

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Doctorado en Ciencias  
en Ciencias de la Tierra  
con orientación en Geofísica Aplicada**

---

**Inversión conjunta de sondeos galvánicos y electromagnéticos  
transitorios en la presencia de Polarización Inducida**

Tesis  
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias

Presenta:

**Salvador García Fiscal**

Ensenada, Baja California, México  
2019

Tesis defendida por  
**Salvador García Fiscal**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Carlos Francisco Flores Luna**  
Director de tesis

Miembros del comité

**Dr. Enrique Gómez Treviño**

**Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado**

**Dra. Claudia Arango Galván**



---

**Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado**  
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la  
Tierra

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**  
Directora de Estudios de Posgrado

*Salvador García Fiscal © 2019*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis.*

Resumen de la tesis que presenta **Salvador García Fiscal** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

**Inversión conjunta de sondeos galvánicos y electromagnéticos transitorios en la presencia de Polarización Inducida**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Carlos Francisco Flores Luna  
**Director de tesis**

El método de Polarización Inducida (PI) es una herramienta valiosa en la exploración de recursos naturales y estudios ambientales. En años recientes, la constante de tiempo de la expresión Cole-Cole se ha relacionado con la conductividad hidráulica y otros parámetros hidrológicos. Sin embargo, la constante de tiempo es generalmente el peor resuelto de los cuatro parámetros Cole-Cole. En el presente trabajo, se intentó solucionar este problema mediante la inversión conjunta de tres tipos de datos geofísicos: datos de PI Espectral (SIP), datos de PI en el dominio del tiempo o PI transitorio (TIP), y datos de Sondeos Electromagnéticos Transitorios con arreglo de espira interior (TEM). Primero, se calcularon las sensibilidades y resoluciones de los parámetros mediante una Descomposición de Valores Singulares (SVD) de la matriz de sensibilidad para una serie de modelos homogéneos y de dos capas. En general, los datos de SIP tuvieron las mejores resoluciones, seguido de los datos TIP y TEM. Cuando el medio polarizable está enterrado bajo una capa sin PI, las incertidumbres del método TEM se incrementaron notablemente. Posteriormente se realizaron inversiones conjuntas de datos sintéticos producidos por modelos similares a los utilizados en el cálculo de incertidumbres utilizando un algoritmo SVD. La inversión conjunta mostró mejores resultados para la constante de tiempo en el 60% de los casos en comparación con las inversiones individuales. No obstante, aunque la inversión conjunta fue mejor que la inversión individual, ésta no fue tan buena como se esperaba. Dichos resultados ponen en evidencia el mal condicionamiento del problema inverso.

**Palabras clave: Método de Polarización Inducida, Modelo Cole-Cole, Resolución, Inversión Conjunta.**

Abstract of the thesis presented by **Salvador García Fiscal** as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

**Joint Inversion of galvanic and transient electromagnetic soundings in presence of Induced Polarization**

Abstract approved by:

---

Dr. Carlos Francisco Flores Luna  
Thesis Director

The Induced Polarization (IP) method is recognized as a valuable geophysical tool for resource exploration and environmental studies. In recent years, the time constant of the Cole-Cole expression has been related to the hydraulic conductivity and other hydrologic parameters. Nevertheless, the time constant is generally the least well resolved of the four Cole-Cole parameters. In this work, we tried to solve this problem by performing the joint inversion of three geophysical data types: Spectral IP (SIP) data, time-domain or Transient IP (TIP) data, and the in-loop Transient Electromagnetic (TEM) sounding data. First, the sensitivities and parameter uncertainties were calculated by a Singular Value Decomposition (SVD) of the sensitivity matrix for a series of homogeneous and two-layered models. In general, the SIP data give the best parameter resolutions, followed by the TIP and TEM data. When the polarizable medium is buried under a non-polarizable layer, the uncertainties of the TEM method increase notably. Then we performed joint inversions of synthetic data for similar models as those employed in the resolution study using an SVD algorithm. The joint inversion showed better results solving the time constant in 60% of the cases compared with individual inversions. Although joint inversion was better than the individual inversion, it was not as superior as we expect. These results showed the ill-posedness of the inverse problem.

**Keywords: Induced Polarization Method, Cole-Cole model, Resolution, Joint Inversion.**

## **Dedicatoria**

A mi familia: ¡Muchas gracias por su apoyo!

A mi director de tesis, Dr. Carlos Francisco Flores Luna: ¡Muchas gracias por todo su apoyo y sus enseñanzas! ¡Realmente fue un honor haber trabajado en este proyecto con usted!

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) que nuevamente me abrió las puertas una vez concluidos mis estudios de maestría para, en esta ocasión, permitirme realizar el doctorado.

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su apoyo con beca de manutención durante 4 años (número de becario 18389) además de apoyarme con el costo de las reinscripciones durante toda mi estancia de doctorado.

Al posgrado de Ciencias de la Tierra por brindarme las facilidades para llevar a cabo mi proyecto tales como espacio de trabajo, computadora, becas. Además al personal académico, técnico y administrativo por su apoyo y orientación durante todos estos años.

Al Dr. Carlos Francisco Flores Luna, mi director de tesis, que me ofreció la oportunidad y creyó en mí para llevar a cabo este proyecto tan importante. Espero que haya trabajado tan a gusto así como yo lo hice.

A mi comité de tesis: Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado, Dr. Enrique Gómez Treviño y Dra. Claudia Arango Galván, cuyo consejo y guía fueron fundamentales en el desarrollo y conclusión de mi doctorado.

A mis compañeros y amigos Adrián León, Froylán Rosas, Leydi Leyva que, con su compañía, ayudaron a que esta etapa fuera mucho más fácil. Además de otros compañeros que me apoyaron durante la etapa de materias.

En general a todo el personal de CICESE.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatorias.....	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	viii
Lista de tablas.....	ix
<b>Capítulo 1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1    Antecedentes.....	1
1.1.1 Polarización Inducida.....	2
1.1.2 Origen de PI.....	3
1.1.3 Medición de PI.....	5
1.1.3.1 PI tradicional galvánico.....	5
1.1.3.2 Métodos espectrales galvánicos.....	6
1.1.3.3 Métodos electromagnéticos.....	6
1.1.4 El modelo Cole-Cole.....	7
1.2    Hipótesis.....	9
1.3    Objetivos.....	9
1.3.1 Objetivo general .....	9
1.3.2 Objetivos particulares.....	10
<b>Capítulo 2. Metodología.....</b>	<b>11</b>
2.1    Métodos numéricos para el modelado directo.....	11
2.1.1 Métodos galvánicos.....	11
2.1.2 Método electromagnético.....	14
2.2    Sensibilidades.....	17
2.3    Resolución.....	19
2.4    Incertidumbres.....	20
2.5    Inversión.....	21
<b>Capítulo 3. Resultados.....</b>	<b>26</b>
3.1    Sensibilidades.....	26

3.2 Resoluciones.....	27
3.2.1 Incertidumbres de un semiespacio polarizable.....	30
3.2.2 Incertidumbres para un medio de dos capas.....	37
3.3 Inversión.....	40
3.3.1 Semiespacio homogéneo.....	40
3.3.2 Caso estratificado.....	45
3.3.3 Inversiones Monte Carlo.....	46
<b>Capítulo 4. Discusión.....</b>	<b>50</b>
4.1 Resoluciones.....	51
4.2 Inversion.....	55
<b>Capítulo 5. Conclusiones.....</b>	<b>57</b>
<b>Literatura citada.....</b>	<b>59</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>63</b>

## Lista de figuras

Figura		Página
1	Curva del decaimiento del voltaje para un medio polarizable a partir del corte de la corriente.....	2
2	Diagrama del fenómeno de polarización inducida metálica.....	4
3	Diagrama del fenómeno de polarización inducida de membrana para una arenisca. a) Sin aplicar corriente eléctrica. b) Con la corriente eléctrica encendida. Modificado de Ward y Fraser (1967).....	4
4	Diagrama del fenómeno de polarización inducida para el caso de una partícula de sílice. Debido a la influencia del campo eléctrico aplicado, los iones se polarizan alrededor del grano de sílice, que tiene carga negativa; mediante reacciones de oxidación-reducción cambia el número de cationes alrededor de esta partícula. Del lado izquierdo disminuye el número de iones positivos y del lado derecho, aumenta. Esta diferencia de concentración en las capas Stern y difusa produce un campo eléctrico $E_{pi}$ de dirección opuesta al campo externo. Simplificado de Revil et al., 2012.....	5
5	Curvas de amplitud (azul) y de fase (roja) correspondientes al método PI Espectral en el dominio de la frecuencia (SIP) .....	8
6	Voltaje normalizado vs tiempo para el método de PI Espectral en el dominio del tiempo (TIP).....	8
7	Decaimiento del logaritmo del valor absoluto del voltaje graficado contra el tiempo. Los últimos 5 tiempos (cruces color rojo) indican voltajes negativos, característica distintiva de la presencia de PI. ....	9
8	Esquema del arreglo de los bipolos transmisor (izquierda) y receptor (derecha) empleado en el cálculo del problema directo para los métodos SIP y TIP. a) Vista en planta. b) Vista de perfil.....	13
9	Respuestas de los tres métodos calculados para el mismo modelo Cole-Cole [ $\rho_0 = 100 m = .5 \tau = 1 c = .5$ ]. a) Componentes real e imaginaria de la resistividad aparente en función de la frecuencia con un arreglo dipolo-dipolo ( $a=10 m, n=1$ ), método SIP. Las líneas cortadas indican el modelo Cole-Cole intrínseco el cual no incluye el efecto de acoplamiento electromagnético. b) Curva de decaimiento de voltaje contra tiempo del método TIP (mismo arreglo de electrodos). Se incluye el valor del voltaje primario ( $V_p$ ). c) Voltajes del método TEM con arreglo de bobina central producido con una espira transmisora de 25 x 25 m, mostrando el cambio de signo en tiempos largos.....	16

10	Leyes de potencia empleadas para definir los errores en los voltajes. a) Para los métodos galvánicos (SIP y TIP) (Zhou and Dahlin, 2003). b) Para el método TEM (Flores et al., 2013).....	18
11	Esquema general de la matriz de eigenparámetros. A la derecha se incluye el error estándar.....	20
12	Diagrama de flujo del algoritmo de inversión. Éste es el mismo tanto para el caso individual como para el caso conjunto.....	24
13	Esquema general de la matriz jacobiana para una inversión conjunta; en este caso se trata de una inversión con los tres métodos (SIP, TIP y TEM) para un semiespacio homogéneo con 8 valores por método.....	25
14	Valores absolutos de las sensibilidades de los métodos SIP (a), TIP (b), y TEM (c) para un semiespacio homogéneo polarizable con parámetros Cole-Cole [100 .5 1 .5]. Del lado derecho de cada gráfica se indican las medias aritméticas de los cuatro parámetros.....	28
15	Elementos de la matriz de eigenparámetros $V^T$ para el modelo de referencia [100 .5 1 .5]. a) Método SIP. b) Método TIP. c) Método TEM. Los círculos en líneas cortadas denotan valores negativos. Existen cuatro combinaciones lineales de los parámetros (renglones) y cuatro columnas (parámetros Cole-Cole) por cada método. d) Valores singulares en orden decreciente de los tres métodos. e) Incertidumbres de los tres métodos para los cuatro parámetros.....	29
16	Incertidumbres de los parámetros Cole-Cole para un rango de constantes de tiempo desde 0.001 a 1000 s para los métodos SIP (a), TIP (b) y TEM (c). Efectos de reducir la resistividad dc a 10 $\Omega$ m (columna de la izquierda) y aumentarla a 1000 $\Omega$ m (columna de la derecha), comparados con el modelo de referencia de 100 $\Omega$ (columna de en medio). Las incertidumbres de las constantes de tiempo de los modelos intrínsecos Cole-Cole se incluyen en la gráfica superior izquierda.....	32
17	Histograma de las constantes de tiempo medidas en 138 muestras de arenisca y muestras sintéticas (Scott y Barker, 2003; Binley et al., 2005; Kruschwitz et al., 2010; Koch et al., 2011; Volkman y Klitzch, 2016) .....	35
18	Comportamiento de las incertidumbres en función de la constante de tiempo agrupadas por método.....	36
19	Número de ocurrencias (en porcentaje) que los cuatro parámetros Cole-Cole ocuparon del primer al cuarto lugar en calidad de resolución para los tres métodos.....	37

20	Modelo de dos capas. Incertidumbres de los parámetros para constantes de tiempo de 0.001 a 10 s de los métodos SIP (a), TIP (b) y TEM (c). Las dos columnas de la derecha corresponden a las incertidumbres de la primera y segunda capa para el modelo de referencia. Las dos columnas de la izquierda corresponden al modelo de referencia cambiando la cargabilidad a 0.1.....	39
21	Curvas de porcentaje de error de la constante de tiempo vs log de $\tau$ . Los puntos rojos corresponden a las inversiones conjuntas, los azules al método SIP, los negros a TIP y los verdes a TEM. Las cuatro gráficas corresponden al modelo inicial empleado: a) modelo con todos los parámetros arriba del valor real, b) modelo con todos los parámetros abajo del valor real, c) $\rho_0$ y $\tau$ arriba del modelo verdadero y $m$ y $c$ abajo, d) $\rho_0$ y $\tau$ abajo del modelo verdadero y $m$ y $c$ arriba.....	42
22	Curvas de porcentaje de error de la constante de tiempo vs log $\tau$ . Los puntos rojos corresponden a las inversiones conjuntas, los azules al método SIP, los negros a TIP y los verdes a TEM. Las cuatro gráficas corresponden al modelo inicial empleado: a) modelo con todos los parámetros arriba del valor real, b) modelo con todos los parámetros abajo del valor real, c) $\rho_0$ y $\tau$ arriba del modelo verdadero y $m$ y $c$ abajo, d) $\rho_0$ y $\tau$ abajo del modelo real y $m$ y $c$ arriba.....	44
23	Curvas de porcentaje de error de la constante de tiempo vs log de $\tau$ . Los puntos rojos corresponden a las inversiones conjuntas, los azules al método SIP, los negros a TIP y los verdes a TEM. Las gráficas corresponden al modelo inicial empleado: a) modelo con todos los parámetros arriba del valor real, b) modelo con todos los parámetros abajo del valor real.....	46
24	<i>Izquierda:</i> Curvas de porcentaje de error de la constante de tiempo vs número de inversión Monte Carlo. <i>Derecha:</i> Valores de rms vs número de inversión Monte Carlo. Puntos azules corresponden al caso homogéneo, puntos rojos al caso de dos capas. Los modelos tenían un valor de $\tau = 1$ s.....	48
25	<i>Izquierda:</i> Curvas de porcentaje de error de la constante de tiempo vs número de inversión Monte Carlo. <i>Derecha:</i> Valores de rms vs número de inversión Monte Carlo. Puntos azules corresponden al caso homogéneo, puntos rojos al caso de dos capas. Los modelos tenían un valor de $\tau = 10$ s. ....	49
26	Contornos de densidad de corriente a diferentes tiempos para un modelo polarizable de dos capas. Las fuentes son dos corrientes lineales 2D de polaridad opuesta localizadas en $x=-75$ y $75$ m, simulando una espira de $150 \times 150$ m (modificado de Flores et al., 2013).....	53
27	Porcentaje global de ocurrencias en que cada método presentó el menor porcentaje de error en la constante de tiempo. La figura comprende un total de 375 inversiones tomando en cuenta todos los casos y combinaciones explicados en el capítulo 3.....	56

# Capítulo 1. Introducción

---

## 1.1 Antecedentes

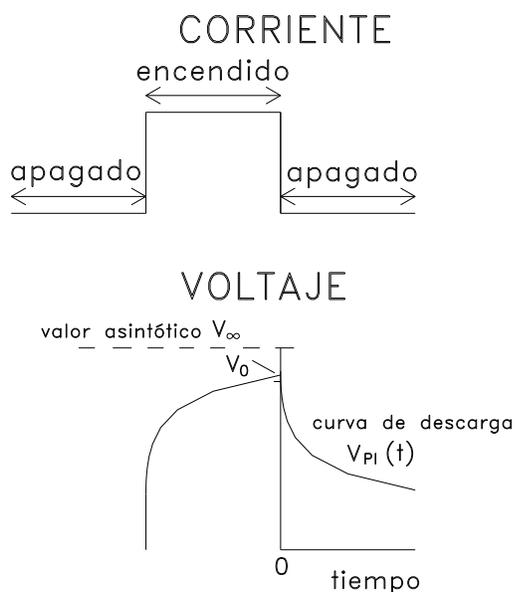
La exploración geofísica tiene como finalidad conocer la composición y la estructura interna de la Tierra mediante la información proveniente de mediciones en la superficie o en el subsuelo producidas por procesos físicos, ya sea con fines académicos o de explotación de recursos minerales (Meju, 1994). Para lograr esto, la geofísica comprende una gran variedad de métodos que permiten estimar diferentes propiedades físicas del subsuelo. Estas mediciones se relacionan matemáticamente con propiedades físicas mediante ecuaciones. Por ejemplo, la aceleración de la gravedad (respuesta geofísica) se relaciona con la densidad del suelo (propiedad física) mediante la Ley de Gravitación Universal de Newton. Cuando se calcula una respuesta (como la aceleración de la gravedad) mediante el control de los parámetros (densidad, dimensiones de un cuerpo, volumen) se dice que se hace un modelado directo. Caso contrario, si mediante el uso de la respuesta medida se pretende obtener la distribución de la propiedad física en el subsuelo, se hace un modelado inverso o inversión. Siguiendo con el ejemplo de gravimetría, si se desea obtener las dimensiones de un cuerpo que produce una anomalía, el modelado inverso de los datos permite obtener las dimensiones de dicho cuerpo (modelo) que reproducen las mediciones tomadas en el campo.

Puesto que todo método geofísico tiene sus limitaciones, para minimizar éstas es práctica común utilizar información geológica, datos de pozo u otro método geofísico para constreñir el modelo del subsuelo. Cuando se hace modelado inverso combinando datos de diferentes métodos geofísicos se dice que se está realizando inversión conjunta. Con la inversión conjunta se pueden obtener mejores resultados que si los parámetros se estimaran mediante inversiones separadas (Hering et al., 1995).

El método geofísico que concierne en esta tesis es el de Polarización Inducida (PI). En este trabajo se realizó inversión conjunta para datos de PI obtenidos mediante tres métodos diferentes, los cuales se explicarán más adelante.

### 1.1.1 Polarización Inducida

La Figura 1 ayuda a entender qué es y cómo funciona el fenómeno de polarización inducida PI. Supóngase que se está inyectando corriente al subsuelo mediante un arreglo de electrodos, de manera muy similar al método de resistividad; si el subsuelo no es polarizable, después de que se apaga la corriente el potencial eléctrico medido entre los electrodos de potencial es cero. En contraste, si el subsuelo es polarizable, se observará que este potencial no desciende a cero sino que va reduciendo su magnitud mediante un decaimiento que puede durar desde algunos segundos hasta varios minutos (Bertin & Loeb, 1976). La medición e interpretación de este voltaje de decaimiento constituye un aspecto del método de Polarización Inducida. La forma de la corriente inyectada es un pulso cuadrado o función boxcar que es apagada en el tiempo  $t = 0$ ; en ese punto el voltaje no decae inmediatamente sino que comienza a disminuir de forma asintótica a cero a partir de una amplitud  $V_0$ . En este caso el decaimiento es una función del tiempo  $V_{PI}(t)$  donde el valor en cualquier punto de la curva de descarga es  $V_{PI}$ . Cabe mencionar que PI no es exclusivo del dominio del tiempo, este método también puede ser aplicado en el dominio de la frecuencia, como se verá más adelante. La figura también muestra cómo se manifiesta el fenómeno de polarización inducida durante el proceso de encendido; se puede notar que el voltaje no alcanza su valor máximo de forma instantánea sino que tiene un crecimiento asintótico que tiende a  $V_\infty$ , siendo éste último el valor de voltaje que se mediría si el tiempo de inyección de corriente fuera lo suficientemente grande.



**Figura 1.** Curva del decaimiento del voltaje para un medio polarizable a partir del corte de la corriente.

### 1.1.2 Origen de PI

El fenómeno de Polarización Inducida se origina debido a reacciones electroquímicas complejas que ocurren en los poros de las rocas permeables donde interactúan los iones del electrolito con las partículas sólidas que constituyen la matriz de la roca.

En ausencia de un campo eléctrico externo tanto los iones en el electrolito como las cargas eléctricas de la partícula sólida están distribuidos de manera aleatoria. Cuando se aplica un campo eléctrico, mediante inyección de corriente con electrodos por ejemplo, los cationes fluyen hacia una dirección y los iones negativos fluyen en sentido contrario; en la partícula sólida, las cargas eléctricas se polarizan de manera que los iones del signo opuesto se acumulan en la interfase, esto produce una doble capa eléctrica, llamadas capa Stern y capa difusa, en la que los iones, que son los portadores de carga, disminuyen total o parcialmente su movilidad (Figura 4). Una vez que el campo eléctrico desaparece las condiciones iniciales de los iones tienden a reestablecerse y debido a la movilidad de éstos se percibe un voltaje.

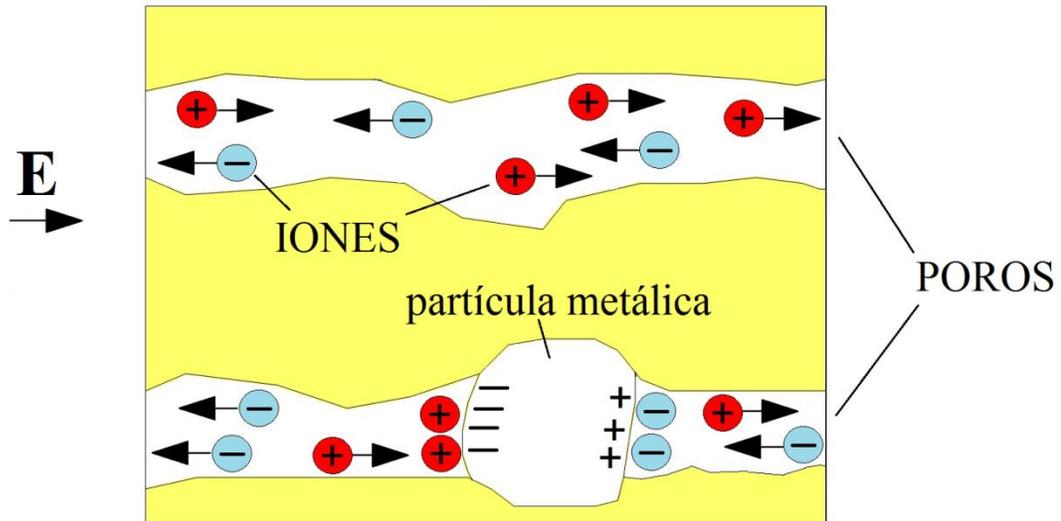
En general, el fenómeno electroquímico de PI se puede clasificar en dos tipos (Bertin & Loeb, 1976; Revil, Karaoulis, Johnson, & Kemna, 2012; Sumner, 1976; Telford, Geldart, & Sheriff, 2001; Ward & Fraser, 1967):

1.- Metálica, electrónica o de electrodos. Se da en metales y minerales conductores. No es necesario que exista continuidad de estos minerales, de hecho la respuesta de PI es más intensa cuando los minerales se encuentran diseminados.

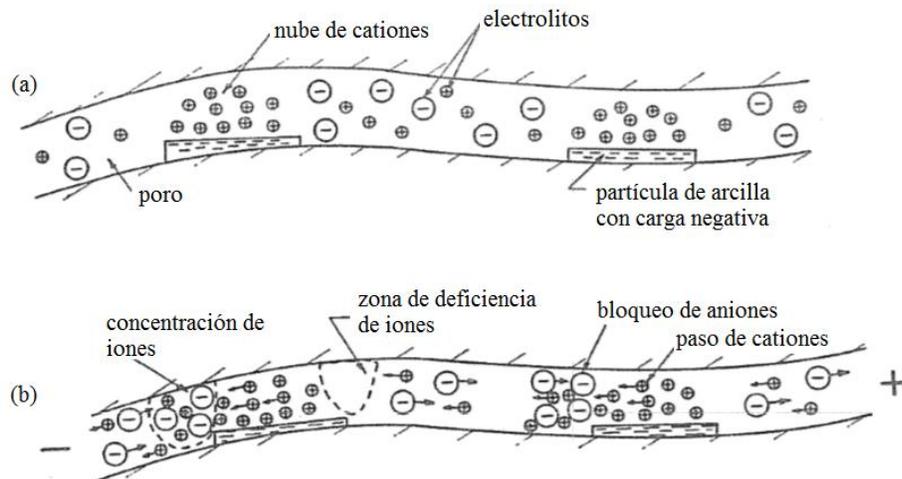
En las partículas metálicas la doble capa eléctrica se compone de iones, en la parte electrolítica, y de electrones, en la superficie de la partícula sólida metálica (Figura 2). Cuando existe corriente eléctrica los iones se acumulan en la interfase con los granos conductores restringiendo su flujo en el electrolito. Una vez que la corriente es apagada los iones regresan lentamente a su posición de equilibrio.

2.- No metálica, electrolítica o de membrana. Generalmente es menos intensa que PI metálica. Se asocia a la presencia de partículas de arcilla cuya superficie está cargada negativamente lo cual induce una acumulación de cationes en el poro formándose la doble capa eléctrica que impide el flujo de iones (Figura 3). Este tipo de polarización se puede presentar también en medios sin partículas de arcilla (Figura 4).

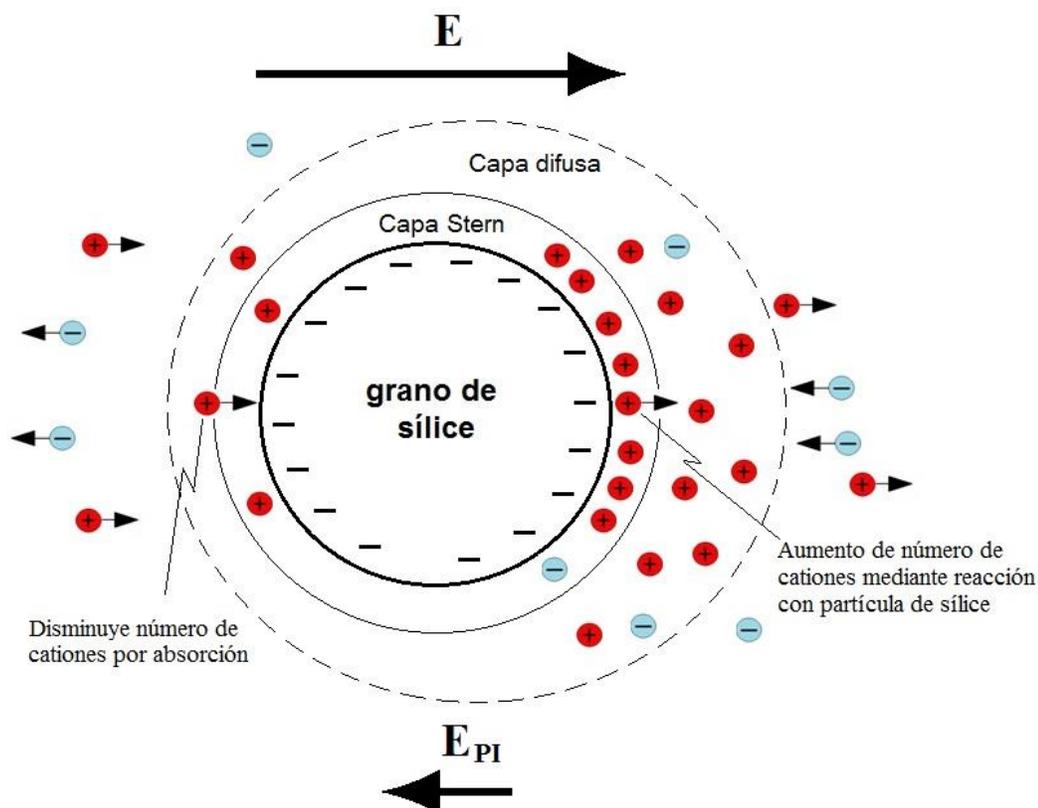
Algunos aspectos importantes por aclarar son que PI es un fenómeno de superficie, no de volumen, ya que solamente el contacto entre el electrolito y las partículas sólidas es importante, es por ello que los minerales diseminados tienen un efecto tan fuerte. Además no hay manera de distinguir del tipo de polarización que se está midiendo, el único parámetro es la intensidad del fenómeno que, como se mencionó anteriormente, es mayor en presencia de partículas metálicas.



**Figura 2.** Diagrama del fenómeno de polarización inducida metálica.



**Figura 3.** Diagrama del fenómeno de polarización inducida de membrana para una arenisca. a) Sin aplicar corriente eléctrica. b) Con la corriente eléctrica encendida. Modificado de Ward & Fraser (1967).



**Figura 4.** Diagrama del fenómeno de polarización inducida para el caso de una partícula de sílice. Debido a la influencia del campo eléctrico aplicado, los iones se polarizan alrededor del grano de sílice, que tiene carga negativa; mediante reacciones de oxidación-reducción cambia el número de cationes alrededor de esta partícula. Del lado izquierdo disminuye el número de iones positivos y del lado derecho, aumenta. Esta diferencia de concentración en las capas Stern y difusa produce un campo eléctrico  $E_{PI}$  de dirección opuesta al campo externo. Simplificado de Revil et al. (2012).

### 1.1.3 Medición de PI

#### 1.1.3.1 PI tradicional galvánico

El método de PI se ha empleado por más de 50 años en una gran variedad de aplicaciones: minería (Pelton, Ward, Hallof, Sill, & Nelson, 1978), geohidrología (Hördt, Blaschek, Kemna, & Zisser, 2007), contaminación (Vanhala, 1997) e hidrocarburos (Sternberg, 1991). Tradicionalmente, dicho método ha sido aplicado principalmente en forma galvánica, que consiste en inyectar corriente en el subsuelo para medir el voltaje resultante con un par de electrodos. Como se mencionó con anterioridad, PI puede ser medido en el dominio del tiempo y de las frecuencias. En el dominio de las frecuencias, y en su modalidad

más simple, se inyecta corriente AC en dos frecuencias diferentes. La diferencia entre estas dos resistividades aparentes permite definir una respuesta llamada efecto de frecuencia, que es una medida de la polarizabilidad del subsuelo. Por otro lado, la forma más sencilla de medir PI en el dominio del tiempo es medir el voltaje cuando se está inyectando corriente y en un solo tiempo después que se apagó la corriente. El normalizar el voltaje de decaimiento medido entre el voltaje primario permite definir una respuesta llamada polarizabilidad aparente, la cual está directamente relacionada con la polarizabilidad del terreno.

Los datos adquiridos con estos métodos galvánicos relativamente sencillos generalmente se interpretan haciendo una aproximación de baja-frecuencia, es decir, se usan métodos numéricos desarrollados para corriente directa.

### **1.1.3.2 Métodos espectrales galvánicos**

Estos métodos son la generalización de los del párrafo anterior. En vez de medir el voltaje en dos frecuencias o en dos tiempos, se mide en muchas frecuencias o en varios tiempos. En el dominio de las frecuencias el método es conocido como de resistividad compleja o SIP (Spectral Induced Polarization). En el dominio del tiempo se denota como TIP (Transient Induced Polarization). En esta tesis se abordarán estos dos métodos. Las Figuras 5 y 6 muestran respuestas de estos dos métodos.

### **1.1.3.3 Métodos electromagnéticos**

Un subsuelo polarizable también puede ser medido de manera inductiva, no mediante inyección de corriente sino empleando corrientes eléctricas inducidas por un campo magnético variable en el tiempo (Gasperikova & Morrison, 2001; Kaufman, Geoltrain, & Knoshaug, 1989; Marchant, Haber, & Oldenburg, 2013; Spies, 1980; Wait & Debroux, 1984). Existe una gran variedad de métodos electromagnéticos. Aquí se analiza el método Electromagnético Transitorio con arreglo “in-loop” o “central loop”, referido aquí como TEM (Transient Electromagnetic) que corresponde a la tercera metodología empleada en la tesis. En esta técnica, un campo magnético primario es creado por la circulación de corriente eléctrica a través de una espira de alambre de forma cuadrada o rectangular; al cortar la corriente se induce un campo eléctrico (Ley de Faraday) y corrientes en el subsuelo (Ley de Ohm). La expansión y difusión en profundidad de esta

corriente produce un campo magnético secundario transitorio, el cual es percibido por una bobina horizontal colocada en el centro de la espira transmisora. La forma y magnitud de la curva del voltaje transitorio medido está en función de la distribución de la resistividad eléctrica en el subsuelo. Una de las características típicas que indican la presencia de PI es el cambio de signo de los voltajes en los tiempos intermedios y largos. La Figura 7 muestra un ejemplo de un sondeo TEM afectado por Polarización Inducida.

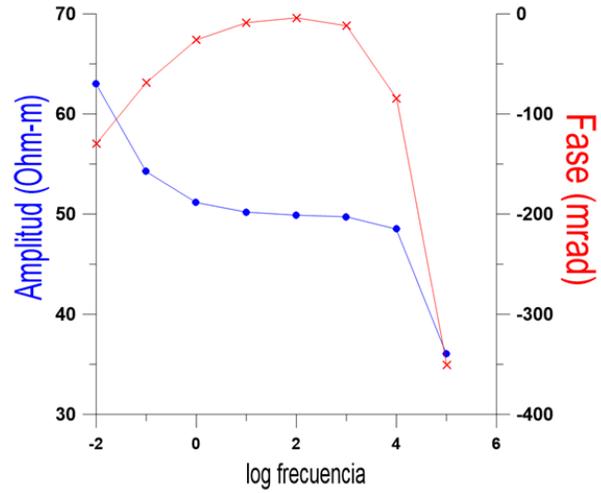
#### 1.1.4 El modelo Cole-Cole

El fenómeno de PI hace que la resistividad eléctrica del subsuelo no sea una constante, sino que dependa de la frecuencia, o análogamente del tiempo. A esta característica de la propiedad física se le conoce como un fenómeno dispersivo. El modelo más utilizado para representar la dispersión de la resistividad es el modelo Cole-Cole (Cole & Cole, 1941; Pelton et al., 1978)

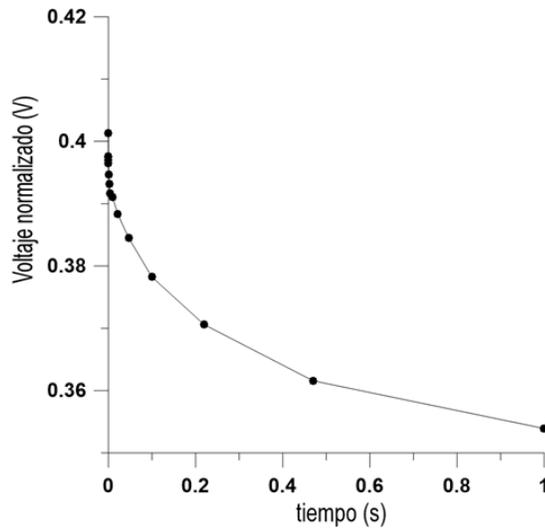
$$\rho(\omega) = \rho_0 \left\{ 1 - m \left[ 1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^c} \right] \right\} \quad (1)$$

el cual depende de cuatro parámetros:  $\rho_0$  - la resistividad dc o resistividad de frecuencia cero ( $\Omega\text{m}$ ),  $m$  - la cargabilidad (adimensional),  $\tau$  - la constante de tiempo (segundos), y  $c$  - el exponente de la frecuencia (adimensional). La resistividad dc y la constante de tiempo tienen un amplio rango de variación, de  $10^{-2}$  a  $10^5 \Omega\text{m}$  y de  $10^{-6}$  a  $10^3$  s, respectivamente, mientras que  $m$  y  $c$  varían de 0 a 1. La constante de tiempo es particularmente importante. En exploración minera este parámetro ha sido empleado, junto con la cargabilidad, como un indicador del tamaño de partículas de sulfuros y para estimar volúmenes de concentración (Flores & Peralta-Ortega, 2009; Pelton et al., 1978; Vanhala & Peltoniemi, 1992).

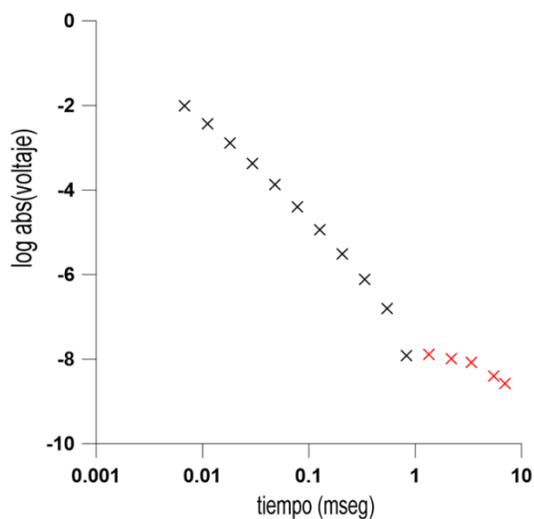
Estudios de laboratorio hechos recientemente para PI Espectral (Binley, Slater, Fukes, & Cassiani, 2005; Kemna et al., 2012; Slater, 2007) mostraron que la constante de tiempo está relacionada con la conductividad hidráulica; esto es un resultado prometedor en geohidrología ya que permitiría estimar la conductividad hidráulica mediante el método de Polarización Inducida. Sin embargo, a pesar de la gran utilidad que puede brindar la constante de tiempo, éste es el parámetro peor resuelto tal y como se verá en el capítulo 3.



**Figura 5.** Curvas de amplitud (azul) y de fase (roja) correspondientes al método PI Espectral en el dominio de la frecuencia (SIP).



**Figura 6.** Voltaje normalizado vs tiempo para el método de PI Espectral en el dominio del tiempo (TIP).



**Figura 7.** Decaimiento del logaritmo del valor absoluto del voltaje graficado contra el tiempo. Los últimos 5 tiempos (cruces color rojo) indican voltajes negativos, característica distintiva de la presencia de PI.

## 1.2 Hipótesis

Puesto que tanto los métodos galvánicos como los sondeos TEM son sensibles a la presencia de Polarización Inducida en el subsuelo, es razonable pensar que una inversión conjunta de estos métodos resolverá, con un mayor grado de resolución, los parámetros Cole-Cole de un subsuelo estratificado.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es el de construir y probar un programa de computadora para realizar inversión conjunta de los métodos SIP, TIP y TEM con arreglo de bobina central para resolver los parámetros del modelo Cole-Cole para medios homogéneos y estratificados.

### 1.3.2 Objetivos particulares

Para alcanzar el objetivo general se desarrollaron objetivos particulares que son:

- 1) Probar el programa de modelado directo de polarización inducida espectral (SIP) y del programa de modelado directo del método inductivo (TEM).
- 2) Implementar el programa que realiza el modelado directo del método de polarización inducida espectral en el dominio del tiempo (TIP).
- 3) Calcular, comparar y analizar la sensibilidad de los parámetros Cole-Cole para los tres métodos para un semiespacio homogéneo.
- 4) Calcular, comparar y estudiar la resolución de los parámetros Cole-Cole para los tres métodos para medios de dos capas.

Los programas de modelado directo para SIP y TEM ya estaban implementados. Para el caso de TIP fue necesario construir el algoritmo el cual es muy similar a SIP pero con una Transformada Inversa Coseno de Fourier (capítulo 2). Los objetivos 2 y 3 se llevaron a cabo mediante el uso de la matriz de sensibilidades o de jacobianos y mediante la descomposición de valores singulares (DVS) de esta matriz. Este proceso ayudó a entender cuáles parámetros estaban bien resueltos y cuáles no, permitiendo así una mejor comprensión de los resultados obtenidos en las inversiones.

Para evaluar los pros y contras que trae consigo la inversión conjunta, el modelado inverso también se realizó de manera individual para cada método. En ambos casos, tanto de forma individual como conjunta, se planteó un esquema de inversión mediante un algoritmo DVS (Jupp & Vozoff, 1975; Vozoff & Jupp, 1975).

En el capítulo 2 se profundiza en la explicación de los métodos numéricos empleados para calcular las respuestas de los tres métodos geofísicos. También se describe cómo se calcularon las sensibilidades y las incertidumbres de los parámetros. En la última parte del capítulo se explica el método numérico empleado para resolver el problema inverso conjunto. En el capítulo 3 se muestran los resultados obtenidos al desarrollar los objetivos particulares y la inversión. El capítulo 4 corresponde al análisis y discusión de los resultados del capítulo 3. Finalmente, en el capítulo 5, se plantean las conclusiones.

## Capítulo 2. Metodología

---

### 2.1 Métodos numéricos para el modelado directo

En este capítulo se presentan los métodos utilizados en la tesis. Se empieza con los métodos numéricos empleados en el cálculo de las respuestas de los dos métodos galvánicos y del método electromagnético, los tres para un subsuelo estratificado u homogéneo, considerando una resistividad dispersiva definida por funciones Cole-Cole. Enseguida se muestran la sensibilidad, resolución de parámetros e inversión.

#### 2.1.1 Métodos galvánicos

Para el modelado de los métodos de Polarización Galvánica Espectral (SIP, TIP) se consideraron bipolos de longitud finita. La mayoría de los modelos en la literatura son calculados considerando la aproximación de bajas frecuencias, esto es, calculando la respuesta de PI empleando algoritmos de corriente directa (e.g. Luo & Zhang, 1998). En contraste, en esta tesis no se utiliza esta aproximación de baja frecuencia, sino se utiliza la formulación de cualquier frecuencia, es decir, se incluyen los efectos de la inducción electromagnética.

El voltaje medido en los electrodos de potencial  $M$  y  $N$  producido por los electrodos de corriente  $A$  y  $B$  en un arreglo colineal y horizontal implica una doble integración del campo eléctrico a lo largo de los bipolos transmisor y receptor (Figura 8),

$$V_{MN}(\omega) = \int_A^B dx' \int_M^N E_x(x, x', \omega) dx \quad (2)$$

Las integrales se resolvieron por el método de sumas ponderadas o weighted sums (D.E. Boerner & West, 1984). En la ecuación 2 el integrando es la componente  $x$  del campo eléctrico medido en el dominio de las frecuencias en el punto  $x$  producido por un campo eléctrico puntual horizontal en el punto  $x'$ . Esta componente del campo eléctrico está dada por

$$E_x(x, x', \omega) = \frac{I dx'}{4\pi} \int_0^\infty \left[ K_1(\lambda, \omega, \rho_j(\omega), d_j) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_2(\cdot) \right] \lambda J_0(\lambda R) d\lambda, \quad (3)$$

donde  $I$  es la corriente inyectada en el dipolo emisor,  $K_1$  and  $K_2$  son los kernels de la transformada de Hankel (David E. Boerner & West, 1989). Estos kernels están en función del número de onda ( $\lambda$ ), la frecuencia ( $\omega$ ), el espesor ( $d_j$ ) y la resistividad de cada capa ( $\rho_j(\omega)$ ). Es precisamente aquí donde se incluye el efecto de PI en la respuesta del subsuelo, es decir, la dispersión de la resistividad en función de la frecuencia dada por la relación Cole-Cole. Continuando con las variables de la ecuación 3,  $R$  es la distancia horizontal entre los puntos  $x$  y  $x'$ , y  $J_0$  es la función de Bessel de orden 0. Las transformadas de Hankel fueron evaluadas como convoluciones utilizando filtros calculados con el procedimiento indicado por Johansen & Sorensen (1979). La resistividad aparente en función de la frecuencia del método SIP fue calculada con los voltajes y utilizando la expresión (4)

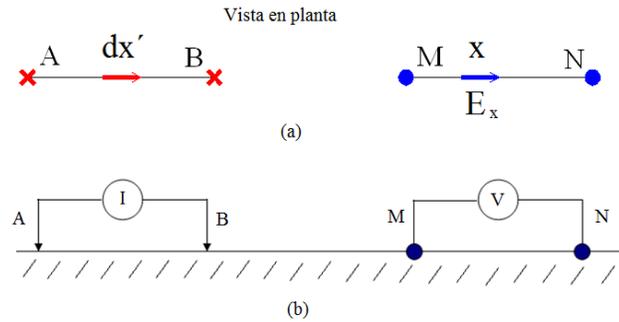
$$\rho_a(\omega) = GV_{MN}(\omega)/I \quad (4)$$

donde  $G$  es el factor geométrico del arreglo eléctrico.

Para un semiespacio homogéneo la expresión (2) se reduce a

$$E_x(x, x') = \frac{I \rho(\omega) dx'}{2\pi R^3} \left[ 1 + (1 + \gamma R) \exp(-\gamma R) \right], \quad (5)$$

con  $\gamma^2 = i\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$ , donde  $\mu$ ,  $\sigma(\omega)$  y  $\varepsilon$  son la permeabilidad magnética, la conductividad dispersiva y la permitividad, respectivamente. Las resistividades aparentes del método SIP calculadas con un programa en FORTRAN que sigue este procedimiento se comparan bien con los publicados por Ingeman-Nielsen & Baumgartner (2006).



**Figura 8.** Esquema del arreglo de los bipolos transmisor (izquierda) y receptor (derecha) empleado en el cálculo del problema directo para los métodos SIP y TIP. a) Vista en planta. b) Vista de perfil.

Para calcular la respuesta en el dominio del tiempo de un par de bipolos aterrizados como los de la Figura 8 (método TIP) se realizó un procedimiento que consiste en dos pasos. Primero se calculó el voltaje producido por un apagado de corriente en forma de escalón ( $v^{off}$ ); esto se llevó a cabo utilizando la parte imaginaria del voltaje obtenido para SIP con la ecuación 2. Dicha transformación del dominio de la frecuencia al tiempo es realizada mediante una transformada coseno de Fourier,

$$v^{off}(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im}|V(\omega)|}{\omega} \cos(\omega t) d\omega \quad , \quad (6)$$

La integral 6 fue evaluada mediante una convolución empleando los coeficientes del filtro de Anderson (1975). Ya teniendo el voltaje de un escalón apagado ideal, en el segundo paso se incorpora la forma real de la corriente, esto se llevó a cabo mediante una convolución entre la corriente y el voltaje obtenido con la ecuación 6. Se supuso una corriente periódica bipolar de forma +, 0, -, 0, la cual es comúnmente empleada en los equipos comerciales. Esta convolución requiere el conocimiento de voltajes en tiempos largos. Para evitar el uso de demasiados recursos computacionales mediante el cálculo directo de estos voltajes se optó por utilizar funciones de extrapolación con leyes de potencia para una serie de intervalos de tiempo. Las funciones de extrapolación se calcularon mediante mínimos cuadrados ajustando tres puntos por intervalo. La respuesta final del método TIP se puede presentar indistintamente como voltajes o como resistividades aparentes con el uso de la expresión (4).

### 2.1.2 Método electromagnético

El primer paso en la solución del problema directo para el Método Electromagnético Transitorio con arreglo de bobina central (TEM) consiste en el cálculo de la componente vertical del campo magnético en el dominio de las frecuencias. Dicha componente, ubicada en el centro de una espira circular de radio  $a$ , colocada sobre un medio estratificado está dada por

$$H_z(\omega) = \frac{aI}{2} \int_0^{\infty} K_3(\lambda, \omega, \rho_j(\omega), d_j) J_1(\lambda a) d\lambda \quad (7)$$

En esta expresión,  $K_3$  es el kernel de la transformada de Hankel y  $J_1(\cdot)$  es la función de Bessel de orden 1. Dicho kernel, dado por Patra (1970), también depende de los espesores  $d_j$  y resistividades dispersivas de cada capa  $\rho_j(\omega)$ , definidas por el modelo Cole-Cole. Esta transformada de Hankel fue evaluada con una convolución con los filtros propuestos por Anderson (1979).

Como segundo paso del proceso numérico se obtuvo el voltaje transitorio inducido en la bobina horizontal producido por un apagado de corriente en forma de escalón empleando una transformada seno de Fourier de la componente imaginaria de la respuesta calculada previamente,

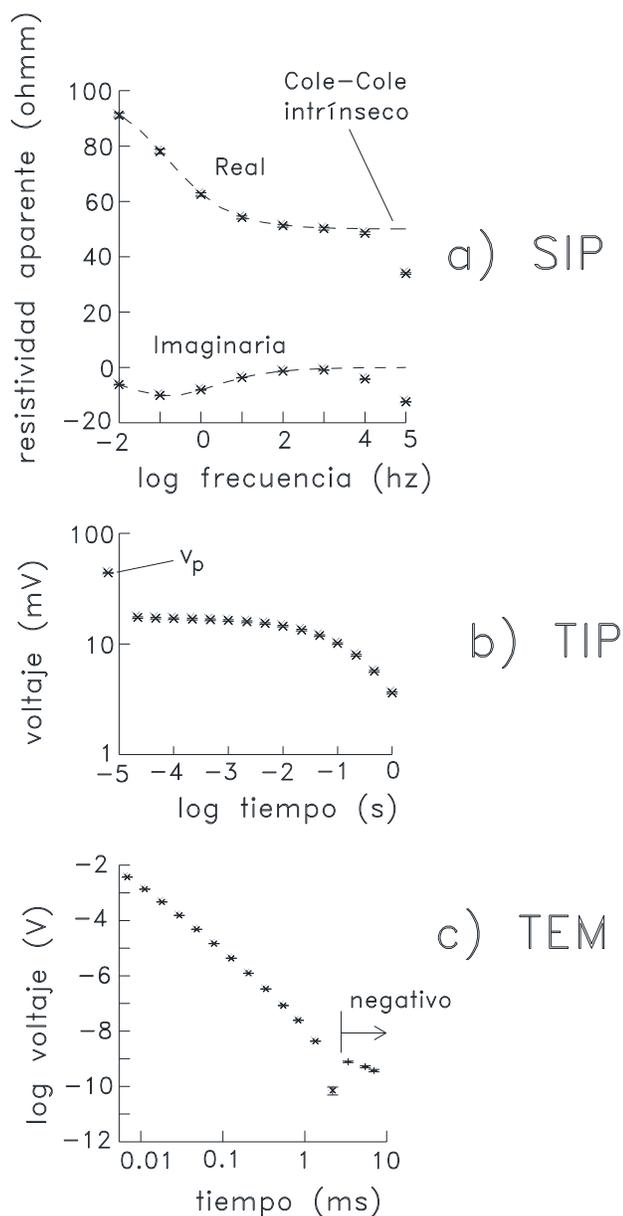
$$v^{off}(t) = -\frac{2\mu_0 A_{Rx}}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im}[H_z(\omega)] \sin(\omega t) d\omega \quad (8)$$

donde  $A_{Rx}$  es el área efectiva de la bobina receptora. Los pesos del filtro propuestos por Anderson (1975) fueron empleados para calcular esta transformación. Finalmente se consideró el efecto de la forma de la corriente (forma bipolar con apagados en forma de rampa) con un procedimiento descrito por Fitterman & Anderson (1987). Este último paso es esencialmente una convolución de la forma real de la corriente con el voltaje teórico  $v^{off}$ , dicho proceso requiere el conocimiento de voltajes más allá de la última ventana de medición del sistema de adquisición de datos. En lugar de calcular estos voltajes con el procedimiento anterior se utilizó una función exponencial de extrapolación ajustada a los últimos tres voltajes. Es importante que estos últimos voltajes estén decayendo, independientemente del signo; si no es el caso, el programa calcula otros tres voltajes. Para hacer la corrección se consideró el efecto de las 12 rampas previas al corte de corriente.

En la Figura 9 aparecen las respuestas calculadas de los tres métodos para el mismo semiespacio homogéneo polarizable [ $100 \ .5 \ 1 \ .5$ ]. De aquí en adelante se empleará la notación [ $\rho_0 \ m \ \tau \ c$ ] para representar los cuatro parámetros Cole-Cole. Para los métodos galvánicos (SIP y TIP) se empleó el mismo arreglo dipolo-dipolo con una separación  $AB = MN = a$  de 10 m y una separación entre pares de electrodos también de 10 m ( $n = 1$ ), inyectando una corriente de 0.1 A. La Figura 8a muestra las componentes real e imaginaria de la resistividad aparente del método SIP calculada para 8 frecuencias de .01 to  $10^5$  Hz. En la misma figura se hace una comparación de esta respuesta con la de la resistividad intrínseca del modelo Cole-Cole de la ecuación 1 (líneas cortadas). Éstas son similares en frecuencias bajas y medianas; sin embargo, comienzan a divergir a partir de 1 kHz aproximadamente. Esto es debido a la inducción electromagnética, un efecto que se manifiesta a frecuencias altas (Madden & Cantwell, 1967).

La respuesta para el método TIP se muestra en la Figura 9b. Consiste de 15 voltajes que decaen en un lapso de  $2.2 \times 10^{-5}$  a 1 s. El periodo de la corriente bipolar empleada es de 8 s, un valor comúnmente empleado en los equipos comerciales. Con este periodo el lapso de no inyección de corriente es de 2 s. Esta respuesta incluye el efecto de 125 periodos previos al corte de la corriente. A la izquierda del eje de las ordenadas se grafica el voltaje medido justo antes del apagado de la corriente, lo que se conoce como voltaje primario ( $V_p$ ). Generalmente la polarizabilidad en el método TIP es medida con la cargabilidad aparente, definida como el voltaje integrado en una ventana de tiempo y normalizado entre el voltaje primario. Sin embargo, en este trabajo se utilizó directamente el valor de los voltajes en decaimiento y de  $V_p$  para medir el efecto de PI.

Los voltajes del método TEM aparecen en la Figura 9c. Como transmisor se utilizó una espira cuadrada de 25 x 25 m, la cual es aproximada como circular. Esta aproximación es válida solamente cuando el receptor está colocado en el centro de la espira. La intensidad de la corriente periódica y de forma trapezoidal es de 1 A, con un ancho de rampa de 4  $\mu$ s. Los tiempos de medición fueron de 6  $\mu$ s a 7 ms, simulando un sistema Geonics TEM47. El receptor es una bobina horizontal con un área efectiva de 31.4 m<sup>2</sup>, localizada en el centro de la espira transmisora. Los voltajes para los tiempos largos muestran un cambio de signo característico de un medio polarizable.



**Figura 9.** Respuestas de los tres métodos calculados para el mismo modelo Cole-Cole [ $\rho_0 = 100 \text{ m} = .5 \tau = 1 \text{ c} = .5$ ]. a) Componentes real e imaginaria de la resistividad aparente en función de la frecuencia con un arreglo dipolo-dipolo ( $a=10 \text{ m}$ ,  $n=1$ ), método SIP. Las líneas cortadas indican el modelo Cole-Cole intrínseco el cual no incluye el efecto de acoplamiento electromagnético. b) Curva de decaimiento de voltaje contra tiempo del método TIP (mismo arreglo de electrodos). Se incluye el valor del voltaje primario ( $V_p$ ). c) Voltajes del método TEM con arreglo de bobina central producido con una espira transmisora de  $25 \times 25 \text{ m}$ , mostrando el cambio de signo en tiempos largos.

## 2.2 Sensibilidades

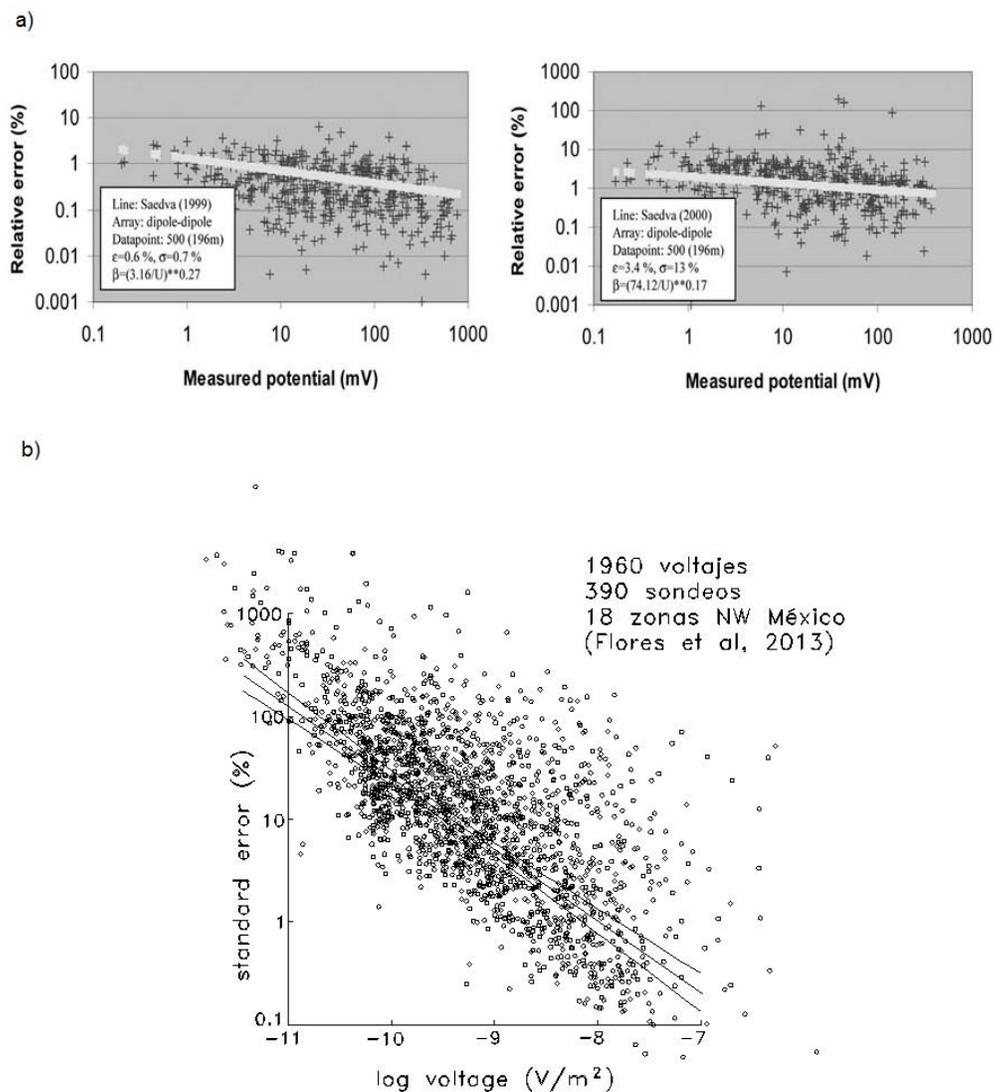
Una forma de evaluar el desempeño de los tres métodos es mediante el cálculo de las sensibilidades. Éstas, también conocidas como Jacobianos, se definen como las derivadas de la  $i$ -ésima respuesta con respecto del  $j$ -ésimo parámetro,

$$a_{ij} = \frac{p_j}{\varepsilon_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial p_j}, \quad (9)$$

donde  $\eta_i$  es la resistividad aparente en la  $i$ -ésima frecuencia para el método SIP o el voltaje en el  $i$ -ésimo tiempo para el caso de TIP o TEM. Los parámetros  $p_j$  pueden ser cualquiera de los cuatro parámetros Cole-Cole, el espesor de las capas o la resistividad DC en caso de que alguna de las capas no sea polarizable. En la expresión  $\varepsilon_i$  es el error en el  $i$ -ésimo voltaje observado. Al multiplicar la derivada por el parámetro y dividirla entre el error se obtiene una sensibilidad adimensional, lo que permite la comparación entre sensibilidades de diferentes parámetros y métodos geofísicos, incluso si éstos tienen unidades diferentes. Las sensibilidades proporcionan una medida de qué tanto varía la respuesta de un modelo con respecto a cambios pequeños en uno de los parámetros. Como  $\partial(\ln p) = \partial p/p$ , esta definición de la sensibilidad implica una definición logarítmica de los parámetros lo cual evita la posibilidad de obtener valores negativos de resistividad y espesor (Edwards, Bailey, & Garland, 1981; Raiche, Jupp, Rutter, & Vozoff, 1985).

En la expresión (9) se evitó asignar un error constante en las respuestas observadas. En su lugar se supuso una ley de potencia de la forma  $\varepsilon_i = \alpha V_i^\beta$ , con  $V$  en volts. Para los métodos SIP y TIP se consideraron los valores  $\alpha = 3.9 \times 10^{-3}$  y  $\beta = 0.78$ . Estos valores se obtuvieron promediando las leyes de potencia de dos grandes conjuntos de mediciones de tomografía eléctrica donde se utilizó el arreglo dipolo-dipolo reportados por Zhou & Dahlin (2003), donde cada conjunto consistió en perfiles de cientos de sondeos (Figura 10a). Dichos autores estimaron el nivel de ruido haciendo mediciones recíprocas de resistividad aparente. Estos errores los graficaron en escalas bilogarítmicas de error porcentual contra voltaje. A estas nubes de puntos les ajustaron líneas rectas, definiendo así las leyes de potencia. Para el método TEM fue empleada la ley reportada por Flores, Romo, & Vega (2013) con valores  $\alpha = 2.8 \times 10^{-8}$  y  $\beta = 0.305$  (Figura 10b). El nivel de error predicho por esta ley es muy similar al estimado por McNeill (1980). Aunque los errores del voltaje dependen de muchos factores el uso específico de estas leyes de potencia cumplió el propósito para este experimento ya que los valores predichos están dentro del rango

típico de ruido, denotando el hecho de que los voltajes pequeños tienen incertidumbres mayores. Ningún error menor a 1% fue tomado en cuenta.



**Figura 10.** Leyes de potencia empleadas para definir los errores en los voltajes. a) Para los métodos galvánicos (SIP y TIP) (Zhou & Dahlin, 2003). b) Para el método TEM (Flores et al., 2013).

## 2.3 Resolución

El análisis de la matriz de resolución permite evaluar la calidad de los parámetros obtenidos además de determinar la posible existencia de correlación entre ellos (Meju, 1994).

La Descomposición en Valores Singulares (DVS) de la matriz de sensibilidad A es (Golub & Reinsch, 1970),

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (10)$$

donde U es la matriz de eigendatos de dimensiones  $N \times M$ , S es una matriz diagonal de  $M \times M$  que contiene los eigenvalores  $s_j$  y V es la matriz de eigenparámetros de  $M \times M$ . Las matrices U y V tienen la propiedad de que el producto  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ . Los elementos de la matriz de sensibilidad A están dados por la expresión (9).

La transpuesta de la matriz de eigenparámetros,  $\mathbf{V}^T$ , permite hacer el análisis de resolución. Los coeficientes de  $\mathbf{V}^T$  pueden variar de -1 a 1; además la suma del cuadrado de estos coeficientes, ya sea por renglones o por columnas, es igual a 1. Cada uno de los renglones corresponde a una combinación lineal de diferenciales de los logaritmos de los parámetros ordenados de manera ascendente de acuerdo al incremento en el error estándar (Edwards et al., 1981). Dichos errores equivalen al inverso de los eigenvalores expresados en porcentaje. En la Figura 11 se muestra un esquema general de una matriz de resolución para un semiespacio homogéneo donde cada columna corresponde a uno de los cuatro parámetros Cole-Cole. El análisis se hace por renglones, examinando los coeficientes de la matriz y sus signos además de tomar en cuenta el error correspondiente. En el capítulo 3 se verán ejemplos de interpretación de estas matrices para los tres métodos empleados.

$\rho_0$	$m$	$\tau$	$c$	error (eigenvalor <sup>-1</sup> )	
$V_{11}^T d(\ln \rho_0)$	$V_{12}^T d(\ln m)$	$V_{13}^T d(\ln \tau)$	$V_{14}^T d(\ln c)$	$1/s_1$	mejor resuelto
$V_{21}^T d(\ln \rho_0)$	$V_{22}^T d(\ln m)$	$V_{23}^T d(\ln \tau)$	$V_{24}^T d(\ln c)$	$1/s_2$	
$V_{31}^T d(\ln \rho_0)$	$V_{32}^T d(\ln m)$	$V_{33}^T d(\ln \tau)$	$V_{34}^T d(\ln c)$	$1/s_3$	
$V_{41}^T d(\ln \rho_0)$	$V_{42}^T d(\ln m)$	$V_{43}^T d(\ln \tau)$	$V_{44}^T d(\ln c)$	$1/s_4$	peor resuelto

**Figura 11.** Esquema general de la matriz de eigenparámetros. A la derecha se incluye el error estándar.

El análisis de la matriz de eigendatos  $U$  contiene información concerniente a qué datos son los que contribuyen en la solución de los parámetros con menor error; sin embargo, este tipo de análisis no tiene sentido para las variables mal resueltas.

## 2.4 Incertidumbres

Las incertidumbres en los parámetros fueron calculadas con la expresión de (Raiche et al., 1985),

$$p_j \pm = p_j \exp(\pm B_j \sigma) \quad (11)$$

donde  $p_j \pm$  son las cotas superior e inferior de las incertidumbres del  $j$ -ésimo parámetro,  $\sigma$  es el error de ajuste (se asumió que su valor fuera igual a 1), y  $B_j$  es

$$B_j = \left[ \sum_{i=1}^N (V_{ji} / s_i)^2 \right]^{1/2} \quad (12)$$

En esta expresión  $V_{ji}$  son los elementos de la matriz de eigenparámetros  $V^T$  y  $s_i$  son los valores singulares. Como este proceso para la estimación de errores está basado en una aproximación lineal de un problema que es no lineal (Edwards et al., 1981), valores de error muy grandes en los parámetros no deben de ser considerados de manera literal, sino solo como un indicador de que los parámetros están pobremente determinados.

## 2.5 Inversión

Tanto las inversiones individuales de datos de un solo método como el proceso de inversión conjunta de dos o más métodos fueron realizados con el mismo esquema. Dicho esquema emplea un algoritmo iterativo de mínimos cuadrados el cual está linealizado y está basado en una Descomposición de Valores Singulares DVS (Jupp & Vozoff, 1975; Vozoff & Jupp, 1975). En estos modelos la relación entre las  $N$  resistividades (SIP) o voltajes (TIP, TEM) medidos  $\mathbf{d}$  en las frecuencias  $\mathbf{f}$  o tiempos  $\mathbf{t}$  con los  $M$  parámetros desconocidos ( $\mathbf{p}$ ) es una función no lineal ( $\mathbf{y}$ ), representada en notación matricial como

$$\mathbf{d} = \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{t}) \quad (13)$$

Esta relación es linealizada mediante una expansión en series de Taylor de la función ( $\mathbf{y}$ ), omitiendo los términos de segundo orden y mayores, y dando como resultado un conjunto de  $N$  ecuaciones lineales con  $M$  incógnitas

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{p} , \quad (14)$$

donde

$$\Delta y_i = \frac{d_i - y_i(\mathbf{p}_0, f_i, t_i)}{\varepsilon_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_i} \left. \frac{\partial y_i(\mathbf{p}, f_i, t_i)}{\partial (\ln p_j)} \right|_{\mathbf{p}_0} \quad (16)$$

y

$$\Delta p_j = p_j - p_j^0 \quad j = 1, \dots, M \quad (17)$$

El vector  $\Delta \mathbf{y}$  es el residual o diferencia entre la resistividad o voltaje observado y el valor calculado en base a un modelo inicial  $\mathbf{p}^0$ , la matriz  $\mathbf{A}$  es la matriz de derivadas, también conocida como matriz de sensibilidad o jacobiana,  $\Delta \mathbf{p}$  es la diferencia entre los parámetros que son desconocidos (parámetros

verdaderos) y aquellos parámetros del modelo inicial, y  $\varepsilon$  es el error de los valores observados. La solución por mínimos cuadrados de la ecuación (2) es

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{y} \quad (18)$$

donde el superíndice  $T$  denota la matriz transpuesta. La mayoría de los problemas en Geofísica son de tipo no lineal y pueden estar mal condicionados. Bajo estas condiciones la ecuación 18 tiene el riesgo de divergir o dar soluciones sin significado físico; esto es debido a la presencia de los llamados *parámetros no-importantes* e información redundante. Para resolver este inconveniente se calcula la inversa generalizada empleando la DVS (Golub & Reinsch, 1970) a la matriz de sensibilidad (ecuación 10); con esta aproximación la expresión (18) ahora tiene la forma

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{y} \quad (19)$$

con  $s_j^{-1} = 1/s_j$ . Para estabilizar la solución, en la inversa generalizada se truncan los elementos de la matriz  $\mathbf{S}$  que están asociados a valores singulares pequeños.

Como lo muestran las expresiones (15) y (16) en el proceso de optimización se pondera  $\Delta \mathbf{y}$  y los elementos de la matriz de sensibilidad entre los errores de los datos y se utilizan los logaritmos de los parámetros para evitar obtener valores negativos. Los elementos de la matriz de sensibilidad que contienen las derivadas de las resistividades o voltajes con respecto a cada uno de los parámetros Cole-Cole son calculados con diferencias finitas hacia adelante mediante una perturbación del parámetro respectivo del 5%. Como la expresión (19) fue derivada como una linealización para resolver un problema no lineal, la solución es obtenida después de varias iteraciones. El algoritmo de Golub y Reinsch (1970) encuentra las correcciones a los parámetros  $\Delta \mathbf{p}$  (ecuación 19) que se harán al modelo inicial  $\mathbf{p}^0$ . El criterio de convergencia emplea el cálculo del error cuadrático medio o rms (ecuación 20), buscando que el mejor modelo invertido tenga el error cuadrático medio más bajo posible.

$$ms = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{d_i - y_i}{\varepsilon_i} \right)^2} \quad (20)$$

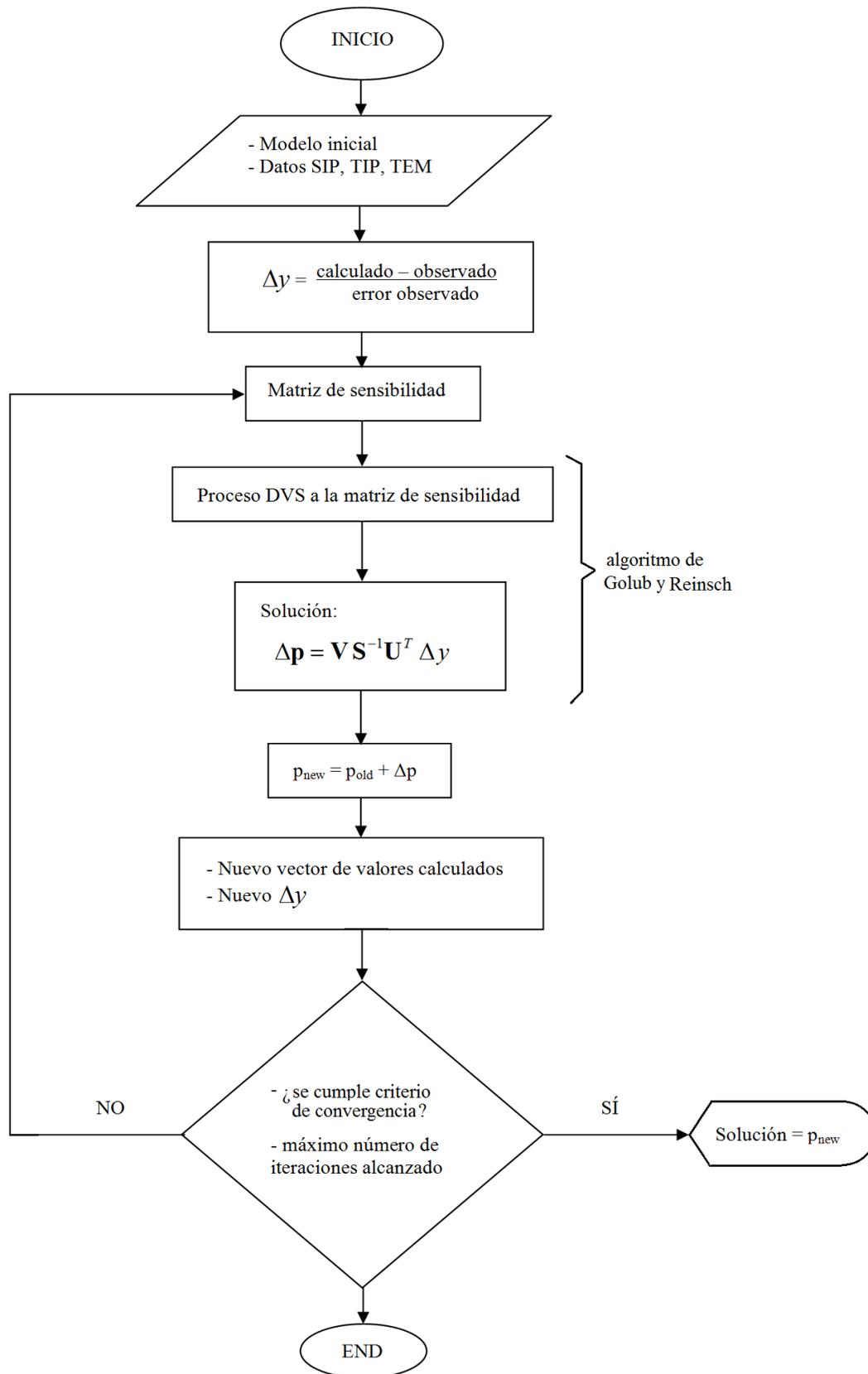
Si no se cumple el criterio de convergencia anterior, el programa se detiene una vez que se haya alcanzado un número máximo de iteraciones predefinido. La Figura 12 presenta el diagrama de flujo del proceso

explicado anteriormente. El algoritmo de Jupp y Vozoff (1975) realiza la inversión al obtener los parámetros nuevos; la descomposición DVS y el cálculo del valor que se debe corregir ( $\Delta p$ ) es realizado por el algoritmo de Golub y Reinsch (1970). Para intentar darle un mayor significado físico a los modelos obtenidos es preferible que dichos modelos sean los de menor número de capas.

Como se mencionó antes, el proceso de inversión fue el mismo tanto para el caso conjunto como para el caso individual. Se produjeron datos sintéticos con los algoritmos de modelado directo para los tres métodos, posteriormente se les agregó ruido gaussiano del 5%; éstos fueron invertidos a modelos homogéneos o medios de dos capas. Una subrutina construía una sola matriz de sensibilidad en base a las matrices de cada método, lo mismo se hacía para los vectores de errores, de datos observados y de datos calculados. Los tres métodos tienen en común los parámetros Cole-Cole y el número de capas. Por ejemplo, una inversión con todos los métodos para un semiespacio homogéneo, tomando 8 valores por método tendría una matriz de sensibilidad de dimensiones 24x4 y sería como en la Figura 13 donde cada columna corresponde a cada parámetro Cole-Cole. Si se hubiera hecho inversión con la misma configuración que el ejemplo anterior pero para un medio de dos capas polarizables la matriz sería de 24 renglones por 9 columnas. Comenzando por la izquierda las primeras cuatro columnas corresponderían a los parámetros Cole-Cole de la primera capa, la quinta columna sería para las derivadas con respecto al espesor y las últimas cuatro columnas corresponderían a las derivadas para los cuatro parámetros de la última capa. El orden en el que el programa lee los valores para un medio de  $n$ -capas es: la resistividad dc, la cargabilidad, la constante de tiempo, el exponente y el espesor de la primera capa, continuando con el mismo orden para el resto de las capas hasta llegar a  $\rho_0$ ,  $m$ ,  $\tau$  y  $c$  de la  $n$ -ésima capa. Al terminar la inversión los valores son arrojados en el mismo orden en que son leídos.

El algoritmo permite fijar y omitir parámetros para no invertir variables de las que ya se conoce su valor o, en el caso en el que alguna de las capas no esté polarizada, solamente se invierte la resistividad y el espesor de dicha capa.

La lectura de los datos por método se hace en orden SIP, TIP, TEM. Si se deseara invertir para dos métodos los datos se leerían en el mismo orden excluyendo el método faltante.



**Figura 12.** Diagrama de flujo del algoritmo de inversión. Éste es el mismo tanto para el caso individual como para el caso conjunto.

$\rho_0$	$m$	$\tau$	$c$	
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_1} \frac{\partial \rho_{a1}}{\partial \rho_0}$	$\frac{m}{\varepsilon_1} \frac{\partial \rho_{a1}}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_1} \frac{\partial \rho_{a1}}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial \rho_{a1}}{\partial c}$	}
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_2} \frac{\partial \rho_{a2}}{\partial \rho_0}$	$\frac{m_2}{\varepsilon_2} \frac{\partial \rho_{a2}}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_2} \frac{\partial \rho_{a2}}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_2} \frac{\partial \rho_{a2}}{\partial c}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_8} \frac{\partial \rho_{a8}}{\partial \rho_0}$	$\frac{m}{\varepsilon_8} \frac{\partial \rho_{a8}}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_8} \frac{\partial \rho_{a8}}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_8} \frac{\partial \rho_{a8}}{\partial c}$	}
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial \rho_0}$	$\frac{m}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial c}$	
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial \rho_0}$	$\frac{m_2}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial c}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		}
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial \rho_0}$	$\frac{m}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial c}$	
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial \rho_0}$	$\frac{m}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial c}$	
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial \rho_0}$	$\frac{m_2}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_2} \frac{\partial V_2}{\partial c}$	}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\frac{\rho_0}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial \rho_0}$	$\frac{m}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial m}$	$\frac{\tau}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial \tau}$	$\frac{c}{\varepsilon_8} \frac{\partial V_8}{\partial c}$	

**Figura 13.** Esquema general de la matriz jacobiana para una inversión conjunta; en este caso se trata de una inversión con los tres métodos (SIP, TIP y TEM) para un semiespacio homogéneo con 8 valores por método.

## Capítulo 3. Resultados

---

### 3.1 Sensibilidades

La Figura 14 muestra el valor absoluto de las sensibilidades de los cuatro parámetros Cole-Cole para los tres métodos. Se decidió presentarlas como valor absoluto para facilitar su análisis, ya que las sensibilidades pueden ser positivas o negativas, dependiendo si la respuesta aumenta o disminuye al perturbar el parámetro, respectivamente. Éstas fueron evaluadas con el mismo modelo [100 .5 1 .5] del semiespacio homogéneo utilizado para la Figura 9. Al lado derecho de cada curva se especifican las medias aritméticas de los valores absolutos de las sensibilidades; se utilizan los colores azul, rojo, naranja y verde para denotar los valores de  $\rho_0$ ,  $m$ ,  $\tau$ , y  $c$ , respectivamente. Esta misma notación de colores se estará empleando en las siguientes figuras. Algunas curvas muestran fuertes variaciones que reflejan cambios de signo de las sensibilidades.

Para el método SIP (Figura 14a) las sensibilidades están graficadas en sus componentes real e imaginaria. Para el método TIP (Figura 14b) las sensibilidades asociadas al voltaje primario aparecen del lado izquierdo del eje vertical. El voltaje primario de un apagado en forma de escalón ideal es solamente sensible a la resistividad DC. Sin embargo al tratarse de una corriente periódica este voltaje depende de los valores de los cuatro parámetros Cole-Cole. Los valores de las sensibilidades promedio de la amplitud de la resistividad aparente son 115, 96, 12 y 48 (estos valores no están incluidos en la Figura 14a, pues ahí se reportan las partes real e imaginaria). Si se comparan estos valores con los de los métodos TIP y TEM se puede notar lo siguiente:

- a) Generalmente las sensibilidades de  $\rho_0$  y  $m$  son las más altas para los tres métodos.
- b) Las sensibilidades de la constante de tiempo ( $\tau$ ) son sistemáticamente las menores.
- c) Los valores de TIP son menores que los de SIP.
- d) Las sensibilidades del método SIP y TEM son comparables, incluso algunos valores de TEM son ligeramente mayores.

### 3.2 Resoluciones

De los resultados anteriores se podría inferir que el método TEM es el más efectivo para encontrar los valores de los cuatro parámetros Cole-Cole. Sin embargo un análisis de sensibilidades no es suficiente para llegar a esta conclusión debido a la posible existencia de correlación entre parámetros.

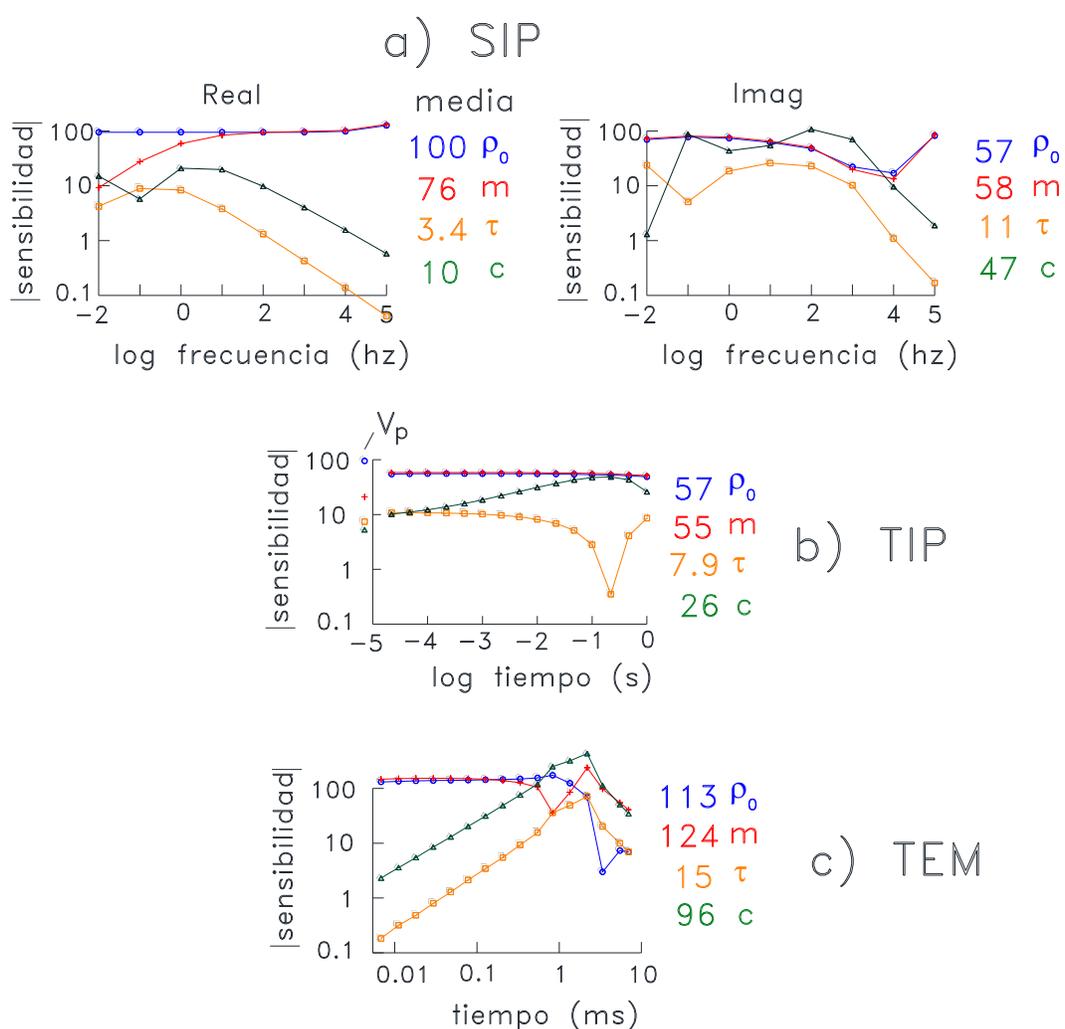
En la Figura 15 se muestran de manera gráfica los coeficientes de la matriz  $V^T$ , de dimensiones 4 x 4 porque el modelo tiene cuatro parámetros, la cual fue calculada para los tres métodos con el mismo modelo de las Figuras 9 y 14. El tamaño de los círculos es proporcional a la magnitud de los coeficientes según la escala mostrada; los círculos en líneas cortadas denotan valores negativos. El primer renglón de la Figura 15a es:

$$0.78d(\ln \rho_0) + 0.63d(\ln m) + 0.02d(\ln \tau) + 0.05d(\ln c)$$

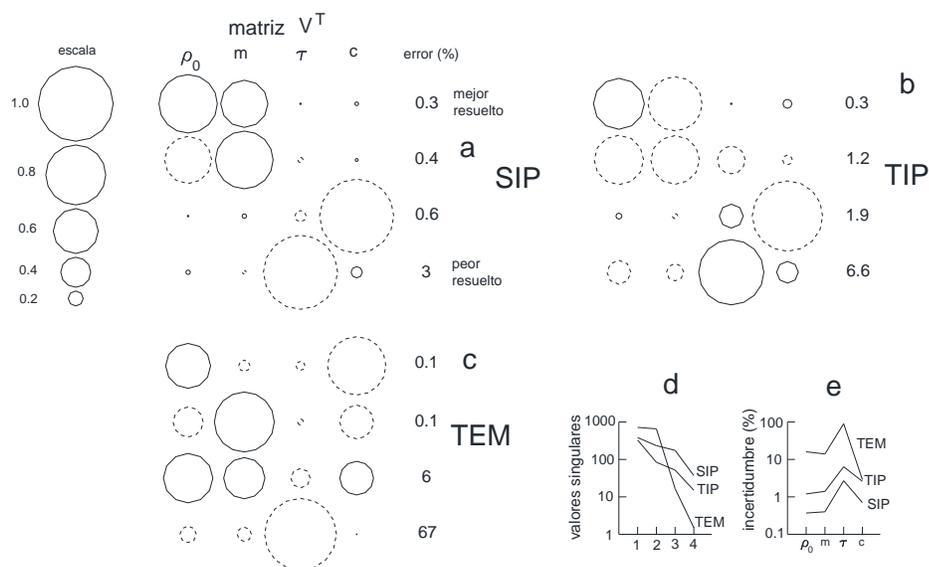
Los primeros dos valores, asociados a  $\rho_0$  y  $m$ , son similares en magnitud y positivos. Los coeficientes asociados a  $\tau$  y  $c$  tienen valores cercanos a cero. Esto implica que el producto  $\rho_0 \cdot m$  es la combinación lineal de parámetros mejor resuelta ya que su error estándar es de 0.3%. Una situación similar, pero con signo opuesto, ocurre en el segundo renglón, lo que significa que el cociente  $m/\rho_0$  domina esta combinación de parámetros la cual está relativamente bien resuelta teniendo un error de 0.4%. Como tanto el producto como el cociente están bien resueltos, entonces los dos parámetros pueden resolverse de manera independiente con un nivel bajo de error. El tercer y cuarto renglón de la Figura 15a están prácticamente dominados por los parámetros  $c$  y  $\tau$ , respectivamente, siendo sus errores correspondientes aún bajos (0.6 y 3%, respectivamente). De manera general la correlación entre parámetros es casi nula para el método SIP y estos están bien resueltos. Los valores singulares de las cuatro combinaciones lineales y las incertidumbres estimadas para los cuatro parámetros Cole-Cole se muestran en las Figuras 15d y 15e.

La contribución relativa de los eigenparámetros en cada renglón para el método TIP (Figura 15b) es similar al caso SIP, sin embargo los errores son más grandes y las correlaciones entre parámetros son ligeramente mayores. Esto se refleja en las incertidumbres (Figura 15e) las cuales son sistemáticamente mayores que las del método SIP.

El método TEM se comporta de una manera diferente (Figura 15c). Los primeros dos renglones tienen errores estándar menores a los de los métodos SIP y TIP; sin embargo, las dos últimas combinaciones están peor resueltas comparándolas con las de los dos métodos galvánicos. También el nivel de correlación es mucho más alto, siendo el último renglón el único que está dominado solamente por un parámetro ( $\tau$ ); además, los valores singulares abarcan un rango de tres décadas (Figura 15d). Estas características producen, con excepción del parámetro  $c$ , que este método tenga las mayores incertidumbres (Figura 15e).



**Figura 14.** Valores absolutos de las sensibilidades de los métodos SIP (a), TIP (b), y TEM (c) para un semiespacio homogéneo polarizable con parámetros Cole-Cole [100 .5 1 .5]. Del lado derecho de cada gráfica se indican las medias aritméticas de los cuatro parámetros.



**Figura 15.** Elementos de la matriz de eigenparámetros  $V^T$  para el modelo de referencia [100 .5 1 .5]. a) Método SIP. b) Método TIP. c) Método TEM. Los círculos en líneas cortadas denotan valores negativos. Existen cuatro combinaciones lineales de los parámetros (renglones) y cuatro columnas (parámetros Cole-Cole) por cada método. d) Valores singulares en orden decreciente de los tres métodos. e) Incertidumbres de los tres métodos para los cuatro parámetros.

Este tipo de análisis es otra de las ventajas que ofrece la definición logarítmica a los parámetros, el cual no solamente se restringe a la PI sino que puede ser aplicado en otras ramas de la Geofísica, como es el método de resistividad (Edwards et al., 1981). Supóngase el caso de un Sondeo Eléctrico Vertical sobre un subsuelo de 3 capas, donde la intermedia es delgada y más conductora que las otras; el análisis de eigenparámetros indica que el cociente del espesor de esta capa entre su resistividad es una combinación bien resuelta, mas no el producto de espesor por resistividad. Este comportamiento se debe a un problema de equivalencia. Esto sería difícil de ver si los parámetros se hubieran manejado en el espacio lineal (Edwards et al., 1981; Raiche et al., 1985).

### 3.2.1 Incertidumbres de un semiespacio polarizable

Se calcularon las incertidumbres de un conjunto de modelos para tener una visión general sobre cómo estos tres métodos resuelven los parámetros Cole-Cole de un semiespacio homogéneo polarizable. Como referencia fue considerado el modelo [ $\rho_0 = 100$ ,  $m = .5$ ,  $\tau = 1$ ,  $c = .5$ ], se aumentó y disminuyó uno de los tres parámetros  $\rho_0$ ,  $m$  y  $c$  manteniendo fijos los otros parámetros en sus valores del modelo de referencia. Al mismo tiempo se varió la constante de tiempo ( $\tau$ ) de 0.001 a 1000 seg con un valor por década. La resistividad DC se redujo a 10  $\Omega\text{m}$  y se aumentó a 1000  $\Omega\text{m}$ , la cargabilidad se varió a 0.25 y 0.75, y el exponente de la frecuencia  $c$  a 0.25 y 0.75. En total se estimaron las incertidumbres de los cuatro modelos Cole-Cole de 49 modelos diferentes. La finalidad de hacer esto en un gran número de modelos es la de tener una idea general del comportamiento de las incertidumbres abarcando la mayor cantidad de combinaciones de parámetros.

Para fines de clarificar, nuevamente se hará una breve mención de los parámetros de medición y arreglos usados en el cálculo de las respuestas sintéticas de los tres métodos, los cuales simulan un sondeo somero constituido por 16 datos en la respuesta de cada método. En el método SIP se usó un arreglo dipolo-dipolo con  $a=10$  m ( $a$  es la separación intradipolar) y  $n=1$  ( $n$  es la separación interdipolar), inyectando una corriente de 0.1 A y calculando las componentes real e imaginaria de la resistividad aparente en ocho frecuencias, de .01 a 100,000 Hz, usando una frecuencia por década.

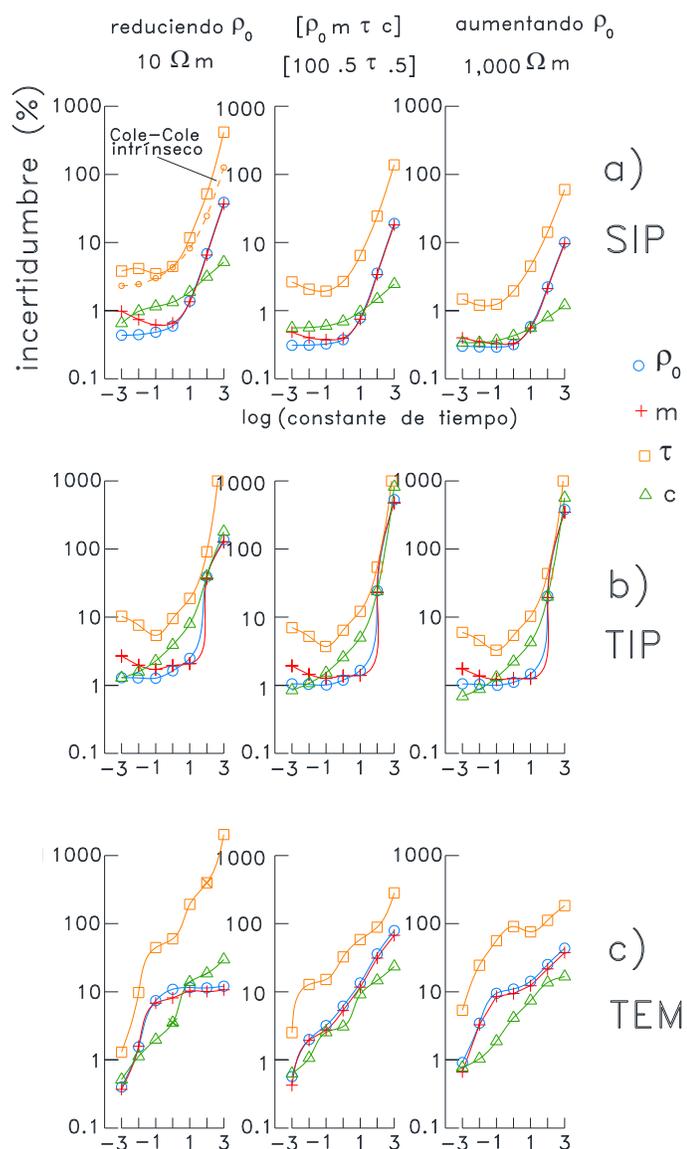
En el método TIP se empleó el mismo arreglo eléctrico usado en el método SIP, se inyectó una corriente con período 8 s, con amplitud de 0.1 A y de tipo bipolar (apagada-negativa-apagada-positiva). La respuesta del voltaje fue evaluada en 15 tiempos después del apagado de la corriente, que cubren el rango de 10  $\mu\text{s}$  a 1 s (tres tiempos por década). En este método como dato se incluye el voltaje primario previo al corte de corriente. La corrección por periodicidad se realizó considerando los encendidos y apagados de los 1000 segundos previos al tiempo cero.

En el método de sondeo TEM se utilizó el arreglo de bobina central, en donde el receptor consiste de una bobina horizontal colocada en el centro de una espira cuadrada de 25 x 25 m. La bobina receptora tiene un área efectiva de 31.4  $\text{m}^2$  (simulando al sistema Geonics TEM47), aproximando la espira cuadrada con una espira circular de misma área. La respuesta de voltaje se calculó en 16 tiempos de 6.8  $\mu\text{s}$  to 7 ms, corrigiendo la respuesta por el efecto de las 12 rampas previas al tiempo cero.

Es conveniente mencionar que no es común trabajar con tantas frecuencias o tiempos (16) cuando se realizan mediciones de campo con los métodos SIP y TIP, respectivamente; este número tan alto de valores fue considerado simplemente para tener la misma cantidad de datos en los tres métodos y compararlos en igualdad de circunstancias.

Con el fin de evitar tantas gráficas, en este capítulo se presentan sólo las incertidumbres correspondientes al cambio de la resistividad DC. Las otras relacionadas con los cambios de la cargabilidad y el exponente  $c$  se incluyen en los anexos A y B. La Figura 16 muestra las incertidumbres porcentuales en función de la constante de tiempo (ambos ejes en escala logarítmica) para las variaciones de  $\rho_0$ . Los resultados para los tres métodos están acomodados por renglones. En la columna de en medio están las incertidumbres del modelo de referencia, las columnas de la izquierda y de la derecha corresponden a los modelos con la resistividad dc reducida ( $10 \Omega\text{m}$ ) e incrementada ( $1000 \Omega\text{m}$ ), respectivamente. Las cuatro curvas en cada gráfica corresponden a los cuatro parámetros Cole-Cole.

Todos los parámetros de los métodos galvánicos (SIP y TIP) tienen incertidumbres bajas hasta constantes de tiempo iguales a 1 o 10 s. A partir de estos valores, las incertidumbres tienen un fuerte incremento. Por otro lado, las incertidumbres del método TEM aumentan gradualmente conforme la constante de tiempo es mayor. En general este mismo comportamiento de las curvas de incertidumbre fue observado para otros modelos que aparecen en los anexos A y B. Las curvas de TEM muestran algunas irregularidades asociadas posiblemente a problemas de precisión numérica en los cálculos de la función de extrapolación para tiempos tardíos durante el proceso de corrección por rampas.



**Figura 16.** Incertidumbres de los parámetros Cole-Cole para un rango de constantes de tiempo desde 0.001 a 1000 s para los métodos SIP (a), TIP (b) y TEM (c). Efectos de reducir la resistividad dc a 10  $\Omega \text{ m}$  (columna de la izquierda) y aumentarla a 1000  $\Omega \text{ m}$  (columna de la derecha), comparados con el modelo de referencia de 100  $\Omega$  (columna de en medio). Las incertidumbres de las constantes de tiempo de los modelos intrínsecos Cole-Cole se incluyen en la gráfica superior izquierda.

Una característica importante de la Figura 16 es el hecho de que, independientemente del método geofísico, la constante de tiempo es la que tiene el mayor error de los cuatro parámetros. Esto es debido a que en el modelo intrínseco Cole-Cole (ec. 1) este parámetro es el que tiene la menor resolución. En otras palabras, la baja resolución de  $\tau$  se viene arrastrando desde la ecuación 1, la cual está dentro del kernel de las ecuaciones de modelado directo de los tres métodos. Las curvas de incertidumbres del modelo intrínseco Cole-Cole tienen la misma forma que las del método SIP con la diferencia que sus magnitudes son ligeramente menores. Como ejemplo se incluyeron las incertidumbres de la constante de tiempo para el modelo [10 .5  $\tau$  .5], éstas se encuentran en la esquina superior izquierda de la Figura 16. La baja resolución de la constante de tiempo en los métodos galvánicos ya había sido reportada en estudios previos (e.g. Efferso, 2000; Ghorbani, Camerlynck, Florsch, Cosenza, & Revil, 2007). Esto es relevante ya que múltiples estudios de laboratorio han encontrado que este parámetro está relacionado con la conductividad hidráulica. De una serie de 138 muestras de areniscas y otras muestras sintéticas (Figura 17), de las cuales se hicieron mediciones en el dominio de las frecuencias (Binley et al., 2005; Koch, Kemna, Irving, & Holliger, 2011; Kruschwitz, Binley, Lesmes, & Elshenawy, 2010; Scott & Barker, 2003; Volkmann & Klitzsch, 2016), se estimó un amplio rango de valores para la constante de tiempo que va desde  $8E-4$  a 330 s; la media logarítmica de este conjunto de valores es de 0.4 s, la desviación estándar abarca un rango aproximado de 0.01 a 10s. Transportando estas tres décadas de variación de la Figura 17 a las incertidumbres de la Figura 16 se puede observar que estas incertidumbres son bajas para los métodos galvánicos y son moderadas para el método TEM. Nótese cómo errores grandes en  $\tau$ , por ejemplo del 100%, podrían juzgarse como razonables dado el amplio rango de variación de este parámetro. En contraste, un error de 100% para la cargabilidad o el exponente de la frecuencia podría ser considerado como un valor muy grande.

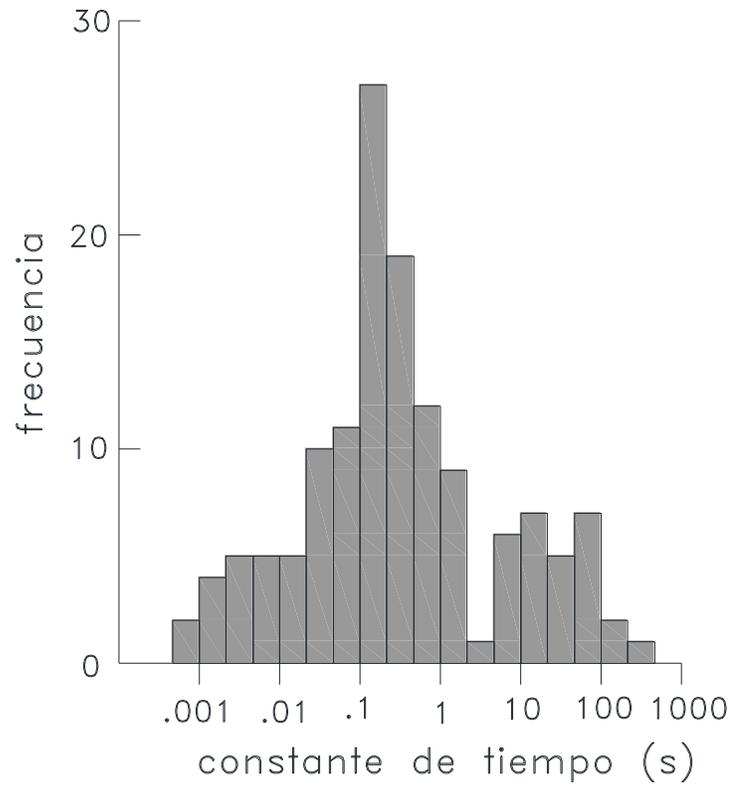
Las incertidumbres del modelo intrínseco Cole-Cole, que son menores a las del método SIP (esquina superior izquierda de la Figura 16), pueden ser explicadas por la presencia del efecto de acoplamiento electromagnético (EM coupling) que aparece en la respuesta SIP a altas frecuencias. Este efecto inductivo comienza a afectar a los voltajes cuando el número de inducción  $\beta = R\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$  tiene valores que son un poco menores a 1, donde R es la separación entre el transmisor y el receptor (Bertin & Loeb, 1976). Como comparación, en la Figura 9 este efecto comienza a manifestarse a los 10,000 Hz, es decir, cuando el número de inducción es igual a 0.4.

Con respecto al efecto de variar la resistividad DC en la Figura 16, en los métodos galvánicos las incertidumbres de todos los parámetros tienden a disminuir conforme  $\rho_0$  se incrementa de 10 a 1000  $\Omega\text{m}$ ;

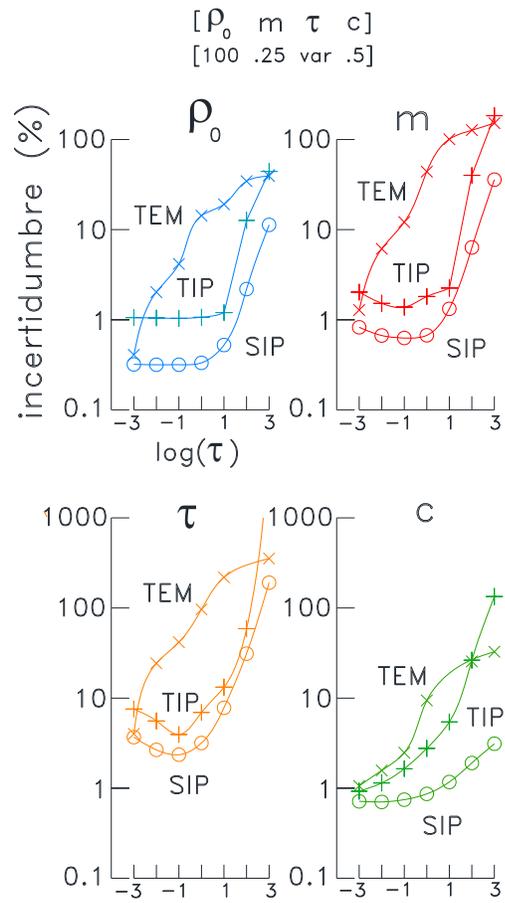
lo opuesto ocurre en el método TEM. Esta mejoría en la resolución de los métodos galvánicos para medios resistivos puede ser atribuida a la reducción del efecto de acoplamiento electromagnético y a la menor contribución del ruido debido a que valores altos de voltajes se asocian a resistividades altas.

En la Figura 18 se muestran más incertidumbres pero esta vez agrupadas por método. Los cuatro paneles corresponden al caso en el que la cargabilidad se redujo a 0.25 con respecto al modelo de referencia. En los cuatro parámetros Cole-Cole, el método SIP mostró las incertidumbres más bajas, seguido por el método TIP y en tercer lugar el método TEM. El método TEM fue mejor que TIP solamente en los parámetros  $\tau$  y  $c$  cuando la constante de tiempo vale 1000 s.

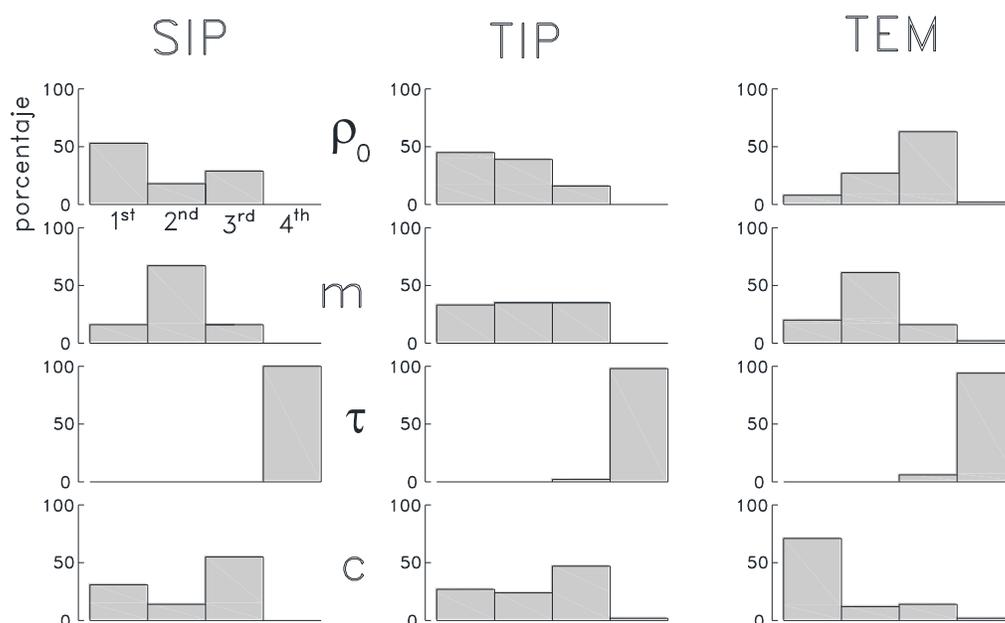
En la Figura 19 se clasifican los parámetros Cole-Cole en orden descendente de resolución, del primero al cuarto lugar. En aproximadamente el 50% de los modelos  $\rho_0$  fue el parámetro con la incertidumbre más baja para el método SIP, la cargabilidad ocupó el segundo lugar en orden de resolución en casi el 60% de los casos, seguida por el exponente  $c$ , mientras la constante de tiempo fue el parámetro peor resuelto en el 100% de los modelos. El orden para el método TIP es similar, con la diferencia de que el primero y segundo lugar estuvo dividido entre  $\rho_0$  y  $m$ . Para el caso TEM el orden es diferente; el mejor parámetro generalmente fue el exponente  $c$ , seguido por la cargabilidad  $m$  y por la resistividad de frecuencia cero  $\rho_0$ , la constante de tiempo  $\tau$  ocupó el último lugar en casi todos los modelos.



**Figura 17.** Histograma de las constantes de tiempo medidas en 138 muestras de arenisca y muestras sintéticas (Binley et al., 2005; Koch et al., 2011; Kruschwitz et al., 2010; Scott & Barker, 2003; Volkmann & Klitzsch, 2016).



**Figura 18.** Comportamiento de las incertidumbres en función de la constante de tiempo agrupadas por método.



**Figura 19.** Número de ocurrencias (en porcentaje) que los cuatro parámetros Cole-Cole ocuparon del primer al cuarto lugar en calidad de resolución para los tres métodos.

### 3.2.2 Incertidumbres para un medio de dos capas

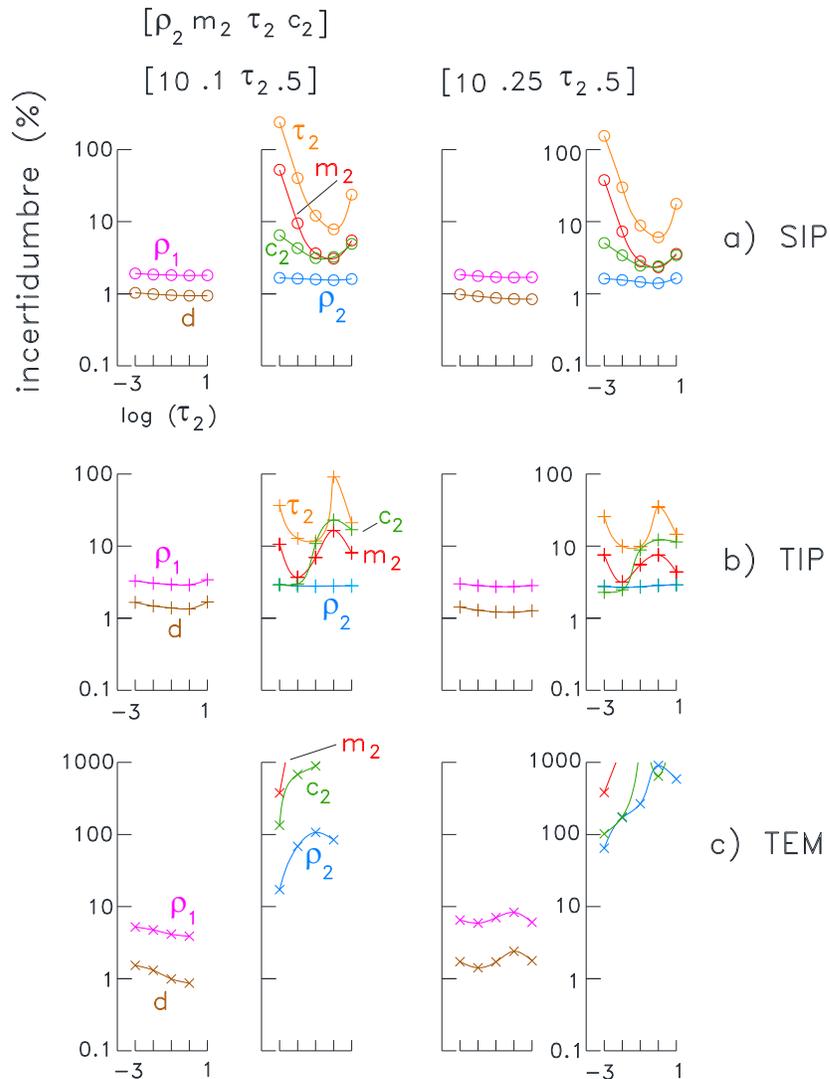
Se realizó un análisis de resolución similar pero ahora para un modelo de dos capas, en el cual solamente la segunda capa tenía PI. Dicho modelo permitió evaluar el efecto de tener un medio polarizable no aflorante, sino enterrado. Las diferentes profundidades de investigación de los tres métodos juegan un rol importante en este caso. La profundidad de investigación de los métodos SIP y TIP está controlada principalmente por la variación en las aberturas electródicas, mientras que para el método TEM ésta depende de los tiempos de medición después del corte de corriente. Debido a que es importante evaluar los métodos en igualdad de condiciones, primeramente se buscaron arreglos de adquisición de datos óptimos y un modelo no polarizable que tuviera incertidumbres similares para los tres parámetros de este modelo (dos resistividades y un espesor). Este proceso solamente se realizó para los métodos SIP y TEM; se omitió el método TIP debido a que, como se observó en el caso homogéneo, sus resoluciones estaban en un rango intermedio entre los otros dos. Después de varios intentos probando diferentes

combinaciones de parámetros y modelo, se llegó a la siguiente selección, las separaciones de electrodos para el método SIP consistieron en tres arreglos dipolo-dipolo ( $a=15$  m,  $n=2$ ;  $a=15$  m,  $n=4$ ;  $a=30$  m,  $n=4$ ), inyectando en todos ellos una corriente de 0.1 A; los voltajes complejos de cada arreglo fueron calculados en cuatro frecuencias (0.01, 0.1, 1, and 10 Hz), resultando en un total de 24 datos. Los parámetros empleados en el método TEM fueron una espira circular de radio igual a 11.3 m (la cual era simulada por una espira cuadrada de 20 x 20 m), corriente de 0.5 A, bobina receptora central con área efectiva de 100 m<sup>2</sup>, ancho de rampa de 1.5  $\mu$ s, y voltajes calculados en 24 tiempos, de 5.1 to 332  $\mu$ s. Estos parámetros son similares a los del sistema Zonge nanoTEM. Se emplearon las mismas leyes de potencia descritas anteriormente para el ruido. El modelo de dos capas usado en esta prueba tiene un espesor de 15 m y valores de resistividad de 100 y 10  $\Omega$ m para la primera y segunda capa, respectivamente. Las incertidumbres de los parámetros de este modelo sin PI no fueron iguales, sin embargo fueron comparables en magnitud; éstas fueron (1.4%, .6%, and .8%) para el método SIP y (3.2%, .7% and .5%) para TEM, para la primera resistividad, el espesor de la primera capa y la resistividad del semiespacio de abajo, respectivamente.

La estimación de las resoluciones de los parámetros fue realizada con un procedimiento similar al del caso homogéneo. Los parámetros Cole-Cole de la segunda capa del modelo de referencia fueron [10 .25  $\tau$  .5], con la constante de tiempo variando desde 0.001 a 10 s. La cargabilidad se redujo a 0.1 y se incrementó a 0.5, el exponente  $c$  se perturbó a 0.25 y 0.75. En todos los modelos la resistividad y el espesor de la capa somera (100  $\Omega$ m and 15 m) se mantuvieron fijos.

La Figura 20 muestra las incertidumbres del modelo de referencia junto con las del modelo al cual se modificó la cargabilidad a 0.1, para los tres métodos geofísicos. El resultado más importante de este experimento fue la gran pérdida de resolución de la constante de tiempo en el método TEM; sus incertidumbres fueron tan grandes que sus valores estaban fuera del área de la gráfica de la Figura 20. Por lo que, mientras el poder resolutivo del semiespacio homogéneo del método TEM es moderado, cuando el medio polarizable es enterrado la resolución de los parámetros de PI muestran una importante degradación. Otras características sobresalientes en esta figura son: el mismo orden de clasificación que se obtuvo para un semiespacio homogéneo también apareció aquí (primer lugar SIP, segundo lugar TIP, tercer lugar TEM); la resistividad y el espesor de la primer capa están razonablemente bien resueltas (con incertidumbres menores a 10%) para los tres métodos; en la capa polarizable la resistividad DC es sistemáticamente el parámetro mejor resuelto, seguido por  $m$ ,  $\tau$  y  $c$ . También se calcularon incertidumbres

haciendo cambios en el valor de la cargabilidad y el exponente  $c$ ; estos se incluyen en los anexos C y D ya que los resultados fueron similares a los de la Figura 20.



**Figura 20.** Modelo de dos capas. Incertidumbres de los parámetros para constantes de tiempo de 0.001 a 10 s de los métodos SIP (a), TIP (b) y TEM (c). Las dos columnas de la derecha corresponden a las incertidumbres de la primera y segunda capa para el modelo de referencia. Las dos columnas de la izquierda corresponden al modelo de referencia cambiando la cargabilidad a 0.1.

### 3.3 Inversión

Un objetivo adicional de esta tesis es el de construir un programa de computadora que realice inversión conjunta de datos de dos o más métodos que sean sensibles a la polarización inducida. Esto con el fin de analizar si la resolución de la constante de tiempo mejora al hacer inversión conjunta.

De manera similar a las pruebas de resolución, las pruebas de inversión se hicieron para dos casos: semiespacio homogéneo y estratificado de dos capas; de esta manera podemos hacer comparaciones entre los mismos casos y se pueden deducir mejores conclusiones. La inversión consistió en obtener datos sintéticos de los tres métodos mediante modelado directo. Posteriormente se les agregó 5% de ruido gaussiano a estos datos para simular valores tomados en campo. Finalmente, se corrieron inversiones SIP, TIP y TEM de manera individual e inversiones conjuntas con los tres tipos de datos. Para intentar abarcar la mayor cantidad de posibilidades se hicieron inversiones para varios modelos con mismos valores de resistividad DC, cargabilidad y exponente de la frecuencia pero variando los valores de  $\tau$ . Además, cada una de las inversiones se realizó con modelos iniciales diferentes.

#### 3.3.1 Semiespacio homogéneo

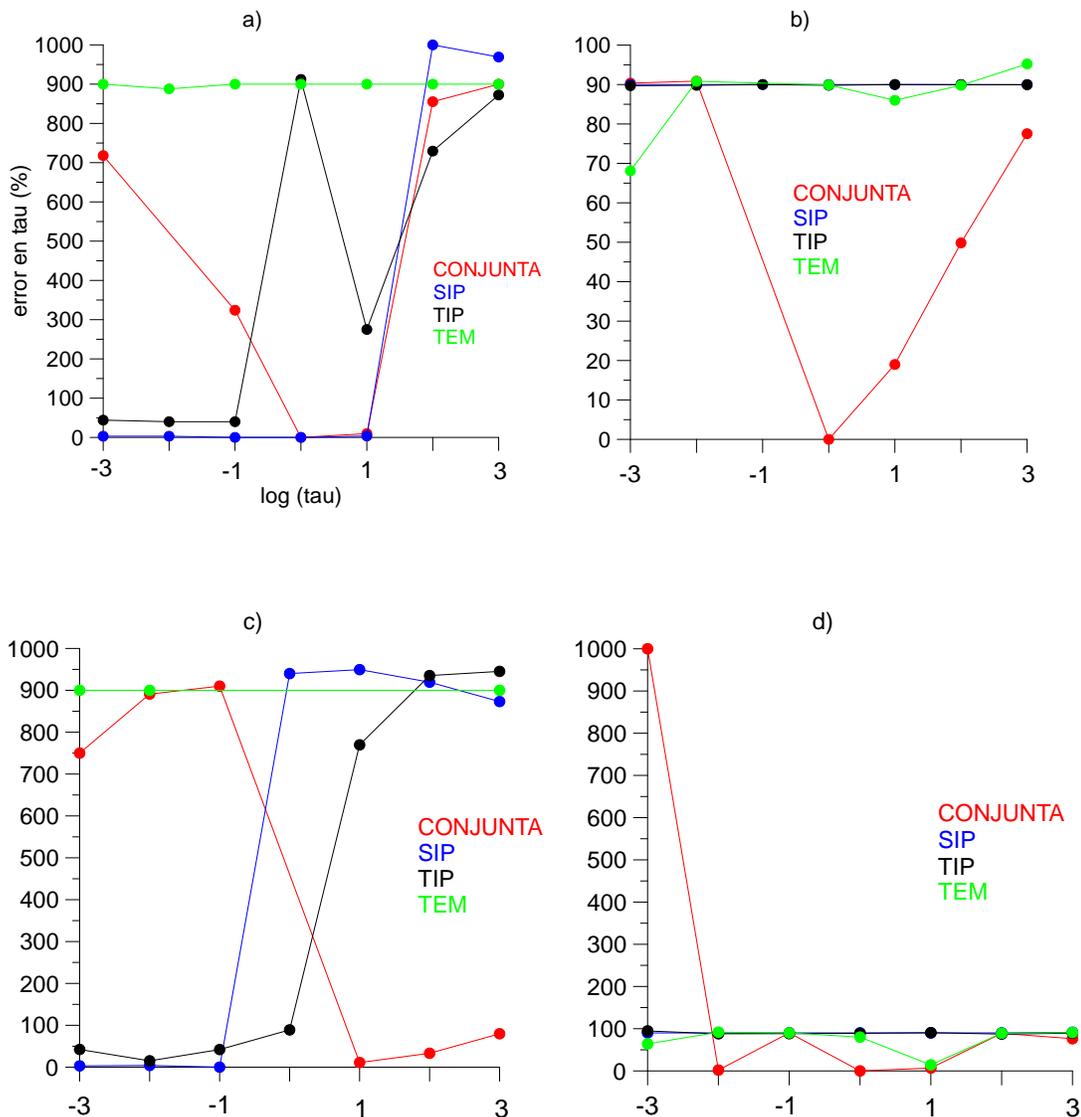
Todas las inversiones se hicieron con 24 datos. El arreglo eléctrico utilizado en el método SIP fue un dipolo-dipolo con  $a=10$  m,  $n = 1$  y una corriente inyectada de 0.1 A; se usaron 12 frecuencias de  $1E-3$  hasta 300 Hz, con 2 valores por década. El arreglo eléctrico y la corriente inyectada en el método TIP fueron los mismos que en el método SIP, usándose en este caso 23 tiempos de  $1.6E-5$  hasta 1 s con 4 tiempos por década. Además se incluyó el valor del voltaje primario en  $t=0$  s. La corriente inyectada fue de una serie de pulsos cuadrados de la forma  $+0,-0$  con un periodo  $T = 8$  s; se hizo la corrección por el efecto de los cinco periodos previos al corte de la corriente. Finalmente, para el método TEM, se utilizaron los parámetros del sistema Zonge nanoTEM, que emplea tiempos desde  $5.1 \mu\text{s}$  hasta  $332.1 \mu\text{s}$ . La corriente fue de 0.5 A, se empleó una espira cuadrada de 20 m de lado. Este sistema utiliza 1 frecuencia de repetición de 32 Hz y ancho de rampa de  $1.5 \mu\text{s}$ . Se produjeron datos sintéticos con 7 combinaciones diferentes de los parámetros Cole-Cole los cuales eran de la forma  $[100 \ 0.5 \ \tau \ 0.5]$ , con tau variando desde 0.001 s hasta 1000 s, teniendo 1 valor por década. Cada combinación se invirtió con 4 modelos iniciales diferentes:

1. Parámetros iniciales arriba del modelo verdadero, 1 década arriba para resistividad dc y constante de tiempo, y 50% arriba para  $m$  y  $c$ .
2. Parámetros abajo del modelo verdadero (misma magnitud de la variación que el caso anterior).
3. Parámetros impares ( $\rho_0$  y  $\tau$ ) arriba del modelo verdadero y parámetros pares ( $m$  y  $c$ ) abajo.
4. Parámetros impares arriba del modelo verdadero y pares abajo.

Como ejemplo de estos modelos iniciales, supóngase el caso de la Figura 8 cuya combinación es [100 0.5 1 0.5], los cuatro modelos iniciales fueron [1000 0.75 10 0.75], [10 0.25 0.1 0.25], [1000 0.25 10 0.25] y [10 0.75 0.1 0.75].

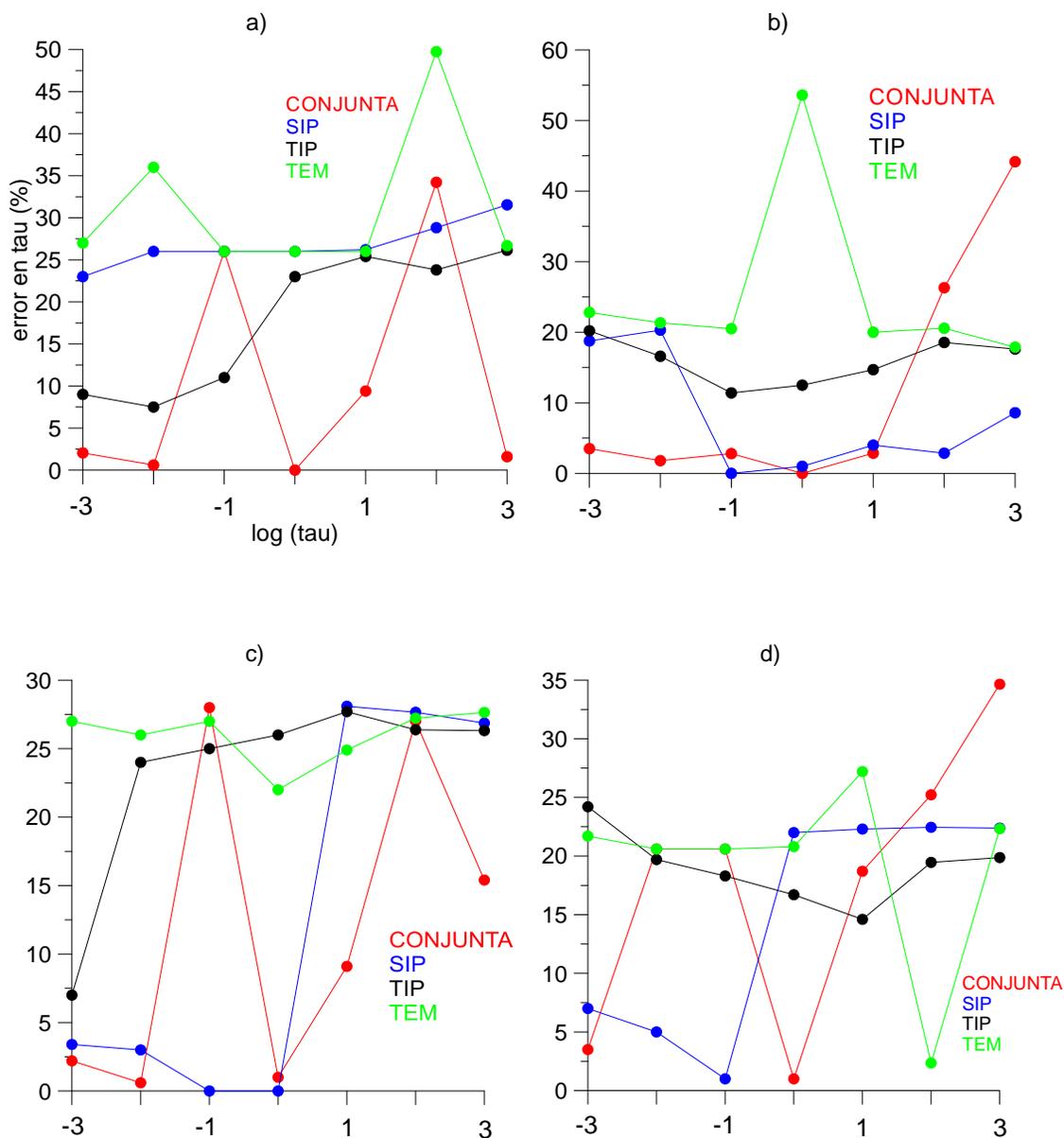
Además del objetivo principal de mejorar la calidad en la solución de  $\tau$ , la finalidad de este experimento consistió en determinar los límites del código para encontrar el valor verdadero dados modelos iniciales lejanos al modelo real. Se realizaron un total de 112 inversiones; en 8 de ellas no hubo convergencia en la solución. Los resultados aparecen en la Figura 21. Cada gráfica tiene 4 curvas del valor absoluto del error porcentual de la constante de tiempo (definido como la diferencia entre el valor real y el estimado en la inversión, dividido entre el valor real) vs el logaritmo de  $\tau$ , una curva para cada una de las inversiones individuales y otra para la inversión conjunta de los tres métodos. Las curvas están agrupadas en 4 gráficas diferentes correspondientes al modelo inicial: *a*) modelo inicial con todos los parámetros arriba del valor real, *b*) modelo inicial con todos los parámetros abajo del valor real, *c*)  $\rho_0$  y  $\tau$  arriba del modelo verdadero y  $m$  y  $c$  abajo, *d*)  $\rho_0$  y  $\tau$  abajo del modelo real y  $m$  y  $c$  arriba. Para ayudar al lector, un error de 900% corresponde a los modelos iniciales donde el valor de  $\tau$  fue una década mayor a la verdadera, es decir, la  $\tau$  calculada en la inversión no se acercó al valor verdadero. Así mismo, un error de 90% corresponde a la  $\tau$  inicial una década menor que la verdadera. En contraste, un error cercano a cero indica que la inversión sí recuperó la  $\tau$  verdadera. De los 25 valores de error en  $\tau$  del caso conjunto, 13 de éstos fueron los menores o de magnitud comparable a los valores más pequeños de error con respecto a los métodos individuales. Luego sigue el método SIP que fue el de menor error en 10 de las 28 inversiones totales. TIP estuvo una posición intermedia siendo el mejor método en 6 de 28 casos. TEM fue el que mostró la mayoría de los errores más altos, siendo mejor solamente en 4 de 23 casos. Estos resultados son parcialmente consistentes con el análisis de sensibilidades e incertidumbres descrito al principio de este

capítulo. Sin embargo, se esperaba que en todos los casos la inversión conjunta diera los menores errores, lo cual no ocurrió en forma sistemática. Además, no se observa el patrón de incremento de error conforme aumenta el valor de la constante de tiempo como se vio en el análisis de incertidumbres.



**Figura 21.** Curvas de porcentaje de error de la constante de tiempo vs  $\log$  de  $\tau$ . Los puntos rojos corresponden a las inversiones conjuntas, los azules al método SIP, los negros a TIP y los verdes a TEM. Las cuatro gráficas corresponden al modelo inicial empleado: *a*) modelo con todos los parámetros arriba del valor real, *b*) modelo con todos los parámetros abajo del valor real, *c*)  $\rho_0$  y  $\tau$  arriba del modelo verdadero y  $m$  y  $c$  abajo, *d*)  $\rho_0$  y  $\tau$  abajo del modelo verdadero y  $m$  y  $c$  arriba.

Puesto que en muchas de las inversiones anteriores el valor final de  $\tau$  no convergió hacia el valor verdadero, el experimento se repitió pero ahora definiendo los parámetros de los modelos iniciales más cercanos a los verdaderos. En vez de que los parámetros del modelo inicial fueran una década para  $\rho_0$  y  $\tau$  o 50% para  $m$  y  $c$ , en este experimento los valores fueron 10% de década para  $\rho_0$  y  $\tau$ , y 10% para  $m$  o  $c$ ; de manera que, tomando nuevamente el caso de la Figura 8, los valores iniciales de los cuatro modelos fueron [126 0.55 1.26 0.55], [79.4 0.45 0.794 0.45], [126 0.45 1.26 0.45] y [79.4 0.55 0.794 0.55]. Las incertidumbres en la constante de tiempo se muestran en la Figura 22. El comportamiento de estas inversiones mostró una mejoría notable respecto a los resultados de la Figura 21. En general los errores fueron menores a 60%. Al igual que en el caso anterior, el orden del mejor al peor método fue: inversión conjunta, con 15 errores más pequeños; luego SIP, con 7; el método TIP estuvo cercano, con 5 valores; y, finalmente, el método TEM, teniendo sólo 1 valor de error menor a todos los demás métodos. En estos resultados hay dos comportamientos a los que no les hemos encontrado explicación. Primero, era de esperarse que en la inversión conjunta de los tres métodos siempre diera las menores incertidumbres. En la mayoría de los casos esto sí fue cierto, pero no en el 100% de los casos. Segundo, nosotros esperábamos que la incertidumbre en  $\tau$  fuera aumentando conforme  $\tau$  se va incrementando, en forma similar al comportamiento observado en las Figuras 16 y 18. De la variación de las curvas de la Figura 22 no es obvio que esto ocurra.



**Figura 22.** Curvas de porcentaje de error de la contante de tiempo vs  $\log \tau$ . Los puntos rojos corresponden a las inversiones conjuntas, los azules al método SIP, los negros a TIP y los verdes a TEM. Las cuatro gráficas corresponden al modelo inicial empleado: *a)* modelo con todos los parámetros arriba del valor real, *b)* modelo con todos los parámetros abajo del valor real, *c)*  $\rho_0$  y  $\tau$  arriba del modelo verdadero y  $m$  y  $c$  abajo, *d)*  $\rho_0$  y  $\tau$  abajo del modelo real y  $m$  y  $c$  arriba.

### 3.3.2 Caso estratificado

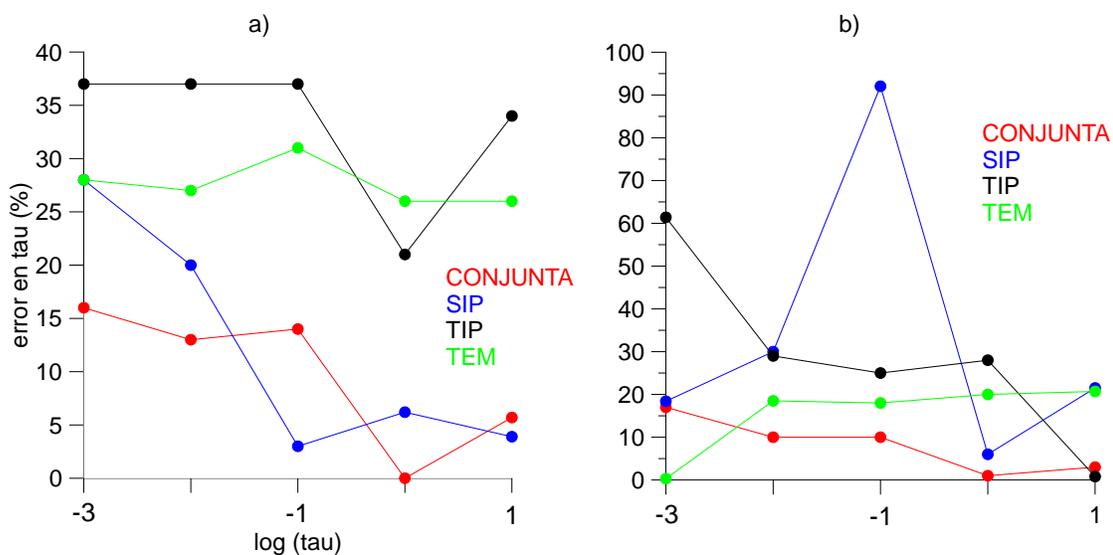
En este experimento de dos capas se siguió un procedimiento muy parecido al del semi-espacio homogéneo (sección 3.3.1) en cuanto al uso de cuatro tipos de modelos iniciales. Los valores sintéticos del método SIP se produjeron con tres aperturas de un arreglo dipolo-dipolo: la primera con  $a=15$  m,  $n=2$  y corriente de 0.1 A; la segunda con  $a=15$  m,  $n=4$  y corriente = 1 A; la tercera con  $a=30$  m,  $n=4$  y corriente de 1 A. Las frecuencias fueron 10E-3, 0.1, 10 y 1000 Hz. El arreglo del método TIP fue similar al método SIP, con 7 tiempos por apertura de 3E-4 hasta 1 s más el voltaje en el tiempo  $t=0$  s ( $V_p$ ); la corriente eran pulsos cuadrados de periodo igual a 8 s y se hizo corrección de 5 periodos. Para TEM se empleó el sistema Zonge nanoTEM, con 24 tiempos de 5.1 hasta 332.1  $\mu$ s, espira de 20 x 20 m, corriente igual a 0.5 A, frecuencia de repetición de 32 Hz y ancho de rampa de apagado de 1.5  $\mu$ s.

Para este modelo se intentaron varias corridas del programa de inversión usando diferentes modelos iniciales, con resultados no exitosos. Para que la solución en la inversión convergiera, se tuvo que reducir las diferencias entre los parámetros iniciales y los verdaderos. Los resultados del análisis de resolución e incertidumbres arrojaron que para los sondeos TEM la sensibilidad a  $\tau$  era prácticamente nula, es decir que en teoría este método no podría resolver dicho parámetro, esto se corroboró en algunas incertidumbres obtenidas con las inversiones.

Los mejores resultados se obtuvieron cuando las diferencias entre el modelo inicial y el verdadero fueron de 10% de década para la resistividad dc y la constante de tiempo, y 10% para la cargabilidad y c. Como el análisis de incertidumbres mostró que el espesor estaba bien resuelto, se usaron valores iniciales alejados 50% del valor verdadero.

La Figura 23 resume los errores porcentuales de los cuatro tipos de inversiones con respecto al valor de la constante de tiempo de una forma similar a como se presentaron en el caso homogéneo. Los dos conjuntos de curvas corresponden a los casos *a)* cuando los valores iniciales de los parámetros eran mayores que los valores verdaderos y *b)* cuando eran menores. Una característica interesante de las curvas de error en  $\tau$  para la inversión conjunta es su tendencia a disminuir conforme la  $\tau$  de la inversión aumenta. A excepción de un valor del método SIP de alrededor de 90%, todos los errores fueron menores a 65%. La inversión conjunta fue la mejor en más de la mitad de las inversiones (13), los métodos SIP y TIP estuvieron empatados siendo ambos los de menor error en 3 ocasiones y, nuevamente, el método TEM fue el peor.

Tomando en cuenta lo anterior, es necesario complementar la inversión conjunta con otro esquema para hacerlo más eficiente al momento de resolver los modelos, esto se abordará a continuación.



**Figura 23.** Curvas de porcentaje de error de la contante de tiempo vs log de  $\tau$ . Los puntos rojos corresponden a las inversiones conjuntas, los azules al método SIP, los negros a TIP y los verdes a TEM. Las gráficas corresponden al modelo inicial empleado: *a)* modelo con todos los parámetros arriba del valor real, *b)* modelo con todos los parámetros abajo del valor real.

### 3.3.3 Inversiones Monte Carlo

En las secciones anteriores se notaron las limitaciones del programa conjunto cuando el modelado inverso tenía los modelos iniciales alejados de los valores verdaderos. Una vez que las variaciones fueron de 10% el programa mostró mejores resultados. Además, el hecho de que un método fuera mejor que el resto, no era garantía de que tuviera porcentajes bajos de error. Si se hiciera un barrido de los valores mediante variaciones de los parámetros iniciales, especialmente de la constante de tiempo, se podrían reducir estas limitaciones en la inversión conjunta, por lo que es conveniente complementarla con inversiones tipo Monte Carlo. El proceso implementado en este programa de inversión consistió en hacer una primera inversión con un modelo inicial; los parámetros obtenidos mediante la inversión constituyen

una primer solución la cual es perturbada en forma aleatoria para definir un nuevo modelo que servirá como modelo inicial para una segunda inversión con la que se obtendrá una segunda solución la cual se espera que sea mejor que la primera. Este proceso se realiza una cantidad definida de veces llamada “número de inversiones Monte Carlo”. Finalmente se escoge el modelo con el menor error residual rms. El proceso se puede repetir varias veces hasta que el modelador esté satisfecho con el mejor modelo. Para el problema planteado, este tipo de inversión es muy conveniente ya que permite abarcar un amplio rango de valores de la constante de tiempo.

La Figura 24 muestra dos ejemplos de 5 inversiones tipo Monte Carlo para encontrar  $\tau$ , cada ejemplo corresponde a un caso homogéneo y un caso estratificado. Del lado derecho está graficado el porcentaje de error en  $\tau$  definido de manera similar a las Figuras 21-23, graficado con respecto al número de inversión Monte Carlo. En la parte izquierda se grafica el error cuadrático medio (rms) contra el número de iteración.

La clave del éxito en estas inversiones fueron los valores por los cuales se multiplicó el valor de  $\tau$  en cada inversión; como ésta tiene un gran rango de valores posibles, se hacía una búsqueda en una década diferente en cada iteración, es decir que se multiplicaba el valor por 10 o por 100. En determinado caso de que no se hubiera encontrado el valor verdadero de la constante de tiempo, se considerarían las inversiones con los rms más pequeños para ir acotando el rango de búsqueda.

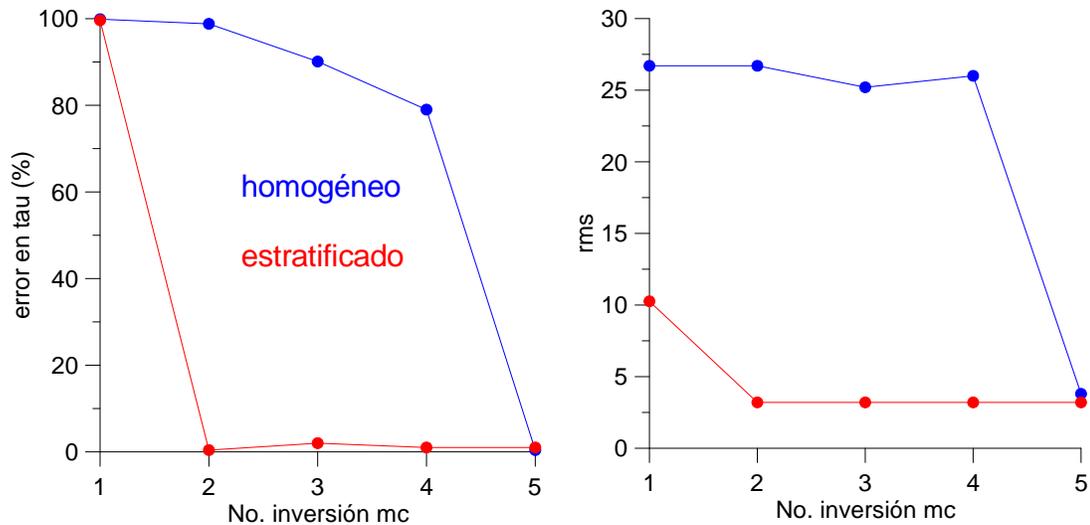
El ejemplo que se resolvió en el caso homogéneo fue la respuesta producida por el conjunto de valores [100, 0.5, 1, 0.5] la cual se contaminó con ruido gaussiano del 5%; como modelo inicial se empleó la combinación [20, 0.25, 1E-4, 0.25].

El caso estratificado fue uno de los diversos casos invertidos en la sección 3.3.2, se resolvió para  $\rho_{01}=100 \Omega\text{m}$  y  $Esp_1 = 15 \text{ m}$ , para la capa somera, y [10, 0.5, 1, 0.5] en la capa profunda. Los valores iniciales fueron:  $\rho_{01}=10 \Omega\text{m}$  y  $Esp_1 = 7.5 \text{ m}$ , y [1, 0.25, 1E-4, 0.25], para la capa somera y profunda, respectivamente. Al caso homogéneo le tomó las 5 inversiones para encontrar el valor de la constante de tiempo. Por otro lado, curiosamente, en la segunda inversión del caso de dos capas, ya se había resuelto  $\tau$ .

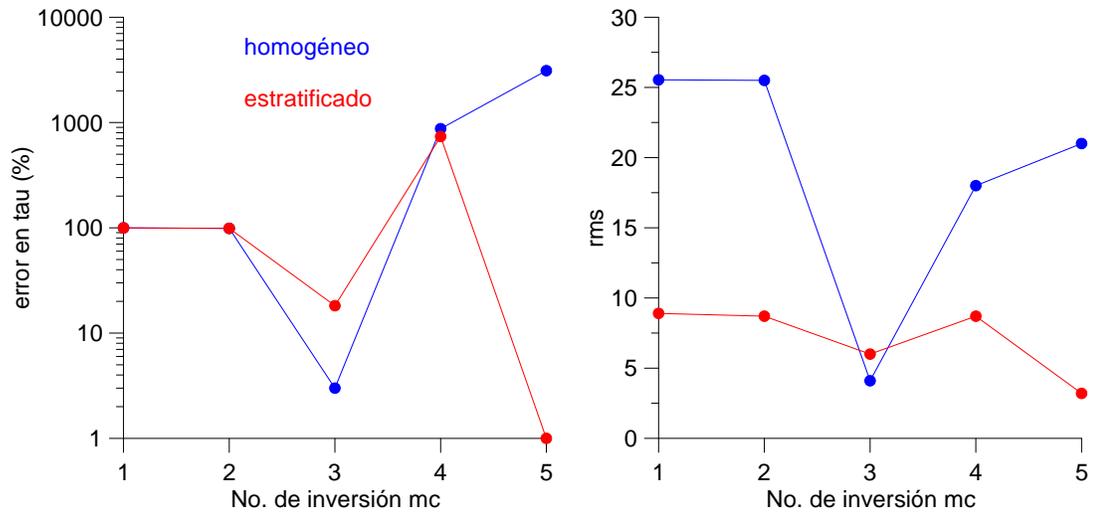
En la Figura 25 se muestra un experimento similar al anterior con la diferencia de que la constante de tiempo de los modelos se aumentó a 10 s. Los modelos fueron: [100, 0.5, 10, 0.5], para el caso

homogéneo, y  $\rho_{01} = 100$ ,  $Esp_1 = 15$  m,  $[10, 0.5, 10, 0.5]$ , para el caso de dos capas. Los modelos iniciales en ambos casos fueron los mismos que en el ejemplo de la Figura 24. El caso homogéneo se resolvió en la tercera inversión, al caso de 2 capas le tomó las 5 iteraciones en encontrar la solución.

Aunque este proceso de múltiples inversiones tipo Monte Carlo ayuda a encontrar una solución que ajuste bien a los datos, en algunas ocasiones no garantiza que la solución a la que se llega sea buena.



**Figura 24.** *Izquierda:* Curvas de porcentaje de error de la contante de tiempo vs número de inversión Monte Carlo. *Derecha:* Valores de rms vs número de inversión Monte Carlo. Puntos azules corresponden al caso homogéneo, puntos rojos al caso de dos capas. Los modelos tenían un valor de  $\tau = 1$  s.



**Figura 25.** *Izquierda:* Curvas de porcentaje de error de la contante de tiempo vs número de inversión Monte Carlo. *Derecha:* Valores de rms vs número de inversión Monte Carlo. Puntos azules corresponden al caso homogéneo, puntos rojos al caso de dos capas. Los modelos tenían un valor de  $\tau = 10$  s.

## Capítulo 4. Discusión

---

### Funciones dispersivas

En esta tesis se utilizó la expresión dispersiva de Cole-Cole descrita en la ecuación (1). El comportamiento de la resistividad con la frecuencia está descrita por cuatro parámetros. Una pregunta que se plantea frecuentemente es ¿no es posible tener otra ley dispersiva con menos de cuatro parámetros? Dias (2000) realizó una compilación de expresiones dispersivas publicadas en la literatura, resultando más de diez. Entre ellas, las más comunes son las relacionadas con Cole-Cole:

- a) Cole-Cole Generalizada (CCG) definida por cinco parámetros ( $\rho_0$ ,  $m$ ,  $\tau$ ,  $c$  y  $a$ ) y descrita por la expresión (20)

$$\rho(\omega) = \rho_0 \left\{ 1 - m \left[ 1 - \frac{1}{(1+(i\omega\tau)^c)^a} \right] \right\} \quad (20)$$

- b) Cole-Cole standard. Es la utilizada en esta tesis. Está definida haciendo  $a=1$  en la expresión (20).
- c) Cole-Davison (CD). Descrita haciendo  $c=1$  en la expresión (20), es decir, está definida también por cuatro parámetros.
- d) Debye. Especificada haciendo  $a=1$  y  $c=1$  en la expresión (20), es decir, es la más sencilla de este conjunto ya que solo se necesitan tres parámetros ( $\rho_0$ ,  $m$ ,  $\tau$ ,) para definirla.

Un experimento interesante de comparación de estas diferentes leyes dispersivas fue realizado por Nordsiek & Weller (2008). Ellos midieron la respuesta de polarización inducida usando el método SIP de 13 muestras sintéticas construidas con granos de cuarzo y escoria metálica. Las 13 respuestas de amplitud y fase las invirtieron a modelos CCG, Cole-Cole, CD y Debye. Para los tres primeros modelos los errores promedio de ajuste entre respuesta calculada y medida fueron de 0.4 (CCG), 0.7 (Cole-Cole) y 1.5% (CD). Entonces, el modelo que mejor ajustó a los datos fue el Cole-Cole Generalizado, lo cual tiene sentido pues es el que tiene más parámetros. De los dos modelos con cuatro parámetros el Cole-Cole reprodujo mejor las respuestas que el Cole-Davidson. Respecto al modelo de tres parámetros, estos autores usaron el modelo de Debye pero como una sumatoria de decaimientos de Debye dados por

$$\rho(\omega) = \rho_0 \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n m_k \left[ 1 - \frac{1}{1+i\omega\tau_k} \right] \right\} \quad (21)$$

Con este último modelo dispersivo ellos presentaron un buen ajuste de respuestas pero con la enorme cantidad de 700 términos en esta sumatoria de Debye. En consecuencia, parece ser que no hay un buen modelo de dispersión con menos de cuatro parámetros.

#### 4.1 Resoluciones

Las resoluciones bajas de los parámetros Cole-Cole en el método TEM pueden explicarse mediante el análisis hecho por Smith (1989) y Smith & West (1988), quienes simularon el fenómeno de inducción electromagnética en la presencia de polarización inducida con un simple circuito enterrado en un subsuelo de muy alta resistividad. Ellos proponen que cada vez que se mide PI con el arreglo de espira coincidente en el dominio del tiempo (“coincident-loop transient method”), el cual conceptualmente no es muy diferente del arreglo de espira interior (“in-loop method”) que se usa en esta tesis, existen dos tipos de corrientes simultáneas en el subsuelo, la que ellos llamaron corriente inductiva fundamental (CIF) y la corriente de polarización. Éstas se caracterizan por ser simultáneas, tener direcciones opuestas y decaer a diferentes velocidades. Si la corriente IF decae más rápido que la corriente de polarización, la corriente negativa será más intensa que la corriente IF en los tiempos largos, lo cual producirá el cambio de signo característico en los voltajes medidos, tales como en la Figura 6. Para un medio resistivo, por lo tanto, donde la corriente IF decae rápido, se esperaría que los parámetros de PI estuvieran mejor resueltos. Sin embargo, se observa lo opuesto en la Figura 15, donde las incertidumbres son mayores en el semiespacio resistivo (1000  $\Omega\text{m}$ ). Esto se puede explicar por la intensidad de la corriente de polarización, la cual no sólo depende de su tasa de decaimiento, sino también de qué tan intensa sea en los tiempos cortos, la cual a su vez depende de la intensidad de la corriente inductiva fundamental debido a que esta corriente es precisamente la que carga al medio. En un semiespacio conductor la corriente IF es mayor y en consecuencia también lo es la corriente de polarización.

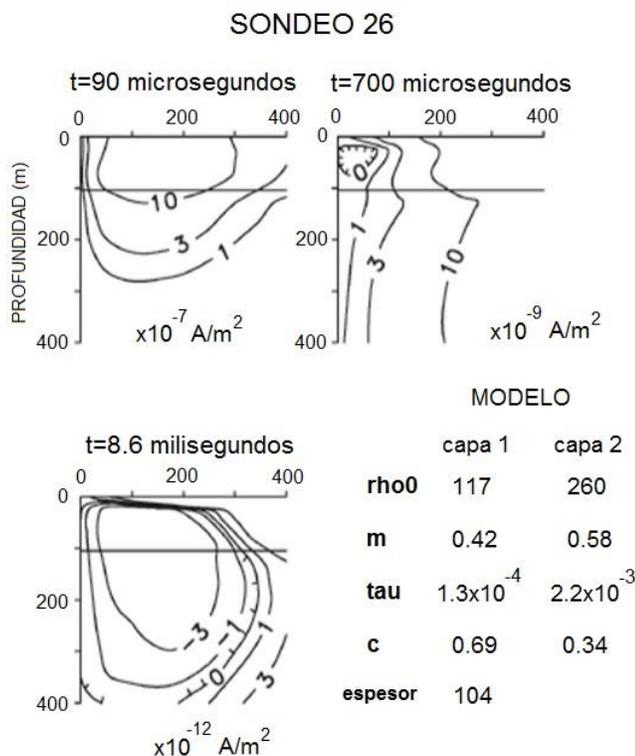
Entonces, se infiere que la menor resolución del método TEM es producida por las direcciones opuestas de estos dos tipos de corrientes. Se considera que otros métodos electromagnéticos con diferente configuración entre transmisor y receptor también van a sufrir de este tipo de limitación.

Hohmann et al. (1970), por ejemplo, hizo la comparación de las curvas de amplitud y fase de los campos eléctrico y magnético para un medio polarizable y uno sin PI. Las curvas fueron muy similares en ambos casos, de modo que no era posible diferenciar cuál representaba al medio polarizable. Llegó a la conclusión de que el arreglo implementado, el cual consistía en dos espiras separadas por una distancia  $r$ , no era el más adecuado para evaluar este fenómeno. El arreglo de espira coincidente (coincident-loop) es el más adecuado para evaluar la presencia de polarización inducida ya que el acoplamiento transmisor-receptor es mucho mayor que cuando se mide con un arreglo de espiras separadas; además los cambios de signo en el voltaje medido se pueden atribuir exclusivamente a PI y no a efectos geométricos (Flis, Newman, & Hohmann, 1989). Como el arreglo de espira interior es conceptualmente similar al arreglo de espira coincidente, ambos son adecuados para medir PI.

En los métodos galvánicos no existe este problema ya que solamente está presente la corriente de polarización. Lo anterior no es cierto en frecuencias muy altas en el método SIP o en tiempos muy cortos después del apagado de la corriente en el método TIP. En estos rangos de frecuencias o tiempos el fenómeno conocido como acoplamiento electromagnético aparece y de nuevo se tiene la presencia de las dos corrientes, la inductiva fundamental y la de polarización. En las Figuras 8a (resistividades aparentes) y 13a (sensibilidades) cubren, a partir de 1,000 Hz, el dominio donde el acoplamiento electromagnético en el método SIP empieza a ser dominante. En la Figura 13a, tanto la parte real como la imaginaria de las curvas muestran un decaimiento de las sensibilidades de la constante de tiempo y del exponente  $c$ . En la parte real el decaimiento comienza desde frecuencias bajas, mientras que en la parte imaginaria es un poco más abrupto a partir de 1000 hz. Un punto que intriga es que ambas componentes de la sensibilidad de la cargabilidad no decaen en las frecuencias más altas. Puesto que la cargabilidad es un parámetro propio del fenómeno de PI, y en frecuencias altas interaccionan las dos corrientes (inductiva fundamental y de polarización), se esperaba que su sensibilidad disminuyera en frecuencias altas.

Flores et al. (2013) mostraron la simulación de la evolución temporal de la densidad de corriente en el subsuelo de un modelo de 2 capas con PI. Los parámetros Cole-Cole de este modelo y las densidades de corriente en tres tiempos diferentes se muestran en la Figura 26. Para calcular las respuestas de una espira de 150x150 m se usaron fuentes lineales de corriente de polaridad opuesta localizadas en  $x=-75$  y  $75$  m. Los contornos de dicha figura son los de la corriente total, es decir, la corriente inductiva fundamental y la de polarización. Si el subsuelo no tuviera una resistividad dispersiva la densidad de corriente, además de decaer con el tiempo, sería positiva en todos los tiempos, similares al comportamiento de los "aros de humo" de Nabighian (1979). Nótese que en  $90 \mu s$  la densidad de corriente es positiva pero en  $700 \mu s$  ya existe una zona del subsuelo donde la densidad de corriente es negativa.

Esta zona de corrientes negativas aumenta en sus dimensiones en el tiempo mayor de 8.6 ms, lo cual se debe a la polaridad opuesta de la corriente de polarización. Con esta simulación se quiere demostrar que el modelo de Smith & West (1988), que propone la presencia de dos corrientes de sentidos opuestos en un modelo sencillo de una bobina enterrada también es válido para las corrientes distribuidas en un semiespacio con PI.



**Figura 26.** Contornos de densidad de corriente a diferentes tiempos para un modelo polarizable de dos capas. Las fuentes son dos corrientes lineales 2D de polaridad opuesta localizadas en  $x=-75$  y  $75$  m, simulando una espira de  $150 \times 150$  m (modificado de Flores et al., 2013).

De los cuatro parámetros Cole-Cole, la constante de tiempo es generalmente la peor resuelta. Anteriormente, Ghorbani et al. (2007) analizaron este punto para los métodos galvánicos, llegando a una conclusión similar. Vale la pena mencionar que los porcentajes de error de los cuatro parámetros Cole-Cole no deben ser tratados de la misma manera; no es lo mismo un error de 200% para la constante de tiempo, que el mismo error en la cargabilidad o en el exponente  $c$  debido al gran rango de valores posibles que puede tener  $\tau$  (abarcando casi 6 décadas), mientras que los otros dos parámetros solamente pueden variar de 0 a 1.

El método TIP mostró resoluciones menores que el método SIP. Este resultado concuerda con otros trabajos previos (Ghorbani et al., 2007; Soininen, 1984; Tombs, 1981). Los voltajes en el dominio del tiempo son la respuesta de un apagado de corriente en forma de escalón que involucra una multiplicación por  $(i\omega)^{-1}$  de la respuesta en frecuencia, es decir que TIP es una versión filtrada con un pasa-bajas de la respuesta SIP. Además, un filtrado adicional está involucrado debido a que se debe de tomar en cuenta la naturaleza periódica de la corriente inyectada. Esto es relevante ya que el método TIP en la práctica podría ser usado más frecuentemente que el método SIP. Aunque no se tienen estadísticas para respaldar esta afirmación, juzgando por el número de instrumentos comerciales para medir PI, aproximadamente 60% de éstos funcionan en el dominio del tiempo, el 40% restante emplea frecuencias variables.

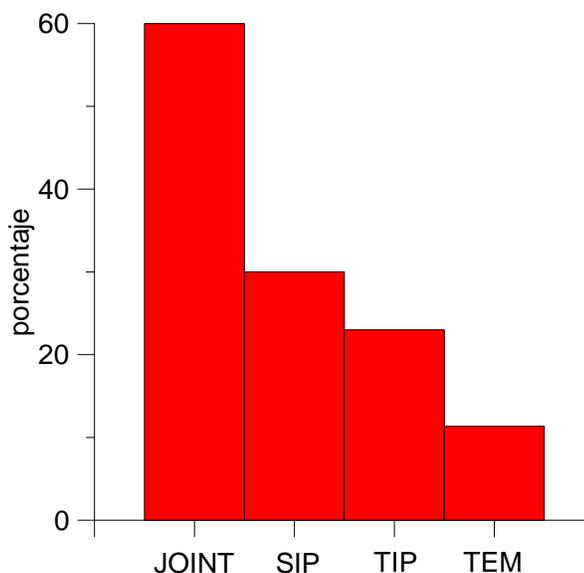
Una interrogante que fácilmente puede surgir es, ¿porqué se limita el análisis de los parámetros Cole-Cole a un semiespacio homogéneo o estratificado de solo 2 capas y no se incursiona en modelos más complicados como son las distribuciones bidimensionales o tridimensionales de modelos Cole-Cole? La respuesta es que el problema inverso para este tipo de modelos está muy mal constreñido y sufre de una alta no-unicidad. Para visualizar estas limitaciones supóngase que el subsuelo se discretiza en 200 celdas en un problema 2D o 3D. Si no hay PI, se tendrá el problema de estimar 200 resistividades. En cambio, si el subsuelo es polarizable, se tendrían que estimar 800 parámetros (los 4 parámetros Cole-Cole en cada celda), lo cual es un problema muy serio. En esta tesis, aun cuando se manejan modelos sencillos, se demuestra que algunos parámetros tienen una resolución pobre. Estas limitaciones seguramente se empeorarán al considerar modelos más complicados. Para realizar la inversión de datos obtenidos con los métodos galvánicos, en la gran mayoría de los casos se hacen con una aproximación de baja frecuencia, donde se usan programas basados para invertir datos de corriente directa, es decir, de frecuencia cero (e.g. Loke, Chambers, & Ogilvy, 2006; Seigel, 1959; Weller, Frangos, & Seichter, 2000; Yuval & Oldenburg, 1997). Para calcular el problema directo o hacer inversión de sondeos TEM, la aproximación de baja frecuencia no sirve, es necesario incluir el fenómeno de inducción electromagnética. Los algoritmos de Kang & Oldenburg (2016) y Viezzoli, Kaminski, & Fiandaca (2017) son los únicos publicados para hacer inversión 3D de datos de sondeos TEM. El primero de ellos está basado en varias suposiciones, discutibles algunas de ellas. El segundo no se trata realmente de inversión 3D, sino de inversiones 1D con constricciones de suavidad lateral.

## 4.2 Inversión

Las inversiones de datos de métodos individuales e inversiones conjuntas estuvieron enfocadas a evaluar y mejorar la resolución de la constante de tiempo. Este parámetro es particularmente útil en exploración minera pues puede ayudar a estimar la concentración y textura de los sulfuros en un yacimiento. Por otro lado, en geohidrología, este parámetro parece estar relacionado directamente con la conductividad hidráulica, un parámetro esencial en el modelado numérico del agua subterránea.

Los resultados globales de este experimento de inversiones no fueron tan buenos se esperaba. Cuando los parámetros del modelo inicial están relativamente lejos de los verdaderos, en muchas ocasiones las inversiones no convergieron. La situación mejoró cuando los modelos iniciales se acercaron a los verdaderos, indicando que la convergencia depende mucho de los modelos iniciales. Las inversiones mejoraron cuando se adaptó la estrategia de emplear varios modelos iniciales con parámetros perturbados de manera aleatoria (inversiones tipo Monte Carlo).

La Figura 27 resume los porcentajes en los que cada método fue el mejor. Los porcentajes son globales, representando todos los modelos y combinaciones de parámetros invertidos, descritos en el capítulo anterior. La inversión conjunta permitió resolver  $\tau$  teniendo los errores más pequeños (o comparables) en aproximadamente el 60% de los casos; le siguen los métodos galvánicos en el dominio de la frecuencia, con 30% de los casos; los métodos galvánicos en el dominio del tiempo fueron los mejores en el 23% del total de inversiones TIP; y, finalmente, el método electromagnético fue el mejor en poco más del 11%. Los resultados que muestran los métodos individuales son consistentes con lo que se concluyó en el análisis de resoluciones: SIP primer lugar, TIP segundo y TEM último lugar. Se esperaba que en todos los casos la inversión conjunta de los tres métodos resultara la mejor, lo que no fue así. Es posible que este comportamiento no previsto sea debido al alto grado de mal condicionamiento del problema inverso.



**Figura 27.** Porcentaje global de ocurrencias en que cada método presentó el menor porcentaje de error en la constante de tiempo. La figura comprende un total de 375 inversiones tomando en cuenta todos los casos y combinaciones explicados en el capítulo 3.

Aunque en el presente proyecto se ha demostrado la conveniencia de hacer inversión conjunta con los tres métodos, se debe de tomar en cuenta que éste fue un ejercicio numérico; el costo real de llevar a cabo el proceso de adquisición de datos de tres métodos en campo es elevado. Hay que recordar que los métodos electromagnéticos para medir PI se propusieron precisamente para evitar realizar grandes desplazamientos electródicos requeridos en los métodos galvánicos al momento de buscar mayores profundidades. Tomando un ejemplo en el cual se desea cubrir una línea de 1.5 km, teniendo 10 trabajadores, el equipo necesario funcionando de manera óptima, suponiendo un terreno plano, y tomando mediciones de calidad; se requeriría un tiempo aproximado de 3 días (medidos en jornadas de 8 h) en cubrir dicha distancia con el método SIP, otros 3 días en realizar el método TIP y 1 día en realizar 5 sondeos TEM en separaciones estratégicas para abarcar aproximadamente la misma área de estudio que los métodos galvánicos (Adrián León, comunicación personal).

## Capítulo 5. Conclusiones

---

En relación a los tres métodos geofísicos analizados, el mejor es el SIP (Spectral Induced Polarization). Dicho método arrojó la mayoría de los valores de incertidumbre más bajos y fue el que tuvo mejor desempeño para encontrar el valor de la constante de tiempo. Esto se debe a que el analizar la resolución de los datos de resistividad aparente de este método sobre un semiespacio homogéneo es igual al análisis del modelo Cole-Cole intrínseco, es decir, la respuesta en superficie no sufre ninguna distorsión respecto a la resistividad verdadera. El método TIP (Transient Induced Polarization) generalmente ocupó el segundo lugar en resolución. Los voltajes de este método pueden visualizarse como el resultado de una transformada inversa de Fourier de los datos de SIP, pero modificados por un filtro pasa-bajas de tipo  $1/i\omega$ . Este filtraje ocasiona que los datos de TIP tengan menos información que los del SIP. El método de sondeos TEM (Transient ElectroMagnetics) resultó ser el de más baja resolución. La explicación física de este hecho se puede encontrar en la presencia en el subsuelo de dos tipos de corrientes simultáneas cuando existe polarización inducida: la corriente inductiva fundamental y la corriente de polarización. El punto más importante es que en todos los tiempos ambas corrientes tienen sentidos opuestos, por lo que la corriente de polarización, siendo la responsable del efecto de PI, contiene menos información por la oposición de la corriente inductiva fundamental. Esto no ocurre en los métodos galvánicos debido a que en ellos no existe una corriente inducida, a menos que se presente el efecto de acoplamiento electromagnético en altas frecuencias en el método SIP o tiempos cortos en el método TIP.

En general, de los cuatro parámetros Cole-Cole la constante de tiempo es la de mayor incertidumbre. Esto se debe a que en la resistividad intrínseca Cole-Cole, este parámetro también es el más incierto. En particular, en los métodos galvánicos (SIP y TIP) la constante de tiempo es más incierta cuando su valor es mayor a 10 segundos, para valores menores la morfología de la sensibilidad es de una meseta. En cambio, en los sondeos TEM hay un aumento sistemático de la incertidumbre conforme este parámetro aumenta

Hay un deterioro general de la resolución del modelo Cole-Cole cuando el medio polarizado no está en la superficie, sino enterrado. Este resultado fue obtenido del análisis de los modelos de dos capas donde sólo la segunda capa estuvo polarizada.

Se construyó un programa de inversión a un medio estratificado de datos de los tres métodos individuales e inversión conjunta de dos o tres métodos. La convergencia de la inversión a modelos cercanos a los verdaderos resultó ser un problema complicado. El modelo inicial tiene que estar cercano

al verdadero para que después de las iteraciones de la inversión se obtenga un modelo adecuado. El problema está en que visualmente es difícil elegir este modelo inicial a partir de las respuestas medidas. Se intentaron varias estrategias en la definición de estos modelos iniciales. Un método tipo Monte Carlo, donde se intentan muchos modelos iniciales en forma aleatoria, posiblemente sea una solución a este problema muy mal condicionado. Cabe hacer notar que se dio énfasis a la resolución de la constante de tiempo porque este parámetro sirve para hacer discriminación de concentraciones en minería y su posible uso para estimar la conductividad hidráulica en geohidrología. Posiblemente se escogió el problema más difícil pues este parámetro es el menos sensible de los cuatro del modelo Cole-Cole. Si el enfoque hubiera estado únicamente en la cargabilidad posiblemente el reto hubiera sido mucho menor. La inversión conjunta resultó ser mejor que la de métodos individuales, seguida por SIP, TIP y TEM, que es el mismo orden jerárquico encontrado en los análisis de sensibilidad y resolución.

## Literatura citada

---

- Anderson, W. L. (1975). Improved digital filters for evaluating Fourier and Hankel transform integrals. *U.S. Geol. Survey Rep. USGSGD*, 223. <https://doi.org/10.1016/j.jalz.2014.10.008>. Vascular
- Anderson, W. L. (1979). Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. *GEOPHYSICS*. <https://doi.org/10.1190/1.1441007>
- Bertin, J., & Loeb, J. (1976). *Experimental and theoretical aspects of induced polarization*. (R. G. Van Nostrand & D. S. Parasnis, Eds.). Gebrüder Borntraeger.
- Binley, A., Slater, L. D., Fukes, M., & Cassiani, G. (2005). Relationship between spectral induced polarization and hydraulic properties of saturated and unsaturated sandstone. *Water Resources Research*, 41, W12147. <https://doi.org/10.1029/2005WR004202>
- Boerner, D. E., & West, G. F. (1984). Efficient calculation of the electromagnetic fields of an extended source. *GEOPHYSICS*, 49, 2057–2060.
- Boerner, D. E., & West, G. F. (1989). A Generalized Representation of the Electromagnetic Fields In A Layered Earth: A generalized representation of the electromagnetic fields in a layered earth. *Geophysical Journal International*, 97, 529–547. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1989.tb00521.x>
- Cole, K. S., & Cole, R. H. (1941). Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, 9, 341–351. <https://doi.org/10.1063/1.1750906>
- Dias, C. A. (2000). Developments in a model to describe low-frequency electrical polarization of rocks. *GEOPHYSICS*, 65, 437–451. <https://doi.org/10.1190/1.1444738>
- Edwards, R. N., Bailey, R. C., & Garland, G. D. (1981). Conductivity anomalies: lower crust or asthenosphere? *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25(3), 263–272.
- Efferso, F. (2000). Resolution of Cole-Cole parameters based on induced polarization data. In P. C. Hansen, B. H. Jacobsen, & K. Mosegaard (Eds.), *Methods and Applications of Inversion* (pp. 120–128). Springer.
- Fitterman, D. V., & Anderson, W. L. (1987). Effect of transmitter turn-off time on transient soundings. *Geoexploration*, 24, 124–136. [https://doi.org/10.1016/0016-7142\(87\)90087-1](https://doi.org/10.1016/0016-7142(87)90087-1)
- Flis, M. F., Newman, G. A., & Hohmann, G. W. (1989). Induced-polarization effects in time-domain electromagnetic measurements. *GEOPHYSICS*, 54(4), 514–423. <https://doi.org/10.1190/1.1442678>
- Flores, C., & Peralta-Ortega, S. A. (2009). Induced polarization with in-loop transient electromagnetic soundings: A case study of mineral discrimination at El Arco porphyry copper, Mexico. *Journal of Applied Geophysics*, 68, 423–436. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2009.03.009>
- Flores, C., Romo, J. M., & Vega, M. (2013). On the estimation of the maximum depth of investigation of transient electromagnetic soundings: The case of the Vizcaino transect, Mexico. *Geofísica Internacional*, 52(2), 159–172. [https://doi.org/10.1016/S0016-7169\(13\)71470-3](https://doi.org/10.1016/S0016-7169(13)71470-3)
- Gasperikova, E., & Morrison, H. F. (2001). Mapping of induced polarization using natural fields. *Geophysics*, 66(1), 137–147. <https://doi.org/10.1190/1.1444888>

- Ghorbani, A., Camerlynck, C., Florsch, N., Cosenza, P., & Revil, A. (2007). Bayesian inference of the Cole-Cole parameters from time- and frequency-domain induced polarization. *Geophysical Prospecting*, *55*, 589–605. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2007.00627.x>
- Golub, G. H., & Reinsch, C. (1970). Singular value decomposition and least squares solutions. *Numerische Mathematik*, *14*, 403–420. <https://doi.org/10.1007/BF02163027>
- Hering, A., Misiak, R., Gyulai, A., Ormos, T., Dobroka, M., & Dresen, L. (1995). A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data. Part I: basic ideas. *Geophysical Prospecting*, *43*, 135–156. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1995.tb00128.x>
- Hohmann, G. W., Kintzinger, P. R., Van Voorhis, G. D., & Ward, S. H. (1970). Evaluation of the measurement of induced electrical polarization with an inductive system. *Geophysics*, *35*(5), 901–915. <https://doi.org/10.1190/1.1440136>
- Hördt, A., Blaschek, R., Kemna, A., & Zisser, N. (2007). Hydraulic conductivity estimation from induced polarisation data at the field scale - the Krauthausen case history. *Journal of Applied Geophysics*, *62*, 33–46. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2006.08.001>
- Ingeman-Nielsen, T., & Baumgartner, F. (2006). Numerical modelling of complex resistivity effects on a homogenous half-space at low frequencies. *Geophysical Prospecting*, *54*, 261–271. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2006.00532.x>
- Johansen, H. K., & Sorensen, K. (1979). FAST HANKEL TRANSFORMS. *Geophysical Prospecting*, *27*, 876–901. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1979.tb01005.x>
- Jupp, D. L. B., & Vozoff, K. (1975). Stable Iterative Methods for the Inversion of Geophysical Data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, *42*, 957–976. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1975.tb06461.x>
- Kang, S., & Oldenburg, D. W. (2016). On recovering distributed IP information from inductive source time domain electromagnetic data. *Geophysical Journal International*, *207*, 174–196. <https://doi.org/10.1093/gji/ggw256>
- Kaufman, A. A., Geoltrain, S., & Knoshaug, R. N. (1989). Influence of induced polarization in inductive methods. *Geoexploration*, *26*, 75–93. [https://doi.org/10.1016/0016-7142\(89\)90054-9](https://doi.org/10.1016/0016-7142(89)90054-9)
- Kemna, A., Binley, A., Cassiani, G., Niederleithinger, E., Revil, A., Slater, L., ... Zimmermann, E. (2012). An overview of the spectral induced polarization method for near-surface applications. *Near Surface Geophysics*, *10*, 453–468. <https://doi.org/10.3997/1873-0604.2012027>
- Koch, K., Kemna, A., Irving, J., & Holliger, K. (2011). Impact of changes in grain size and pore space on the hydraulic conductivity and spectral induced polarization response of sand. *Hydrology and Earth System Sciences*, *15*, 1785–1794. <https://doi.org/10.5194/hess-15-1785-2011>
- Kruschwitz, S., Binley, A., Lesmes, D., & Elshenawy, A. (2010). Textural controls on low-frequency electrical spectra of porous media. *GEOPHYSICS*, *75*(4), WA113-WA123. <https://doi.org/10.1190/1.3479835>
- Loke, M. H., Chambers, J. E., & Ogilvy, R. D. (2006). Inversion of 2D spectral induced polarization imaging data. *Geophysical Prospecting*, *54*(3), 287–301. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2006.00537.x>
- Luo, Y., & Zhang, G. (1998). *Theory and application of spectral induced polarization*. *Geophysical*

*Monograph Series. Society of Exploration Geophysics.*  
<https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.fuproc.2015.10.004>

- Madden, T. R., & Cantwell, T. (1967). Induced Polarization, A review. In W. E. Heinrichs, R. C. Holmer, R. E. MacDougall, G. R. Rogers, J. S. Sumner, & S. H. Ward (Eds.), *Mining Geophysics* (pp. 373–400). Society of Exploration Geophysics.
- Marchant, D., Haber, E., & Oldenburg, D. W. (2013). Inductive source induced polarization. *Geophysical Journal International*, *192*, 602–612. <https://doi.org/10.1093/gji/ggs040>
- McNeill, J. D. (1980). EM37 Ground transient electromagnetic system: Calculated depth of exploration. Geonics Limited.
- Meju, M. A. (1994). *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice*. (S. N. Domenico, Ed.), *Geophysical data analysis: understanding inverse problem theory and practice*. Tulsa, Oklahoma: Society of Exploration Geophysics. <https://doi.org/10.1190/1.9781560802570>
- Nabighian, M. N. (1979). Quasi-static transient response of a conducting half-space— An approximate representation. *GEOPHYSICS*, *44*, 1700–1705. <https://doi.org/10.1190/1.1440931>
- Nordsiek, S., & Weller, A. (2008). A new approach to fitting induced-polarization spectra. *GEOPHYSICS*, *73*(6), F235–F245. <https://doi.org/10.1190/1.2987412>
- Patra, H. P. (1970). CENTRAL FREQUENCY SOUNDING IN SHALLOW ENGINEERING AND HYDRO-GEOLOGICAL PROBLEMS. *Geophysical Prospecting*, *18*, 236–254. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1970.tb02105.x>
- Pelton, W., Ward, S., Hallof, P., Sill, W., & Nelson, P. (1978). Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency ip. *GEOPHYSICS*, *43*, 588–609. <https://doi.org/10.1190/1.1440839>
- Raiche, A. P., Jupp, D. L. B., Rutter, H., & Vozoff, K. (1985). The joint use of coincident loop transient electromagnetic and Schlumberger sounding to resolve layered structures. *GEOPHYSICS*, *50*(10), 1618–1627.
- Revil, A., Karaoulis, M., Johnson, T., & Kemna, A. (2012). Review: Some low-frequency electrical methods for subsurface characterization and monitoring in hydrogeology. *Hydrology Journal*, *20*(4), 617–658. <https://doi.org/10.1007/s10040-011-0819-x>
- Scott, J. B. T., & Barker, R. D. (2003). Determining pore-throat size in Permo-Triassic sandstones from low-frequency electrical spectroscopy. *Geophysical Research Letters*, *30*(9), 1450–1453. <https://doi.org/10.1029/2003GL016951>
- Seigel, H. O. (1959). Mathematical formulation and type curves for Induced Polarization. *GEOPHYSICS*, *24*, 247–266. <https://doi.org/10.1190/1.1438625>
- Slater, L. (2007). Near surface electrical characterization of hydraulic conductivity: From petrophysical properties to aquifer geometries - A review. *Surveys in Geophysics*, *28*, 169–197. <https://doi.org/10.1007/s10712-007-9022-y>
- Smith, R. S. (1989). Discussion on “Induced-polarization effects in time-domain electromagnetic measurements” by M.F. Flis, G.A. Newman, and G.W. Hohmann. *GEOPHYSICS*, *54*, 1655–1660.

- Smith, R. S., & West, G. F. (1988). Inductive interaction between polarizable conductors; an explanation of a negative coincident-loop transient electromagnetic response. *GEOPHYSICS*, 53(5), 977–690. <https://doi.org/10.1190/1.1442502>
- Soininen, H. (1984). Inapplicability of pulse train time-domain measurements to spectral induced polarization. *GEOPHYSICS*, 49, 826–827.
- Spies, B. R. (1980). A field occurrence of sign reversals with the Transient Electromagnetic method. *Geophysical Prospecting*, 28, 620–632. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1980.tb01247.x>
- Sumner, J. S. (1976). *Principles of induced polarization for geophysical exploration*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.
- Telford, W. M., Geldart, L. P., & Sheriff, R. E. (2001). *Applied Geophysics, Second Edition*. United States of America: Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1180/minmag.1982.046.341.32>
- Tombs, J. M. . (1981). The feasibility of making spectral IP measurements in the time domain. *Geoexploration*, 19, 91–102.
- Vanhala, H., & Peltoniemi, M. (1992). Spectral IP studies of Finnish ore prospects. *GEOPHYSICS*, 57, 1545–1555. <https://doi.org/10.1190/1.1443222>
- Viezzoli, A., Kaminski, V., & Fiandaca, G. (2017). Modeling induced polarization effects in helicopter time domain electromagnetic data: Synthetic case studies. *GEOPHYSICS*, 82(2), E31–E50.
- Volkman, J., & Klitzsch, N. (2016). Evaluation of low frequency polarization models using well characterized sintered porous glass samples. *Journal of Applied Geophysics*, 124, 39–53. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2015.11.011>
- Vozoff, K., & Jupp, D. L. B. (1975). Joint Inversion of Geophysical Data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 42, 977–991. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1975.tb06462.x>
- Wait, J. R., & Debroux, P. (1984). Induced Polarization in electromagnetic inductive schemes. *Geophysical Prospecting*, 32, 1147–1154. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1984.tb00760.x>
- Ward, S. H., & Fraser, D. C. (1967). Conduction of electricity in rocks. In *Mining Geophysics* (pp. 197–223). Tulsa, Oklahoma: Society of Exploration Geophysics.
- Weller, A., Frangos, W., & Seichter, M. (2000). Three-dimensional inversion of induced polarization data from simulated waste. *Journal of Applied Geophysics*, 44, 67–83. [https://doi.org/10.1016/S0926-9851\(00\)00007-0](https://doi.org/10.1016/S0926-9851(00)00007-0)
- Yuval, & Oldenburg, D. W. (1997). Computation of Cole-Cole parameters from IP data. *GEOPHYSICS*, 62, 436–448. <https://doi.org/10.1190/1.1444154>
- Zhou, B., & Dahlin, T. (2003). Properties and effects of measurement errors on 2D resistivity imaging surveying. *Near Surface Geophysics*, 1, 105–111. <https://doi.org/10.3997/1873-0604.2003001>

## Anexo A. Incertidumbres para un medio homogéneo variando la cargabilidad.

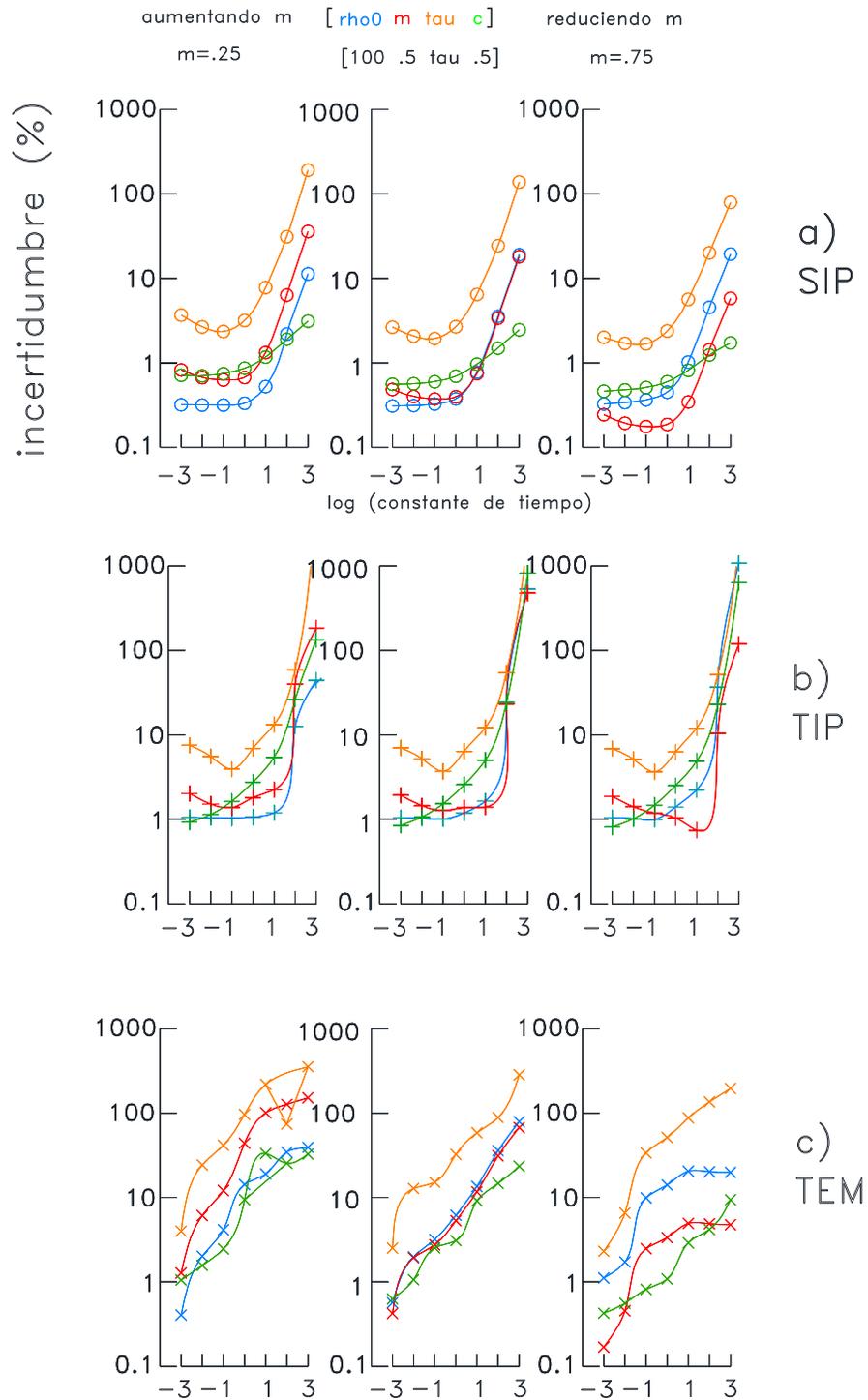


Figura A.1. Incertidumbres de los parámetros Cole-Cole para un rango de constantes de tiempo desde 0.001 a 1000 s para los métodos SIP, TIP y TEM. Efectos de reducir la cargabilidad a 0.25 (columna de la izquierda) y aumentarla a 0.75 (columna de la derecha), comparados con el modelo de referencia de  $m=0.5$  (columna de en medio).

## Anexo B. Incertidumbres para un medio homogéneo variando el exponente $c$ .

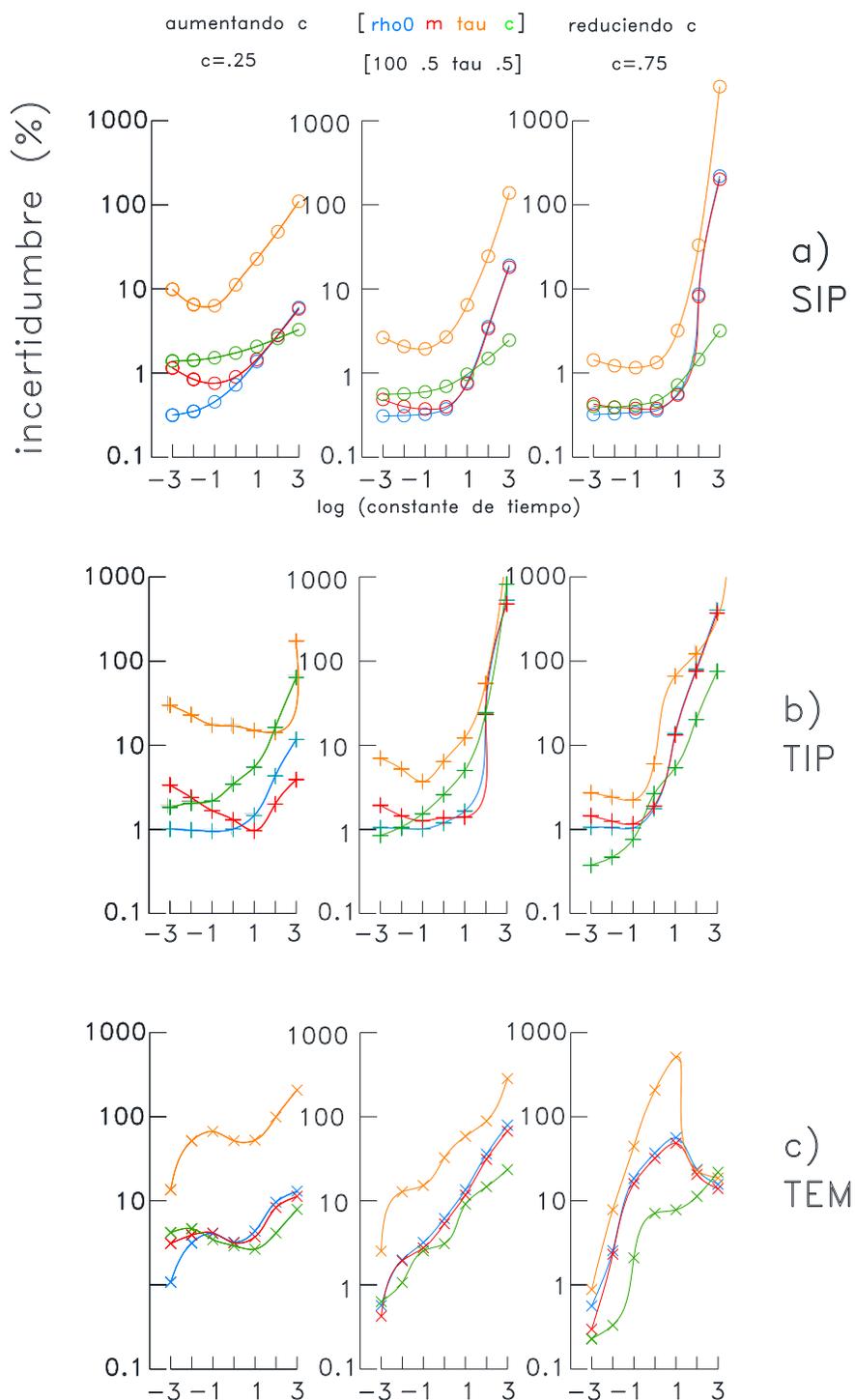


Figura B.1. Incertidumbres de los parámetros Cole-Cole para un rango de constantes de tiempo desde 0.001 a 1000 s para los métodos SIP, TIP y TEM. Efectos de reducir el exponente a 0.25 (columna de la izquierda) y aumentarlo a 0.75 (columna de la derecha), comparados con el modelo de referencia de  $c=0.5$  (columna de en medio).

## Anexo C. Incertidumbres para un medio estratificado variando la cargabilidad.

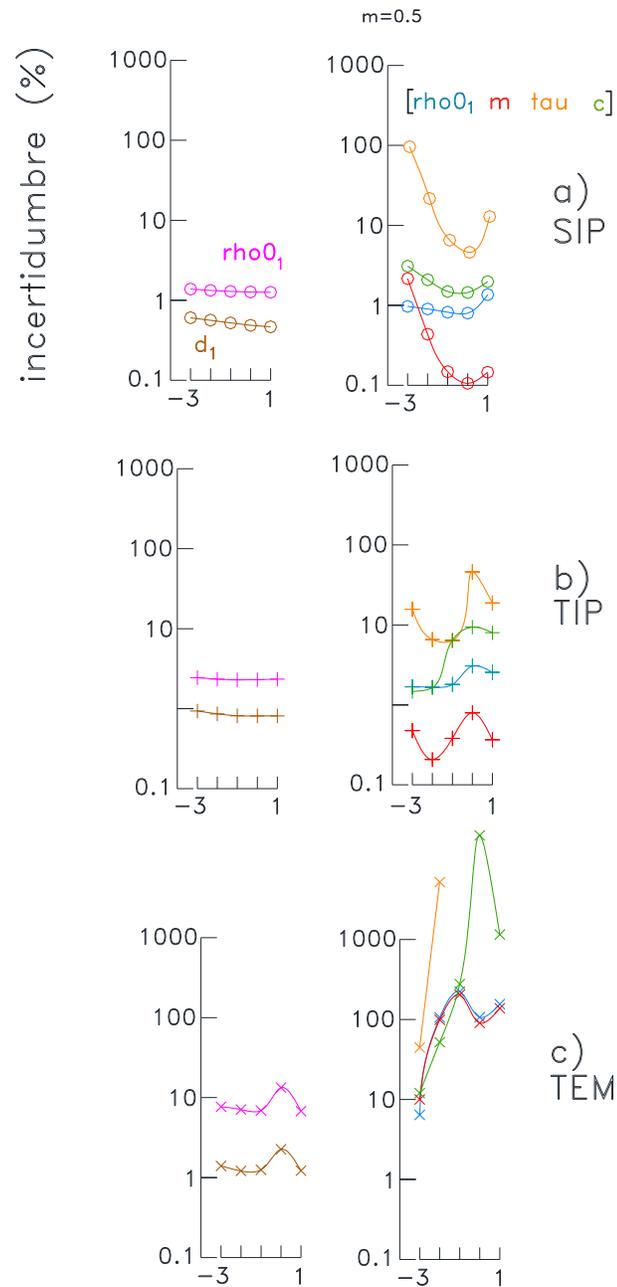


Figura C.1. Modelo de dos capas. Incertidumbres de los parámetros para constantes de tiempo de 0.001 a 10 s de los métodos SIP, TIP y TEM aumentando el valor de la cargabilidad a 0.5. La columna de la izquierda corresponde a las incertidumbres de la primera (curvas café y magenta representan al espesor y resistividad respectivamente). La columna de la derecha corresponde a las de la segunda capa.

## Anexo D. Incertidumbres para un medio estratificado variando el exponente $c$ .

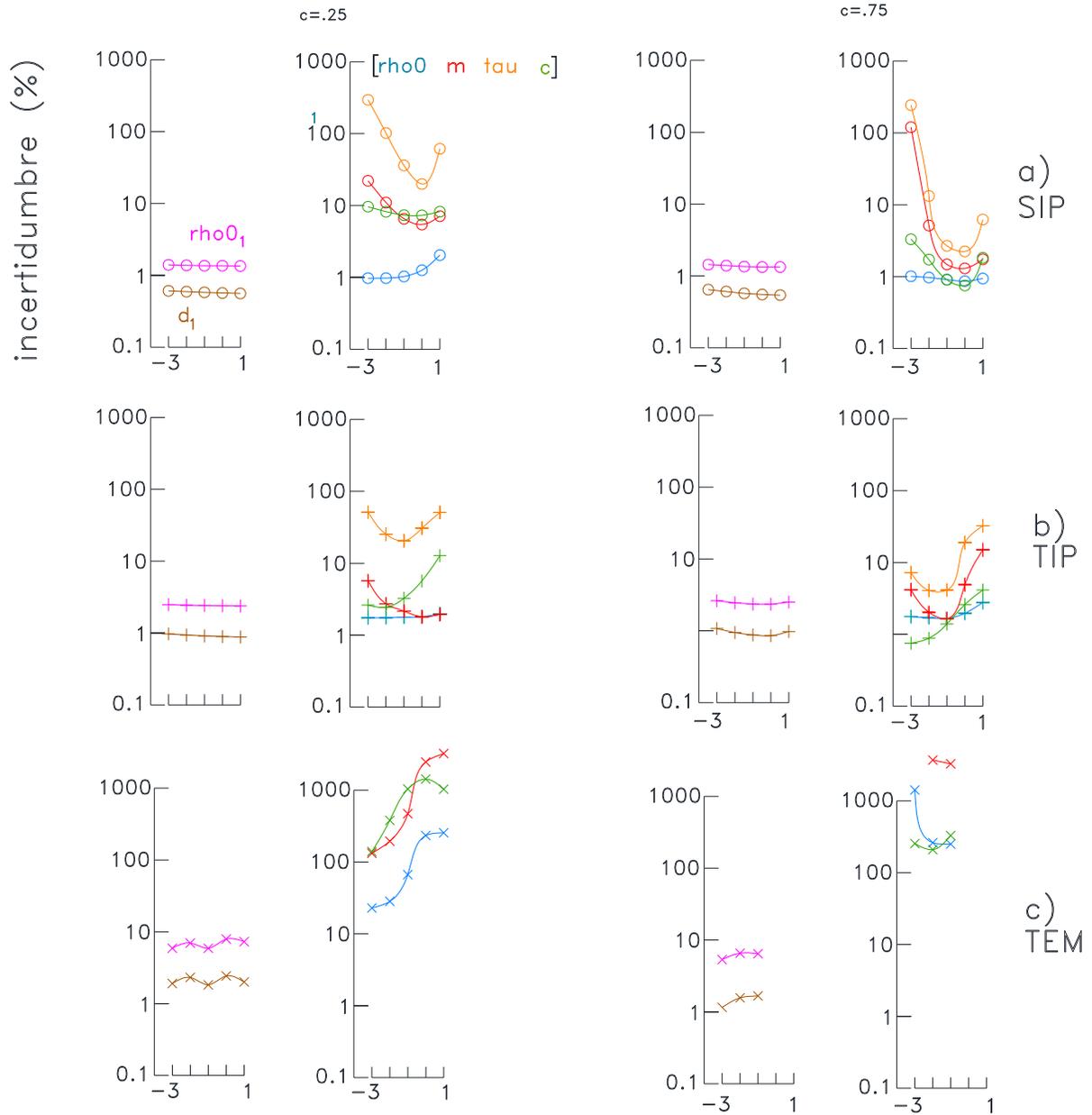


Figura C.1. Modelo de dos capas. Incertidumbres de los parámetros para constantes de tiempo de 0.001 a 10 s de los métodos SIP, TIP y TEM variando el valor del exponente  $c$  a 0.5 (dos columnas izquierdas) y 0.75 (dos columnas derechas). Las gráficas con curvas café y magenta corresponden a las incertidumbres del espesor y resistividad de la primera capa. Las gráficas con cuatro curvas corresponden a las incertidumbres de la segunda capa con el código de colores descrito anteriormente.