

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Maestría en Ciencias  
en Oceanografía Física**

---

**Estudio sobre la estabilidad de estructuras multipolares sobre  
el plano gamma**

Tesis  
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Homar Verdugo Ortega**

Ensenada, Baja California, México  
2019

Tesis defendida por  
**Homar Verdugo Ortega**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes**  
Director de tesis

**Dr. José Luis Ochoa de la Torre**

**Dr. Julio Sheinbaum Pardo**

**Dr. Pedro Gilberto Lopez Mariscal**



---

**Dr. José Gómez Valdez**  
Coordinador del Posgrado en Oceanografía Física

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**  
Directora de Estudios de Posgrado

*Homar Verdugo Ortega © 2019*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis.*

Resumen de la tesis que presenta **Homar Verdugo Ortega** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física.

### Estudio de la estabilidad de estructuras multipolares en el plano gamma.

Resumen aprobado por:

---

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes  
**Director de tesis**

Estudiamos numéricamente la estabilidad de las soluciones estacionarias del problema de  $N+1$  vórtices puntuales:  $N$  remolinos iguales en los vértices de un polígono regular, más uno en el centro. Dentro de este problema, utilizamos un enfoque de sistemas dinámicos para abordar en detalle el sistema 3+1 con circulación neta igual a cero. La estabilidad y la advección generada por este sistema fue estudiada sobre un plano fijo y sobre el plano  $\gamma$  (un plano en el que la variación del parámetro de Coriolis  $f$  con la latitud es de forma cuadrática). Algunos sistemas de  $N+1$  vórtices han sido observados recientemente en flujos geofísicos de gran escala, por ejemplo: en los huracanes Rita e Isabel. Además, cerca de los polos se han observado sistemas mucho más complejos y longevos, por ejemplo: en el polo norte de Saturno y en ambos polos de Júpiter. Este reciente hallazgo despierta un interés por estudiar este problema sobre el plano  $\gamma$ . Utilizamos un modelo de vórtices puntuales para simular la dinámica de estos sistemas. Inicialmente cada vórtice puntual con circulación  $\Gamma$  ocupa un vértice de un polígono regular de  $N$  lados, junto con un vórtice central con circulación  $\Gamma_0$ . Estudiamos la estabilidad de los sistemas en función de su geometría y de las variables adimensionales  $N$  y  $\Gamma_0/\Gamma$ , para  $N \leq 10$  y  $|\Gamma_0/\Gamma| \leq 100$ . Obtuvimos valores críticos de  $\Gamma_0/\Gamma$  para los cuales los arreglos pierden su geometría inicial; Los “rangos” estables para  $N \geq 4$  coinciden con lo reportado por otros autores. Para  $N \leq 6$  existen soluciones estables cuando el vórtice central y los satélites son de signo opuesto  $\Gamma_0/\Gamma < 0$ , arreglos más complejos son estables únicamente cuando todos los vórtices son del mismo signo. Para estudiar la evolución del sistema 3+1 utilizando el espacio de fase tridimensional de Aref & Stremler (1999). En el caso modulado (plano  $\gamma$ ), proyectamos las trayectorias del sistema sobre este espacio de fase. Al introducir  $\gamma$  se pierde la periodicidad en las soluciones, sin embargo para perturbaciones pequeñas la geometría de las trayectorias se asemeja a las órbitas cerradas del caso no modulado, lo cual nos indica que el sistema 3+1 sobre el plano  $\gamma$  es estable (cuando  $\Gamma_0$  y  $\gamma$  son del mismo signo). Para el estudio del transporte realizamos secciones de Poincaré utilizando partículas pasivas. En ambos casos (con y sin modulación) para cualquier valor de la perturbación  $\epsilon \neq 0$  se observa la presencia de trayectorias caóticas que conviven con zonas de estabilidad.

**Palabras clave:** Vortices puntuales, estabilidad, advección caótica, plano  $\gamma$

Abstract of the thesis presented by **Homar Verdugo Ortega** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Physical Oceanography

### On the stability of multipolar structures on the gamma plane

Abstract approved by:

---

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes  
Thesis Director

Numerically, we studied the stability of the  $N+1$  vortex problem stationary solutions:  $N$  vortices placed in the vertices of a regular polygon. We used a dynamical systems approach to study in detail the 3+1 vortex configuration with zero net circulation. We analyzed the evolution and the advection generated by this structure on a fixed plane and on the  $\gamma$  plane (a plane on which the variation of the Coriolis parameter  $f$  with latitude is quadratic). Recently, some  $N+1$  vortex systems have been observed in large scale geophysical flows, like the ones observed in hurricanes Rita and Isabel. Much larger and complex systems have been observed on both poles of Jupiter and on the north pole of Saturn, which awakens a special interest for studying these structures on the  $\gamma$  plane. We used a two-dimensional model to simulate the dynamics of the  $N+1$  vortex arrangements. Initially every vortex of strength  $\Gamma$  occupies the vertex of a  $N$  side regular polygon, altogether with a central vortex of strength  $\Gamma_0$ . Stability was studied using the dimensionless variables  $N, \Gamma_0/\Gamma$ , for  $N \leq 10$  &  $|\Gamma_0/\Gamma| \leq 100$ . We obtained the critical values of  $\Gamma_0/\Gamma$  for which each arrangement loses its geometry; the stability “ranges” obtained for  $N \geq 4$  agree with what has been reported by other authors. When the ring and central vortex circulations are of opposite sign  $\Gamma_0/\Gamma < 0$ , stable solutions only exist for  $N \leq 6$ . Configurations of higher  $N$  are stable only if all the vortices are of the same sign. To study the evolution of the 3+1 vortex problem we used the tri-dimensional phase space of Aref & Stremler (1999). For the modulated case ( $\gamma$  plane), we projected the trajectories described by the system over this phase space. As we incorporate  $\gamma$ , we lose the periodic solutions. Nevertheless for small values of the perturbation parameter  $\epsilon$  and  $\gamma$ , the geometry of the trajectories described resembles the closed orbits of the non-modulated case. This implies that a 3+1 point vortex configuration on the  $\gamma$  plane is stable (when  $\Gamma_0$  &  $\gamma$  are of the same sign). Poincare sections were made for the transport study using passive tracers. In both cases (modulated and non-modulated) and for every value of the perturbation parameter  $\epsilon \neq 0$ , the coexistence of chaotic trajectories and stability islands is observed.

**Keywords:** Point vortices, stability, chaotic advection,  $\gamma$  plane

## **Dedicatoria**

---

### **A mis padres..**

**Maria Ortega Castro, por su infinito amor y apoyo...**

**Jorge Ochoa Mérida, por nunca cansarse de recalcar me que:**

**“El estudio es lo más importante”.**

**A Nikki..**

**A mis hermanos y hermanas que, por ser tantos, no los puedo contar...**

**A mi gato Lucifer y mi perra Cuca.**

## Agradecimientos

---

Al centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada (CICESE) por permitirme continuar mis estudios y emprenderme en esta maravillosa experiencia.

Al CONACYT por que sin la beca otorgada habría sido prácticamente imposible continuar mis estudios.

Al Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes, por enseñarme que el mundo es más maravilloso de lo que se percibe a simple vista. No tengo suficiente espacio en esta tesis para terminar de agradecerle por eso.

A mis compañeros de estudio por brindarme tanto apoyo.

A mis amigos.

A mis mascotas.

A los remolinos.

## Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatorias.....	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	vii
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 El problema de los $N+1$ vórtices.....	3
1.2 Sistemas de $N+1$ observados en la naturaleza.....	4
1.3 Sistemas de $N+1$ observados en el laboratorio.....	4
1.4 Estabilidad del problema de $N+1$ vórtices.....	5
1.5 Plano $\gamma$ .....	6
1.6 El problema de $(3+1)$ vórtices.....	7
<b>Capítulo 2. Metodología</b>	<b>8</b>
2.1 Ecuaciones de movimiento de vórtices puntuales sobre el plano.....	8
2.2 Modelo numérico.....	8
2.2.1 Condiciones iniciales.....	8
2.3 Criterios de estabilidad para el problema de $N+1$ vórtices.....	9
2.4 El problema de $3+1$ vórtices puntuales.....	9
2.4.1 El espacio de fase de Aref & Stremler (1999) .....	9
2.4.2 Secciones de Poincaré.....	12
2.5 El problema de $3+1$ vórtices sobre el plano $\gamma$ .....	13
<b>Capítulo 3. Resultados</b>	<b>15</b>
3.1 Límites de estabilidad para el problema de $N+1$ vórtices.....	15
3.1.1 Configuraciones estables para $2 \leq N \leq 10$ .....	15
3.2 Estabilidad del sistema $(3+1)$ .....	17
3.2.1 Evolución de diferentes condiciones iniciales. ....	17
3.2.2 Advección generada por el sistema $(3+1)$ .....	22
3.3 Evolución del sistema $(3+1)$ sobre el plano- $\gamma$ .....	25
<b>Capítulo 4. Conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>Literatura citada</b> .....	<b>35</b>

## Lista de figuras

Figura		Página
1	Sistemas de $N+1$ vórtices observados en la naturaleza.....	2
2	Sistemas de $N+1$ vórtices observados en el laboratorio.....	5
3	Plano de ejes coordenados $(b_1, b_2, b_3)$ y retrato de fase del sistema estacionario de $(3+1)$ vórtices.....	12
4	Configuraciones estables para el problema de $N+1$ vórtices puntuales en función de las variables adimensionales $N, \frac{\Gamma_0}{\Gamma}$ .....	16
5	Espacio de fase para un sistema de $(3+1)$ con circulaciones relativas $\Gamma_1: \Gamma_2: \Gamma_3: \Gamma_4 = 1: 1: 1: (-3)$ . .....	18
6	Topología del flujo para diferentes condiciones iniciales de arreglos de $(3+1)$ vórtices.	20
7	Secciones de Poincaré para arreglos de $(3+1)$ vórtices puntuales.....	21
8	Trayectorias proyectadas sobre el espacio de fase de Aref & Stremler (1999) para valores de (a) $\gamma = 0.1$ , (b) $\gamma = 0.5$ .....	24
9	Trayectorias proyectadas sobre el espacio de fase de Aref & Stremler (1999) para valores de (a) $\gamma = 1.0$ , (b) $\gamma = 1.5$ .....	26
10	Trayectorias proyectadas sobre el espacio de fase de Aref & Stremler (1999) para valores de $\gamma = -0.1$ .....	28
11	Posiciones de partículas pasivas advectadas por diferentes arreglos de $(3+1)$ vórtices con circulación modulada (configuraciones estables).....	29
12	Posiciones de partículas pasivas advectadas por diferentes arreglos de $(3+1)$ vórtices con circulación modulada (configuraciones inestables).....	31



## Capítulo 1. Introducción

---

En la naturaleza podemos encontrar vórtices en todas partes y de cualquier tamaño. Pueden ser tan pequeños y efímeros que podemos generarlos o destruirlos inconscientemente con un respiro. También pueden ser tan grandes y longevos que podemos observarlos a millones de kilómetros de distancia y por cientos de años. A la fecha, han pasado más de 300 años desde que la mancha roja de Júpiter se observó por primera vez, así como seguro existirán otros vórtices descomunales que aun no hemos visto.

Ya que vivimos inmersos en un fluido los vórtices nos acompañan en nuestro día a día. Tomando en cuenta esto, no suena tan descabellado el que las teorías de René Descartes y Sir Thomson (Lord Kelvin) en las que planteaban un modelo de vórtices para explicar la formación del universo y la estructura del átomo (respectivamente) fueran aceptadas durante algún tiempo.

A la fecha sabemos que existe cierta analogía entre el movimiento descrito por un conjunto de vórtices y el movimiento de los cuerpos celestes (Cabral & Schmidt, 2000). Maxwell (1859), por ejemplo, utilizó esta analogía para explicar la formación de los anillos de Saturno. La diferencia principal entre ambos problemas consiste en que en las ecuaciones que se utilizan para la dinámica celeste no permiten valores negativos de masa. En las ecuaciones que describen el movimiento de un conjunto de vórtices el signo está relacionado con el sentido de giro.

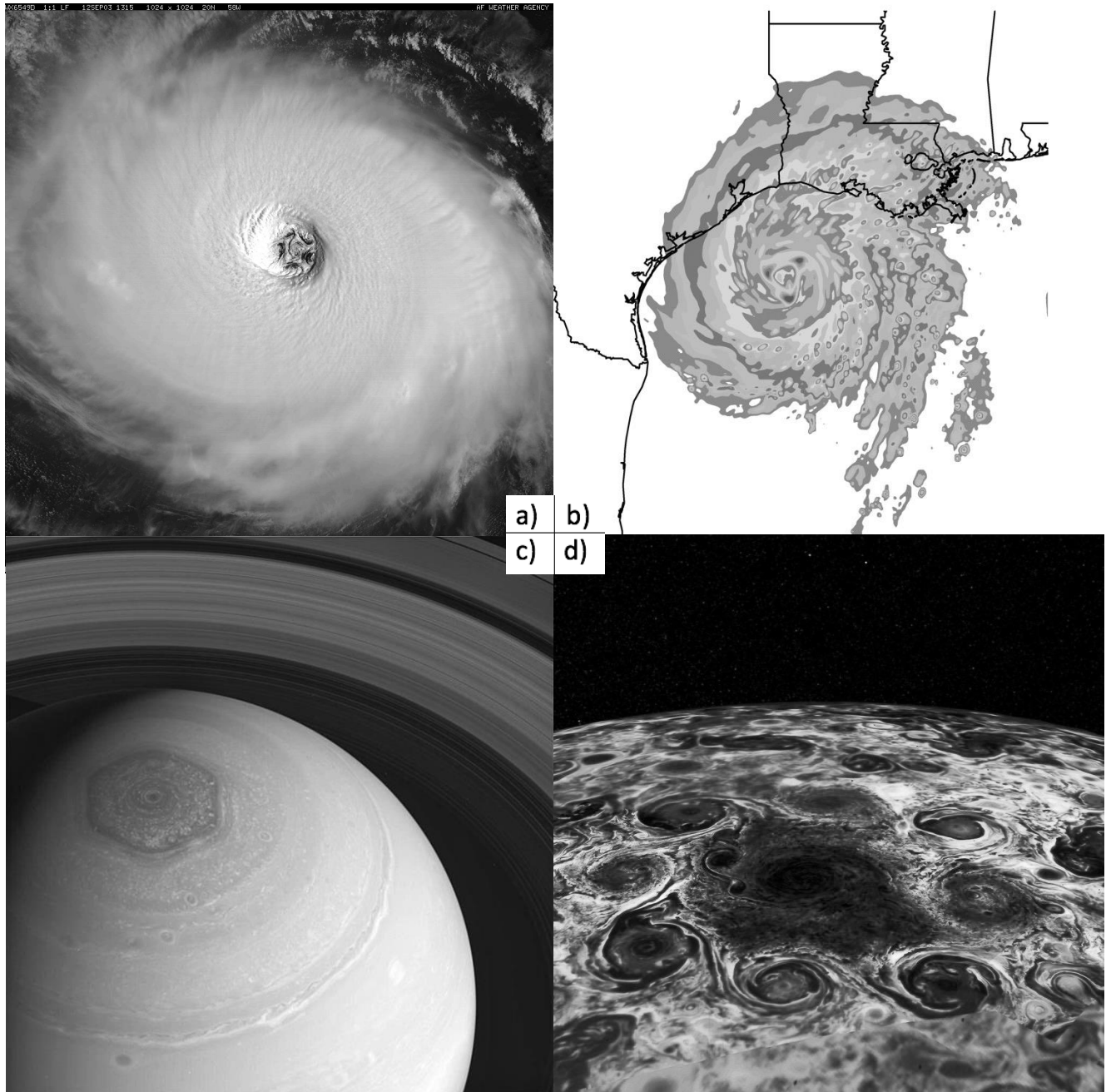


Figura 1. Sistemas de  $(N+1)$  vórtices observados en la naturaleza. Fotografía tomada del huracán Isabel en 2003 (a), huracán Rita en 2005 (b). En Rita el sistema de  $(3+1)$  se observó en la cantidad de “agua precipitable”. (c) Fotografía del polo Norte de Saturno tomada durante la misión Cassini. (d) Representación gráfica del polo Norte de Júpiter. Las imágenes de ambos huracanes fueron tomadas de: <http://www.atmos.albany.edu/>, la fotografía del hexágono de Saturno fue tomada de: [www.saturn.jpl.nasa.gov](http://www.saturn.jpl.nasa.gov), y la imagen del polo norte de Júpiter fue tomada de: <http://www.apod.nasa.gov/>

## 1.1 El problema de los $N+1$ vórtices

El primero en obtener las ecuaciones que describen la dinámica de un conjunto de vórtices puntuales fue Kirchhoff (1883). Justo después Thomson (1883) encontró soluciones estacionarias de estas ecuaciones y obtuvo los criterios de estabilidad para arreglos poligonales de  $N$  vórtices puntuales en sistemas con  $N < 8$  vórtices.

La configuración del problema es la siguiente:

Si se coloca un conjunto de  $N$  vórtices puntuales equidistantes sobre la circunferencia de un círculo unitario obtenemos el famoso “problema de los  $N$  vórtices”. Una gran cantidad de variaciones analíticas de este problema se pueden encontrar en el libro de Newton (2013) titulado “The  $N$  vortex problem”. Si a estos sistemas se les agrega un vórtice más en el centro del círculo obtenemos el problema conocido como el “problema de los  $N+1$  vórtices”.

Los sistemas de  $N$  y  $(N+1)$  son soluciones estacionarias de las ecuaciones de Kirchhoff (1883). Sobre un marco de referencia que se mueve junto con los vórtices, estos arreglos geométricos aparentan estar “fijos” en el espacio. Debido a la geometría de estos arreglos algunos autores se han referido a ellos como “cristales de vórtices” (Aref *et al.* 2002).

Los sistemas de  $N+1$  son rara vez observados. Suelen ser evasivos y turbulentos y se deshacen antes de que podamos percatarnos de su presencia. En la oceanografía y meteorología comúnmente se refiere a estos arreglos como sistemas multipolares. En la mecánica de fluidos un vórtice monopolar es aquel en el que fluido gira alrededor de un punto y la polaridad del vórtice hace referencia al sentido de la circulación. Un multipolo se define entonces como un sistema compuesto por varios vórtices monopolares. El dipolo, conformado por dos vórtices con circulación opuesta es un ejemplo sencillo. Es bastante conocido ya que podemos generar uno en nuestro café o en la tina del baño al desplazar un poco de agua. Al aumentar el número de vórtices se obtienen: tripolos, cuadrupolos, pentapolos, y así sucesivamente. Entre más vórtices conformen el sistema este se vuelve más inestable. A tal grado que hasta hace algunos años en la naturaleza nunca habían sido observados sistemas conformados por más de tres vórtices (Velasco Fuentes, 2003).

## 1.2 Sistemas de $N+1$ vórtices observados en la naturaleza

En los huracanes Isabel (en 2003) y Rita (en 2005) pudo apreciarse la formación de dos sistemas de  $(N+1)$  a medida que los huracanes se debilitaban. En Isabel (Fig. 1a) se observó la formación de un sistema de  $(5+1)$  y en Rita (Fig. 1b) se observó la de uno de  $(3+1)$ . Este último se generó cuando el huracán Rita entró al talud continental ([www.atmos.albany.edu](http://www.atmos.albany.edu)).

Un bonito ejemplo de un posible sistema de  $(N+1)$  que ha permanecido coherente por más de 30 años es el hexágono de Saturno (Fig. 1c). Esta estructura hexagonal ha representado un misterio para la comunidad científica desde la primera vez que fue apreciado en los 80's por los Voyager 1 y 2. Puede que sea el primer sistema multipolar observado en la naturaleza. El centro del vórtice se ubica prácticamente sobre el polo y los vértices se extienden hasta una latitud promedio de  $76^\circ$  N, siendo la distancia entre los vértices mayor al diámetro terrestre. A la fecha la dinámica y formación del hexágono no han sido completamente explicadas. Anteriormente se especulaba que la estructura hexagonal era resultado de una perturbación provocada por un anticiclón intenso, al cual nombraron: "the north polar spot". Sin embargo, 37 años después de ser observado por primera vez el hexágono permanece y no hay indicios del anticiclón mencionado (Sánchez-Lavega, *et al.* 2014).

Los sistemas más grandes de  $(N+1)$  observados en la naturaleza hasta la fecha (título que posiblemente conservarán por un largo periodo de tiempo), se encuentran en los polos de Júpiter (Adriani *et al.* 2018). En el polo norte de Júpiter se encuentra un sistema conformado por  $(8+1)$  vórtices (Fig. 1d). Este no solo es el más grande, además es el sistema más complejo de  $(N+1)$  vórtices observado hasta la fecha en la naturaleza. En el polo sur de Júpiter se encuentra un sistema de  $(5+1)$ . Ambos sistemas están constituidos por vórtices ciclónicos y en ambos el "anillo" de satélites se extiende hasta una latitud de  $80^\circ$  (norte y sur).

## 1.3 Sistemas de $N+1$ observados en el laboratorio

Desde de que Van Heijst & Kloosterziel (1989) observaron por primera vez la formación de una estructura tripolar  $(2+1)$  en el laboratorio, la formación y estabilidad de sistemas multipolares ha sido estudiada de forma teórica y experimental por medio de modelos de laboratorio y simulaciones numéricas. Entre los métodos utilizados está el desarrollo de inestabilidades en vórtices aislados. En el trabajo de Trieling y colaboradores (2010) se presentan fotografías de la formación de sistemas de  $(N+1)$

con  $N=2,\dots,5$  (Fig 2). En este trabajo mencionan que los sistemas observados en el laboratorio resultan inestables y que los arreglos se rompen generando sistemas multipolares menos complejos. En el trabajo de Aguiar y colaboradores (2010) se utilizó un método parecido para el hexágono de Saturno (Fig 2d). Ellos proponen que esta longeva estructura poligonal es producto de interacciones onda-onda generadas por el equilibrio no lineal de los jets zonales barotrópicamente inestables.

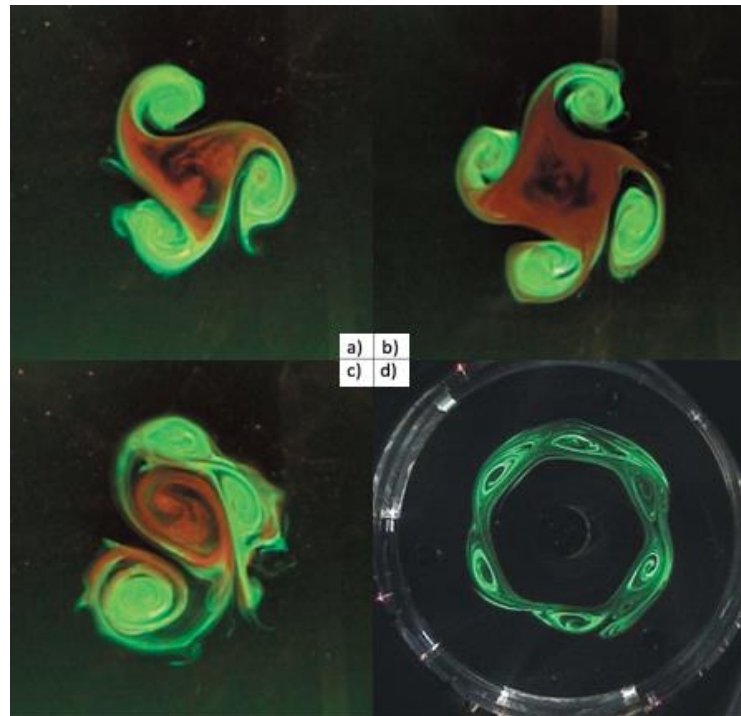


Figura 2. Sistemas de  $(N+1)$  observados en el laboratorio. Las fotografías de los sistemas de  $(3+1)$  y  $(4+1)$  que se muestran en los incisos a), c) y b) fueron tomadas de Triefling et al., (2010). La fotografía del sistema  $(6+1)$  que se muestra en el inciso d) fue tomada de Aguiar et al., (2010).

#### 1.4 Estabilidad del problema de $N+1$ vórtices

Todas las configuraciones de  $(N+1)$  vórtices son soluciones estacionarias de las ecuaciones de Kirchhoff (1883) pero la gran mayoría son inestables. Esto quiere decir que al perturbar el sistema este pierde su geometría. Cuando esto ocurre, el anillo de vórtices pierde su estructura poligonal rápidamente y el vórtice central abandona el origen. Si un arreglo es estable, al ser perturbado (ligeramente) los vórtices oscilan alrededor de su posición inicial de equilibrio.

Los resultados obtenidos por Morikawa & Swenson (1971) y los teoremas presentados por Cabral & Schmidt (2000) nos explican que los criterios de estabilidad para el problema de  $(N+1)$  vórtices dependen

únicamente de las variables adimensionales  $N$  (discreta) y  $(\Gamma_0/\Gamma)$  (continua), para  $N \geq 2$  y  $-\infty < (\Gamma_0/\Gamma)$  en donde esta última es la relación entre la circulación del vórtice central  $\Gamma_0$  y los satélites  $\Gamma$ . Uno de los objetivos de este trabajo es utilizar los teoremas de estabilidad a los que ellos llegaron para comparar con nuestros límites de estabilidad para  $N=2,\dots,10$ .

## 1.5 Plano gamma

Los sistemas de  $N+1$  vórtices observados en la naturaleza (Fig. 1) despiertan un interés por estudiar la dinámica de estos arreglos geométricos sobre un escenario un poco más realista (que un plano infinito), por ejemplo: una esfera en rotación. Por otra parte, los sistemas observados en Júpiter y Saturno (Fig. 1b & c) despiertan un interés particular por estudiar arreglos en los que el vórtice central se encuentra sobre el polo y los satélites forman un anillo latitudinal.

El parámetro de Coriolis  $f$  representa a la componente vertical de la vorticidad planetaria y se define como  $f=2\Omega\sin\phi$ , en donde  $\Omega$  es la velocidad angular de la Tierra y  $\phi$  la latitud. El gradiente de  $f$  es aproximado como una función lineal de la latitud en dirección meridional de la forma  $f=f_0+\beta y$  en donde  $f_0=2\Omega\sin\phi$ ,  $\beta=2\Omega\cos\phi R^{-1}$ , " $y$ " el desplazamiento meridional y  $R$  es el radio Terrestre. A medida que nos acercamos a latitudes altas el valor de  $\beta$  disminuye hasta llegar a cero en el polo. Sobre este escenario el segundo término de la expansión de Taylor aplicada a  $f$  domina y obtenemos una aproximación para el parámetro de Coriolis conocida como plano- $\gamma$ , en donde  $f=f_0-\gamma r^2$ ,  $\gamma=\Omega^2/R^2$  y  $r=\sqrt{x^2+y^2}$  representa la distancia al polo. De modo que las líneas de igual vorticidad planetaria ( $f=cte$ ) son círculos con centro en el polo y su variación es de forma cuadrática.

La ecuación de conservación de vorticidad potencial la cual describe el cambio en la vorticidad relativa que experimenta un tubo de vorticidad al desplazarse meridionalmente toma la forma:

$$\frac{D}{Dt}(\omega - \gamma r^2) = 0. \quad (1)$$

Donde  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$  es la derivada material y  $u, v$  representan a las velocidades en los ejes  $x, y$ .

La circulación generada por un vórtice  $\Gamma = \omega\pi L^2$ , es representada como una vorticidad relativa  $\omega$  (constante) multiplicada por el área de un círculo. Por lo que a cada vórtice puntual se le asigna un área, la cual representa un círculo indeformable de vorticidad.

La expresión para la circulación generada por un vórtice puntual sobre el plano- $\gamma$  (ec. 2), presentada en Velasco Fuentes (1994), fue obtenida utilizando la ec. 1 y conservación de masa:

$$\Gamma_j = \Gamma_{j0} - \pi L^2 \gamma (r_{j0}^2 - r_j^2). \quad (2)$$

En donde  $\Gamma_{j0}$  representa la circulación inicial de los vórtices a una distancia  $r_{j0}$  del polo. El área perteneciente al vórtice es representada como  $\pi L^2$ .

## 1.6 El problema de (3+1) vórtices

Para estudiar el problema de la estabilidad del arreglos de  $(N+1)$  vórtices sobre el plano- $\gamma$ , abordamos en específico el problema de (3+1) vórtices. Para estudiar la estabilidad de este problema utilizamos el espacio de fase presentado en Aref & Stremler (1999) y descrito en la sección 2.4.1. Los resultados de la estabilidad de este sistema sobre el plano- $\gamma$  son presentados en la sección 3.3. El problema es muy interesante ya que los sistemas de (3+1) han sido observados en la naturaleza y en el laboratorio (Figs. 1b y 2a). La descripción de el flujo generado por este arreglo es presentada en la Figura 3. El estudio del transporte de masa generado por este arreglo es descrito en la sección 2.4.2 y sobre el plano  $\gamma$  en la sección 2.5.

## Capítulo 2. Metodología

---

### 2.1 Ecuaciones de movimiento para vórtices puntuales

Las ecuaciones obtenidas por Kirchhoff (1883) que describen el movimiento de  $N$  vórtices puntuales sobre el plano son:

$$\frac{dx_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq j}^N \frac{\Gamma_k (y_j - y_k)}{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \quad (3)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq j}^N \frac{\Gamma_k (x_j - x_k)}{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \quad (4)$$

En donde la velocidad de un vórtice  $(x_j, y_j)$  depende de la distancia  $(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2$  a la que se encuentre de otros vórtices ubicados en  $(x_k, y_k)$  con circulación  $\Gamma_k$  para  $j, k = 1, \dots, N$  con  $k \neq j$ . Cuando todos los vórtices tienen la misma circulación cada uno se mueve únicamente en función de la distancia a la que se encuentra los demás vórtices. Las configuraciones de  $N$  y  $(N+1)$  vórtices son soluciones estacionarias de estas ecuaciones y rotan con velocidad angular constante.

### 2.2 Modelo numérico

Se utilizó un modelo bidimensional programado en MATLAB para resolver el sistema de ecuaciones (3,4) y simular los arreglos de  $N+1$  vórtices. Para avanzar en el tiempo utilizamos un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden.

#### 2.2.1 Condiciones Iniciales

Los sistemas de  $N+1$  fueron simulados situando  $N$  vórtices puntuales sobre un plano ilimitado y utilizando las posiciones y circulaciones de cada vórtice para resolver el sistema de ecuaciones (3,4). En todos los arreglos simulados los satélites tienen la misma circulación  $\Gamma_j = 1$  para  $j = 1, \dots, N$ , y se



encuentran una distancia inicial  $r = 1$  del origen. Los valores elegidos para la circulación del vórtice central ( $\Gamma_0$ ) utilizados en las simulaciones caen dentro del intervalo  $-100 \leq \Gamma_0 \leq 25$ .

### 2.3 Criterios de estabilidad para el problema de $N+1$ vórtices

Para estudiar la estabilidad de arreglos poligonales de  $(N+1)$  vórtices perturbamos su geometría inicial desplazando ligeramente alguno de los satélites de su posición de equilibrio en  $r = 1$ . En este caso la perturbación ( $\epsilon = 0.1$ ) consistió en alejar del origen a algún satélite. Bajo estas condiciones iniciales asimétricas hay dos consideraciones a tomar en cuenta para determinar la estabilidad del arreglo:

1. El arreglo debe mantener su geometría por un mínimo de 10 rotaciones completas del sistema.
2. Los satélites deben mantener el orden establecido en la condición inicial (no pueden intercambiar lugares) durante los 10 periodos de rotación del sistema.

### 2.4 El problema de 3+1 vórtices puntuales

Dentro del problema de  $(N+1)$  vórtices estudiamos en específico la evolución y la advección generada por un sistema de  $(3+1)$  en el que los cuatro vórtices tienen circulaciones relativas  $\Gamma_1: \Gamma_2: \Gamma_3: \Gamma_4 = 1: 1: 1: (-3)$ . Los satélites (1,2,3) forman un triángulo equilátero alrededor del vórtice central, situado en el origen. El vórtice central es de circulación opuesta igual a la suma de los tres satélites  $\Gamma_4 = -(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)$ . Esta configuración es una solución estacionaria de (3,4) y posee estabilidad no-lineal (Aref & Stremer, 1999).

#### 2.4.1 Espacio de fase de Aref & Stremler (1999)

Utilizamos el espacio de fase para un sistema de  $(3+1)$  presentado en Aref & Stremler (1999), el cual nos ayuda a reducir las dimensiones del problema. En este trabajo los autores demuestran que este sistema es integrable y además demuestran la estabilidad no lineal de las soluciones estacionarias del sistema  $(3+1)$ .

Los impulsos: lineal ( $Q + iP$ ) y angular ( $I$ ), son integrales del problema:

$$Q + iP = \sum_{j=1}^{N+1} \Gamma_j Z_j, \quad (5)$$

$$I = \sum_{j=1}^{N+1} \Gamma_j |Z_j|^2, \quad (6)$$

En donde  $Z_j = x_j + iy_j$  para  $j = 1, \dots, 4$  representa la posición de los vórtices sobre el plano complejo.

Otra integral del problema es el Hamiltoniano ( $H$ )

$$H = \sum_{j \neq k}^{N+1} \Gamma_j \Gamma_k \log(d_{jk}^2), \quad (7)$$

Con las distancias entre los vórtices

$$d_{jk} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad \text{para } j \neq k, \quad \text{con } j, k = 1, \dots, 4.$$

Las condiciones para utilizar el espacio de fase propuesto por Aref & Stremmer (1999) son las siguientes:

1. El arreglo de  $(3 + 1)$  vórtices debe tener circulación neta igual a cero:

$$\Gamma_N = \sum_{j=1}^{N+1} \Gamma_j = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \quad (8)$$

$$\Gamma_N = 0 \quad (9)$$

2. El impulso lineal ( $Q + iP$ ) debe ser igual a cero y el impulso angular debe ser diferente de cero.

$$(Q + iP) = 0 \quad (10)$$

$$I \neq 0 \quad (11)$$

El espacio de fase original del problema es de 8 dimensiones, representadas por las posiciones de los cuatro vórtices sobre el plano. Con las consideraciones mencionadas el espacio de fase del sistema puede ser reducido a uno de 3 dimensiones, representadas por las distancias relativas entre los tres satélites ( $d_{12}, d_{23}, d_{31}$ ).

Las diferentes condiciones iniciales para los sistemas de (3+1) vórtices son representadas en este espacio por las coordenadas trilineales ( $b_1, b_2, b_3$ ). En la parte izquierda de la figura 3, la dirección positiva de los ejes se indica con una flecha.

$$b_l = \frac{3\Gamma_j\Gamma_k d_{jk}^2}{|\Gamma_4|I}, \quad (12)$$

$$\text{para } j, k, l = 1, \dots, N \text{ con } i \neq j \neq k$$

Debido a la condición planteada en (6) los puntos en este espacio deben caer dentro del triángulo que forman los tres ejes ( $b_1, b_2, b_3$ ).

Los valores posibles de las coordenadas ( $b_1, b_2, b_3$ ) se encuentran restringidos por el hecho de que las distancias  $d_{12}, d_{23}, d_{31}$  deben representar los lados de un triángulo, por lo que se debe satisfacer la condición:

$$d_{12} \leq d_{23} + d_{31}, \quad d_{23} \leq d_{12} + d_{31}, \quad d_{31} \leq d_{12} + d_{23}$$

Sobre un marco de referencia que rota con el sistema, el triángulo equilátero es una solución estacionaria de (3,4). En esta condición inicial la distancia entre los tres satélites es la misma y se mantiene constante  $d_{12} = d_{23} = d_{31}$ . La perturbación ( $\epsilon$ ) utilizada en este sistema, consistió en aumentar (o disminuir en el caso de  $\epsilon < 0$ ) la distancia inicial entre los satélites 1 y 3 ( $d_{31} = d_{31} + 2\epsilon$ ). Bajo esta condición inicial los satélites forman un triángulo isósceles  $d_{12} = d_{23} < d_{31}$ . Para perturbaciones es pequeña obtenemos soluciones periódicas. Los vórtices oscilan alrededor de su posición de equilibrio y en cierto tiempo la distancia entre los vórtices es exactamente la misma fijada en la condición inicial. El estudio del transporte generado por estas soluciones periódicas es descrito en la siguiente sección.

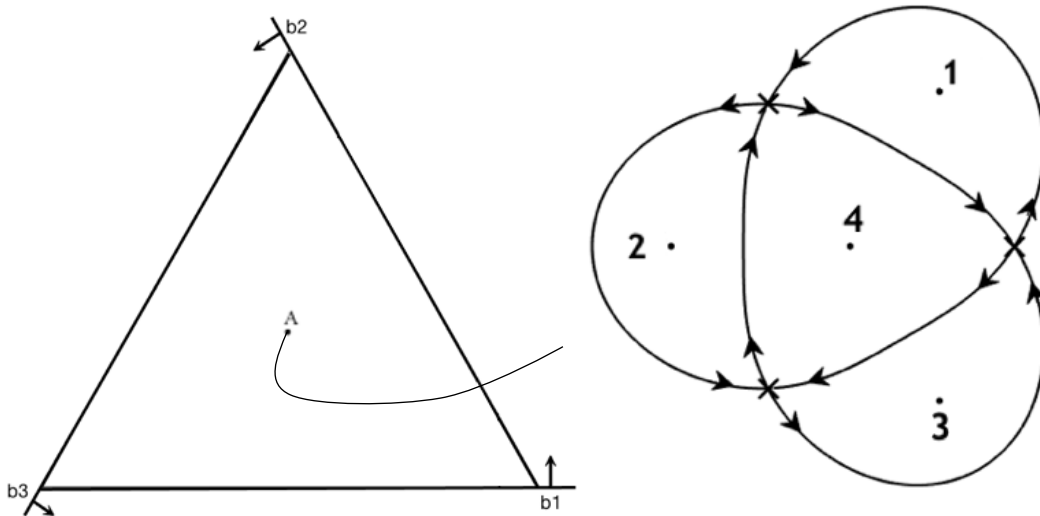


Figura 3. (Izquierda) Plano de ejes coordenados  $(b_1, b_2, b_3)$ . El punto A es un punto fijo elíptico (Aref & Stremler, 1999) que representa una configuración estacionaria de triángulo equilátero  $d_{12} = d_{23} = d_{31}$ . (Derecha) Topología del flujo generado por la condición inicial del punto fijo A (retrato de fase del sistema estacionario de (3+1) vórtices). Los puntos representan a los vórtices y las cruces son puntos hiperbólicos.

#### 2.4.2 Secciones de Poincaré

Para obtener información acerca de los mecanismos de transporte de diferentes condiciones iniciales del sistema (3+1) se realizaron mapeos de Poincaré. Los mapeos o secciones de Poincaré son una herramienta muy útil al estudiar flujos periódicos en el tiempo. Los mapeos consisten en sobreponer una serie de imágenes capturadas de forma estroboscópica.

Las posiciones de partículas pasivas advectadas por el flujo son mapeadas cada vez que transcurre un periodo del sistema y la distancia entre los vórtices es igual a la fijada en la condición inicial. Esto nos permite observar más claramente el comportamiento del sistema a largo plazo.

Para las secciones de Poincaré descritas en la sección 3.2.2, las posiciones de las partículas fueron registradas cada vez que el sistema regresó a su configuración inicial.

Como se mencionó en la sección anterior, perturbamos la configuración de triángulo equilátero (Fig. 3) modificando la distancia entre los vórtices 1 y 3 de la forma  $(d_{31} = d_{31} + 2\epsilon)$ . Esto nos da como condición inicial un triángulo isósceles con lados  $d_{12} = d_{23} < d_{31}, 0$

Los mapeos fueron realizados para valores iniciales de  $\epsilon = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . Para cada mapeo se utilizó un total de 64 partículas pasivas posicionadas en línea recta entre los puntos  $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0.5, 0, 3, 0)$ . La escala de colores de las partículas pasivas utilizadas para observar el transporte va de azules a rojos. Inicialmente los azules y verdes fueron posicionados dentro de las separatrices del flujo que se muestran en la Fig. 3 y los amarillos/rojos fuera de el sistema. La distribución de los colores nos indica si hay regiones de fluido que estén siendo estiradas o dobladas por el flujo. Por lo que en los mapeos en los que se observan partículas de diferentes colores conviviendo en una misma región podemos intuir la presencia de trayectorias caóticas o equivalentemente “mezcla” de los elementos de fluido.

## 2.5 El problema de 3+1 vórtices puntuales sobre el plano $\gamma$ .

Para estudiar la estabilidad de el problema de (3+1) vórtices sobre el plano  $\gamma$  se utilizó el espacio de fase de Aref & Stemler (1999) presentado en la sección anterior. Algunos trabajos han comprobado la estabilidad de arreglos de  $(N+1)$  vórtices sobre el plano  $\gamma$ . Velasco Fuentes (1996), por ejemplo, comprobó la estabilidad de un arreglo de (2+1) con circulación neta igual a cero sobre el plano  $\gamma$ .

Al introducir  $\gamma$  obtenemos una tercera variable adimensional relevante para la estabilidad del problema  $\mu = \frac{\gamma r^4}{\Gamma}$ , la cual representa la relación entre  $\gamma$  y la distancia al “polo” con la circulación inicial de los satélites. Los experimentos numéricos para el caso modulado fueron realizados para valores iniciales de  $\gamma \leq 1.5$  y de  $\epsilon \leq 0.4$ .

Para analizar la advección generada por las diferentes condiciones iniciales en el caso con  $\gamma \neq 0$  utilizamos partículas pasivas al igual que en la sección anterior. Debido a que no podemos realizar mapeos como los que se realizaron para el caso periódico, la posición de las partículas es registrada a cada paso de tiempo.

En vez de utilizar el gradiente de colores con el que se realizaron las secciones de Poincaré, ahora identificamos el área que pertenece a cada vórtice con un color diferente. El área interior de los vórtices: 1, 2, 3 y 4 aparece representada de color: azul, verde, amarillo y rojo, respectivamente. Para el caso estacionario (triángulo equilátero) los colores de las partículas nos permiten apreciar la frontera de los vórtices.

Las partículas fueron posicionadas en línea recta desde las cercanías de cada vórtice hasta un punto próximo a la separatriz. Un quinto grupo de partículas (color azul claro) fue posicionado fuera del sistema. Se utilizó un total de 10,000 partículas, 2000 dentro de cada vórtice y 2000 fuera del sistema. La distribución espacial de las partículas a diferentes tiempos es contrastada con las secciones de Poincaré de la sección anterior para analizar el efecto que tiene la modulación sobre la advección generada por los diferentes valores de  $\epsilon$ .

## Capítulo 3. Resultados

---

### 3.1 Límites de estabilidad para el problema de $N+1$ vórtices

Los rangos de estabilidad para sistemas de  $N+1$  vórtices en función de las variables adimensionales  $N$  y  $\frac{\Gamma_0}{\Gamma}$ , para  $2 \leq N \leq 10$  (Fig. 4) fueron obtenidos por medio de experimentos numéricos. En los experimentos realizados la circulación de los satélites se mantuvo constante  $\Gamma = 1$ , por lo que el valor del número adimensional  $\frac{\Gamma_0}{\Gamma}$  es la circulación del vórtice central  $\Gamma_0$ .

#### 3.1.1 Configuraciones estables para $2 \leq N \leq 10$

Cuando hablamos de “límites” de estabilidad nos referimos a valores máximos y mínimos de  $\Gamma_0$  dentro de los cuales los arreglos de  $(N+1)$  conservan su geometría poligonal. Los arreglos de  $(N+1)$  inestables (con valores de  $\Gamma_0$  fuera del “rango” de estabilidad) pierden su geometría inicial rápidamente y se dividen en arreglos de menor complejidad.

Las barras de colores que aparecen en la Fig. 4 representan las “zonas estables” para valores de  $2 \leq N \leq 10$  obtenidas en este trabajo (verdes), junto con los resultados de Morikawa & Swenson (1971) (azules) y Cabral & Schmidt (2000) (amarillas). Las configuraciones estables para  $N = 2, 3$  con circulación neta igual a cero  $\Gamma_N = 0$ , ambas demostradas estables en los trabajos de Aref (1979) y Aref & Stremler (1999) aparecen señaladas con rectángulos negros.

Los valores obtenidos para los límites de estabilidad son bastante similares a los presentados en los trabajos de Morikawa & Swenson (1971) y Cabral & Schmidt (2000) para los arreglos con  $N \geq 4$ . En el caso de los límites superiores de estabilidad, los valores que obtuvimos son menores a los de ambos autores para  $N \geq 3$ , a pesar de esto los valores siguen la misma tendencia.

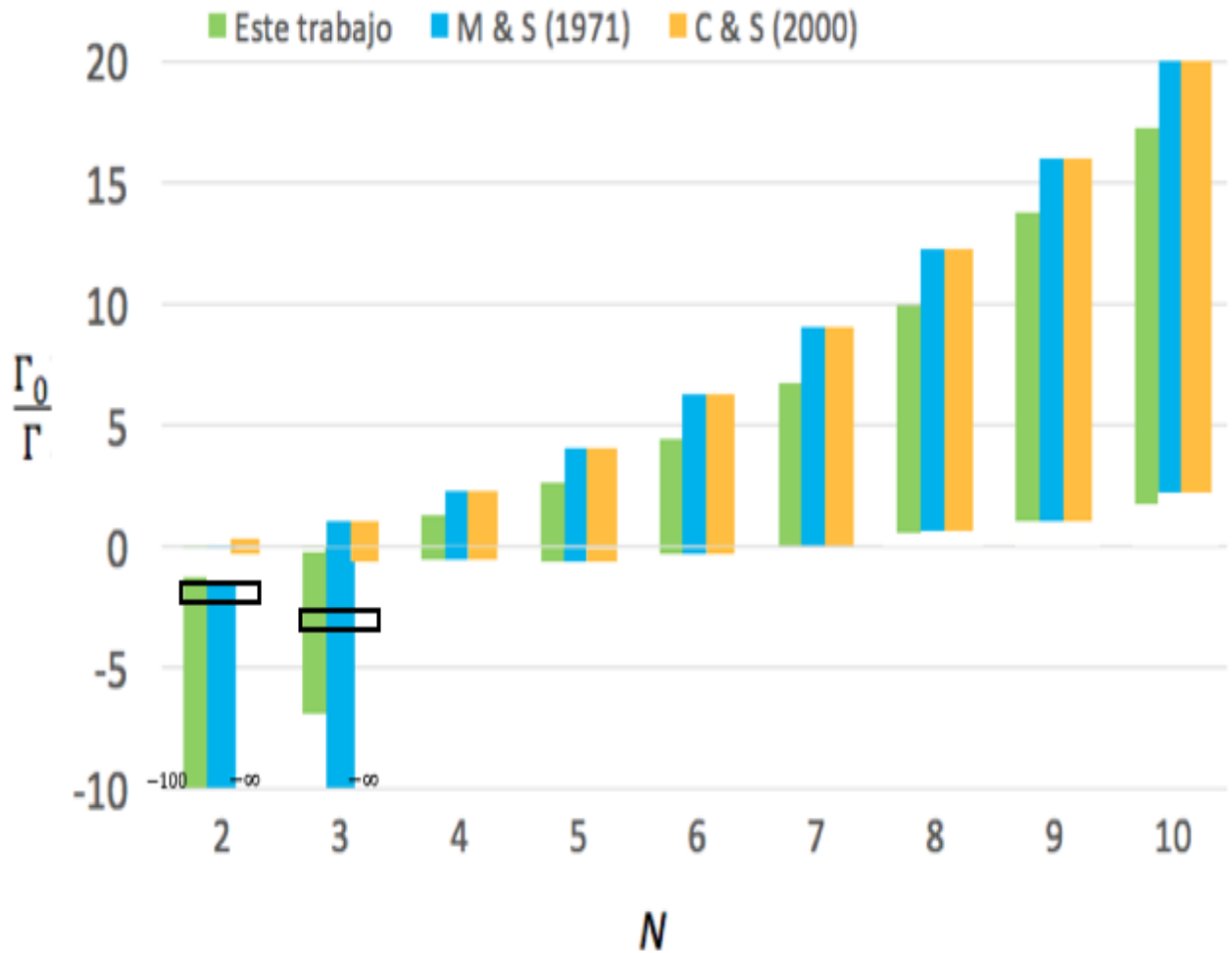


Figura 4. Configuraciones estables para el problema de  $N+1$  vórtices puntuales en función del número de satélites  $N$  y la relación entre la intensidad del vórtice central y los satélites  $\frac{\Gamma_0}{\Gamma}$ . Las barras verdes representan las configuraciones estables encontrados en este trabajo. Las barras azules y amarillas representan las configuraciones estables obtenidos analíticamente por Morikawa & Swenson (1971) y Cabral & Schmidt (2000) respectivamente. Los marcos negros representan las configuraciones de  $N=2, 3$  con circulación neta igual a cero  $\Gamma_N = 0$ , ambas demostrados estables por Aref (1979), Aref & Stremler (1999).



Esta diferencia en los límites superiores puede deberse a que elegimos perturbar el anillo de vórtices en vez del vórtice central o al valor de la perturbación inicial utilizado en los experimentos ( $\epsilon = 0.1$ ). Morikawa & Swenson (1971), describen que a medida que nos acercamos a los límites inferiores de estabilidad (la base de las barras de la Figura 4) el anillo de satélites se vuelve inestable. Los satélites comienzan a intercambiar lugares y se modifica la configuración inicial del sistema. Por el contrario, hacia los límites superiores de estabilidad (la tapa de las barras de la Figura 4), el vórtice central es el que se vuelve inestable. Abandona el origen y provoca que el sistema pierda su geometría inicial. Cuando esto ocurre el sistema se divide en dos o más arreglos de menor complejidad que el arreglo original. En nuestras simulaciones observamos los mismos comportamientos a medida que nos acercamos a los valores máximos y mínimos de  $\Gamma_0$  para los cuales los sistemas conservan su geometría inicial.

Cuando  $\Gamma_0 < 0$  los sistemas perturbados (además de rotar) se desplazan una distancia considerable de su posición inicial. “Solo cuando la circulación del vórtice central es opuesta a la de los satélites, pueden algunos arreglos desplazarse hasta el infinito” (Morikawa & Swenson, 1971).

Para valores pequeños de  $N$  los resultados obtenidos difieren bastante a los presentados en Cabral & Schmidt (2000). Sin embargo, ellos definen como inestables a configuraciones de (2+1) y (3+1) con circulación neta igual a cero, ambas demostradas estables en los trabajos de Aref (1979) y Aref & Stremmer (1999).

## 3.2 Estabilidad del sistema (3+1)

### 3.2.1 Evolución de diferentes condiciones iniciales

Las trayectorias sobre el espacio de fase para un arreglo de (3+1) con circulaciones relativas  $\Gamma_1:\Gamma_2:\Gamma_3:\Gamma_4 = 1:1:1:(-3)$  se presentan en la Figura 5. Estas trayectorias son idénticas a las que aparecen en la Figura 2 de Aref & Stremmer (1999). El espacio de fase contiene 4 puntos fijos, de los cuales tres son de tipo hiperbólico y uno de tipo elíptico.

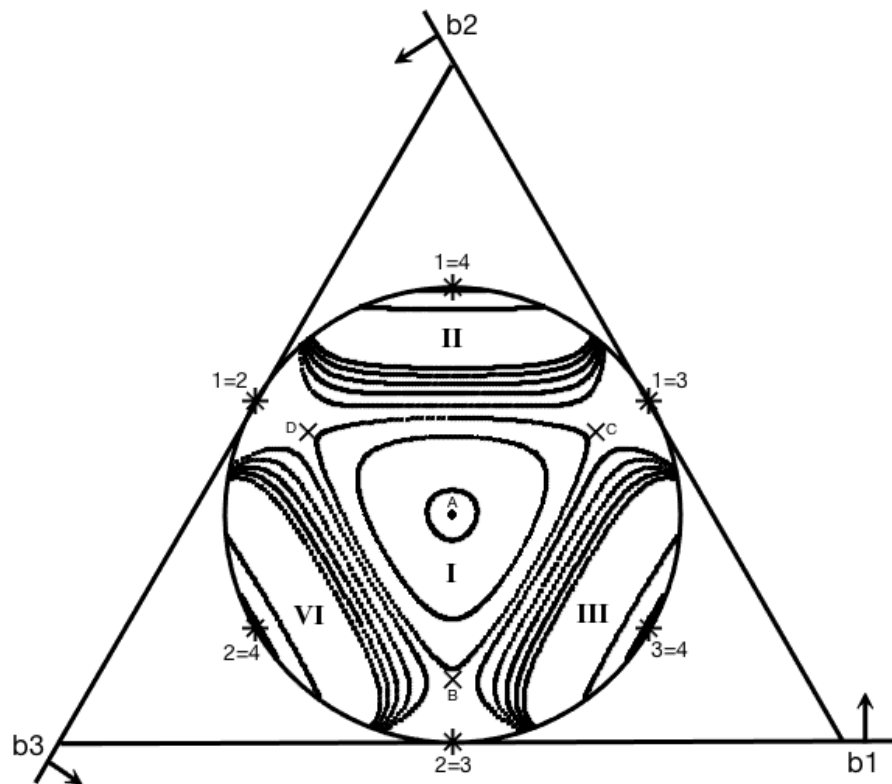


Figura 5. Espacio de fase para un sistema de  $(3+1)$  con circulaciones relativas  $\Gamma_1:\Gamma_2:\Gamma_3:\Gamma_4 = 1:1:1:(-3)$ . Las trayectorias sobre el espacio de fase son descritas por medio de puntos  $(b_1, b_2, b_3)$ . Las trayectorias son iguales a las presentadas en la Fig. 2 de Aref & Stremler (1999). El punto A (triángulo equilátero) es un punto fijo de tipo elíptico. Las cruces B, C y D son punto fijos de tipo hiperbólico. La frontera del “circulo físico” representa una configuración en la que todos los vórtices se alinean. Los asteriscos representan puntos en los que las posiciones de algunos vórtices coinciden. Las regiones I, II, III y IV representan diferentes regímenes de movimiento. La región I es el área relevante para este trabajo.

El punto fijo elíptico **A**, que se localiza en el centro la figura 5 es el mismo que se muestra en la Figura 3. Esta representa la configuración de triángulo equilátero  $d_{12} = d_{23} = d_{31}$ , la cual es una solución estacionaria de  $(3,4)$ . Este arreglo se mantiene fijo y rota con velocidad angular constante, por lo que si rotamos con el sistema los vórtices aparentan estar fijos en el espacio. La región I (la vecindad del punto **A**) representa la zona del espacio de fase que es relevante para este trabajo. Las trayectorias sobre el espacio de fase que describen las condiciones iniciales en la vecindad del punto **A** son órbitas cerradas. Por lo que estos arreglos representan soluciones periódicas de  $(3,4)$ .

Si aumentamos la separación inicial entre los satélites 1 y 3 una distancia  $2\epsilon$ , obtenemos una condición inicial en la que los satélites forman un triángulo isósceles con  $d_{12} = d_{23} < d_{31}$ . Las coordenadas de esta condición inicial sobre el espacio de fase se sitúan en la vecindad del punto **A**, en la dirección en la que crece  $b_1$  ( $b_1 > b_2 = b_3$ ). La forma del flujo generado por esta condición inicial y su posición sobre el espacio de fase se muestran en el extremo superior derecho de la Figura 6. En esta figura se presenta la evolución del sistema para una perturbación inicial de  $\epsilon = \pm 0.4$ ;

Ahora, si disminuimos la separación inicial entre los satélites 1 y 3, obtenemos un triángulo isósceles en el que  $d_{12} = d_{23} > d_{31}$ . Las coordenadas de esta condición inicial sobre el espacio de fase ahora se ubican entre los puntos **A** y **B**, en la dirección en la que decrece  $b_1$  ( $b_1 < b_2 = b_3$ ). La forma del flujo generado por esta condición inicial y su posición sobre el espacio de fase se muestran en la parte inferior izquierda de la Figura 6.

El sistema evoluciona de la misma manera si en vez de perturbar  $d_{31}$  se modifican alguna de las otras dos distancias ( $d_{12}, d_{23}$ ). Las coordenadas del sistema sobre el espacio de fase se desplazan entonces en alguna de las direcciones que se muestran en la Fig. 6.

El espacio de fase tiene tres puntos fijos de tipo hiperbólico **B**, **C**, **D** ubicados en las coordenadas  $(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_2)$ ,  $(c_2, c_1, c_2)$  y  $(c_2, c_2, c_1)$  con  $c_1 = 2 - \sqrt{3}$ ,  $c_2 = (1 + \sqrt{3})/2$ . La órbita que une estos tres puntos es la frontera de la región de interés (Figs. 5,6).

Para un valor crítico de  $\epsilon \approx -0.5254$  la condición inicial sobre el espacio de fase se ubica en las coordenadas del punto hiperbólico **B**. Esta es una solución estacionaria inestable en la que los satélites forman un triángulo isósceles con  $d_{12} = d_{23} \approx 2.2580 d_{31}$  (Fig. 6). Al ser un punto hiperbólico, los puntos en el espacio de fase tardan un tiempo infinito en escapar del punto **B** (y tardan lo mismo en llegar al punto **C**). Por lo que la frecuencia angular del sistema es cero. Esto quiere decir que los vórtices tardan un tiempo infinito en intercambiar lugares. Los vórtices 1,3 y 4 forman un segundo triángulo isósceles con distancias  $d_{14} = d_{34} \approx 1.1260 d_{31}$ . Para este sistema la relación entre la longitud de los lados de ambos triángulos es de la forma:  $\frac{d_{12}}{d_{31}} \approx 2 \frac{d_{31}}{d_{41}}$ .

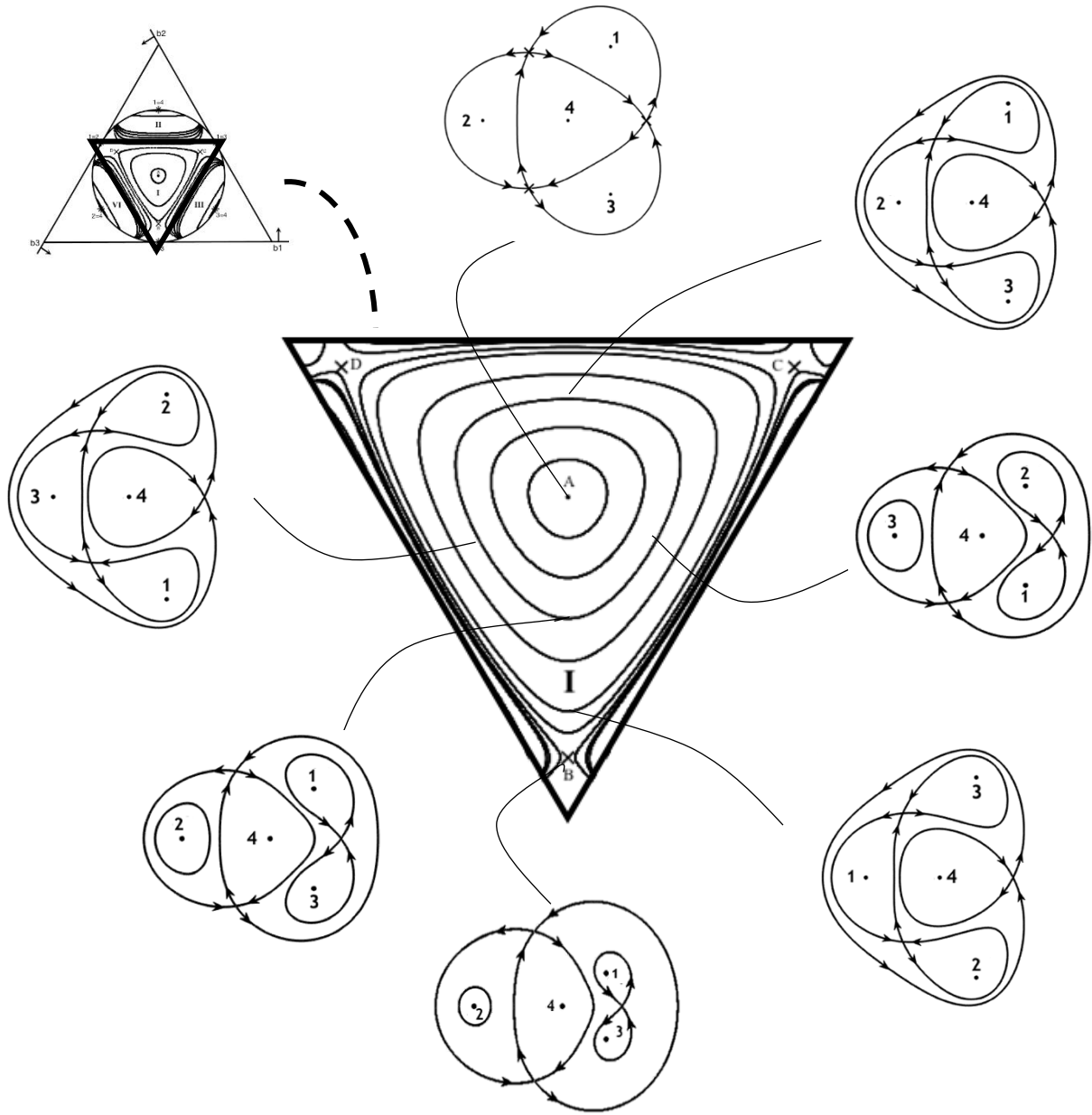


Figura 6. Topología del flujo para diferentes condiciones iniciales de arreglos de (3+1) vórtices puntuales con circulaciones relativas  $\Gamma_1: \Gamma_2: \Gamma_3: \Gamma_4 = 1: 1: 1: (-3)$ . La zona dentro del triángulo central es la región **I** del espacio de fase que se presenta en la Fig. 5. Las figuras centrales (arriba y abajo) representan el flujo de los puntos fijos **A** (elíptico) y **B** (hiperbólico). Las demás representan condiciones iniciales para  $\epsilon = \pm 0.4$ .

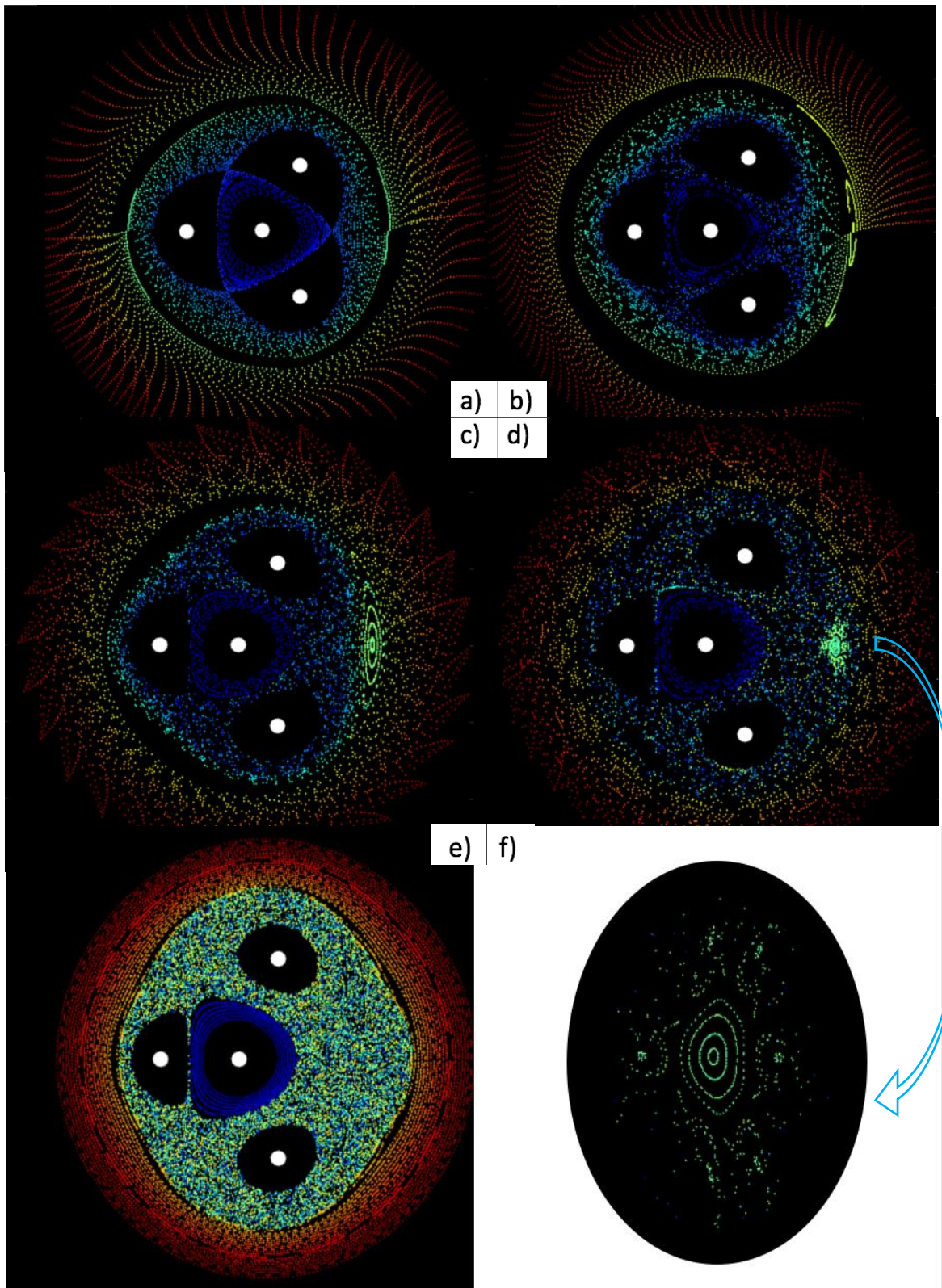


Figura 7. Secciones de Poincaré para arreglos de (3+1) vórtices puntuales con circulations relativas  $\Gamma_1:\Gamma_2:\Gamma_3:\Gamma_4 = 1:1:1:(-3)$ , con valores de  $\epsilon = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  como condición inicial. La condición inicial de las partículas pasivas es descrita en la sección 2.4.2. En las figuras (b), (c), (d) y (e) se puede observar la presencia de islas de estabilidad y mares caóticos. La figura f es una ampliación de las islas de estabilidad de segundo y tercer orden que se aprecian en (d).

### 3.2.2 Advección generada por el sistema (3+1)

En la figura 7 se presentan las secciones de Poincaré de cinco condiciones iniciales diferentes. La primera (Fig.7a) representa la advección generada por la configuración estacionaria de triángulo equilátero. En esta figura los vórtices se muestran como círculos blancos. Las siguientes cuatro condiciones iniciales (Fig.7b, c, d, e) son perturbaciones geométricas del triángulo equilátero para valores de  $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ , respectivamente. Las coordenadas para estos valores de  $\epsilon$  se ubican dentro de la región de interés del espacio de fase descrito en la sección anterior.

En la Fig.7a se observa que las partículas se distribuyen uniformemente alrededor del sistema. El orden establecido en los colores indica que no hay mezcla en los elementos de fluido que se encuentran dentro y fuera. Para una perturbación de  $\epsilon = 0.1$  (Fig.7b) comienza a observarse partículas de diferentes colores dentro del sistema. La distribución de los colores ya no es simétrica como en la Fig. 7a y se pueden observar partículas de distintos tonos de azul compartiendo la misma zona. Esto nos indica la existencia de caos en nuestro sistema. La presencia de trayectorias caóticas quiere decir que elementos de fluido están siendo estirados y doblados por el sistema, lo que nos conduce a la “mezcla”. Así como aparece este “mar caótico” también se puede observar la presencia de “islas de estabilidad” alrededor de cada vórtice. Las fronteras de los vórtices o curvas KAM son la “costa” de estas islas. También puede apreciarse una delgada isla de estabilidad ajena a los vórtices evidenciada por las partículas amarillas.

Para una perturbación de  $\epsilon = 0.2$  (Fig. 7c) la presencia del mar caótico es mucho más evidente. Además de las cuatro islas de estabilidad pertenecientes a los vórtices aparecen tres nuevas islas. Las partículas verdes quedan atrapadas en una isla de estabilidad ubicada del lado derecho. Las zonas sombreadas que no pertenecen a los vórtices son las otras dos islas de estabilidad. Al aumentar el valor de  $\epsilon$  se observa mayor “mezcla” entre las partículas azules, así como algunas partículas amarillas que entran a la isla verde.

Al crecer el mar caótico, el área sombreada perteneciente a los remolinos disminuye. Fuera del mar caótico las partículas rojas y naranjas se mantienen fijas. Para una perturbación de  $\epsilon = 0.3$  (Fig. 7d, f) se observa un patrón diferente en la zona estable apareció del lado derecho en las secciones anteriores. Las partículas verdes quedan atrapadas en un sistema de islas de estabilidad de segundo y tercer orden (Fig. 7f). En sistemas dinámicos se conoce a estas estructuras como cadenas de puntos fijos de Poincaré-Birkhoff. Los “puntos fijos” de Poincaré-Birkhoff son puntos periódicos del mapeo. En estas cadenas de puntos fijos los puntos de tipo hiperbólico y los de tipo elíptico se alternan al igual que en el sistema

original. Además de esta estructura se logran apreciar dos islas de estabilidad de primer orden identificadas por zonas sombradas.

Para una perturbación de  $\epsilon = 0.4$  la presencia del mar caótico es ahora inconfundible (Fig. 7e). Este es conformado por partículas azules, verdes y amarillas. La cadena de puntos fijos que apareció en el mapeo anterior desaparece, así como las dos islas de estabilidad que podíamos observar como zonas sombreadas en las Figs. 7c,d. Aunque algunas curvas KAM observadas en los mapeos anteriores desaparecieron, las cuatro islas de estabilidad pertenecientes a los vórtices permanecen. A las afueras del mar caótico las partículas naranjas y rojas continúan fijas.

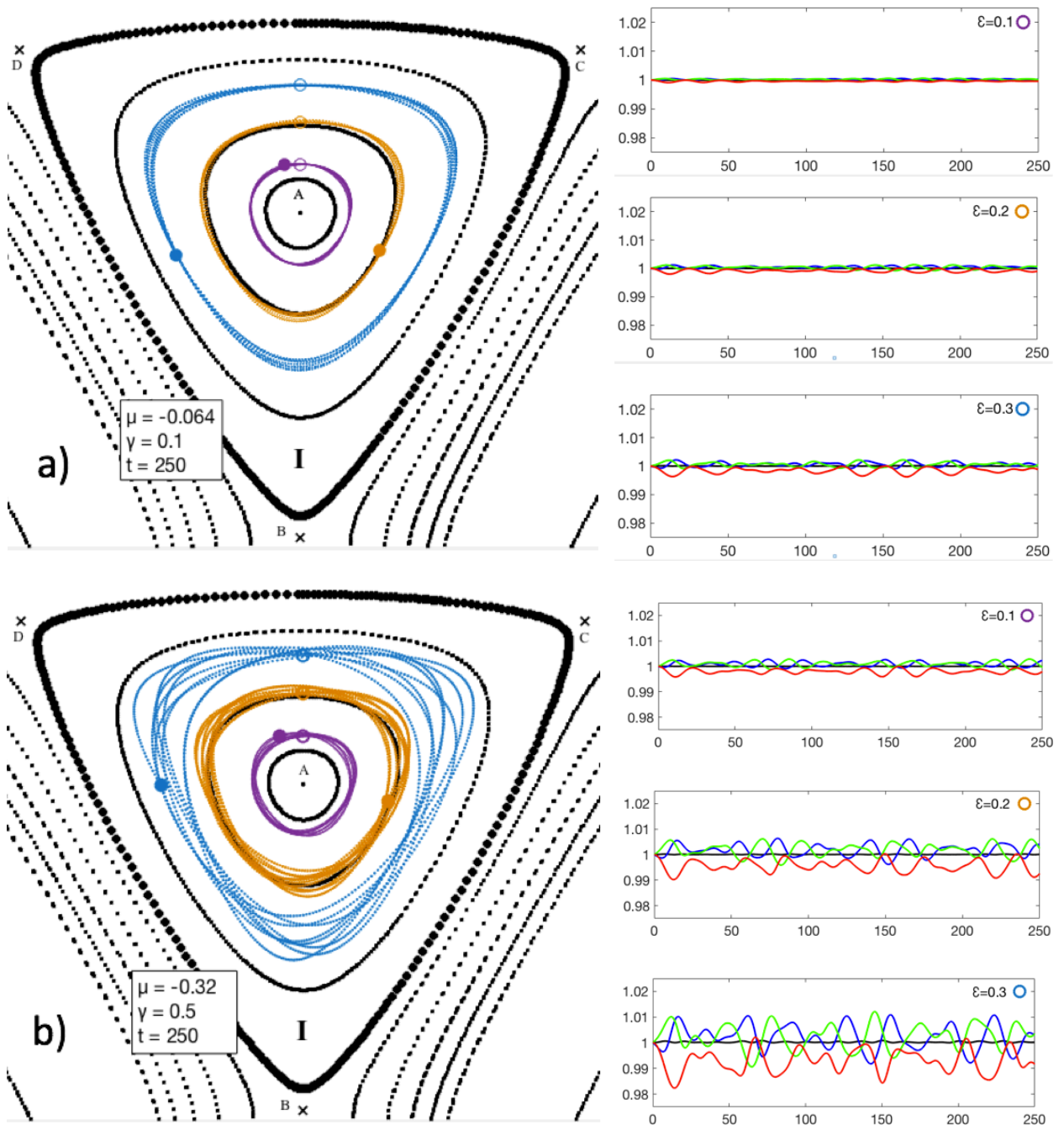


Figura 8. Trayectorias sobre el espacio de fase de Aref & Stremler (1999) de un arreglo de (3+1) vórtices con circulaciones relativas  $\Gamma_1:\Gamma_2:\Gamma_3:\Gamma_4 = 1:1:1:(-3)$  y perturbaciones de  $\epsilon = 0.1, 0.2$  y  $0.3$  sobre el plano  $\gamma$ . (derecha) La variación en la circulación de los satélites se muestra en rojo, azul, verde y la del vórtice central en negro. (a)  $\gamma = 0.1$ , (b)  $\gamma = 0.5$ .



### 3.3 Evolución del sistema (3+1) sobre el plano- $\gamma$ .

Al introducir  $\gamma$  en el problema el signo de los vórtices toma relevancia debido a que el valor inicial de la vorticidad/circulación de cada vórtice es modificada a cada paso de tiempo en función de la distancia a la que este se encuentre de su posición inicial y en función al signo de  $\gamma$ .

Una vez incorporado  $\gamma$  proyectamos las trayectorias que describen las diferentes condiciones iniciales sobre el espacio de fase que se presentó en la Fig. 5, a medida que el sistema evoluciona. Las trayectorias proyectadas sobre el espacio de fase del problema no modulado (i.e. sin  $\gamma$ ), para distintos valores de  $\gamma, \epsilon$  son presentadas en las Figs. 8-10. En estas figuras las condiciones iniciales para  $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3$  aparecen representadas por los colores: morado, naranja y azul, respectivamente. Los círculos indican las coordenadas iniciales y finales (círculos rellenos) de cada condición inicial y los puntos que unen ambos círculos son las trayectorias descritas.

Para  $\gamma \neq 0$  las trayectorias dejan de ser órbitas cerradas, sin embargo para valores pequeños de  $\gamma, \epsilon$ , algunas trayectorias sobre el plano  $(b_1, b_2, b_3)$  conservan la geometría de las órbitas periódicas del caso no modulado (Figs. 8,9).

Nuestros resultados indican que para valores de  $\gamma \leq 1, \epsilon < 0.3$  un arreglo de (3+1) vórtices puntuales con intensidades iniciales relativas  $\Gamma_1: \Gamma_2: \Gamma_3: \Gamma_4 = 1: 1: 1: (-3)$  sobre el plano  $\gamma$  es estable. El sistema se vuelve inestable cuando el vórtice central y  $\gamma$  son de signo opuesto (Fig. 10).

Con un valor de  $\gamma = 1$  comienza a observarse que la geometría de las trayectorias descritas se aleja mucho más de las órbitas cerradas (Fig. 9a). Con una perturbación de  $\epsilon = 0.3$  las trayectorias descritas se alejan tanto de la órbita cerrada del caso sin modular que incluso se sobreponen a las órbitas descritas por la condición inicial con  $\epsilon = 0.2$ .

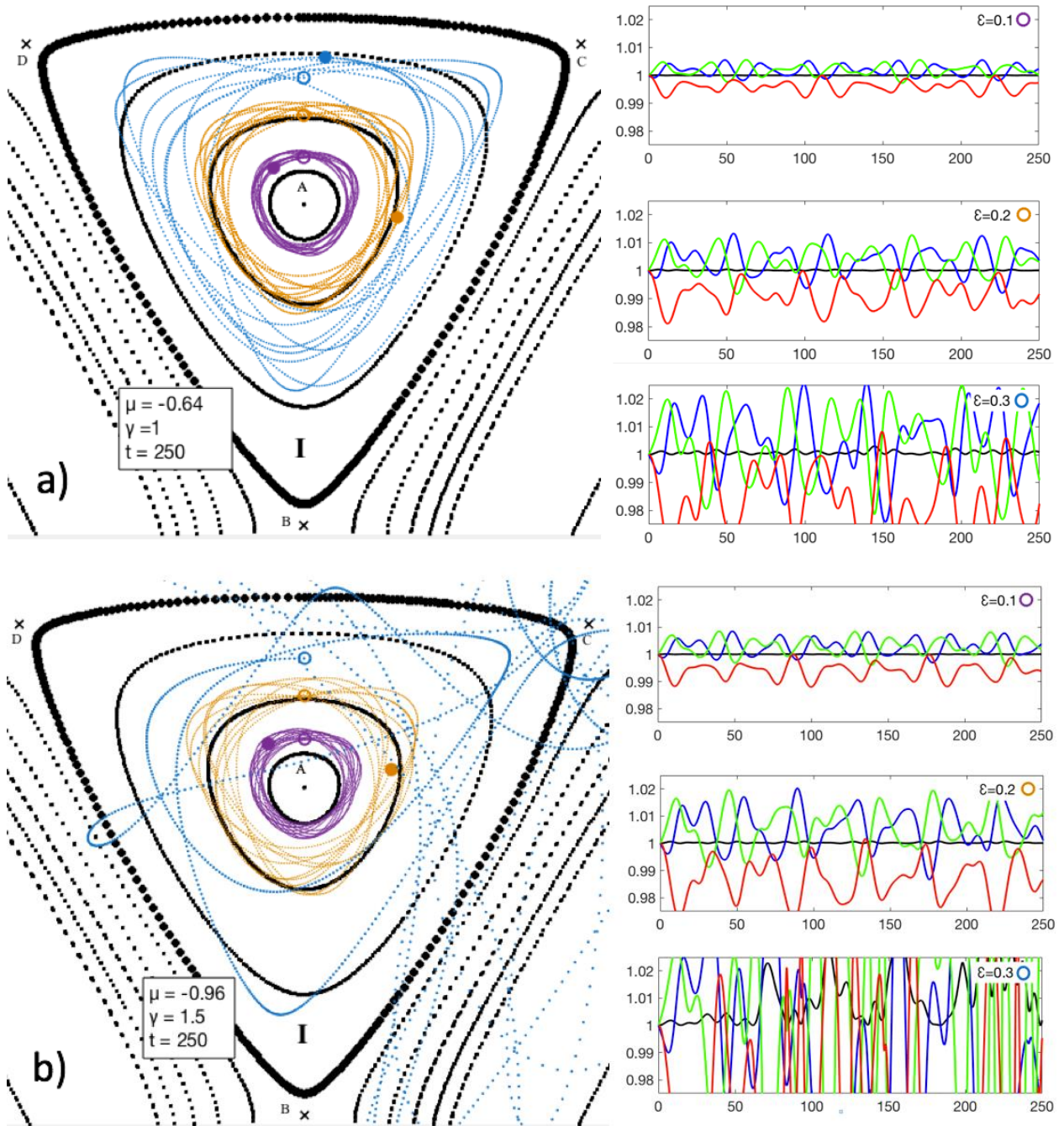


Figura 9. Trayectorias sobre el espacio de fase de Aref & Stremler (1999) de un arreglo de (3+1) vórtices con circulaciones iniciales relativas  $\Gamma_1:\Gamma_2:\Gamma_3:\Gamma_4 = 1:1:1:(-3)$  y perturbaciones de  $\epsilon = 0.1, 0.2$  y  $0.3$  sobre el plano  $\gamma$ . (derecha) La variación en la circulación de los satélites se muestra en rojo, azul, verde y la del vórtice central en negro. (a)  $\gamma = 1$ , (b)  $\gamma = 1.5$ .

El sistema se vuelve inestable para valores de  $\gamma = 1.5$  y  $\epsilon = 0.3$  (Fig. 9b). La geometría de las órbitas se pierde para este valor de la perturbación y además se observa que el vórtice central se aleja bastante del origen (Fig. 9). Con perturbaciones de  $\epsilon = 0.4$  los sistemas se inestabilizan para valores de  $\gamma > 0.1$  y se dividen en un dipolo asimétrico y un sistema formado por dos vórtices iguales. El dipolo que es disparado de esta separación describe trayectorias similares a los generados por dipolos sobre el plano  $\gamma$  presentadas en Velasco Fuentes (1994).

Al perturbar los sistemas de (3+1) la vorticidad/circulación de todos los vórtices oscila alrededor de su condición inicial con una amplitud proporcional a los valores de  $\epsilon$  y de  $\gamma$  (lado derecho de las Figs. 8,9,10). Para un valor de  $\gamma = 0.1$  la variación de la vorticidad es muy pequeña (Fig. 8a). Con una perturbación inicial de  $\epsilon = 0.3$  se observa una variación en la vorticidad de los satélites menor al 0.5%. Para los valores de  $\epsilon = 0.1, 0.2$  la variación es alrededor de un orden de magnitud menor. Para un  $\gamma = 1$  y un  $\epsilon = 0.2$  podemos observar que la vorticidad de los satélites varía en un 1% (Fig. 9a). Para este mismo valor de  $\gamma$ , pero con  $\epsilon = 0.3$  se observa la primera variación significativa en la circulación del vórtice central (línea negra). Bajo esta perturbación, la variación en la vorticidad de los satélites es mayor al 2%.

Para valores de  $\gamma = 1.5$  (Fig. 9b) obtenemos variaciones en la circulación de los satélites de alrededor del 1% desde una perturbación inicial de  $\epsilon = 0.1$ . Para una perturbación de  $\epsilon = 0.3$  los vórtices 1 y 2 intercambian lugares y por un breve instante los cuatro vórtices se alinean. Cuando esto sucede la trayectoria sobre el espacio de fase se aparta rápidamente de las órbitas periódicas hasta rebotar en la frontera del “circulo físico”.

Cuando la circulación del vórtice central y la de  $\gamma$  son de signo opuesto se observa una tendencia creciente en la variación de las circulaciones de los satélites, la cual termina por deshacer el arreglo geométrico (Fig. 10). Esto sucede incluso para valores de  $\gamma \ll 1$ .

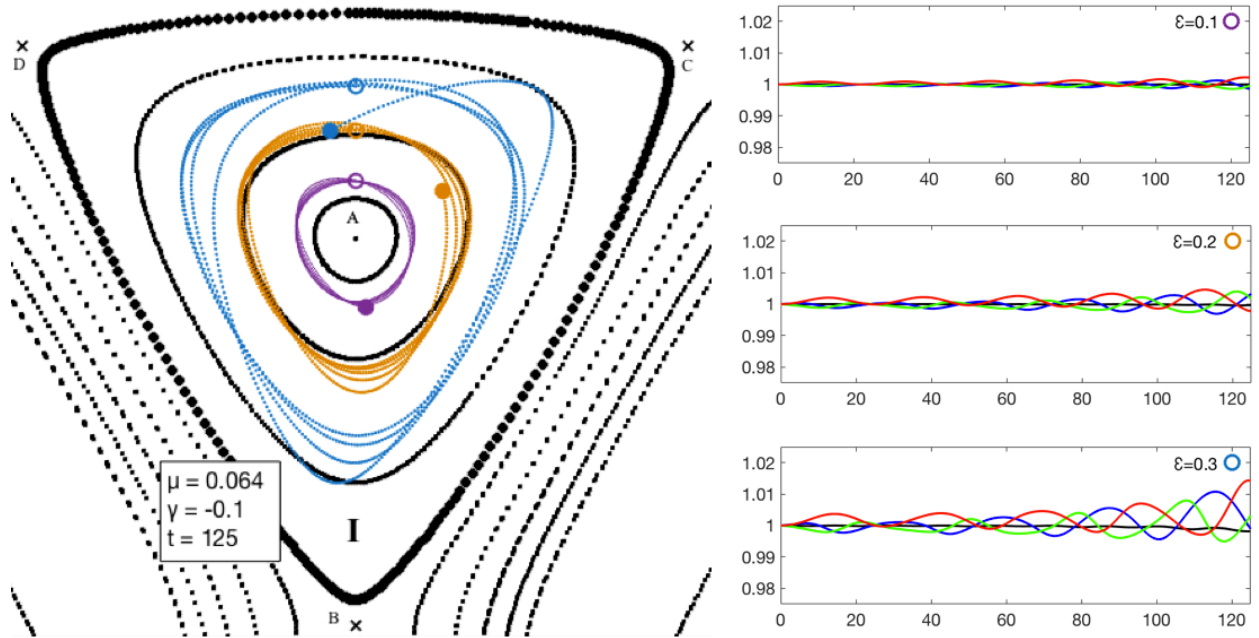


Figura 10. Trayectorias sobre el espacio de fase de Aref & Stremler (1999) de un arreglo de  $(3+1)$  vórtices con circulaciones relativas  $\Gamma_1:\Gamma_2:\Gamma_3:\Gamma_4 = 1:1:1:(-3)$  y perturbaciones de  $\epsilon = 0.1, 0.2$  y  $0.3$  sobre el plano  $\gamma$ . (derecha) La variación en la circulación de los satélites se muestra en rojo, azul, verde y la del vórtice central en negro.  $\gamma = -0.1$ . En esta figura  $\gamma$  y la circulación del vórtice central son de signo contrario.

La advección generada por algunas configuraciones estables del sistema modulado para diferentes valores de  $\gamma, \epsilon$  se presenta en la Fig. 11. En los incisos c), d) y f) de esta figura se observan distribuciones de partículas y “zonas estables” similares a las observadas en las secciones de Poincaré del problema no modulado.

En la Fig. 11a se presenta la distribución inicial de las partículas en los experimentos. En el caso estacionario ( $\epsilon = 0$ ) se observa una distribución uniforme entre las partículas que identifican a cada vórtice (Fig. 11b). Al avanzar en el tiempo las partículas se distribuyen hasta la frontera de los vórtices permitiéndonos visualizar las separatrices del flujo. El quinto grupo de partículas azul claro no entra en ningún vórtice y únicamente rota alrededor del sistema. En esta figura puede observarse que la configuración estacionaria de triángulo equilátero continua siendo un punto fijo si  $\gamma \neq 0$ .

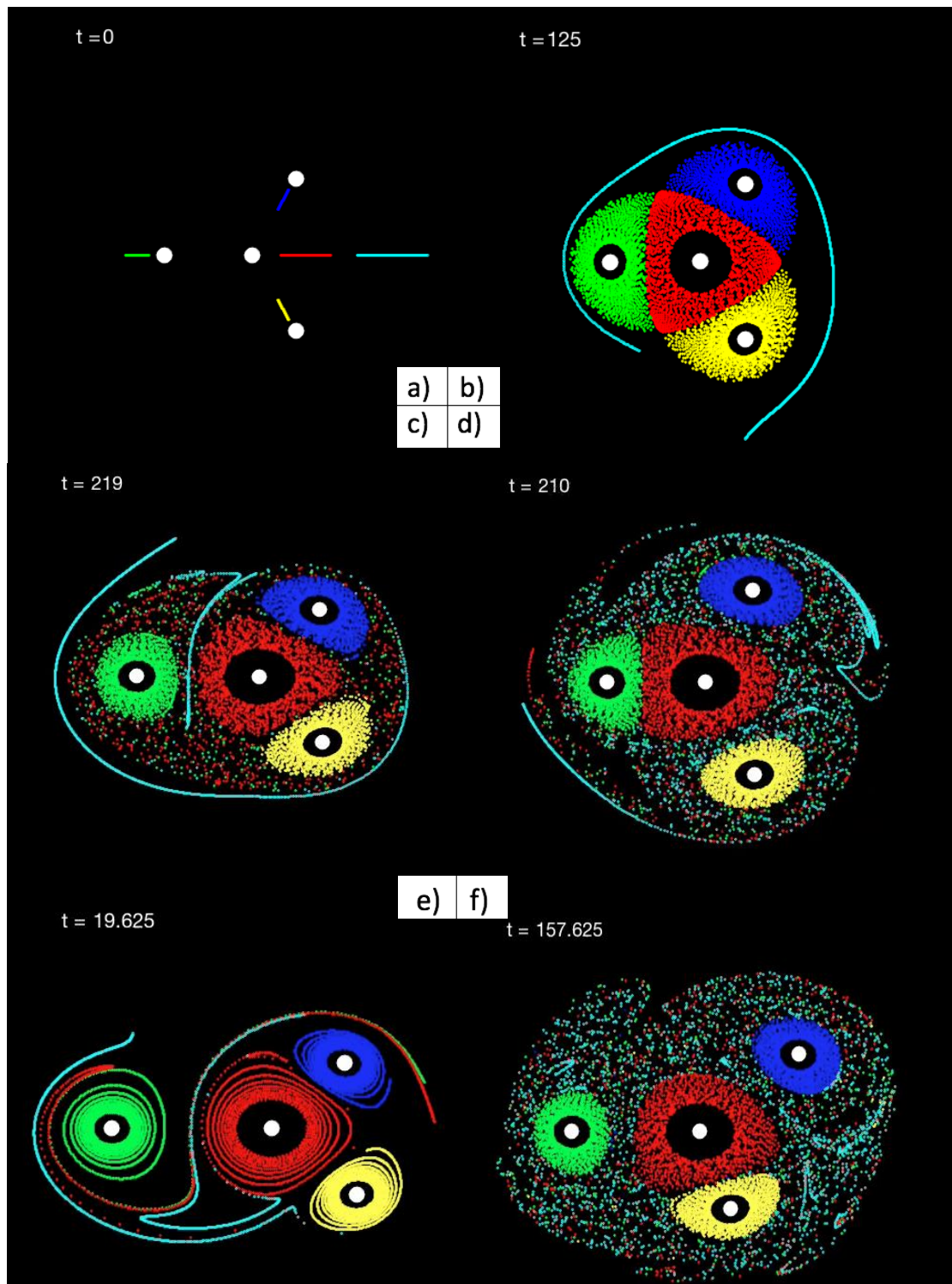


Figura 11. Posiciones de partículas pasivas advectadas por diferentes arreglos de (3+1) vórtices con circulación modulada e intensidades relativas iniciales de  $\Gamma_1:\Gamma_2:\Gamma_3:\Gamma_4 = 1:1:1:(-3)$ . Los vórtices son los círculos blancos rodeados de partículas azules(1), verdes (2), amarillas (3) y rojas (4). En todas las figuras el vórtice central (4) se encuentra en el origen. Las partículas azul claro fueron posicionadas inicialmente fuera del sistema (a). El tiempo de simulación aparece en la parte superior izquierda de cada figura. a) Configuración inicial de las partículas en los experimentos. b) Triángulo equilátero ( $\epsilon = 0, \gamma = 0.5$ ). En b) las partículas azul claro únicamente rotan alrededor del sistema. c)  $\epsilon = 0.2, \gamma = 1$ . d)  $\epsilon = 0.3, \gamma = 0.5$ , los incisos e) y f) representan la misma simulación en distintos tiempos ( $\epsilon = 0.4, \gamma = 0.05$ ). En f) se aprecia como las partículas que inicialmente se encontraban fuera del sistema (azul claro) son incorporadas y dispersadas completamente dentro del mar caótico.

Con una perturbación de  $\epsilon = 0.2$  (Fig. 11c) y  $\gamma = 1$  puede observarse la presencia de un mar caótico conformado por partículas de los vórtices 2 (verdes) y 4 (rojas). También puede observarse cómo un conjunto de partículas azul claro son incorporadas al sistema. En estas partículas se identifica claramente el estiramiento y doblamiento de elementos de fluido.

Con una perturbación de  $\epsilon = 0.3$  (Fig. 11d) y  $\gamma = 0.5$  se puede observar la presencia de islas de estabilidad (ajenas a los cuatro vórtices) en regiones similares a las que se observan en el caso no modulado. Esta condición inicial genera un mar caótico de mayor área que el anterior. Conformado en su mayoría por partículas azul claro, junto con partículas verdes y rojas. Resulta interesante el que un gran porcentaje de las trayectorias caóticas que se observan en esta figura pertenecen a las partículas que se encontraban inicialmente fuera del sistema.

Para un valor de  $\epsilon = 0.4$  (Fig. 11f) puede observarse que incluso para un valor muy pequeño de  $\gamma$  ( $\gamma = 0.05$ ), prácticamente todas las partículas azul claro que se encontraban inicialmente fuera ahora siguen trayectorias caóticas dentro del sistema. En el mar caótico de esta figura se pueden observar partículas de todos los colores. En la Fig. 11e se observan un par de lóbulos provenientes del vórtice central conteniendo partículas rojas y azul claro que se adentran en el vórtice 2 (verde). Otro grupo de partículas azul claro es estirada en dirección contraria entre los vórtices 3 (amarillo) y 4 (rojo).

En la Fig. 12 se presentan las posiciones de las partículas advectadas por algunas configuraciones inestables. Los incisos a), b) y c) representan valores iniciales de  $\epsilon = 0.3$ ,  $\gamma = 1$ . Esta condición inicial aparenta ser estable (Fig. 9a), pero para un tiempo avanzado los vórtices 1 (azul) y 2 (verde) comienzan a intercambiar masa y al tiempo  $t \approx 350$  todos los vórtices se alinean y el vórtice 1 pasa entre los vórtices 2 y 4. Los vórtices 1 y 2 (verde y azul) intercambian una gran cantidad de masa. El vórtice 1 además captura algo de masa del central (rojo). Los vórtices 1 y 2 continúan intercambiando lugares y masa hasta que en poco tiempo ya no se distinguen (Fig. 12c). Esto genera que el área del mar caótico crezca considerablemente. Se observa además una gran isla de estabilidad entre los vórtices 3 y 4 (amarillo y rojo).



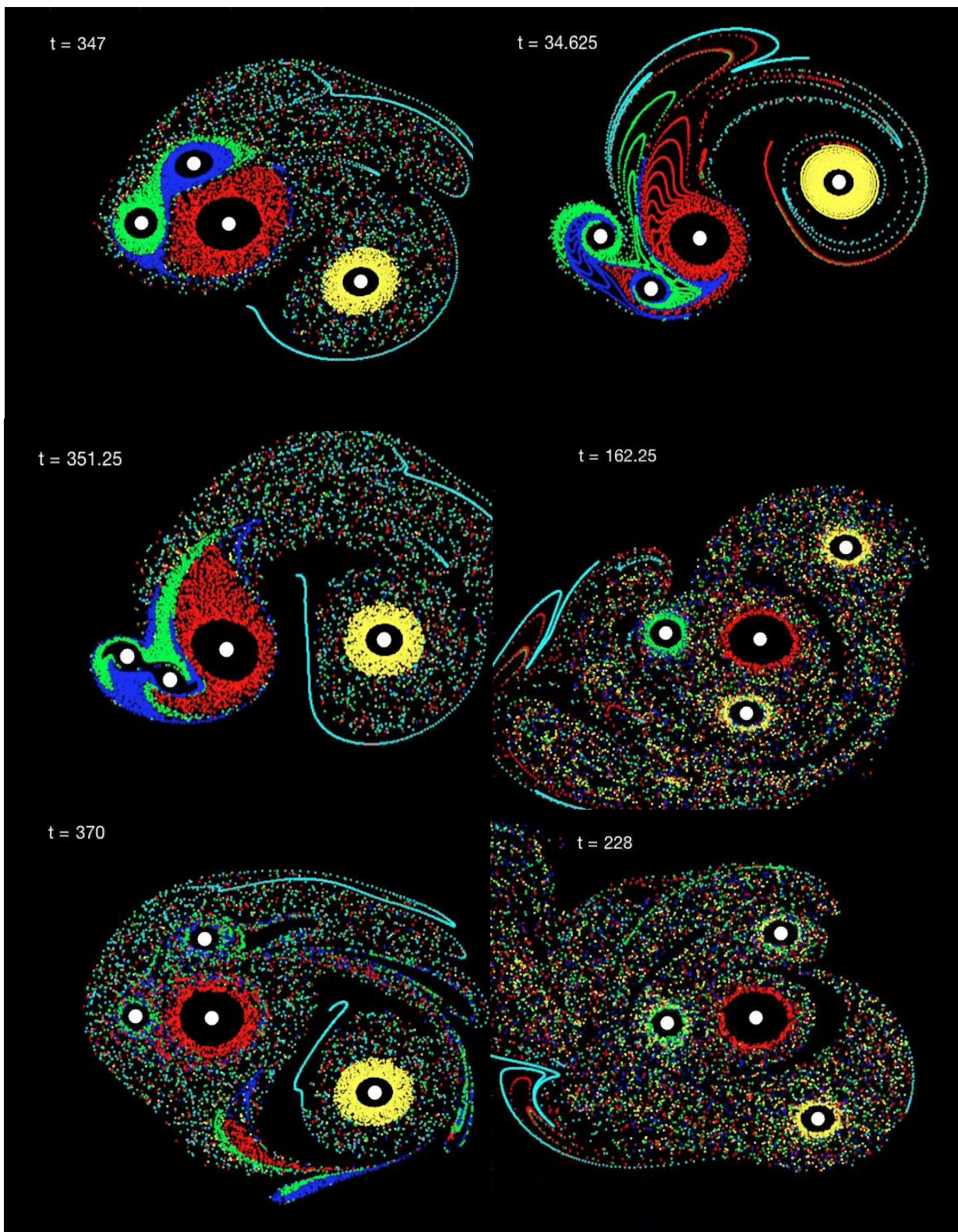


Figura 12. Las figuras en la columna izquierda representan diferentes tiempos para la condición inicial inestable con  $(\epsilon = 0.3, \gamma = 1)$ . Las de la columna derecha representan diferentes tiempos para la condición inicial inestable con  $\epsilon = 0.4, \gamma = 0.5$ .

En el inciso d), e) y f) se presentan condiciones iniciales con  $\epsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 0.5$ . Al igual que en las figuras anteriores el vórtice 1 (azul) pasa entre los vórtices 2 y 4 (verde y rojo) pero a diferencia del caso anterior esto ocurre a un tiempo  $t \approx 33$ . Los vórtices intercambian lugares varias veces y en poco tiempo se puede observar un gran mar caótico. Se observan algunas estrechas islas de estabilidad identificadas por áreas sombreadas (Fig. 12e, f). Contrariamente a la condición inicial de los incisos a), b) y c) ahora en lo incisos e), f) no podemos distinguir entre los vórtices 1 y 3 (azul y amarillo). De igual manera se observa que la concentración de partículas verdes en el vórtice 2 disminuye entre ambas figuras.



## Capítulo 4. Conclusiones

---

Las configuraciones estables para el problema de  $(N+1)$  vórtices para  $2 \leq N \leq 10$  fueron obtenidas por medio de experimentos numéricos. Los rangos obtenidos coinciden en los arreglos con  $N \geq 4$  con los valores presentados por Morikawa & Swenson (1971) y por Cabral & Schmidt (2000).

En el caso de los "límites" inferiores de  $\Gamma_0/\Gamma$  (base de las barras de la Fig. 4) los valores son muy similares. En los límites superiores (tapa de las barras de la Fig. 4) los valores de ambos autores son mayores que los nuestros. Esta diferencia se mantiene para los diferentes valores de  $N \geq 4$ , sin embargo los datos siguen la misma tendencia. Las configuraciones con  $N \geq 7$  solo son estables si el vórtice central y los satélites son del mismo signo. Los arreglos con  $4 \leq N \leq 6$  pueden ser estables cuando el vórtice central y los satélites son de signo opuesto únicamente cuando la intensidad del vórtice central es relativamente pequeña.

Se obtuvieron las trayectorias sobre el espacio de fase, así como la advección generada por diferentes condiciones iniciales para el problema de  $(3+1)$  vórtices. Las trayectorias obtenidas (Fig. 5) concuerdan perfectamente con el espacio de fase que se presenta en Aref & Strempler (1999). Sobre este espacio de fase se estudió en específico la evolución de las soluciones periódicas en la vecindad del punto A (región I), la cual representa a la configuración estacionaria de triángulo equilátero.

En el estudio sobre la advección generada por estas soluciones periódicas se observa la presencia de trayectorias caóticas, así como de islas de estabilidad. El área ocupada por el mar caótico se incrementa a medida que aumentamos la perturbación inicial del sistema.

Se comprobó la estabilidad del problema de  $(3+1)$  vórtices puntuales con circulaciones relativas  $\Gamma_1: \Gamma_2: \Gamma_3: \Gamma_4 = 1: 1: 1: (-3)$  sobre el plano  $\gamma$ , utilizando el espacio de fase del problema no modulado. Al introducir  $\gamma$ , el espacio de fase del problema deja de ser el presentado por Aref & Strempler (1999), sin embargo al proyectar las trayectorias del problema con  $\gamma \neq 0$  sobre este espacio de fase se observa que el sistema evoluciona de manera similar al caso en el que las circulaciones son constantes. Los arreglos permanecen estables para valores de  $\gamma \leq 1, \epsilon \leq 0.3$ . Las condiciones iniciales trazan trayectorias cuya geometría se asemeja a las orbitas cerradas del problema no modulado.

La advección generada por las diferentes condiciones iniciales del caso modulado presenta características similares a las del caso no modulado para valores pequeños de  $\epsilon \leq 0.3$ . En ambos casos se observa la presencia de trayectorias caóticas, así como de islas de estabilidad en todos los casos en los que  $\epsilon \neq 0$ .

La presencia de islas de estabilidad en los resultados con plano  $\gamma$  nos indica que las regiones polares son más permisivas en cuanto a que sistemas multipolares complejos permanezcan estables. Quizá podríamos atribuirle a esto el que las estructuras presentes en los polos de los gigantes gaseosos hayan podido ser observadas por tanto tiempo.

## Literatura citada

---

- Adriani, A., et al. (2018). Clusters of cyclones encircling Jupiter's poles. *Nature*, 555(7695), 216.
- Aguiar, A. C. B., Read, P. L., Wordsworth, R. D., Salter, T., & Yamazaki, Y. H. (2010). A laboratory model of Saturn's North Polar Hexagon. *Icarus*, 206(2), 755-763.
- Aref, H., & Stremler, M. A. (1999). Four-vortex motion with zero total circulation and impulse. *Physics of Fluids*, 11(12), 3704-3715.
- Aref, H., Newton, P. K., Stremler, M. A., Tokieda, T., & Vainchtein, D. L. (2003). *Vortex crystals*. Advances in Applied Mechanics 39, Pages 1-79.
- Cabral, H. E., & Schmidt, D. S. (2000). Stability of relative equilibria in the problem of  $N+1$  vortices. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 31(2), 231-250.
- Descartes, R. (1998). *Descartes: The world and other writings*. Cambridge University Press.
- Kirchhoff, G. (1883). *Mechanik, Vorlesungen über mathematische Physik (Vol. 1)*. Teubner.
- Maxwell, J. C. (1859). On the Stability of the Motion of Saturn's Rings; *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 19, 297-304.
- Morikawa, G. K., & Swenson, E. V. (1971). Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices. *The Physics of Fluids*, 14(6), 1058-1073.
- National Hurricane Center. (NHC). Recuperado en 2018 de: <http://www.atmos.albany.edu/facstaff/kristen/wrf/wrf.html>
- Newton, P. K. (2013). *The N-vortex problem: analytical techniques (Vol. 145)*. Springer Science & Business Media.
- Sánchez-Lavega, A., Lecacheux, J., Colas, F., & Laques, P. (1993). Ground-based observations of Saturn's north polar spot and hexagon. *Science*, 260(5106), 329-332.
- Thomson, J. J. (1883). *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*: Macmillan.
- Thomson, W. (1867). II. On vortex atoms. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(227), 15-24.
- Trieling, R. R., Van Heijst, G. J. F., & Kizner, Z. (2010). Laboratory experiments on multipolar vortices in a rotating fluid. *Physics of Fluids*, 22(9), 094104.
- Van Heijst, G. J. F., & Kloosterziel, R. C. (1989). Tripolar vortices in a rotating fluid. *Nature*, 338(6216), 569.
- Velasco Fuentes, O. U. (1994). Propagation and transport properties of dipolar vortices on a  $\gamma$  plane. *Physics of Fluids*, 6(10), 3341-3352.
- Velasco Fuentes, O. U., Van Heijst, G. J. F., & Van Lipzig, N. P. M. (1996). Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole. *Journal of Fluid Mechanics*, 307, 11-41.

Velasco Fuentes, O. U. (2003) ¡Larga vida al vórtice!. Ciencia y Desarrollo, vol. XXIX, no. 169, 23-29.