

TESIS DEFENDIDA POR

María Corona García-Cabral

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Alfred Barry U'ren Cortés

Director del Comité

Dr. Roger Sean Cudney Bueno

Miembro del Comité

Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich

Miembro del Comité

Dr. Kevin Arthur O'Donnell

Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon

*Coordinador del programa de
posgrado en Óptica*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

23 de enero de 2012

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ÓPTICA**

Generación y Caracterización de Ternas de Fotones Enredados

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

María Corona García-Cabral

Ensenada, Baja California, México, enero de 2012

RESUMEN de la tesis de **MARÍA CORONA GARCÍA-CABRAL**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ÓPTICA con orientación en ÓPTICA FÍSICA. Ensenada, Baja California, enero de 2012.

GENERACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE TERNAS DE FOTONES ENREDADOS

Resumen aprobado por:

Dr. Alfred Barry U'ren Cortés

Director de Tesis

En la actualidad existen tecnologías cuánticas que requieren de la disponibilidad de fuentes de luz no-clásica eficientes. El fenómeno de generación paramétrica descendente espontánea (SPDC) constituye un método práctico para la generación de este tipo de luz. Este método está basado en la interacción de campos electromagnéticos clásicos con materiales no-lineales por medio de procesos paramétricos. En general, el SPDC se ha utilizado e implementado experimentalmente para la generación de parejas de fotones utilizando materiales no-lineales de segundo y tercer orden. En la última década se ha buscado la manera de obtener múltiples fotones enredados. En este trabajo se presenta un estudio teórico del proceso de generación paramétrica espontánea descendente de tercer orden (TOSPDC) en materiales con una no-linealidad caracterizada por $\chi^{(3)}$, en donde se generan ternas de fotones enredados. De manera específica, consideramos la utilización de fibras ópticas ultra-delgadas como el medio no-lineal para el proceso de TOSPDC, en configuraciones en donde el empatamiento de fases se logra mediante el uso de diferentes modos transversales de propagación de la fibra, en particular cuando la luz generada se propaga en el modo fundamental y el bombeo en el primer modo excitado. Este trabajo está enfocado en proponer diseños de fuentes de ternas de fotones TOSPDC con los detalles necesarios, de tal manera que puedan ser implementados de manera experimental.

Nuestro trabajo de investigación se enfoca en la descripción teórica del estado de tres fotones y en las características de empatamiento de fases de TOSPDC. Además se hace un análisis de la tasa de emisión de las fuentes propuestas en relación con los parámetros experimentales clave, como lo son la longitud de la fibra, el ancho de banda y la potencia de bombeo para cada una de las fuentes propuestas: casos de generación TOSPDC degenerada en frecuencia y no-degenerada en frecuencia.

De manera adicional, se hace un estudio preliminar sobre las condiciones de empatamiento de velocidad de grupo para así lograr un control sobre las propiedades de enredamiento de las ternas de fotones emitidas.

Palabras Clave: Mezclado de cuatro ondas, generación paramétrica descendente, fibras ópticas.

ABSTRACT of the thesis presented by **MARÍA CORONA GARCÍA-CABRAL**, in partial fulfillment of the requirements of DOCTOR IN SCIENCES degree in OPTICS with orientation in PHYSICAL OPTICS. Ensenada, Baja California, january 2011.

GENERATION AND CHARACTERIZATION OF ENTANGLED PHOTON TRIPLETS

Today, recent quantum technologies need efficient nonclassical light sources to work. The phenomenon of spontaneous parametric downconversion (SPDC) represents a practical method for the generation of this kind of light. This method is based in the interaction of classical electromagnetic fields with nonlinear materials using parametric processes. In general, the SPDC has been used and implemented in experiments for the generation of photon pairs using second and third order nonlinear materials. During the last ten years, several research groups have been looking for the way to obtain multiple entangled photons. In this work we show a theoretical study of the third order spontaneous parametric down conversion (TOSPDC) process in nonlinear materials characterized by $\chi^{(3)}$, where we have photon triplet generation. Specifically, we consider the utilization of ultra-thin optical fibers as the nonlinear media for the TOSPDC process, in configurations where the phasematching is achieved with the use of various transversal propagation modes of the fiber, particularly when the generated light propagates in the fundamental mode and the pump in the first excited mode. This work is focused in proposing designs of TOSPDC photon triplets sources with all the details in order to be implemented experimentally.

Our research work is focused in the theoretical description of the three photons state and the characteristics of the TOSPDC phasematching. Also, we make an analysis of the emission rate of each of the proposal sources according to the experimental key parameters, such as fiber length, pump band width and pump power: frequency degenerates and nondegenerates TOSPDC generation cases.

Additionally, we make a preliminary study about the group velocity matching conditions to achieve control over the entangled properties of the photon triplets emitted.

Keywords: Four wave mixing, parametric down conversion, optical fibers.

*A mi amado esposo y
a mi hermoso bebé*

Agradecimientos

El trabajo de investigación presentado en esta tesis es una de las metas de mi proyecto de vida y el llegar a ella ha sido posible gracias a la ayuda, la guía y el continuo apoyo de mi familia, amigos y compañeros. Es por eso que quisiera hacer mención y dar agradecimiento especial a cada una de esas personas que han estado conmigo en cada paso del camino de este reto que finalmente termina.

A mis papás, que siempre han estado a mi lado en cada momento de mi vida apoyándome y alentándome a seguir a pesar de los tropiezos que pueda tener. Mami, gracias por ser siempre mi apoyo incondicional, mi paño de lágrimas en los momentos difíciles y por compartir mis alegrías. Papi, gracias por ser mi modelo a seguir, por siempre escucharme y darme consejos. Los quiero mucho.

A mis hermanos con mucho cariño. A Rebe por ser mi amiga, mi consejera, mi confidente. A Alonso por hacerme reír, por apoyarme y por alentarme a terminar lo más pronto posible.

A mi tía Lucha y a Jaime, por haberme adoptado en su casa y por ayudarme a adaptarme a la nueva ciudad.

A mis suegros por las porras y el interés que han puesto en mi desarrollo profesional. Gracias en especial a mis amigos Sergio Cruz y a Claudia Gil por todo el apoyo en estos últimos años para la realización de mis trámites.

A mis amigos, que a pesar de la distancia siempre están al pendiente.

En especial a mi asesor de tesis, el doctor Alfred U'ren. Gracias Alfred por la paciencia, el apoyo, la guía, por alentarme a continuar con mis estudios después de terminar mi maestría, por estar ahí siempre que lo he necesitado.

A mis compañeros del grupo de Óptica Cuántica, de manera particular a Héctor, a Yasser, a Bobby y a Xóchitl. Especialmente mis más sinceros agradecimientos a Karina, ya que sin ella no hubiera podido realizar mi trabajo de tesis.

A Pilar Carreón porque siempre estuvo al pendiente para que tuviera un lugar en donde trabajar y en el que me sintiera a gusto, además de echarme porras durante todo el tiempo que estuve en el ICN.

A mis sinodales Kevin O'Donnell, Roger Cudney y Jorge Hirsch, por se tan comprensivos, y por dar sus puntos de vista y hacer comentarios y aportaciones interesantes durante el desarrollo del proyecto.

Al CICESE por darme la oportunidad de trabajar en el área y en el proyecto que yo quiero. De manera particular al departamento de Óptica, y a todos los investigadores y personal que de una manera u otra contribuyeron con mi trabajo.

A las secretarías del departamento, a Carmen, a Deyanira y a Ana por la ayuda, la guía y por aguantarme en mis momentos de desesperación.

De manera muy especial a mi esposo, ya que ha sido una parte fundamental de mi vida en los últimos 3 años. Gracias Irving por todo. Te amo.

Al CONACyT y al proyecto de FONCICyT por su apoyo económico.

María

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	vi
Lista de Figuras	viii
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1 Propuesta de Trabajo	7
I.1.1 Objetivos Específicos	8
II. PROCESOS NO-LINEALES EN FIBRAS ÓPTICAS	10
II.1 Características generales de las fibras ópticas	10
II.1.1 Fibras ópticas con perfil de índice escalonado y sus modos de propagación HE_{11} y HE_{12}	12
II.1.2 Dispersión en fibras ópticas	17
II.2 Procesos no-lineales en fibras ópticas	19
II.2.1 Mezclado de cuatro ondas	23
III. Estado Cuántico de Tres Fotones obtenido en el Proceso de Generación Paramétrica Descendente de Tercer Orden	30
III.1 Intensidad Espectral Conjunta	37
III.1.1 JSI en variables de frecuencia rotadas	41
IV. Diseños de fuentes de ternas de fotones TOSPDC	47
IV.1 Consideraciones de diseño para fuentes de ternas de fotones	47
IV.2 Diseños específicos de fuentes de ternas de fotones por TOSPDC	51
IV.2.1 Fuente de ternas de fotones TOSPDC degenerada en frecuencia	56
IV.2.2 Fuente de ternas de fotones TOSPDC no-degenerada en frecuencia	57
IV.3 Ruido causado por otros mecanismos físicos	59
V. Tasa de emisión de ternas de fotones en el proceso de TOSPDC	61

Contenido (continuación)

	Página
V.1 Cálculo general del número de ternas de fotones emitidas en el proceso de TOSPDC	64
V.1.1 Régimen monocromático	67
V.2 Fórmula analítica para el caso pulsado	68
V.2.1 Flujo emitido para diseños de fuentes específicas en relación con algunos parámetros experimentales	73
VI. Acondicionamiento de ternas de fotones enredados	81
VI.1 Velocidad de Grupo	82
VI.1.1 Fuentes de parejas de fotones anunciadas	85
VII. Conclusiones	92
REFERENCIAS	97
A. Cálculo de la energía por pulso de bombeo	103
B. Aproximación lineal del empatamiento de fases	108

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Esquema básico del proceso de generación paramétrica descendente espontáneo de segundo orden (SPDC), en donde un haz intenso de bombeo incide sobre un material no-lineal caracterizado por una susceptibilidad $\chi^{(2)}$, y en donde parejas de fotones son generadas de manera espontánea, y están sujetas a las condiciones de conservación de energía y momento.	2
2	Esquema de la sección transversal de una fibra óptica con perfil de índice de refracción escalonado.	13
3	Distribución transversal de la componente longitudinal del vector Poynting para: a) el modo HE_{11} de los fotones de TOSPDC, y b) el modo del haz de bombeo HE_{12}	16
4	a) Esquema de una fibra óptica ultra-delgada en la que se propagan cuatro ondas. b) Coeficiente no-lineal efectivo normalizado en función del radio de la fibra.	22
5	Esquemas básicos de procesos cuánticos del mezclado de cuatro ondas: (a) mezclado de cuatro ondas espontáneo (SFWM), y (b) generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden (TOSPDC).	23
6	Diagramas de energía para a) mezclado de cuatro ondas espontáneo, y b) generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden. . .	24
7	Gráficas de dispersión considerando casos degenerados en frecuencias de generación en una fibra óptica, el bombeo se propaga en ω ($\lambda = 2\pi c/\omega$) y los fotones se generan en $\omega/3$, para a) un solo modo de propagación, en donde $\lambda = 400\text{nm}$, y b) el bombeo propagándose en el modo HE_{12} con frecuencia $\lambda = 532\text{nm}$ y los fotones en el modo HE_{11} con frecuencia $\lambda = 1.596 \text{ nm}$	28
8	Gráficas como función de las tres frecuencias emitidas $\{\omega_r, \omega_s, \omega_i\}$ (etiquetadas como longitud de onda $\omega = 2\pi c/\lambda$) de: (a) JSI, (b) envolvente espectral de bombeo $ \alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i) ^2$, y (c) función de empatamiento de fases $ \phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i) ^2$	38
9	(a) Espectro de dos fotones $I_2(\omega_r, \omega_s)$. (b) Espectro de fotón individual $I_1(\omega_r)$	41
10	Rotación de coordenadas en el espacio de frecuencias.	44

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
11	Representación del estado de tres fotones TOSPDC degenerado en frecuencia, graficado como función de las variables de frecuencia rotadas ν_A y ν_B para los siguientes valores fijos de ν_+ : (a) $\nu_+ = 15 \times 10^9$ rad/s, (b) $\nu_+ = 0$, y (c) $\nu_+ = -15 \times 10^9$ rad/s.	45
12	JSI graficada como función de ν_+ , para $\nu_A = \nu_B = 0$	46
13	Emisión de frecuencias con empatamiento de fases, graficadas como una función de la frecuencia de bombeo para diferentes radios de fibras, y considerando las siguientes longitudes de onda para el modo acompañante, manteniéndolas constantes para cada uno de los cuatro paneles: (a) $\lambda_i = 0.6 \mu\text{m}$, (b) $\lambda_i = 0.8 \mu\text{m}$, (c) $\lambda_i = 1.2 \mu\text{m}$, y (d) $\lambda_i = 1.6 \mu\text{m}$	49
14	Coefficiente no-lineal γ como función de ω_p y Δ para $r = 0.395 \mu\text{m}$ y $\omega_i = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$; la línea sólida negra representa las combinaciones de frecuencia que permiten un empatamiento de fases perfecto.	50
15	(a) Radio de empatamiento de fases, y (b) no-linealidad γ en función de la longitud de onda degenerada de TOSPDC (ω_i).	52
16	(a) Representación de la intensidad espectral conjunta de un estado de tres fotones TOSPDC con frecuencias de generación centradas en $\omega = 2\pi c/0.84 \mu\text{m}$, graficada como una función de las tres frecuencias de generación, y (b) el espectro individual de TOSPDC.	53
17	(a) Frecuencias de emisión que cumplen con el empatamiento de fases como una función del radio del núcleo, para una longitud de onda del bombeo fija ($\lambda_p = 0.532 \mu\text{m}$). (b) Frecuencias de emisión que cumplen con el empatamiento de fases como una función de la frecuencia de bombeo, para un radio del núcleo de la fibra fijo ($r = 0.395 \mu\text{m}$).	54
18	Estado de ternas de fotones TOSPDC no-degenerado en frecuencia. (a)-(c) Espectro de dos fotones obtenido por medio de la integración de la JSI sobre cada una de las tres emisiones de frecuencias; las bandas sombreadas indican los filtros espectrales usados. (d)-(f) Espectro de un solo fotón para cada uno de los tres modos de emisión, incluyendo el efecto del filtrado espectral.	58
19	Figura representativa del arreglo experimental de una fuente de ternas de fotones.	62

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
20	Flujo emitido como función del ancho de banda de bombeo para los siguientes casos: (a) Fuente de TOSPDC degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos azules); (b) Fuente de TOSPDC no-degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos rojos); y fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia evaluada a partir de la expresión analítica cerrada 73 (línea sólida negra). Los valores obtenidos para el límite de bombeo monocromático, a partir de la ecuación 65, están indicados por puntos verdes para cada caso.	75
21	Flujo emitido como función de la longitud de la fibra para los siguientes casos: (a) Fuente de TOSPDC degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos azules); (b) Fuente de TOSPDC no-degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos rojos); y fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia evaluada a partir de la expresión analítica cerrada 73 (línea sólida negra).	77
22	Flujo emitido como función de la potencia de bombeo de bombeo para los siguientes casos: (a) Fuente de TOSPDC degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos azules); (b) Fuente de TOSPDC no-degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos rojos); y fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia evaluada a partir de la expresión analítica cerrada 73 (línea sólida negra).	78
23	Representación del retraso temporal de los pulsos de los fotones señal-1, señal-2 y acompañante, con respecto al pulso del haz de bombeo, debido a la condición de empatamiento de fases. (a) Simétrico. (b) Asimétrico de tipo-1. (c) Asimétrico de tipo-2.	87
24	Condiciones de empatamiento de velocidades de grupo: empatamiento asimétrico de tipo-1, empatamiento asimétrico de tipo-2 y empatamiento simétrico.	90

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

La generación de múltiples fotones enredados representa un tema de estudio importante y una meta fundamental en Óptica Cuántica como un recurso para la realización de pruebas fundamentales de la Mecánica Cuántica, así como para la implementación de novedosas tecnologías de procesamiento y transmisión de información. Se ha encontrado que una manera eficiente de obtener estas fuentes de luz no-clásica (o fuentes de fotones), es la utilización de procesos paramétricos espontáneos como lo son la conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC, por sus siglas en inglés: *Spontaneous Parametric Down Conversion*) y el mezclado de cuatro ondas (SFWM, por sus siglas en inglés: *Spontaneous Four Wave Mixing*).

En general, el mezclado de ondas electromagnéticas en materiales no-lineales, puede dar lugar a interacciones ópticas tanto de tipo clásico como cuántico. Los materiales no-lineales de segundo orden con una susceptibilidad caracterizada por $\chi^{(2)}$, permiten una familia de procesos colectivamente conocidos como mezclado de tres ondas. La amplificación paramétrica y la generación de segundo armónico (SHG, por sus siglas en inglés: *Second Harmonic Generation*) son procesos clásicos característicos del mezclado de tres ondas, mientras que el SPDC de segundo orden es un proceso de mezclado de tres ondas de carácter cuántico. En este último, fotones provenientes de un haz de bombeo intenso con frecuencia ω_p que incide sobre un cristal no-lineal de segundo orden, decaen de manera espontánea en parejas de fotones [los cuales se acostumbra denominar *señal (s)* y *acompañante (i)*] con frecuencias ω_s y ω_i , respectivamente. En la Fig. I se muestra

un esquema básico del proceso de SPDC. Este proceso ha sido el principal proveedor de fuentes de luz no-clásica en las últimas décadas (Kwiat *et al.*, 1995).

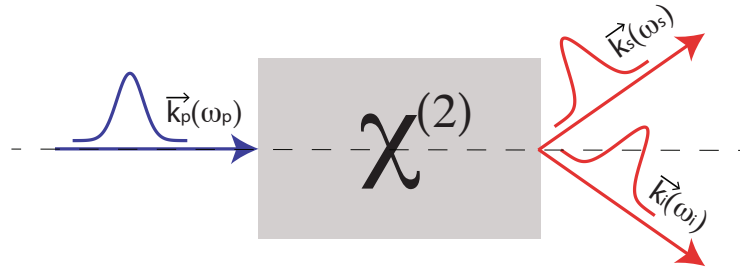


Figura 1. Esquema básico del proceso de generación paramétrica descendente espontánea de segundo orden (SPDC), en donde un haz intenso de bombeo incide sobre un material no-lineal caracterizado por una susceptibilidad $\chi^{(2)}$, y en donde parejas de fotones son generadas de manera espontánea, y están sujetas a las condiciones de conservación de energía y momento.

El mezclado de cuatro ondas (FWM, por sus siglas en inglés: *Four Wave Mixing*) por su parte, puede realizarse en materiales no-lineales de tercer orden, en esta familia de procesos la susceptibilidad del material está caracterizada por $\chi^{(3)}$; las fibras ópticas son un ejemplo de materiales que tienen una no-linealidad de tercer orden. Un proceso clásico que se basa en el mezclado de cuatro ondas es la generación de tercer armónico (THG, por sus siglas en inglés: *Third Harmonic Generation*). A diferencia del mezclado de tres ondas en materiales no-lineales de segundo orden, el FWM permite dos tipos diferentes de generación espontánea en el ámbito cuántico. En primer lugar, la aniquilación de dos fotones de bombeo da lugar a la generación espontánea de parejas de fotones (Garay-Palmett *et al.*, 2007), y en segundo, la aniquilación de un solo fotón de bombeo puede resultar en la generación espontánea de ternas de fotones. Este último proceso, al cual nos referiremos como **conversión paramétrica descendente espontánea de tercer orden** o TOSPDC (por sus siglas en inglés: *Third Order Spontaneous Parametric Downconversion*) es el tema de estudio de esta tesis.

En términos generales, para que ocurra el proceso de SPDC es necesario que se cumplan las condiciones de conservación de energía y de momento. Los fotones que se generan en este proceso, ya sea de segundo o de tercer orden, presentan correlaciones estrictas en número fotónico de los modos emitidos. Además, pueden estar altamente correlacionadas en los grados de libertad continuos (frecuencia, dirección de propagación e instante de emisión). Estas correlaciones en las parejas o en las ternas de fotones son de carácter no-clásico y se conocen como enredamiento cuántico. Formalmente decimos que existe enredamiento cuántico en un sistema compuesto por dos o más sub-sistemas cuando el estado que describe al sistema no puede ser escrito como el producto directo de los estados cuánticos de cada sub-sistema (en este caso, fotones). En términos físicos, para una pareja de partículas enredadas, al llevar a cabo una medición sobre una de ellas, se puede determinar de manera no-local el estado de su contraparte.

El enredamiento cuántico en parejas o ternas de fotones puede existir en cualquier grado de libertad fotónico, tanto discreto como continuo. El enredamiento en polarización es uno de los más utilizados en la práctica, ya que la existencia de elementos de control de polarización permite la manipulación de los estados (Kwiat *et al.*, 1995; Schwindt *et al.*, 1999). También se ha aprovechado el enredamiento espacial transversal, en particular en el grado de libertad de momento angular orbital (Mair *et al.*, 2001). Se han obtenido fotones enredados en casilleros temporales (*time bin* en inglés), utilizando un cristal bombeado por una secuencia de dos (o más) pulsos ultra-cortos (Marcikic *et al.*, 1999). También se han obtenido y demostrado experimentalmente sistemas enredados en más de un grado de libertad simultáneamente (e.g. polarización, modos espaciales y tiempo), a este enredamiento se le conoce como *hiper-enredamiento* (Barreiro *et al.*, 2005).

El proceso de SPDC, tanto de segundo como de tercer orden, permite una gran

libertad de manipulación y acondicionamiento de las propiedades de enredamiento de los grados de libertad continuos de las parejas de fotones. El grado y tipo de enredamiento están determinados en gran medida por las características del empataamiento de fases, que son a su vez determinadas por la dispersión que experimentan el haz de bombeo y los fotones generados en el material no-lineal (Grice *et al.*, 2001; U'Ren *et al.*, 2005b). Para lograr el acondicionamiento de estas propiedades, existen herramientas experimentales, como lo son la utilización de un haz de bombeo en forma de pulstos ultra-cortos y la utilización de cristales micro-estructurados (U'Ren *et al.*, 2007).

Obtener condiciones específicas sobre la estructura modal en los grados de libertad continuos de la pareja de fotones generadas en el proceso de SPDC de segundo orden, es fundamental para la implementación y el desarrollo de experimentos y técnicas de actualidad, y es por lo tanto un tema muy estudiado. Algunas de las tecnologías de procesamiento de información cuántica, tales como las compuertas lógicas basadas en la computación cuántica con óptica lineal (U'Ren *et al.*, 2004; Pittman *et al.*, 2005; Ralph *et al.*, 2001; Knill y Laflamme, 2001) requieren de fuentes confiables de fotones individuales puros. Se ha demostrado que fotones individuales puros se pueden preparar condicionalmente (U'Ren *et al.*, 2005b, 2003), sólo a partir de parejas de fotones factorizables, i.e. sin enredamiento cuántico. Existen otras tecnologías de procesamiento y transmisión de información cuántica, incluyendo ciertos protocolos de teleportación de paquetes de onda unifotónicos (Molotkov, 1998; Molotkov y Nazin, 1999), metrología cuántica (Giovannetti *et al.*, 2001) y criptografía cuántica con un abecedario extendido (Ali-Khan *et al.*, 2007), que explotan la existencia de correlaciones en frecuencia y/o momento transversal. Es importante señalar que la utilización de geometrías confinadas, como las guías de onda (o las fibras ópticas), resultan en un desacoplamiento natural de las correlaciones espaciales, dejando solamente las correlaciones en frecuencia, lo que

facilita la generación de parejas de fotones factorizables en todos los grados de libertad.

La forma más sencilla de garantizar la factorabilidad es mediante filtración directa espacial y/o espectral; sin embargo, esto provoca una disminución en la brillantez y limita el ancho de banda. Se ha demostrado que lograr el empatamiento de velocidad de grupo (GVM, por sus siglas en inglés: *group velocity matching*) entre las ondas involucradas (Grice *et al.*, 2001; Keller y Rubin, 1997) permite la manipulación de las propiedades espectrales de los fotones generados, sin necesidad de recurrir a la filtración. Una de las técnicas que se ha propuesto para obtener GVM es el lograr empatamiento de las velocidad de grupo de manera directa en el cristal, con la desventaja de que este empatamiento sólo se puede obtener a longitudes de onda aisladas y en materiales específicos (Koning y Wong, 2004; Kuzucu *et al.*, 2005). Para tener una gama más amplia de posibilidades, se han buscado y propuesto otros métodos para garantizar este empatamiento, como la utilización de un super arreglo de cristales no-lineales con separadores birrefringentes, en donde el desempatamiento de velocidad de grupo en cada cristal es compensado por la dispersión exhibida por los espaciadores birrefringentes (U'Ren *et al.*, 2005b,a, 2006); se ha propuesto la utilización de dispersión angular en cristales para modificar la velocidad de grupo efectiva; también se ha propuesto la utilización de cristales fotónicos de una dimensión, aprovechando que la velocidad de grupo disminuye alrededor de la banda prohibida (o *band-gap*) (Corona y U'Ren, 2007).

Mientras que el SPDC de segundo orden, junto con el empatamiento de fases y el acondicionamiento del enredamiento de variable continua ha sido estudiado y demostrado de manera experimental, el TOSPDC apenas comienza a ser explorado. Se han publicado estudios teóricos sobre el TOSPDC (Felbinger *et al.*, 1998; Feve *et al.*, 2002; Hnilo, 2005), pero hasta donde sabemos aun no se han reportado resultados experimentales. Es importante mencionar que existen numerosas propuestas y demostra-

ciones de experimentos para la generación de ternas de fotones que no utilizan directamente el TOSPDC, y se presentan con eficiencias de generación bastante bajas, algunos ejemplos de estas propuestas son el decaimiento excitónico de puntos cuánticos (Persson *et al.*, 2004), procesos combinados no-lineales de segundo orden (Keller *et al.*, 1998), y una aproximación de ternas de fotones formada por parejas de fotones obtenidas por SPDC junto con un estado coherente atenuado (Rarity y Tapster, 1999). La realización experimental más clara de emisión de ternas de fotones, que también presenta una baja ganancia de generación, es un experimento presentado el año pasado, que consta de dos procesos SPDC de segundo orden en cascada (Hubel *et al.*, 2010). En este sentido, el TOSPDC se puede diferenciar de otros métodos de generación de ternas de fotones basados en óptica no-lineal por el hecho de que los tres fotones que se obtienen en una terna provienen directamente de un solo evento mecánico-cuántico.

Una posible implementación experimental para la generación de ternas de fotones por TOSPDC se enfrenta a dos principales retos. Por un lado, para poder obtener una ganancia paramétrica considerable, es necesario que la longitud del medio de interacción y la no-linealidad sean suficientes; para darle solución a este problema se pueden utilizar fibras ópticas, que son medios guiados y en principio es posible tener una longitud de interacción grande, además de que al ser materiales centro-simétricos no presentan no-linealidades de segundo orden, sin embargo el sílice fundido y en general los vidrios, sí presentan no-linealidades de tercer orden. Por otra parte, es necesario obtener empatamiento de fases entre las cuatro ondas involucradas, para lo cual se puede recurrir a métodos ya utilizados en el mezclado de cuatro ondas clásico.

La generación de ternas de fotones conduce a retos conceptuales importantes, como por ejemplo, la caracterización y cuantificación del enredamiento tripartita de variable continua, así como el desarrollo de los criterios y las propiedades de diseño que deben

presentar los estados de tres fotones para determinadas aplicaciones específicas. Por un lado, el TOSPDC permite de manera natural la posibilidad de obtener parejas de fotones anunciadas (Sliwa y Banaszek, 2003; Wagenknecht *et al.*, 2010; Barz *et al.*, 2010) con propiedades espectrales específicas, de tal manera que la detección de uno de los fotones anuncia la presencia de una pareja de fotones descrita por un estado puro; por otro lado, permite también de manera directa la generación de estados Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) enredados en polarización (Greenberger *et al.*, 1990) del tipo $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|HHH\rangle + |VVV\rangle)$ (donde H y V denotan la polarización horizontal y vertical, respectivamente), sin requerir de una selección posterior. Este tipo de estados ya se han generado de manera experimental, pero las ternas de fotones se obtienen a partir de la generación y manipulación de múltiples parejas de fotones SPDC de segundo orden (Bouwmeester *et al.*, 1999; Persson *et al.*, 2004). La importancia de la generación de estados GHZ es que permite la refutación del realismo local sin tener que recurrir a desigualdades, lo cual es un tema de estudio actual en el ámbito de la Óptica Cuántica. Además podemos mencionar que si las ternas de fotones se emiten en un solo modo transversal presentarán factorabilidad en momento transversal, pero pueden tener enredamiento espectral. La generación de ternas de fotones enredados en frecuencia es un tema potencialmente importante, y es el tema fundamental de estudio de esta tesis.

I.1 Propuesta de Trabajo

El principal objetivo de este trabajo de investigación consiste en el estudio y la descripción teórica y numérica del estado de tres fotones generado en el proceso de generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden. De manera particular se

propone el diseño específico de una fuente de ternas de fotones basada en fibras ópticas ultra-delgadas bimodales guiadas por aire, de tal manera que queden sentadas las bases para una futura implementación experimental.

I.1.1 Objetivos Específicos

Para la realización de este trabajo, se propusieron los siguiente objetivos específicos:

1. Efectuar un análisis teórico del proceso de generación paramétrica descendente espontáneo de tercer orden. Derivar el estado cuántico generado por TOSPDC a partir del Hamiltoniano de interacción de los cuatro campos involucrados. Describir la estructura del enredamiento espectral tripartita.
2. Hacer un análisis teórico sobre la tasa de emisión de los fotones en el proceso de generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden. Obtener expresiones generales del flujo de emisión en el proceso de TOSPDC. Obtener expresiones analíticas cerradas para el flujo de emisión en el proceso de TOSPDC: a) considerando un bombeo monocromático, y b) considerando un bombeo pulsado.
3. Proponer una fuente de ternas de fotones enredados por TOSPDC, utilizando fibras ópticas ultra-delgadas bimodales guiadas por aire. Analizar cuáles deben ser las consideraciones experimentales que se deben tomar para diseñar una fuente de ternas de fotones. Diseños específico de fuentes de ternas de fotones: a) caso degenerado en frecuencia, y b) caso no-degenerado en frecuencia. Análisis de diferentes parámetros experimentales clave: longitud de la fibra, ancho de banda de bombeo, potencia del haz de bombeo.
4. Analizar de manera preliminar el acondicionamiento de velocidad de grupo en el

proceso de generación de las ternas de fotones.

Capítulo II

PROCESOS NO-LINEALES EN FIBRAS ÓPTICAS

En este capítulo se hace una descripción de las fibras ópticas en general, y de manera particular se enfatiza en las fibras de perfil de índice de refracción escalonado. También se analizan los modos de propagación dentro de las fibras, los cuales permiten el empatamiento de fases entre las cuatro ondas involucradas en el proceso de TOSPDC, y específicamente se enfoca en los modos HE_{lm} . Finalmente se habla de los procesos no-lineales cuánticos que se pueden dar en materiales no-lineales de tercer orden, como lo son el mezclado espontáneo de cuatro ondas (SFWM) y la conversión paramétrica descendente de tercer orden (TOSPDC).

II.1 Características generales de las fibras ópticas

Las fibras ópticas de sílice se han convertido en uno de los medios más importantes para la realización de comunicaciones ópticas a larga distancia en la actualidad (Yariv y Yeh, 2007). Debido a lo anterior, se ha impulsado en gran manera a la tecnología de fabricación de las mismas, resultando en grandes avances que han permitido el desarrollo de fibras con características especiales. Ejemplos de fenómenos no-lineales en fibras ópticas son la generación de un super continuo de luz que puede ser aplicado en espectroscopía y la tomografía de coherencia óptica y telecomunicaciones (Wardsworth *et al.*, 2002). En la última década se han aprovechado las ventajas que presentan las fibras ópticas para el diseño y desarrollo de fuentes de luz no-clásicas para aplicaciones

en procesamiento de información y comunicaciones cuánticas (Fiorentino *et al.*, 2002).

En su forma más simple, una fibra óptica es una guía de onda cilíndrica fabricada con materiales que presentan pérdidas bajas como el sílice. Consta de un núcleo sólido central rodeado por una cubierta, cuyo índice de refracción es menor que el del material del núcleo. Pueden tener un perfil de índice escalonado (ver Fig. 2) o un perfil de índice graduado; en este último, el índice de refracción del núcleo disminuye de manera gradual de su centro hasta la periferia. Las fibras ópticas funcionan como guías de onda, de tal manera que la luz es guiada en el interior del núcleo, la geometría de la fibra y la frecuencia óptica determinan la manera en que esta luz se propaga, en forma de uno o varios modos. La onda electromagnética viaja a lo largo de la fibra (que puede ser definido como el eje z) con una constante de propagación $k(\omega)$ (dependiente de la frecuencia ω de la luz) y una velocidad de grupo v_g , y los modos se refieren a la distribución espacial que toma la intensidad de esta onda (en el plano transversal a la fibra óptica, caracterizado por los ejes x y y). En este trabajo se estudia la utilización de fibras ópticas con perfil de índice de refracción escalonado y que soportan dos modos de propagación de la luz: el fundamental HE_{11} y el primer modo excitado HE_{12} , como se explica en la siguiente sección.

En general, las fibras ópticas están fabricadas con vidrio de sílice, que está formado de moléculas fundidas de silicio (SiO_2). La razón por la que se utiliza el sílice radica en que comparado con otros materiales, presenta pérdidas bajas en la transmisión de luz, su valor mínimo se localiza cerca de $1.55\mu m$, que es la longitud de onda de operación utilizada en las telecomunicaciones. En muchas ocasiones, la diferencia entre los índices de refracción del núcleo y de la cubierta se realiza utilizando una selección de dopantes durante el proceso de fabricación, como el germanio (GeO_2) y el boro.

Además de su importancia y utilización en las telecomunicaciones, las fibras ópticas

son aprovechadas en diversas aplicaciones que implican efectos no-lineales, incluyendo la familia de procesos de FWM. En este sentido, se ha impulsado el diseño y desarrollo de fibras fabricadas de materiales con índices de refracción mayores al sílice, de tal manera que se puedan alcanzar contrastes dieléctricos mucho mayores, favoreciendo de esta manera el confinamiento de la luz en el núcleo y por lo tanto reforzando los procesos no-lineales. Algunos de los materiales que se usan para fabricar fibras altamente no-lineales son el óxido de Telurio (Ravi Kanth Kumar *et al.*, 2003) y los calcogenuros (Yeom *et al.*, 2008).

II.1.1 Fibras ópticas con perfil de índice escalonado y sus modos de propagación HE_{11} y HE_{12}

Las fibras ópticas [como la que se muestra en la figura 2] son llamadas fibras de perfil de índice de refracción escalonado, o SIF (por sus siglas en inglés: *step-index fiber*). Están formadas por un núcleo con índice de refracción n_1 y radio r , y por una cubierta que rodea al núcleo que tiene un índice de refracción n_2 . Para que la luz pueda ser guiada, se debe cumplir la relación entre los índices de refracción $n_1 > n_2$. El mecanismo que permite que la luz sea guiada en el interior del núcleo es la reflexión total interna, que se da en la frontera entre el núcleo y la cubierta cuando se cumple que el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico $\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1)$. Un parámetro característico en este tipo de fibras es el contraste dieléctrico entre el núcleo y la cubierta que está dado por $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$.

Ahora bien, para poder entender cómo se propaga una onda dentro de una SIF, es necesario conocer su distribución transversal, así como la constante de propagación de los modos que son guiados dentro de la fibra. La constante de propagación se obtiene

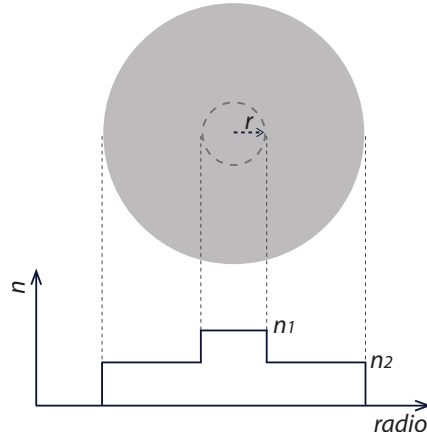


Figura 2. Esquema de la sección transversal de una fibra óptica con perfil de índice de refracción escalonado.

al resolver la llamada “ecuación característica” o condición de modo [ver (Yariv y Yeh, 2007)]; dicha ecuación resulta de aplicar las condiciones de frontera a las soluciones de la ecuación de onda (o de Helmholtz) en la “frontera” núcleo-cubierta, esto quiere decir que las componentes tangenciales del campo deben de ser continuas. La solución a esta ecuación se puede obtener de manera numérica. Por otro lado, para que exista un modo confinado la constante de propagación k del modo debe estar contenida en el intervalo $n_2\omega/c < k < n_1\omega/c$ (donde c es la velocidad de la luz en el vacío). El procedimiento para encontrar dicha ecuación ha sido estudiado desde hace mucho tiempo y puede ser consultado a detalle en la referencia (Yariv y Yeh, 2007). Las variables que son libres en el desarrollo de este cálculo son la frecuencia de propagación de la luz, el radio del núcleo y los índices de refracción del núcleo y la cubierta. La ecuación característica tiene la forma:

$$\frac{J'_l}{hrJ_l} = - \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_l}{qrK_l} \pm \left[\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K'_l}{qrK_l} \right)^2 + \frac{l^2}{n_1^2} \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 \left(\frac{1}{q^2r^2} + \frac{1}{h^2r^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1)$$

en donde $J_l = J_l(hr)$ es la función de Bessel de primera clase y de orden l y $K_l = K_l(qr)$ es la función Bessel modificada de segunda clase y de orden l ; los apóstrofes indican derivación con respecto a su argumento; $h^2 = (n_1\omega/c)^2 - k^2$, $q^2 = k^2 - (n_2\omega/c)^2$ y l toma valores enteros. Las soluciones para esta ecuación se pueden separar en dos clases, que corresponden a las dos raíces de la ecuación cuadrática en J_l'/hrJ_l ; los *eigenvalores* o valores propios que resultan de estas dos ecuaciones dan origen a dos clases de soluciones que se denominan de manera convencional “modos EH_{lm}” y “modos HE_{lm}”, o modos híbridos (Yariv y Yeh, 2007; Agrawal, 2007) (que son aquéllos en los que hay componente del campo eléctrico y magnético en la dirección de propagación, con m un valor entero).

En general, la ecuación 1 puede tener varias soluciones para cada valor entero de l , cada solución nos da el valor de la constante de propagación k que corresponde a uno de los modos que la fibra puede soportar en función de ω , n_1 , n_2 y r . En este trabajo, vamos a utilizar los modos HE que se obtienen de la raíz de la Ec. 1 que está dada por:

$$\frac{J_{l-1}}{hrJ_l} = - \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \right) \frac{K_l'}{qrK_l} + \left[\frac{l}{(hr)^2} - R \right], \quad (2)$$

donde

$$R = \left[\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K_l'}{qrK_l} \right)^2 + \left(\frac{lck}{n_1\omega} \right)^2 \left(\frac{1}{q^2r^2} + \frac{1}{h^2r^2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

La ecuación 2 se puede resolver gráficamente, si se toman ambos lados de la ecuación y se grafican de manera independiente como funciones de hr , dejando que $(qr)^2 = (n_1^2 - n_2^2)(\omega/c)^2 - (hr)^2$ en el lado derecho de la ecuación. En nuestro análisis nos enfocamos a los modos HE con $l = 1$ (Yariv y Yeh, 2007). El parámetro que determina el número de modos que son soportados en una SIF está dado por la frecuencia normalizada:

$$V = \frac{2\pi r}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (4)$$

en donde $\lambda = 2\pi c/\omega$ es la longitud de onda de la luz. Una fibra es monomodal, es decir solamente se puede propagar el modo fundamental HE_{11} a lo largo de la fibra, si V es menor que la primera raíz de la función Bessel de orden cero. El primer modo excitado de propagación o modo HE_{12} puede existir siempre que V tenga un valor entre la primera y segunda raíz de la función Bessel de orden 1, es decir entre 3.832 y 7.016. En general, no es posible afirmar que para un valor de V en ese intervalo solo puedan propagarse en la fibra dos modos; esto es cierto en la familia de modos HE, pero la fibra puede soportar otros modos que aparecerían para V en ese rango. Sin embargo, es importante mencionar que el modo fundamental HE_{11} siempre se propaga, mientras que los modos de orden mayor tienen un valor de corte, tal que para $V > V_{cut}$ las ondas no se pueden propagar en la fibra (por ejemplo, $V_{cut} = 3.832$ es un valor de corte para el modo de propagación HE_{12}).

Los perfiles transversales de cada uno de los modos, se pueden obtener sustituyendo la constante de propagación k dada para cada modo en la ecuación de onda original y resolviendo para el campo. En general, la distribución modal del campo está dada por una función $f(x, y)$ en términos de funciones Bessel de primera y segunda clase en las regiones del núcleo y de la cubierta, respectivamente (Yariv y Yeh, 2007).

La potencia por unidad de área que se transmite dentro de la fibra, se puede conocer si se conoce la función del perfil transversal de propagación de acuerdo a

$$S_z = \frac{1}{2}(E_r H_\theta^* - E_\theta H_r^*), \quad (5)$$

donde los campos con subíndices r y θ representan los componentes campos radial

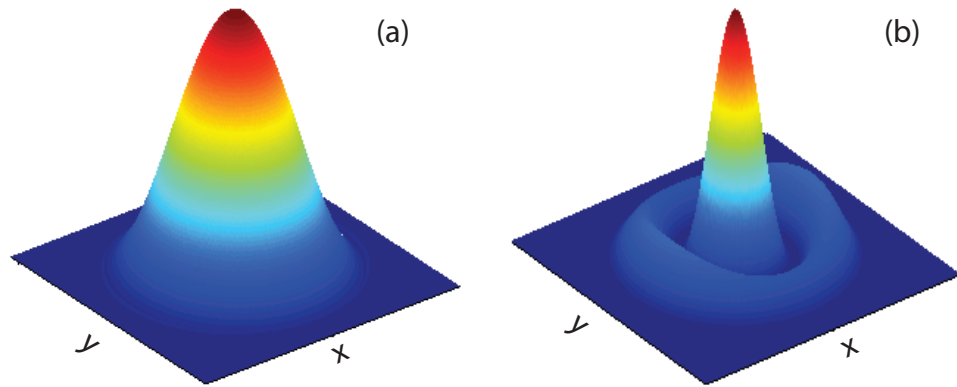


Figura 3. Distribución transversal de la componente longitudinal del vector Poynting para: a) el modo HE_{11} de los fotones de TOSPDC, y b) el modo del haz de bombeo HE_{12} .

y acimutal, respectivamente y el superíndice * indica el complejo conjugado (Snitzer, 1961). El diámetro del campo modal (MDF, por sus siglas en inglés: *mode field diameter*), está definido por (Artiglia *et al.*, 1989; Foster *et al.*, 2004):

$$D_m = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{\int S_z r^3 dr}{\int S_z r dr}}, \quad (6)$$

donde D_m es el diámetro efectivo de la distribución electromagnética dentro de la fibra óptica y las integrales se evalúan sobre el perfil transversal. En la Fig. 3 se muestran ejemplos de las distribuciones transversales de las componentes longitudinales del vector Poynting generales para los modos de propagación a) HE_{11} para luz guiada a $\lambda = 0.740 \mu\text{m}$, y b) HE_{12} para luz guiada a $\lambda = 0.740/3 \mu\text{m}$. Para estas figuras, se utiliza la ecuación 5 con las expresiones espaciales de los campos (Yariv y Yeh, 2007), y se considera una SIF con $r = 900 \text{ nm}$ y $\Delta = 0.31$. Con estas figuras mostramos cómo se distribuye transversalmente la potencia de cada modo; es posible obtener figuras similares si se grafican las distribuciones transversales para cada uno de los modos. Nótese que los modos de la fibra no son simétricos acimutalmente, y esto se debe a que mientras para fibras con un contraste de índices de refracción entre el núcleo y la

cubierta muy pequeño los modos LP (modos linealmente polarizados) que se propagan son simétricos, los modos HE que se propagan en fibras con un contraste de índice de refracción muy grande entre la cubierta y el núcleo, no son simétricos azimutalmente. La orientación de la asimetría en los modos HE es de hecho controlada por la polarización de la luz guiada, que en este caso está sobre el eje x . Más adelante en este trabajo, se explicará la importancia de tener dos modos guiados dentro de la fibra óptica para la generación de ternas de fotones por TOSPD.

II.1.2 Dispersión en fibras ópticas

Cuando un pulso de luz viaja a través de una fibra óptica, se dispersa en el tiempo, de tal manera que se tiene un ensanchamiento temporal del pulso. Esto se debe a que cada uno de los pulsos tiene un determinado ancho en frecuencia que es inversamente proporcional a su duración, y la dispersión hace que cada componente espectral del pulso viaje a una velocidad de fase diferente. En general, la relación de dispersión está dada por la expresión:

$$k(\omega) = \frac{n_{eff}(\omega)\omega}{c}, \quad (7)$$

en donde $n_{eff}(\omega)$ es el índice de refracción efectivo del medio experimentado por el modo que viaja a lo largo de la fibra. Como se puede ver aquí, el índice de refracción, así como la constante de propagación dependen de la frecuencia de propagación de la onda. Existen diferentes tipos de dispersión que se deben tomar en cuenta cuando se estudia la propagación de la luz en fibras ópticas, entre ellos la dispersión modal y la dispersión material.

La dispersión material ocurre porque el sílice es un material dispersivo, esto es, que

el índice de refracción del medio es función de la longitud de onda (o de la frecuencia ω) de la onda electromagnética que se propaga. En un modo fundamental, el origen de esta dispersión está relacionada con las frecuencias de resonancia características a las cuales el medio absorbe radiación electromagnética mediante la oscilación de electrones ligados. La dependencia del índice de refracción del material en bulto con la frecuencia se puede definir mediante una relación empírica:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (8)$$

conocida como la ecuación de Sellmeier (Agrawal, 2007), donde ω_j es la frecuencia de resonancia y B_j es el peso de la j -ésima resonancia. Los parámetros ω_j y B_j , así como el valor de m se pueden obtener de manera experimental.

La velocidad de grupo de los modos, es decir la velocidad de propagación de la energía de cada modo, se vuelve dependiente de la frecuencia, aunque la dispersión material sea despreciable. Esta dependencia, conocida como dispersión de guía de onda ocurre como resultado de la dependencia r/λ de la distribución del campo en el núcleo y en la cubierta de la fibra (Saleh, 1991). La dispersión de guía de onda se vuelve particularmente importante en fibras mono-modales, donde la dispersión modal no se presenta, así como a frecuencias en las que la dispersión material es pequeña.

La dispersión modal ocurre en fibras con varios modos de propagación como resultado de las diferencias en las velocidades de grupo de los modos. Los modos de orden superior experimentan un índice efectivo menor que el anterior, para una frecuencia de propagación fija, el modo fundamental es el que experimenta un índice de refracción mayor. Esto hace que las velocidades de grupo de dos diferentes modos de propagación dentro de una fibra para una onda de frecuencia ω sean en general diferentes (Grubsky

y Savchenko, 2005). Los índices de refracción que experimenta la onda que se propaga en cada modo, dependen del diámetro de la fibra y de la frecuencia de la onda; de tal manera, que es posible encontrar un punto de intersección entre los índices de dos modos diferentes de propagación para dos frecuencias distintas al cambiar de manera continua el radio de la fibra.

II.2 Procesos no-lineales en fibras ópticas

Si se incide luz muy intensa sobre un material, la respuesta del material a la acción del campo eléctrico aplicado contiene una componente no-lineal, esto da lugar a varios fenómenos llamados “no-lineales”. Entre estos fenómenos podemos mencionar la generación de nuevas frecuencias (Boyd, 2003). De manera fundamental, la respuesta no-lineal tiene su origen en el movimiento anarmónico de los electrones ligados cuando interactúan con un campo eléctrico, y de esta manera se tiene como resultado que la polarización dipolar inducida es una función no-lineal del campo eléctrico.

Las fibras ópticas son materiales centro-simétricos y por lo tanto, los efectos no-lineales de menor orden están caracterizados por una susceptibilidad de tercer orden $\chi^{(3)}$. Esta no-linealidad da origen a procesos derivados en la respuesta no-lineal instantánea, en los que no hay transferencia de energía del campo electromagnético hacia el medio. Un ejemplo de los procesos derivados de la respuesta no-lineal instantánea, es la refracción no-lineal, en donde el índice de refracción del medio depende de la intensidad de la luz:

$$n = n_0 + n_2 I, \quad (9)$$

donde I es la intensidad de la luz, n_0 es el índice de refracción lineal o a bajas irradiancias

y n_2 representa el índice de refracción no-lineal que es proporcional a la susceptibilidad $\chi^{(3)}$ de la siguiente manera:

$$n_2 = \frac{3\text{Re}[\chi^{(3)}]}{4\epsilon_0 c n_0^2}, \quad (10)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío. Ya que la intensidad es función del tiempo $I = I(t)$, el índice de refracción es también función del tiempo $n = n(t)$, de tal manera que se induce una modulación temporal, y por lo tanto la fase del campo depende del tiempo. Lo anterior lleva a lo que se conoce como automodulación de fase (SPM por sus siglas en inglés: *self phase modulation*) y da origen a la modulación temporal de la frecuencia óptica y a la generación de nuevas componentes espectrales; estos fenómenos son considerables cuando se tienen campos intensos. Por otro lado, cuando se propaga más de un campo en la fibra óptica, el índice de refracción que experimenta un campo depende de su propia intensidad y de la intensidad de los campos co-propagándose; a este fenómeno se le conoce como modulación de fase cruzada (XPM, por sus siglas en inglés: *cross phase modulation*) (Agrawal, 2007). El mezclado de cuatro ondas es otro efecto derivado de la respuesta no-lineal instantánea, y es el que da lugar al SFWM y al TOSPDC, que se explicarán más adelante.

Dado que el efecto no-lineal para el proceso de SFWM es función de la intensidad, y la intensidad es función del área efectiva del medio, es posible definir un coeficiente no-lineal efectivo de la siguiente manera (Agrawal, 2007):

$$\gamma(\omega) = \frac{3\text{Re}[\chi^{(3)}]\omega}{4\epsilon_0 n_0^2 c^2 A_{eff}}, \quad (11)$$

donde A_{eff} es el área efectiva del modo, que en general está definida como sigue:

$$A_{eff} = \frac{[\int dx \int dy |f(x, y)|^2]^2}{\int dx \int dy |f(x, y)|^4}, \quad (12)$$

en donde $f(x, y)$ es la distribución transversal del modo, considerando una fibra monomodal. Dependiendo de los dopantes que se utilicen, el índice de refracción no-lineal para el sílice tiene un valor aproximado de $n_2 = 2.2 - 3.4 \times 10^{-20} \text{m}^2/\text{W}$. El coeficiente no-lineal γ se mide en unidades de $[\text{W}^{-1}/\text{km}]$. En la ecuación 11, vemos que γ puede aumentar su valor si el valor del índice de refracción no-lineal del material con el que estamos trabajando es alto o si el área efectiva del modo es muy pequeña, esto es, si hacemos que el radio de la fibra disminuya.

Fibras ópticas ultra-delgadas

Las fibras ópticas ultra-delgadas (también conocidas como *tapers*) en general, pueden presentar un contraste de índice de refracción entre el núcleo y la cubierta muy grande, particularmente si son guiados por aire (es decir, si el aire juega el papel de cubierta). Recientemente, se ha demostrado que es posible fabricar fibras ópticas con diámetros en el núcleo del orden de cientos de nanómetros, y además se ha mostrado que estos dispositivos pueden guiar la luz através de radios muy pequeños con pérdidas mínimas. La fabricación de estas fibras se basa en el estiramiento bajo la aplicación de calor de fibras convencionales [ver figura 4 (a)]; grupos experimentales, con experiencia en este tipo de trabajo han encontrado que para radios tan pequeños, el núcleo y la cubierta pierden su identidad independiente, de tal manera la luz es guiada por aire. Se han logrado radios de cientos de nanómetros y longitudes de decenas de centímetros (Tong *et al.*, 2003; Leon-Saval *et al.*, 2004; Brambilla, 2010) para este tipo de fibras. Esta disminución del tamaño del núcleo que guía a la luz, y el aumento de la diferencia entre los índices del núcleo-cubierta (Δ), permite que el modo de una fibra óptica se vuelve

estrechamente confinado, lo que permite un aumento en la energía por unidad de área de la onda. Las guías de onda que son utilizadas para la generación de supercontinuo, como las fibras microestructuradas y los *tapers*, presentan estas ventajas (Birks *et al.*, 1997; Wardsworth *et al.*, 2002; Knight, 2003). Al aumentar la intensidad de la luz guiada dentro de la fibra, la no-linealidad aumenta. En la Fig. 4 (b) se presenta una gráfica del coeficiente no-lineal efectivo normalizado en función del radio de la fibra también normalizada; aquí es posible ver, cómo para radios pequeños de la fibra la no-linealidad presenta un pico máximo del orden de $100\text{W}^{-1}/\text{km}$ que corresponde al diámetro óptimo para interacciones no-lineales (Foster *et al.*, 2004); también se puede observar en esta misma figura que para valores más pequeños del radio de la fibra, la no-linealidad disminuye, y esto es debido a que a medida que el radio tiene valores menores, la fracción de la potencia contenida fuera de la fibra es mucho mayor que la que se encuentra en el núcleo.

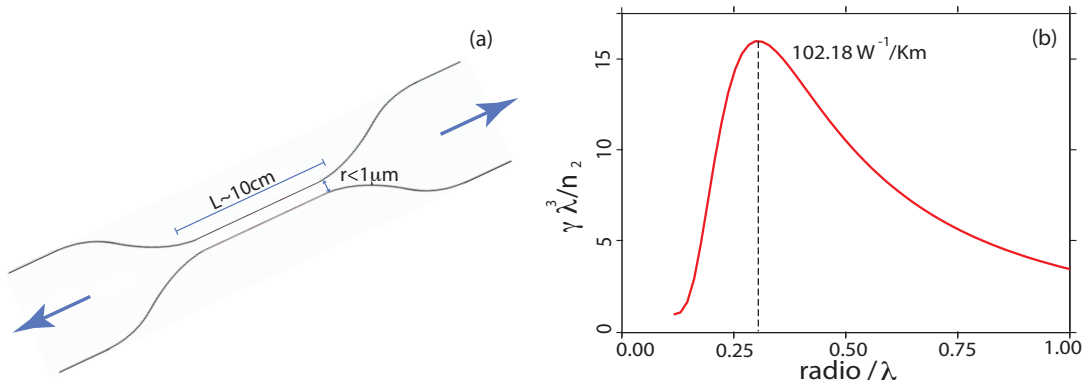


Figura 4. a) Esquema de una fibra óptica ultra-delgada en la que se propagan cuatro ondas. b) Coeficiente no-lineal efectivo normalizado en función del radio de la fibra.

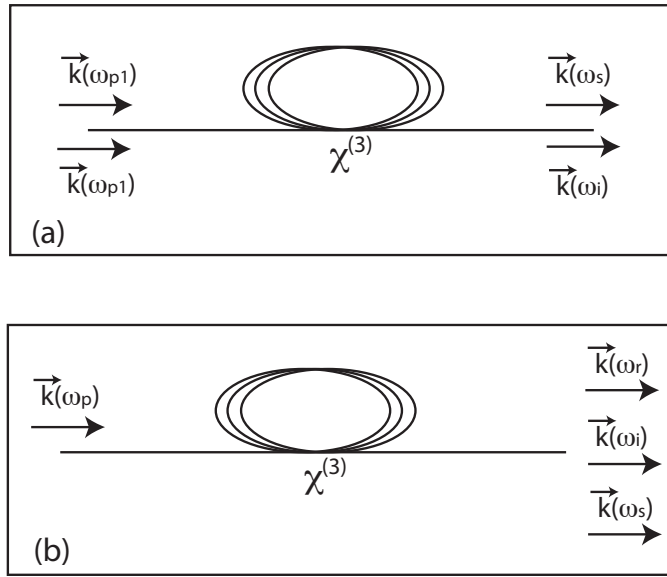


Figura 5. Esquemas básicos de procesos cuánticos del mezclado de cuatro ondas: (a) mezclado de cuatro ondas espontáneo (SFWM), y (b) generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden (TOSPDC).

II.2.1 Mezclado de cuatro ondas

El mezclado de cuatro ondas es uno de los efectos derivados de la respuesta no-lineal en fibras ópticas que tiene su origen en la presencia de la susceptibilidad de tercer orden $\chi^{(3)}$. Como se mencionó en la introducción existen dos procesos no-clásicos no-lineales importantes en este tipo de fibras, por un lado, el mezclado de cuatro ondas espontáneo o SFWM que da origen a parejas de fotones y por el otro, la generación de ternas de fotones por generación paramétrica descendente espontánea o TOSPDC. A continuación se hablará un poco de las generalidades de estos dos procesos, y se hará énfasis en el segundo que es el tema principal de este trabajo de tesis.

SFWM

De manera básica, el mezclado de cuatro ondas espontáneo o SFWM es un proceso en el cual a partir de dos fotones de bombeo con frecuencias ω_1 y ω_2 , se pueden generar

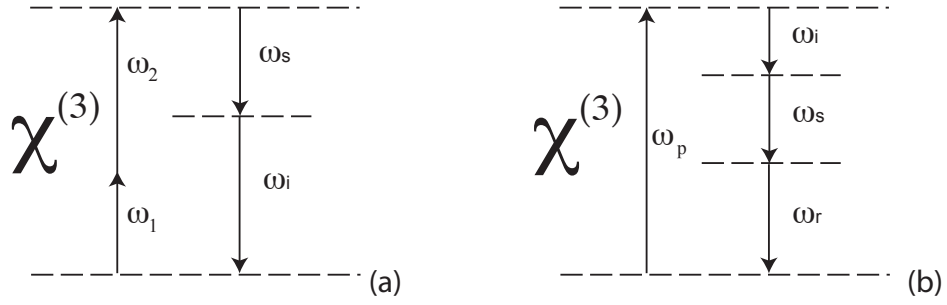


Figura 6. Diagramas de energía para a) mezclado de cuatro ondas espontáneo, y b) generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden.

de manera espontánea parejas de fotones (Fiorentino *et al.*, 2002) en fibras ópticas con frecuencias ω_s y ω_i . Ya que es un proceso paramétrico, se debe conservar la energía y por lo tanto se debe satisfacer la relación $\omega_1 + \omega_2 = \omega_s + \omega_i$, en la figura 5(a) se muestra un esquema básico de este proceso. En el caso más general, los cuatro campos que interaccionan en el proceso pueden estar en modos espectrales distintos [ver Fig. 6 (a)].

Por otro lado, es necesario que se cumpla también la conservación de momento o condición de emparejamiento de fases entre los cuatro campos $\Delta k = 0$ para tener una buena eficiencia de conversión de los fotones de bombeo a los fotones señal y acompañante:

$$\Delta k = k(\omega_1) + k(\omega_2) - k(\omega_s) - k(\omega_i) - \phi_{SFWM}(z), \quad (13)$$

donde $k(\omega_\mu)$ (con $\mu = 1, 2, s, i$) es la constante de propagación de cada una de las ondas, y $\phi_{SFWM}(z)$ es un corrimiento de fase no-lineal que se origina de los procesos de auto-modulación de fase y modulación de fase cruzada entre los campos y depende directamente de las potencias pico de los haces de bombeo; una explicación detallada de este aspecto se puede consultar en la referencia (Agrawal, 2007).

El estudio del SFWM ha sido de gran utilidad para el desarrollo de fuentes de parejas de fotones basadas en fibras ópticas que tienen diferentes configuraciones. Se pueden mencionar algunos ejemplos incluyendo esquemas basados en que las cuatro ondas están co-polarizadas (Fulconis *et al.*, 2005; Fan *et al.*, 2005); fotones generados con polarización ortogonal a los fotones de bombeo (Kruhlak *et al.*, 2006; Cohen *et al.*, 2009; Halder *et al.*, 2009); fotones enredados en polarización (Fan y Migdal, 2005). Además de lo anterior, el fenómeno de mezclado de cuatro ondas se utiliza en la implementación de fuentes de luz clásica basadas en la ganancia paramétrica a partir de versiones estimuladas del proceso.

Generación de ternas de fotones por TOSPDC

Fundamentalmente, el proceso de generación paramétrica espontánea de tercer orden o TOSPDC en un material no-lineal con una susceptibilidad $\chi^{(3)}$, en este caso en una fibra óptica, es un proceso en el cual fotones provenientes de un haz de bombeo intenso (con frecuencia ω_p) decaen de manera espontánea y dan origen a ternas de fotones (Chekhova *et al.*, 2005; Hnilo, 2005; Felbinger *et al.*, 1998; Bencheikh *et al.*, 2007; Banaszek y Knight, 1997; Douady y Boulanger, 2004). En el desarrollo de este trabajo, a las frecuencias generadas, las llamaremos señal-1 (r), señal-2 (s) y acompañante (i), estos nombres se han tomado en base a la terminología que se utiliza en SPDC de segundo orden y en SFWM. Estos fotones tendrán frecuencias ω_r , ω_s y ω_i , respectivamente. Podemos ver un esquema básico de este proceso en la figura 5. De manera análoga con SFWM, y dado que se está tratando con un proceso paramétrico, se debe tener conservación de energía, de esta manera, las frecuencias deben cumplir la condición:

$$\omega_p = \omega_r + \omega_s + \omega_i, \quad (14)$$

en donde, para el caso más general los cuatros campos pueden estar en modos espectrales distintos [ver Fig. 6 (b)]. Por otro lado, para tener una buena ganancia paramétrica o eficiencia de conversión del bombeo en las ternas de fotones (señal-1, señal-2 y acompañante), es necesario que se cumpla también la condición del empatamiento de fases entre las cuatro ondas o conservación de momento $\Delta k = 0$, esta condición está dada por:

$$\Delta k = k_p(\omega_r + \omega_s + \omega_i) - k_r(\omega_r) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i) + \phi_{NL} = 0, \quad (15)$$

en donde $k_\mu(\omega_\mu)$ (con $\mu = p, r, s, i$) es la constante de propagación de cada una de las ondas y $\phi_{NL} = [\gamma_p - 2(\gamma_{pr} + \gamma_{ps} + \gamma_{pi})]P$ es una contribución no-lineal, en donde γ_p y $\gamma_{p\mu}$ son los coeficientes no-lineales derivados de la automodulación de fase y de la modulación de fase cruzada, respectivamente, y P es la potencia pico del haz de bombeo. Estos coeficientes no-lineales pueden ser escritos así:

$$\gamma_p = \frac{2\text{Re}[\chi^3]\omega_{p0}}{4\epsilon_0 c^2 n_p^2 A_{eff}^{(p)}}, \quad (16)$$

y

$$\gamma_{p\mu} = \frac{2\text{Re}[\chi^3]\omega_{\mu 0}}{4\epsilon_0 c^2 n_p n_{\mu 0} A_{eff}^{(p\mu)}}, \quad (17)$$

en términos de la definición $n_{\mu 0} \equiv n_\mu(\omega_{\mu 0})$, donde $\omega_{\mu 0}$ es la frecuencia central del paquete de onda generado para cualquiera de los tres fotones en una terna ($\mu = r, s, i$).

$A_{eff}^{(p)}$ y $A_{eff}^{(p\mu)}$ representan las áreas de interacción efectivas de las ondas dadas por:

$$A_{eff}^{(p)} = \frac{1}{\int \int dx dy |A_p(x, y)|^4}, \quad (18)$$

$$A_{eff}^{(p\mu)} = \frac{1}{\int \int dx dy |A_p(x, y)|^2 |A_\mu(x, y)|^2}, \quad (19)$$

en donde $A_p(x, y)$ es la distribución transversal de las onda de bombeo y $A_\mu(x, y)$ representa la distribución transversal de cada uno de los fotones generados en una terna ($\mu = r, s, i$). En las expresiones para estas áreas de interacción se han utilizado normalizaciones para la distribución espaciales, que se explicarán más adelante.

Empatamiento de fases en el proceso de TOSPDC

En el proceso de TOSPDC existe una separación espectral más grande entre el bombeo y la luz emitida que en el caso de SPDC de segundo orden. Por ejemplo, para el caso degenerado, si el bombeo tiene una frecuencia ω , cada uno de los fotones tendría una frecuencia $\omega/3$, lo que conduciría a la condición de empatamiento de fases dada por $k(\omega) = 3k(\omega/3)$, en donde estamos considerando el límite de una potencia muy pequeña, en donde es posible despreciar el corrimiento de fases no-lineal; el cumplimiento de esta condición se dificulta debido a la dispersión presente en el medio no-lineal. En la figura 7(a), en donde se está graficando la dispersión para una fibra óptica monomodal en función de la longitud de onda de propagación del haz, se puede ver que $k(\omega) \neq 3k(\omega/3)$.

Las condiciones de empatamiento de fases para procesos no-lineales clásicos son en principio, las mismas que para sus contra-partes no-clásicas. Para poder garantizar el empatamiento de fases entre las ondas involucradas se puede recurrir a la búsqueda de geometrías que nos den el empatamiento directo, pero que no son compatibles con el uso de medios guiados. Otras técnicas que se han estudiado incluyen la utilización de fibras birrefringentes con polarizaciones cruzadas, así como la explotación de los modos superiores en las fibras ópticas. Estos métodos han sido utilizados en el proceso de generación de tercer armónico (THG), pero no han sido probados en un proceso de tipo cuántico. Se ha encontrado que es posible lograr la condición de empatamiento de

fases si se utilizan fibras ópticas ultra-delgadas bi-modales, guiadas por aire, siempre y cuando el bombeo se propague en el primer modo excitado (HE_{12}) y la luz emitida se propague en el modo fundamental (HE_{11}) (Grubsky y Savchenko, 2005). Este es un método que ha sido implementado experimentalmente con éxito, aunque con eficiencias bajas, para la generación de THG (Grubsky y Feinberg, 2007). En la figura 7(b) se muestra una gráfica de la dispersión experimentada por cada uno de los modos en una fibra óptica bimodal, aquí se puede observar que es posible obtener la condición de empatamiento de fases buscada. De aquí que en esta sección se describen las propiedades de empatamiento de fases para TOSPDC para dichas fibras ópticas.

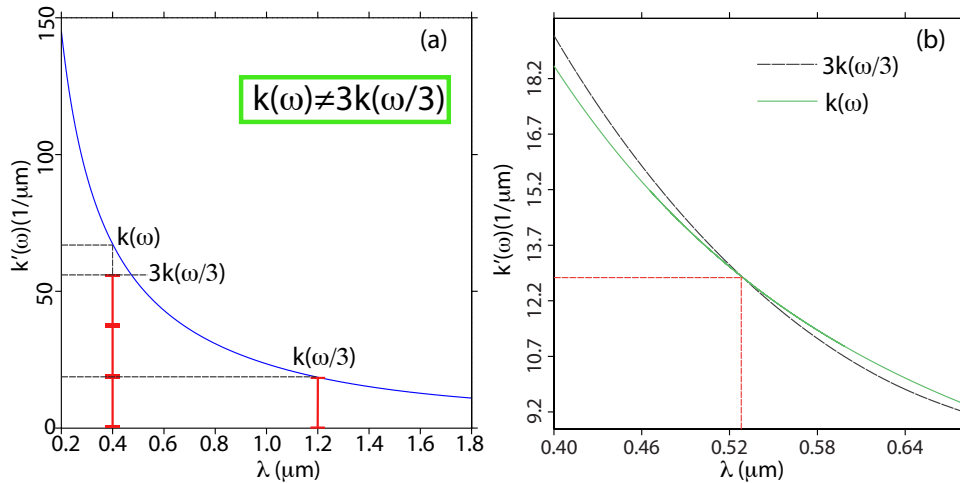


Figura 7. Gráficas de dispersión considerando casos degenerados en frecuencias de generación en una fibra óptica, el bombeo se propaga en ω ($\lambda = 2\pi c/\omega$) y los fotones se generan en $\omega/3$, para a) un solo modo de propagación, en donde $\lambda = 400\text{nm}$, y b) el bombeo propagándose en el modo HE_{12} con frecuencia $\lambda = 532\text{nm}$ y los fotones en el modo HE_{11} con frecuencia $\lambda = 1.596 \text{ nm}$.

Las propiedades de empatamiento de fases para TOSPDC están determinadas por la constante de propagación $k(\omega)$, dada por la ecuación (7). En general, en este trabajo se consideran fibras ópticas que permiten dos modos de propagación, en donde el bombeo se propaga en el modo HE_{12} y las ternas de fotones en el modo fundamental. Con el

análisis presentado al inicio de este capítulo, se pueden obtener los valores del radio r de la fibra a los cuales se obtiene empatamiento de fases con esta configuración para determinada frecuencia de bombeo y frecuencias de generación. Este tópico se va a revisar en capítulos posteriores.

Capítulo III

Estado Cuántico de Tres Fotones obtenido en el Proceso de Generación Paramétrica Descendente de Tercer Orden

En este capítulo, se estudia el proceso de generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden o TOSPDC, enfocado en obtener el estado cuántico del sistema. El análisis que se sigue durante el desarrollo de este capítulo está restringido a configuraciones en las cuales los tres fotones TOSPDC son generados en el mismo modo transversal de la fibra, y los cuatro campos involucrados están co-polarizados, es decir, tienen polarización lineal sobre el eje x y se propagan en la misma dirección a lo largo de la fibra óptica (eje z). Ya que se está trabajando en el régimen espontáneo, se recurre a la teoría de perturbaciones, de manera análoga a la generación de parejas de fotones (Mandel, 1995).

En el proceso de TOSPDC en fibras ópticas, el fenómeno no-lineal se origina a partir de la susceptibilidad eléctrica de tercer orden $\chi^{(3)}$. En este proceso, fotones individuales del haz de bombeo (p) pueden ser aniquilados dando lugar a la emisión de ternas de fotones. Tomando como base la notación que se utiliza comúnmente en el proceso de generación paramétrica descendente de segundo orden, los tres modos de emisión se denotan señal-1 (r), señal-2 (s) y acompañante (i).

La energía del campo electromagnético está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (u_e + u_m) dV, \quad (20)$$

en donde $u_e = \vec{E} \cdot \vec{D}$ y $u_m = \vec{H} \cdot \vec{B}$ son las densidades eléctrica y magnética, respectivamente (Born, 1999), y V es el volumen de interacción. \vec{D} y \vec{B} son los vectores de desplazamiento eléctrico y magnético, respectivamente, y están relacionadas con los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} conforme a:

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}, \quad (21)$$

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \vec{M}, \quad (22)$$

que son las relaciones constitutivas, donde ϵ_o y μ_o son las permitividades eléctrica y magnética del vacío, respectivamente. \vec{P} es la polarización macroscópica del medio y \vec{M} es la densidad de magnetización, que en el caso de las fibras ópticas es nula (Saleh, 1991). En general, para un material dieléctrico, la polarización (\vec{P}) es igual a la suma de los momentos dipolares eléctricos que son inducidos por el campo \vec{E} en el medio. Suponiendo que la respuesta es instantánea, la polarización se puede escribir como:

$$\vec{P} = \epsilon_o \chi^{(1)} \vec{E} + \epsilon_o \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots, \quad (23)$$

en donde sólo aparecen los términos de orden impar, y se ha suprimido el término proporcional a $\chi^{(2)}$, debido a la naturaleza centro-simétrica de las fibras ópticas (Boyd (2003)). El factor $\chi^{(1)}$ del primer sumando es la susceptibilidad eléctrica lineal, y es el responsable de los fenómenos que no son dependientes de la intensidad de la luz; $\chi^{(3)}$ es el elemento $\chi_{xxxx}^{(3)}$ del tensor de susceptibilidad de tercer orden y es el responsable de los efectos no-lineales como la refracción lineal y el mezclado de cuatro ondas (Agrawal, 2007).

En el estudio que se hace en este trabajo, el campo eléctrico se puede escribir como:

$$\vec{E} = (\mathbf{E}_p + \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i)\hat{x}, \quad (24)$$

donde \hat{x} representa un vector unitario que indica la dirección de polarización. Cada uno de los campos está definido por $\mathbf{E}_\mu = \frac{1}{2}[E_\mu^{(+)} + E_\mu^{(-)}]$ y oscila a una frecuencia ω_μ (con $\mu = r, s, i, p$). Los campos eléctricos con superíndices (+) y (-) representan los componentes con frecuencia positiva y negativa de cada campo. \mathbf{E}_p es el campo de bombeo, y ya que tiene una intensidad mucho mayor a la de los fotones que se generan en el proceso, es considerado un campo clásico. Los campos \mathbf{E}_r , \mathbf{E}_s y \mathbf{E}_i son campos cuantizados que corresponden a cada uno de los campos generados (señal-1, señal-2 y acompañante). Considerando lo anterior, se sustituyen las ecuaciones (23) y (24) en (21):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \{\epsilon_0(1 + \chi^{(1)})(E_p + E_r + E_s + E_i) + \\ &+ \epsilon_0\chi^{(3)}[(E_p + E_r + E_s + E_i)(E_p + E_r + E_s + E_i)(E_p + E_r + E_s + E_i)]\}\hat{x}, \end{aligned} \quad (25)$$

simplificando y conservando sólo aquellos términos que conservan momento y energía para el presente análisis, el vector de desplazamiento eléctrico queda de la siguiente manera:

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \left[\epsilon (E_p^{(+)} + E_p^{(-)}) + \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)} \left(2E_r^{(+)}E_s^{(+)}E_i^{(+)} + 2E_r^{(-)}E_s^{(-)}E_i^{(-)} \right) \right] \hat{x}, \quad (26)$$

en donde $\epsilon = \epsilon_0\kappa_e$ es la susceptibilidad eléctrica en el medio, y κ_e es la constante dieléctrica, dada por:

$$\kappa_e = 1 + \chi^{(1)} + \frac{3}{8}\chi^{(3)}|E_p|^2 = n^2, \quad (27)$$

con n el índice de refracción del medio y donde $n_o = 1 + \chi^{(1)}$ es el índice de refracción lineal y $n_2 = 3\chi^{(3)}/8n_o$ es el índice de refracción no-lineal del medio (Agrawal, 2007). En las expresiones anteriores se ha considerado que los campos señal-1, señal-2 y acompañante son débiles en comparación al campo de bombeo y que su efecto sobre el índice de refracción que experimentan los campos co-propagándose en la fibra, es despreciable.

Utilizando la definición del campo eléctrico (Ec. 24) y la ecuación (26) se puede demostrar que la densidad de energía del campo eléctrico puede ser expresada como:

$$u_e = \frac{3}{4}\chi^{(3)}E_p^{(+)}E_r^{(-)}E_s^{(-)}E_i^{(-)}, \quad (28)$$

en donde E_p es el campo eléctrico del haz de bombeo, y E_μ (con $\mu = r, s, i$) son los campos cuantizados correspondientes a los modos señal-1, señal-2 y acompañante. Es posible también demostrar que la densidad de energía magnética es cuantitativamente igual a u_e . Reemplazando la ecuación (28) en la ecuación de la energía del campo electromagnético (Ec. 20), es posible encontrar una expresión para el Hamiltoniano efectivo de interacción entre las cuatro ondas involucradas, el cual será el responsable de describir el proceso cuántico en el cuadro de interacción:

$$\hat{H} = \frac{3}{4}\epsilon_o\chi^{(3)} \int_V dV E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)\hat{E}_r^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{E}_s^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{H.C.}, \quad (29)$$

en donde H.C. denota el conjugado hermítico y se han expresado cada uno de los campos eléctricos como la suma de sus partes de frecuencia positiva y frecuencia negativa para cada uno de los cuatro campos involucrados.

A partir de la cuantización de un campo electromagnético libre y su extensión para un material dieléctrico lineal (Loudon, 2000), es posible demostrar que los campos

cuantizados para la señal-1, señal-2 y acompañante (con $\mu = r, s, i$) están dados por:

$$\hat{E}_\mu(\mathbf{r}, t) = A_\mu(x, y)\sqrt{\delta k} \sum_{k,\mu} l(\omega_\mu)\exp[i(k_\mu z - \omega_\mu t)]\hat{a}(k_\mu) + \text{H.C.} \quad (30)$$

donde la frecuencia $\omega_\mu = \omega_\mu(k_\mu)$, con k_μ el vector de onda (ver Ec. 7), \hat{a}_μ es el operador de aniquilación dependiente del número de onda y que está asociado con el modo de propagación de la fibra, y $\delta k = 2\pi/L_Q$ es el espaciado entre los modos definido en términos de la longitud de cuantización L_Q . $A(x, y)$ representa la distribución espacial transversal del campo, que está aproximada a ser independiente de la frecuencia y está normalizada como $\int \int |A(x, y)|^2 dx dy = 1$. La función $l[\omega(k_\mu)]$ está dada por:

$$l(\omega_\mu) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{\pi\epsilon_o n^2(\omega_\mu)}}, \quad (31)$$

donde $n(\omega_\mu)$ es el índice de refracción del medio a la frecuencia ω_μ y \hbar es la constante de Planck.

Como se mencionó anteriormente, en el análisis que se presenta en este trabajo, el modo de bombeo es descrito como un campo clásico, y está expresado en términos de sus componentes de Fourier, como sigue:

$$E_p^+(\mathbf{r}, t) = A_o A_p(x, y) \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \exp[i(k_p(\omega_p)z - \omega_p t)], \quad (32)$$

escrito en términos de la amplitud del campo de bombeo A_o , y la distribución espacial transversal de la fibra $A_p(x, y)$, normalizada como $\int \int |A_p(x, y)|^2 dx dy = 1$, y aproximada a no ser dependiente de la frecuencia dentro del ancho de banda de bombeo. La función $\alpha(\omega_p)$ es la amplitud espectral de bombeo, y está normalizada como $\int |\alpha(\omega_p)|^2 d\omega_p = 1$. Es posible demostrar que A_o está relacionada con la potencia pico de bombeo P (ver Apéndice A) a través de la relación:

$$A_0 = \sqrt{\frac{2P}{\epsilon_0 c n_p |\int d\omega_p \alpha(\omega_p)|^2}}, \quad (33)$$

en donde $n_p \equiv n(\omega_{p0})$, y ω_{p0} es la frecuencia central de bombeo.

Ahora bien, siguiendo un análisis perturbativo estándar (Mandel, 1995) en el cuadro de interacción, podemos obtener el estado cuántico del sistema en un tiempo t a la salida de la fibra:

$$|\Psi(t)\rangle = \left[1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t') \right] |0\rangle_r |0\rangle_s |0\rangle_i. \quad (34)$$

Esta aproximación es válida en el régimen espontáneo, donde los términos correspondientes a la generación de ternas múltiples son despreciables. Sustituyendo los campos [ecuaciones (30) y (32)] en el Hamiltoniano (ver Ec. 29) y después en la ecuación anterior, tenemos que:

$$|\Psi(t)\rangle = |0\rangle_r |0\rangle_s |0\rangle_i + |\Psi_3\rangle, \quad (35)$$

donde el sumando $|0\rangle_r |0\rangle_s |0\rangle_i$ representa el vacío y $|\Psi_3\rangle$ es el componente de tres fotones del estado, dado por:

$$|\Psi_3\rangle = \xi \sum_{k_r} \sum_{k_s} \sum_{k_i} G_k(k_r, k_s, k_i) \hat{a}^\dagger(k_r) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i) |0\rangle_r |0\rangle_s |0\rangle_i, \quad (36)$$

en donde ξ es una constante relacionada con la eficiencia de conversión que involucra a todos los parámetros no-dependientes de las frecuencias de generación, y está dada por:

$$\xi = i \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)} (2\pi) A_0 (\delta k)^{3/2} L}{4\hbar} \int dx \int dy A_p(x, y) A_r^*(x, y) A_s^*(x, y) A_i^*(x, y), \quad (37)$$

aquí * indica el complejo conjugado.

En la componente de tres fotones (ecuación 36), $\hat{a}^\dagger(k_\mu)$ es el operador de creación que al actuar sobre el vacío da lugar a un fotón en el modo $k_\mu(\omega_\mu)$. La función $G_k(k_r, k_s, k_i)$ es la función espectral conjunta, que puede ser escrita en términos de frecuencias de la siguiente manera:

$$G(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = l(\omega_r)l(\omega_s)l(\omega_i)F(\omega_r, \omega_s, \omega_i). \quad (38)$$

La función $l(\omega_\mu)$ tiene una dependencia lenta en la frecuencia (ver ecuación 31) sobre el rango espectral de interés. Si esta dependencia no es tomada en cuenta, las propiedades de correlación espectral de las ternas de fotones están determinadas completamente por la función $F(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ (Rubin *et al.*, 1994), que es conocida como la función de amplitud espectral conjunta (JSA por sus siglas en inglés: *Joint Spectral Amplitude*). La función de amplitud espectral conjunta en el proceso de TOSPDC, está dada así:

$$F(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = \alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i)\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i), \quad (39)$$

en donde la función $\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ se conoce como la función de empatamiento de fases, ya que contiene la información correspondiente a las propiedades de la fibra óptica, y está dada por:

$$\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = \text{sinc} \left[\frac{L}{2} \Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i) \right] \exp \left[-i \frac{L}{2} \Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i) \right], \quad (40)$$

que está escrita en términos de la longitud de la fibra L y del desempatamiento de fases $\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ [ver Ec.(15)]. La función $\alpha(\omega)$ en la ecuación (39) es la función envolvente espectral de bombeo. Para obtener las ecuaciones (35)-(40), se utilizaron

las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-i(\omega_p - \omega_r - \omega_s - \omega_i)t'} dt' &= 2\pi\delta(\omega_p - \omega_r - \omega_s - \omega_i), \\
\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_p \alpha(\omega_p) \delta(\omega_p - \omega_r - \omega_s - \omega_i) &= \alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i), \\
\int_0^L dz e^{i\Delta kz} &= L \operatorname{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta k\right) e^{-i\frac{L}{2}\Delta k}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Es importante hacer notar que la función de amplitud espectral conjunta que se obtiene en este análisis, presenta la misma forma que la que función de amplitud espectral conjunta que se obtiene en el análisis de parejas de fotones generadas por SPDC de segundo orden (Grice y Walmsley, 1997), en donde la función JSA está dada por $F_{SPDC}(\omega_s, \omega_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i)\phi(\omega_s, \omega_i)$, en donde $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ es la función espectral envolvente de bombeo y $\phi(\omega_s, \omega_i)$ es la función de empatamiento de fases.

III.1 Intensidad Espectral Conjunta

En la sección anterior se ha obtenido la función de amplitud espectral conjunta. Para algunos propósitos de este trabajo la función de interés es la Intensidad Espectral Conjunta (JSI, por sus siglas en inglés: *Joint Spectral Intensity*):

$$I(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = |F(\omega_r, \omega_s, \omega_i)|^2, \tag{42}$$

que representa la distribución de probabilidad de emisión simultánea de tres fotones (un fotón señal-1 a la frecuencia ω_r , un fotón señal-2 a una frecuencia ω_s y un fotón acompañante a la frecuencia ω_i) (Grice *et al.*, 2001). De esta manera al realizar una medición si se obtiene por ejemplo, que el fotón señal-1 tiene una frecuencia ω_r , la JSI nos dice el rango de posibles frecuencias en que se pueden encontrar los otros dos

fotones (señal-2 y acompañante) que se emitieron de manera simultánea. Las gráficas de la JSI en el espacio de frecuencias de generación $\{\omega_r, \omega_s, \omega_i\}$ son de gran utilidad para visualizar las correlaciones espectrales existentes en las ternas de fotones, y que muestran la existencia de enredamiento entre ellos (Kim y Grice, 2005).

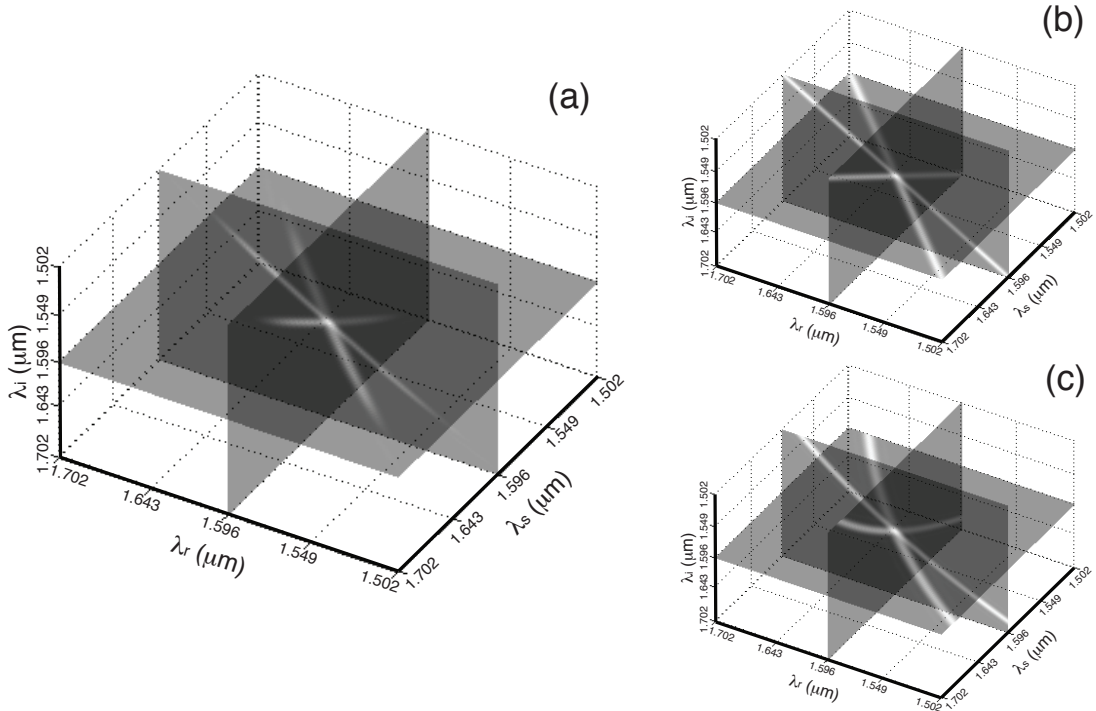


Figura 8. Gráficas como función de las tres frecuencias emitidas $\{\omega_r, \omega_s, \omega_i\}$ (etiquetadas como longitud de onda $\omega = 2\pi c/\lambda$) de: (a) JSI, (b) envolvente espectral de bombeo $|\alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i)|^2$, y (c) función de empatamiento de fases $|\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i)|^2$.

Graficar el estado de tres fotones generados por TOSPDC (o la JSI) es útil para visualizar las correlaciones espectrales que muestran la existencia de enredamiento entre las ternas de fotones. En la figura 8 (a) se muestra una representación de la JSI en el espacio de frecuencias $\{\omega_r, \omega_s, \omega_i\}$ para un caso degenerado en frecuencias, en el que las frecuencias centrales de generación son todas iguales $\omega_r = \omega_s = \omega_i = \omega = \omega_p/3$. La representación que se está utilizando en la figura 8 corresponde a cortes del estado sobre los planos $\{\omega_r, \omega_s\}$ con $\omega_i = \omega/p$, $\{\omega_s, \omega_i\}$ con $\omega_r = \omega_p/3$ y $\{\omega_r, \omega_i\}$ con $\omega_s = \omega_p/3$,

es decir en las frecuencias centrales para cada plano. Esta representación nos permite observar de una manera sencilla la curvatura que presentan los estados. En la gráfica de la figura 8 (a) se muestra la función $I(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$. De manera particular, en esta figura se está considerando el estado de tres fotones generado por TOSPDC en una fibra óptica bimodal guiada por aire, en donde el bombeo se propaga en el primer modo excitado HE_{12} y los fotones en el modo fundamental HE_{11} con un radio $r = 395$ nm y una longitud $L' = L/100$ (en donde $L = 10$ cm es la longitud que se utiliza en el diseño del siguiente capítulo, pero que en este caso no es fácil visualizar); considerando una longitud de onda central de bombeo $\lambda_{p0} = 2\pi c/\omega_{p0} = 532$ nm, y por lo tanto los fotones estarán centrados en $\lambda = 2\pi c/\omega = 1.596$ μ m. Para este ejemplo se ha considerado que el bombeo está dado por un haz Gaussiano de la forma

$$\alpha(\omega_p) \propto e^{-\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma'^2}}, \quad (43)$$

con un ancho espectral de $\sigma' = 200\sigma$ (donde $\sigma = 4.7THz$ es el ancho de banda que se utiliza en el diseño del siguiente capítulo).

En las figuras 8(b) y (c) se muestran las gráficas correspondientes a la función espectral envolvente de bombeo $|\alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i)|^2$ y la función de empatamiento de fases $|\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i)|^2$. Es importante hacer notar que para que las figuras aquí mostradas sean gráficamente claras, se utilizó una longitud de fibra muy pequeña, así como un ancho espectral del haz de bombeo muy angosto, del orden de $\sigma' = 200\sigma$; sin embargo, estos valores no constituyen valores físicos posibles, simplemente permiten mostrar la forma que tiene la JSI en el espacio de generación de frecuencias (a una escala diferente que la que se obtiene con los parámetros experimentales realistas) (Corona *et al.*, 2011b). Lo anterior se debe a que mientras que el ancho de la función de empatamiento de

fases es proporcional a $1/L$, la función espectral del haz de bombeo es proporcional a σ . En realidad si se utilizan parámetros típicos experimentales se obtiene una especie de “membrana” muy delgada a lo largo del eje ω_i y con mayor extensión sobre las otras direcciones (ω_r y ω_s). En el caso límite de un bombeo monocromático, esta membrana llega a volverse infinitamente angosta, de tal manera que se tienen ternas de fotones espectralmente anti-correlacionadas, con la suma de las tres frecuencias de generación $\omega_s + \omega_r + \omega_i$ igual a un valor constante ω_p .

Además de la JSI de la terna de fotones emitidos, también es interesante conocer en el espectro conjunto $I_2(\omega', \omega'')$ de los pares de fotones resultantes de ignorar uno de los tres fotones de la terna, así como del espectro de fotón individual $I_1(\omega')$ que se obtiene al ignorar dos de los fotones de la terna en cuestión. Estos espectros nos permiten conocer las características espectrales de subconjuntos particulares de 1 o 2 fotones de la terna emitida. La función $I_2(\omega', \omega'')$ está dada por:

$$I_2(\omega', \omega'') = \int d\omega''' |f(\omega', \omega'', \omega''')|^2, \quad (44)$$

donde ω^ν (con $\nu = ', ', ''', ''$), puede representar cualquiera de las tres frecuencias de generación involucradas. En la Fig. 9 se muestra una gráfica en el espacio $\{\omega_r, \omega_s\}$ del espectro conjunto de dos fotones $I_2(\omega_r, \omega_s)$ que corresponden a la JSI de la Fig. 8(a); cabe destacar que este espectro conjunto de dos fotones se puede pensar de manera informal como la sombra de la “membrana” de la Fig. 8(a). Por otro lado, la función $I_1(\omega')$ está dada por:

$$I_1(\omega') = \int d\omega'' \int d\omega''' |f(\omega', \omega'', \omega''')|^2. \quad (45)$$

En la Fig. 9(b) se muestra el espectro de un solo fotón ω_r que corresponde a la JSI de tres

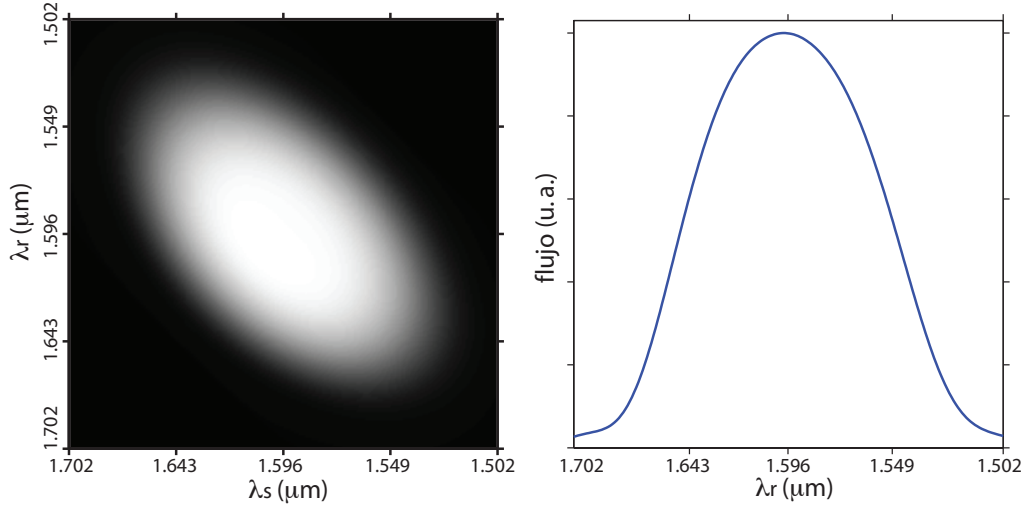


Figura 9. (a) Espectro de dos fotones $I_2(\omega_r, \omega_s)$. (b) Espectro de fotón individual $I_1(\omega_r)$.

fotones de la Fig. 8(a). Los espectros aquí mostrados, constituyen las distribuciones marginales de la función de JSI, esto es, corresponden a las proyecciones de la JSI sobre cada uno de los planos $\{\omega_r, \omega_s\}$, $\{\omega_r, \omega_i\}$ y $\{\omega_s, \omega_i\}$, y a cada uno de los ejes ω_r , ω_s y ω_i , respectivamente. Dado que se está mostrando un caso degenerado en frecuencias que muestra una simetría entre los tres fotones emitidos, las proyecciones en los tres planos serán iguales, así como los espectros individuales de cada uno de los fotones. Estos espectros individuales permiten conocer el ancho de banda de emisión de cada uno de los fotones (Corona *et al.*, 2011a).

III.1.1 JSI en variables de frecuencia rotadas

Como se acaba de mostrar, cuando se grafica en el espacio de frecuencias $\{\omega_r, \omega_s, \omega_i\}$ para parámetros experimentales típicos, el espectro conjunto del estado TOSPDC en el caso degenerado en frecuencia es como una “membrana” muy delgada en una de las direcciones y además considerablemente extensa en las direcciones transversales. Para poder analizar con detalle la forma y características del espectro conjunto del estado

de tres fotones, además de las gráficas mostradas anteriormente, se va a re-expresar la función de amplitud conjunta (ver ecuación 39) en términos de ciertas variables de frecuencia que se escogen de acuerdo a la simetría que presenta el estado cuántico.

Haciendo una aproximación lineal de la constante de propagación, se puede demostrar que la función de desempatamiento de fases está dada por:

$$L\Delta k = \tau_r\nu_r + \tau_s\nu_s + \tau_i\nu_i = 0, \quad (46)$$

en donde $\nu_\mu = \omega_\mu - \omega_0$ son las desintonizaciones de las frecuencias (con $\mu = r, s, i$) y ω_0 indica la frecuencia central de cada fotón considerando que estamos en un caso degenerado en frecuencia. $\tau_\mu = L[k^{(1)}(\omega_{p0}) - k^{(1)}(\omega_0)]$, donde el superíndice (1) indica la primera derivada sobre el argumento y ω_{p0} es la frecuencia central del haz de bombeo (este análisis de la aproximación lineal de la constante de propagación se puede consultar con detalle en el apéndice B). La ecuación 46 se puede reescribir como $\vec{T} \cdot \vec{\nu} = 0$. Esta ecuación describe un plano perpendicular al vector $\vec{T} = (\tau_r, \tau_s, \tau_i)$. Cualquier vector \vec{t} sobre el plano será perpendicular a \vec{T} . El vector unitario en la dirección \vec{T} está dado por:

$$\vec{t} = \left(\frac{\tau_r}{|\vec{T}|}, \frac{\tau_s}{|\vec{T}|}, \frac{\tau_i}{|\vec{T}|} \right), \quad (47)$$

en donde $|\vec{T}| = \sqrt{\tau_r^2 + \tau_s^2 + \tau_i^2}$. Ya que estamos tratando el caso degenerado en frecuencias, entonces $\tau_r = \tau_s = \tau_i = \tau_o$, de tal forma que $|\vec{T}| = \sqrt{3}\tau_o$, y por lo tanto la ecuación anterior queda de la forma:

$$\vec{t}_{deg} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1). \quad (48)$$

\vec{T} es un vector a lo largo de la dirección (1, 1, 1). El nuevo sistema de coordenadas

debe ser tal que el vector \vec{t}_{deg} sea ahora $(0, 0, 1)$. Para esto, se rota el sistema de coordenadas original (ν_r, ν_s, ν_i) un ángulo ϕ alrededor del eje ν_i , obteniendo el sistema $(\nu_{r1}, \nu_{s1}, \nu_i)$. Este nuevo sistema, se rota ahora un ángulo θ alrededor del eje ν_{r1} , obteniendo finalmente un sistema de coordenadas (ν_A, ν_B, ν_+) , con $\nu_A = \nu_{r1}$ (ver figura 10). Las matrices de rotación que corresponden son:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (49)$$

De lo anterior, se obtiene que las coordenadas del nuevo sistema son:

$$\begin{aligned} \nu_A &= \nu_r \cos \phi - \nu_s \sin \phi, \\ \nu_B &= \nu_r \cos \theta \sin \phi + \nu_s \cos \theta \cos \phi - \nu_i \sin \theta, \\ \nu_+ &= \nu_r \sin \theta \sin \phi + \nu_s \sin \theta \cos \phi + \nu_i \sin \theta. \end{aligned} \quad (50)$$

Para el caso que se está tratando en este trabajo, lo que nos interesa es que el eje que corresponde a ν_+ en el nuevo sistema de coordenadas sea tangente a la superficie de contorno del empataamiento de fases perfecto para el estado de tres fotones, mientras que los ejes ν_A y ν_B sean perpendiculares al estado. De esta manera encontramos que los ángulos que nos dan esta configuración para el caso que estamos tratando aquí (ver figura 8), son $\phi = \pi/4$ y $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$.

En la Fig. 11 se muestran tres páneles (a)-(c) en donde se ha graficado la función de JSI $|f'(\nu_A, \nu_B, \nu_+)|^2$ para diferentes valores constantes de ν_+ : (a) 15GHz, (b) 0, y (c) -15GHz, para una fibra con longitud $L = 10$ cm, una frecuencia de centrado del haz de bombeo $\omega_p = 2\pi c/532$ nm, y un ancho de banda $\sigma = 23.5$ GHz (valores

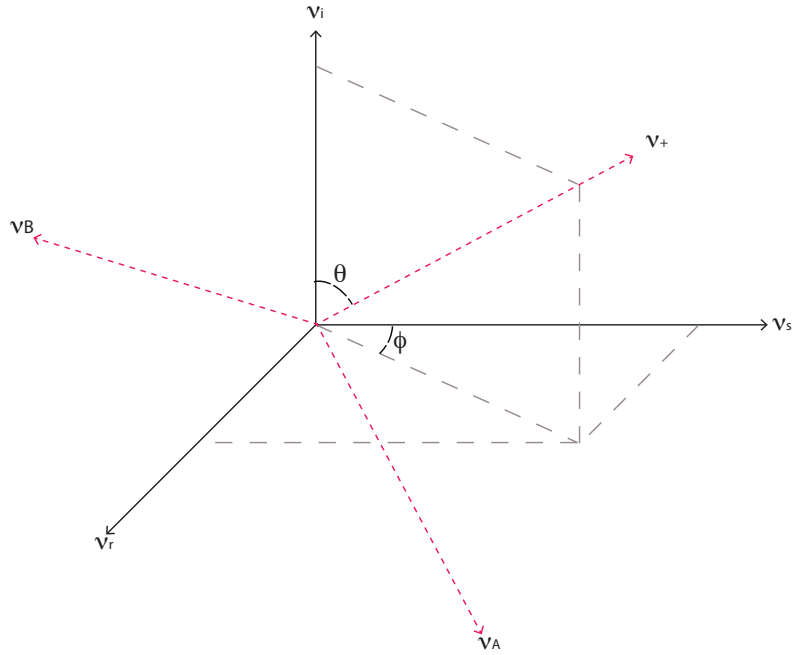


Figura 10. Rotación de coordenadas en el espacio de frecuencias.

que corresponden a uno de los diseños particulares de fuente TOSPDC de ternas de fotones degenerada en frecuencia que se presentará más adelante en este trabajo). Es importante mencionar que estos valores están relacionados con L' y σ' (que son los valores que se utilizaron en la sección anterior para mostrar el estado de tres fotones en el espacio de frecuencias $\{\omega_r, \omega_s, \omega_i\}$) de la siguiente manera: $\sigma' = 200\sigma$ y $L' = L/100$. De aquí podemos ver que con esta nueva manera de graficar, es posible utilizar valores realistas para la longitud de la fibra y para el ancho de banda de bombeo. Estas tres gráficas pueden ser consideradas como diferentes “rebanadas” de la intensidad espectral para valores particulares de ν_+ .

La figura 12, representa una gráfica de la función JSI $|f'(0, 0, \nu_+)|^2$, es decir, ahora se mantienen constantes ν_A y ν_B , y se hace variar ν_+ . De esta manera, mientras que la figura 11(b) muestra la extensión transversal considerable de dicha “membrana”, la figura 12 da un ancho longitudinal mucho menor de la misma. Haciendo un análisis

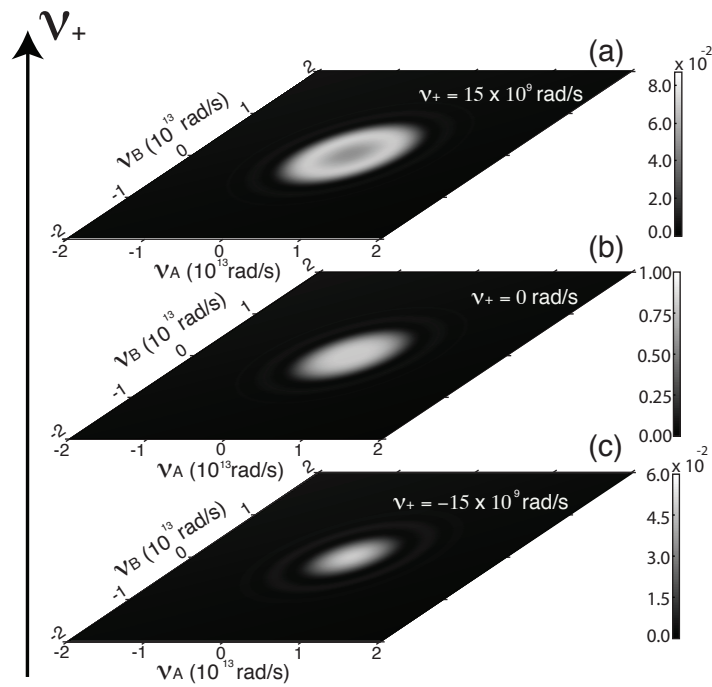


Figura 11. Representación del estado de tres fotones TOSPDC degenerado en frecuencia, graficado como función de las variables de frecuencia rotadas ν_A y ν_B para los siguientes valores fijos de ν_+ : (a) $\nu_+ = 15 \times 10^9 \text{ rad/s}$, (b) $\nu_+ = 0$, y (c) $\nu_+ = -15 \times 10^9 \text{ rad/s}$.

gráfico de las figuras 11 (a)-(c), es claro que haciendo ν_+ negativa el empatamiento de fases se suprime, mientras que dándole un valor positivo se comienza a formar una estructura de anillo, lo que implica que la “membrana” es en realidad curva, lo cual no se apreciaba de manera tan clara en la figura 8(a), donde se utilizaban las variables originales. Hay que hacer notar que en el caso de un ancho de banda de bombeo muy angosto o en el límite de una fibra muy larga, el ancho de la curva en la figura 12 tiende a cero.

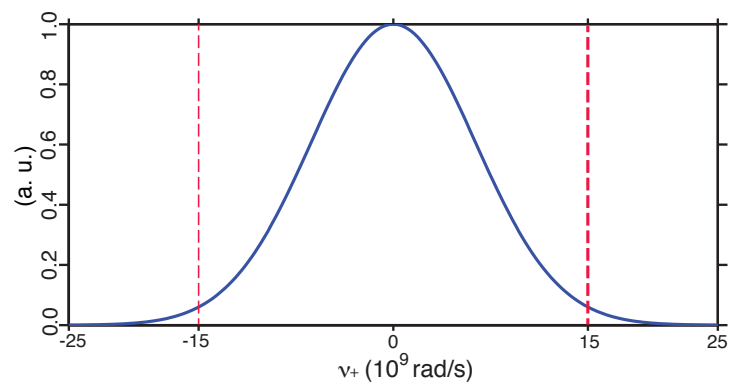


Figura 12. JSI graficada como función de ν_+ , para $\nu_A = \nu_B = 0$.

Capítulo IV

Diseños de fuentes de ternas de fotones TOSPDC

En este capítulo se muestran diseños específicos de fuentes de ternas de fotones utilizando el proceso de generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden en fibras ópticas bimodales guiadas por aire, en donde el bombeo se propaga en el modo HE_{12} y los fotones generados en el modo HE_{11} . Se hace un breve análisis de las consideraciones físicas y experimentales que deben ser tomadas en cuenta para el diseño de cada una de las fuentes.

IV.1 Consideraciones de diseño para fuentes de ternas de fotones

En esta sección, la atención se centra en las consideraciones generales que se deben tomar en cuenta para diseñar una fuente de ternas de fotones basada en el proceso de TOSPDC. De interés particular es la elección de la frecuencia del bombeo y de las frecuencias TOSPDC. Para el tipo de fibra que se considera en este trabajo constituida por un núcleo de *fused-silica* y en donde la cubierta es el aire que rodea a ese núcleo, las frecuencias generadas dependen de dos parámetros: el radio de la fibra y la frecuencia central del bombeo. Nótese que aunque el desempatamiento de fases tiene una dependencia con la potencia de bombeo (ver ecuación 15), la dependencia de las frecuencias emitidas con la potencia de bombeo tiende a ser despreciable para niveles de potencia

de bombeo considerados típicos.

En la figura 13, se presenta una caracterización de las frecuencias de emisión como función del radio del núcleo de la fibra y de la frecuencia central de bombeo. Cada uno de los cuatro páneles mostrados, corresponden a un valor fijo de la frecuencia central del modo acompañante ω_i . En particular, en esta figura se han escogido los siguientes valores para ω_i : (a) $\omega_i = 2\pi c/0.6 \mu\text{m}$, (b) $\omega_i = 2\pi c/0.8 \mu\text{m}$, (c) $\omega_i = 2\pi c/1.2 \mu\text{m}$, y (d) $\omega_i = 2\pi c/1.6 \mu\text{m}$. En cada uno de los paneles, se han graficado las frecuencias de emisión que cumplen con empatamiento de fases para los modos señal-1 (r) y señal-2 (s) expresadas como las desintonizaciones en frecuencia $\Delta_r = \omega_r - (\omega_p - \omega_i)/2$ y $\Delta_s = \omega_s - (\omega_p - \omega_i)/2$, respectivamente, como una función de la frecuencia de bombeo ω_p ; note que la conservación de energía implica que $\Delta_r = -\Delta_s$, y por lo tanto podemos definir $\Delta \equiv \Delta_r$. Específicamente, cada una de las curvas da una combinación de las frecuencias de bombeo, señal-1 y señal-2, que permiten un empatamiento de fases perfecto, esto es $k_p - k_r - k_s - k_i = 0$ (en donde se ha suprimido el término de fase no-lineal Φ_{NL}). Cada curva en un panel específico fue calculada para una selección particular del radio del núcleo (en un rango de $r = 0.3 - 0.5 \mu\text{m}$). En los cuatro páneles, las áreas sombreadas en color gris representan regiones del espacio $\{\omega_p, \Delta_{r,s}\}$ para las cuales ω_r y/o ω_s se encuentran fuera del rango de validez para la relación de dispersión usada para *fused-silica*. Las zonas no-físicas para las cuales ω_r y/o ω_s dan un valor negativo para satisfacer la conservación de energía están sombreadas en negro.

A partir de estas curvas (figura 13), se puede apreciar que para cada ω_i , existe un continuo de radios del núcleo para los cuales el empatamiento de fases ocurre. Mientras el radio del núcleo puede ser reducido sin límite y aun así obtener empatamiento de fases perfecto para cada ω_i (dentro de la ventana espectral que estamos considerando en este caso), existe un valor del radio de núcleo máximo r_{max} , de tal manera que para

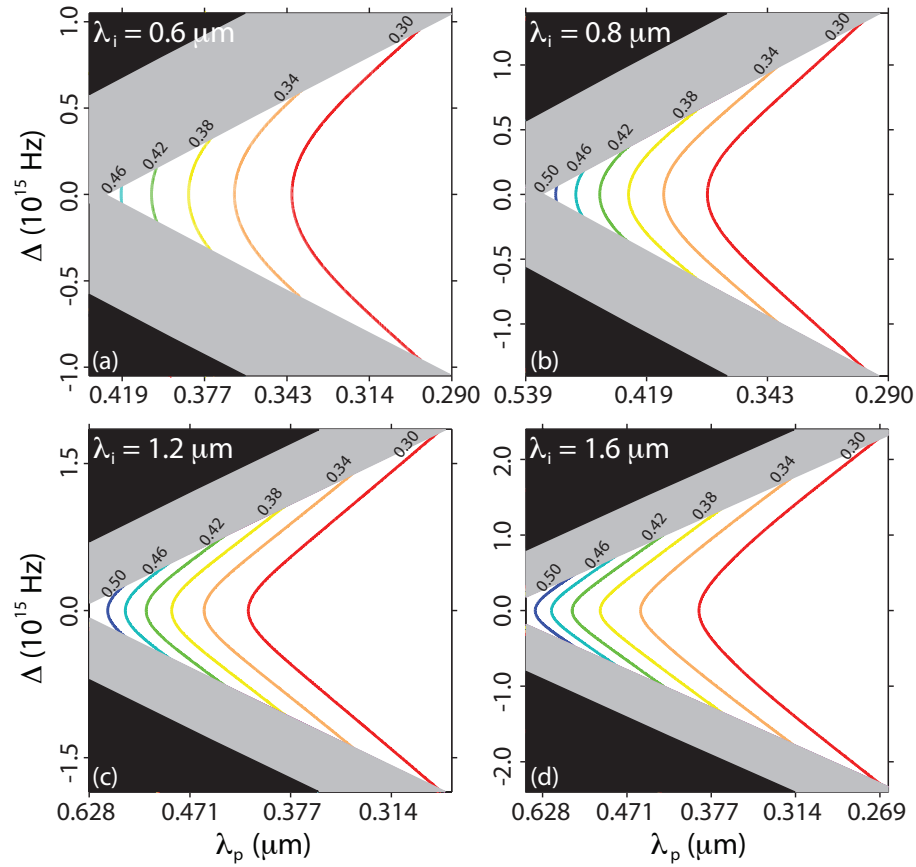


Figura 13. Emisión de frecuencias con empatamiento de fases, graficadas como una función de la frecuencia de bombeo para diferentes radios de fibras, y considerando las siguientes longitudes de onda para el modo acompañante, manteniéndolas constantes para cada uno de los cuatro paneles: (a) $\lambda_i = 0.6 \mu\text{m}$, (b) $\lambda_i = 0.8 \mu\text{m}$, (c) $\lambda_i = 1.2 \mu\text{m}$, y (d) $\lambda_i = 1.6 \mu\text{m}$.

$r > r_{max}$, el empatamiento de fases no es posible. De hecho, a medida que el valor del radio del núcleo se aumenta, la magnitud de los valores Δ_r y Δ_s es reducida hasta alcanzar los valores $\Delta_r = \Delta_s = 0$. De manera similar, cabe destacar que para un valor del radio de núcleo fijo, la magnitud de los valores de Δ_r y Δ_s se reducen para valores más grandes de ω_i . Nótese que el vértice de los contornos de empatamiento de fases indica la emisión de ternas para las cuales $\Delta_{r,s} = 0$ o, de manera equivalente $\omega_r = \omega_s$. Es importante ver, que para un valor particular de ω_i , existe un solo valor del radio del núcleo para el cual este valor corresponde a una emisión degenerada en frecuencia, esto

es con $\omega_r = \omega_s = \omega_i = \omega_p/3$.

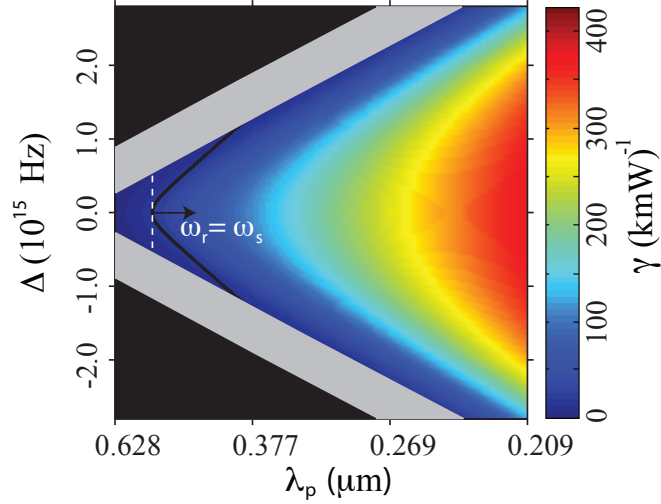


Figura 14. Coeficiente no-lineal γ como función de ω_p y Δ para $r = 0.395 \mu\text{m}$ y $\omega_i = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$; la línea sólida negra representa las combinaciones de frecuencia que permiten un empatamiento de fases perfecto.

Las frecuencias de bombeo disponibles, las ventanas espectrales de los detectores de fotones individuales, y radios de fibras alcanzables son limitaciones experimentales que pueden en principio ser utilizadas junto con las curvas de la figura 13 para determinar los parámetros requeridos para el diseño de una fuente de ternas. Un aspecto importante a considerar es la no-linealidad γ (dada por la ecuación 11), la cual, por supuesto, tiene un impacto importante sobre la brillantez de la fuente, de hecho, en el siguiente capítulo se verá que la eficiencia de conversión escala cuadráticamente con γ . En general, γ está determinada por el radio del núcleo r , así como por las frecuencias de bombeo y de emisión de las ternas.

En la figura 14 se presenta una gráfica de la no-linealidad γ en función de Δ y ω_p para un radio fijo ($r = 0.395 \mu\text{m}$) y una frecuencia del modo acompañante fija ($\omega_i = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$). En esta figura el valor de γ para cada combinación (ω_p, Δ) está indicada por una escala de colores, independientemente de si se consigue empatamiento

de fases en cada punto (ω_p, Δ) . Se puede ver en esta figura, que al aumentar la frecuencia de bombeo, se obtiene un incremento en γ (en la región ultravioleta del espectro óptico), y también para $\Delta_{r,s} \rightarrow 0$, es decir $\omega_r \rightarrow \omega_s$. La línea negra en la figura 14 representa el contorno formado por las frecuencias que cumplen empatamiento de fases. Desafortunadamente los valores más altos para γ son inaccesibles ya que ocurren para combinaciones de frecuencias que no presentan empatamiento de fases.

IV.2 Diseños específicos de fuentes de ternas de fotones por TOSPDC

De la sección anterior, es claro que para poder optimizar el valor de la no-linealidad es necesario utilizar radios del núcleo pequeños y frecuencias de bombeo grandes. Mientras que esto podría sugerir el uso de un bombeo en el ultra-violeta, en este trabajo evitamos el uso de frecuencias no usuales para transmisión en fibras ópticas (la transmisión de luz ultra-violeta en fibras ópticas puede dar lugar a la creación de defectos en las mismas, lo cual reduce la transmitividad, efecto conocido como solarización). Sin tomar en cuenta, sin embargo, esta dificultad técnica, se puede obtener empatamiento de fases para frecuencias esencialmente arbitrarias (como se verá en la figura 15) al ajustar el radio de la fibra. A manera de ejemplo suponemos un bombeo en el ultra-violeta centrado en $\omega_p = 2\pi c/0.28 \mu\text{m}$, que puede propagarse en el modo HE_{12} . Elegimos esta longitud de onda para maximizar el valor de γ , sin considerar los problemas que aparecen al transmitir luz ultra-violeta. En este ejemplo, consideramos el caso degenerado en frecuencia, de tal manera que $\omega_r = \omega_s = \omega_i = \omega_p/3 = \omega = 2\pi c/0.84 \mu\text{m}$ propagándose en el modo HE_{11} . En la figura 15(a) se muestra el radio del núcleo de la fibra para el cual se cumple

el empatamiento de fases en función de la frecuencia de generación TOSPDC, se puede observar que para $\omega = 2\pi c/0.84 \mu\text{m}$ existe un radio del núcleo $r = 0.19 \mu\text{m}$ que cumple con este requerimiento. Aquí también es claro que se puede elegir esencialmente con libertad la frecuencia de bombeo (y por lo tanto, de emisión), controlado por el radio de la fibra. Por otro lado, en la figura 15(b), en donde para un radio fijo $r = 0.19 \mu\text{m}$ se grafica γ en función de la longitud de onda de bombeo, es posible ver que para este valor de la frecuencia de generación ($\omega = 2\pi c/0.84 \mu\text{m}$), se puede obtener un valor relativamente alto de la no-linealidad $\gamma = 81.5 (\text{km W})^{-1}$.

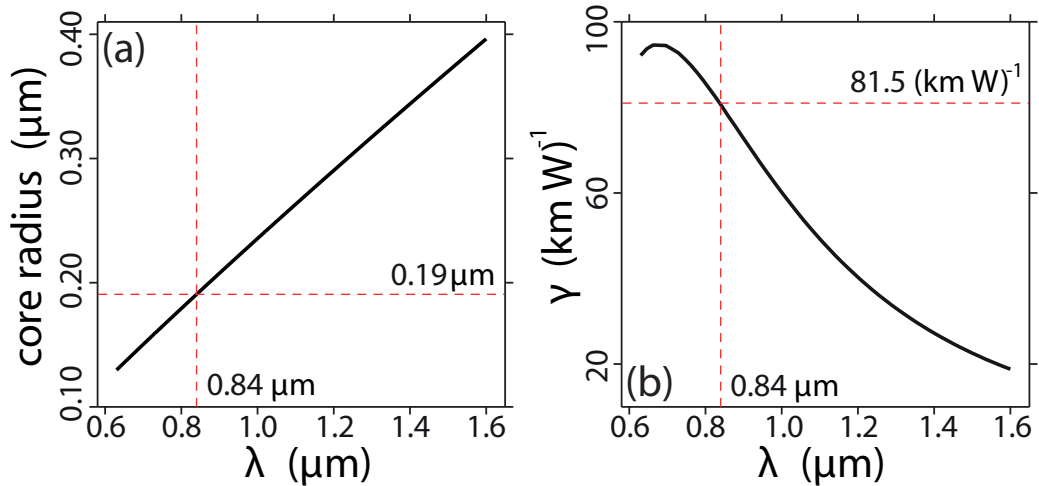


Figura 15. (a) Radio de empatamiento de fases, y (b) no-linealidad γ en función de la longitud de onda degenerada de TOSPDC (ω_i).

La figura 16 muestra una representación de la intensidad espectral conjunta graficada como una función de las frecuencias señal-1, señal-2 y acompañante. Nótese que para una representación gráfica clara visualmente (es decir, evitando la dificultad de graficación debido a la membrana delgada que es el estado, como se explicó en las secciones III.1 y III.1.1), se ha supuesto una longitud de la fibra de $L/100$ cm y un ancho de banda espectral 200σ (donde L y σ son la longitud de la fibra y el ancho de banda espectral utilizados en una posible implementación experimental, respectivamente, en

este caso $L = 3$ cm y $\sigma = 18.4$ THz), que son considerablemente pequeño y grande, respectivamente comparados con los valores realistas que deberán ser utilizados para un diseño experimental de una fuente TOSPDC de ternas de fotones.

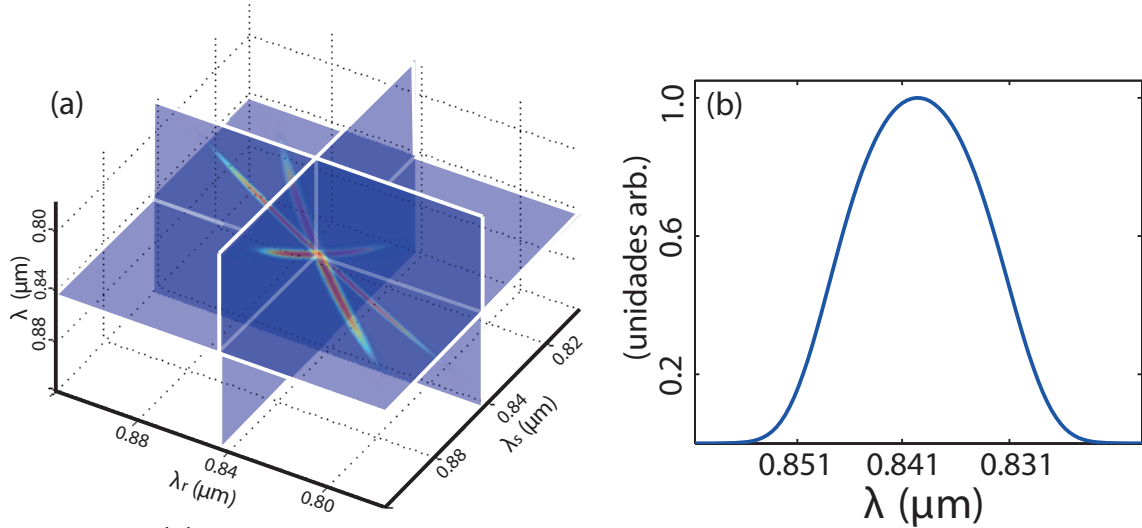


Figura 16. (a) Representación de la intensidad espectral conjunta de un estado de tres fotones TOSPDC con frecuencias de generación centradas en $\omega = 2\pi c/0.84 \mu\text{m}$, graficada como una función de las tres frecuencias de generación, y (b) el espectro individual de TOSPDC.

Ahora bien, dado que de hecho $0.28 \mu\text{m}$ no es una longitud de onda estándar de transmisión en fibras ópticas, y además conlleva a algunos problemas como pérdidas en la transmisión debidas a la polarización, la cual se vuelve relevante para la transmisión de fotones en el ultravioleta en fibras ópticas, vamos a evitar la utilización de un bombeo en el ultra-violeta para poder tener una fuente de fotones que pueda ser implementada en el laboratorio. En este trabajo presentamos dos diseños de fuente de ternas de fotones TOSPDC utilizando una frecuencia de bombeo que corresponde a una frecuencia láser disponible ($\lambda_p = 532$ nm), y que además da como resultado, ternas de fotones centradas en 1596 nm, cercanas a la banda de telecomunicaciones ($1.550 \mu\text{m}$); de esta manera los fotones generados pueden ser utilizados directamente para aplicaciones en telecomunicaciones.

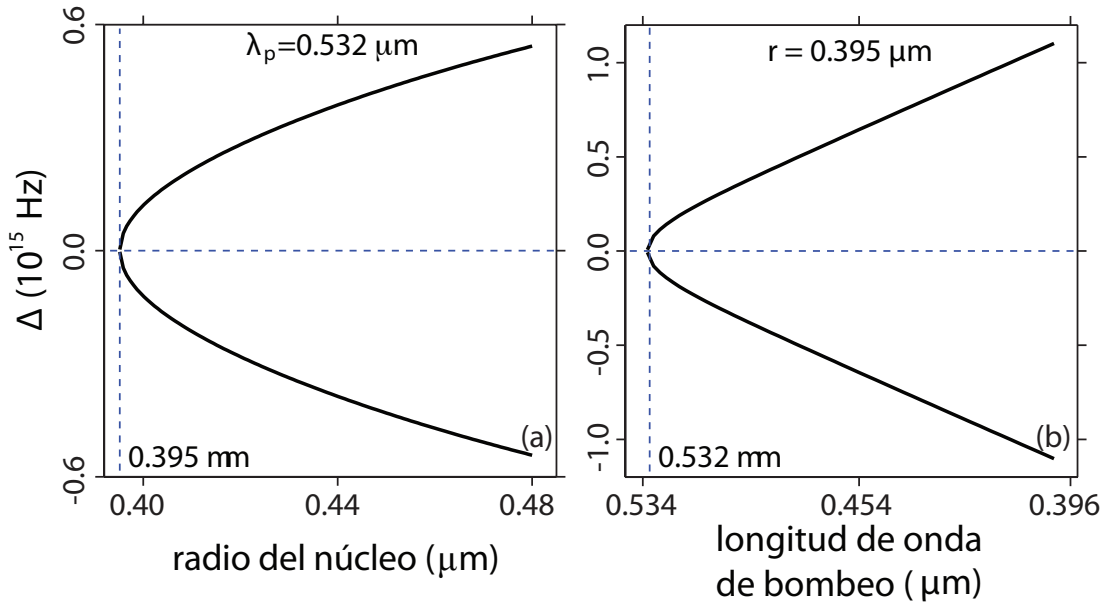


Figura 17. (a) Frecuencias de emisión que cumplen con el empatamiento de fases como una función del radio del núcleo, para una longitud de onda del bombeo fija ($\lambda_p = 0.532 \mu\text{m}$). (b) Frecuencias de emisión que cumplen con el empatamiento de fases como una función de la frecuencia de bombeo, para un radio del núcleo de la fibra fijo ($r = 0.395 \mu\text{m}$).

Para comenzar nuestro diseño, primero suponemos que la frecuencia central de bombeo es $\omega_p = 2\pi c/0.532 \mu\text{m}$ y fijamos una de las frecuencias de generación, en este caso elegimos la frecuencia del modo acompañante en $\omega_i = \omega_p/3 = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$. La figura 17(a) muestra las frecuencias de emisión resultantes, desplegadas en términos de la variable de desintonización Δ , graficadas en función del radio r . De esta figura, es claro que existe un radio del núcleo de la fibra específico ($r = 0.395 \mu\text{m}$) para el cual las frecuencias de emisión están caracterizadas por $\Delta = 0$, lo cual implica en este caso que $\omega_r = \omega_s = \omega_i$, es decir, para las frecuencias en las cuales el proceso de TOSPDC es degenerado en frecuencia. Nótese de la misma figura que si se disminuye el radio del núcleo de la fibra del valor $r = 0.395 \mu\text{m}$, ya no existe el empatamiento de fases. De la misma manera, se puede notar que si se aumenta el valor del radio del núcleo ($r = 0.395 \mu\text{m}$), esto lleva a que $\Delta \neq 0$, por lo tanto las frecuencias señal-1 y señal-2 toman los valores $\omega_r = \omega_p/3 + \Delta$ y $\omega_s = \omega_p/3 - \Delta$. En otras palabras, las tres frecuencias de

emisión serían diferentes entre sí, lo cual implica que el proceso TOSPDC se vuelve no-degenerado en frecuencia.

Un comportamiento similar al anterior puede ser observado, si ahora fijamos el valor del radio del núcleo de la fibra ($r = 0.395 \mu\text{m}$), en lugar de la frecuencia de bombeo, ahora variando ω_p . La figura 17(b) muestra las frecuencias de emisión resultantes, desplegadas en términos de la variable de desintonización Δ , graficadas en función de la frecuencia de bombeo ω_p (etiquetado en longitudes de onda). De esta figura, es claro que para una frecuencia de bombeo de $\omega_p = 2\pi c/0.532 \mu\text{m}$, las frecuencias de emisión resultantes están caracterizadas por $\Delta = 0$, lo cual en este caso implica un proceso de TOSPDC degenerado en frecuencia con $\omega_r = \omega_s = \omega_i$. De esta misma figura, es importante hacer notar que disminuyendo el valor de ω_p del valor de $\omega_p = 2\pi c/0.532 \mu\text{m}$ se pierde el empatamiento de fases; por el contrario, al incrementar ω_p de este mismo valor, se tiene que $\Delta \neq 0$, de tal forma que las frecuencias señal-1 y señal-2 toman los valores $\omega_r = (\omega_p - \omega_i)/2 + \Delta$ y $\omega_s = (\omega_p - \omega_i)/2 - \Delta$. En otras palabras, las tres frecuencias de emisión se vuelven distintas entre sí, llevando a un proceso TOSPDC no-degenerado en frecuencia. Entonces para un valor del radio del núcleo fijo, la frecuencia de bombeo es un parámetro experimental útil para el control del grado de no-degeneración en frecuencia.

En este trabajo, consideramos dos diseños de fuentes TOSPDC de ternas de fotones, las dos basadas en una fibra con un radio de $r = 0.395 \mu\text{m}$ y una longitud de $L = 10$ cm:

1. Fuente degenerada en frecuencia, con $\omega_p = 2\pi c/0.532 \mu\text{m}$ y con modos de emisión centrados en $\omega_r = \omega_s = \omega_i = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$.
2. Fuente no-degenerada en frecuencia, con $\omega_p = 2\pi c/0.531 \mu\text{m}$ y con modos de

emisión centrados en $\omega_r = 2\pi c/1.529 \mu\text{m}$, $\omega_s = 2\pi c/1.659 \mu\text{m}$ y $\omega_i = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$. Para garantizar que los modos de emisión son espectralmente distintos, se utilizan filtros espectrales.

IV.2.1 Fuente de ternas de fotones TOSPDC degenerada en frecuencia

Para este caso, primero vemos la figura 17, en donde una fibra óptica ultra-delgada con un radio $r = 0.395 \mu\text{m}$, nos da empatamiento de fases entre las cuatro ondas involucradas, siempre y cuando el bombeo tenga una frecuencia $\omega_p = 2\pi c/0.532 \mu\text{m}$, y el modo acompañante esté centrado en $\omega_i = \omega_p/3 = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$ (ya que elegimos fijarlo de esa manera arbitrariamente, sin embargo existe una gráfica similar para cada valor de ω_i fijo). Como estamos tratando el caso degenerado en frecuencia, $\Delta = 0$ y por lo tanto, $\omega_s = \omega_r = \omega_i = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$. En la figura 9(a) que se presentó en el capítulo III, se muestra la función de intensidad espectral conjunta de dos fotones $I_{2rs}(\omega_s, \omega_r)$ (ver ecuación 44, donde los subíndices indican los modos TOSPDC) en uno de los planos de frecuencia, en este caso $\{\omega_r, \omega_s\}$ para este estado (recuérdese que esta JSI de dos fotones, se obtiene integrando sobre todo el estado de frecuencias TOSPDC). En la figura 9(b) (del capítulo III) se muestra la JSI para un solo fotón $I_{1r}(\omega_r)$ (ver ecuación 45, donde el subíndice indica el correspondiente modo TOSPDC) para el mismo caso que estamos tratando. Es importante mencionar que ya que se está analizando un caso degenerado en frecuencia, los espectros de la JSI correspondientes a $I_{2si}(\omega_s, \omega_i)$ y $I_{2ri}(\omega_r, \omega_i)$ son iguales al presentado en la figura 9(a); así como las funciones $I_{1s}(\omega)$ e $I_{1i}(\omega_i)$ identifican a la función $I_r(\omega)$ graficada en la figura 9(b).

IV.2.2 Fuente de ternas de fotones TOSPDC no-degenerada en frecuencia

Ahora, consideramos el caso de una fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia, para esto, desplazamos la frecuencia de bombeo, mientras mantenemos todos los demás parámetros experimentales fijos, como se discutió en la figura 17(b). Supongamos que la frecuencia central del haz de bombeo es $\omega_p = 2\pi c/0.531 \mu\text{m}$, es decir desplazado 1 nm en comparación al diseño de fuente degenerada en frecuencia. Como se estudió en la figura 17(b), para una frecuencia del modo acompañante fija, esta nueva frecuencia de bombeo, permite tres frecuencias de empaquetamiento de fases diferentes para cada uno de los tres modos TOSPDC: $\omega_{r0} = 2\pi c/1.529 \mu\text{m}$, $\omega_{s0} = 2\pi c/1.659 \mu\text{m}$ y $\omega_{i0} = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$. Sin embargo, es importante notar que para la figura 17(b), hemos fijado de manera arbitraria el valor de la frecuencia del modo acompañante al valor de $2\pi c/1.596 \mu\text{m}$. De hecho, debemos considerar todas las frecuencias del modo acompañante, cada una de ellas nos dará una gráfica similar a la figura 17(b) con diferentes valores para las frecuencias centrales de los modos señal-1 y señal-2 (ω_r y ω_s , respectivamente) para un valor fijo de ω_p . Entonces, para que los tres modos de emisión sean espectralmente diferentes, es importante filtrar espectralmente el modo acompañante, así que en este diseño específico solamente un ancho de banda pequeño centrado en ω_{i0} es utilizado.

El desplazamiento de 1 nm en la longitud de bombeo que se está utilizando implica que la función envolvente espectral de bombeo intersecta la función de empaquetamiento de fases a un valor más grande en ω_+ (comparado con el que se utiliza en el diseño de la fuente degenerada en frecuencia), lo que hace que la JSI en el espacio de las coordenadas rotadas $\{\nu_A, \nu_B, \nu_+\}$, tomando un valor constante $\nu_+ > 0$, sea un anillo circular. La JSI de dos fotones que se obtiene al integrar la JSI completa sobre todo

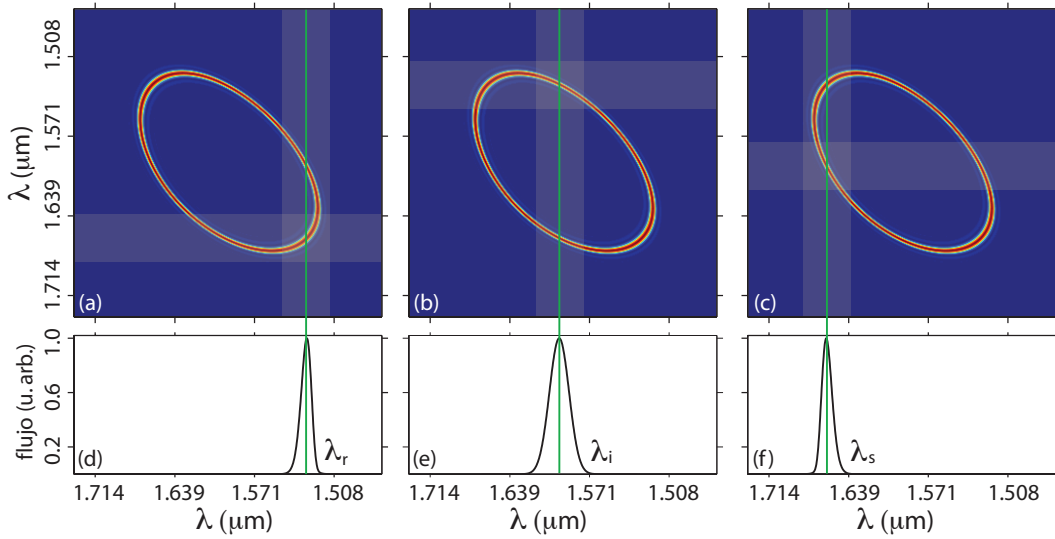


Figura 18. Estado de ternas de fotones TOSPDC no-degenerado en frecuencia. (a)-(c) Espectro de dos fotones obtenido por medio de la integración de la JSI sobre cada una de las tres emisiones de frecuencias; las bandas sombreadas indican los filtros espectrales usados. (d)-(f) Espectro de un solo fotón para cada uno de los tres modos de emisión, incluyendo el efecto del filtrado espectral.

el espacio de frecuencias TOSPDC en turno, $I_{2si}(\nu_s, \nu_i)$, $I_{2ri}(\nu_r, \nu_i)$ y $I_{2rs}(\nu_r, \nu_s)$ (en donde los sub-índices indican los correspondientes modos TOSPDC), se convierten en anillos elongados, como se muestra en las figuras 18(a)-(c).

Filtrando cada uno de los tres modos de emisión con un filtro espectral Gaussiano que tiene un ancho de banda $\sigma_f = 15$ THz centrado en cada una de las tres frecuencias elegidas que cumplen el emparejamiento de fases ω_{r0} , ω_{s0} y ω_{i0} , obtenemos el espectro de un solo fotón $I_{1r}(\nu)$, $I_{1s}(\nu)$ y $I_{1i}(\nu)$ (donde las letras en los sub-índices indican el correspondiente modo TOSPDC) mostrado en las figuras 18(d)-(f). Nótese que la ventana espectral transmitida por cada uno de esos filtros está indicada en las figuras 18(a)-(c) por una banda de sombra suave. Es importante destacar que los tres modos de generación resultantes no se traslapan entre sí. Esto significa que la terna de fotones puede ser separada en tres modos separados determinísticamente utilizando elementos ópticos

con resolución espectral, por ejemplo espejos dicróicos, rejillas de difracción o prismas. Sin embargo, esto se logra bajo el costo de una reducción del flujo de fotones causado por los filtros espectrales utilizados.

IV.3 Ruido causado por otros mecanismos físicos

Es importante mencionar, que en la generación de parejas de fotones por el proceso de mezclado espontáneo de cuatro onda (SFWM) en fibras ópticas, uno de las principales fuentes de ruido son los fotones producidos por esparcimiento Raman espontáneo. El proceso de esparcimiento Raman espontáneo en silicio ocurre dentro de un ancho de banda de aproximadamente 40 THz de la frecuencia de bombeo (o de las frecuencias de bombeo), hacia longitudes de onda más grandes. Para muchos experimentos de SFWM, las frecuencias de emisión señal y acompañante se encuentran dentro de la ventana espectral de ganancia Raman. En el caso de nuestros diseños de generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden, la gran separación espectral entre el bombeo y los fotones generados (que es lo que dificulta lograr el emparejamiento de fases sin la utilización de varios modos de propagación en la fibra) es mucho más grande que el ancho de la ventana de ganancia Raman, por lo que una contaminación debida a fotones no-correlacionados generados por Raman espontáneo no es un problema en nuestros diseños.

Para un bombeo pulsado, puede haber un ensanchamiento espectral del haz de bombeo debido a auto-modulación de fases (SPM) y ésta puede ser otra fuente de ruido. Esto sería un problema si el ancho de banda resultante del bombeo es tan ancho que algunas frecuencias de bombeo coinciden con las frecuencias de los fotones generados. Nuevamente, la separación espectral entre el bombeo y los fotones generados ayuda en

este punto, y por lo tanto, este mecanismo de ruido puede ser controlado restringiendo el ancho de banda y la potencia de bombeo.

Capítulo V

Tasa de emisión de ternas de fotones en el proceso de TOSPDC

En el diseño de fuentes de luz no-clásica, uno de los principales retos es el lograr tasas de emisión considerables. El número de ternas de fotones generadas por unidad de tiempo depende de las longitudes de interacción accesibles en las fibras ópticas, así como de la eficiencia del proceso de TOSPDC, que tiene su origen en la susceptibilidad de tercer orden $\chi^{(3)}$ (Agrawal, 2007). Como se vió en capítulos anteriores, el efecto no-lineal tiene una dependencia con el área efectiva del modo propagado por medio del parámetro γ definido en la ecuación 11 (para el proceso SFWM), en donde el área efectiva de la fibra está considerada para un solo modo de propagación; en el caso específico de este trabajo, se está trabajando con dos modos de propagación, y por lo tanto el área efectiva o área de interacción dependerá de los cuatro campos en el proceso de TOSPDC, se puede escribir como:

$$A_{eff} = \frac{1}{\int dx \int dy A_p(x, y) A_r^*(x, y) A_s^*(x, y) A_i^*(x, y)}. \quad (51)$$

donde $A_\mu(x, y)$ (con $\mu = p, r, s, i$) es la distribución transversal del modo para cada una de las cuatro ondas y * representa el complejo conjugado. En la ecuación anterior, se ha tomado en cuenta la normalización utilizada para la distribución transversal espacial de los cuatro campos involucrados; y de aquí en adelante, se considerará que dentro del ancho de banda en el que estamos trabajando para cada uno de los modos es constante con respecto a la frecuencia dentro del respectivo ancho de banda, pero

en general son diferentes. De lo anterior, se puede ver que en geometrías de fibras ópticas para las cuales A_{eff} es pequeña, se puede tener un incremento considerable en la tasa de emisión. Al implementar fuentes de luz no-clásicas, es importante optimizar la eficiencia de conversión y/o la brillantez alcanzada. Por lo tanto, es necesario conocer la dependencia del flujo emitido en función de todas las variables físicas que se involucran en el proceso. El objetivo de este capítulo es obtener las expresiones para el número de ternas de fotones que se emiten en el proceso de TOSPDC a partir del estado cuántico derivado en la sección III.

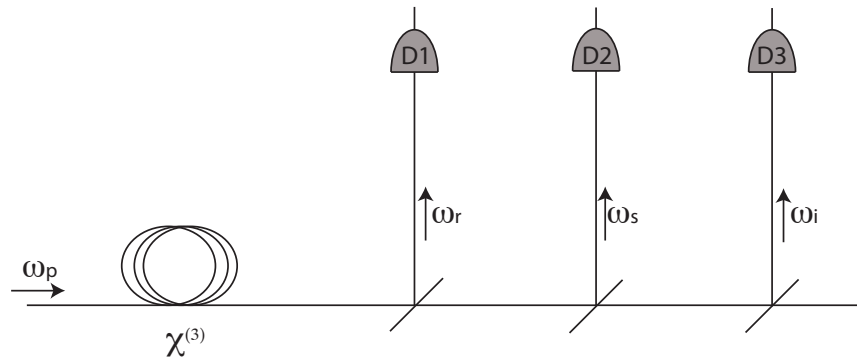


Figura 19. Figura representativa del arreglo experimental de una fuente de ternas de fotones.

En el desarrollo de este capítulo, se calcula la tasa de emisión de una fuente de ternas de fotones basada en el proceso de TOSPDC. Para poder facilitar este cálculo, se supone que los fotones provenientes del haz de bombeo se suprimen con un filtro apropiado al final de la fibra de TOSPDC, de tal manera que no hay generación de ternas de fotones después de este punto. Para propósitos de este estudio, la brillantez de la fuente estará definida como el número de fotones individuales que sean detectados en alguno de los tres modos de generación (señal-1, señal-2 o acompañante) por unidad de tiempo (ver figura 19). De esta forma, para proceder calculamos el número de fotones individuales provenientes del modo señal-1 emitidos por pulso de bombeo, a este número se le llamará N_r . Una suposición implícita en esta definición es que las

ternas de fotones pueden separarse en modos espaciales; es importante hacer notar que ésto se puede lograr de manera determinista si los tres modos de emisión son no-degenerados espectralmente y puede ser logrado solamente de manera no-determinista si los tres modos son degenerados en frecuencia. N_r está dado por:

$$N_r = \sum_{k_r} \langle \Psi_3 | \hat{a}^\dagger(k_r) \hat{a}(k_r) | \Psi_3 \rangle. \quad (52)$$

Bajo condiciones ideales de eficiencia de detección, la cantidad N_r también corresponde al número de ternas de fotones emitidas por pulso de bombeo. Reemplazando la ecuación 36 en 52, se puede demostrar que:

$$N_r = \vartheta \int dk_r \int dk_s \int dk_i l^2(k_r) l^2(k_s) l^2(k_i) |F(\omega_r, \omega_s, \omega_i)|^2, \quad (53)$$

donde el parámetro ϑ está dado como $\vartheta = (3)^2 |\xi|^2 / (\delta k)$ (ver ecuación 37). Se puede notar que como $|\xi|^2$ es cúbica en δk , ϑ es una constante con respecto a δk y está dada de manera explícita por:

$$\vartheta = \frac{2(3)^2 (2\pi)^2 (\epsilon_0 c n_p)^3 \gamma^2(\omega_p) L^2 P}{\hbar^2 \omega_p^2 \left| \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \right|^2}, \quad (54)$$

donde γ es el coeficiente no-lineal que gobierna el proceso de TOSPDC y está dado por

$$\gamma = \frac{2\chi^{(3)} \omega_{p0}}{4\epsilon_0 c^2 n_p^2 A_{eff}}, \quad (55)$$

donde A_{eff} es el área efectiva de interacción entre los cuatro campos involucrados y está dada por la ecuación 51, aquí ya se ha tomado en cuenta la normalización utilizada para la distribución espacial transversal de los cuatro campos. La función γ es diferente de γ_p y $\gamma_{p\mu}$ definidas anteriormente (ver ecuaciones 16 y 17).

Se puede ver que cuando se escribe el número de fotones en el modo señal-1 de modo conveniente (ecuación 53), se han expresado las sumas sobre los modos k_μ en términos de integrales, ya que los paquetes de onda señal-1, señal-2 y acompañante tienen un continuo de componentes espectrales dentro de su ancho de banda. Para poder hacer esta transformación, se toma el límite en el que la longitud de cuantización tiende a infinito $L_Q \rightarrow \infty$, de tal manera que $\delta k \rightarrow 0$ (Loudon, 2000), lo cual lleva a que $\delta k \sum_k \rightarrow \int dk$.

V.1 Cálculo general del número de ternas de fotones emitidas en el proceso de TOSPDC

En esta sección se hará una discusión del número de ternas de fotones emitidas por el proceso de TOSPDC en el régimen pulsado. El tratamiento en este caso se limitará a campos de bombeo que muestren una envolvente espectral Gaussiana, que puede ser escrita de la forma:

$$\alpha(\omega_p) = \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/4} \sqrt{\sigma}} \exp \left[-\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma^2} \right], \quad (56)$$

que está normalizada, de modo que $\int |\alpha(\omega_p)|^2 d\omega_p = 1$ y donde σ es el ancho de banda (FWHM, por sus siglas en inglés: *full width at half maximum*) del pulso y ω_{p0} es la frecuencia central de bombeo. El número de fotones N_r en el modo señal-1 resultante de un solo pulso de bombeo se puede obtener reemplazando las ecuaciones 31, 39, 54 y 56 en la ecuación 53. Por otro lado, suponemos que el modo del campo de bombeo está en la forma de un tren de pulsos con una tasa de repetición R . De esta manera, el número de fotones en el modo señal-1 generados por segundo está dado por:

$$N = N_r R, \quad (57)$$

de donde se puede demostrar que:

$$N = \frac{2^{2/5} 3^2 \hbar c^3 n_p^3 L^2 \gamma_p^2 p}{\pi^{5/2} \omega_{p0}^2 \sigma} \int d\omega_r \int d\omega_s \int d\omega_i h(\omega_r, \omega_s, \omega_i) |f(\omega_r, \omega_s, \omega_i)|^2, \quad (58)$$

en donde p es la potencia promedio del bombeo, que está relacionada con la potencia pico de bombeo P a través de la relación:

$$P = \frac{p\sigma}{\sqrt{2\pi R}}, \quad (59)$$

y además se ha definido la función:

$$h(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = \frac{k^{(1)}(\omega_r) \omega_r^2}{n_r^2} \frac{k^{(1)}(\omega_s) \omega_s}{n_s^2} \frac{k^{(1)}(\omega_i) \omega_i}{n_i^2}. \quad (60)$$

En la derivación de la ecuación 58, las integrales sobre k_r , k_s y k_i se transformaron en integrales de frecuencia a través de la relación $dk_\mu = k^{(1)}(\omega_\mu) d\omega_\mu$, donde $k^{(1)}(\omega_\mu)$ representa la primera derivada en frecuencia de $k(\omega)$ evaluada en ω_μ . La nueva función:

$$f(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = \left(\frac{\pi \sigma^2}{2} \right)^{1/4} F(\omega_r, \omega_s, \omega_i), \quad (61)$$

es una versión de la amplitud espectral conjunta $F(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ (ver ecuación 39), que no contiene factores al frente de la exponencial y la función sinc de tal forma que todos los términos aparecen explícitos en la ecuación 58.

En la ecuación 58 se observa que si la dependencia con la potencia de bombeo en la función de desempatamiento de fases no se toma en cuenta, el número de ternas de fotones generadas varía linealmente con la potencia del bombeo, lo que implica que

la eficiencia de conversión en el proceso de TOSPDC es constante con respecto a este parámetro experimental. Para potencias de bombeo suficientemente grandes, puede existir una desviación sobre este comportamiento del estado, que tiene que ver con la dependencia del desempatamiento de fases con la potencia de bombeo. Se puede hacer una comparación directa de la dependencia lineal del flujo emitido con respecto a la potencia de bombeo, con el comportamiento observado en este sentido en el proceso de mezclado de cuatro ondas espontáneo o SFWM, en el cual, el flujo emitido es proporcional al cuadrado de la potencia de bombeo (Garay-Palmett *et al.*, 2011). Esta importante diferencia indica que las fuentes de ternas de fotones basadas en TOSPDC son, para potencias de bombeo suficientemente grandes, mucho menos brillantes que las fuentes de SFWM (para parámetros experimentales comparables entre los dos procesos). Por otro lado, como en el caso de SFWM, N varía cuadráticamente con el coeficiente no-lineal γ , lo que implica que el flujo emitido depende del inverso a la cuarta potencia con el radio del modo transversal. Sin embargo la dependencia con la longitud de la fibra y el ancho de banda del bombeo (o la duración de los pulsos) no es tan directa, dado que tanto L como σ están contenidos en la función $f(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ dentro de la integral. Por lo anterior, nos vemos en la necesidad de buscar algunas aproximaciones que nos lleven a una solución cerrada, es decir que no se encuentre expresada en términos de integrales, que nos permita analizar la dependencia de N'_μ en términos de los distintos parámetros físicos involucrados.

Para continuar con el análisis, se define la eficiencia de conversión como $\eta \equiv N/N_p$, en donde N_p es el número de fotones de bombeo por segundo. Para un ancho de banda de bombeo suficientemente angosto, N_p está dado por $N_p = U_p R / (\hbar \omega_{p0})$, donde U_p es la energía del pulso de bombeo. Para un pulso de bombeo con una envolvente espectral Gaussiana dada por la ecuación 56, se obtiene que el número de fotones por segundo

es:

$$N_p = \frac{p}{\hbar\omega_{p0}}. \quad (62)$$

La eficiencia de conversión para una terna de fotones, se puede escribir entonces como:

$$\eta = \frac{2^{2/5}3^2c^3\hbar^2n_p^3L^2\gamma^2}{\pi^{5/2}\omega_{p0}} \int d\omega_r \int d\omega_s \int d\omega_i \frac{k^{(1)}(\omega_r)\omega_r}{n_r^2} \frac{k^{(1)}(\omega_s)\omega_s}{n_s^2} \frac{k^{(1)}(\omega_i)\omega_i}{n_i^2} |f(\omega_r, \omega_s, \omega_i)|^2. \quad (63)$$

V.1.1 Régimen monocromático

Es esta sección se obtiene la eficiencia de conversión en el proceso TOSPDC en el límite de bombeo monocromático. Este análisis se hace para conocer las ventajas o desventajas que pudiera tener este tipo de fuente de bombeo para la generación de ternas de fotones por TOSPDC. Tomando el límite $\sigma \rightarrow 0$ en la ecuación 56, es posible demostrar que la energía total de TOSPDC, emitida en un tiempo Δt , está dado por:

$$U_{PDCcw} = \frac{3^22^3\hbar^2c^3n_p^3\gamma^2L^2p\Delta t}{\pi\omega_p^2} \int d\omega_r \int d\omega_s \frac{\omega_r^2k^{(1)}(\omega_r)}{n_r^2} \frac{\omega_s k^{(1)}(\omega_s)}{n_s^2} \times \\ \times \frac{(\omega_p - \omega_r - \omega_s)k^{(1)}(\omega_p - \omega_r - \omega_s)}{n^2(\omega_p - \omega_r - \omega_s)} \text{sinc}^2 \left[\frac{L}{2} \Delta k_{cw} \right], \quad (64)$$

el número de ternas de fotones emitidas por segundo (ver la ecuación 58) considerando un bombeo monocromático es:

$$N_{cw} = \frac{2^23^2\hbar c^3n_p^3\gamma^2L^2p}{\pi^2\omega_p^2} \int d\omega_r \int d\omega_s h(\omega_r, \omega_s, \omega_p - \omega_r - \omega_s) \text{sinc}^2 \left[\frac{L}{2} \Delta k_{cw}(\omega_r, \omega_s) \right], \quad (65)$$

de esta misma forma, si se toma el límite $\sigma \rightarrow 0$ de la ecuación 63, la eficiencia de conversión para el caso monocromático queda de la siguiente manera:

$$\eta_{cw} = \frac{2^2 3^2 \hbar^2 c^3 n_p^3 \gamma^2 L^2}{\pi^2 \omega_p} \int d\omega_r \int d\omega_s h(\omega_r, \omega_s, \omega_p - \omega_r - \omega_s) \text{sinc}^2 \left[\frac{L}{2} \Delta k_{cw}(\omega_r, \omega_s) \right]. \quad (66)$$

En las ecuaciones anteriores, ω_p es la frecuencia del bombeo monocromático. Estas ecuaciones han sido escritas en términos del desempatamiento de fases para el caso monocromático $\Delta k_{cw}(\omega_r, \omega_s)$ (basado en la ecuación 15) definida como:

$$\Delta k_{cw}(\omega_r, \omega_s) = k(\omega_p) - k(\omega_r) - k(\omega_s) - k(\omega_p - \omega_r - \omega_s) + \Phi_{NL}, \quad (67)$$

y en donde la función $h(\omega_r, \omega_s, \omega_p - \omega_r - \omega_s)$ está definida como:

$$h(\omega_r, \omega_s, \omega_p - \omega_r - \omega_s) \equiv \frac{k^{(1)}(\omega_r)\omega_r}{n_r^2} \frac{k^{(1)}(\omega_s)\omega_s}{n_s^2} \frac{k^{(1)}(\omega_p - \omega_r - \omega_s)(\omega_p - \omega_r - \omega_s)}{n_i^2(\omega_p - \omega_r - \omega_s)}, \quad (68)$$

en donde por conservación de energía se ha utilizado que $\omega_i = \omega_p - \omega_r - \omega_s$.

V.2 Fórmula analítica para el caso pulsado

Para un mejor entendimiento del proceso de generación de ternas de fotones por TOSPDC, en esta sección se muestra que es posible obtener expresiones para el flujo emitido en una forma analítica cerrada, utilizando ciertas aproximaciones.

Para poder obtener una expresión analítica cerrada para el flujo emitido de ternas de fotones, se comienza considerando que la función $h(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ (ver ecuación 68), contenida en el integrando de la ecuación 58, varía lentamente con las frecuencias de generación, en una región espectral suficientemente angosta (Rubin *et al.*, 1994), y por

lo tanto se puede considerar una constante para propósito de la integral evaluándola en las frecuencias centrales de los paquetes de onda señal-1 ω_{r0} , señal-2 ω_{s0} y acompañante ω_{i0} , en donde se cumple el empatamiento de fases perfecto.

Además, para poder resolver la triple integral de frecuencia en la ecuación 58, se recurre a una aproximación lineal del desempatamiento de fases (ver apéndice B). A través de esta aproximación, se puede demostrar que el producto $L\Delta k$ en la función de empatamiento de fases se puede expresar como:

$$L\Delta k_{lin} = \tau_r \nu_r + \tau_s \nu_s + \tau_i \nu_i, \quad (69)$$

escrita en términos de las desintonizaciones en frecuencia $\nu_\mu = \omega_\mu - \omega_{\mu0}$. En la ecuación 69, se ha supuesto que el término constante de la expansión en series de Taylor puede ser despreciado, dado que el empatamiento de fases se logra de forma perfecta en las frecuencias centrales de generación $\omega_{\mu0}$ (con $\mu = p, r, s, i$). Los parámetros τ_μ representan los coeficientes del desempatamiento de velocidad de grupo entre el bombeo y cada uno de los modos emitidos, y están dados por:

$$\tau_\mu = L[k^{(1)}(\omega_{p0}) - k^{(1)}(\omega_{\mu0})], \quad (70)$$

en donde $\mu = r, s, i$.

También se ha supuesto que antes de llegar a los detectores, los fotones TOSPDC (en cada uno de los tres modos) son transmitidos a través de filtros espectrales Gaussianos con un ancho de banda $\sigma_{f\mu}$ (con $\mu = r, s, i$) representados por la función:

$$f_{fil}^{\nu_\mu} = \exp \left[-\frac{\nu_\mu^2}{\sigma_{f\mu}^2} \right]. \quad (71)$$

con $\mu = r, s, i$. La función de amplitud espectral conjunta filtrada resultante, suponiendo que todos los filtros tienen el mismo ancho de banda σ_f , está dada por:

$$f_{fil}(\nu_r, \nu_s, \nu_i) = f(\nu_r, \nu_s, \nu_i) \exp \left[-\frac{\nu_r^2 + \nu_s^2 + \nu_i^2}{\sigma_f^2} \right]. \quad (72)$$

Entonces, reemplazando las ecuaciones 69, 70 y 72 en 58, es posible demostrar que el número de ternas de fotones emitidas por segundo está dada por:

$$N = \frac{3^2 \hbar c^3 n_p^3}{(2\pi)\omega_{p0}^2} \frac{L^2 \gamma^2 p \sigma_f^3}{(\sigma^2 + 3\sigma_f^2)^{1/2}} h(\omega_{r0}, \omega_{s0}, \omega_{i0}) \frac{1}{\Phi} \{2\sqrt{\pi\Phi} \text{erf}[2\sqrt{\Phi}] + \exp(-4\Phi) - 1\}, \quad (73)$$

en donde $\text{erf}(\cdot)$ denota la función de error y Φ está dada por:

$$\Phi = \frac{\sigma_f^2}{32(\sigma^2 + 3\sigma_f^2)} [(\sigma^2 + 2\sigma_f^2)(\tau_r^2 + \tau_s^2 + \tau_i^2) - 2\sigma_f^2(\tau_r\tau_s + \tau_r\tau_i + \tau_s\tau_i)]. \quad (74)$$

Considerando el caso de emisión degenerada en frecuencia, es decir cuando $\omega_{r0} = \omega_{s0} = \omega_{i0} = \omega_{p0}/3$, de la ecuación 70 se tiene que $\tau_r = \tau_s = \tau_i = \tau$. Bajo estas condiciones Φ se reduce a:

$$\Phi_{deg} = \frac{3\sigma^2 \sigma_f^2 \tau^2}{32(\sigma^2 + 3\sigma_f^2)}. \quad (75)$$

Ahora, enfocaremos nuestra discusión al caso específico en el que el ancho de banda del filtro σ_f es mucho más grande que el ancho de banda del haz de bombeo σ . Este escenario es realista para un bombeo en forma de un tren de pulsos con duración de picosegundos, como el caso de diseño específico presentado en el capítulo anterior. Tomando en cuenta que $\sigma_f \gg \sigma$, la ecuación 74 se reduce a $\Phi = (L/L_0)^2$, en términos de la longitud característica L_0 dada por:

$$L_0 = \frac{\sqrt{48}}{\sigma_f} \frac{1}{\sqrt{[k_{r0}^{(1)}]^2 + [k_{s0}^{(1)}]^2 + [k_{i0}^{(1)}]^2 - k_{r0}^{(1)} k_{s0}^{(1)} - k_{r0}^{(1)} k_{i0}^{(1)} - k_{s0}^{(1)} k_{i0}^{(1)}}}, \quad (76)$$

en donde $k_{\mu 0}^{(1)} = k^{(1)}(\omega_{\mu 0})$. Nótese que para $\sigma_f \gg \sigma$, la ecuación 74 diverge para un caso de TOSPDC con frecuencia degenerada para el cual $k_{r0}^{(1)} = k_{s0}^{(1)} = k_{i0}^{(1)}$, debido a la dependencia $1/\Phi$. De hecho, la aproximación lineal del desempatamiento de fases utilizada aquí falla para un caso de TOSPDC degenerado en frecuencia, a menos que los modos de emisión estén fuertemente filtrados (esto es $\sigma_f \ll \sigma$). Mientras que la función de empataamiento de fases $\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ tiene una curvatura en el espacio de emisión de frecuencias $\{\omega_r, \omega_s, \omega_i\}$ que limita el empalme con la función envolvente espectral de bombeo $\alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i)$, la función de empataamiento de fases aproximada tiene la misma orientación que la envolvente espectral de bombeo, lo que conlleva a una situación no-física de un ancho de banda de emisión infinito, dando la divergencia antes mencionada. Por lo tanto, restringimos el uso de una expresión analítica cerrada para el flujo emitido solamente para el caso de un proceso de TOSPDC no-degenerado en frecuencia; y entonces la función Φ_{deg} es no-válida. Como se verá en las siguientes secciones, la expresión analítica cerrada aquí presentada para el caso no-degenerado tiene una concordancia excelente con los cálculos numéricos que no recurren a aproximaciones.

Se van a considerar ahora dos límites diferentes para la ecuación 73. Hay que hacer notar que para valores de Φ suficientemente grandes, la expresión $[2\sqrt{\pi\Phi}\text{erf}(2\sqrt{\Phi}) + \exp(-4\Phi) - 1]/\Phi$ se vuelve $2\sqrt{\pi/\Phi}$. Denotemos por $\Phi = \Phi'$ un valor a partir del cual esta aproximación es válida. Por ejemplo, para $\Phi > 100$ ($\Phi' = 100$) que corresponde a una $L > 10L_0$ la función de arriba llega a este límite dentro de un margen $< 3\%$. Entonces el número de ternas de fotones emitido, utilizando esta aproximación ($L \gg$

$\sqrt{\Phi'}L_0$) por pulso de bombeo, se puede expresar como:

$$N = \frac{6^2 \hbar c^3 k_{r0}^{(1)} k_{s0}^{(1)} k_{i0}^{(1)}}{\sqrt{\pi} \sqrt{[k_{r0}^{(1)}]^2 + [k_{s0}^{(1)}]^2 + [k_{i0}^{(1)}]^2 - k_{r0}^{(1)} k_{s0}^{(1)} - k_{r0}^{(1)} k_{i0}^{(1)} - k_{s0}^{(1)} k_{i0}^{(1)}}} \times \\ \times \frac{\omega_{r0} \omega_{s0} \omega_{i0}}{\omega_{p0}^2} \frac{n_{p0}^3}{n_{r0}^2 n_{s0}^2 n_{i0}^2} \gamma^2 L p \sigma_f. \quad (77)$$

Por el contrario, si $L \lesssim \sqrt{\Phi'}L_0$, el número de ternas de fotones emitido por pulso de bombeo se vuelve:

$$N = \frac{18 \hbar c^3}{\sqrt{3} \pi} k_{r0}^{(1)} k_{s0}^{(1)} k_{i0}^{(1)} \frac{\omega_{r0} \omega_{s0} \omega_{i0}}{\omega_{p0}^2} \frac{n_{p0}^3}{n_{r0}^2 n_{s0}^2 n_{i0}^2} \gamma^2 L^2 p \sigma_f^2. \quad (78)$$

Por lo tanto, mientras que para una fibra corta (comparada con $\sqrt{\Phi'}L_0$) el flujo es proporcional al cuadrado de L , para fibras con longitudes mayores, esta dependencia se vuelve lineal. Nótese que L_0 representa una medida de la longitud del paquete de onda para cada uno de los tres modos emitidos. Entonces, esta dependencia cuadrática aparece para fibras que tienen una longitud similar o más pequeña comparada con la longitud del paquete de onda emitido. Para la mayoría de las situaciones de interés, L_0 es una cantidad pequeña, de hecho, como se verá más adelante en uno de nuestros casos de estudio, la dependencia del flujo con la longitud de la fibra, será lineal, como se ve en la ecuación 77. En general, para la mayoría de las situaciones realistas, la dependencia del flujo con la longitud L es lineal.

Este análisis sirve para aclarar la dependencia del flujo emitido con los diferentes parámetros experimentales de interés en el caso del proceso de TOSPD no-degenerado. El flujo emitido es lineal con respecto a la longitud de la fibra L , constante con respecto al ancho de banda del haz de bombeo σ y lineal con respecto a la potencia del haz de bombeo p . A pesar de que las expresiones analíticas que se han obtenido no son válidas

para el caso del proceso TOSPDC degenerado en frecuencia, los resultados numéricos obtenidos indican un comportamiento cualitativamente idéntico al caso no-degenerado en la dependencia del flujo emitido en función de estos parámetros experimentales.

El comportamiento observado para el proceso de TOSPDC difiere del que se ha observado para el proceso de SFWM, para el cual el flujo emitido es lineal en σ (Garay-Palmett *et al.*, 2011). Esto significa que pulsos de bombeo cortos no nos llevan a tasas mayores de emisión para TOSPDC (con respecto al caso de bombeo monocromático), como lo hacen en el caso de SFWM. Nótese que la manera en la cual el flujo emitido depende de los parámetros experimentales relevantes es esencialmente idéntico al comportamiento observado para conversión paramétrica descendente espontánea en cristales con una no-linealidad de segundo orden.

V.2.1 Flujo emitido para diseños de fuentes específicas en relación con algunos parámetros experimentales

En esta sección se presentan simulaciones numéricas del flujo emitido esperado, y en aquellos casos en donde es posible (caso no-degenerado), se hace una comparación con los resultados derivados de nuestras expresiones analíticas cerradas. En particular, se estudia la dependencia del flujo emitido en función de algunos parámetros experimentales clave: longitud de la fibra, potencia del haz de bombeo y ancho de banda de bombeo. Se incluyen en este análisis los diseños de fuentes degeneradas en frecuencia y no-degeneradas en frecuencia que fueron mostrados en la sección IV, así como las configuraciones de bombeo pulsado y bombeo monocromático.

Se suponen los siguientes parámetros:

- para el régimen pulsado, un ancho de banda de $\sigma = 23.5$ GHz (que corresponde

en el límite de la transformada de Fourier a una duración temporal de 100 ps), excepto en la sección V.2.1, en donde se analiza el flujo emitido y su dependencia con el ancho espectral del bombeo σ ;

- una longitud de fibra de $L = 10$ cm, excepto en la sección V.2.1, en donde se discute el flujo emitido y su dependencia con la longitud de la fibra L ; y
- una potencia promedio de bombeo $p = 200$ mW, excepto en la sección V.2.1, en donde se analiza el flujo emitido y su dependencia con la potencia de bombeo p .

Ancho de banda del haz de bombeo σ

En esta sección se estudia la dependencia del flujo emitido con respecto al ancho de banda de bombeo para las dos fuentes de ternas de fotones diseñadas en el capítulo IV (emisión degenerada y no-degenerada en frecuencia), mientras que se mantiene la energía por pulso de bombeo constante. Es importante destacar, que a medida que σ varía, la duración temporal, también varía, y en consecuencia la potencia pico varía también. Aquí se evalúa el flujo emitido para un ancho de banda espectral de bombeo σ dentro del rango 11.77 – 117.7 GHz (o una duración temporal en el límite de la transformada de Fourier en el rango de 20 – 200 ps).

Para los dos diseños, el flujo emitido se obtiene mediante la evaluación numérica de la ecuación 58. Los resultados son mostrados en la figura 20 por puntos azules para el caso degenerado en frecuencia y por puntos rojos para el caso no-degenerado en frecuencia. También se ha obtenido de la ecuación 65 el flujo emitido en el límite del bombeo monocromático, mostrado en la figura 20 por puntos verdes. Es claro de manera gráfica que los valores del flujo emitido para $\sigma \neq 0$ (calculados a partir de la ecuación 58) son semejantes a los valores correspondientes para el límite del bombeo

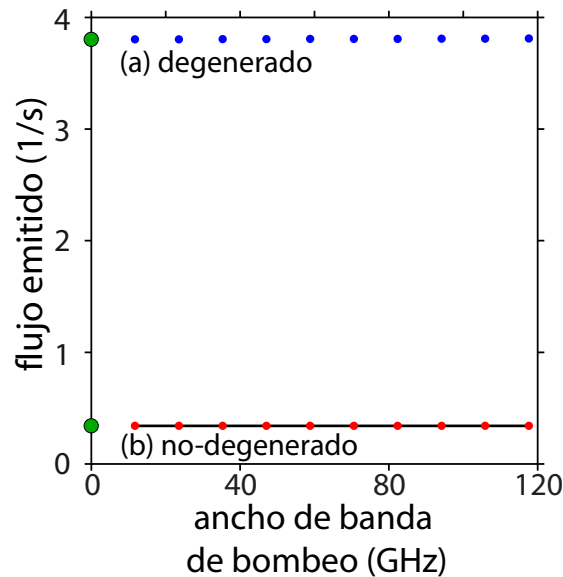


Figura 20. Flujo emitido como función del ancho de banda de bombeo para los siguientes casos: (a) Fuente de TOSPDC degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos azules); (b) Fuente de TOSPDC no-degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos rojos); y fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia evaluada a partir de la expresión analítica cerrada 73 (línea sólida negra). Los valores obtenidos para el límite de bombeo monocromático, a partir de la ecuación 65, están indicados por puntos verdes para cada caso.

monocromático (calculado a partir de la ecuación 65). De manera adicional, para la fuente de TOSPDC no-degenerada en frecuencia, se evalúa el flujo emitido a partir de la expresión analítica dada por la ecuación 73, y los resultados correspondientes son mostrados en la figura 20 por una línea sólida negra. Como se puede ver, la concordancia entre los resultados numéricos y analíticos es excelente, indicando que la aproximación lineal en la cual se basan los resultados analíticos, es en efecto, una muy buena aproximación. Como se comentó en la sección anterior, esta aproximación falla para el caso degenerado en frecuencia.

Claramente se puede ver en la figura 20, el flujo emitido en el proceso de TOSPDC (y por lo tanto la eficiencia de conversión) permanece constante en función del ancho de banda de bombeo sobre todo el rango de anchos de banda espectrales considerados, para

los dos casos: fuentes de ternas de fotones degeneradas y no-degeneradas en frecuencia. Por esta razón, en el caso del proceso TOSPDC, no se espera ninguna diferencia en el flujo emitido entre los regímenes de bombeo monocromático y pulsado (mientras se mantenga la potencia promedio constante).

Nótese también que la fuente degenerada en frecuencia es considerablemente más brillante que la fuente no-degenerada en frecuencia; la razón de esto es que a una frecuencia $\omega_r = \omega_s = \omega_i = \omega_p/3$, el contorno de empaquetamiento de fases perfecto y el contorno de conservación de energía son tangentes uno de otro, permitiendo un ancho de banda de emisión mayor. Nuestros resultados arrojan una brillantez de $N = 3.80$ ternas/s para la fuente TOSPDC degenerada, y un valor de $N = 0.34$ ternas/s para la fuente TOSPDC no-degenerada. Es posible ver, sin embargo que para el caso degenerado en frecuencia, las ternas de fotones pueden ser separadas únicamente de modo no-determinista, así que la brillantez real en la práctica puede ser menor que los resultados que estamos mostrando en este trabajo.

Longitud de la fibra óptica L

Ahora, nos enfocamos a la dependencia del flujo emitido con la longitud de la fibra para las dos fuentes de TOSPDC: degenerada y no-degenerada en frecuencia, manteniendo los otros paraámetros de la fuente fijos. Para este análisis se varía la longitud de la fibra de 1 a 10 cm. Hacemos notar que recientemente se ha demostrado experimentalmente que es posible obtener una fibra ultra-delgada de radio uniforme de alrededor de 445 nm de radio con una longitud de 9 cm (Leon-Saval *et al.*, 2004).

Los resultados obtenidos por la evaluación numérica de la ecuación 58 se muestran en la figura 21 por puntos azules (caso degenerado en frecuencia) y por puntos rojos (caso no-degenerado en frecuencia). También se ha evaluado a partir de la ecuación 65, el

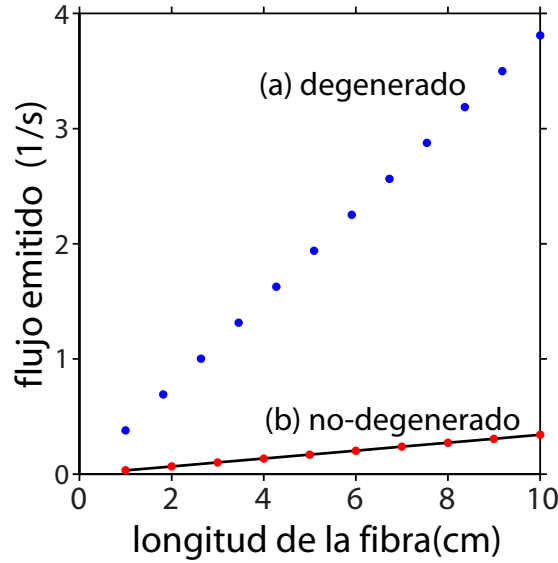


Figura 21. Flujo emitido como función de la longitud de la fibra para los siguientes casos: (a) Fuente de TOSPDC degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos azules); (b) Fuente de TOSPDC no-degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos rojos); y fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia evaluada a partir de la expresión analítica cerrada 73 (línea sólida negra).

flujo emitido en el límite de bombeo monocromático. Sin embargo, debido a que el flujo emitido es constante con respecto al ancho de banda de bombeo (para los parámetros utilizados en este trabajo), los valores obtenidos se traslapan con los resultados de la ecuación 58 para el régimen pulsado. De manera adicional, para la fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia, evaluamos el flujo emitido a partir de la expresión analítica dada por la ecuación 73. Los resultados correspondientes, mostrados en la figura 21 con una línea negra, concuerdan perfectamente con los obtenidos por la ecuación 58.

Cabe destacar que para el rango de longitudes de fibra considerados en este trabajo, el flujo emitido exhibe una dependencia lineal con L para los dos casos: fuentes de ternas de fotones degenerada y no-degenerada en frecuencia. Sin embargo, se debe hacer notar que existen condiciones para las cuales N tiene una dependencia no-lineal con la longitud de la fibra. Por ejemplo, como se discutió en la sección anterior, para fibras

muy cortas (tales que $L \ll L_0$, ver ecuación 76) el flujo emitido varía cuadráticamente con la longitud de la fibra. Para la longitud de fibra más grande considerada aquí ($L = 10$ cm), el flujo emitido para la fuente TOSPDC degenerada en frecuencia es $N = 3.80$ ternas/s y para la fuente no-degenerada en frecuencia $N = 0.34$ ternas/s.

Potencia del haz de bombeo P

En esta sección nos enfocaremos en la dependencia del flujo emitido y su dependencia con la potencia de bombeo para las dos fuentes TOSPDC que estamos estudiando, mientras se mantienen fijos el ancho de banda de bombeo y los otros parámetros de la fuente. Se calcula el flujo emitido como función de la potencia promedio de bombeo, y ésta es variada entre 1 y 200 mW.

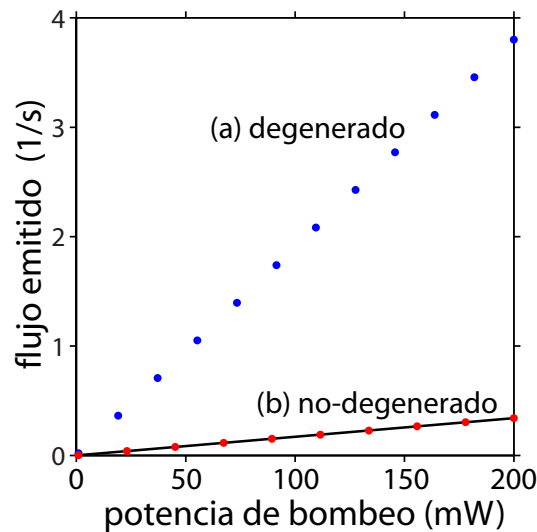


Figura 22. Flujo emitido como función de la potencia de bombeo de bombeo para los siguientes casos: (a) Fuente de TOSPDC degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos azules); (b) Fuente de TOSPDC no-degenerada en frecuencia, evaluada a partir de la ecuación 58 (puntos rojos); y fuente TOSPDC no-degenerada en frecuencia evaluada a partir de la expresión analítica cerrada 73 (línea sólida negra).

En la figura 22 se presenta, para los dos diseños de fuentes propuestas, las gráficas de

N en función de p , la cual fue obtenida numéricamente a partir de la expresión 58. Los puntos azules corresponden al caso degenerado en frecuencia, mientras que los puntos rojos corresponden al caso no-degenerado en frecuencia. Las gráficas del flujo emitido obtenidas en el límite de bombeo monocromático no se muestran en la figura 22, debido a que se traslapan perfectamente con los resultados obtenidos a partir de la ecuación 58 para el régimen de bombeo pulsado. De manera adicional, para la fuente TOSPDC no-degenerada, se evalúa el flujo emitido a partir de la expresión analítica dada por 73. Los resultados correspondientes se muestran en la figura 22 por una línea sólida negra. Como se puede ver, la concordancia entre los resultados numéricos y analíticos es excelente.

Como se puede ver en la figura 22, para las dos fuentes propuestas, el flujo emitido depende linealmente con la potencia promedio del bombeo, lo cual implica que la eficiencia de conversión de TOSPDC es constante con respecto a este parámetro (ver ecuaciones 63 y 73). Este comportamiento debe ser contrastado con el proceso de SFWM, para el cual la eficiencia de conversión es lineal con respecto a la potencia de bombeo (Garay-Palmett *et al.*, 2011). Nótese que el proceso de TOSPDC tiene grandes similitudes con el proceso de SPDC; en los dos casos, la eficiencia de conversión es constante con respecto a la potencia de bombeo y al ancho de banda de bombeo (dentro del ancho de banda del empatamiento de fases).

Para la potencia promedio de bombeo más alta que se ha considerado en este trabajo ($P = 200$ mW), el flujo emitido para la fuente TOSPDC degenerada en frecuencia es de $N = 3.8$ ternas/s; mientras que para la fuente no-degenerada en frecuencia es de $N = 0.34$ ternas/s.

En general, podemos ver en los resultados anteriores, que el número de ternas de fotones que son generadas en el proceso de TOSPDC utilizando fibras ópticas ultradelgadas bimodales como las que se proponen en este trabajo, es comparable con resul-

tados experimentales recientes que utilizan otros métodos para la generación de ternas de fotones (Hubel *et al.*, 2010). Sin embargo, es de esperar que futuros avances en la tecnología de fabricación de fibras altamente no-lineales pueden favorecer a nuestra técnica aquí presentada y por lo tanto obtener mayores cantidades de ternas de fotones.

Capítulo VI

Acondicionamiento de ternas de fotones enredados

El lograr tener control sobre el enredamiento cuántico en los grados de libertad continuos en los fotones que se obtienen en el proceso de generación paramétrica descendente espontánea, ya sea de segundo o de tercer orden, es necesario para la implementación de diversas aplicaciones de procesamiento de información cuántica. En particular, en nuestro caso, la dispersión experimentada por el haz de bombeo y por los paquetes de onda uni-fotónicos señal-1, señal-2 y acompañante en la fibra óptica no-lineal, así como por las características del haz de bombeo. El desarrollo de materiales no-lineales con propiedades dispersivas optimizadas representa por lo tanto, una tecnología primordial para el desarrollo presente y futuro en este campo. Ya que la generación de parejas de fotones por SPDC es un área más estudiada que la de ternas hasta el momento, se ha encontrado que para generar algunos de los estados de interés práctico se requiere el cumplimiento de ciertas condiciones de empatamiento de velocidad de grupo entre el haz de bombeo y los fotones generados. En este sentido, nos interesa entender la influencia del desempatamiento de las velocidades de grupo sobre la estructura de enredamiento cuántico espectral en ternas de fotones generadas en el proceso TOSPDC.

En este capítulo se presenta un análisis teórico breve para entender la influencia de los diversos parámetros experimentales sobre las propiedades de enredamiento espectral de las ternas de fotones, y conocer así las condiciones necesarias para obtener los estados requeridos para los diferentes experimentos y aplicaciones. En particular, se analiza el

caso de parejas de fotones anunciadas, en donde la detección de uno de los tres fotones en una terna determinada anuncia la presencia de una pareja de fotones.

VI.1 Velocidad de Grupo

Recordemos que la función de amplitud espectral conjunta que describe el estado de tres fotones generados por TOSPDPC en una fibra óptica ultra-delgada guiada por aire y que soporta dos modos de propagación está dada por el producto de la función envolvente espectral del haz de bombeo $\alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i)$ (ver ecuación 56) y la función de empataamiento de fases está dada por:

$$\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = \text{sinc} \left[\frac{L\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i)}{2} \right] \exp \left[i \frac{L\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i)}{2} \right], \quad (79)$$

donde L representa la longitud de la fibra óptica y $\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ (ver ecuación 15) representa el desempataamiento de fases entre las tres ondas involucradas. Para conocer las condiciones que se deben cumplir para obtener diferentes configuraciones del enredamiento espectral, se realiza una expansión en series de potencias (en este caso la haremos a primer orden) del desempataamiento de fases $\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = k_p(\omega_p) - k_r(\omega_r) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i)$ alrededor de la frecuencias centrales $\omega_{\mu 0}$ (con $\mu = r, s, i, p$); nótese que aquí, hemos descartado la fase no-lineal del desempataamiento de fases. Como podemos ver en la ecuación 79, es conveniente obtener el producto $L\Delta k$; de acuerdo al apéndice B, en la expansión a primer orden obtenemos:

$$L\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i) \approx L\Delta k_0 + \tau_r \nu_r + \tau_s \nu_s + \tau_i \nu_i, \quad (80)$$

en donde $\nu_\mu = \omega_\mu - \omega_{\mu 0}$ representan las “desintonizaciones” de las frecuencias, y donde:

$$\Delta k_0 = k_p(\omega_{p0}) - k_r(\omega_{r0}) - k_s(\omega_{s0}) - k_i(\omega_{i0}) = 0 \quad (81)$$

es el término constante de la expansión en series de potencia y en términos del cual se puede escribir la condición básica de empatamiento de fases. En esta misma expresión se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= L(k_{p0}^{(1)} - k_{\mu0}^{(1)}) = L\left(\frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_\mu}\right), \\ \tau_p &= Lk_{p0}^{(1)}, \end{aligned} \quad (82)$$

que representan los términos de primer orden de la expansión (evaluadas en las frecuencias $\omega_{\mu0}$ para los fotones en los modos señal-1, señal-2 y acompañante, con $\mu = r, s, i$), y en $\omega_{p0} = \omega_{r0} + \omega_{s0} + \omega_{i0}$ para el haz de bombeo); u_p es la velocidad de grupo del haz de bombeo y u_μ ($\mu = r, s, i$) son las velocidades de grupo de los fotones señal-1, señal-2 y acompañante, respectivamente.

Haciendo una aproximación Gaussiana de la función sinc:

$$\text{sinc}(x) \approx \exp(-\eta x^2) \quad (83)$$

con $\eta = 0.193$ (el valor que se toma para η es el que corresponde cuando las dos funciones tienen el mismo ancho a la mitad del máximo, FWHM por sus siglas en inglés), de tal manera que si $x = L\Delta k/2$, tenemos que:

$$\text{sinc}\left[\frac{L}{2}\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i)\right] \approx \exp\left[-\eta\frac{L^2}{4}\Delta k^2(\omega_r, \omega_s, \omega_i)\right], \quad (84)$$

donde

$$L^2\Delta k^2(\nu_r, \nu_s, \nu_i) = (L\Delta k_0 + \tau_r\nu_r + \tau_s\nu_s + \tau_i\nu_i)^2, \quad (85)$$

en donde se ha escrito Δk en términos de las desintonizaciones. Desarrollando el polinomio, se tiene que

$$\begin{aligned} L^2 \Delta k^2(\nu_r, \nu_s, \nu_i) &= L^2 \Delta k_0^2 + 2L \Delta k_0 \tau_r \nu_r + 2L \Delta k_0 \tau_s \nu_s + 2L \Delta k_0 \tau_i \nu_i + \\ &+ 2\tau_r \tau_s \nu_r \nu_s + 2\tau_r \tau_i \nu_r \nu_i + 2\tau_s \tau_i \nu_s \nu_i + \tau_r^2 \nu_r^2 + \tau_s^2 \nu_s^2 + \tau_i^2 \nu_i^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Por otro lado, la función envolvente espectral de bombeo en términos de las desintonizaciones estará dada por:

$$\alpha(\nu_r + \nu_s + \nu_i) = \exp \left[-\frac{(\nu_r + \nu_s + \nu_i)^2}{\sigma^2} \right], \quad (87)$$

en donde, desarrollando el polinomio, tenemos:

$$(\nu_r + \nu_s + \nu_i)^2 = \nu_r^2 + \nu_s^2 + \nu_i^2 + 2\nu_r \nu_s + 2\nu_r \nu_i + 2\nu_s \nu_i. \quad (88)$$

La amplitud espectral conjunta (JSA) en términos de las desintonizaciones es:

$$F(\nu_r, \nu_s, \nu_i) = \alpha(\nu_r + \nu_s + \nu_i) \phi(\nu_r, \nu_s, \nu_i), \quad (89)$$

y utilizando la aproximación Gaussiana, la JSA se puede escribir de la siguiente manera:

$$F(\nu_r, \nu_s, \nu_i) = \exp \left[-\frac{(\nu_r + \nu_s + \nu_i)^2}{\sigma^2} \right] \exp \left[-\eta \frac{L^2}{4} \Delta k^2(\nu_r, \nu_s, \nu_i) \right]. \quad (90)$$

El argumento de la exponencial completa resultante está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{(\nu_r + \nu_s + \nu_i)^2}{\sigma^2} + \eta \frac{L^2}{4} \Delta k^2(\nu_r, \nu_s, \nu_i) &= \frac{\nu_r^2}{\sigma^2} + \frac{\nu_s^2}{\sigma^2} + \frac{\nu_i^2}{\sigma^2} + 2\frac{\nu_r \nu_s}{\sigma^2} + 2\frac{\nu_r \nu_i}{\sigma^2} + 2\frac{\nu_s \nu_i}{\sigma^2} + \frac{\eta}{4} L^2 \Delta k_0 + \\ &+ \frac{\eta}{2} (L \Delta k_0 \tau_r \nu_r + L \Delta k_0 \tau_s \nu_s + L \Delta k_0 \tau_i \nu_i + \tau_r \tau_s \nu_r \nu_s + \tau_r \tau_i \nu_r \nu_i + \tau_s \tau_i \nu_s \nu_i) + \\ &+ \frac{\eta}{4} (\tau_r^2 \nu_r^2 + \tau_s^2 \nu_s^2 + \tau_i^2 \nu_i^2), \end{aligned}$$

agrupando términos, de tal manera que podamos separar los términos dependientes de cada una de las frecuencias de los tres modos (señal-1, señal-2 y acompañante), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{(\nu_r + \nu_s + \nu_i)^2}{\sigma^2} + \eta \frac{L^2}{4} \Delta k(\nu_r, \nu_s, \nu_i) &= \frac{\eta}{4} L^2 \Delta k_0 + L \frac{\eta}{2} \Delta k_0 (\tau_r \nu_r + \tau_s \nu_s + \tau_i \nu_i) + \\ & \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{2} \tau_r \tau_s \right) \nu_r \nu_s + \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{2} \tau_r \tau_i \right) \nu_r \nu_i + \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{2} \tau_s \tau_i \right) \nu_s \nu_i + \\ & + \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{4} \tau_r^2 \right) \nu_r^2 + \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{4} \tau_s^2 \right) \nu_s^2 + \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{4} \tau_i^2 \right) \nu_i^2. \end{aligned} \quad (91)$$

En el desarrollo de la ecuación anterior, se puede ver que se tienen términos que dependen solamente de cada una de las frecuencias (r, s, i) y términos en los que la dependencia es con dos de las frecuencias. Esta aproximación está basada en el análisis que se realiza para la generación de parejas de fotones por SPDC (Grice *et al.*, 2001).

VI.1.1 Fuentes de parejas de fotones anunciadas

En este trabajo, nos enfocamos solamente en el análisis de una clase de estado de tres fotones de interés, en particular en la que se puede escribir el estado de tres fotones como:

$$F(\nu_r, \nu_s, \nu_i) = G(\nu_r, \nu_s)H(\nu_i), \quad (92)$$

ya que permite la preparación condicional de parejas de fotones (en los modos r y s) enredados anunciadas por la detección de fotones en el modo i . Esta separación indica que debemos factorizar la función de amplitud espectral conjunta en dos funciones, una que dependa solamente de una de las frecuencias de generación, mientras que la otra dependerá de las dos frecuencias restantes. En el caso aquí presentado, se separa el

fotón acompañante caracterizado por la frecuencia ω_i . Para poder factorizar todos los términos que contengan la frecuencia ω_i , se puede ver que en la expresión 91 que es necesario que se cumplan de manera simultánea las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\eta}{4}\tau_r\tau_i &= 0, \\ \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\eta}{4}\tau_s\tau_i &= 0,\end{aligned}\tag{93}$$

que son nuestras condiciones de factorabilidad parcial entre los tres fotones que relacionan el ancho de banda espectral del bombeo σ y los parámetros de desempatamiento de la velocidad de grupo τ_μ ($\mu = r, s, i$). Este análisis es similar al que se realiza para generación de parejas de fotones por SPDC y se obtienen resultados muy similares (Grice *et al.*, 2001; U'Ren *et al.*, 2005a) De acuerdo a la ecuación 86, las expresiones anteriores se pueden escribir como:

$$\frac{4}{\sigma^2} + \eta L^2[k_p^{(1)} - k_r^{(1)}][k_p^{(1)} - k_i^{(1)}] = 0,\tag{94}$$

$$\frac{4}{\sigma^2} + \eta L^2[k_p^{(1)} - k_s^{(1)}][k_p^{(1)} - k_i^{(1)}] = 0,\tag{95}$$

Por lo tanto, si se escogen adecuadamente la longitud de la fibra óptica L y el ancho de banda espectral del haz de bombeo σ , es posible que se puedan cumplir de manera simultánea las ecuaciones 94 y 95, siempre y cuando se cumplan condiciones específicas sobre los parámetros de desempatamiento de velocidades de grupo. Lo anterior indica que el desempatamiento de velocidades de grupo es un factor determinante para la factorabilidad de los estados de tres fotones generados por TOSPDC, de manera similar que como ocurre para los estados de dos fotones por SPDC. En este sentido, encontramos tres casos límite en los que estas ecuaciones se cumplen, y se explican en los

siguientes apartados, los nombres que utilizamos para cada uno de los casos se derivan directamente de los que se utilizan para SPDC.

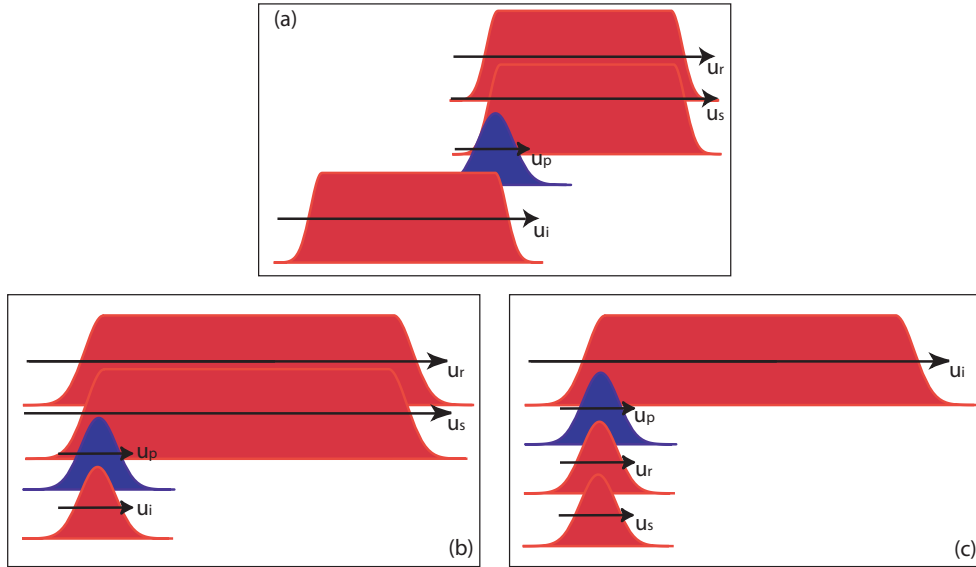


Figura 23. Representación del retraso temporal de los pulsos de los fotones señal-1, señal-2 y acompañante, con respecto al pulso del haz de bombeo, debido a la condición de empataamiento de fases. (a) Simétrico. (b) Asimétrico de tipo-1. (c) Asimétrico de tipo-2.

Empatamiento simétrico de velocidades de grupo

Retomando la condición de factorabilidad dada por la ecuación 93, es necesario que los productos $\tau_r \tau_i$ y $\tau_s \tau_i$ cumplan con las siguientes dos condiciones simultáneamente:

$$\tau_r \tau_i \leq 0 \quad \text{y} \quad \tau_s \tau_i \leq 0, \quad (96)$$

lo que indica que τ_i debe tener signo contrario tanto a τ_r como a τ_s . De esta manera, para poder observar un estado en el que se pueda factorizar el fotón en el modo acompañante i) la velocidad de grupo del haz de bombeo debe encontrarse entre las velocidades de grupo de los fotones señal-1 y señal-2, y el fotón acompañante, y ii) L y σ se deben elegir de tal manera que las ecuaciones 93 se cumplan.

A este tipo de empatamiento, le llamaremos empatamiento simétrico de velocidad de grupo (GVM, por sus siglas en inglés: *group velocity matching*). Un caso particular de esta condición es cuando se tiene que:

$$\tau_r = \tau_s = -\tau_i = \tau, \quad (97)$$

y entonces la condición de empatamiento es similar a la que se presenta en el GVM en SPDC. En este caso, las velocidades de grupo de los fotones señal-1, señal-2 y acompañante y la velocidad de grupo del haz de bombeo cumplen la relación:

$$k_s^{(1)}(\omega_s) + k_i^{(1)}(\omega_i) - 2k_p^{(1)}(\omega_p) = 0, \quad (98)$$

donde $k_\mu^{(1)}$ ($\mu = p, s, i$) representa el inverso de las velocidades de grupo para cada una de las ondas involucradas. Nótese que aquí estamos considerando que $\tau_r = \tau_s$ y por lo tanto $k_s^{(1)}(\omega_s) = k_r^{(1)}(\omega_r)$. Una interpretación de esto se puede obtener si decimos que los fotones señal-1 y señal-2 y acompañante se retrasan de manera simétrica con respecto al bombeo al propagarse en la fibra óptica [ver figura 23(a)].

Nótese que la técnica de empatamiento simétrico de velocidad de grupo ha sido utilizada exitosamente para la generación de parejas de fotones por SPDC para diferentes configuraciones (Kuzucu *et al.*, 2005; Koning y Wong, 2004), en donde se utilizan cristales no-lineales $\chi^{(2)}$ que dan de manera natural el GVM para longitudes de onda específicas (Grice *et al.*, 2001), dependiendo del tipo de cristal no-lineal utilizado; ya que en general no se tiene un control sobre las propiedades dispresivas del material no-lineal. También se han buscado otras técnicas que permitan tener un control sobre esas propiedades, como por ejemplo, la utilización de rejillas de Bragg como controladores de la velocidad de grupo (Corona y U'Ren, 2007).

Empatamiento asimétrico de velocidades de grupo de tipo 1

Es posible re-escribir las condiciones de factorabilidad dadas por las ecuaciones 93 de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\sigma\tau_r} + \frac{\eta}{4}\sigma\tau_i = 0, \quad \frac{1}{\sigma\tau_s} + \frac{\eta}{4}\sigma\tau_i = 0, \quad (99)$$

si consideramos el régimen de longitud de la fibra óptica es muy larga, y recordando que $\tau_\mu \propto L$ ($\mu = r, s, i$), si suponemos que $\sigma\tau_r \gg 1$ y que $\sigma\tau_s \gg 1$, y la condición anterior se reduce a $\tau_i = 0$. Aquí la velocidad de grupo se empata con la velocidad del fotón acompañante. En SPDC, esta variante de la técnica de GVM, en la que uno de los parámetros de desempatamiento sea igual a cero, es decir que la velocidad de grupo del haz de bombeo se empata con la velocidad de grupo de uno solo de los fotones generados [ver figura 23(b)], se conoce como empatamiento asimétrico de velocidad de grupo (AGVM, por sus siglas en inglés: *asimetric group velocity matching*). En el caso de TOSPDC, le llamaremos empatamiento asimétrico de velocidad de grupo de tipo-1, dado que es posible encontrar otra configuración similar, misma que revisaremos en el siguiente apartado.

Es importante mencionar que el AGVM en SPDC es el fundamento de una variante de la técnica conocida como SPIDER (por sus siglas en inglés: *Spectral Phase Interferometry for Direct Electric-field Reconstruction*) para la caracterización de pulsos ultra-cortos (Radunsky *et al.*, 2006). En este ejemplo, se hace uso, de la misma manera que para el GVM simétrico, de empatamiento de velocidad de grupo directo en el material no-lineal.

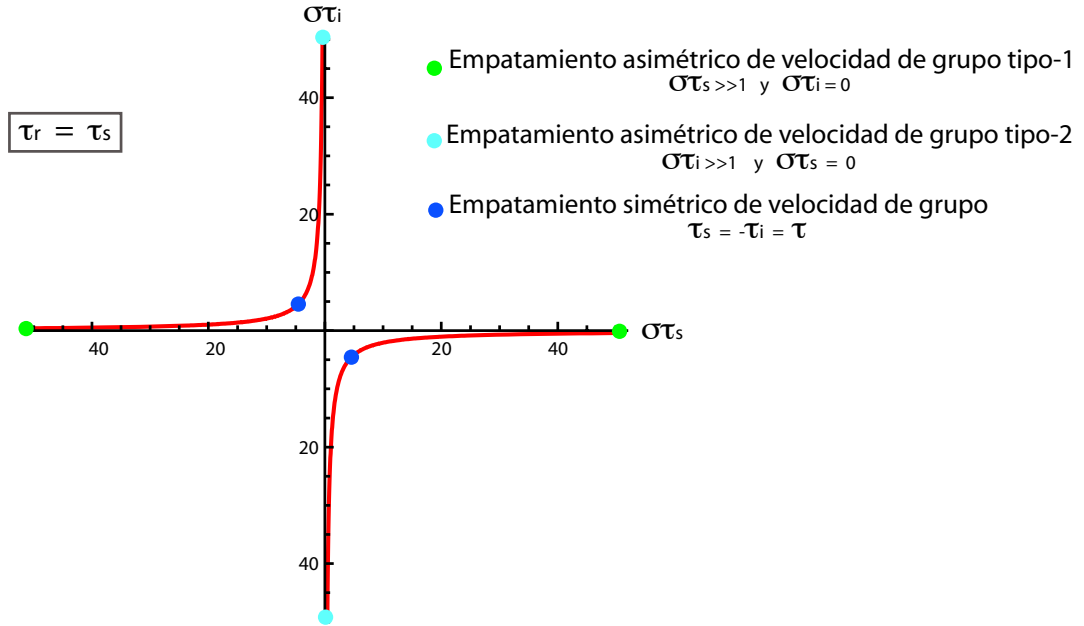


Figura 24. Condiciones de empatamiento de velocidades de grupo: empatamiento asimétrico de tipo-1, empatamiento asimétrico de tipo-2 y empatamiento simétrico.

Empatamiento asimétrico de velocidades de grupo de tipo 2

Escribimos ahora las condiciones de factorabilidad dadas por las ecuaciones 93 de otra manera:

$$\frac{1}{\sigma\tau_i} + \frac{\eta}{4}\sigma\tau_r = 0, \quad \frac{1}{\sigma\tau_i} + \frac{\eta}{4}\sigma\tau_s = 0, \quad (100)$$

y podemos ver que si $\sigma\tau_i \gg 1$, considerando nuevamente una longitud considerable en la fibra, entonces tenemos que $\tau_r = \tau_s = 0$. De esta manera las velocidades de los dos fotones señal-1 y señal-2 estarán empatadas con la velocidad de grupo del bombeo [ver figura 23(c)], en lugar de la velocidad de grupo del fotón acompañante. A este tipo de empatamiento le llamaremos empatamiento asimétrico de velocidad de grupo de tipo-2.

Como se puede ver en los dos tipos de AGVM, para poder factorizar uno de los tres fotones generados por TOPSDC, es posible empatar la velocidad de grupo del bombeo,

ya sea con la velocidad de grupo del fotón que se quiere separar o empatarla con las velocidades de grupo de los otros dos fotones.

En la figura 24 podemos ver cada una de las condiciones de empatamiento simétrico y asimétrico de velocidades de grupo que se mencionan en este trabajo. Ya que se está factorizando el fotón en el modo acompañante, se considera por simplicidad que $\tau_r = \tau_s$. En esta figura se puede ver una línea roja que representa todas las posibles soluciones de las condiciones de factorabilidad, dadas por la ecuaciones 94 y 95. Los puntos más cercanos al origen, marcados con círculos azules, representan la condición de empatamiento simétrico de velocidades de grupo, mientras que los cuadros verde y azul, muestran las condiciones de empatamiento asimétrico de tipo 1 y 2, respectivamente.

Capítulo VII

Conclusiones

La motivación principal de este trabajo fue la exploración y el estudio de estados de tres fotones generados por el proceso de generación paramétrica descendente espontánea de tercer orden en materiales no-lineales caracterizados por una susceptibilidad $\chi^{(3)}$, particularmente en fibras ópticas. En este proceso, se obtienen ternas de fotones enredados con características espectrales específicas. El análisis aquí realizado, estuvo restringido a los casos en los cuales los cuatro campos involucrados tienen la misma polarización y se propagan a lo largo de la fibra óptica en los primeros dos modos de propagación. Una vez analizado el comportamiento de los estados de tres fotones, el siguiente objetivo de este trabajo, fue la búsqueda y diseño de una fuente eficiente de ternas de fotones generadas por el proceso de TOSPDC.

El estado de tres fotones generados por TOSPDC es difícil de visualizar debido al número de las variables espectrales involucradas, por lo que se presentaron dos maneras de visualizar el estado, para así poder entender su comportamiento con claridad. Por un lado, se mostraron gráficas del estado en el espacio de las frecuencias de emisión y por el otro, gráficas en un espacio de variables de frecuencia rotadas, de tal manera que la orientación de los ejes coordenados concide con la simetría del estado. Se pudo observar que el estado es angosto sobre uno de los ejes resultantes, comparado con los otros dos ejes, lo cual es una indicación de fuertes correlaciones entre los tres fotones.

Se realizó un análisis de las características de empatamiento de fases en el proceso de TOSPDC en fibras ópticas ultra-delgadas, en particular como una función del radio

de la fibra y de la frecuencia de bombeo. Encontramos que una de los principales retos para poder diseñar fuentes de ternas de fotones, es lograr el empatamiento de fases entre las cuatro ondas involucradas, debido a la dispersión que presentan los materiales no-lineales de tercer orden, y ya que la distancia espectral entre el bombeo y los fotones generados es muy grande. Por otro lado, otro reto importante en el diseño de este tipo de fuentes, es el obtener un valor en la no-linealidad grande, ya que el número de ternas de fotones depende del cuadrado de este parámetro.

Para resolver los dos grandes retos en el diseño de fuentes de ternas de fotones, proponemos la utilización de fibras ópticas ultra-delgadas no-lineales guiadas por aire que permitan dos modos de propagación de la luz. Las fibras ultra-delgadas presentan un valor de la no-linealidad del medio bastante alta. El bombeo se propaga en el primer modo excitado HE_{12} , mientras que los fotones generados lo hacen en el modo fundamental HE_{11} . La propagación en dos modos diferentes permite la obtención de empatamiento de fases entre las cuatro ondas involucradas.

En este trabajo se estudió el proceso de generación paramétrica espontánea de tercer orden, incluyendo casos degenerados en frecuencia y no-degenerados en frecuencia. Se mostró que es posible mediante esta técnica obtener fuentes de ternas de fotones centradas en frecuencias esencialmente arbitrarias, siempre y cuando se pueda obtener el radio del núcleo de la fibra que permita el empatamiento de fases para cada caso. Se mostró que para bombeos con frecuencias altas (en el ultra-violeta), la no-linealidad de tercer orden del medio obtiene valores comparativamente elevados.

Se presentaron dos diseños específicos de fuentes de ternas de fotones por el proceso de TOSPDC. Específicamente se utilizaron frecuencias de bombeo compatibles con las fibras ópticas de silicio, de tal manera que puedan ser implementadas experimentalmente. En primer lugar, se diseñó una fuente de ternas de fotones degenerados en

frecuencia, en la que el haz de bombeo está centrado en $\omega_{p0} = 2\pi c/0.532 \mu\text{m}$, y por lo tanto los tres fotones están centrados en $\omega_0 = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$; la segunda, es una fuente de ternas de fotones no-degeneradas en frecuencia, con el bombeo centrado en $\omega_{p0} = 2\pi c/0.531 \mu\text{m}$ y los fotones en $\omega_{r0} = 2\pi c/1.529 \mu\text{m}$, $\omega_{s0} = 2\pi c/1.659 \mu\text{m}$ y $\omega_{i0} = 2\pi c/1.596 \mu\text{m}$.

Mostramos también un análisis del flujo de ternas de fotones emitido para los dos diseños propuestos (degenerado y no-degenerado en frecuencia). Se mostraron expresiones en forma integral, y que solamente pueden ser resueltas por métodos numéricos. Se obtuvieron también expresiones analíticas cerradas, válidas bajo ciertas aproximaciones, y se pudo ver que estas son válidas para el caso de TOSPDC no-degenerado en frecuencia, mientras que no son válidas para TOSPDC degenerado en frecuencia.. Estas expresiones analíticas permitieron analizar la dependencia del flujo emitido con parámetros experimentales claves, tales como la longitud de la fibra, la potencia y la duración de los pulsos de bombeo, obteniendo lo siguiente:

- La eficiencia de conversión de TOSPDC es constante con respecto al ancho de banda de bombeo σ , de forma similar que para el SPDC en cristales no-lineales de segundo orden; lo cual implica que una configuración de bombeo pulsado no representa una ventaja sobre una configuración de bombeo monocromático.
- La eficiencia de conversión de TOSPDC es independiente de la potencia de bombeo (excepto por la dependencia existente con la potencia de bombeo en el desempatamiento de fases, que puede ser ignorada para niveles considerados típicos de la potencia de bombeo). Este comportamiento es idéntico al observado para SPDC en cristales no-lineales de segundo orden.
- La eficiencia de conversión de TOSPDC presenta una dependencia lineal con la

longitud de la fibra L , de la misma manera que ocurre en SFWM en fibras ópticas.

Se mostraron gráficas del flujo emitido como una función de los tres parámetros experimentales: ancho de banda de bombeo, la potencia de bombeo y la longitud de la fibra óptica, basándonos en las evaluaciones numéricas de las expresiones completas, y comparándolas en los casos que esto es posible (no-degenerado en frecuencia) con las expresiones analíticas cerradas. Se encontró que una fuente de ternas de fotones no-degenerada en frecuencia con los parámetros que hemos elegido, resulta en una brillantez de $N = 0.34$ ternas/s, mientras que para una fuente degenerada en frecuencia se obtiene una brillantez de $N = 3.80$ ternas/s; considerando en ambos casos una longitud de fibra de $L = 10$ cm, y una potencia promedio del haz de bombeo de 200 mW. A pesar de que el número de ternas de fotones obtenidos es mayor para el caso degenerado, es importante recalcar que dado que las frecuencias centrales de los tres fotones en el caso degenerado son iguales, experimentalmente las ternas de fotones únicamente se pueden separar de manera no-determinista, por lo que en realidad la brillantez de la fuente en la práctica puede ser considerablemente menor de acuerdo a los resultados de trabajo. Los valores aquí encontrados son comparables con experimentos recientes de generación de ternas de fotones por SPDC en cascada (Hubel *et al.*, 2010), pero que con futuros avances en la tecnología de fabricación de fibras con no-linealidades muy altas puede favorecer los resultados obtenidos en nuestra técnica.

Se presentó un estudio preliminar de las condiciones de velocidad de grupo de cada uno de los campos involucrados, para conocer las condiciones necesarias para obtener características espectrales específicas entre los tres fotones generados en el proceso de TOSPDC. De manera particular, se analizó el caso de una pareja de fotones anunciada, de la forma $F(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = G(\omega_r, \omega_s)H(\omega_i)$ (factorizando uno de los fotones), en la

que la detección de uno de los fotones anuncia la presencia de una pareja de fotones enredada. En este sentido se encontraron tres configuraciones posibles para obtener este estado: i) empatamiento simétrico de velocidades de grupo, ii) empatamiento asimétrico de velocidades de grupo de tipo-1, y iii) empatamiento asimétrico de velocidades de grupo de tipo-2.

Referencias

- Agrawal, G. P. (2007). *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, New York, cuarta edición. 521 pp.
- Ali-Khan, I., Broadbent, C. J., y Howell, J. C. (2007). Large-alphabet QKD using energy-time entangled bipartite states. *Phys. Rev. Lett.*, **98**: 060503.
- Artiglia, M., Coppa, G., Di Vita, P., Potenza, M., y Sharma, A. (1989). Mode field diameter measurements in single-mode optical fibers. *J. Lightwave Tech.*, **7**: 1139–1152.
- Banaszek, K. y Knight, P. L. (1997). Quantum interference in three-photon down-conversion. *Phys. Rev. A*, **55**: 2368–2375.
- Barreiro, J. T., Langford, N. K., Peters, N. A., y Kwiat, P. G. (2005). Generation of hyperentangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **95**: 2605011–2605014.
- Barz, S., Cronenber, G. and Zeilinger, A., y Walther, P. (2010). Heralded generation of entangled photon pairs. *Nature Photon.*, **4**: 553–556.
- Bencheikh, K., Gravier, F., Douady, J., Levenson, A., y Boulanger, B. (2007). Triple photons: a challenge in nonlinear and quantum optics. *C. R. Physique*, **8**: 206–220.
- Birks, T. A., Knight, J. C., y Russel, P. S. J. (1997). Endlessly single-mode photonics crystal fiber. *Opt. Lett.*, **22**: 961–963.
- Born, M. y Wolf, E. (1999). *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, Cambridge, séptima edición. 952 pp.
- Bouwmeester, D., J.-W., P., Daniell, M., Weinfurter, H., y Zeilinger, A. (1999). Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(7): 1345–1349.
- Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear Optics*. Academic Press, New York, segunda edición. 571 pp.
- Brambilla, G. (2010). Optical fibre nanowires and microwires: a review. *J. Opt.*, **12**: 043001–0430019.
- Chekhova, M. V., Ivanova, O. A., Berardi, V., y Garuccio, A. (2005). Spectral properties of three-photon entangled states generated via three-photon parametric down-conversion in a $\chi^{(3)}$ medium. *Phys. Rev. A*, **72**(0238181-0138188).

- Cohen, O., Lundeen, J. S., Smith, B. J., Puentes, G., Mosley, P. J., y Walmsley, I. A. (2009). Tailored photon-pair generation in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, **102**: 1236031–1236034.
- Corona, M. y U'Ren, A. B. (2007). Parametric down-conversion with optimized spectral properties in nonlinear photonic crystals. *Phys. Rev. A*, **76**: 0438291–04382910.
- Corona, M., Garay-Palmett, K., y U'Ren, A. (2011a). Third-order spontaneous parametric downconversion in thin optical fibers as a photon-triplet source. *Phys. Rev. A*, **84**: 033823–033836.
- Corona, M., Garay-Palmett, K., y U'Ren, A. B. (2011b). Experimental proposal for the generation of entangled photon triplets by third-order spontaneous parametric downconversion in optical fibers. *Opt. Lett.*, **36**(2): 190–192.
- Douady, J. y Boulanger, B. (2004). Experimental demonstration of a pure third-order optical parametric downconversion process. *Opt. Lett.*, **29**(23): 2794–2796.
- Fan, J. y Migdal, A. (2005). Generation of cross-polarized photon pairs in a microstructure fiber with frequency-conjugate laser pump pulses. *Opt. Express*, **13**: 5777–5782.
- Fan, J., Dogariu, A., y Wang, L. J. (2005). Generation of correlated photon pairs in a microstructure fiber. *Opt. Lett.*, **30**: 1530–1532.
- Felbinger, T., Schiller, S., y Mlynek, J. (1998). Oscillation and generation of nonclassical states in three-photon down-conversion. *Phys. Rev. Lett.*, **80**(3): 492–495.
- Feve, J. P., Boulanger, B., y Douady, J. (2002). Specific properties of cubic optical parametric interactions compared to quadratic interactions. *Phys. Rev. A*, **66**: 0638171–06381711.
- Fiorentino, M., Voss, P. L., Sharping, J. E., y Lumar, P. (2002). All-fiber photon-pair source for quantum communications. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, **194**: 983–985.
- Foster, M. A., Moll, K. D., y Gaeta, A. L. (2004). Optimal waveguide dimensions for nonlinear interactions. *Opt. Express*, **12**: 2880–2887.
- Fulconis, J., Alibart, O. Wadsworth, W. J., Russell, P. S. J., y Rarity, J. G. (2005). High brightness single mode source of correlated photon pairs using a photonic crystal fiber. *Opt. Express*, **13**: 7572–7582.
- Garay-Palmett, K., McGuinness, H. J., Cohen, O., Lundeen, J. S., Rangle-Rojo, R., U'Ren, A. B., Raymer, M. G., McKinstrie, C. J., Radic, S., y Walmsley, I. A. (2007). Photon pair-state preparation with tailored spectral properties by spontaneous four-wave mixing in photonic-crystal fiber. *Opt. Express*, **15**: 14870–14886.
- Garay-Palmett, K., Corona, M., y U'Ren, A. (2011). Spontaneous parametric processes in optical fibers: a comparison. *Rev. Mex. de Fís.*, **57**(3): 6–14.

- Giovannetti, V., Lloyd, S., y Maccone, L. (2001). Quantum-enhanced positioning and clock synchronization. *Nature*, **412**: 417–419.
- Greenberger, D. M., Horne, M. A., Shimony, A., y Zeilinger, A. (1990). Bell's theorem without inequalities. *Am. Jour. of Phys.*, **58**(12): 1131–1143.
- Grice, W. y Walmsley, I. A. (1997). Spectral information and distinguishability in type-II down-conversion with a broadband pump. *Phys. Rev. A*, **56**(2): 1627–1634.
- Grice, W., U'Ren, A. B., y Walmsley, I. A. (2001). Eliminating frequency and space-time correlation in multiphoton states. *Phys. Rev. A*, **64**: 0638151–0638157.
- Grubsky, V. y Feinberg, J. (2007). Phase-matched third-harmonic UV generation using low-order modes in a glass micro-fiber. *Opt. Comm.*, **274**: 447–450.
- Grubsky, V. y Savchenko, A. (2005). Glass micro-fibers for efficient third harmonic generation. *Opt. Express*, **13**(18): 6798–6806.
- Halder, M., Fulconis, J., Cerny, B., Clark, A., Xiong, C., Wardsworth, W. J., y Rarity, J. G. (2009). Nonclassical 2-photon interference with separate intrinsically narrow-band fibre sources. *Opt. Express*, **17**: 4670–4676.
- Hnilo, A. A. (2005). Three-photon frequency down-conversion as an event-ready source on entangled states. *Phys. Rev. A*, **71**: 0338201–0338209.
- Hubel, H., Hamel, D. R., Fedrizzi, A., Ramelow, S., Resch, K. J., y Jennewein, T. (2010). Direct generation of photon triplets using cascaded photon-pair sources. *Nature*, **466**: 601–603.
- Keller, T. y Rubin, M. H. (1997). Theory of two-photon entanglement for spontaneous parametric down-conversion driven by a narrow pump pulse. *Phys. Rev. A*, **56**: 1534–1541.
- Keller, T. E., Rubi, M. H., y Shih, Y. (1998). Theory of the three-photon entangled state. *Phys. Rev. A*, **57**: 2076–2079.
- Kim, Y. H. y Grice, W. (2005). Measurement of the spectral properties of the two-photon state generated via type II spontaneous parametric downconversion. *Opt. Lett.*, **30**: 08908–08910.
- Knight, J. C. (2003). Photonic crystal fibers. *Nature*, **424**: 847–851.
- Knill, E. y Laflamme, R. and Milburn, G. J. (2001). A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, **409**: 46–52.
- Koning, F. y Wong, F. N. C. (2004). Extended phase matching of second-harmonic generation in periodically poled KTiOPO4 with zero group-velocity mismatch. *Phys. Rev. Lett.*, **84**: 16441–16443.

- Kruhlak, R. J., Wong, G. K., Chen, J. S., Murdoch, S. G., Leonhardt, R., Harvey, J. D., Joly, N. Y., y Knight, J. (2006). Polarization modulation instability in photonic crystal fibers. *Opt. Lett.*, **31**: 1379–1381.
- Kuzucu, O., Fiorentino, M., Albota, M. A., Wong, F. N. C., y Kartner, F. X. (2005). Two-photon coincident-frequency entanglement via extended phase matching. *Phys. Rev. Lett.*, **94**: 0836011–0836014.
- Kwiat, P. G., Mattle, L., Weinfurter, H., Zeilinger, A., Sergienko, A., y Shih, Y. (1995). New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **75**: 4337–4341.
- Leon-Saval, S., Birks, T., Wadsworth, W., Russel, P. S. J., y Mason, M. (2004). Supercontinuum generation in submicron fibre waveguides. *Opt. Express*, **12**: 2864–2869.
- Loudon, R. (2000). *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, Oxford, tercera edición. 438 pp.
- Mair, A., Vaziri, A., Weihs, G., y Zeilinger, A. (2001). Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, **412**: 313–316.
- Mandel, L. y Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, primera edición. 1159 pp.
- Marcikic, I., de Riedmatten, H., Tittel, W., Scarani, V., Zbinden, H., y Gisin, N. (1999). Time-bin entangled qubits for quantum communication created by femtosecond pulses. *Phys. Rev. A*, **66**: 0623081–0623086.
- Molotkov, S. N. (1998). Experimental scheme for quantum teleportation of a one-photon packet. *JETP Lett.*, **68**: 263–270.
- Molotkov, S. N. y Nazin, S. S. (1999). Teleportation of a continuous variable. *JETP Lett.*, **89**: 413–420.
- Persson, J., Aichele, T., Zwiller, V., Samuelson, L., y Benson, O. (2004). Three-photon cascade from single self-assembled InP quantum dots. *Phys. Rev. B*, **69**: 2333141–2333144.
- Pittman, T. B., Jacobs, B. C., y Franson, J. D. (2005). Heralding single photons from pulsed parametric downconversion. *Opt. Comm.*, **246**: 545–550.
- Radunsky, A. S., Kosik Williams, E. M., y A., W. I. (2006). Simplified spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction by using a thick nonlinear crystal. *Opt. Lett.*, **31**(7): 1008–1010.
- Ralph, T. C., White, A. G., Munro, W. J., y Milburn, G. J. (2001). Simple scheme for efficient linear optics quantum gates. *Phys. Rev. A*, **65**: 0123141–0123146.

- Rarity, J. G. y Tapster, P. R. (1999). Three-particle entanglement from entangled photon pairs and a weak coherent state. *Phys. Rev. A*, **59**: 35–38.
- Ravi Kanth Kumar, V. V., George, A. K., Knight, J. C., y Russell, P. S. J. (2003). Tellurite photonic crystal fiber. *Opt. Express*, **11**: 2641–2645.
- Rubin, M. H., Klyshko, D. N., Shih, Y. H., y Sergienlo, A. V. (1994). Theory of two-photon entanglement in type-ii optical parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **50**(6): 5122–5133.
- Saleh, B. E. A. y Teich, M. C. (1991). *Fundamentals of Photonics*. John Wiley and Sons, Inc., USA, segunda edición. 1177 pp.
- Schwindt, P. D. D., Kwiat, P. G., y Englert, B. G. (1999). Quantitative wave-particle duality and non-erasing quantum erasure. *Phys. Rev. A*, **60**(6): 4285–4290.
- Sliwa, C. y Banaszek, K. (2003). Conditional preparation of maximal polarization entanglement. *Phys. Rev. A*, **67**: 0301011–0301014.
- Snitzer, E. (1961). Cylindrical dielectric waveguide modes. *J. Opt. Soc. Am.*, **51**: 491–498.
- Tong, L., Gattas, R. G., Ashcom, J. A., He, S., Lou, J., Shen, M., Maxwell, I., y Mazur, E. (2003). Subwavelength-diameter silica wires for low-loss optical wave guiding. *Nature*, **426**: 816–819.
- U'Ren, A. B., Banaszek, K., y Walmsley, I. A. (2003). Photon engineering for quantum information processing. *Quant. Inf. and Comp.*, **3**: 408–431.
- U'Ren, A. B., Silberhorn, C., Banaszek, K., y Walmsley, A. (2004). Efficient conditional preparation of high-fidelity single photons states for fiber-optic quantum networks. *Phys. Rev. Lett.*, **93**: 0936011–0936014.
- U'Ren, A. B., Erdmann, R., y Walmsley, I. A. (2005a). Synthesis of time-bin entangled states via tailored group velocity matching. *Jour. of Mod. Opt.*, **52**: 2197–2205.
- U'Ren, A. B., Silberhorn, C., Banaszek, K., Walmsley, I. A., Erdmann, R., Grice, W. P., y Raymer, M. G. (2005b). Generation of pure-state single-photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion. *Laser Physics*, **15**: 1461–1469.
- U'Ren, A. B., Erdmann, R. K., de la Cruz-Gutierrez, M., y Walmsley, I. A. (2006). Generation of two-photon states with an arbitrary degree of entanglement via nonlinear crystal super lattices. *Phys. Rev. Lett.*, **97**: 2236021–2236024.
- U'Ren, A. B., Jerónimo-Moreno, Y., y García-Gracia, J. H. (2007). Generation of Fourier-transform-limited heralded single photons. *Phys. Rev. A*, **75**: 0238101–0238109.

- Wagenknecht, C., Li, C. M., Reingruber, A., Bao, X. H., Goebel, A., Chen, Y. A., Zhang, Q., Chen, K., y Pan, J. W. (2010). Experimental demonstration of a heralded entanglement source. *Nature Photon.*, **4**: 549–552.
- Wardsworth, W. J., Ortigosa-Blanch, A., Knight, J. C., Birks, T. A., Martin Man, T. P., y Russell, P. S. J. (2002). Supercontinuum generation in photonic crystal fibers and optical fiber tapers: a novel light source. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**: 2148–2155.
- Yariv, A. y Yeh, P. (2007). *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford University Press, New York, Oxford, sexta edición. 836 pp.
- Yeom, D.-I., Magi, E. C., Lamont, M. R. E., Roelens, M. A. F., Fu, L., y Eggleton, B. J. (2008). Low-threshold supercontinuum generation in highly nonlinear chalcogenide nanowires. *Opt. Lett.*, **33**: 660–662.

Apéndice A

Cálculo de la energía por pulso de bombeo

Dado que la energía electromagnética está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V dV (u_e + u_m), \quad (101)$$

donde $u_{e,m}$ representan las densidades eléctrica y magnética respectivamente, y V es el volumen de interacción del medio. Sabemos que la densidad eléctrica es $u_e = \vec{E} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}$. Recordando que el campo eléctrico de bombeo se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} [E(\vec{r}, t) + E^*(\vec{r}, t)], \quad (102)$$

donde $E(\vec{r}, t) = A_0 A_p(x, y) \int d\omega \alpha(\omega) e^{-i[\omega t - k(\omega)z]}$, con A_0 la amplitud, $A_p(x, y)$ la distribución transversal y $\alpha(\omega)$ es la envolvente espectral del campo de bombeo. Las funciones $A_p(x, y)$ y $\alpha(\omega)$ están normalizadas de tal manera que el campo $E(\vec{r}, t)$ tenga unidades de $[V/m]$. Entonces, se puede ver que:

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} [E^2(\vec{r}, t) + 2E(\vec{r}, t)E^*(\vec{r}, t) + E^{*2}(\vec{r}, t)]. \quad (103)$$

Para proceder con nuestro análisis calculamos el promedio temporal de $\vec{E} \cdot \vec{E}$ en un ciclo óptico $T = 2\pi/\omega_0$, es decir, en un tiempo igual al promedio de oscilación láser, entonces:

$$\langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle_T = \frac{1}{4} \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle_T + \frac{1}{2} \langle E(\vec{r}, t)E^*(\vec{r}, t) \rangle_T + \frac{1}{4} \langle E^{*2}(\vec{r}, t) \rangle_T. \quad (104)$$

El promedio temporal de una función se obtiene haciendo la integral de tiempo sobre ésta, así:

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (105)$$

donde T es un intervalo de tiempo de promediación. De esta forma, se tiene que la energía es:

$$U = \epsilon_0 n^2 \int_V dV \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle_T, \quad (106)$$

en donde hemos utilizado la relación $u_e = u_m$.

Ahora, reescribiendo al campo electromagnético de tal manera que se pueda separar la parte que varía rápido en el tiempo de la que muestra una dependencia lenta de la siguiente forma:

$$E(\vec{r}, t) = A_0 A_p(x, y) A(z, t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (107)$$

en donde:

$$A(z, t) = \int d\omega \alpha(\omega) e^{ik(\omega)z} e^{-i(\omega - \omega_0)t},$$

con ω_0 siendo la frecuencia central del pulso.

Cuando se tienen frecuencias ópticas, $e^{-i\omega_0 t}$ representa una oscilación con una frecuencia muy alta, por lo tanto es una variación rápida en el tiempo. Si el pulso tiene un ancho de banda pequeño comparado con la frecuencia central $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, esto es $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, entonces $e^{-i(\omega - \omega_0)t}$ representa una oscilación de frecuencia baja, por lo tanto $A(z, t)$ es una función de variación lenta en el tiempo. Lo anterior lleva a que la

función $A(z, t)$ es despreciable cuando se considera un solo ciclo óptico, y entonces el promedio temporal debe tomarse solamente sobre la componente de variación rápida.

Entonces, regresando al promedio temporal, se tiene que para el primer y tercer término:

$$\begin{aligned} E^2(\vec{r}, t) &= A_0^2 A_p^2(x, y) A^2(z, t) e^{-i2\omega_0 t}, \\ E^{*2}(\vec{r}, t) &= A_0^2 A_p^{*2}(x, y) A^{*2}(z, t) e^{i2\omega_0 t}, \end{aligned}$$

y el promedio temporal:

$$\begin{aligned} \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle_T &= A_0^2 A_p^2(x, y) A^2(z, t) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\omega_0 t} dt, \\ &= A_0^2 A_p^2(x, y) A^2(z, t) \frac{\sin(T\omega_0)}{T\omega_0}, \end{aligned}$$

y como $T = 2\pi/\omega_0$, entonces $\sin(2\pi)/2\pi = 0$ y $\langle E^2(\vec{r}, t) \rangle_T = 0$. Con lo anterior se demuestra de manera directa que también $\langle E^{*2}(\vec{r}, t) \rangle_T = 0$.

Ahora bien, para el segundo término:

$$E^2(\vec{r}, t) \cdot E^{*2}(\vec{r}, t) = A_0^2 |A_p(x, y)|^2 |A(z, t)|^2, \quad (108)$$

y haciendo el promedio temporal:

$$\begin{aligned} \langle E^2(\vec{r}, t) \cdot E^{*2}(\vec{r}, t) \rangle_T &= A_0^2 |A_p(x, y)|^2 |A(z, t)|^2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt, \\ &= A_0^2 |A_p(x, y)|^2 |A(z, t)|^2, \end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene que la energía es:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 n^2 \int dx \int dy A_0^2 |A_p(x, y)|^2 \int dz |A(z, t)|^2. \quad (109)$$

Si v_g es la velocidad de grupo a la que se propaga el pulso, y siendo z la distancia que el pulso recorre en un tiempo $t = z/v_g$, se tiene entonces que $dt = dz/v_g$ y por lo tanto $dz = v_g dt$, de esta forma la energía queda así:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 n^2 \int dx \int dy A_0^2 |A_p(x, y)|^2 \int dt |A(z, t)|^2 v_g,$$

reordenando:

$$U = \int dt \left\{ \frac{1}{2}\epsilon_0 n^2 \int dx \int dy A_0^2 |A_p(x, y)|^2 |A(z, t)|^2 v_g \right\}, \quad (110)$$

y como la energía se puede escribir como $U = \int dt P(t)$, siendo $P(t)$ la potencia instantánea, se puede entonces decir que para cada tiempo t dentro de la envolvente temporal del pulso en cada posición z del medio, la potencia instantánea del pulso de bombeo está dada por:

$$P(z, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 n^2 \int dx \int dy A_0^2 |A_p(x, y)|^2 |A(z, t)|^2 v_g. \quad (111)$$

En la entrada de la fibra el pulso se encuentra en $z = 0$ y su velocidad de grupo es $v_g = c/n$, y por lo tanto:

$$P(z = 0, t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c n \int dx \int dy A_0^2 |A_p(x, y)|^2 |A(0, t)|^2, \quad (112)$$

donde:

$$|A(0, t)|^2 = \int d\omega \int d\omega' \alpha(\omega) \alpha^*(\omega') e^{-i(\omega - \omega')t}. \quad (113)$$

De esta forma, la potencia instantánea para el pulso incidente está dada por:

$$P(t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 cn \int dx \int dy A_0^2 |A_p(x, y)|^2 \int d\omega \int d\omega' \alpha(\omega) \alpha^*(\omega') e^{-i(\omega - \omega')t}. \quad (114)$$

Cuando $t = 0$, se tiene el máximo de $P(t)$, de tal forma que esta será la potencia pico:

$$P = \frac{1}{2}\epsilon_0 cn \int dx \int dy A_0^2 |A_p(x, y)|^2 \int d\omega \int d\omega' \alpha(\omega) \alpha^*(\omega'). \quad (115)$$

La constante de amplitud A_0 estará dada por:

$$A_0^2 = \frac{2P}{\epsilon_0 cn \int dx \int dy |A_p(x, y)|^2 \int d\omega \int d\omega' \alpha(\omega) \alpha^*(\omega')}. \quad (116)$$

Apéndice B

Aproximación lineal del empatamiento de fases

Para poder realizar una aproximación lineal del empatamiento de fases, es necesario realizar una expansión en series de potencias del empatamiento de fases alrededor de las frecuencias centrales para cada frecuencia, de tal manera que:

$$k_\mu(\omega_\mu) \approx k_\mu(\omega_{\mu 0}) + k_\mu^{(1)}(\omega_{\mu 0})(\omega_\mu - \omega_{\mu 0}) + k_\mu^{(2)}(\omega_{\mu 0})(\omega_\mu - \omega_{\mu 0})^2 + k_\mu^{(3)}(\omega_{\mu 0})(\omega_\mu - \omega_{\mu 0})^3 + O^4(\omega_\mu), \quad (117)$$

en donde:

$$k_\mu^{(m)}(\omega_{\mu 0}) = \frac{1}{m!} \frac{d^m k_\mu(\omega_\mu)}{d\omega_\mu^m} \Big|_{\omega_\mu = \omega_{\mu 0}}, \quad (118)$$

es la m-ésima derivada de k_μ evaluada en las frecuencias centrales $\omega_{\mu 0}$, con $\mu = r, s, i$ y $O^4(\omega_\mu)$ involucra a todos los términos de cuarto orden o más. Ahora, definimos las “desintonizaciones”, de la siguiente manera:

$$\nu_\mu = \omega_\mu - \omega_{\mu 0}. \quad (119)$$

Recordando que la amplitud espectral conjunta está compuesta por la multiplicación de las funciones de empatamiento de fases y la función envolvente espectral de bombeo $F(\omega_r, \omega_s, \omega_i) = \phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i)\alpha(\omega_r + \omega_s + \omega_i)$, dadas por:

$$\begin{aligned}\phi(\omega_r, \omega_s, \omega_i) &= \text{sinc} \left[\frac{L}{2} \Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i) \right], \\ \alpha(\omega_p) &= \exp \left[-\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma^2} \right],\end{aligned}$$

en donde $\omega_p = \omega_r + \omega_s + \omega_i$ por conservación de energía y $\omega_{p0} = \omega_{r0} + \omega_{s0} + \omega_{i0}$ es la frecuencia central de bombeo, y por lo tanto se tiene que $\nu_p = \nu_r + \nu_s + \nu_i$. Podemos ver que la función de empataamiento de fases depende del desempataamiento de fases $\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i)$ dado por la ecuación 15. En este caso, como se comentó en el desarrollo del trabajo no se tomarán en cuenta las fases no-lineales, ya que son despreciables para niveles de potencia de bombeo considerados como típicos. Por simplicidad es conveniente obtener el producto $L\Delta k$, por lo que se definen las variables:

$$\tau_\mu^{(m)} = L(k_{p0}^{(m)} - k_{\mu0}^{(m)}), \quad (120)$$

$$\tau_p^{(m)} = Lk_{p0}^{(m)}, \quad (121)$$

donde m representa el orden de derivada con respecto a la frecuencia y $\mu = r, s, i$, entonces:

$$\Delta k^{(0)} = k_{p0} - k_{r0} - k_{s0} - k_{i0}, \quad (122)$$

y

$$\tau_\mu^{(1)} = L(k_{p0} - k_{\mu0}) = \tau_\mu, \quad (123)$$

y por lo tanto, a primer orden, el producto $L\Delta k$ se puede escribir como:

$$L\Delta k(\omega_r, \omega_s, \omega_i) \approx L\Delta k^{(0)} + \tau_r \nu_r + \tau_s \nu_s + \tau_i \nu_i. \quad (124)$$