\tilde{x}_1}{R_n}\right) \end{pmatrix} \quad (80)$$

cuyo determinante está dado por

$$- \left[(1 + \tilde{x}_2) \left(1 + \frac{\tilde{x}_1}{R_n} \right) \frac{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{R_n} \right] \quad (81)$$

de donde se sigue que el convertidor buck-boost es linealizable por retroalimentación de estado si $\tilde{x}_1 \neq -\frac{1+\tilde{x}_2 R_n}{1+2\tilde{x}_2}$. ■

Observación 8 *Note que si se toma como salida $y_{buk} = x_2$ en el modelo (43) del convertidor buck, ésta tiene grado relativo 2. Ésta es otra forma de establecer que dicho convertidor es linealizable por retroalimentación del estado. De forma similar, si se toma $y_{bb} = (1/2)(x_1^2 + x_2^2)$ y $y = (1/2)(x_1^2 + x_2^2)$ como salida en los modelos (44) y (45) respectivamente, se tiene que los convertidores boost y buck-boost tienen grado relativo 2 con estas salidas.*

Proposición 9 *El modelo (46) del convertidor Ćuk no es linealizable por retroalimentación del estado.*

Demostración. El modelo (46) puede ponerse de la forma $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x})u$ con

$$f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1 \\ -\eta_L \tilde{x}_4 \\ \eta_C \left(\tilde{x}_3 - \frac{\tilde{x}_4}{R_n} \right) \end{pmatrix}, \quad g(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 \\ -\eta_L \tilde{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

La matriz $\Delta_{cuk} = (g, ad_f g(x), ad_f^2 g(x))$ resulta:

$$\Delta_{cuk} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 & -1 - 2\eta_L \tilde{x}_4 \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 & -1 - \eta_L \tilde{x}_4 & -\tilde{x}_3 - \eta_C \eta_L (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_4/R_n) \\ -\eta_L \tilde{x}_2 & -\eta_L \tilde{x}_1 & -\eta_L (1 - \tilde{x}_2) + \eta_C \eta_L^2 \tilde{x}_2 \\ 0 & \eta_C \eta_L \tilde{x}_2 & \frac{\eta_C^2 \eta_L \tilde{x}_2}{R_n} + 2\eta_C \eta_L \tilde{x}_1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

El vector

$$[g, ad_f g(x)] = \begin{pmatrix} 1 - \eta_L (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_4) \\ \eta_L \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 \\ -\eta_L (1 + \tilde{x}_2 + \eta_L \tilde{x}_4) \\ -\eta_C \eta_L (-\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3) \end{pmatrix} \quad (84)$$

es linealmente independiente para todo $\tilde{x}_0 \neq 0$ de los vectores que forman la matriz Δ_{cuk} , esto es la distribución $D = span\{g, ad_f g(x), ad_f^2 g(x)\}$ no es involutiva. De aquí se sigue que el convertidor Ćuk no es linealizabile por retroalimentación del estado. ■

4.2.4. Pasividad

La pasividad es una propiedad estructural importante de algunos sistemas dinámicos. Estrechamente relacionada con el concepto de estabilidad absoluta, la pasividad se puede ver como una generalización del concepto de margen de fase, muy conocido en la teoría de sistemas lineales (ver, por ejemplo (Sepulchre *et al.*, 1997)). Debido a la inherente estabilidad de los sistemas pasivos, uno de los paradigmas de diseño de algoritmos de control es buscar que el controlador haga pasivo un sistema o bien mantenga la pasividad de uno que ya lo es. Este último enfoque ha sido aplicado de diversas maneras en varios trabajos (Angulo-Nuñez

y Sira-Ramirez, 1998; Escobar y Sira-Ramirez, 1998; Ortega *et al.*, 1998; Sira-Ramírez y Ortega, 1995; Vázquez *et al.*, 2002b), particularmente por especialistas de control.

En el apéndice se presenta una definición formal de pasividad. Ahí también se reseña la propiedad de pasividad que tienen los sistemas modelados por las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). De la propiedad de pasividad de los sistemas EL y los modelos presentados en la sección 3.5.3 se puede concluir que los convertidores básicos son pasivos. Esto se plantea formalmente en la siguiente proposición.

Proposición 10 *Los modelos (25)-(28) de los cuatro convertidores básicos definen un operador pasivo desde la fuente de alimentación hasta la corriente en el inductor de entrada (\tilde{z}_1). Esto es, existe una función $S(\tilde{z})$ semidefinida positiva con $S(0) = 0$ tal que*

$$S(\tilde{z}(T)) - S(\tilde{z}(0)) \leq \int_0^T v_{in} \tilde{z}_1 dt \quad (85)$$

o bien, en caso de que $S(\tilde{z})$ sea diferenciable

$$\dot{S}(\tilde{z}) \leq v_{in} \tilde{z}_1 \quad (86)$$

Demostración. Este hecho se sigue directamente de que los convertidores pueden ser modelados mediante ecuaciones de EL (ver sección 3.5.3) y del teorema 36 del apéndice. ■

La pasividad de los convertidores básicos también se puede establecer sin recurrir al formalismo de los modelos EL. Por ejemplo, considerando el modelo (25), la pasividad de $v_{in} \mapsto \tilde{z}_1$ se puede demostrar empleando la función de almacenamiento

$$S(\tilde{z}) = \frac{L}{2} \tilde{z}_1^2 + \frac{C}{2} \tilde{z}_2^2 \quad (87)$$

En efecto, derivando $S(\tilde{z})$ a lo largo de las trayectorias del sistema (25), se tiene

$$\dot{S}(\tilde{z}) = dv_{in}\tilde{z}_1 - \frac{\tilde{z}_2^2}{R_n} \leq v_{in}\tilde{z}_1 \quad (88)$$

es decir, el convertidor buck es pasivo desde la fuente v_{in} hasta la corriente \tilde{z}_1

Tomando la misma función de almacenamiento (87) se tiene que la derivada de $S(\tilde{z})$ a lo largo de las trayectorias del sistema (26) resulta

$$\dot{S}(\tilde{z}) = v_{in}\tilde{z}_1 - \frac{\tilde{z}_2^2}{R_n} \leq v_{in}\tilde{z}_1 \quad (89)$$

con lo que se demuestra que el convertidor boost es pasivo.

La función de almacenamiento (87) también sirve para demostrar la pasividad del convertidor buck-boost. En este caso la derivada de $S(\tilde{z})$ a lo largo del sistema (27) resulta

$$\dot{S}(\tilde{z}) = -dv_{in}\tilde{z}_1 - \frac{\tilde{z}_2^2}{R_n} \leq v_{in}\tilde{z}_1$$

es decir el convertidor buck-boost es pasivo.

Para el convertidor Ćuk se puede emplear la función de almacenamiento

$$S(\tilde{z}) = \frac{L_1}{2}\tilde{z}_1^2 + \frac{C_1}{2}\tilde{z}_2^2 + \frac{L_2}{2}\tilde{z}_3^2 + \frac{C_2}{2}\tilde{z}_4^2 \quad (90)$$

cuya derivada a lo largo del sistema (28) resulta

$$\dot{S}(\tilde{z}) = v_{in}\tilde{z}_1 - \frac{\tilde{z}_4^2}{R_n} \leq v_{in}\tilde{z}_1 \quad (91)$$

4.3. Forma de onda de la corriente en el inductor

En esta sección se investiga cómo es la corriente en estado estacionario. Conocer las características de la corriente es importante porque:

- Permite un mejor diseño del inductor.
- En la implementación de los llamados métodos de control indirecto (ver capítulo 5) se debe conocer la corriente en el inductor necesaria para obtener un voltaje determinado a la salida.
- El conocimiento de la corriente en el inductor es útil para determinar los voltajes que se pueden generar mediante un convertidor determinado.

En el caso de la conversión cd-cd, la corriente promedio del inductor (o de los inductores en el caso del Ćuk) en estado estacionario se puede conocer fácilmente a partir del punto de equilibrio. Por ejemplo, para el convertidor boost en la sección 4.2.1 se observó que cuando el ciclo de trabajo es constante se tiene un punto de equilibrio dado por

$$\bar{z}_1 = \frac{v_{in}}{\bar{d}'^2 R}, \quad \bar{z}_2 = \frac{v_{in}}{\bar{d}'} \quad (92)$$

Eliminando \bar{d}' de (92) se tiene que (si el sistema es estable) cuando $z_2 \rightarrow \frac{v_{in}}{d'}$, entonces

$$\bar{z}_1 \rightarrow \frac{\bar{z}_2^2 d}{R v_{in}} \quad (93)$$

Se ha empleado \bar{z}_1, \bar{z}_2 en lugar de \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 para hacer énfasis en que se trata de estados estacionarios que son puntos de equilibrio.

En el caso de la conversión cd-ca la situación es menos sencilla, ya que, el estado estacionario no es un punto de equilibrio. En esta sección se investiga cuál es la forma de onda de la corriente promedio cuando la salida es un voltaje variable. Se toma al convertidor boost como ejemplo; sin embargo, los métodos empleados aquí se pueden aplicar a los demás convertidores. Más precisamente, dado el modelo promedio del convertidor boost (26), reescrito

a continuación

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \frac{v_{in}}{L} - \frac{\tilde{z}_2}{L}d' \quad (94a)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = -\frac{\tilde{z}_2}{RC} + \frac{\tilde{z}_1}{C}d' \quad (94b)$$

se investiga cuales son las características del estado estacionario de \tilde{z}_1 que se denotará como z_{1d} , cuando $\tilde{z}_2 \rightarrow z_{2d}(t)$.

Haciendo $\tilde{z}_2 = z_{2d}(t)$ en (94) y eliminando d' se llega a que z_{1d} y z_{2d} están relacionadas por

$$L\dot{z}_{1d} = -\left(C\dot{z}_{2d} + \frac{z_{2d}}{R}\right)\frac{z_{2d}}{z_{1d}} + v_{in} \quad (95)$$

de aquí que cuando $\tilde{z}_2 \rightarrow z_{2d}$ entonces $\tilde{z}_1 \rightarrow z_{1d}$ con z_{1d} solución de (95). Si el sistema es estable, entonces z_{1d} es una solución acotada de (95). Desafortunadamente, no es posible encontrar una solución explícita para (95) (Zinober *et al.*, 1998; Fossas-Colet y Olm-Miras, 2002), por lo que es necesario investigar las características de su solución por otros medios.

En (Zinober *et al.*, 1998) se emplea el método del balance armónico. La aplicación de este método supone que existe una solución acotada para (95). En (Sira-Ramírez, 1999), con base en la propiedad de planitud, se propone un método iterativo para encontrar una solución aproximada. Esta aproximación es mejor con cada iteración. Ambos métodos dan como primera aproximación de la solución la expresión

$$z_{1d}(t) \approx \frac{z_{2d}^2(t)}{Rv_{in}} \quad (96)$$

Note que el procedimiento seguido para obtener (95), es el mismo que se sigue para obtener la dinámica cero cuando la salida es $y = \tilde{z}_2 - z_{2d}$. Como se mostró en la sección 4.2,

el convertidor boost es de fase no mínima, esto implica que la mayoría de las soluciones de (95) no están acotadas. Los siguientes resultados muestran que cuando z_{2d} es periódica, entonces (95) tiene una solución acotada única; además proporcionan información sobre las características de z_{1d} . La idea es que si existe una solución acotada, ésta se puede encontrar “invirtiendo el tiempo”, es decir, reemplazando t por $-t$. De esta manera (95) se vuelve

$$L\dot{z}_{1d} = -C\frac{z_{2d}}{z_{1d}}\dot{z}_{2d} + \frac{z_{2d}^2}{Rz_{1d}} - v_{in} \quad (97)$$

Proposición 11 *Considere la función f definida como*

$$f(t) = \frac{z_{2d}(t)}{v_{in}} \left(-C\dot{z}_{2d}(t) + \frac{z_{2d}(t)}{R} \right) \quad (98)$$

donde z_{2d} es una función diferenciable. Si $f(t) \in [m, M] \forall t$ con m y M constantes positivas, entonces (97) tiene una solución acotada estable cuyo dominio de atracción está dado por $z_{1d}(0) > 0$.

Demostración. La ecuación diferencial (97) se puede escribir como

$$\frac{L}{v_{in}}\dot{z}_{1d}(t) = -1 + \frac{f(t)}{z_{1d}(t)} \quad (99)$$

Dado que f es siempre positiva, la parte negativa de la línea real es invariante. De hecho, en este caso las soluciones son no acotadas. Suponga que $0 < z_{1d}(t_0) < m$ para algún $t_0 \geq 0$. En este caso, $-1 + f(t_0)/z_{1d}(t_0) > 0$, así $\dot{z}_{1d} > 0$ y $z_{1d}(t)$ se incrementa, al menos hasta que alcanza el valor m . Por otra parte, si $z_{1d}(t_0) > M$, entonces $\dot{z}_{1d}(t_0) < 0$ y $z_{1d}(t)$ disminuye al menos hasta que alcanza el valor de M . Así, cualquier trayectoria que se inicia en $z_{1d}(0) \geq 0$ eventualmente entra en el intervalo $[m, M]$. ■

Proposición 12 *Defínase f como en (98). Además, suponga que f es periódica. Entonces, la ecuación diferencial (97) tiene una solución periódica, única, acotada y asintóticamente estable para z_{1d} , cuyo dominio de atracción son los reales positivos.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 11, cualquier trayectoria que se inicia en $z_{1d}(0) \geq 0$ eventualmente entra en el intervalo $[m, M]$. Por otra parte, por la periodicidad de f , la ecuación (99) tiene al menos una solución periódica. Además cualquier trayectoria del sistema tiende a una de estas trayectorias periódicas (Hale y Kocak, 1996). Se puede probar que sólo hay una solución periódica suponiendo, sin pérdida de generalidad, que el periodo de f es 1. Sea $\varphi(t, 0, z_{1d}^0)$ una solución periódica de (97). Entonces la derivada del mapeo de Poincaré (ver (Hale y Kocak, 1996)) de (99), evaluada en $\varphi(t, 0, z_{1d}^0)$, está dado por

$$\Pi'(z_{1d}^0) = \exp \left[\int_0^1 \frac{v_{in}}{L} \frac{\partial}{\partial z_{1d}} \left(-1 + \frac{f(t)}{z_{1d}} \right) \Big|_{z_{1d}=\varphi(t,0,z_{1d}^0)} dt \right],$$

esto es,

$$\Pi'(z_{1d}^0) = \exp \left[-\frac{v_{in}}{L} \int_0^1 \frac{f(t)}{[\varphi(t, 0, z_{1d}^0)]^2} dt \right] < 1,$$

así $\varphi(t, 0, z_{1d}^0)$ es la única solución periódica, asintóticamente estable de (99) (ver (Hale y Kocak, 1996)). ■

Las proposiciones 11 y 12 muestran que, en caso de que exista la corriente necesaria en el inductor para obtener un voltaje determinado a la salida, dicha corriente es única. Dicha corriente se puede visualizar simulando la dinámica (97). En la figura 15 se muestra dicha dinámica para un convertidor boost con los parámetros dados en la tabla II. La misma figura muestra la aproximación dada por (96). Esta solución numérica sólo difiere de la solución exacta debido a los pequeños errores de cálculo que hay en toda simulación numérica. Por

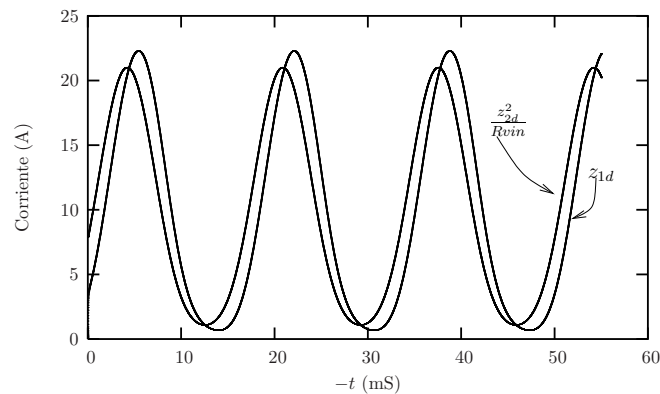


Figura 15: Forma de onda de la corriente cuando el voltaje es senoidal.

el contrario, las soluciones obtenidas en (Zinober *et al.*, 1998; Sira-Ramírez, 1999) difieren de la solución exacta debido a la naturaleza del método empleado. En el método de Fourier empleado en (Zinober *et al.*, 1998), la exactitud depende del número de términos de la serie, mientras que para el método iterativo propuesto en (Sira-Ramírez, 1999), la exactitud depende del número de iteraciones. Note que la condición $f(t) \in [m, M]$ con $m, M > 0$ de la proposición 11 impone una restricción en el tipo de voltajes que se pueden generar. Esta condición es empleada más adelante para determinar valores aceptables de los parámetros.

4.4. Selección de parámetros en los convertidores

Una de las características más deseables de los convertidores es tener una respuesta rápida. Se sabe que esta rapidez de respuesta de los convertidores en lazo cerrado está fuertemente ligada a los parámetros del convertidor (Cunha y Pagano, 2002; Escobar *et al.*, 1999b). En general, entre menores son los valores de la carga, el capacitor y el inductor, más rápida es la respuesta del convertidor. Sin embargo, esto se contrapone con el hecho de que estos mismos

parámetros deben ser lo suficientemente grandes para mantener el rizo pequeño. En el caso de la conversión cd-ca los valores de los parámetros pueden determinar si un determinado voltaje puede ser generado con un error aceptable o no. Por lo anterior, es importante desarrollar expresiones para la selección adecuada de los parámetros de los convertidores. Además es conveniente conocer si el compromiso que existe entre rapidez de respuesta y rizo pequeño se puede lograr para una condición de diseño determinada. En esta sección se abordan estos aspectos.

Usualmente el rizo máximo de un convertidor se da como una condición de diseño. Por ello, en el punto 4.4.1 se obtienen los valores mínimos de los parámetros necesarios para obtener un rizo máximo determinado. Por otra parte, empleando un controlador indirecto ‘ideal’ en el punto 4.4.3 se analiza la relación entre la rapidez de cambio del voltaje deseado y los valores máximos de los parámetros.

4.4.1. Valores mínimos de los parámetros

En la obtención de los modelos promedio presentados en el capítulo 3, se supuso que la conmutación es lo suficientemente rápida y que los valores de los inductores y capacitores son lo suficientemente grandes para mantener el rizo pequeño. Sin embargo, para poder elegir los valores adecuados de los parámetros de un determinado convertidor, es necesario precisar el enunciado “suficientemente grandes”. Empleando herramientas comunes en teoría de control, en esta subsección se obtienen expresiones sencillas de aplicar para elegir adecuadamente los parámetros de los convertidores básicos. Es interesante observar que estas expresiones son las mismas que se han obtenido de manera heurística en distintas referencias (Erickson y

Maksimovic, 2001; Kassakian *et al.*, 1991). Además, el enfoque utilizado aquí no sólo es formal, sino que además establece con precisión bajo qué condiciones las expresiones son válidas.

4.4.2. Valores mínimos de L y C para el convertidor boost

Como se mostró en la sección 4.2.1, el modelo promedio del convertidor boost tiene un punto de equilibrio estable cuando el ciclo de trabajo es constante, dado por

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \left(\frac{v_{in}}{R\bar{d}^2}, \frac{v_{in}}{\bar{d}'} \right)$$

Note que, salvo cuando $d = 0$ ó $d = 1$, la posición del interruptor está cambiando permanentemente. De acuerdo con el modelo discontinuo (4), las trayectorias instantáneas cambian con cada conmutación del interruptor. La figura 16 muestra (de forma ampliada) la corriente y el voltaje típicos en estado estacionario del convertidor boost. Aunque la corriente y el voltaje estén cambiando siempre, el valor promedio de ambas variables es constante pues el sistema (promedio) está en un punto de equilibrio. Para precisar qué tan alta debe ser la frecuencia de conmutación y qué tan grandes deben ser los parámetros L y C para que las desviaciones de la corriente y voltaje sean pequeñas (respecto de su valor promedio), a continuación se examina lo que sucede en un periodo de conmutación cuando el convertidor se encuentra en estado estacionario.

Supóngase (ver figura 16) que un periodo de conmutación inicia en t_0 con $u = 1$. En $t_1 = t_0 + \bar{d}T$ el interruptor cambia de 1 a 0 y permanece en 0 hasta el inicio de otro periodo de conmutación en $t_2 = t_0 + T$. Considérese la siguiente notación. $(z_1(t_0), z_2(t_0)) = (z_{10}, z_{20})$

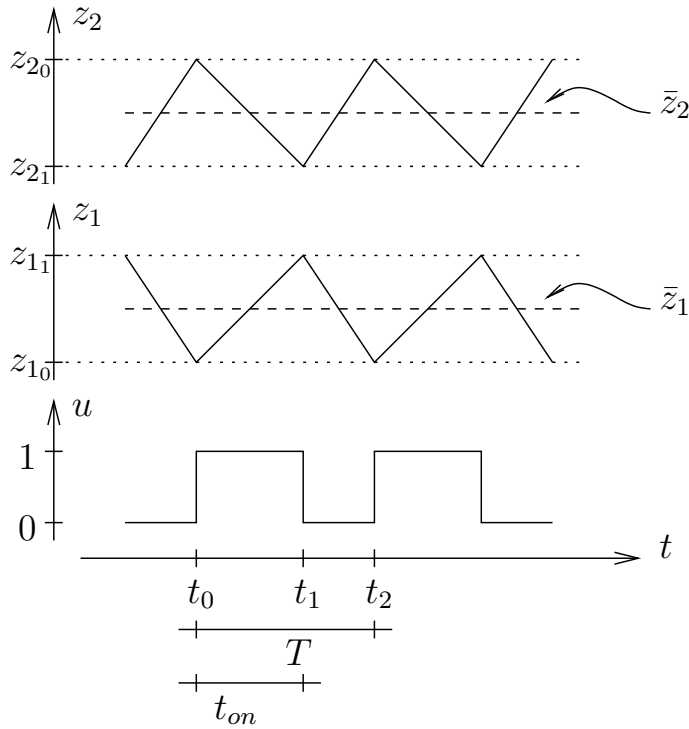


Figura 16: Formas de corriente y voltaje en estado estacionario del convertidor boost.

y $(z_1(t_1), z_2(t_1)) = (z_{11}, z_{21})$. Dado que el convertidor se encuentra en estado estacionario, se tiene que $(z_1(t_2), z_2(t_2)) = (z_{10}, z_{20})$. El rizo en la corriente se define como $\Delta z_1 = |z_{11} - z_{10}|$. De la misma manera, el rizo en el voltaje se define como $\Delta z_2 = |z_{21} - z_{20}|$. Note que las variaciones de la corriente y voltaje son las mismas en el intervalo $[t_0, t_1]$ que en el intervalo $[t_1, t_2]$. Por ello, para calcular Δz_1 y Δz_2 se pueden integrar la ecuaciones del convertidor en cualquiera de los dos intervalos. Del modelo (4) se observa que es más sencillo integrar las ecuaciones en el intervalo $[t_0, t_1]$, ya que en este intervalo $u = 1$ y las ecuaciones son más simples. En virtud de que el modelo (4) es invariante en el tiempo, se puede considerar que $t_0 = 0$ para simplificar la notación.

Del modelo (4), cuando $u = 1$, las ecuaciones que rigen el comportamiento del convertidor

boost son

$$\dot{z}_1 = \frac{v_{in}}{L} \quad (100a)$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{z_2}{RC} \quad (100b)$$

Para el cálculo de rizo en la corriente z_1 , de (100a) se tiene que

$$z_1(t) = \frac{v_{in}}{L}t + z_{10}$$

así

$$z_{1_1} = z_1(dT) = \frac{v_{in}}{L}dT + z_{10}$$

de donde el rizo en la corriente está dado por

$$\Delta z_1 = |z_{1_1} - z_{10}| = \frac{v_{in}}{L}dT \quad (101)$$

Para el caso del voltaje, de (100b) resulta

$$z_2(t) = z_{20} \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \quad (102)$$

Con el fin de obtener una expresión sencilla, conveniente para el diseño, se puede tomar la aproximación lineal (en t) de (102), lo cual resulta

$$z_2(t) \approx z_{20} \left(1 - \frac{t}{RC}\right)$$

de donde

$$z_{2_1} = z_2(\bar{dT}) \approx z_{20} \left(1 - \frac{1}{RC}\bar{dT}\right) \quad (103)$$

Por otra parte, considerando que

$$\bar{z}_2 \approx \frac{z_{2_1} + z_{20}}{2} \quad (104)$$

se puede escribir z_{2_0} y z_{2_1} en términos de \bar{z}_2 resolviendo (103) (104) para z_{2_1} y z_{2_0} . Así se obtiene

$$\begin{aligned} z_{2_1} &\approx \frac{2RC}{2RC - \bar{d}T} \bar{z}_2 \\ z_{2_0} &\approx \frac{2(RC - \bar{d}T)}{2RC - \bar{d}T} \bar{z}_2 \end{aligned}$$

De donde

$$\Delta_{z_2} = |z_{2_0} - z_{2_1}| \approx \frac{2\bar{d}T}{2RC - \bar{d}T} \bar{z}_2 \quad (105)$$

Si se cumple que $T \ll 2RC$, entonces de (105) se puede escribir

$$\Delta_{z_2} \approx \frac{\bar{d}T}{RC} \bar{z}_2 \quad (106)$$

la cual es la expresión comúnmente empleada en los libros de electrónica de potencia (Erickson y Maksimovic, 2001; Kassakian *et al.*, 1991). Los resultados del procedimiento anterior se resumen en la siguiente proposición

Proposición 13 *Si $T \ll 2RC$, entonces el rizo en la corriente y el voltaje están dadas por las expresiones (101) y (106)*

Las expresiones (101) y (106) se emplean comúnmente para determinar los valores mínimos de L y C necesarios para que el rizo tenga valores máximos Δ_{z_1} y Δ_{z_2} . En efecto, de (101) y (106) se tiene que, conociendo la carga mínima (o la potencia máxima entregada), el voltaje nominal de salida (\bar{z}_2) y los rizos de corriente y voltaje máximos permitidos, los

valores de L y C deben ser tales que

$$L > \frac{v_{in} \bar{d} T}{\Delta_{z_1}} \quad (107a)$$

$$C > \frac{\bar{d} T \bar{z}_2}{R \Delta_{z_2}} \quad (107b)$$

Valores mínimos de L y C para el convertidor buck-boost

Los valores mínimos de L y C para el convertidor buck-boost se pueden obtener mediante un procedimiento similar al seguido para el convertidor boost. Del modelo (5) se tiene que durante el tiempo en que $u = 1$, las ecuaciones del convertidor buck-boost resultan

$$\dot{z}_1 = -\frac{v_{in}}{L} \quad (108a)$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{-z_2}{RC} \quad (108b)$$

Note la similitud entre las ecuaciones (100) y (108), de hecho, lo único que cambia entre una y otra es el signo del lado derecho de (108a). Dada esta similitud se puede seguir casi exactamente el procedimiento empleado para el convertidor boost. Mediante dicho procedimiento se obtiene que, si $T \ll 2RC$ las expresiones (101), (106) y (107) son también válidas para el convertidor buck-boost.

Observación 14 *Note que aunque (107) sea válida para los convertidores boost y buck-boost, esto no significa que un convertidor boost y un buck-boost que, por ejemplo, doblaran el voltaje de entrada manteniendo los mismos rizados, deberían tener los mismos valores de L y C , pues el ciclo de trabajo \bar{d} resultante de para doblar el voltaje de entrada es distinto en ambos casos.*

Valores mínimos de L y C para el convertidor buck

A diferencia de los convertidores anteriores, en el caso del convertidor buck es más conveniente considerar que el ciclo de conmutación inicia cuando $u = 0$, como se muestra en la figura 17. Del modelo (3) se sigue que, cuando $u = 0$, la trayectoria del convertidor buck está determinada por

$$\dot{z}_1 = \frac{-z_2}{L} \quad (109a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_1}{C} - \frac{z_2}{RC} \quad (109b)$$

Resolviendo (109) y tomando la aproximación lineal se obtiene.

$$z_1(t) \approx z_{10} + \frac{z_{20}}{L}t$$

$$z_2(t) \approx z_{20} + \left(\frac{z_{10}}{C} - \frac{z_{10}}{RC} \right) t$$

trasladando t de tal manera que $t_0 = 0$ se tiene que $t_1 = (1 - \bar{d})T = \bar{d}'T$. Entonces

$$z_{1_1} = z_1(t_1) = z_1(\bar{d}'T) \approx z_{10} + \frac{z_{20}}{L}\bar{d}'T \quad (110a)$$

$$z_{2_1} = z_2(t_1) = z_2(\bar{d}'T) \approx z_{20} + \left(\frac{z_{10}}{C} - \frac{z_{10}}{RC} \right) \bar{d}'T \quad (110b)$$

Por otra parte, considerando que

$$\bar{z}_1 \approx \frac{z_{1_1} + z_{1_0}}{2} \quad (111a)$$

$$\bar{z}_2 \approx \frac{z_{2_1} + z_{2_0}}{2} \quad (111b)$$

se puede expresar z_{10} , z_{11} , z_{20} y z_{21} en términos de \bar{z}_1 y \bar{z}_2 resolviendo el sistema formado por (110) y (111). Así se obtiene

$$z_{11} \approx \frac{RC \left(\frac{R}{L} \bar{d}'T + 2 \right) - \bar{d}'T}{R \left(2RC + \bar{d}'T \left(\frac{R}{2L} \bar{d}'T - 1 \right) \right)} \bar{z}_2 \quad (112a)$$

$$z_{10} \approx \frac{2C - \frac{\bar{d}'T}{R} + \frac{t}{L}(t - RC)}{2RC + \bar{d}'T \left(\frac{R}{2L} \bar{d}'T - 1 \right)} \bar{z}_2 \quad (112b)$$

$$z_{21} \approx \frac{2RC - \bar{d}'T}{2RC + \bar{d}'T \left(\frac{R}{2L} \bar{d}'T - 1 \right)} \bar{z}_2 \quad (112c)$$

$$z_{20} \approx \frac{2RC + t \left(\frac{R\bar{d}'T}{L} - 1 \right)}{2RC + \bar{d}'T \left(\frac{R}{2L} \bar{d}'T - 1 \right)} \bar{z}_2 \quad (112d)$$

donde se ha usado que $\bar{z}_1 = \bar{z}_2/R$. De (112) se puede escribir

$$\Delta_{z_1} \approx \left| \frac{(2RC - \bar{d}'T)\bar{d}'T}{L \left(2RC + \left(\frac{R\bar{d}'T}{2L} - 1 \right) \bar{d}'T \right)} \bar{z}_2 \right| \quad (113a)$$

$$\Delta_{z_2} \approx \left| \frac{2R\bar{d}'T^2}{L \left(2RC + \left(\frac{R\bar{d}'T}{2L} - 1 \right) \bar{d}'T \right)} \bar{z}_2 \right| \quad (113b)$$

Si se cumple que

$$\left| \frac{R\bar{d}'T}{2L} - 1 \right| T \ll 2RC, \quad T \ll 2RC \quad (114)$$

entonces de (113), se tiene que

$$\Delta_{z_1} \approx \frac{\bar{d}'T}{L} \bar{z}_2 \quad (115a)$$

$$\Delta_{z_2} \approx \frac{\bar{d}'^2 T^2}{2LC} \bar{z}_2 \quad (115b)$$

De (115) se puede concluir que dada una carga R , un periodo de conmutación T , un voltaje de salida \bar{z}_2 , los valores de L y C para mantener los rizados de corriente y voltaje abajo

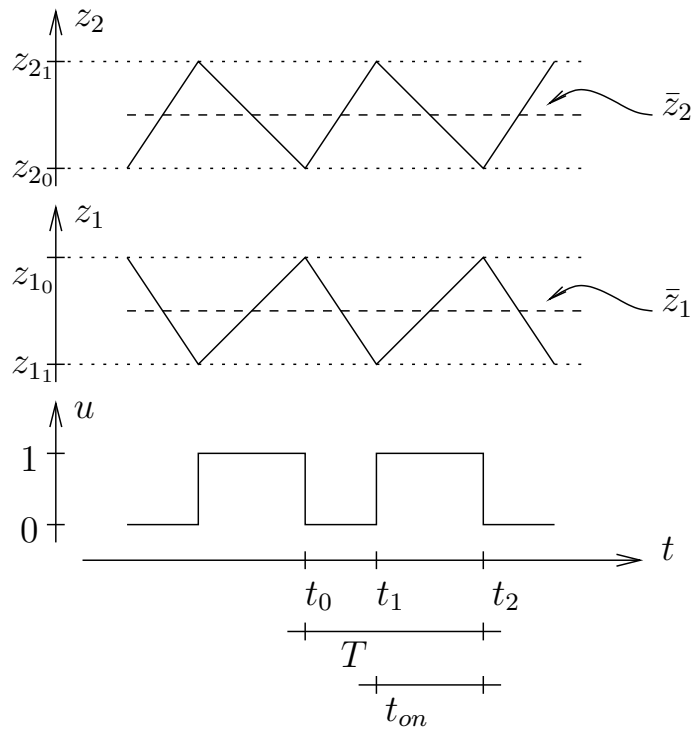


Figura 17: Formas de corriente y voltaje en estado estacionario del convertidor buck.

de Δz_1 y Δz_2 , deben ser tales que:

$$L > \frac{\bar{d}'T}{\Delta z_1} \bar{z}_2 \quad (116a)$$

$$C > \frac{\bar{d}'^2 T^2}{2L \Delta z_2} \bar{z}_2 \quad (116b)$$

Valores mínimos de L y C para el convertidor Cuk

Al igual que para el convertidor buck, para simplificar la notación es conveniente suponer que el ciclo de trabajo se inicia cuando u cambia a 0. Haciendo $u = 0$ en el modelo (6) resulta

$$\dot{z}_1 = \frac{v_{in}}{L_1} - \frac{z_2}{L_1} \quad (117a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_1}{C_1} \quad (117b)$$

$$\dot{z}_3 = -\frac{z_4}{L_2} \quad (117c)$$

$$\dot{z}_4 = -\frac{z_4}{RC_2} + \frac{z_3}{C_2} \quad (117d)$$

Note que en (117) las dos primeras ecuaciones y las dos últimas no interactúan, por lo que se puede analizar cada par de ecuaciones por separado.

Resolviendo el sistema (117a)-(117b) y tomando la aproximación lineal (en t) de la solución se tiene

$$z_{1_1} \approx z_{1_0} + \frac{v_{in} - z_{2_0}}{L} dT \quad (118a)$$

$$z_{2_1} \approx z_{2_0} + \frac{z_{1_0}}{C} dT \quad (118b)$$

donde se ha hecho uso de la misma notación que se ha venido empleando en los demás convertidores. Por otra parte, se tiene que

$$\bar{z}_1 = \frac{z_{1_0} + z_{1_1}}{2} \quad (119a)$$

$$\bar{z}_2 = \frac{z_{2_0} + z_{2_1}}{2} \quad (119b)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales formado por (118)-(119), es posible determinar z_{1_0} , z_{1_1} , z_{2_0} y z_{2_1} en términos de \bar{z}_1 y \bar{z}_2 y entonces calcular (aproximadamente) Δz_1 y Δz_2 . Realizando los cálculos necesarios y haciendo uso de que en estado estacionario se cumple

que $\bar{z}_1 = -\frac{\bar{z}_4}{R} \frac{d}{d'}$ y $\bar{z}_2 = -\frac{\bar{z}_4}{d}$, resulta

$$\Delta z_1 \approx \left| \frac{4\bar{d}'TRC_1 (\bar{d}v_{in} + \bar{z}_4) - 2\bar{d}^2\bar{d}'T^2\bar{z}_4}{4\bar{d}RL_1C_1 + d\bar{d}'^2T^2R} \right| \quad (120a)$$

$$\Delta z_2 \approx \left| \frac{4\bar{d}^2TL_1\bar{z}_4 + 2\bar{d}\bar{d}'^2T^2Rv_{in} + 2\bar{d}'^2T^2R\bar{z}_4}{4\bar{d}RL_1C_1 + d\bar{d}'^2T^2R} \right| \quad (120b)$$

Si T es lo suficientemente pequeño para que los términos que involucran a T^2 se puedan despreciar, entonces (120) se reduce a

$$\Delta z_1 \approx \left(v_{in} + \frac{\bar{z}_4}{d} \right) \frac{\bar{d}'T}{L_1} \quad (121a)$$

$$\Delta z_2 \approx \frac{\bar{d}'T\bar{z}_4}{RC_1} \quad (121b)$$

Para el cálculo de Δz_3 y Δz_4 el desarrollo es el mismo. Resolviendo (117c) y (117d), tomando la aproximación lineal (en t) del resultado y evaluando en $t = t_1 = \bar{d}'T$, se tiene

$$z_{31} \approx z_{30} - \frac{z_{40}}{L_2} \bar{d}'T \quad (122a)$$

$$z_{41} \approx z_{40} + \left(\frac{z_{30}}{C_2} - \frac{z_{40}}{RC_2} \right) \bar{d}'T \quad (122b)$$

Por otra parte

$$\bar{z}_3 = \frac{z_{30} + z_{31}}{2} \quad (123a)$$

$$\bar{z}_4 = \frac{z_{40} + z_{41}}{2} \quad (123b)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (122)-(123) es posible determinar z_{30} , z_{31} , z_{40} y z_{41} en términos de \bar{z}_4 y calcular entonces $\Delta z_3 = |z_{31} - z_{30}|$ y $\Delta z_4 = |z_{41} - z_{40}|$. Efectuando las operaciones necesarias y tomando en cuenta que $\bar{z}_3 = -\bar{z}_4/R$ se llega a

$$\Delta z_3 \approx \left| -\frac{4\bar{d}'TRC_2 + 2\bar{d}'^2T^2}{4RL_2C_2 - 2\bar{d}'TL_2 + \bar{d}'^2T^2R} \bar{z}_4 \right| \quad (124a)$$

$$\Delta z_4 \approx \left| -\frac{8\bar{d}'TL_2 - 2\bar{d}'^2T^2R}{4RL_2C_2 - 2\bar{d}'TL_2 + \bar{d}'^2T^2R} \bar{z}_4 \right| \quad (124b)$$

Si T es lo suficientemente pequeño para que los términos con T^2 puedan despreciarse y $T \ll 2RC_2$ entonces de (124) se puede escribir

$$\Delta z_3 \approx \frac{\bar{d}'T\bar{z}_4}{L_2} \quad (125a)$$

$$\Delta z_4 \approx \frac{2\bar{d}'T\bar{z}_4}{RC_2} \quad (125b)$$

De (121) y (125) se tiene que para mantener los rizados debajo de Δz_1 , Δz_2 , Δz_3 y Δz_4 máximos, los parámetros del convertidor Ćuk deben ser tales que

$$L_1 > \left(v_{in} + \frac{\bar{z}_4}{\bar{d}} \right) \frac{\bar{d}'T}{\Delta z_1} \quad (126a)$$

$$C_1 > \frac{\bar{d}'T\bar{z}_4}{R\Delta z_2} \quad (126b)$$

$$L_2 > \frac{\bar{d}'T\bar{z}_4}{\Delta z_3} \quad (126c)$$

$$C_2 > \frac{2\bar{d}'T\bar{z}_4}{R\Delta z_4} \quad (126d)$$

Ejemplo

Suponga que se quiere diseñar un convertidor boost para doblar el voltaje de una fuente de alimentación de 48V y tener a la salida una potencia de 200W. El rizo de voltaje debe ser menor al 5 % del valor de salida y el rizo en la corriente en el inductor debe ser de menos del 5 % de su valor. La frecuencia de conmutación del interruptor es de 50KHz.

Si el voltaje en el capacitor es de 96V y la potencia máxima es de 200W entonces la carga mínima es $R = V^2/P = 46.08$. Aplicando la ecuación (107b) se tiene que el valor mínimo del capacitor está dado por

$$C_{min} = \frac{0.5 \frac{1}{50000} 96}{R(0.05)96} = 4.34028 \mu\text{Fd} \quad (127)$$

Para el cálculo de la inductancia mínima, es necesario conocer la corriente en estado estacionario dada por $\bar{z}_1 = \bar{z}_2^2 / (Rv_{in}) = 4.1667$. Así, de la ecuación (107a) se tiene que

$$L_{min} = \frac{48(0.5) \frac{1}{50000}}{0.05(4.1667)} = 2.304\text{mHy} \quad (128)$$

4.4.3. Valores máximos de los parámetros

La especificación de un rizo máximo permitido determina valores mínimos de los parámetros L y C de un convertidor. Como se verá en esta sección la rapidez de cambio máxima del voltaje de salida del convertidor determina los valores máximos de los parámetros L y C .

Es de esperarse que la salida de un convertidor, como cualquier sistema de control, no se pueda cambiar de forma arbitraria. En el caso de los convertidores esto significa que no se pueda generar cualquier voltaje. Es importante caracterizar de algún modo los voltajes que un convertidor puede generar, ya que esto permite conocer de antemano si unas determinadas especificaciones se pueden cumplir y así diseñar el convertidor de manera adecuada.

Se pueden identificar tres características que limitan los voltajes que un convertidor puede generar.

- La no minimalidad de fase. Se sabe que no se puede efectuar un seguimiento exacto sobre la salida en un sistema de fase no mínima, pues esto implica que otras variables crezcan indefinidamente (Grizzle *et al.*, 1994; Isidori, 1997). Existen algunos métodos para el diseño de control de sistemas de fase no mínima. Todos ellos hacen, de alguna manera, que la dinámica en lazo cerrado sea lo suficientemente lento para evitar la inestabilidad.

- El control acotado. La energía que se puede transferir al convertidor en un tiempo determinado está acotada y por tanto, aún cuando no existiera una restricción dinámica como la no minimalidad de fase, no se podría cambiar la salida de forma arbitraria.
- La conmutación. Para atenuar los efectos de la conmutación en la salida es necesario que inductores y capacitores sean lo suficientemente grandes. Sin embargo, entre más grandes son estos componentes, más lenta es la respuesta del convertidor.

En esta sección se examinan estas tres características en su conjunto para encontrar relaciones que caractericen los voltajes que se pueden generar con un convertidor determinado y se exhibe la relación entre dichos voltajes y los parámetros del convertidor. Nuevamente, se utiliza el convertidor boost como ejemplo, aunque el procedimiento se puede aplicar a los demás convertidores.

En el análisis que sigue se considera que el convertidor está controlado de manera indirecta. El control indirecto es un método muy común para el control de sistemas de fase no mínima. Consiste en controlar la salida original a través de otra variable (ver capítulo 5). En el caso de los convertidores, dicha variable es comúnmente la corriente en un inductor. Considere el modelo del convertidor boost (94). Suponga que existe un controlador que hace $\tilde{z}_1 = z_{1d}$. Sustituyendo $\tilde{z}_1 = z_{1d}$ en (94a) se tiene que \bar{d}' debe ser (en estado estacionario)

$$\bar{d}' = \frac{v_{in} - L\dot{z}_{1d}}{z_{2d}} \quad (129)$$

Como $\bar{d}' \in [0, 1]$ de (129) se sigue que

$$z_{2d} > v_{in} - L\dot{z}_{1d} \quad (130)$$

$$L < \frac{v_{in}}{|\dot{z}_{1d}|} \quad (131)$$

Haciendo uso de la aproximación (96), de (130) resulta

$$z_{2d} \left(1 + \frac{2L}{Rv_{in}} \dot{z}_{2d} \right) > v_{in} \quad (132)$$

mientras que de (131) se tiene

$$L < \frac{Rv_{in}^2}{2z_{2d}\dot{z}_{2d}} \quad (133)$$

Por otra parte, una de las hipótesis de la proposición 11 para que exista \tilde{z}_{1d} es que

$$f(t) = \frac{z_{2d}}{v_{in}} \left(-C\dot{z}_{2d} + \frac{z_{2d}}{R} \right) > 0 \quad (134)$$

esto implica que

$$\dot{z}_{2d} - \frac{z_{2d}}{RC} < 0 \quad (135)$$

Es decir, hay un límite para la rapidez con que el voltaje de salida puede cambiar. La ecuación (135) se puede poner como

$$C < \frac{z_{2d}}{R\dot{z}_{2d}} \quad (136)$$

Las expresiones (133) y (136) proporcionan valores máximos de L y C para que un convertidor pueda generar un voltaje $z_{2d}(t)$. Por otra parte, en la sección 4.4.2 se observó que L y C debían ser lo suficientemente grandes para atenuar el rizo provocado por la conmutación en el voltaje de salida y la corriente en el inductor. Las ecuaciones (107) proporcionan los valores mínimos de L y C para mantener los rizos abajo de Δz_1 y Δz_2 . Tales relaciones fueron

obtenidas para el caso de voltajes constantes. Para hacer un estimado de los valores mínimos de L y C en el caso de voltajes variables, en las ecuaciones (107) se debe sustituir \bar{z}_2 y \bar{d} por sus valores máximos, esto es, por $\|z_{2d}\|$ y $v_{in}/\|z_{2d}\|$ respectivamente. De esta manera para el caso de la generación de voltajes variables, las expresiones de diseño de los parámetros del convertidor boost quedan

$$L > \frac{v_{in}^2 T}{\Delta z_1} \|z_{2d}\| \quad (137a)$$

$$C > \frac{v_{in} T}{R \Delta z_2} \quad (137b)$$

Combinando (133), (136) y (137) se puede escribir

$$\frac{v_{in}^2 T}{\Delta z_1} \|z_{2d}\| < L < \frac{R v_{in}^2}{2 z_{2d} \dot{z}_{2d}} \quad (138a)$$

$$\frac{v_{in} T}{R \Delta z_2} < C < \frac{z_{2d}}{R \dot{z}_{2d}} \quad (138b)$$

Note que si z_{2d} es constante, no existe una limitación para los valores máximos de los parámetros.

Por una parte, los parámetros R , L y C deben ser grandes para reducir el rizo, por otra, deben ser pequeños para que el convertidor pueda generar un cierto voltaje. Esto es una consecuencia de que el sistema debe ser lo suficientemente lento para no ser sensible a las señales de alta frecuencia generadas por la conmutación y a la vez lo suficientemente rápido para poder seguir de manera adecuada, el voltaje deseado. Puede suceder que bajo determinadas especificaciones de diseño, estos objetivos contrapuestos no puedan satisfacerse a la vez. En el siguiente capítulo se presenta un ejemplo concreto de esta situación. Cabe mencionar que las restricciones (138) no se obtuvieron empleando un determinado algoritmo de control. Lo

único que se supuso es que el control era indirecto, lo cual es cierto para muchos algoritmos de control, como se verá en los siguientes capítulos.

4.4.4. Ejemplo

En (Cáceres y Barbi, 1999; Nava, 19997) se propone un circuito para generar el voltaje $\beta \sin(\omega t)$ sobre una carga. Un diagrama de este circuito se ilustra en la figura 18. El argumento sobre el que el circuito basa su funcionamiento es que si cada convertidor genera el voltaje $a + b \sin(\omega t)$ y $a - b \sin(\omega t)$ respectivamente, entonces el voltaje en la carga será el deseado si $b = \beta/2$. La cuestión de si el segundo convertidor no afecta al primero y viceversa no se responde en los trabajos mencionados, pero los resultados experimentales que se obtienen son aceptables. Con base en estos trabajos, a continuación, se desarrolla un ejemplo de selección de los parámetros de un convertidor boost para generar el voltaje $a + b \sin(\omega t)$, de tal manera que al ser empleado en el circuito de la figura 18, el voltaje sobre una carga de 48Ω sea el voltaje de línea.

Suponga que se quiere diseñar un convertidor boost para generar un voltaje de $a + b \sin(\omega t)$ sobre una carga de $48V$ con un rizo en la corriente de 22% de su valor rms y un rizo en el voltaje del 2% de su valor rms. La frecuencia de conmutación del interruptor es de 30KHz .

Si se quiere generar el voltaje de línea, entonces $b = \frac{120}{2}\sqrt{2} = 84.8528$, mientras que $\omega = 2\pi 60 = 376.9911$. El valor de a debe ser tal que (130) ó (132) se satisfaga en estado estacionario; sin embargo, hace falta determinar el valor de L para conocer el valor de a a partir de esta ecuación. El valor de L se puede calcular de (138a), pero para ello es necesario el valor de a . Para eliminar esta dependencia mutua se puede aproximar $L\dot{z}_{1d} \approx 0$ en (130).

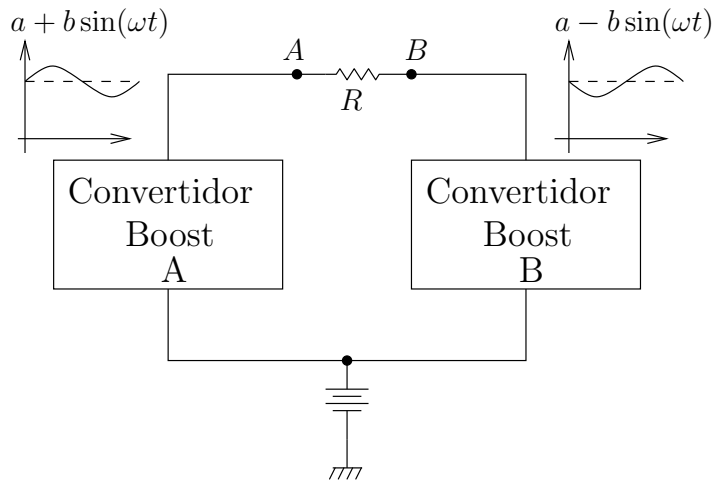


Figura 18: Inversor con salida de mayor amplitud que la fuente de alimentación.

Así se tiene

$$\text{mín } z_{2d} = (a + b \text{sen}(\omega t)) = a - 84.8528 > 48 \quad (139)$$

Por tanto, $a > 132.8528$, por lo que se fijará el valor de $a = 135$. Para el cálculo de L y C es necesario calcular primero los valores de los máximo rizados permitidos. El valor rms de z_{2d} resulta 147.7329, mientras que el valor rms de $z_{1d} \approx \frac{z_{2d}^2}{Rv_{in}}$ es 11.8486. Así resulta $\Delta_{z_1} = 2.8397$ y $\Delta_{z_2} = 2.9547$. Con estos datos es posible aplicar las expresiones (138) para calcular el rango de valores válidos para L y C . Note que para aplicar la expresión (138a) es necesario calcular el valor mínimo de $\frac{1}{z_{2d}z_{2d}}$ y en el caso de la expresión (138b) es necesario conocer el mínimo de $\frac{z_{2d}}{z_{2d}}$. La aplicación de (138) resulta

$$479.88\mu Hy < L < 11.14mHy \quad (140a)$$

$$40.42\mu Fd < C < 157.76\mu Fd \quad (140b)$$

Así que $L = 480\mu Hy$ y $C = 47\mu Fd$ son una buena elección. La tabla II resume los parámetros del convertidor diseñado y que será usado en la mayor parte de las simulaciones de los

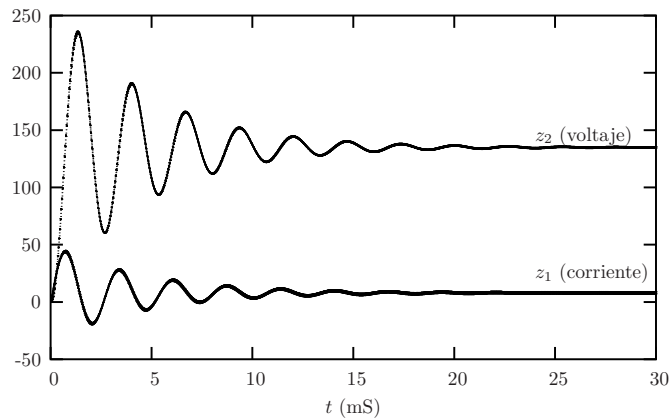


Figura 19: Simulación del convertidor boost con los parametros dados en la tabla II.

siguientes capítulos. En la figura 19 se muestra la simulación del convertidor en lazo abierto cuando $d = 0.355$ empleando el modelo de conmutación (4). El valor de $d = 0.355$ es el ciclo de trabajo necesario para que en estado estacionario se obtenga $z_2 = 135$.

Tabla II: Parámetros de un convertidor boost.

$L = 480\mu\text{H}$	$C = 47\mu\text{Fd}$	$R = 48\Omega$
$v_{in} = 48\text{V}$	$T = \frac{1}{30000}\text{s}$	$z_{2d} = a + b \text{sen}(\omega t)$
$a = 135$	$b = 185$	$\omega = 2\pi 60$

4.5. Conclusiones

En este capítulo se han examinado algunas propiedades importantes de los convertidores básicos. Algunas de estas propiedades son bastante conocidas y se presentaron como punto de partida para abordar otras menos conocidas como las características estacionarias de la forma de onda en el inductor. Se mostró porqué en la generación de voltajes variables es

importante conocer la forma de onda en el inductor a partir del conocimiento del voltaje de salida. Un resultado inmediato del conocimiento de la forma de onda en el inductor es que se pueden establecer expresiones para conocer los voltajes que pueden ser generados.

Se desarrollaron expresiones para determinar los valores mínimos de los parámetros L y C de un convertidor en función de los rizados máximos permitidos. Tales expresiones, que son tradicionalmente obtenidas de forma heurística en otras referencias, fueron obtenidas aquí de manera formal. Por otra parte, empleando un hipotético controlador indirecto ideal se mostró que la generación de un voltaje variable, junto con el carácter acotado del control, impone límites en los valores máximos de los parámetros. Teniendo valores mínimos de los parámetros impuestos por el máximo rizo permitido y valores máximos de dichos parámetros determinados por el voltaje deseado, se obtuvieron expresiones que permiten conocer si determinadas condiciones de diseño pueden cumplirse o no.

Así, se ha mostrado que la selección de parámetros, que usualmente no se considera como parte del problema de control, puede determinar si un voltaje puede ser generado o no. Finalmente, para ilustrar la aplicación de los resultados obtenidos en el capítulo, se presentó un ejemplo con interés práctico real, ya que, tiene su origen en la generación del voltaje de línea a partir de dos convertidores boost empleando una batería estándar. De esta manera, se han determinado todos los parámetros de un convertidor boost que será empleado para ilustrar el desempeño de los controladores presentados en los siguientes dos capítulos.

Capítulo 5

Control de convertidores para la generación de voltajes de ca

5.1. Introducción

Una idea que se ha vuelto muy común en el diseño de controladores para sistemas de fase no mínima es la redefinición de la salida para controlar la variable de interés de manera indirecta por medio de otra variable. La nueva salida se escoge de tal manera que el sistema con esta salida sea de fase mínima. En el caso de los convertidores, la nueva variable con la que se controla indirectamente el voltaje en la carga es usualmente la corriente en el inductor. La idea del control indirecto puede aplicarse con más o menos formalidad. El control de corriente programada o control en modo corriente (Middlebrook, 1989) fue planteado antes de que se desarrollaran muchos de los resultados formales alrededor del control indirecto que se conocen hoy en día. En (Alvarez-Ramirez *et al.*, 2001; Alvarez-Ramirez y Espinosa-Pérez,

2002) se hace uso de herramientas formales, particularmente del control por “backstepping” (Krstic *et al.*, 1995) y se muestra que el control de corriente programada puede verse como un controlador indirecto. Al verlo así, los autores plantean que se puede hacer un análisis más profundo del desempeño y la estabilidad del controlador, además de hacer sistemático el diseño del mismo. Los resultados presentados en (Alvarez-Ramirez *et al.*, 2001; Alvarez-Ramirez y Espinosa-Pérez, 2002) hacen uso del modelo promedio. En el capítulo 6 de esta tesis se muestra que el control de corriente programada puede verse como un control por modos deslizantes.

En este capítulo y el siguiente se presentan algoritmos de control propuestos durante el desarrollo de la tesis. Como antecedente, en la sección 5.2 se revisan las ventajas y desventajas de algunos de los algoritmos de control más significativos que han sido propuestos. De estos algoritmos, los presentados aquí son: control por modos deslizantes (Sira-Ramírez, 1987), control por linealización mediante la retroalimentación del estado (Sira-Ramírez y Lischinsky-Arenas, 1991), controladores basados en conceptos de pasividad (Rodríguez *et al.*, 2000; Sira-Ramírez *et al.*, 1997), y el control de corriente programada (Middlebrook, 1989; Ridley, 1991). Este último, a pesar de que fue uno de los primeros que se propuso, es el más usado en la práctica. A lo largo de la revisión de estos algoritmos se hacen algunas observaciones de interés desde el punto de vista práctico. Los algoritmos presentados en la sección 5.2 son sólo una pequeña muestra de los controladores que han sido propuestos para este tipo de sistemas. Se podrían enumerar muchos más, pues como ya se ha mencionado, los convertidores electrónicos se han vuelto una especie de banco de pruebas para cada nueva técnica de control que se propone (ver por ejemplo: (Alfayyumi *et al.*, 2000; Alvarez-Ramirez

et al., 2001; Alvarez-Ramirez y Espinosa-Pérez, 2002; Buso, 1999; Escobar *et al.*, 1999b; Garofalo *et al.*, 1994; Karsenti *et al.*, 1995; Kugi y Schlacher, 1999; Mattavelli *et al.*, 1993; Naim *et al.*, 1997)). Es importante hacer notar que la mayoría de estos trabajos están enfocados al problema de regulación, es decir, al problema de generación de voltajes de cd.

Después de revisar los controladores propuestos previamente, en las secciones 5.3 y 5.4 se presentan dos algoritmos de control derivados en el desarrollo de la tesis. Ambos fueron planteados teniendo en mente el problema de la generación de voltajes de ca. El primero tiene la desventaja de depender de la carga. Sin embargo, la sencillez y la estructura que se obtiene en lazo cerrado permite estimar el error de seguimiento obtenido con este algoritmo. Además, el análisis desarrollado para la estimación del error permite apreciar la influencia que tienen los valores de los parámetros en la generación de voltajes de ca. En el controlador presentado en la sección 5.4 se emplean las ideas del control por “backstepping” para obtener un controlador que no depende de la carga pero que tiene serias desventajas prácticas. Finalmente, en la sección 5.5 se presenta una forma de obtener controladores por modos deslizantes a partir de controladores promedio. Esta idea se puede aplicar para obtener toda una nueva gama de controladores a partir de algunos ya conocidos. En la misma sección se dan ejemplos de cómo combinar los controladores propuestos con esta última idea. Algo que se debe remarcar es que algunos de los controladores por modos deslizantes obtenidos pueden eliminar algunas desventajas de su contraparte promedio. En particular, la combinación del controlador por “backstepping” propuesto en la sección 5.4 con el argumento expuesto en la sección 5.5 da lugar a un controlador con notables propiedades desde el punto de vista práctico. Dichas propiedades hacen que tal controlador sea factible de ser implementado. Por

ello, la presentación y análisis de dicho controlador se hace detalladamente en el capítulo 6.

A lo largo de este capítulo se hace uso del convertidor diseñado en el capítulo 4 cuyos parámetros se sintetizan en la tabla II. En el caso de los controladores cd-cd se utiliza $z_{2d} = a$, mientras que para los controladores cd-ca se utiliza $z_{2d} = a + b \sin(\omega t)$, a menos que se indique algo diferente. Los parámetros a , b y ω , están dados en la tabla II

5.2. Algunos controladores previamente propuestos

En esta sección se presentan algunos de los controladores para convertidores electrónicos propuestos anteriormente. En particular, se presentan aquéllos obtenidos mediante la aplicación de técnicas de control no lineal. Se toma como ejemplo el convertidor boost diseñado en el capítulo 4, cuyos parámetros se resumen en la tabla II.

5.2.1. Control por modos deslizantes

Como se ha mencionado anteriormente, en las técnicas de control por modos deslizantes se aplican los modelos discontinuos y dan como resultado un algoritmo que determina de forma directa la posición del interruptor, eliminando así la necesidad de un bloque PWM. El control por modos deslizantes propuesto en (Sira-Ramírez, 1987) fue uno de los primeros controladores obtenidos mediante la aplicación de una técnica formal de control no lineal.

Considérese el modelo (4). En (Sira-Ramírez, 1987) se propone el controlador

$$u = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > 0 \\ 1 & \text{si } \sigma < 0 \end{cases} \quad \text{con } \sigma = z_1 - z_{1d} \quad (141)$$

donde $z_{1d} = \frac{z_{2d}^2}{Rv_m}$. La idea en la que se sustenta dicho controlador es crear un modo deslizante en el sistema para hacer que $\tilde{z}_1 = z_{1d}$ e indirectamente hacer que $\tilde{z}_2 \rightarrow z_{2d}$. Esto es, se trata de un control indirecto. Como se muestra en (Sira-Ramírez, 1987), intentar crear un modo deslizante para hacer que $\tilde{z}_2 = z_{2d}$ tiene como resultado una dinámica interna inestable y z_1 crece indefinidamente.

El control equivalente asociado al control (141) resulta $u_{eq} = 1 - v_{in}/\tilde{z}_2$, por lo que cuando el sistema evoluciona en la superficie $\sigma = 0$ está regido por las ecuaciones

$$\dot{\tilde{z}}_1 = z_{1d} \quad (142a)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = -\frac{1}{RC\tilde{z}_2} (\tilde{z}_2^2 - z_{2d}^2) \quad (142b)$$

Note que el controlador (141) no tiene ningún parámetro que ajustar, por lo que la rapidez de respuesta está determinada por la rapidez del sistema en lazo abierto, entre más pequeños los parámetros más rápida la respuesta. Esto se puede concluir también resolviendo las ecuaciones (142) (ver (Escobar *et al.*, 1999b)). Una desventaja significativa del control (141) es que depende de la carga, que normalmente es desconocida, por lo cual es altamente sensible a variaciones de ésta.

Teóricamente, el algoritmo (142) hace que el interruptor conmute a una frecuencia infinita. La simulación o implementación tal cual del algoritmo (142) lleva a una frecuencia de

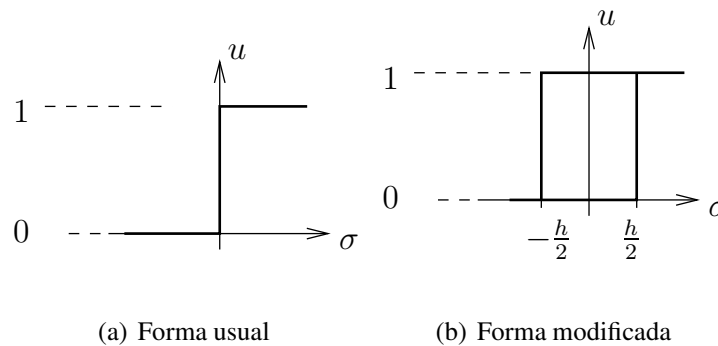


Figura 20: Limitación de la frecuencia de conmutación en un algoritmo de control por modos deslizantes.

conmutación finita pero errática. En el caso de la simulación, esto se debe a lo finito de la precisión numérica. En el caso de la implementación, se debe a las limitaciones físicas de los componentes electrónicos. Se puede limitar la frecuencia de conmutación modificando de alguna manera el algoritmo (142). Existen varias formas de hacerlo. En este trabajo, para la simulación de los controladores por modos deslizantes, se introduce un bloque de histéresis en el cambio de posición del interruptor. Es decir, en lugar de cambiar la posición del interruptor de acuerdo a la figura 5.20(a) (como en el algoritmo (141)), se cambia como se indica en la figura 20. En la sección 6.5 se presenta una discusión de las ventajas que tiene introducir tal bloque de histéresis.

En la figura 21 se muestra una simulación del controlador (141) modificado mediante un bloque de histéresis de amplitud $h = 1$ para el circuito diseñado en el capítulo 4. El valor $h = 1$ hace que la frecuencia de conmutación en estado estacionario esté alrededor de 30KHz. En $t = 20mS$ el valor de la carga se reduce en 10%. La respuesta de este controlador es notablemente rápida, con sobreimpulso nulo. Sin embargo, después del cambio en la carga, el valor estacionario del voltaje se desvía significativamente del valor deseado.

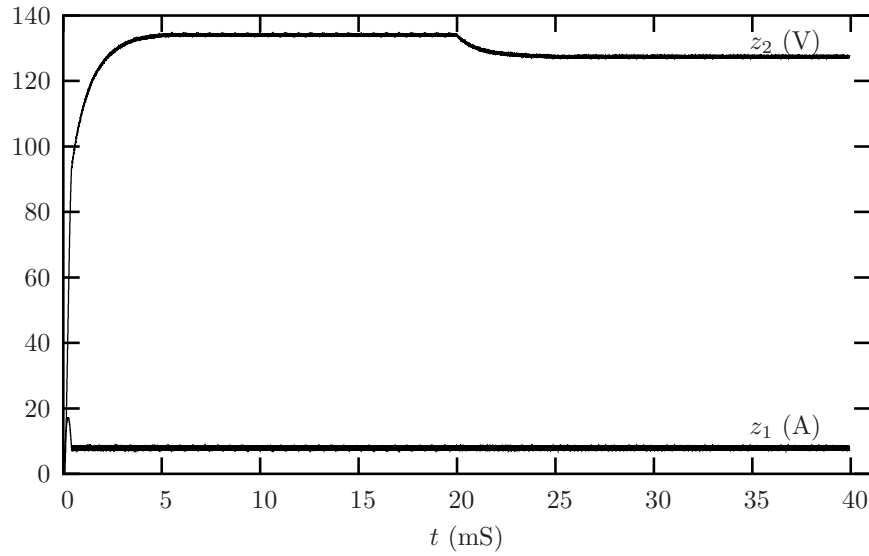


Figura 21: Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (141).

5.2.2. Control por linealización mediante retroalimentación del estado

Si se define como salida del sistema una función de grado relativo 2 para el convertidor boost, entonces es posible diseñar un controlador que vuelva lineal la relación entrada-salida del convertidor (ver (Isidori, 1997; Nijmeijer y Schaft", 1996) y el resumen presentado en el apéndice). Esta idea se desarrolla en (Sira-Ramírez y Lischinsky-Arenas, 1991). Ahí se define como salida

$$y = \frac{1}{2} (Cz_2^2 + Lz_1^2) \quad (143)$$

La ley de control

$$d = \frac{1}{\left(\frac{v_{in}}{L} + \frac{2}{RC}z_1\right)z_2} \left(\left(\frac{2}{R^2C} - \frac{a_1}{R} + \frac{a_2C}{2} \right) z_2^2 + \left(a_1v_{in} + \frac{a_2L}{2}z_1 \right) z_1 + \frac{v_{in}^2}{L} - a_2y_d \right) \quad (144)$$

donde,

$$y_d = \frac{Cz_{2d}^2 + Lz_{1d}^2}{2}, \quad z_{1d} = \frac{z_{2d}^2}{Rv_{in}} \quad (145)$$

hace que en lazo cerrado se satisfaga la ecuación lineal

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = a_2y_d \quad (146)$$

De tal manera que si $a_1, a_2 > 0$, entonces

$$y \rightarrow y_d \text{ y } \tilde{z}_2 \rightarrow z_{2d} \quad (147)$$

Teniendo en cuenta (146), aparentemente se puede controlar la rapidez de convergencia en (147). Sin embargo, como se mostró en el capítulo 4, hay límites en la rapidez de convergencia de \tilde{z}_2 a z_{2d} , independientemente del control. La razón por la que estos límites no aparecen en (146) es que en la obtención de esta última no se toma en cuenta la saturación de d .

En la figura 22 se muestra la respuesta de un convertidor boost con los parámetros dados en la tabla II, controlado mediante la ley (144) con $(a_1, a_2) = (750, 5000)$. Para facilitar la simulación se ha empleado el modelo promedio, pero teniendo en cuenta la saturación del ciclo de trabajo. El sobrepaso de este controlador es bastante grande y la rapidez de respuesta es de una lentitud extrema. Además, una disminución de sólo 10% en la carga hace que el voltaje se desvíe fuertemente de su valor deseado. En (Escobar *et al.*, 1997) se hace una comparación de varios controladores. Ahí no se observa una fuerte diferencia entre el desempeño del controlador por linealización del estado y otros controladores. Sin embargo, esto se debe a que el convertidor empleado en la comparación tiene una respuesta en lazo abierto muy lenta. En un convertidor con parámetros más realistas el pobre desempeño de la ley (144) se hace evidente.

Además del desempeño observado, la ley de control es bastante complicada para poder ser implementada mediante componentes electrónicos de uso estándar en electrónica de po-

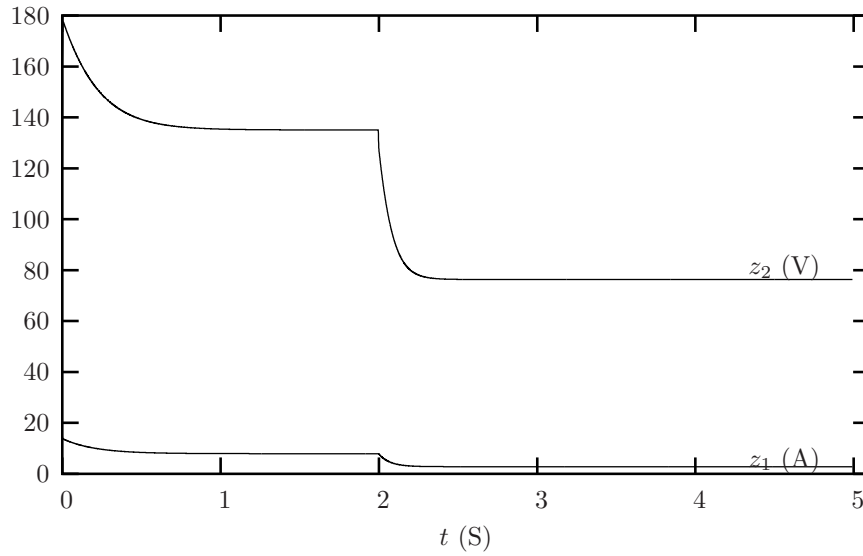


Figura 22: Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (144).

tencia. De aquí que este control difícilmente puede ser implementado y sólo constituye una referencia.

5.2.3. Controladores basados en pasividad

Un controlador que al cerrar el lazo preserve la propiedad de pasividad del convertidor boost fue propuesto en (Sira-Ramírez *et al.*, 1997) y está dado por

$$\dot{d} = \frac{1-d}{C(v_{in} + (\tilde{z}_1 - z_{1d})R_1)} \left((1-\mu)^2 z_{1d} - \frac{v_{in} + (z_1 - z_{1d})R_1}{R} - \frac{R_1 C}{L} (v_{in} - (1-d)z_2) \right) \quad (148)$$

donde $z_{1d} = \frac{z_{2d}^2}{Rv_{in}}$ y R_1 es un parámetro de diseño. Se puede mostrar (Sira-Ramírez *et al.*, 1997) que, dada la función

$$V = [\tilde{z}_1 - z_{1d}, \tilde{z}_2 - \zeta]^T D [\tilde{z}_1 - z_{1d}, \tilde{z}_2 - \zeta]; \quad D = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad (149)$$

su derivada es tal que $\dot{V} \leq -\alpha V$, con $\alpha = \frac{\min(R_1, 1/R)}{\max(L, C)}$. Note que incrementando R_1 se acelera la convergencia de $[\tilde{z}_1 - z_{1d}, \tilde{z}_2 - \zeta]$ al origen, sin embargo, esto no significa que $z_2 \rightarrow z_{2d}$, a menos que $\zeta \rightarrow z_{2d}$. En (Escobar *et al.*, 1997) se muestra que la convergencia de ζ a z_{2d} depende esencialmente de la constante de tiempo natural del sistema (RC). Varias formas de incrementar la velocidad de dicha convergencia se proponen en (Escobar *et al.*, 1997); sin embargo, tales intentos son infructuosos. Como se muestra en el capítulo 4, no hay forma de incrementar la rapidez de convergencia al estado estacionario más allá de la rapidez del sistema en lazo abierto. Por ello, en la práctica, usualmente se selecciona el mínimo valor de C que cumpla con las especificaciones. Como consecuencia, los convertidores diseñados con base en especificaciones comunes son siempre sistemas muy rápidos y bajo amortiguados.

La figura 23 muestra el desempeño de la ley de control (148) cuando se aplica al convertidor con los parámetros de la tabla II y empleando $R_1 = 5\Omega$. En $t = 20\text{ms}$ la carga disminuye en 10% su valor. Al igual que todos los controladores presentados previamente, el controlador (148) depende fuertemente de la carga, por lo que no es robusto, lo que se puede apreciar de la figura. Por otra parte, también es difícil de implementar con la electrónica habitual del control de convertidores.

Empleando un enfoque distinto, pero también con base en el concepto de pasividad, en (Rodríguez *et al.*, 2000) se propone el controlador

$$d = \frac{1}{z_{2d}} \left(\frac{\tilde{z}_2}{z_{2d}} \right)^\alpha \quad (150)$$

con $0 < \alpha < 1$. Note que este controlador no depende de la carga y, aunque requiere un divisor, es factible de ser implementado. El controlador (150), tampoco depende de la corriente,

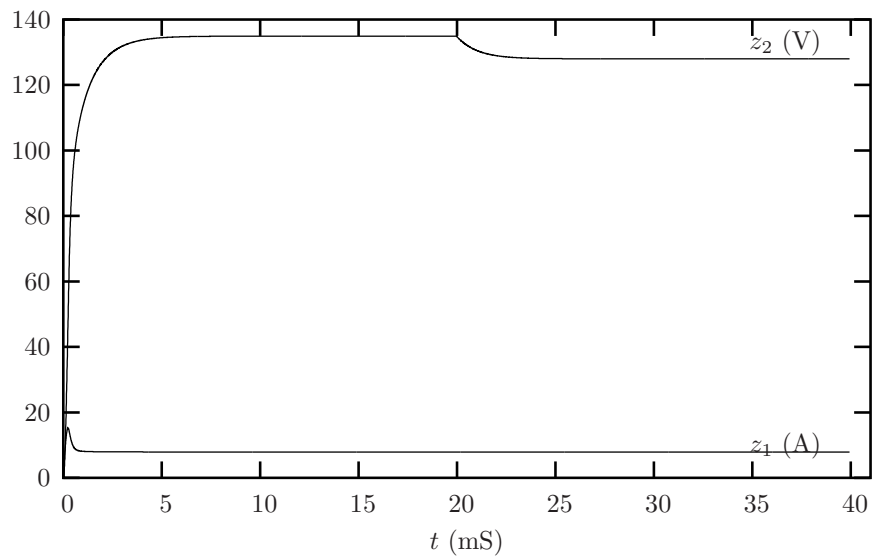


Figura 23: Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (148).

lo cual es una ventaja porque usualmente es bastante más difícil medir corriente que voltaje. El desempeño del controlador aplicado al convertidor que se ha venido tomando como ejemplo, se muestra en la figura 24, en donde se ha usado $\alpha = 0.5$. La perturbación en la carga se introduce en $t = 40ms$. El único problema importante de este controlador es el fuerte sobrepaso, particularmente, en el encendido.

5.2.4. Control de corriente programada

Introducido en los años 80, a pesar de ser el más antiguo, éste es sin duda el tipo de control más usado actualmente en la práctica. A diferencia de los controladores mencionados previamente, en donde se tienen expresiones concretas que definen el algoritmo de control, el llamado controlador de corriente programada surgió a partir de ideas heurísticas que fueron trasladadas directamente a una implementación mediante dispositivos electrónicos. Un esque-

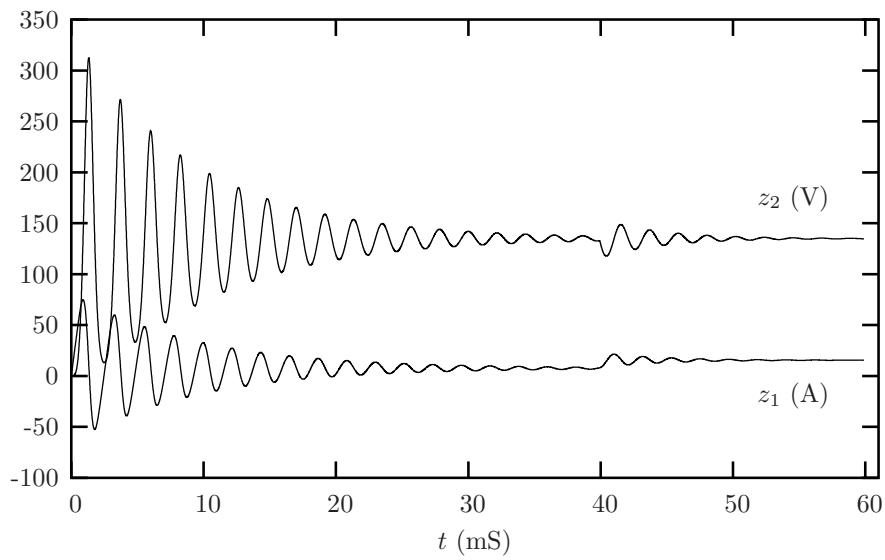


Figura 24: Simulación del convertidor boost controlado mediante la ley de control (150).

ma de la implementación básica de este controlador (tomado de (Ridley, 1991)) se muestra en la figura 25. En dicha figura v_c se refiere al “voltaje de control” y es la salida de un sub-circuito que tiene como entrada el error de voltaje en la salida, es decir, $v_c = f(z_2 - z_{2d})$; S_n es una señal proporcional a la corriente en el inductor y S_e es una señal externa. Supóngase que S_e no existe (esto en realidad fue así en las primeras implementaciones del controlador), entonces la idea del circuito de la figura 25 es clara: hacer que la corriente en el inductor sea controlada por v_c , que a su vez es una función del error. En general, v_c es la salida de un control PI del error. La señal S_e se introduce para estabilizar al circuito cuando el ciclo de trabajo es mayor a 0.5.

El control de corriente programada fue desde sus inicios evaluado experimentalmente con éxito. Actualmente existen circuitos integrados que facilitan su implementación. Sin embargo, no existe un procedimiento sistemático de análisis y diseño. Lo que existen son

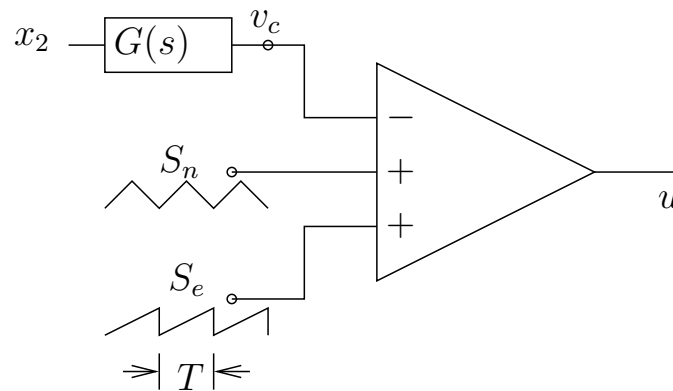


Figura 25: Diagrama básico de un controlador de corriente programada.

varias formas de modelar (Kimhi y Ben-Yaakov, 1991; Middlebrook, 1989; Ridley, 1991), cada una con sus propias suposiciones y procedimientos, que desembocan en distintas reglas heurísticas de diseño. En (Alvarez-Ramirez *et al.*, 2001), con base en la técnica de control “backstepping” (Krstic *et al.*, 1995), se presenta un diseño sistemático del control de corriente programada. Sin embargo, las expresiones del controlador presentado en (Alvarez-Ramirez *et al.*, 2001) no corresponden al control de corriente programada original propuesto en (Middlebrook, 1989; Ridley, 1991). Por la no existencia de un procedimiento estándar de diseño y la ausencia de una expresión general, no se presenta aquí una simulación del controlador de corriente programada. Como se verá en el capítulo 6, uno de los controladores propuestos en esta tesis tiene una estrecha relación con el controlador de corriente programada.

Con excepción del control (150), los controladores que han sido presentados en esta sección dependen de la carga. Lo mismo sucede con muchos otros controladores propuestos. Un patrón general de estos controladores es el uso del control indirecto. Esto trae como con-

secuencia la necesidad de una referencia para la corriente. Ahora bien, tal referencia para la corriente varía con la carga. En muchos controladores esta dependencia de la corriente de referencia del valor de la carga es lo que introduce la dependencia de la carga por parte del esquema del control. Esto se puede ver claramente en la ley de control (141). Si z_{1d} no dependiera de la carga, la ley de control sería independiente de la misma.

Suponiendo por un momento que se conoce una referencia de la corriente independiente de la carga, entonces se podrían aplicar numerosas técnicas de control a los convertidores, muchas de las cuales darían controladores independientes de la carga. En este sentido se puede decir que uno de los obstáculos para la obtención de controladores que sean independientes de la carga es la obtención de algoritmos que estimen una referencia para la corriente sin que dependan de la carga. Para ello existen algoritmos formales de estimación bien establecidos. De hecho, algunos de estos algoritmos ya se han aplicado al problema en cuestión. Sin embargo, los algoritmos de estimación de la corriente deben ser suficientemente sencillos para que puedan ser implementados con la electrónica de uso habitual en el control de convertidores. De lo contrario, su aplicación quedará relegada a situaciones especiales. Por supuesto, si se utiliza un estimador para la corriente, es necesario efectuar el análisis de estabilidad del conjunto convertidor–controlador–estimador en cada caso.

5.3. Una ley de control indirecto

En esta sección se presenta una ley de control con base en la idea del control indirecto. El procedimiento es igualmente aplicable a los convertidores buck, boost y buck-boost y puede

extenderse con algunas consideraciones y un análisis más complicado al convertidor Ćuk. Se presenta aquí el desarrollo para el convertidor boost, cuyo modelo promedio se reescribe a continuación:

$$L\dot{\tilde{z}}_1 = v_{in} - d'\tilde{z}_2 \quad (151a)$$

$$C\dot{\tilde{z}}_2 = -\frac{\tilde{z}_2}{R} + d'\tilde{z}_1 \quad (151b)$$

Dado el modelo (151), la generación de un voltaje senoidal se puede plantear como el diseño de un control d' tal que el objetivo

$$|z_2 - z_{2d}| \leq \Delta \quad (152)$$

y las restricciones

$$z_2(t) > 0, \quad d(t) \in [0, 1] \quad \forall t > 0 \quad (153)$$

se cumplan para $t > t_0$, para algún t_0 .

Se propone la siguiente ley de control:

$$d' = \frac{v_{in} + k(\tilde{z}_1 - z_{1d})}{\tilde{z}_2} \quad (154)$$

donde k es una constante positiva y z_{1d} es una función diferenciable y serán determinadas más adelante.

Sustituyendo el control (154) en el modelo (151) resulta el sistema en lazo cerrado:

$$L\dot{\tilde{z}}_1 = -k(\tilde{z}_1 - z_{1d}) \quad (155a)$$

$$C\dot{\tilde{z}}_2 = -\frac{\tilde{z}_2}{R} + \frac{\tilde{z}_1 \left(v_{in} + k(\tilde{z}_1 - z_{1d}) \right)}{\tilde{z}_2} \quad (155b)$$

Aplicando la transformación:

$$\xi = \tilde{z}_2^2, \quad (156)$$

al sistema (155) se tiene que

$$L\dot{\tilde{z}}_1 = -k(\tilde{z}_1 - z_{1d}) \quad (157a)$$

$$C\dot{\xi} = -\frac{2}{R} \left\{ \xi - R\tilde{z}_1 \left(v_{in} + k(\tilde{z}_1 - z_{1d}) \right) \right\} \quad (157b)$$

Como se puede observar, con el control (154) y la transformación (156) se obtiene un sistema en lazo cerrado con una estructura triangular. Más aún, las dos ecuaciones del sistema en lazo cerrado (157) se pueden ver como ecuaciones diferenciales lineales con entradas variantes en el tiempo. Esta estructura simplifica significativamente el análisis. De hecho, si z_{1d} está acotada, la estabilidad se sigue directamente.

Si z_{1d} es constante, entonces de (157a) se tiene que $\tilde{z}_1 \rightarrow z_{1d}$, y de (157b), ξ converge a $Rv_{in}z_{1d}$, por lo que de acuerdo a (156), si $z_{1d} = z_{2d}^2/(Rv_{in})$ se cumple que $z_2 \rightarrow z_{2d}$. Es decir, con el control (154) se realiza la conversión cd-cd sin error en estado estacionario.

Para el caso de seguimiento, se podrían emplear las aproximaciones de z_{1d} desarrolladas en (Sira-Ramírez, 2001; Zinober *et al.*, 1998) o bien utilizar la idea de la inversión del tiempo presentada en la sección 4.3. En el caso de las aproximaciones presentadas en (Sira-Ramírez, 2001; Zinober *et al.*, 1998) es de esperar que entre mejor sea la aproximación, menor será el error en estado estacionario. Sin embargo, es difícil sintetizar con circuitos las expresiones de estas aproximaciones, más allá de la primera aproximación. A continuación, se analiza el error en estado estacionario cuando se usa la primera aproximación para z_{1d} ,

esto es, considerando que

$$z_{1d}(t) = \frac{z_{2d}^2(t)}{Rv_{in}} \quad (158)$$

El siguiente lema es útil para el análisis del error y se sigue directamente de resultados conocidos de sistemas lineales.

Lema 15 *Sea el sistema*

$$\dot{z} = -az + b(t)$$

donde $z(t) \in \mathfrak{R}$, $a > 0$, $b(t)$ es función real, acotada tal que $b^- \leq b(t) \leq b^+$. Sea $z(t)$ una solución de la ecuación (15) con condiciones iniciales $z(0) = z_0$. Si $b^-/a \leq z_0 \leq b^+/a$, entonces $b^-/a \leq z(t) \leq b^+/a$, Es decir, el intervalo $[b^-/a, b^+/a]$ es un conjunto invariante para el sistema (15). Si además, $-b^- = b^+ = |b(t)| = B$, entonces se tiene que

$$\|z\| \leq \frac{B}{a},$$

donde $\|s\|$ denota la norma infinita de la función $s(\cdot)$.

Demostración. La demostración de este resultado se sigue directamente de la solución general del sistema (15) (ver (Chen, 1998; Kailath, 1979)) ■

Análisis de error

Sea $e_{\tilde{z}_1}$ el error en la corriente del inductor, es decir,

$$e_{\tilde{z}_1} = \tilde{z}_1 - z_{1d}$$

la dinámica de $e_{\tilde{z}_1}$ se puede obtener de (157a) resultando

$$\dot{e}_{\tilde{z}_1} = -\frac{k}{L}e_{\tilde{z}_1} - \dot{z}_{1d} \quad (159)$$

Aplicando el lema 15 se obtiene que, si se cumple $|e_{z_1}(0)| \leq L \|\dot{z}_{1d}\|/k$, entonces

$$\|e_{z_1}\| \leq \frac{L}{k} \|\dot{z}_{1d}\| \approx \frac{2L}{kRv_{in}} \|z_{2d}\dot{z}_{2d}\| \quad (160)$$

Si k se escoge de tal manera que

$$k \gg L \|\dot{z}_{1d}\| \approx \frac{2L}{Rv_{in}} \|z_{2d}\dot{z}_{2d}\|$$

entonces,

$$e_{z_1} \simeq 0$$

así, $\tilde{z}_1(t) \simeq z_{1d}(t)$.

Si se considera la aproximación (5.3), entonces (157b) toma la forma

$$\dot{\xi} = -\frac{2}{RC}\xi + \frac{2v_{in}z_{1d}}{C} \quad (161)$$

Definiendo $e_\xi \triangleq \xi - \xi_d \triangleq \tilde{z}_2^2 - z_{2d}^2$ y tomando en cuenta (158), se tiene que e_ξ se puede escribir como

$$e_\xi = \xi - Rv_{in}z_{1d} \quad (162)$$

De (161), la dinámica de e_ξ está dada por

$$\dot{e}_\xi = -\frac{2}{RC}e_\xi - Rv_{in}\dot{z}_{1d} \quad (163)$$

La aplicación de la lema 15 proporciona una cota para e_ξ . Si $|e_\xi(0)| \leq RC \|z_{2d}\dot{z}_{2d}\|$ entonces se cumple que

$$\|e_\xi\| \leq \frac{R^2Cv_{in}}{2} \|\dot{z}_{1d}\| \approx RC \|z_{2d}\dot{z}_{2d}\| \quad (164)$$

Observación 16 Para obtener la cota (164), se usó la aproximación (5.3), pero aún si tal aproximación no se usara, también se puede obtener una cota para e_ξ . De (157b), (5.3), (162), y después de algunas simplificaciones algebraicas se obtiene:

$$\dot{e}_\xi = -\frac{2}{RC}e_\xi + \frac{2e_{z_1}}{C}(v_{in} + ke_{z_1} + kz_{1d}) - Rv_{in}\dot{z}_{1d} \quad (165)$$

Aplicando ahora el lema 15 a (165) y usando (160) resulta

$$\|e_\xi\| \leq \frac{RL}{k} \|\dot{z}_{1d}\| \left(v_{in} \left(1 + \frac{kRC}{2L} \right) + L \|\dot{z}_{1d}\| + k \|z_{1d}\| \right) \quad (166)$$

Aún cuando la cota estimada por (162) es más pequeña que el error real, es una estimación mejor que la dada por (166), ya que, esta última fue obtenida sustituyendo en cada suma el peor de los casos, pero el peor de los casos no se presenta al mismo tiempo en todas las sumas.

Relación entre los parámetros del convertidor y el error de seguimiento

El error de seguimiento está estrechamente relacionado con los parámetros del convertidor, como se analiza a continuación. De (154) se sigue que, para que las restricciones (153) se satisfagan, se debe cumplir que $\tilde{z}_2(t) > v_{in} + ke_{z_1}(t) > 0$, o bien

$$ke_{x_1}(t) > -v_{in} \quad (167)$$

Escribiendo (160) en la forma:

$$-\frac{2L}{Rv_{in}} \|z_{2d}\dot{z}_{2d}\| \leq ke_{z_1}(t) \leq \frac{2L}{Rv_{in}} \|z_{2d}\dot{z}_{2d}\| \quad (168)$$

se observa de (168), que para garantizar (167), la inductancia L debe satisfacer la cota

$$L < \frac{Rv_{in}^2}{2\|z_{2d}\dot{z}_{2d}\|} \quad (169)$$

De (164) se tiene que si la capacitancia C satisface

$$C < \frac{\Delta_{\xi}}{R \|z_{2d} \dot{z}_{2d}\|} \quad (170)$$

entonces se cumple que $\|e_{\xi}\| < \Delta_{\xi}$

De las expresiones (169) y (170), se puede concluir que entre más pequeños son los parámetros R , L , y C menor es el error de seguimiento. Sin embargo, en la sección 4.4.2 se observó que estos parámetros deben ser grandes para mantener un voltaje de rizo razonable. Las relaciones entre los parámetros del convertidor boost y el rizo en corriente y voltaje están dadas por las expresiones (107). Tales relaciones fueron obtenidas para el caso de regulación. Para el caso de seguimiento no es válida la notación \bar{z}_2 y \bar{d} , en su lugar se debe tomar el peor de los casos, esto es, sustituir \bar{z}_2 y d por sus valores máximos en estado estacionario. Para \bar{z}_2 es $\|z_{2d}\|$, mientras que el valor máximo de d se puede obtener de (154) resultando

$$\text{máx}(d) = 1 - \text{mín}(d') \approx 1 - \frac{v_{in}}{\|z_{2d}\|}$$

Así de (107), tenemos que para el caso de seguimiento los valores mínimos de L y C son

$$L_{min} = \frac{v_{in} (\|z_{2d}\| - v_{in}) T}{\|z_{2d}\| \Delta_{z_1}}, \quad C_{min} = \frac{\|z_{2d}\| - v_{in}}{R \Delta_{z_2}} T \quad (171)$$

Combinando (169) y (171), resulta:

$$\frac{v_{in} (\|z_{2d}\| - v_{in}) T}{\|z_{2d}\| \Delta_{z_1}} < L < \frac{R v_{in}^2}{2 \|z_{2d} \dot{z}_{2d}\|}. \quad (172)$$

De la misma manera, (170) y (171) llevan a

$$\frac{\|z_{2d}\| - v_{in}}{R \Delta_{z_2}} T < C < \frac{\Delta_{\xi}}{R \|z_{2d} \dot{z}_{2d}\|} \quad (173)$$

Ejemplo

Si $z_{2d} = a + b \sin(\omega t)$ con los parámetros de la tabla II resulta que

$$\|z_{2d}\dot{z}_{2d}\| = 4.9643 \times 10^6, \quad \|z_{1d}\| \approx \frac{\|z_{2d}^2\|}{Rv_{in}} = 21.0069$$

Con dichos parámetros se satisface (172), Sin embargo, (173) sólo se satisface si $\Delta_\xi \geq 11199.4$. Este valor de Δ_ξ representa casi el 25% de $\|\xi\| = \|z_{2d}^2\|$, por lo que se prevee que e_{z_2} sea significativo.

Para aplicar el control (154) al convertidor boost, es necesario determinar el valor de k . Sustituyendo en (160) los valores conocidos se tiene que $\|e_{z_1}\| < 2.06846/k$. Un valor de $k = 5$ hace que $\|e_{z_1}\| < 0.4137$, que es alrededor del 2% de la corriente máxima $\|z_{1d}\|$

En la figura 26 se muestra el desempeño del controlador aplicado al convertidor boost. La figura fue obtenida empleando el modelo conmutado (35) utilizando un interruptor ideal. Como se preveía, el error es significativo. En la figura 27 se muestra una simulación bajo las mismas condiciones, excepto que la frecuencia del voltaje a generar es ahora $\omega = 2\pi 20$. Como se observa, el error entre el voltaje generado y el deseado e_{z_2} se reduce significativamente. Con el nuevo valor de ω resulta $\|z_{2d}\dot{z}_{2d}\| = 1.6446 \times 10^6$. Sustituyendo este valor en (160) se tiene que $\|e_{z_1}\| \leq 0.1379$, que representa el 0.6% de $\|z_{1d}\|$. Por otra parte, de (164) resulta $\|\Delta_\xi\| = 3733.15$, que representa el 7.7% de $\|\xi\|$. Todos estos valores concuerdan con lo obtenido en la simulación.

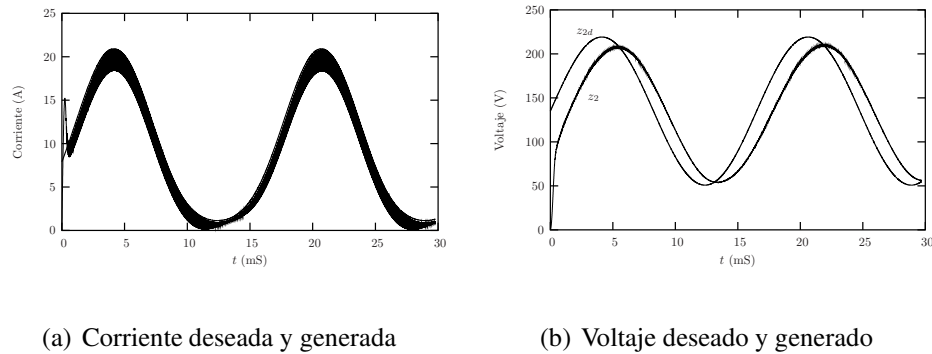


Figura 26: Desempeño del controlador (154) con $z_{2d} = a + b \sin(\omega t)$, $\omega = 2\pi 60$.

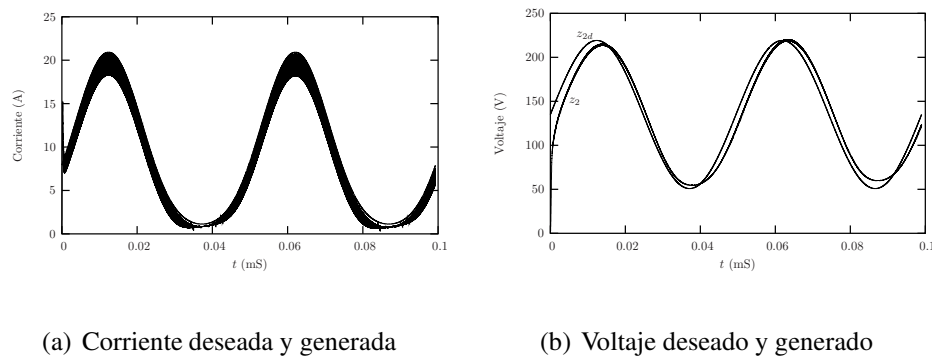


Figura 27: Desempeño del controlador (154) con $z_{2d} = a + b \sin(\omega t)$, $\omega = 2\pi 20$.

5.4. Control por “backstepping”

Para obtener la ley de control presentada en esta sección primero se diseña un controlador para el modelo promedio empleando nuevamente la idea del control indirecto. Sin embargo, a diferencia de todos los controladores mencionados anteriormente, no se considera que se cuenta con una referencia para la corriente en el inductor. Por el contrario, pensando en la corriente como un control virtual para el voltaje de salida, se busca primero una expresión deseada para la corriente en el inductor. Posteriormente, se diseña un controlador que haga que la corriente sea igual a la expresión deseada. Ésta es la idea básica del control por “backstepping” propuesto y formalizado en (Krstic *et al.*, 1995). Esta idea ya ha sido aplicada al

convertidor boost (Alvarez-Ramirez *et al.*, 2001; Alvarez-Ramirez y Espinosa-Pérez, 2002). Sin embargo, en esos trabajos se utiliza el modelo lineal del convertidor boost. Aquí se aplica al modelo no lineal. El modelo no lineal no tiene la estructura triangular requerida por la metodología de “backstepping”. Pero como se verá a continuación, el hecho de que el ciclo de trabajo d es siempre positivo sugiere que la metodología se puede aplicar también en este caso.

El control obtenido en esta sección tiene serias desventajas que restringen la posibilidad de su aplicación práctica. Sin embargo, combinándola con la idea que será planteada en la sección 5.5 estas desventajas se eliminan obteniéndose un controlador por modos deslizantes que resulta ser más robusto y sencillo.

Considere el modelo promedio normalizado dado por las ecuaciones (44) que se reescribe a continuación

$$\dot{\tilde{x}}_1 = 1 - d' \tilde{x}_2 \quad (174a)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\tilde{x}_2}{R_n} + d' \tilde{x}_1 \quad (174b)$$

con el objetivo de control $|x_2 - x_{2d}| \leq \Delta_{x_2}$.

Considérese la siguiente ecuación como un sistema dinámico que se desea controlar

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\tilde{x}_2}{R_n} + d' \tilde{x}_{1d} \quad (175)$$

donde \tilde{x}_{1d} es la variable de control y, por ahora, d' es un parámetro variable positivo. Nótese que el sistema (175) es igual a la ecuación (174b), excepto que \tilde{x}_1 ha sido reemplazado por \tilde{x}_{1d} . El sistema (175) se puede controlar con la siguiente ley de control

$$\tilde{x}_{1d} = -k_p (\tilde{x}_2 - x_{2d}) - k_i \int_0^t (\tilde{x}_2 - x_{2d}) dt \quad (176)$$

donde k_p y k_i son constantes positivas que serán determinadas después.

Si se hace $\tilde{x}_1 \rightarrow \tilde{x}_{1d}$ en el sistema (174), cabe esperar que $\tilde{x}_2 \rightarrow x_{2d}$. De la ecuación (174a), se observa que a d' se le puede asignar una expresión para hacer que \tilde{x}_1 se acerque a x_{1d} . Igualando $\dot{\tilde{x}}_1$ a $\dot{\tilde{x}}_{1d}$, de (174a) se tiene que:

$$d' = \frac{1 - \dot{\tilde{x}}_{1d}}{\tilde{x}_2} = \frac{1 + k_p (\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{x}_{2d}) + k_i (\tilde{x}_2 - x_{2d})}{\tilde{x}_2} \quad (177)$$

El controlador (177) tiene dos fuertes desventajas desde el punto de vista práctico. La primera desventaja es que es necesario dividir dos voltajes. Los divisores son dispositivos que requieren un ajuste individual muy cuidadoso para un buen funcionamiento, por lo que es preferible eliminarlos siempre que sea posible. La otra desventaja es aún más fuerte: se requiere la derivada del voltaje de salida. Un control en el que interviene una derivada es impráctico en el caso de los convertidores, ya que debido a la conmutación, las variables contienen frecuencias muy altas. Se puede sustituir la derivada de \tilde{x}_2 que aparece en (177) por su expresión dada por (174b). Sin embargo, esto llevaría a un control más difícil de implementar y dependiente de la carga. Efectivamente, sustituyendo (174b) en (177) y después de despejar d' se llega a

$$d' = \frac{1 + k_i (\tilde{x}_2 - x_{2d}) - \frac{k_p}{R} \tilde{x}_2 - k_p \dot{x}_{2d}}{\tilde{x}_2 - k_p \tilde{x}_1} \quad (178)$$

Para ilustrar el desempeño del controlador (177) se puede obtener una expresión de dicho controlador para el modelo no normalizado, o bien se puede aplicar a un convertidor con parámetros normalizados. Se escoge aquí esta última opción. Aplicando el proceso de normalización descrito en la sección 3.4 al convertidor boost con parámetros dados en la tabla II, se obtiene que los parámetros normalizados del convertidor son $v_{in} = L = C = 1$ y $R = 15.02$.

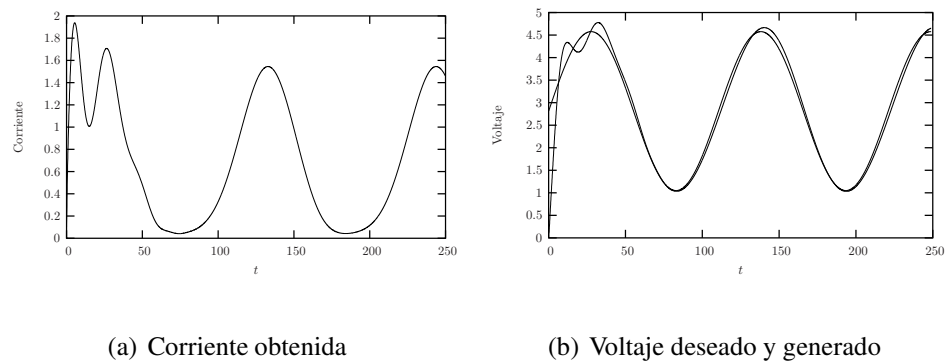


Figura 28: Desempeño del controlador (177).

Normalizando también los parámetros de la señal a seguir resulta $x_{2d} = a_n + b_n \sin(\omega_n t)$, con $a_n = 2.8125$, $b_n = 1.7708$ y $\omega_n = 0.0566$. Con estos datos es posible aplicar el controlador (177) al modelo normalizado. La figura 28 muestra los resultados obtenidos. Los parámetros del controlador empleados son $k_p = k_i = 0.3$. En la figura se muestra el notable buen desempeño de este controlador. Sin embargo, en la simulación de la figura 28 se empleó el modelo promedio, que implica suavidad en las variables de estado. Si se usa el modelo discontinuo (con un bloque PWM entre el control y el convertidor), entonces es común que se tenga inestabilidad numérica en las simulaciones, ocasionada por el término derivativo.

5.5. Obtención de controladores discontinuos a partir de un controlador promedio

En esta sección se plantea una idea que sugiere cómo construir controladores por modos deslizantes a partir de modelos promedio. Esta idea se basa en la relación que existe entre el control equivalente y el control promedio.

En la sección 3.2.2 se observó que el significado físico del control equivalente es el promedio de un control por modos deslizantes. Por otra parte, en la sección 3.3.3 se mostró que un control promedio es también el promedio de la señal pulsante a la salida del bloque PWM. Esto sugiere que se puede ver al control promedio como el control equivalente asociado a un control por modos deslizantes.

Considere el sistema controlado

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u_{sm} \quad (179)$$

$$u_{sm} = \begin{cases} u_{sm}^+ & \text{si } \sigma(\xi) < 0 \\ u_{sm}^- & \text{si } \sigma(\xi) > 0 \end{cases} \quad (180)$$

Cuando la trayectoria del sistema evoluciona sobre la superficie deslizante $\sigma = 0$, la ecuación que gobierna la evolución de esta trayectoria está dada por

$$\dot{\tilde{\xi}} = f(\tilde{\xi}) + g(\tilde{\xi})u_{eq} \quad (181)$$

con u_{eq} la solución para u de $\dot{\sigma} = 0$. Además $u_{eq} \approx \text{prom}(u)$. Por otra parte, si d es la entrada de un bloque PWM cuya salida es u_{pwm} , entonces $d = \text{prom}(u_{pwm})$. De aquí, se puede plantear que si se tiene una expresión para el control promedio d , se puede pensar que $d = u_{eq}$ con u_{eq} el control equivalente asociado a una superficie deslizante hipotética que se pretende determinar. Esto es, d se puede ver como la solución para u de la ecuación

$$\dot{\sigma}(x, u) = 0 \quad (182)$$

Integrando (182) con respecto a t se puede encontrar una expresión para una superficie deslizante $\sigma(x, u) = 0$ y diseñar la política de conmutación para hacer tal superficie atractora.

El razonamiento anterior es heurístico y sólo permite sugerir superficies deslizantes a partir de controladores promedio. Para cada superficie deslizante obtenida de esta manera es necesario encontrar la política de conmutación que la hace atractora y encontrar, si existe, una región de estabilidad de la misma.

Como ejemplo del razonamiento anterior se utilizará el controlador (154) que se reescribe a continuación

$$u_{eq} = \frac{v_{in} + k(\tilde{z}_1 - z_{1d})}{\tilde{z}_2} \quad (183)$$

donde se ha reemplazado d por u_{eq} para hacer explícito que se está viendo a d como un control equivalente. La ecuación (183) puede escribirse como

$$v_{in} - u_{eq}\tilde{z}_2 + k(\tilde{z}_1 - z_{1d}) = 0 \quad (184)$$

Dado que u_{eq} es la solución para u de (182), integrando (184) se tiene que d en (154) puede verse como el control equivalente de la superficie

$$\sigma = \int_0^t (v_{in} - uz_2) dt + k \int_0^t (z_1 - z_{1d}) dt \quad (185)$$

De esta manera, se ha obtenido una superficie deslizante a partir de un controlador promedio.

Aplicando este procedimiento al controlador (177) se obtiene un controlador con notables características. De los controladores propuestos en la tesis, es el más factible de aplicarse en la práctica, por lo que se hizo un análisis detallado de dicho controlador. Los resultados obtenidos se presentan en el siguiente capítulo.

5.6. Conclusiones

En este capítulo se ha hecho una revisión de algunos de los controladores más representativos que, empleando técnicas no lineales, han sido propuestos para los convertidores básicos. A través de la discusión de estos controladores se mostró que tienen algunas desventajas evidentes, además de que fueron propuestos para el problema de conversión cd-cd.

Posteriormente, se propusieron dos nuevos enfoques de control para el problema de conversión cd-ca, teniendo en cuenta la sencillez de implementación. Ambos enfoques hacen un seguimiento aproximado de una señal de referencia. El primero de estos enfoques se trata de una ley de control indirecta que hace que el convertidor tenga una estructura triangular en lazo cerrado. Dicha estructura hace posible analizar el error entre el voltaje generado y la referencia, estableciendo la relación que existe entre los parámetros del sistema, el error de seguimiento y las características de la señal de referencia. El segundo enfoque hace uso de la técnica de control por “backstepping” para diseñar un controlador sencillo que arroja resultados sobresalientes en simulación. Sin embargo, ambos controladores propuestos tienen desventajas importantes. El primero depende de la carga, al igual que muchos controladores propuestos previamente. El segundo, a pesar de su sencillez, no es adecuado para convertidores electrónicos, ya que involucra la derivada de señales con un componente de alta frecuencia y requiere de un divisor.

Finalmente, empleando como argumento la relación que existe entre control equivalente de control por modos deslizante y el control promedio, se planteó un procedimiento para construir controladores por modos deslizantes a partir de controladores PWM. Se dieron

ejemplos de dicho procedimiento. La aplicación de esta idea al control por “backstepping” resulta en un controlador notablemente sencillo, que elimina las desventajas mencionadas del control por “backstepping”, manteniendo un excelente desempeño. Este controlador se analiza con detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Control por modos deslizantes con base en “backstepping”

6.1. Introducción

En este capítulo se hace uso de los resultados e ideas expuestas en los capítulos anteriores. La combinación de material presentado en las secciones 5.4 y 5.5 permiten obtener un controlador no lineal, robusto ante cambios en la carga y el voltaje de entrada. Quizá más importante desde el punto de vista práctico es que con todas estas características, el control obtenido elimina las desventajas del controlador (177) señaladas en la sección 5.4; es decir; no depende de la carga, sólo requiere de la medición del voltaje y se puede implementar con componentes de uso estándar en electrónica de potencia. Siguiendo en la línea del capítulo anterior, a lo largo del presente capítulo se toma el convertidor boost como ejemplo.

Varios modelos son empleados en este capítulo. El controlador (177), que es el punto de

partida, se basa en el modelo promedio normalizado. Con base en este modelo se obtiene un control por modos deslizantes para el modelo discontinuo normalizado, este último modelo se usa también para el análisis de estabilidad. Por último, en la discusión de algunos aspectos técnicos para la implementación del controlador se usa el modelo discontinuo sin normalizar.

6.2. Obtención del controlador

Para facilidad de referencia se reescribe a continuación el modelo normalizado del convertidor boost

$$\dot{x}_1 = 1 - d'x_2 \quad (186a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + d'x_1 \quad (186b)$$

y el objetivo de control:

$$|x_2(t) - x_{2d}(t)| \leq \Delta, \quad \forall t > t_0 \text{ para algún } t_0. \quad (187)$$

Observación 17 *A lo largo de este capítulo se usa d' y u' en lugar de d y u porque acorta la notación. Sin embargo, como se menciona en la observación 2, los resultados se pueden expresar en términos de d y u .*

En la sección 5.4 se propuso el controlador promedio

$$d' = \frac{1 - \dot{\tilde{x}}_{1d}}{\tilde{x}_2} = \frac{1 + k_p(\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{x}_{2d}) + k_i(\tilde{x}_2 - x_{2d})}{\tilde{x}_2} \quad (188)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 5.5, el controlador (188) se puede reescribir como:

$$1 - d'\tilde{x}_2 + k_p(\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{x}_{2d}) + k_i(\tilde{x}_2 - x_{2d}) = 0 \quad (189)$$

De acuerdo a lo expuesto en la sección 5.5, se puede pensar que d es el control equivalente asociado a la superficie deslizante

$$\sigma(x, \tau) = \int_0^{\tau} (1 - u'(s)x_2(s)) ds + k_p(x_2(\tau) - x_{2d}) + k_i \int_0^{\tau} (x_2(s) - x_{2d}) ds \quad (190)$$

Que junto con la política de conmutación

$$u' = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma < 0 \\ 1 & \text{si } \sigma > 0 \end{cases} \quad \text{con } \sigma = z_1 - z_{1d} \quad (191)$$

constituye un controlador por modos deslizantes para el sistema (186)

Note que σ en (190) no depende de la carga. Cuando la trayectoria del sistema evoluciona sobre la superficie, el ciclo de trabajo varía en forma no lineal y está dado por la expresión (188). Además, como se verá en la sección 6.5, la versión no normalizada de la expresión (190) depende del voltaje de entrada, por lo que éste es medido y cualquier desviación es corregida rápidamente por el control. En el resto del capítulo se examinan varios aspectos del controlador (190–191).

6.3. Relación con otros controladores

Es interesante examinar la relación que tiene el controlador(190–191) con otros controladores.

1. Modos deslizantes estático

En su versión normalizada, la superficie deslizante del controlador presentado en la

sección 5.2.1 se escribe como

$$\sigma = x_1 - x_{1d}; \quad x_{1d} = \frac{x_{2d}^2}{R_n} \quad (192)$$

Si en (192) se sustituye x_1 por $\int_0^t (1 - u(s)y(s)) ds$ y se cambia la definición de x_{1d} por $x_{1d} \rightarrow k_p(x_1(t) - x_{1d}(t)) + k_i \int_0^t (x_1(t) - x_{1d}(t)) dt$, entonces se obtiene (190). Es decir, la superficie (190) se puede ver como la superficie (192), pero con una forma distinta de sintetizar x_1 y x_{1d} .

2. Reconstrucción integral de estados

Con base en la técnica del reconstructor integral de estados (Sira-Ramírez y Hernández, 2002) en (Sira-Ramírez *et al.*, 2002) se propone la superficie deslizante

$$\sigma = \int_0^t (1 - u'(s)x_2(s)) ds - \frac{x_{2d}^2}{R_n} + k \int_0^t (x_2(s) - x_{2d}(s)) ds \quad (193)$$

Note la similitud entre las superficies (193) y (190). La superficie (193) se construye a partir de la superficie (192), por ello aparece el término $\frac{x_{2d}^2}{R_n}$. Por el contrario, en (190) dicho término no aparece porque x_{1d} fue obtenida de manera distinta, a partir del modelo promedio, empleando la idea del control virtual.

3. Superficies deslizantes dinámicas para sistemas de fase no mínima

En (Shtessel, 1998) se plantea un método general para construir superficies deslizantes dinámicas para el problema de seguimiento de trayectorias en sistemas no lineales de fase no mínima. En lugar de la redefinición de salida, el método emplea el concepto de control virtual. Sin embargo, dicho método sólo se puede aplicar a la clase de sistemas

que se pueden escribir como

$$\dot{x} = Ax + f(x, t) + bu, \quad y = g(x) \quad (194)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$, $u, y \in \mathfrak{R}^1$, y A, b, g son matrices constantes de dimensiones adecuadas.

El par $\{A, b\}$ se considera controlable. Salvo el convertidor buck, los convertidores no se pueden escribir de la forma (194), por lo que el método planteado no se puede aplicar directamente. No obstante, la superficie (190) está relacionada con el método desarrollado en (Shtessel, 1998), en el sentido de que para su obtención se emplean ideas similares: no redefinición de la salida y el concepto de control virtual.

4. Control de corriente programada

Como se mencionó en el capítulo 5, lo que se conoce como control de corriente programada, más que una expresión matemática determinada, consiste en un conjunto de ideas heurísticas trasladadas directamente a un circuito para el que existen muchas variaciones. El esquema del circuito básico se muestra en la figura 25. Supongamos, por ahora, que no existe la señal S_e , entonces, del circuito se tiene

$$u' = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma < 0 \end{cases}, \quad \sigma = S_n - V_c \quad (195)$$

Como S_n es proporcional a la corriente en el inductor y $G(s)$ es normalmente un controlador PI , entonces se puede escribir

$$\sigma = x_1(t) - k_p(x_2(t) - x_{2d}(t)) - k_i \int_0^t (x_2(s) - x_{2d}(s)) ds \quad (196)$$

Haciendo la sustitución de x_1 por $\int_0^t (1 - u'(s)x_2(s))$ entonces de (196) se obtiene (190). Es decir, el control de corriente programada está relacionado con la generación de una superficie deslizando dada por (196).

Como se observó desde que el control de corriente programada fue propuesto, el circuito de la figura 25, con $S_e = 0$, esto es, la implementación tal cual de (196), frecuentemente resulta en un sistema inestable, particularmente, si el ciclo de trabajo es mayor que 0.5. Esto se debe a que sin la señal S_e , la conmutación de u es de muy alta frecuencia e incontrolada lo cual, combinado con los efectos no lineales inherentes a los componentes electrónicos, lleva el sistema a la inestabilidad. Para eliminar este efecto, en la práctica, se introduce la señal S_e . Existen varios procedimientos para calcular la amplitud de esta señal.

La discusión anterior muestra que hay una estrecha relación (no observada hasta ahora) entre el control de corriente programada y el control por modos deslizantes con la superficie (196), que a su vez está relacionada con la superficie (190) propuesta en esta tesis. No obstante, es importante señalar las diferencias:

- a) La obtención del controlador (190) estuvo guiada por conceptos establecidos formalmente en teoría del control, particularmente el concepto de control virtual y la relación entre el control equivalente y el control promedio. El plantear la expresión precisa del controlador (en lugar de plantear primero el circuito) permite el uso de herramientas formales para el análisis de estabilidad en lazo cerrado del sistema y plantear un procedimiento sistemático de diseño. En esta tesis el

- análisis de estabilidad se hace empleando el modelo no lineal (ver sección 6.4).
- b) En el controlador (190) no es necesario medir la corriente x_1 , lo que elimina uno de los mayores problemas en el diseño y puesta a punto del control de corriente programada.
- c) Para limitar la frecuencia de conmutación del interruptor, en este trabajo se propone introducir una capa frontera, el cual es un método formalmente analizado en (Utkin, 1991). En la práctica, la creación de esta capa frontera alrededor de la superficie deslizante se hace introduciendo un lazo de histéresis (ver sección 6.4).

6.4. Análisis de estabilidad

La ley de control (190)-(191) aplicada al sistema (186) mantiene la estabilidad y mejora notablemente el desempeño dinámico. La prueba de esta aseveración se hace en varias etapas. Primero, se demostrará que la trayectoria del sistema entra un régimen deslizante partiendo desde cualquier punto. Posteriormente, se demuestra que para el caso de que x_{2d} sea constante (conversión cd-cd), bajo ciertas condiciones, el sistema evoluciona hacia el punto de equilibrio deseado. Por último, se analiza la estabilidad para el caso de que x_{2d} sea variable.

Lema 18 *Considere el sistema*

$$\dot{x}_1 = 1 - u'x_2 \quad (197)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + u'x_1 \quad (198)$$

Donde u' es determinada de acuerdo al control

$$u' = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma < 0 \\ 1 & \text{si } \sigma > 0 \end{cases} \quad (199)$$

con σ dado por

$$\sigma(x, \tau) = \int_0^\tau (1 - u'(s)x_2(s))ds + k_p(x_2(\tau) - x_{2d}(\tau)) + k_i \int_0^\tau (x_2(s) - x_{2d}(s))ds \quad (200)$$

Si se cumple que

$$0 < k_i - \frac{k_p}{R_n} \quad (201a)$$

$$k_i < k_i x_{2d} + k_p \dot{x}_{2d} < 1 \quad \forall \tau \quad (201b)$$

$$\left(1 - \frac{k_p}{R_n} x_{2d}\right) (x_{2d} - 1) > -k_p \dot{x}_{2d} \quad \forall \tau \quad (201c)$$

Entonces cualquier trayectoria del sistema entra a un modo deslizante sobre la superficie

$$\sigma(x, \tau) = 0$$

Demostración. De (197) y (200) se obtiene

$$\dot{\sigma} = 1 - u'x_2 + k_p \left(u'x_1 - \frac{x_2}{R_n}\right) - k_p \dot{x}_{2d} + k_i (x_2 - x_{2d}) \quad (202)$$

Se mostrará primero que la superficie $\sigma = 0$ es localmente atractora, es decir, $\sigma \dot{\sigma} < 0$ para alguna región cercana a la superficie $\sigma = 0$. Para ello se consideran dos casos.

Caso 1: $\sigma < 0$. En este caso, de acuerdo a la política de conmutación (199), $u' = 0$, por lo que de (202), la expresión para $\dot{\sigma}$ queda como

$$\dot{\sigma} = \left(k_i - \frac{k_p}{R_n}\right) x_2 + (1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d}) \quad (203)$$

Así, cuando $\sigma < 0$ entonces, $\dot{\sigma} > 0$ en el conjunto

$$\left\{ x \in \mathfrak{R}^2 \mid \left(k_i - \frac{k_p}{R_n} \right) x_2 + 1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d} > 0, \forall \tau > 0 \right\} \quad (204)$$

Caso 2: $\sigma > 0$. En este caso, $u' = 1$ y la expresión para $\dot{\sigma}$ se puede escribir como

$$\dot{\sigma} = (k_p x_1 - x_2) + \left(k_i - \frac{k_p}{R_n} \right) x_2 + (1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d})$$

Así, cuando $\sigma > 0$, se tiene que $\dot{\sigma} < 0$ en el conjunto

$$\left\{ x \in \mathfrak{R}^2 \mid x_2 - k_p x_1 > \left(k_i - \frac{k_p}{R_n} \right) x_2 + 1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d}, \forall \tau > 0 \right\} \quad (205)$$

Combinando los dos casos, $\sigma \dot{\sigma} < 0$ en la intersección de los conjuntos (204) y (205), es decir, en el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathfrak{R}^2 \mid 0 < \left(k_i - \frac{k_p}{R_n} \right) x_2 + 1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d} < x_2 - k_p x_1, \forall \tau > 0 \right\} \quad (206)$$

Note que el punto $x_e = (x_{2d}^2/R_n, x_{2d})$ está en el conjunto \mathcal{S} . Esto se puede comprobar verificando que las dos desigualdades que definen el conjunto \mathcal{S} en (206) se cumplen en dicho punto. Esto es:

i)

$$\left(k_i - \frac{k_p}{R_n} \right) x_2 + 1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d} > 0 \quad (207)$$

ii)

$$x_2 - k_p x_1 > \left(k_i - \frac{k_p}{R_n} \right) x_2 + 1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d} \quad (208)$$

se cumplen para $(x_1, x_2) = x_e$. La desigualdad (207) se cumple, ya que, de (201a) y (201b) se tiene que $k_i - k_p/R_n > 0$ y $1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d} > 0$. La desigualdad (208) también se cumple ya que en el punto x_e puede reducirse a la desigualdad (201c).

De (202) el control equivalente, (ver sección 3.2.2 y (Utkin, 1991)) resulta

$$u'_{eq} = \frac{\left(k_i - \frac{k_p}{R_n}\right)x_2 + (1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d})}{x_2 - k_p x_1} \quad (209)$$

Como consecuencia, $0 < u'_{eq} < 1$ en el conjunto \mathcal{S} .

Dado que $\sigma \dot{\sigma} < 0$ y $0 < u'_{eq} < 1$ en el conjunto \mathcal{S} , si la trayectoria del sistema intersecta la superficie $\sigma = 0$ en un punto $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}$, se produce un movimiento deslizante. En la parte restante de la prueba se demuestra que cualquier trayectoria eventualmente intersecta la superficie $\sigma = 0$ en un punto dentro del conjunto \mathcal{S} .

Si en determinado momento, $\sigma(x) < 0$, entonces $u' = 0$ y las ecuaciones del sistema están dadas por:

$$\dot{x}_1 = 1 \quad (210a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} \quad (210b)$$

En consecuencia, x_1 crece indefinidamente, mientras que $x_2 \rightarrow 0$ exponencialmente. De (202) se tiene que:

$$\dot{\sigma} \rightarrow 1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d} \quad (211)$$

Por la suposición (201b), en algún tiempo la función $\sigma(x)$ empieza a incrementarse a lo largo de la trayectoria del sistema hasta que eventualmente pasa por cero, es decir, la trayectoria intersecta la superficie $\sigma = 0$. En el caso contrario, si $\sigma(x) > 0$ entonces $u' = 1$ y las ecuaciones del sistema adquieren la forma,

$$\dot{x}_1 = 1 - x_2 \quad (212a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + x_1 \quad (212b)$$

De (212) se tiene que $x \rightarrow (1/R_n, 1)$ exponencialmente y,

$$\dot{\sigma} \rightarrow k_i(1 - x_{2d}) - k_p \dot{x}_{2d}$$

Por las suposición (201b), en algún momento $\sigma(x)$ empieza a decrecer a lo largo de la trayectoria del sistema hasta que eventualmente pasa por cero y en este momento la trayectoria intersecta la superficie $\sigma = 0$. Esto demuestra que la trayectoria cruza la superficie $\sigma = 0$ sin importar el punto de partida. A continuación, se demuestra que eventualmente lo hace en un punto que pertenece al conjunto \mathcal{S} .

Note que a partir de las expresiones (210) y (212) que describen el sistema a ambos lados de la superficie $\sigma = 0$ se puede concluir que si, para algún τ_0 , $x_2(\tau) \geq 0$, entonces $x_2(\tau) \geq 0$ para todo $\tau > \tau_0$. De estas mismas expresiones se observa que aún cuando las condiciones iniciales sean tales que $x_2(0) < 0$ eventualmente el sistema alcanza un punto tal que $x_2 \geq 0$. De aquí se puede probar que si $x_2 > 0$ y la trayectoria intersecta la superficie $\sigma = 0$ cuando $\lim \sigma \rightarrow 0^+$ (esto es desde el conjunto $\sigma > 0 \cap x_2 > 0$) se establece un modo deslizante. Esto se puede demostrar por contradicción. Supongamos que $x_2 > 0$ y la trayectoria intersecta la superficie $\sigma = 0$ y no se establece un modo deslizante, es decir, que la trayectoria cruza la superficie. Entonces en el punto de intersección se debe cumplir que al pasar de $\sigma > 0$ a $\sigma < 0$ se debe mantener $\dot{\sigma} < 0$. Cuando $\sigma < 0$, $\dot{\sigma}$ está dada por (203). Por lo tanto, $\dot{\sigma} < 0$ implica

$$x_2 < -\frac{1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d}}{k_i - k_p/R_n} \quad (213)$$

De (201) se sigue que x_2 tendría que ser negativa, lo cual contradice la suposición de que la trayectoria intersecta la superficie desde el conjunto $\sigma > 0 \cap x_2 > 0$.

Así, después de un tiempo la trayectoria del sistema está en un modo deslizante o evoluciona en el conjunto $\sigma(x) > 0$. Note que el punto $(1/R_n, 1)$ a donde tiende el estado cuando el sistema evoluciona en el conjunto $\sigma(x) > 0$ está en \mathcal{S} . ■

Observación 19 *En el caso de que x_{2d} sea constante, las condiciones (201) se simplifican, quedando como*

$$0 < k_i - \frac{k_p}{R_n} < 1, k_p > 0, k_i > 0 \quad (214a)$$

$$1 < x_{2d} < \frac{1}{k_i} \quad (214b)$$

$$(214c)$$

En este caso el conjunto \mathcal{S} que define la región del plano (x_1, x_2) donde el régimen deslizante puede existir, se puede reescribir como

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathfrak{R}^2 \mid x_2 > -\frac{1 - k_i x_{2d}}{k_i - \frac{k_p}{R_n}}, x_2 > \frac{k_p x_1 + 1 - k_i x_{2d}}{1 - \left(k_i - \frac{k_p}{R_n}\right)} \right\} \quad (215)$$

En la figura 29 se muestran, para el caso $x_{2d} = cte.$, puntos y conjuntos importantes que surgen en el lema 18 y el teorema 23 presentado más adelante. La parte sombreada de esta figura corresponde al conjunto (215).

Sustituyendo u'_{eq} dada por (209) en lugar de u' en (35), se obtienen las ecuaciones que describen al sistema en el régimen deslizante. Estas ecuaciones resultan

$$\dot{x}_1 = \frac{-k_p \left(x_1 - \frac{x_2^2}{R_n}\right) - k_i x_2 (x_2 - x_{2d}) + k_p x_2 \dot{x}_{2d}}{x_2 - k_p x_1} \quad (216a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\left(x_1 - \frac{x_2^2}{R_n}\right) + k_i x_1 (x_2 - x_{2d}) - k_p x_1 \dot{x}_{2d}}{x_2 - k_p x_1} \quad (216b)$$

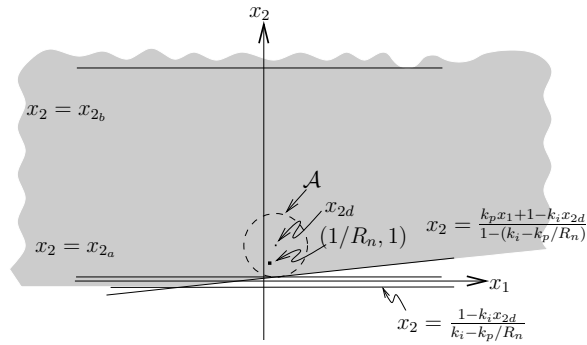


Figura 29: Zona donde un régimen deslizante puede existir.

Observación 20 *El lema 18 no establece que el sistema permanece en la superficie $\sigma = 0$ después de haber entrado en un régimen deslizante. La trayectoria podría abandonar el régimen deslizante. Pero si éste es el caso, el lema establece que la trayectoria eventualmente entra de nuevo en un régimen deslizante. Más aún, después de entrar por primera vez en un régimen deslizante, si la trayectoria abandona la superficie lo hace hacia la zona donde $\sigma > 0$ ($u' = 1$). Esta última aseveración se puede mostrar haciendo $u'_{eq} \rightarrow 0$, eso es, $x_2 \rightarrow -(1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d}) / (k_i - k_p / R_n)$ en (216), lo cual resulta en,*

$$\dot{x}_1 \rightarrow 1, \quad \dot{x}_2 \rightarrow \frac{1 - k_i x_{2d} - k_p \dot{x}_{2d}}{R_n \left(k_i - \frac{k_p}{R_n} \right)}$$

Así, cuando $u'_{eq} \rightarrow 0$, la trayectoria se mueve hacia el conjunto \mathcal{S} , por lo que el sistema no abandona la superficie cuando esto sucede. Es decir, el sistema no puede dejar la superficie hacia el lado donde $\sigma < 0$, ($u' = 0$). Con referencia a la figura 29, el argumento anterior significa que si el sistema está en un régimen deslizante la trayectoria no puede salir del régimen deslizante cruzando la línea horizontal $x_2 \rightarrow -(1 - k_i x_{2d}) / (k_i - k_p / R_n)$ porque en los puntos de la vecindad de esta línea la trayectoria se mueve hacia la región donde se conserva el modo deslizante.

Observación 21 Considerando la relación entre el control equivalente de un controlador por modos deslizantes y el ciclo de trabajo de un control PWM, se puede decir que para que un controlador PWM exhiba un desempeño similar al obtenido con el control (190)-(191), entonces el ciclo de trabajo d del hipotético controlador PWM debería ser igual a $1 - u'_{eq}$ con u'_{eq} dado por (209). Es decir, el controlador (190)-(191) hace que el ciclo de trabajo varíe en una forma fuertemente no lineal.

Observación 22 Nótese que si $k_p = 0$ y $k_i = 1/x_{2d}$, entonces $u'_{eq} = 1/x_{2d}$. Eso es, el desempeño del sistema es el que se tendría en lazo abierto.

Teorema 23 Si las condiciones (214) se cumplen y si $x_{2d} = a$, con a constante, entonces $x_d = (x_{2d}^2/R_n, x_{2d})$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema (186) controlado por (190)-(191).

Demostración. De (216), si $x_{2d} = a$, entonces cuando la trayectoria del sistema evoluciona sobre la superficie $\sigma = 0$, el sistema queda descrito por:

$$\dot{x}_1 = \frac{-k_p \left(x_1 - \frac{x_2^2}{R_n} \right) - k_i x_2 (x_2 - a)}{x_2 - k_p x_1} \quad (217a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\left(x_1 - \frac{x_2^2}{R_n} \right) + k_i x_1 (x_2 - a)}{x_2 - k_p x_1} \quad (217b)$$

Sea la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)$$

donde

$$e_1 = x_1 - \frac{a^2}{R_n}, \quad e_2 = x_2 - a \quad (218)$$

La derivada de $V(x)$ a lo largo de la trayectoria del sistema cuando éste se encuentra en un régimen deslizando está dada por

$$\dot{V}(x) = -\frac{(\alpha e_1^2 + \beta e_1 e_2 + \gamma e_2^2)}{x_2 - k_p x_1} \quad (219)$$

con

$$\alpha = k_p, \quad \beta = -\frac{k_p}{R_n}(x_2 + a) - (1 - k_i a), \quad \gamma = \frac{x_2 + a - k_i a^2}{R_n}$$

De (206), el denominador de \dot{V} , $x_2 - k_p x_1$ es positivo en el conjunto \mathcal{S} , así, para que $\dot{V}(x)$ sea negativa en el conjunto \mathcal{S} , entonces $(\alpha e_1^2 + \beta e_1 e_2 + \gamma e_2^2)$ tiene que ser positiva, lo cual se asegura en la región donde $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ se cumple. Eso es en la región donde

$$\begin{aligned} \frac{k_p^2}{R_n^2} x_2^2 - \frac{2k_p}{R_n} \left(1 + k_i a - \frac{k_p a}{R_n}\right) x_2 + \\ (1 - k_i a)^2 + \frac{k_p a}{R_n} \left(\frac{k_p a}{R_n} - 2(1 - k_i a)\right) < 0 \end{aligned} \quad (220)$$

La desigualdad (220) se cumple en el conjunto

$$\mathcal{U} = \{x : x_{2a} < x_2 < x_{2b}\}$$

donde x_{2a} y x_{2b} están dados por

$$x_{2a} = \frac{R_n}{k_p} \left(1 - a\left(k_i - \frac{k_p}{R_n}\right)\right) - 2R_n \sqrt{k_i a \left(1 - \frac{k_p}{R_n} a\right)} \quad (221)$$

$$x_{2b} = \frac{R_n}{k_p} \left(1 - a\left(k_i - \frac{k_p}{R_n}\right)\right) + 2R_n \sqrt{k_i a \left(1 - \frac{k_p}{R_n} a\right)} \quad (222)$$

Nótese que las condiciones (214) implican que x_{2a} y x_{2b} son reales.

Dado que $\dot{V}(x)$ es negativa en el conjunto

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{R}^2 | x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{S}\}$$

el cual contiene a x_d , entonces se concluye que x_d es un punto asintóticamente estable.

Mas aún, definiendo el siguiente conjunto

$$\mathcal{A} = V(x) < r$$

donde r es el máximo número tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$, puede decirse que si la trayectoria del sistema intersecta alguna vez la superficie $\sigma = 0$ dentro del conjunto \mathcal{A} , entonces la trayectoria permanece en la superficie de ahí en adelante y tiende asintóticamente al punto $(a^2/R_n, a)$ (LaSalle, 1976). ■

Observación 24 *Si la trayectoria intersecta la superficie deslizante en un punto que no pertenece a \mathcal{A} pero que está en \mathcal{N} , entonces la trayectoria también converge al punto $(a^2/R_n, a)$ pero podría abandonar la superficie antes de alcanzar el conjunto \mathcal{A} . Si la trayectoria sale del régimen deslizante, por el lema 18, ésta regresa eventualmente a la superficie. Más aún, cuando la trayectoria deja la superficie, $u = 1$ (véase nota 20), la siguiente vez que intersecta la superficie lo hace más cerca del punto $(1/R_n, 1)$. Así, si $(1/R_n, 1) \in \mathcal{A}$, entonces la trayectoria del sistema eventualmente intersecta la superficie deslizante en un punto que pertenece al conjunto \mathcal{A} . En conclusión, el conjunto \mathcal{N} es una región de atracción del punto $(a^2/R_n, a)$ siempre que $(1/R_n, 1) \in \mathcal{A}$.*

Para el caso de seguimiento la ley de control (190)-(191) no asegura el seguimiento, sin embargo, para señales suficientemente lentas se puede asegurar que el error es pequeño. Más precisamente si x_{2d} es de la forma:

$$x_{2d}(t) = a + b \text{sen}(\omega t)$$

con a , b y ω constantes, entonces el error es de orden $O(b\omega)$. Para demostrar esta aseveración necesitamos el siguiente resultado:

Teorema 25 *Considérese el sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon) \quad (223)$$

supóngase que

- a) f, g y sus primeras derivadas parciales con respecto a x son continuas y acotadas para todo $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, para cualquier conjunto compacto $D_0 \in D$, donde $D \subset \mathfrak{R}^n$ es un dominio que contiene al origen;
- b) el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x)$$

- c) $g(t, x, \varepsilon)$ es periódica en t , con periodo T ,

entonces existen constantes positivas ε^* y k tal que para toda $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ la ecuación (223) tiene una solución $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ periódica única con periodo T , con la propiedad de que $\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq k|\varepsilon|$. Además, esta solución es exponencialmente estable.

Demostración. Para una prueba de este teorema, ver (Khalil, 2001) ■

Teorema 26 *Considérese el sistema (216) y suponga que*

- a) las condiciones (201) se cumplen para todo t ;

b) $x_{2d} = a + \text{sen}(\omega t)$ con a , b y ω constantes positivas,

entonces el error de seguimiento $|x_2(t) - x_{2d}(t)|$ es de orden $O(b\omega)$, es decir, existen constantes positivas k y ε^* tales que para todo $b\omega < \varepsilon^*$ se cumple que $|x_2(t) - x_{2d}(t)| < k|b\omega|$

Demostración. Definiendo e_1 y e_2 como

$$e_1 = x_1 - \frac{x_{2d}^2(t)}{R_n}, \quad e_2 = x_2 - x_{2d}(t) \quad (224)$$

el sistema se puede representar como

$$\dot{e}_1 = \frac{1}{e_2 - k_p e_1 + x_{2d}(1 - x_{2d}/R_n)} \left\{ -k_p \left(e_1 - \frac{x_2 + x_{2d}}{R_n} e_2 \right) - k_i x_{2d} e_2 - k_i e_2^2 + b\omega \cos(\omega t) (k_p e_2 + (k_p - 2/R_n)x_{2d}) \right\} \quad (225)$$

$$\dot{e}_1 = \frac{1}{e_2 - k_p e_1 + x_{2d}(1 - x_{2d}/R_n)} \left\{ \left(e_1 - \frac{x_2 + x_{2d}}{R_n} e_2 \right) + k_i e_1 e_2 + \frac{k_i}{R_n} x_{2d}^2 e_2 - b\omega \cos(\omega t) \left(k_p e_1 + \frac{k_p}{R_n} x_{2d}^2 + 1 \right) \right\} \quad (226)$$

Identificando ε con $b\omega$ el sistema tiene la forma (223), con

$$f = \frac{1}{e_2 - k_p e_1 + x_{2d}(1 - x_{2d}/R_n)} \begin{bmatrix} -k_p \left(e_1 - \frac{x_2 + x_{2d}}{R_n} e_2 \right) - k_i x_{2d} e_2 - k_i e_2^2 \\ \left(e_1 - \frac{x_2 + x_{2d}}{R_n} e_2 \right) + k_i e_1 e_2 + \frac{k_i}{R_n} x_{2d}^2 e_2 \end{bmatrix} \quad (227)$$

y

$$g = \frac{1}{e_2 - k_p e_1 + x_{2d}(1 - x_{2d}/R_n)} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \left(k_p e_1 + \frac{k_p}{R_n} x_{2d}^2 + 1 \right) \\ \cos(\omega t) \left(k_p e_1 + \frac{k_p}{R_n} x_{2d}^2 + 1 \right) \end{bmatrix} \quad (228)$$

Se propone la función

$$V(x) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)$$

para analizar la estabilidad del sistema nominal. La derivada de V a lo largo de la trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$ está dada por

$$\dot{V}(x) = -\frac{(\alpha_f e_1^2 + \beta_f e_1 e_2 + \gamma_f e_2^2)}{x_2 - k_p x_1} \quad (229)$$

con

$$\alpha_f = k_p, \quad \beta_f = -\frac{k_p}{R_n}(x_2 + x_{2d}) - (1 - k_i x_{2d}), \quad \gamma_f = \frac{x_2 + x_{2d} - k_i x_{2d}^2}{R_n}$$

$x_2 - k_p x_1 = e_2 - k_p e_1 + x_{2d}(1 - x_{2d}^2/R_n)$ es positivo en una vecindad que contiene el punto $(e_1, e_2) = (0, 0)$. Así para que el sistema autónomo sea exponencialmente estable en una vecindad del origen se requiere que el numerador $(\alpha_f e_1^2 + \beta_f e_1 e_2 + \gamma_f e_2^2)$ sea positivo en esa vecindad. Esto se asegura si $4\alpha_f \gamma_f - \beta_f^2 > 0$ para toda t , esto es

$$\frac{k_p^2}{R_n^2} x_2^2 - \frac{2k_p}{R_n} \left(1 + k_i x_{2d} - \frac{k_p x_{2d}}{R_n}\right) x_2 + (1 - k_i x_{2d})^2 + \frac{k_p x_{2d}}{R_n} \left(\frac{k_p x_{2d}}{R_n} - 2(1 - k_i x_{2d})\right) < 0 \quad (230)$$

lo cual se cumple en la región

$$\text{máx} \left\{ \frac{R_n}{k_p} \left(1 - x_{2d} \left(k_i - \frac{k_p}{R_n}\right)\right) - 2R_n \sqrt{k_i x_{2d} \left(1 - \frac{k_p}{R_n} x_{2d}\right)} \right\} < x < \quad (231)$$

$$\text{mín} \left\{ \frac{R_n}{k_p} \left(1 - x_{2d} \left(k_i - \frac{k_p}{R_n}\right)\right) + 2R_n \sqrt{k_i x_{2d} \left(1 - \frac{k_p}{R_n} x_{2d}\right)} \right\} \quad (232)$$

Por lo tanto, el teorema 25 se puede aplicar al sistema (223, 227, 228). ■

6.5. Aspectos prácticos

Debido a su reducido número de parámetros, el modelo normalizado es muy útil para plantear un procedimiento de selección de los parámetros del controlador. En la selección

de los parámetros, se debe considerar el valor mínimo de la carga, ya que, éste es el peor de los casos desde el punto de vista de la estabilidad. Recuerde que el “origen” de los dos parámetros del controlador k_p y k_i , es un controlador PI diseñado para controlar el sistema dinámico (175). Así, en terminos generales, se puede plantear que la selección de los parámetros se puede hacer como el de un PI normal diseñado para controlar (175), pero restringido a cumplir (201). Específicamente, se propone el siguiente procedimiento.

1. Hacer $k_p = 0$ y sintonizar k_i hasta obtener un sobrepaso adecuado. En vista de las condiciones (201), el valor $k_i = (1/3)(1/x_{2d})$ es un buen inicio.
2. Incrementar k_p hasta obtener un desempeño adecuado.

Durante la sintonización de parámetros, es necesario tener en mente que dichos parámetros deben satisfacer las condiciones (201) para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Las expresiones del controlador para el modelo no normalizado se pueden obtener invirtiendo la transformación de normalización (37). Esto resulta en la siguiente expresión para la superficie deslizante con

$$\sigma(x, t) = \left(\frac{1}{v_{in}\sqrt{LC}} \right) \int_0^t (v_{in} - u'(s)z_2(s)) ds + \sqrt{LC}k_p(z_2(s) - z_{2d}) + k_i \int_0^t (z_2(s) - z_{2d}) ds \quad (233)$$

El lado derecho de (233) se puede escalar sin modificar la superficie deslizante y en consecuencia sin modificar el desempeño del sistema en lazo cerrado. Multiplicando el lado

derecho de (233) por $Gv_{in}\sqrt{LC}$, resulta

$$\sigma(t) = G \int_0^t (v_{in} - u'(s)z_2(s)) ds + G\sqrt{LC}k_p(z_2(s) - z_{2d}) + Gk_i \int_0^t (z_2(s) - z_{2d}) ds \quad (234)$$

donde G es una constante arbitraria. La introducción de G permite escalar las mediciones, y así evitar que los dispositivos electrónicos se saturen.

Una de las mayores objeciones para el uso del control por modos deslizantes en el control de convertidores es que la falta de una frecuencia de conmutación constante (Mattavelli *et al.*, 1993). Sin embargo, para el controlador (191),(234) esta situación se puede evitar introduciendo un lazo de histeresis en el cambio de posición del interruptor, como se muestra en la figura 20. La introducción del ciclo de histéresis tiene las siguientes ventajas

1. Limita la frecuencia de conmutación, creando una capa frontera (Utkin, 1991) de amplitud conocida, ya que evita que el interruptor conmute mientras $|\sigma| < h/2$ (ver figura 30).
2. Existe un análisis formal que muestra que el comportamiento de los sistemas cuya trayectoria evoluciona dentro de una capa frontera “se parece” al caso ideal de un sistema cuya trayectoria evoluciona sobre el modo deslizante ((Utkin, 1991)).
3. En estado estacionario la frecuencia de conmutación es constante para el caso de voltajes constantes.
4. Se puede controlar la frecuencia de conmutación en estado estacionario mediante el parámetro h como se muestra a continuación.

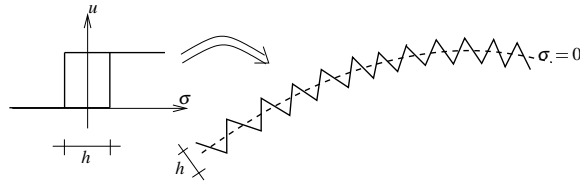


Figura 30: Un ciclo de histéresis introduce una capa frontera, limitando la frecuencia de conmutación.

Nótese que $h = \Delta\sigma$, donde $\Delta\sigma$ es el ancho de la capa frontera en estado estacionario $z_2 \approx z_{2d}$, por lo tanto, de (234) y (186a), se tiene que $\dot{\sigma}x \approx G(v_{in} - u'z_2) = GL\dot{x}_1$. En consecuencia,

$$h = GL\Delta z_1 \quad (235)$$

donde Δz_1 es el rizo en la corriente.

La relación entre h y el periodo de conmutación T se puede encontrar a través de la ecuación para la corriente en el inductor (4a), considerando un régimen estacionario. Con referencia a la figura 31, si $t \in (kT, kT + t_1]$ entonces $u' = 0$, tomando en cuenta (4a), se llega a

$$z_1 = \frac{v_{in}}{L}(t - kT) + z_{1l}$$

Por lo tanto,

$$\Delta z_1 = \frac{v_{in}}{L}((kT + t_1) - kT) = \frac{v_{in}}{L}t_1 \quad (236)$$

Si $t \in (kT + t_1, (k+1)T]$ entonces $u' = 1$. Considerando que $z_2 \approx z_{2d}$ en este intervalo, de (4a) se puede escribir

$$z_1 \approx \frac{v_{in} - z_{2d}}{L}(t - (kT + t_1)) + z_{1u}$$

y

$$\Delta z_1 \approx \left(\frac{|v_{in} - z_{2d}|}{L} \right) ((k+1)T - (kT + t_1)) = \frac{z_{2d} - v_{in}}{L} (T - t_1) \quad (237)$$

despejando T de (236) y (237), resulta

$$T \approx \frac{z_{2d}}{v_{in}(z_{2d} - v_{in})} L \Delta z_1 \quad (238)$$

De (235) y (238) se obtiene que la relación entre h y T está dada por

$$T \approx \frac{z_{2d}}{v_{in}(z_{2d} - v_{in})} \frac{h}{G} \quad (239)$$

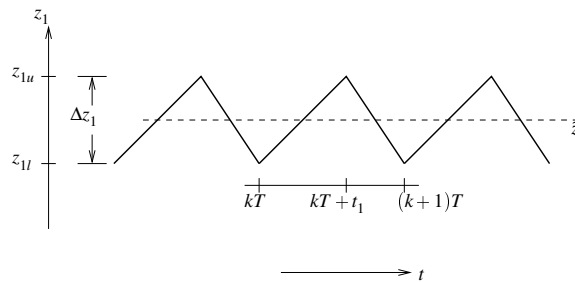


Figura 31: Examinando de cerca el rizo en la corriente.

La figura 32 muestra un diagrama de bloques del sistema controlado. En la figura 33 se muestra el diagrama de un circuito que sintetiza el controlador. Note que (tanto en el diagrama de bloques como en el esquemático) todos los componentes del controlador, excepto un interruptor y el lazo de histéresis, son lineales. El diagrama esquemático de la figura 33 se ha planteado con énfasis en la sencillez para identificar claramente cada etapa del controlador. En la práctica, el diseñador normalmente sintetiza varias etapas con menos amplificadores operacionales, a la vez integra en el mismo controlador circuitos de protección.

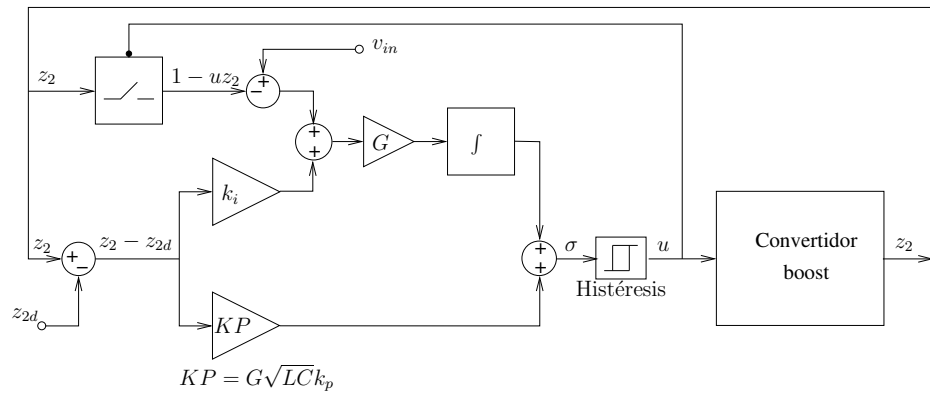


Figura 32: Diagrama de bloques del sistema controlado.

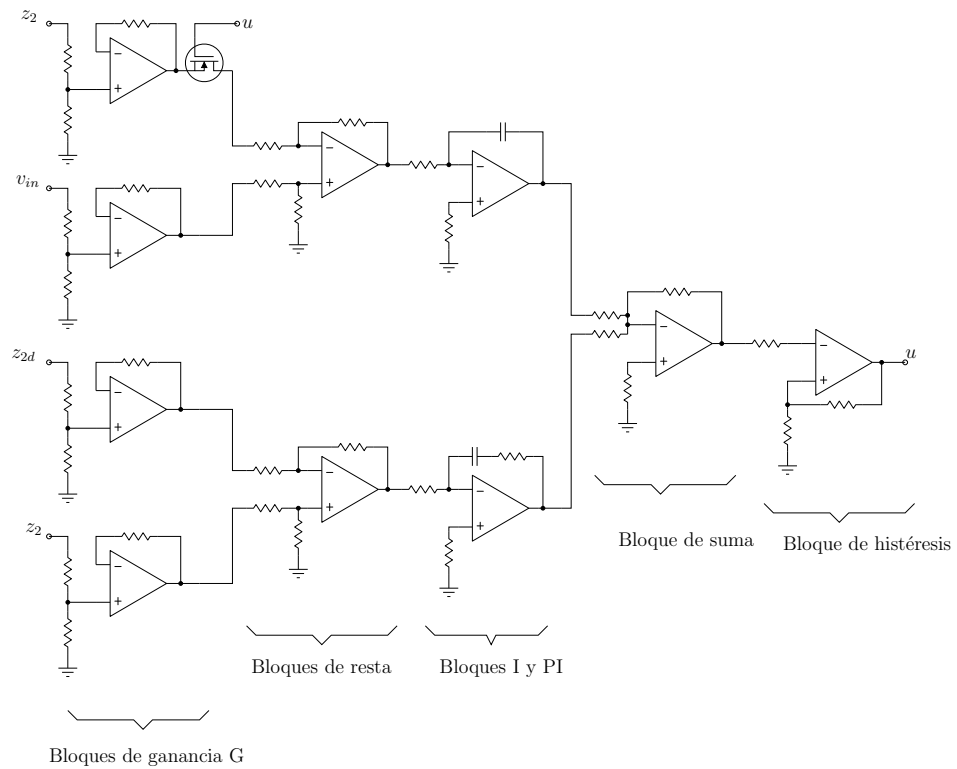


Figura 33: Esquema del controlador.

6.6. Ejemplo

En esta sección se presentan algunas simulaciones que ilustran el desempeño del controlador propuesto aplicado a un convertidor boost con los parámetros de la tabla II. Para aplicar el procedimiento descrito en la sección 6.5 para la selección de los parámetros k_p y k_i del controlador es necesario obtener el modelo normalizado. Aplicando las expresiones (37) resulta la carga normalizada $R_n = 13.43$; mientras que del voltaje deseado se tiene $z_{2d_n} = 2.8125 + 1.77 \text{sen}(0.05662t)$. Siguiendo el procedimiento descrito antes para la sintonización de los parámetros del controlador, se encontró que $k_p = 0.5$ y $k_i = 0.1$ son adecuados tanto para el seguimiento como para la regulación. Para propósitos de simulación se consideró $G = 1$. Para tener una frecuencia cercana a los 30kHz se empleó un lazo de histéresis con $h = 0.0011$, calculado a partir de (239).

La figura 34 muestra el desempeño del controlador cuando $z_{2d} = 140\text{V}$. En la figura también se muestra el comportamiento (promedio) del sistema en lazo abierto para comparar. Puede verse de esta figura que el tiempo de establecimiento se reduce drásticamente con el controlador diseñado. De las simulaciones hechas con el controlador propuesto se pudo observar que el sobrepaso del voltaje se disminuye a costa del sobrepaso en la corriente. Si ésta fuese un valor importante para un diseño determinado, entonces se pueden adecuar los parámetros del controlador para disminuir el sobrepaso en la corriente a costa de un mayor sobrepaso en el voltaje.

Para explorar la robustez del controlador, se llevó a cabo una simulación introduciendo cambios importantes en la carga y el voltaje de entrada. La figura 35 muestra los resultados

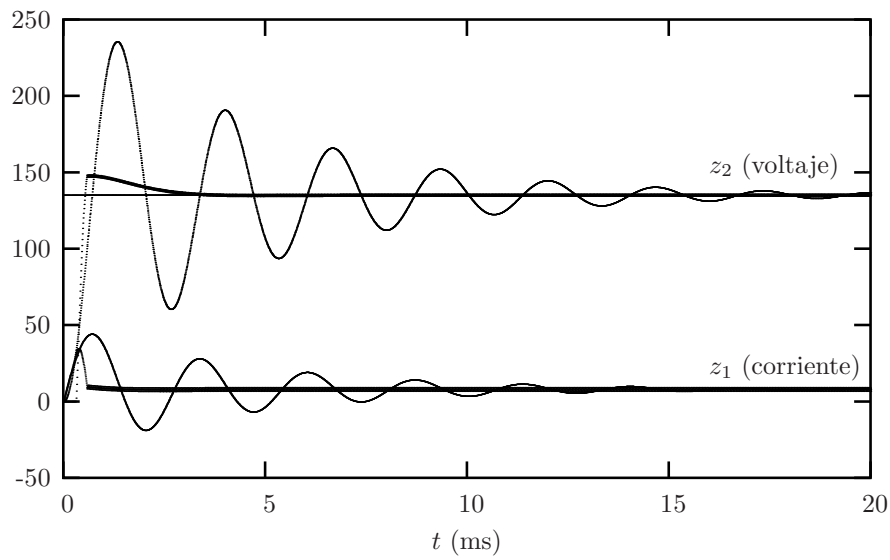


Figura 34: Respuesta del convertidor boost en lazo cerrado.

para una referencia $z_{2d} = 150\text{V}$. Los cambios en el voltaje de entrada y la carga se muestran en dicha figura. Puede verse en la misma, cómo mientras la corriente varía con la carga, el voltaje de salida siempre regresa rápidamente a su valor deseado, aún ante variaciones tan grandes como el 200% en la carga y de 40% en el voltaje de entrada. Note que el rizo sí se modifica con las variaciones de la fuente y la carga, esto también sucede con los controladores PWM.

El desempeño del controlador para el caso de generación de voltajes de ca se puede observar en la figura 36. Como era de esperarse a partir del análisis, hay un pequeño error. Por supuesto, este error puede ser admisible o no dependiendo de la aplicación. Sin embargo, es mucho menor que el de otros controladores, por ejemplo, todos los controladores presentados en el capítulo 5 bajo las mismas condiciones.

La robustez ante variaciones en la fuente y en la carga para el caso del seguimiento se

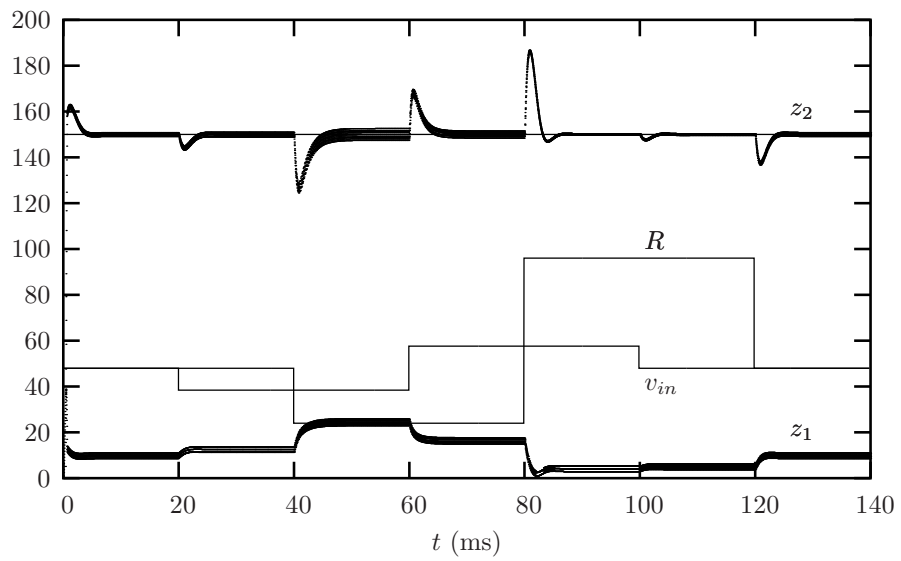


Figura 35: Respuesta a perturbaciones del convertidor boost controlado.

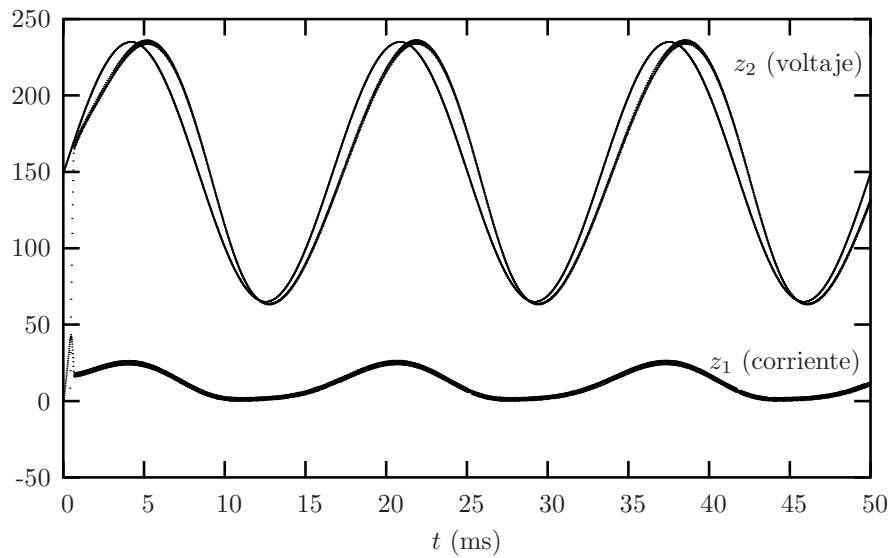


Figura 36: Desempeño en la generación de un voltajes senoidal.

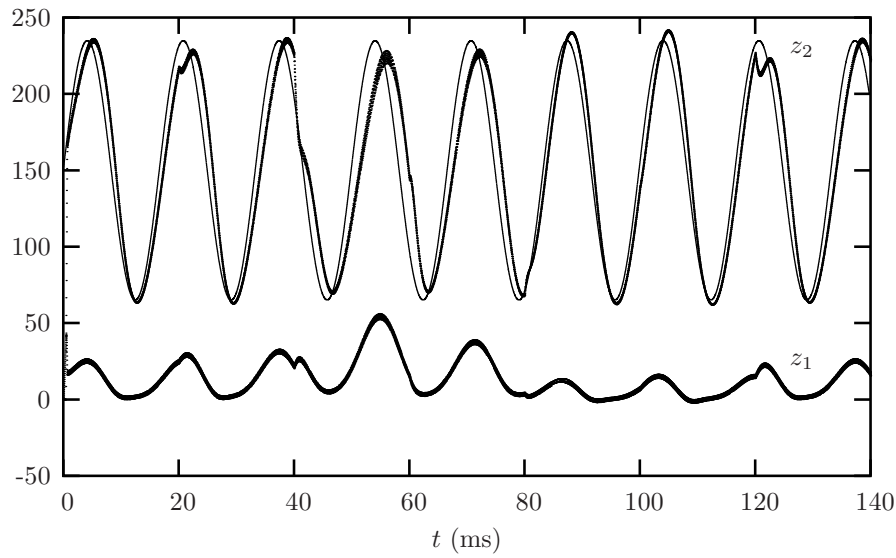


Figura 37: Desempeño robusto en la generación de un voltaje senoidal.

muestra en la figura 37. Las variaciones de carga y voltaje de entrada fueron las mismas que se introdujeron antes para el caso de regulación mostradas en la figura 35. En la figura 37 se puede observar las variaciones en la fuente y en la carga sólo producen transitorios, algunos de ellos apenas perceptibles, en el voltaje de salida del convertidor. Como era de esperar, la corriente se ve afectada por las variaciones.

En colaboración con Nimrod Vázquez quien llevó a cabo el trabajo de tesis (Vazquez, 2004), se desarrolló un inversor elevador cuya construcción y resultados obtenidos se reporta en (Vázquez *et al.*, 2003). Dicho inversor está construido a partir de dos convertidores boost idénticos, como se expone en la sección 4.4.4. A cada uno de los convertidores se le aplicó el controlador expuesto en este capítulo. Los parámetros de cada uno de los convertidores empleados fueron ligeramente distintos a los calculados aquí y son $v_{in} = 48\text{V}$, $R = 48\Omega$, $L = 360\mu\text{H}$, $C = 27\mu\text{F}$, la frecuencia de conmutación empleada fue de 30KHz

y la señal aplicada como referencia fue $z_{2d} = a + / - b \text{sen}(\omega t)$ con $a = 160$, $b = 84.85$ y $\omega = 2\pi 60$. Con esta señal de referencia se pretende generar sobre la carga el voltaje de línea $v_r = 120\sqrt{2}\text{sen}2\pi 60t$. En la figura 38 se puede ver una fotografía del inversor construido.

En las figuras 39-42 se reproducen gráficas de osciloscopio de mediciones hechas al inversor elevador construido. La figura 39 muestra el desempeño del inversor alimentando a una carga no lineal que consiste en un puente rectificador con un capacitor como filtro. La distorsión armónica total es de 5.5 %. La figura 40 muestra el voltaje y la corriente en la carga, así como en el capacitor de un convertidor cuando se introduce una variación en el voltaje de entrada de 50V a 45V. Finalmente, las figuras 41 y 42 muestran el desempeño del inversor cuando la potencia nominal se hace variar del 80 % al 20 % y viceversa.

Como se puede observar de las figuras, el inversor tiene un muy buen desempeño, aún bajo las fuertes perturbaciones introducidas. En general, bajo las perturbaciones descritas se obtuvo siempre un tiempo de recuperación menor que $880\mu\text{s}$.

6.7. Conclusiones

En este capítulo se ha hecho uso de los modelos, resultados y argumentos de los capítulos anteriores para proponer un controlador con características interesantes.

A manera de resumen, del proceso seguido para obtener la ley de control discontinua presentada en este capítulo se puede decir: primero se diseñó un controlador para el modelo promedio empleando la idea común del control indirecto. Así, se consideró la corriente en el inductor como un control virtual del voltaje de salida. De esta manera se buscó una ex-

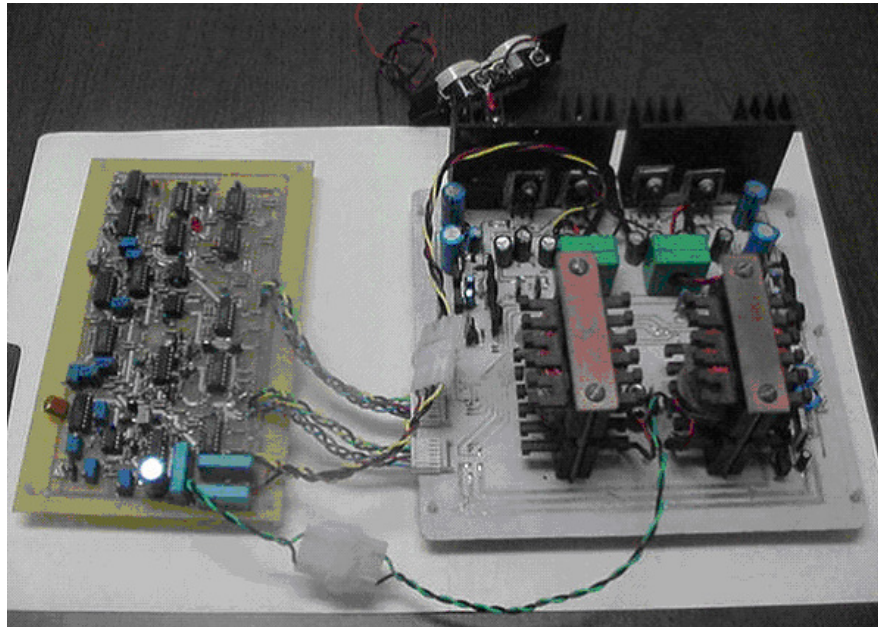


Figura 38: Foto del inversor bajo prueba.

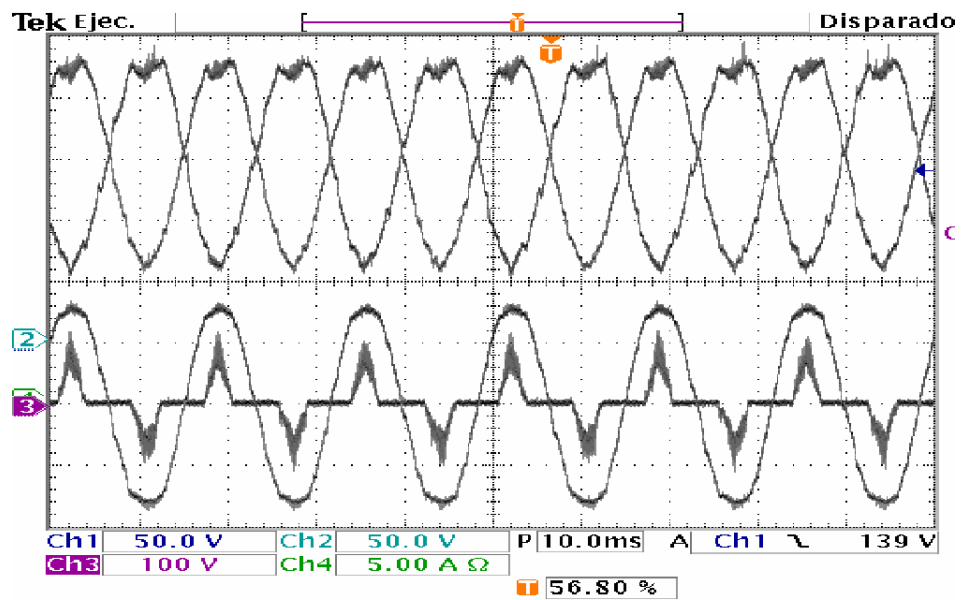


Figura 39: Inversor alimentando a una carga no lineal. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de salida y corriente en la carga.

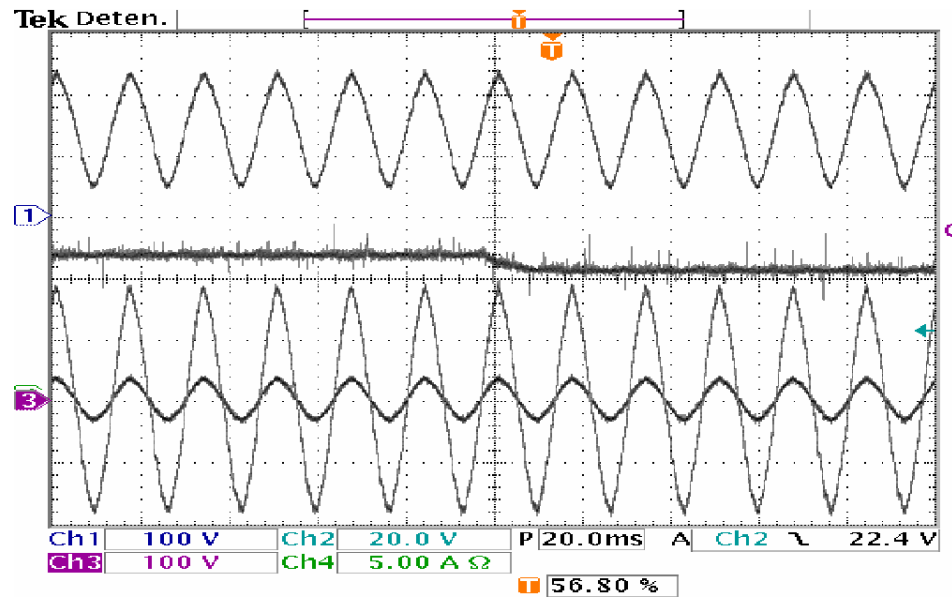


Figura 40: Desempeño del inversor ante cambios en el voltaje de entrada. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de entrada, voltaje de salida y corriente en la carga.

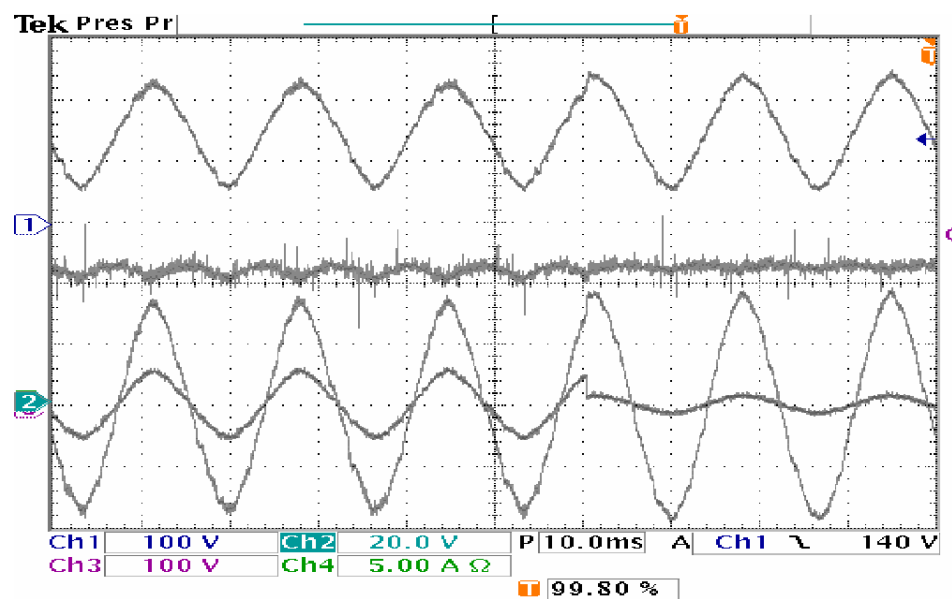


Figura 41: Desempeño del inversor ante variaciones en la carga. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de entrada, voltaje de salida y corriente en la carga.

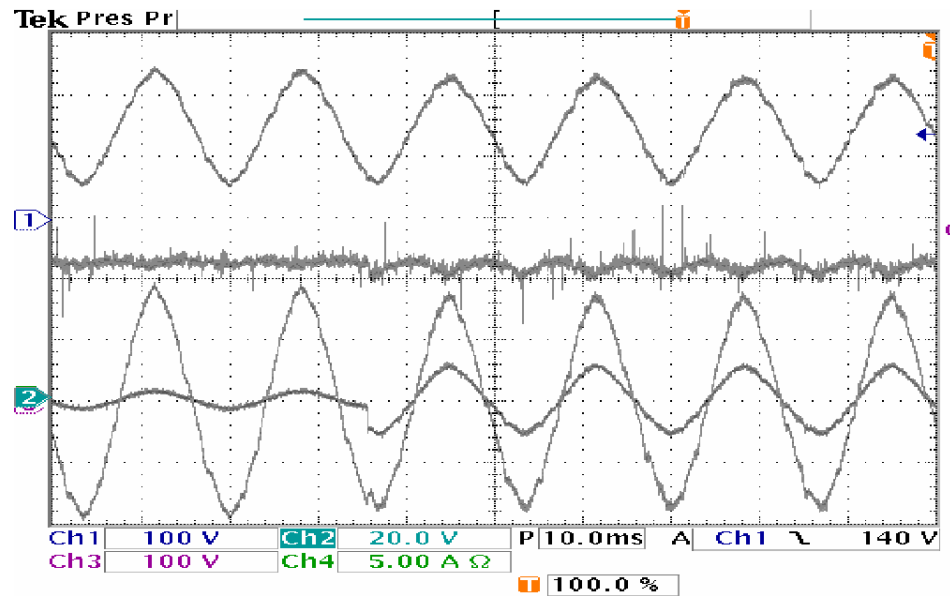


Figura 42: Desempeño del inversor ante variaciones en la carga. De arriba a abajo: Voltaje en uno de los capacitores, voltaje de entrada, voltaje de salida y corriente en la carga.

presión deseada para la corriente en el inductor que tuviera como efecto que el voltaje fuera el deseado. Se diseñó, entonces, un controlador que hiciera que la corriente fuese igual a la expresión deseada. Éste es el argumento de partida del control “backstepping”. Idea que había sido aplicada anteriormente al modelo lineal del convertidor boost. (Alvarez-Ramirez *et al.*, 2001; Alvarez-Ramirez y Espinosa-Pérez, 2002). Por el contrario, aquí se aplicó al modelo no lineal. Sin embargo, el modelo no lineal, no tiene la estructura triangular requerida por la metodología de “backstepping”. No obstante, el hecho de que el ciclo de trabajo sea siempre positivo sugirió la posibilidad de aplicar el procedimiento en este caso. Así se obtuvo un controlador promedio con algunas desventajas importantes. Tomando como base este controlador, se aplicó la relación entre control equivalente y control promedio para obtener un controlador por modos deslizantes que resulta ser más robusto y sencillo de implementar.

El controlador propuesto en este capítulo no depende de la carga, aunque el rango en

el que pueden estar sus parámetros sí. Tampoco depende de la corriente en el inductor y sólo requiere de mediciones de voltaje. Por otra parte, los componentes necesarios para implementarlo son lineales excepto por un interruptor y un lazo de histéresis (que se pueden implementar con un sólo componente). Se mostró la relación y las diferencias que tiene el controlador propuesto con otros propuestos previamente, en particular, con el controlador más usado en la práctica, el llamado control de corriente programada. El análisis de estabilidad se hizo empleando el modelo no lineal. A partir del procedimiento para la obtención del controlador y el desarrollo de la prueba de estabilidad fue posible establecer lineamientos sencillos para la selección de parámetros del controlador. El desempeño del controlador fue ilustrado con algunas simulaciones que mostraron un desempeño sobresaliente. Aunque cabe aclarar que en el desempeño observado, el diseño del convertidor juega un papel importante. Finalmente, se mostraron resultados experimentales del controlador aplicado a dos convertidores boost interconectados para generar el voltaje senoidal de línea a partir de una fuente de cd de 48V. Esta aplicación está inspirada en la mejora de las fuentes de alimentación ininterrumpibles existentes. El tipo de carga, así como las perturbaciones introducidas en la propia carga y la fuente de alimentación son comunes en la operación de inversores. En todos los casos, el desempeño observado fue notable. Sin embargo, es importante señalar que el análisis presentado en este capítulo sólo fundamenta el uso del controlador aplicado a un convertidor boost. La aplicación en el inversor requiere de interconexiones cuya estabilidad no ha sido analizada.

Capítulo 7

Conclusiones

En este capítulo se hace una revisión de las aportaciones de la tesis. Estas aportaciones se clasifican en tres partes: diseño, análisis y control. Posteriormente, se mencionan algunas aplicaciones en las cuales se podrían aplicar los resultados obtenidos, así como el trabajo futuro que es necesario desarrollar para poder hacerlo. Finalmente, se hacen algunos comentarios finales.

7.1. Aportaciones

Empleando un enfoque distinto a muchos trabajos anteriores sobre el control de convertidores, en donde generalmente los convertidores electrónicos se toman como ejemplo para ilustrar una técnica determinada de control, en este trabajo se abordó el problema de generación de voltajes de ca. Así, se buscaron las técnicas de análisis y control que pudieran plantear soluciones a los distintos aspectos del diseño de convertidores controlados para realizar esta

función.

Diseño

Se obtuvieron formalmente expresiones para el diseño adecuado de convertidores para la generación de voltajes variables. Si bien se sabía que las especificaciones de rizo en la corriente y voltaje imponen valores mínimos de los parámetros, en esta tesis se obtuvieron, mediante técnicas formales, expresiones para determinar esos valores mínimos. Por otra parte, se mostró que la amplitud y rapidez de cambio del voltaje por generar impone un límite para los valores máximos de los parámetros y se obtuvieron expresiones para esos máximos. Resultaron, así, expresiones para determinar si es posible cumplir ciertas especificaciones de diseño, y en el caso de que se pueda, diseñar adecuadamente el convertidor.

Análisis

Algunos de los resultados de la parte de diseño fueron consecuencia directa del análisis de la forma de onda de la corriente en el inductor. Dicho análisis permitió estimar si un determinado voltaje puede ser generado (en forma aproximada o no) o bien si determinadas especificaciones de diseño pueden ser cumplidas. Se mostró también que, debido a la saturación del control y a la no minimalidad de fase, la adecuada selección de parámetros es muy importante para lograr un objetivo de control, aunque tradicionalmente no sea considerada parte del mismo.

Control

Se propusieron varios controladores. Si bien algunos de ellos tienen desventajas importantes, pusieron de relieve algunos aspectos prácticos. En particular la ley de control indirecta propuesta en el capítulo 5 permite un análisis del error, de tal manera que proporciona un estimado del error que se puede esperar con otros controladores. La ley de control por “backstepping” se usó fundamental para obtener el control por modos deslizantes propuesto más tarde.

Se presentó también un procedimiento para obtener controladores por modos deslizantes a partir de controladores promedio. Este procedimiento es útil, ya que:

- Los controladores por modos deslizantes son, en general, robustos.
- En el análisis de un sistema controlado por modos deslizantes se debe considerar la discontinuidad del control; así, en el caso de los convertidores, la conmutación de los interruptores se considera de manera directa en el análisis.
- El control equivalente de un control por modos deslizantes es aproximadamente igual al ciclo de trabajo. Así, al analizar la condición $u_{min} < u_{eq} < u_{max}$, necesaria para la existencia del modo deslizante, se está tomando en cuenta en forma indirecta la saturación del ciclo de trabajo.
- El control equivalente de un controlador por modos deslizantes es, en general, una función no lineal del estado aún para superficies lineales.

La aplicación de dicho procedimiento al control por “backstepping” llevó a un control

por modos deslizantes que se considera factible de ser empleado en la práctica porque:

- Tiene un desempeño destacable.
- Es robusto a variaciones de carga y voltaje de entrada.
- Sólo requiere mediciones de voltaje.
- Se puede implementar de forma sencilla.
- Existe un análisis de estabilidad que considera el modelo no lineal.
- Se conocen los rangos permisibles para los valores de los parámetros, con lo que la selección de éstos es sistemática.
- Tiene una estrecha relación con el controlador de corriente programada, el cual es el de uso más extendido en la práctica.

En el desarrollo de estos resultados se usaron herramientas como análisis matemático en la determinación de expresiones de diseño; un resultado derivado de ecuaciones diferenciales lineales para el análisis del error; mapeos de Poincaré para la determinación de la existencia y estabilidad de órbitas periódicas, control por “backstepping” y control por modos deslizantes en la propuesta de leyes de control; análisis de Lyapunov en la prueba de estabilidad del controlador, conceptos de sistemas discontinuos para establecer la relación entre control equivalente y promedio, así como en el análisis de estabilidad.

7.2. Trabajo futuro

Una de las motivaciones de esta tesis fue el problema de construir un inversor con capacidad de elevación. Uno de los controladores propuestos aquí ha sido empleado en la construcción de un inversor elevador. Los resultados experimentales obtenidos han sido notablemente buenos. Sin embargo, el análisis desarrollado en la tesis considera un convertidor boost alimentando una carga, mientras que el inversor requiere la interacción de dos convertidores boost. Más aún, el funcionamiento del inversor construido requiere la cancelación de un voltaje de cd; para que exista la cancelación exacta los dos convertidores boost deben ser idénticos. Esto no se puede dar en la práctica. Por ello se afirma que la utilización del controlador propuesto en la construcción del inversor propuesto en (Nava, 19997) no está plenamente justificada. Sin embargo, los resultados desarrollados en esta tesis son un punto de partida para el diseño de un controlador del inversor mencionado y de otros similares.

El hecho de que:

- frecuentemente los convertidores básicos son dispositivos sobre los cuales otros convertidores más complejos están basados; y
- en un buen número de aplicaciones, el objetivo final de distintos convertidores se puede reducir a generar una corriente o voltaje de referencia,

lleva a pensar que los resultados obtenidos en esta tesis pueden ser el punto de partida para muchas otras aplicaciones como la alimentación de motores en dispositivos electromecánicos móviles o la alimentación de lámparas no convencionales, por mencionar sólo algunas. En cada uno de las aplicaciones las características de la carga son muy importantes, por lo

tanto, la aplicación de los resultados puede no ser directa y en algunos casos exija un análisis particular.

7.3. Comentarios finales

Los resultados teóricos obtenidos mediante el análisis y la aplicación de técnicas de control a circuitos de potencia deben tomarse como una referencia o guía en una aplicación determinada. No es posible incluir todas las características de la aplicación en el análisis teórico. En esta tesis, por ejemplo, se consideró siempre que los dispositivos son ideales, que las cargas son resistivas, etc. Aunque experimentalmente se usó uno de los controladores obtenidos para alimentar cargas no lineales, el análisis realizado no establece resultados para estas cargas. Un análisis formal que tuviera en cuenta otro tipo de cargas o las no linealidades de los dispositivos podría ser muy complicado. Así, la experimentación y modificación de los controladores en base a ella no se puede eliminar. No obstante, si hay una guía fundamentada en el análisis para dichas modificaciones, se pueden obtener mejores resultados.

Por otra parte, el desarrollo de controladores para convertidores electrónicos no involucra necesariamente sólo la aplicación de técnicas conocidas. Pues la aplicación directa de éstas frecuentemente resulta en controladores con serios inconvenientes desde el punto de vista práctico. Así, es muy probable que controlar un dispositivo electrónico de potencia implique, por lo menos, la adecuación de ciertas técnicas, la combinación novedosa de varias de éstas o el desarrollo de nuevas técnicas que después sirvan para otro tipo de sistemas, ofreciendo así al especialista en control y sistemas dinámicos un reto interesante. Como conclusión, la cola-

boración entre especialistas de electrónica y especialistas de control no sólo es conveniente porque puede dar a lugar a mejores controladores, sino también porque se da en un campo de interés práctico que ofrece problemas de investigación para las dos áreas.

Bibliografía

Alfayyumi, M., A.H. Nayfeh y D. Borojevic (2000). Modeling and analysis of switching-mode dc-dc regulators. *International Journal of Bifurcations and Chaos* **10**(2), 373–390.

Alvarez, Jq., D. Cortes y J. Alvarez (2000). Indirect control of high frequency power converters for ac generation. En: *Proc. of the 39th IEEE International Conference on Decision and Control*. Vol. 1. Sidney, Australia. p. 4072–4077. Paper Nb. 1521.

Alvarez-Ramirez, J., G. Espinosa-Pérez y D. Noriega-Pineda (2001). Current-mode control of dc-dc power converters a backstepping approach. En: *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*. Mexico, Mexico. p. 190–195.

Alvarez-Ramirez, J. y G. Espinosa-Pérez (2002). Stability of current-mode control for dc-dc power converters. *Systems & Control Letters* **45**(2), 113–119.

Angulo-Nuñez, M. I. y H. Sira-Ramirez (1998). Flatness in the passivity based control of dc-to-dc power converters. En: *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, USA. p. 4115–4120.

- Aroudi, A., L. Benadero, E. Toribio y S. Machiche (2000). Quasiperiodicity and chaos in the dc-dc buck-boost converter. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**(2), 359–351.
- Bose, B.K., Ed.) (1992). *Modern Power Electronics. Evolution, Technology, and Applications*. IEEE Press. ISBN: 0879422823. pp. 597.
- Buso, S. (1999). Design of a robust voltage controller for a buck-boost converter using μ -synthesis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Cáceres, R. O. y I. Barbi (1999). A boost dc-ac converter: Analysis, design and experimentation. *IEEE Transactions on Power Electronics* **14**(1), 134–141.
- Chen, C. T. (1998). *Linear Systems Theory and Design*. Oxford Series in electrical and computer engineering. 3 ed.. Oxford University Press. ISBN: 0195117778. pp. 334.
- Cortes, D., Jq. Alvarez, J. Alvarez y A. Fradkov (2004). Tracking control of the boost converter. *IEE Proc. on Control Theory and Applications* **151**(2), 218–224.
- Cortes, D., Jq. Alvarez y A.L. Fradkov (2001). Tracking on the boost converter using standard regulation techniques. En: *Proceedings of the 2001 American Control Conference*. Arlington VA, USA. p. 2167–2172.
- Cuk, S. y R. D. Middlebrook (1977). A new optimum topology switching dc-to-dc converter. En: *IEEE Power Electronics Specialists Conference*. Palo Alto, Ca. USA. p. 160–179.

Cunha, F. B. y D. J. Pagano (2002). Limitations in the control of a dc-dc boost converter. En: *Proc. of the 15th Triennial IFAC world congress*. Barcelona, Spain. Paper no. 1927.

di Bernardo, M. y F. Vasca (2000). Discrete-time maps for the analysis of bifurcations and chaos in dc/dc converters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-Part I: Fundamental Theory and Applications* **47**(2), 130–143.

Erickson, R. W. y D Maksimovic (2001). *Fundamentals of Power Electronics*. 2 ed.. kluwer Academic Publishers. Boston. ISBN 0-7923-7270-0.

Escobar, G. (1999). On nonlinear control of switching power electronics systems. PhD thesis. Universite de Paris-SUD U.F.R. Scientifique d' Orsay. pp. 221

Escobar, G., D. Chevreau, R. Ortega y E. Mendes (1999a). A passivity-based controller for the regulation of a unity power factor rectifier using a full bridge boost circuit: Stability analysis and experimental. En: *Proc. of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE'99)*. Vol. 2. Bled, Slovenia. p. 451–456.

Escobar, G., R. Ortega, H. Sira-Ramírez, J.P. Vilain y I. Zein (1997). An experimental comparison of several non-linear controllers for power converters. En: *Proc. IEEE 36th Conference on Decision and Control*. San Diego CA, USA. p. 227–228.

Escobar, G., R. Ortega, H. Sira-Ramírez, J.P. Vilain y I. Zein (1999b). An experimental comparison of several non-linear controllers for power converters. *IEEE Control Systems Magazine* **19**(1),p. 66–82.

- Escobar, G. y H. Sira-Ramirez (1998). A passivity based-sliding mode control approach for the regulation of power factor precompensators. En: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, USA. p. 2423–2424.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers. ISBN: 902772699X. pp. 304
- Fossas-Colet, E. y J. M. Olm-Miras (2002). Asymptotic tracking in dc-to-dc nonlinear power converters. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B* **2**(2), 295–307.
- Garofalo, F., P. Marino, S. Scala y F. Vasca (1994). Control of dc-dc converters with linear optimal feedback and nonlinear feedforward. *IEEE Transactions on Power Electronics* **9**(6), 607–615.
- Grizzle, J. W., M. D. Benedetto y Lamnabhi-Lagarrigue (1994). Necessary conditions for asymptotic tracking in nonlinear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* **39**(9), 1782 – 1794.
- Hale, J. K. y H. Kocak (1996). *Dynamics and Bifurcations*. Vol. 3 of *Text in Applied Mathematics*. third ed.. Springer Verlag. ISBN: 0-387-97141-6.
- Isidori, A. (1997). *Nonlinear Control Systems*. third ed.. Springer-Verlag. ISBN: 3-540-19916-0. pp. 549
- Kailath, T. (1979). *Linear Systems*. Information and system science. Prentice Hall Inc. ISBN: 0135369614. pp. 682

- Karsenti, L., H. Sira-Ramírez y F. Lamnabhi-Lagarrigue (1995). Adaptive backstepping pwm stabilization of dc-to-dc converters towards minimum or non-minimum phase equilibria. En: *IEEE 34th Conference on Decision and Control*. New Orleans LA, USA. p. 1591–1596.
- Kassakian, J.G., M.F. Schlecht y G.C. Verghese (1991). *Principles of Power Electronics*. Adison Wesley. ISBN: 0-201-09689-7. pp. 738.
- Khalil, H. (2001). *Nonlinear Systems*. third ed.. Prentice Hall. ISBN: 0-130-67389-7. pp. 750
- Kimhi, D. y S. Ben-Yaakov (1991). A spice model for current mode pwm converters operating under continuous inductor current conditions. *IEEE Trans. on Power Electronics* **6**(2), 281–286.
- Krstic, M., I. Kanellakopoulos y P.V. Kokotovic (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley-Interscience. New York. ISBN: 0471127329. pp. 576.
- Kugi, A. y K. Schlacher (1999). Nonlinear h_∞ -controller design for dc-to-dc power converters. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **7**(2), 230–237.
- LaSalle, J.P. (1976). *The Stability of Dynamical Systems*. Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. pp. 76.
- Leung, F.H.F., P.K.S. Tam y C.K. Li (1991). The control of switching dc-dc converters-a general lqr problem. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **38**(1), 65–71.

- Leung, F.H.F., P.K.S. Tam y C.K. Li (1993). An improved lqr-based controller for switching dc-dc converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **40**(5), 521–528.
- Mattavelli, P., L. Rossetto, G. Spiazzi y P. Tenti (1993). A general-purpose sliding-mode controller for dc/dc converter applications. En: *Proceedings of 24th Power Electronics Specialists Conference*. p. 609–615.
- Mattavelli, P., L. Rossetto, G. Spiazzi y P. Tenti (1997a). General-purpose fuzzy controllers for dc-dc converters. *IEEE Transactions on Power Electronics* **12**(1), 79–86.
- Mattavelli, P., L. Rossetto y G. Spiazzi (1997b). Small-signal analysis of dc-dc converters with sliding mode control. *IEEE Transactions on Power Electronics* **12**(1), 96–102.
- Middlebrook, R. D. (1989). Modeling current-programmed buck and boost regulators. *IEEE Trans. on Power Electronics* **4**(1), 36–52.
- Naim, R., G. Weiss y S. Ben-Yaakov (1997). h^∞ control applied to boost power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics* **12**(4), 677–683.
- Nava, N. Vázquez (1997). Nueva estructura de inversor basado en el convertidor cd/cd tipo elevador. Master's thesis. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. pp. 62
- Nijmeijer, H. y A. "Van Der Schaft"(1996). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. third ed.. Springer Verlag. ISBN: 038797234.

- Ortega, R., A. Loria, P.J. Nicklasson y H. Sira-Ramirez (1998). *Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Communications and Control Engineering. Springer Verlag. Berling. ISBN: 1852330163. pp. 543.
- Ortega, R., A. Loria, R. Kelly y L. Praly (1994). On passivity-based output feedback global stabilization of euler-lagrange systems. En: *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*. IEEE. Lake Buena Vista, Fl, USA. p. 381–386.
- Ridley, R. B. (1991). A new continuous-time model fro current-mode control. *IEEE Trans. on Power Electronics* **6**(2), 271–280.
- Rios-Bolivar, M. y H. Sira-Ramirez (1991). An extended linearization approach to sliding mode control of dc-to-dc power supplies. En: *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*. Brighton, England. p. 2148–2153.
- Rodriguez, H., R. Ortega y N. Barabanov (2000). A robustly stable output feedback saturated controller for the boost dc-to-dc converter. *Systems & Control Letters* **40**(1), 1–8.
- Sepulchre, R., M. Jankovic y P.V. Kokotovic (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer Verlag. ISBN: 3540761276. pp. 313
- Shtessel, Y.B. (1998). Nonlinear nonminimum phase output tracking via dynamic sliding manifolds. *Journal of the Franklin Institute* **335B**(5), 841–850.
- Sira-Ramírez, H. (1987). Sliding motions in bilinear switched networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-34**(8), 919–933.

- Sira-Ramírez, H. (1999). Flatness and trajectory tracking in sliding mode based regulation of dc-to-ac conversion schemes. En: *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix AZ, USA. p. 4268–4273.
- Sira-Ramírez, H. (2001). Dc-to-ac power conversion on a ‘boost’ converter. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **11**(6), 589–600.
- Sira-Ramírez, H., G. Escobar y R. Ortega (1996). On passivity-based sliding mode control of switched dc-to-dc power converters. En: *35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan.
- Sira-Ramírez, H., R. Marquez-Contreras y M. Fliess (2002). Sliding mode control of dc-to-dc power converters using integral reconstructors. *International Journal on Robust and Nonlinear Control* **12**(13), 1173–1186.
- Sira-Ramírez, H., R. Márquez y M. Fliess (2001). Generalized pi sliding mode control of dc-to-dc power converters. En: *IFAC Symposium on System Structure and Control*. Praga, República checa.
- Sira-Ramírez, H., R. Ortega, R. Pérez-Moreno y M. García-Esteban (1995). A sliding mode controller-observer for dc-to-dc power converters: A passivity approach. En: *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans LA, USA. p. 3379–3384.

- Sira-Ramírez, H., R. Ortega y M. Garcia-Esteban (1998). Adaptive passivity based control of average dc-to-dc power converter models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **12**(1), 63–80.
- Sira-Ramírez, H., R.A. Perez-Moreno, R. Ortega y M. Garcia-Esteban (1997). Passivity-based controller for stabilization of dc-to-dc power converters. *Automatica* **33**(4), 499–513.
- Sira-Ramírez, H. y M. Ríos-Bolívar (1994). Sliding mode control of dc-to-dc power converters via extended linearization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* **41**(10), 652–661.
- Sira-Ramírez, H. y P. Lischinsky-Arenas (1991). The differential algebraic approach in nonlinear dynamical compensator design for dc-to-dc power converters. *International Journal of Control* **54**(1), 111–134.
- Sira-Ramírez, H. y R. Ortega (1995). Passivity-based controllers for the stabilization of dc-to-dc power converters. En: *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans LA, USA. p. 3471–3476.
- Sira-Ramírez, H. y V.M. Hernández (2002). Sliding modes, differential flatness and integral reconstruction. En: *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*. Vol. 274 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag. ISBN: 3-540-42965-4.

- Sira-Ramírez, H. y G. Silva-Navarro (2002). Regulation and tracking for the average boost converter circuit: A generalized proportional integral approach. *International Journal of Control* **75**(13), 988–1001.
- Sira-Ramírez, H. y M. Ilic-Spong (1989). Exact linearization in switched mode dc-to-dc power converters. *International Journal of Control* **50**(2), 511–15246.
- Tsytkin, Y.Z. (1964). *Sampling Systems Theory and its Application*. Vol. 1 of *International Series of Monographs on Electronics and Instrumentation*. The Macmillan Company. pp. 375.
- Utkin, V.I. (1991). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Communications and Control Engineering. Springer Verlag. ISBN: 3540535160. pp. 286.
- Vázquez, N., J. Almazan, J. Alvarez, C. Aguilar y J. Arau (1999). Analysis and experimental study of the buck, boost and buck-boost inverters. En: *Proc. of the 1999 IEEE Power Electronics Specialists Conference*. Charleston SC, USA. p. 801–806.
- Vazquez, N. (2004). Desarrollo de Inversores con Capacidad de Elevación para Sistemas de Alimentación Ininterrumpible, y sus Técnicas de Control. Tesis de Doctorado. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. Cuernavaca, Mor. México.
- Vázquez, N., C. Aguilar, J. Arau, R. Cáceres, I. Barbi y J. Alvarez (2002a). A novel uninterruptible power supply system with active power factor correction. *IEEE Trans. on Power Electronics* **17**(3), 405–412.

- Vázquez, N., D. Cortes, C. Hernández, J. Alvarez, J. Arau y Jq. Alvarez (2003). A new control strategy for the boost inverter. En: *2003 Power Electronics Society Conference PESC'03*. Acapulco, Mexico. p. 1403–1407. Paper no. 44-01.
- Vázquez, N., J. Alvarez, C. Aguilar y J. Arau (1998). Some critical aspects in sliding mode control design for the boost inverter. En: *Proc. of the IEEE Conferencia Internacional en Electrónica de Potencia 1998*. p. 76–81.
- Vázquez, N., Ja. Alvarez y J. Arau (2002*b*). Passivity-based control for the boost inverter: details of implementation. En: *Proc. of Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA '02*.
- Veerachary, M., T. Senjyu y K. Uetazo (2001). Signal flow graph modelling and analysis of interleaved dc-dc parallel converters. *International Journal of Electronics* **88**(9), 1015–1033.
- Zinober, A., E. Fossas-Colet, J. C. Scarrat y D. Biel (1998). Two sliding mode approaches to the control of buck-boost system. En: *Proceedings of the 5th International Workshop in Variable Structure Systems*. Longboat Key FL, USA. p. 118–122.

Apéndice A

Apéndice

En este anexo se presentan, de forma breve, algunos de los conceptos que se emplean o se mencionan en los capítulos anteriores. El objetivo de este apartado es proporcionar una referencia rápida al lector, brindando los conceptos y los resultados más importantes asociados a ellos. El lector que desee profundizar o entender la naturaleza de dichos conceptos puede ver las referencias que se mencionan en cada sección de este apartado.

A.1. Conceptos de control geométrico

En esta sección se presentan las definiciones de algunos conceptos planteados por primera vez en el enfoque geométrico de la teoría de control de sistemas no lineales y que se han vuelto de extrema utilidad en el análisis y diseño de sistemas de control no lineal. El material presentado en esta sección está completamente basado en (Isidori, 1997), donde se explican de manera amplia y sencilla los conceptos aquí presentados. Otro excelente libro sobre el

tema es (Nijmeijer y Schaft", 1996)

A.1.1. Derivadas direccionales y paréntesis de Lie

Las operaciones de derivadas direccionales y los paréntesis de Lie son muy útiles en la definición de los conceptos presentados en esta sección. La diferencial de una función $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ se denota como $d\lambda$ y se define como

$$d\lambda(x) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \dots \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad (240)$$

Sea el campo vectorial $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}^n$. La derivada direccional de λ a lo largo de f se denota por $L_f \lambda$ y está definida por

$$L_f \lambda(x) = \langle d\lambda(x), f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x) \quad (241)$$

donde $f_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ son los componentes de f

Dado que $L_f \lambda$ es nuevamente una función con valores reales definida en \mathcal{X} , esta operación se puede repetir. Así, se puede derivar λ a lo largo del campo vectorial f y derivar el resultado a lo largo de otro campo vectorial $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}^n$. De esta manera

$$L_g (L_f \lambda)(x) = L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda)}{\partial x} g(x) \quad (242)$$

La derivada de λ a lo largo de f repetida k veces se denota $L_f^k \lambda$, es decir,

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial x} f(x) \quad (243)$$

con $L_f^0 \lambda(x) = \lambda(x)$.

Sean $f_1, f_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y f_2 campos vectoriales suaves. El paréntesis de Lie entre los campos vectoriales f_1 y f_2 se denota como $[f_1, f_2]$ y está definido como:

$$[f_1, f_2](x) = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2(x) \quad (244)$$

y se lee como producto o paréntesis de Lie de f_1 con f_2 . Cuando se requiere efectuar varias veces el paréntesis de Lie entre el vector f_2 con el mismo vector f_1 se emplea la notación

$$ad_{f_1}^k f_2(x) = [f_1, ad_{f_1}^{k-1} f_2](x) \quad (245)$$

para $k \geq 1$, con $ad_{f_1}^0 f_2(x) = f_2(x)$.

A.1.2. Grado relativo y forma normal

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (246)$$

$$y(t) = h(x)$$

donde $x \in \mathcal{X} \subset \mathfrak{R}^n$ y los campos vectoriales $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ son suaves. A veces es conveniente escribir expresamente f y g como

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \dots \\ g_n(x) \end{pmatrix} \quad (247)$$

con $f_i, g_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ funciones suaves.

Definición 27 (Grado relativo) *Se dice que el sistema (246) tiene grado relativo r en el punto x_0 si*

$$i) L_g L_f^k h(x) = 0 \text{ para toda } x \text{ en una vecindad de } x_0 \text{ y toda } k < r - 1$$

$$ii) L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$$

El concepto de grado relativo está relacionado con importantes propiedades de los sistemas no lineales.

Proposición 28 *Suponga que el sistema (246) tiene grado relativo r en x_0 entonces $r \leq n$.*

Defínase

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= h(x) \\ \phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\dots \\ \phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x) \end{aligned} \tag{248}$$

si $r < n$ siempre es posible encontrar $n - r$ funciones $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n(x)$ tal que el mapeo

$$\left(\phi_1(x) \dots \phi_n(x) \right)^T \tag{249}$$

tiene un jacobiano no singular en x_0 y califica así como un cambio de coordenadas en una vecindad de x_0 . Más aún, siempre es posible elegir las funciones $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ de tal manera que $L_g \phi_i(x) = 0$ para todo $r + 1 \leq i \leq n$ y toda x en la vecindad de x_0 .

Si se hace el cambio de coordenadas $z = \Phi(x)$, la representación del sistema (246) en las nuevas coordenadas resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\dots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\
 \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\
 &\dots \\
 \dot{z}_n &= q_n(z) \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{250}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a(z) &= L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z)) \\
 b(z) &= L_r h(\Phi^{-1}(z))
 \end{aligned} \tag{251}$$

mientras que

$$q_i(z) = L_f \phi_i(\Phi^{-1}(z)) \tag{252}$$

Cuando un sistema no lineal está representado de la forma (250) se dice que está en la forma normal.

A.1.3. Linealización por retroalimentación del estado

Si el grado relativo del sistema (246) es n ($r = n$) entonces las funciones ϕ_i con $r + 1 \leq i \leq n$ no son necesarias y el sistema queda en las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\dots \\
 \dot{z}_{n-1} &= z_n \\
 \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{253}$$

Si la ley de control se hace

$$u = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v) \tag{254}$$

entonces el sistema en lazo cerrado en las nuevas coordenadas queda

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\dots \\
 \dot{z}_{n-1} &= z_n \\
 \dot{z}_n &= v \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{255}$$

por lo que se dice que en el caso de r_n la ley de control (254) linealiza el sistema o bien que la ley de control (254) resuelve el problema de linealización por retroalimentación del

estado. Note que además de la ley de control (254), la transformación de coordenadas (249) es necesaria para obtener un sistema lineal.

En ocasiones, un sistema no tiene salida definida o bien es necesario redefinirla por motivos de diseño. El siguiente resultado establece condiciones necesarias y suficientes para que un sistema pueda linealizarse por retroalimentación del estado (y cambio de coordenadas).

Lema 29 (Linealización por retroalimentación del estado) *El sistema*

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \quad (256)$$

se puede linealizar por retroalimentación del estado alrededor de x_0 si y sólo si existe en la vecindad \mathcal{X} de x_0 una función $\lambda(x)$ definida en \mathcal{X} tal que dicho sistema con la salida $y = \lambda(x)$ tiene grado relativo n en x_0

Existe un criterio sencillo para saber si existe la función $\lambda(x)$ a la que se refiere el lema 29. Antes de presentarlo es necesario establecer el concepto de distribución involutiva.

Una distribución es una función que asigna a cada punto $x \in \mathcal{X} \subset \mathfrak{R}^n$ un espacio vectorial generado por un conjunto de campos vectoriales. En otras palabras sean f_1, f_2, \dots, f_d campos vectoriales suaves el objeto

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_d\} \quad (257)$$

es una distribución suave. Note que efectivamente en el punto x la distribución $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)\}$ asigna un subespacio vectorial de \mathfrak{R}^n

Definición 30 (Distribución involutiva) *Se dice que una distribución Δ es involutiva si dados dos campos vectoriales $\tau_1, \tau_2 \in \Delta$ entonces $[\tau_1, \tau_2] \in \Delta$*

Teorema 31 (Condiciones para que un sistema sea linealizable) *El sistema (256) se puede linealizar por retroalimentación del estado (es decir, existe una salida con grado relativo n en x_0) si y sólo si se satisface*

i) la matriz $\begin{pmatrix} g(x_0) & ad_f g(x_0) & \cdots & ad_f^{n-2} g(x_0) & ad_f^{n-1} g(x_0) \end{pmatrix}$ tiene rango n

ii) la distribución $D = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ es involutiva en una vecindad de x_0

Observación 32 *Note que en sistemas de segundo orden, la condición ii) se cumple trivialmente, por lo que sólo es necesario que la matriz $(g, [f, g(x)])$ tenga rango 2.*

A.1.4. Dinámica cero

La dinámica cero es un concepto muy importante en la teoría de control no lineal. Es una generalización del concepto de los ceros en una función de transferencia y permite extender la clasificación de sistemas de fase mínima y no mínima a sistemas no lineales. Este concepto se introduce a continuación.

Para mantener una notación sencilla, se puede dividir el cambio de coordenadas $z = \Phi$ en dos

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (258)$$

De esta manera, el sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\dots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\
 \dot{\eta} &= q(\xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{259}$$

Note que si x_0 es un punto de equilibrio, es decir, $f(x_0) = 0$ y $h(x_0) = 0$ entonces $\xi(h_0) = 0$. Por otra parte, las últimas $n - r$ coordenadas (es decir, η) se pueden escoger de tal manera que tengan un valor arbitrario en x_0 , en particular, se pueden escoger de tal forma que $\eta(x_0) = 0$. Así, $(\xi, \eta) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (259) y se tiene

$$b(\xi, \eta) = 0 \text{ en el punto } (\xi, \eta) = (0, 0) \tag{260}$$

$$q(\xi, \eta) = 0 \text{ en el punto } (\xi, \eta) = (0, 0) \tag{261}$$

Suponga que se quiere encontrar (si existe) un conjunto de condiciones iniciales x_0 y un control $u_0(\cdot)$ definido en todo t de tal manera que la salida $y(t)$ sea idénticamente cero para toda t en una vecindad de $t = 0$. Una solución trivial a este problema es hacer $x_0 = 0$ y $u_0 = 0$, sin embargo, el mayor interés está en las soluciones no triviales.

En la forma normal $y(t) = z_1(t)$, por lo que $y(t) = 0$ implica

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \dots = \dot{z}_r(t) = 0 \tag{262}$$

En consecuencia, $y(t) = 0$ implica que $\xi(t) = 0$. De (259), para que esto suceda se tienen que

elegir condiciones iniciales de tal manera que $\xi(0) = 0$ y un control

$$u(t) = -\frac{b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(0))} \quad (263)$$

Seleccionando adecuadamente las condiciones iniciales e introduciendo el control (263) $\xi = 0$, de (259) se observa que la dinámica de η está dada por

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad (264)$$

La dinámica (264) obtenida mediante el procedimiento descrito se conoce como dinámica cero del sistema. Por supuesto el procedimiento de calcular las condiciones iniciales y el control para hacer $y(t) = 0$ se puede escribir en las coordenadas originales. La dinámica remanente que quede después de sustituir el control será la dinámica cero en coordenadas originales.

Definición 33 *El sistema (246) se dice que es de fase mínima si el punto $\eta = 0$ de su dinámica cero es estable. En caso contrario, se dice que el sistema es de fase no mínima.*

A.2. Pasividad y sistemas Euler-Lagrange

Muchos sistemas físicos se pueden modelar mediante las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). La propiedad de pasividad que tienen estos sistemas ha sido aprovechada para desarrollar una técnica de control que permite mantener la misma estructura en lazo cerrado. En particular, esta técnica de control ha sido aplicada a los convertidores en varios trabajos publicados hasta la fecha. El material presentado en esta sección se basa en las referencias

(Ortega *et al.*, 1994; Ortega *et al.*, 1998) donde el lector puede ver los detalles de la técnica de control mencionada. Aquí sólo se presentan los conceptos básicos necesarios para establecer la propiedad de pasividad de los sistemas EL y, por tanto, de los convertidores.

Considere el sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x(0) = x_0 \quad (265a)$$

$$y = h(x, u) \quad (265b)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$, $u, y \in \mathfrak{R}^m$,

Definición 34 (Disipatividad) *Suponga que asociada al sistema (265) hay una función $w : \mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ llamada función de suministro, integrable para cada $u \in U$, es decir, satisface $\int_{t_0}^{t_1} |w(u(t), y(t))| dt < \infty$ para todo $t_0 \leq t_1$. Sea X un conjunto conexo de \mathfrak{R}^n que contiene al origen. Se dice que el sistema (265) es disipativo en X con la función de suministro w si existe una función $S(x)$ con $S(0)=0$, tal que para todo $x \in X$*

$$S(x) \geq 0, \quad S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T w(u(t), y(t)) dt \quad (266)$$

para toda $u \in U$ y toda $T \geq 0$ tales que $x(t) \in X$ para todo $t \in [0, T]$. A la función $S(x)$ se le conoce como función de almacenamiento.

Definición 35 (Pasividad) *Se dice que un sistema es pasivo si es disipativo con la función de suministro $w(u, y) = u^T y$.*

Los sistemas de EL son sistemas que se pueden escribir de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = Q \quad (267)$$

donde los componentes del vector $q \in \mathfrak{R}^n$ son las coordenadas generalizadas del sistema, $Q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de fuerzas externas y la función \mathcal{L} se conoce como el lagrangiano del sistema. El lagrangiano está generalmente definido como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q) \quad (268)$$

donde la función T es la energía cinética del sistema y, en general, es de la forma

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{M}(q) \dot{q} \quad (269)$$

con $\mathcal{M} = \mathcal{M}^T$. La función \mathcal{V} es la energía potencial y se supone que tiene una cota inferior, es decir, $\mathcal{V}(q) + \alpha \geq 0$ para algún $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Es común que en el modelado de circuitos eléctricos Q tenga la forma

$$Q = -\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F} \quad (270)$$

donde \mathcal{D} es la función de disipación de Rayleigh del sistema y define un operador pasivo estático (respectivamente, estrictamente pasivo con respecto a la entrada)

$$\dot{q} \mapsto \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (271)$$

es decir, se cumple que

$$\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} > \alpha \|\dot{q}\|^2 \quad (272)$$

para todo $\dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ y $\alpha \geq 0$ (respectivamente, $\alpha > 0$). En el vector $\mathcal{F} \in \mathfrak{R}^n$ se incluyen las fuentes de voltaje asociadas a las coordenadas generalizadas del circuito, éste se puede escribir como $\mathcal{F} = M v_{in}$, con M una matriz de rango m y $v_{in} \in \mathfrak{R}^m$. Sin pérdida de generalidad se

puede suponer que M es de la forma $M = [0|I_m]$ y clasificar las coordenadas q entre actuadas y no actuadas, respectivamente

$$q_a = Mq, \quad q_{na} = [I_{n-m}|0]q \quad (273)$$

Teorema 36 *Los sistemas EL definen un operador pasivo desde el vector de fuentes v_{in} hasta las velocidades generalizadas directamente actuadas, es decir,*

$$\langle v_{in}, M^T \dot{q} \rangle \geq \beta \quad (274)$$

para toda $v_{in} \in \mathcal{L}_{2e}^m$. Más aún, el operador es estrictamente pasivo con respecto a la salida si la función de disipación de Rayleigh define un operador estrictamente pasivo con respecto a la entrada. En este caso

$$\langle v_{in}, M^T \dot{q} \rangle \geq \alpha \|M^T \dot{q}\|^2 + \beta \quad (275)$$

para algún $\alpha > 0$ y $\beta \in \Re$

Demostración. Sustituyendo (270) en (267) se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F} \quad (276)$$

de aquí se puede escribir

$$\dot{q}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = -\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \dot{q}^T \mathcal{F} \quad (277)$$

reagrupando, (277) se puede poner de la forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right] = \dot{q}^T \left(M v_{in} - \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) \quad (278)$$

Note que dado (268) y (269) se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) + \mathcal{V}(q) \equiv H(q, \dot{q}) \quad (279)$$

en virtud de (279) integrando (278) con respecto a t se obtiene

$$\underbrace{H(q(t), \dot{q}(t)) - H(q(0), \dot{q}(0))}_{\text{energía almacenada}} + \underbrace{\int_0^t \dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial (\dot{q})} ds}_{\text{energía disipada}} = \underbrace{\int_0^t \dot{q}^T M v_{in} ds}_{\text{energía suministrada}} \quad (280)$$

Dado que \mathcal{V} tiene una cota inferior y la función de disipación de Rayleigh es pasiva (respectivamente, estrictamente pasiva con respecto a la entrada) se tiene que el sistema es pasivo (estrictamente pasivo con respecto a la salida). ■

Teorema 37 *El equilibrio de un sistema EL con $v_{in} = 0$ está dado por $(q, \dot{q}) = (\bar{q}, 0)$ donde \bar{q} es la solución de $\partial \mathcal{V}(q) / \partial q = 0$. El equilibrio es único y estable si la energía potencial es estrictamente una función convexa. Si además la función de disipación de Rayleigh es estrictamente pasiva con respecto a la entrada entonces el equilibrio es global asintóticamente estable.*

Demostración. ver (Ortega *et al.*, 1994). ■

Sustituyendo (269) y (270) en (267) se tiene que los sistemas EL se pueden escribir mediante la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F} \quad (281)$$

Dado que las cuatro funciones $(\mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$ especifican completamente el sistema es común en la bibliografía modelar un sistema EL especificando la cuádrupla ordenada.

$$\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F}) \quad (282)$$