Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

Maestría en Ciencias
en Ciencias de la Tierra
con orientación en Geofísica Aplicada

Resolución de los parámetros de un cuerpo tridimensional con varios arreglos electródicos en la técnica de tomografía de resistividad eléctrica

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de maestro en Ciencias

Presenta:

Félix Aguilar Cruz

Ensenada, Baja California, México
2019

Tesis defendida por

Félix Aguilar Cruz

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Carlos Francisco Flores Luna
Director de tesis

Dr. Enrique Gómez Treviño

Dr. Marco Antonio Pérez Flores

M. en C. Moisés Castro Delgado

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Félix Aguilar Cruz © 2019
Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis.

Resumen de la tesis que presenta **Félix Aguilar Cruz** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en nombre del posgrado con orientación en Geofísica Aplicada.

Resolución de los parámetros de un cuerpo tridimensional con varios arreglos electródicos en la técnica de tomografía de resistividad eléctrica

Resumen aprobado por:

_____

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Director de tesis

Con el fin de cuantificar la eficiencia de cuatro arreglos electródicos, en estudios de tomografía de resistividad eléctrica (TRE), se estiman las sensibilidades y resoluciones de los parámetros de múltiples cuerpos prismáticos inmersos en un huésped de resistividad homogénea. Se analizan los arreglos electródicos colineales de Wenner (WN), dipolo-dipolo (DD), polo-dipolo (PD) y polo-polo (PP). El cuerpo está caracterizado por cinco parámetros: profundidad a la cima (P), longitud (L), anchura (A), grosor (G) y su resistividad eléctrica (ρ_2). Estos parámetros fueron variados sistemáticamente resultando en 20 cuerpos diferentes. Las respuestas en superficie producidas por estos cuerpos fueron calculadas con un algoritmo de ecuación integral. Las sensibilidades, asociadas con las derivadas de la respuesta con respecto a los parámetros, son ponderadas con los errores en las resistividades aparentes. Estos errores fueron estimados con una ley de potencia representativa de los errores en los voltajes. Las resoluciones o incertidumbres en los parámetros son estimadas con descomposición en valores singulares de las matrices de sensibilidad. Las resoluciones son calculadas en dos tipos de tendidos electródicos. En el tendido A, que es el más usado en la práctica, los cuatro arreglos son comparados considerando el máximo número de mediciones posibles que caben dentro del arreglo tomográfico. Los arreglos WN, DD, PD y PP tuvieron 26, 95, 135 y 91 resistividades aparentes, respectivamente. Para el tendido B, se compararon los arreglos con el mismo número de mediciones cada uno (26), mismas que el de Wenner. Globalmente el arreglo polo-dipolo fue el que obtuvo la mejor calificación (9.9), mientras que el de Wenner obtuvo la peor (4.9). Nótese que estas calificaciones siguen la misma secuencia que el número de mediciones de los arreglos, sugiriendo que el factor más importante es el número de mediciones. Adicionalmente, se muestra que la profundidad a la cima y la longitud son los parámetros mejor resueltos. Por otro lado, la anchura, grosor, y resistividad del cuerpo tuvieron, comparativamente, calificaciones bastante bajas.

Palabras clave: tomografía eléctrica, ecuación integral, sensibilidad, resolución, arreglos electródicos

Abstract of the thesis presented by Félix Aguilar Cruz as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Name of the Degree with orientation in Applied Geophysics

Resolution of parameters of a tridimensional body with various electrodes arrays in electrical resistivity tomography technique.

Abstract approved by:

_____

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Thesis director

With the aim of evaluating the efficiency of four electrode arrays commonly used in electrical resistivity tomography (ERT), I estimate the parameter sensitivities and resolutions of multiple prismatic bodies immersed in a host of homogeneous resistivity. The collinear electrode arrangements Wenner (WN), dipole-dipole (DD), pole-dipole (PD) and pole-pole (PP) are analyzed. The body is characterized by five parameters: depth to the top (P), length (L), width (A), thickness (G) and its electrical resistivity (ρ_2). These parameters were systematically varied resulting in 20 different bodies. The surface responses produced by these bodies were calculated with an integral equation algorithm. The sensitivities, associated with the derivatives of the response with respect to the parameters, are weighted by the errors in the apparent resistivities. These errors were estimated with a power law representing the uncertainties in the voltages. The resolutions or uncertainties in the parameters are estimated with a singular value decomposition of the sensitivity matrices. The resolutions are calculated in two types of layout. In layout A, which is the most frequently used in practice, the four arrays are compared considering the maximum number of possible measurements that fit within the tomographic array; the WN, DD, PD, and PP arrays resulted with 26, 95, 135, and 91 measurements in this layout. For layout B, the arrays were compared all with the same number (26) of the Wenner array. Overall, the pole-dipole array obtained the best mark (9.9), the Wenner array obtaining the lowest (4.9). Note that these marks follow the same sequence as that of the number of apparent resistivity measurements, suggesting that the most important factor is the number of measurements. Additionally, I show that the depth to the top of the body and its length are the best-resolved parameters. On the other hand, its width, thickness, and resistivity had comparatively low grades.

Keywords: electrical resistivity tomography, integral equation, sensitivity, resolutions, electrode arrays.

Dedicatoria

Al amor más puro y sincero de mi vida, mi madre, Sofía.

Todo esto es por y para ti madre de mi corazón.

A dos de mis grandes amores, mis hermanitas, Angelina e Ingrid.

A mi amor chiquito, mi sobrina, ISABELLA.

A mi señor padre, Lupe.

Su amor y apoyo, son pilares para alcanzar mis metas.

Los amo.

Agradecimientos

Al CICESE por darme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría, y brindarme la posibilidad de inmiscuirme en el gran universo de la investigación.

Al Centro Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que nos brinda a los estudiantes.

A mi asesor de tesis, indudablemente un gran investigador, pero mejor persona. Gracias por su tiempo y por siempre tener su puerta abierta para cualquier duda que fuera. Dudas básicas o bien repetitivas. Por compartirme sus conocimientos, y lograr entender muchas cosas.

Al posgrado en Ciencias de la Tierra por el apoyo recibido durante mi estancia y su prolongación. Disculpa por no terminar con eficiencia terminal.

A mis profesores que durante mi etapa de cursos me transmitieron sus conocimientos. En especial al Dr. Treviño con quien compartía buenos debates, y siempre optó por darme la oportunidad de externar mis ideas. A el Dr. Nava por enseñarme una nueva forma de ver las matemáticas.

A mis compañeros de generación, en especial a Fernando, David, Roberto, Emma, Yadhira, Gaby y Fany. Gracias por todas las experiencias vividas. De igual manera a mis compañeros de otras generaciones. Y muy en especial a mi equipo de Alto Voltaje, con quienes logramos un campeonato de voli.

A personal del posgrado por todas sus atenciones. Muy en especial a Ana Rosa, compañera y amiga en esta travesía. A los técnicos Humberto y Arthur, por todo el soporte brindado.

A mis compañeros (as) de cuarto y cubo, Corral, Elsie, María, Tatiana y Daniela. Gracias por gran compañía chicos. Y muchas gracias a Billi y Keko por su hospitalidad durante una semana.

Y muchas gracias por todo su apoyo Javier Casados, Daniela Pérez, Edgar Román y Valeria Rivero. Estaré eternamente agradecido.

Y finalmente el mayor de los agradecimientos a mi familia. A esa gran familia que hacía de mis llegadas las más felices, y de mis despedidas algo triste. A mis abuelas Dorcas y Angelina por ese gran amor, y a mi divertido abuelo Mariel. A mi segunda madre, la más consentidora, mi tía Sara. Y una mención muy especial por su ayuda económica cuando inicie esta aventura, mi segundo padre Santiago, mi tía Evelia y mi mamá Angelina.

Tabla de contenido

Resumen en español ii

Resumen en inglés iii

Dedicatoria iv

Agradecimientos v

Lista de figuras viii

Capítulo 1. Introducción 1

1.1 Fundamentos teóricos de resistividad eléctrica 1

1.2 Arreglos tetraelectródicos 3

1.3 Tomografía de resistividad eléctrica 4

1.4 Objetivo 6

Capítulo 2. Metodología 7

2.1 Fundamentos teóricos de ecuación integral 7

2.2 Implementación numérica 13

2.3 Modelo 17

2.4 Sensibilidades e incertidumbres en los parámetros 22

2.4.1 Matriz de sensibilidad 23

2.4.2 Incertidumbre en los parámetros 25

Capítulo 3. Resultados y discusión 27

3.1 Sensibilidades 28

3.2 Resoluciones 38

Capítulo 4. Conclusiones 45

Literatura citada 47

Anexo A: Derivadas direccionales 49

Anexo B: Código para errores en Matriz Jacobiana 50

Anexo C: Sensibilidades perfil central. Tendido B 51

Lista de figuras

Figura 1. Arreglo tetraelectródico para medir resistividad, consiste en un par de electrodos de corriente (A,B) y un par de electrodos de potencial (M,N). 3

Figura 2. Disposición de los electrodos para un estudio eléctrico en 2-D y secuencia de medidas utilizadas y posiciones de los puntos de asignación de la resistividad aparente. (Loke, 2011) 5

Figura 3. Cuerpo anómalo en un semiespacio homogéneo. Modificado de Spiegel, 1980..... 7

Figura 4. Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de resistividad aparente mediante el método de ecuación integral. 14

Figura 5 Prueba de convergencia para modelo patrón con tendido A, perfil central, dipolo-dipolo y 8 electrodos. Para deltas que van de1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05 y 0.02. A las cuales le corresponden las cantidades de celdas de 6, 24, 150, 600, 2400 y 15000, respectivamente. Se hace un acercamiento a la medición 15. 15

Figura 6. Comparación de resistividades aparentes, calculadas mediante ecuación integral, entre Pridmore et al. (1981) y esta tesis. El arreglo usado fue dipolo-dipolo para un cubo. Los valores mostrados en pseudosección son resistividades aparentes en Ωm. 16

Figura 7. Modelo base de un cubo confinado en un semiespacio homogéneo. 18

Figura 8. Vista en planta del modelo base, donde se muestran las ubicaciones de los perfiles. 19

Figura 9. Principales arreglos tetraelectródicos: a) Wenner, b) dipolo-dipolo, c) polo-dipolo y, d) polo-polo. 20

Figura 10. Tendido A para los cuatro arreglos. Se muestran las diferentes posiciones de los electrodos de corriente (cruces) y de potencial (círculos) y los puntos de asignación que conforman la pseudosección. Las profundidades de estos puntos son profundidades efectivas de Edwards (1977). 21

Figura 11. Tendido B para los cuatro arreglos. Se muestran las diferentes posiciones de los electrodos de corriente (cruces) y de potencial (círculos) y los puntos de asignación que conformarían la pseudosección. Las profundidades de estos puntos son profundidades efectivas de Edwards (1977). 22

Figura 12. Ajustes estimados lineales por Zhou y Dahlin (2003) para el ruido en nueve diferentes mediciones multielectródicas. Se indica la recta del ruido para m.c.e. usada en este trabajo... 25

Figura 13. Profundidades características de investigación de cuatro arreglos electródicos sobre un semiespacio homogéneo. (Roy y Apparao, 1971) 30

Figura 14. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la profundidad a la cima del cuerpo (P). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Profundidades de variación del modelo base. 32

Figura 15. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la longitud del cuerpo (L). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Longitudes de variación en la dirección del eje x del modelo base. 33

Figura 16. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la anchura del cuerpo (A). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Anchuras de variación del modelo base en eje y. 34

Figura 17. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía el grosor del cuerpo (G). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Grosores de variación del modelo base. 36

Figura 18. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la resistividad del cuerpo ($\rho 2$) en 1, 10, 100, 1,000 y 10,000. a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base..... 37

Figura 19. Comparación entre las incertidumbres porcentuales (en escala logarítmica) de los cinco parámetros y cuatro arreglos de los tendidos A (a) y B (b), ambos para el modelo con profundidad a la cima de 0.1 unidades. P=profundidad a la cima, L=longitud, A=anchura, G=grosor, $\rho 2$= resistividad del cuerpo..... 39

Figura 20. Comparación de las incertidumbres de los parámetros del cuerpo para los cuatro cubrimientos de datos. a) perfil central, b) perfil del borde, c) perfil externo, d) los tres perfiles. Las incertidumbres en porciento se expresan como su logaritmo. 41

Figura 21. Calificaciones globales para los arreglos, a) Calificación de cada arreglo (WN=Wenner, DD=dipolo-dipolo, PD=polo-dipolo y PP=polo-polo) para cada uno de los cinco parámetros

(profundidad a la cima=P, longitud=L, anchura=A, grosor=G, resistividad del cuerpo=$\rho 2$), b) Promedios de las cinco calificaciones para cada arreglo. 43

Figura 22. Calificaciones globales para los parámetros, a) Calificación de cada parámetro (profundidad a la cima=P, longitud=L, anchura=A, grosor=G, resistividad del cuerpo=$\rho 2$) obtenida en cada arreglo electródico (WN=Wenner, DD=dipolo-dipolo, PD=polo-dipolo y PP=polo-polo), b) Promedios de las cuatro calificaciones para cada parámetro. 44

Figura 23. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la profundidad a la cima del cuerpo (P). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Profundidades de variación del modelo base. 51

Figura 24. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la longitud del cuerpo (L). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Longitudes de variación en la dirección del eje x del modelo base. 52

Figura 25. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la anchura del cuerpo (A). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Anchuras de variación del modelo base en eje y. 53

Figura 26. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía el grosor del cuerpo (G). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Grosores de variación del modelo base. 54

Figura 27. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la resistividad del cuerpo ($\rho 2$) en 1, 10, 100, 1,000 y 10,000. a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. 55

Capítulo 1. Introducción

La tomografía de resistividad eléctrica (TRE) es una técnica de exploración multielectródica utilizada para estimar la distribución de la resistividad eléctrica del subsuelo. Estas estimaciones, hechas desde la superficie del terreno, se realizan midiendo la diferencia de potencial eléctrico entre muchos pares de electrodos de potencial producidos por la inyección de corriente directa en otros pares de electrodos de corriente. En los últimos años el uso de la tomografía ha experimentado un incremento significativo en diversas aplicaciones como la geohidrogeología, estudios ambientales, minería, arqueología, etc. (Auken et al., 2006; Samouelian et al., 2005; Seidel y Lange, 2007; Loke, 2011). Este progreso ha sido generado por la disponibilidad de sistemas comerciales computarizados de multielectrodos, además de eficientes programas de inversión en dos y tres dimensiones (2D y 3D).

1.1 Fundamentos teóricos de resistividad eléctrica

Las ecuaciones que describen el fenómeno físico sobre el que están basados los métodos geoeléctricos son las ecuaciones de Maxwell,

$$\text{Ley de Farday: } \nabla \text{x}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \text{t}}. \tag{1}$$

$$\text{Ley de Ampere: } \nabla \text{x}\mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \text{t}}. \tag{2}$$

Ecuaciones constitutivas $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E};\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$

donde $\mathbf{H}$ es el campo magnético (A/m), $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico (V/m), $\mathbf{J}$ densidad de corriente (A/m^2), $\mathbf{D}$ desplazamiento eléctrico (C/ m^2), $\mathbf{B}$ inducción magnética (T),σ, ε, y μ son la conductividad eléctrica, permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, respectivamente.

En el método de resistividad los campos son estacionarios, por lo que las derivadas presentes en (1) y (2) son cero. De esto resulta que el campo eléctrico es conservativo, pudiéndose expresar como el gradiente de un potencial: $\mathbf{E} = -\nabla \mathrm{U}$.

Si a (2) se le aplica el teorema de la divergencia de un rotacional se origina la ecuación de continuidad para corriente directa.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \mathrm{i_s}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r_s}) \tag{3}$$

En donde $\mathrm{i_s}$ es la intensidad de corriente, $\mathbf{r}$ es el vector de un punto de observación, $\mathbf{r_s}$ es l vector de posición del electrodo de corriente, y δ la delta de dirac.

La interpretación física de (3) es que en ningún punto del espacio puede haber aparición o desaparición de cargas excepto en la fuente, la cual se supone que es puntual.

La ley de Ohm en un medio isotrópico expresa que $\mathbf{J}$ y $\mathbf{E}$ tienen la misma dirección, con la conductividad σ como factor de proporcionalidad. Cabe recordar que la conductividad es el inverso de la resistividad ρ.

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{\nabla \mathrm{U}}{\rho}. \tag{4}$$

De (3) y (4), por expansión de derivadas se obtiene la ecuación fundamental de prospección eléctrica en corriente directa.

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\nabla \mathrm{U}}{\rho}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \nabla \mathrm{U} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \nabla \mathrm{U} = 0, \tag{5}$$

i.e. que en un espacio homogéneo no hay variación de la resistividad. Por lo tanto, la distribución del potencial eléctrico de un flujo de corriente directa en un medio homogéneo e isótropo satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 U = 0. \tag{6}$$

Como se verá luego esta ecuación no se cumple ni en las interfaces de resistividad ni en la fuente. La solución de la ecuación diferencial (6) para una fuente puntual de corriente I localizada sobre un semiespacio homogéneo e isótropo de resistividad ρ es,

$$U(r) = \frac{\rho I}{2\pi}\frac{1}{r}. \tag{7}$$

1.2 Arreglos tetraelectródicos

Un arreglo tetraelectródico (figura 1) lo conforman un par de electrodos de inyección de corriente y otro par de medidores de potencial. Los electrodos A y B actúan como fuente y sumidero, respectivamente.

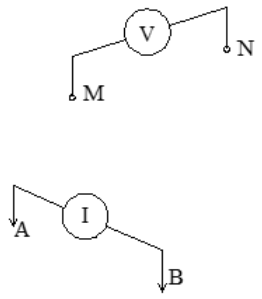

Figura 1. Arreglo tetraelectródico para medir resistividad, consiste en un par de electrodos de corriente (A,B) y un par de electrodos de potencial (M,N).

Usando la expresión (7), la diferencia de potencial medida por los electrodos M y N es:

$$\Delta U = U(M) - U(N) = \frac{\rho I}{2\pi}\left[\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}}\right]. \tag{8}$$

Despejando para la resistividad se obtiene

$$\rho = \frac{2\pi}{\left[\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}}\right]} \frac{\Delta U}{I} = K\frac{\Delta U}{I}, \tag{9}$$

donde al factor K, que depende de las distancias entre electrodos, se le conoce como coeficiente geométrico del dispositivo electródico. La expresión (9) es válida para un subsuelo homogéneo. En la práctica, es común que el subsuelo diste mucho de ser homogéneo. Aun así, la expresión (9) es aplicada, pero a su resultado se le conoce como resistividad aparente (ρ_a), considerada como la principal respuesta del subsuelo en el método geofísico de resistividad.

Según Szalai y Szarka (2008), en la literatura se han reportado más de 100 arreglos electródicos. Dentro de la subclase de los arreglos con cuatro electrodos colineales, hay más de 15. Entre los más usados son el Wenner, dipolo-dipolo, polo-dipolo y polo-polo, los cuales serán analizados en esta tesis. Más adelante se presentan a detalle.

1.3 Tomografía de resistividad eléctrica

La tomografía de resistividad eléctrica (TRE) es un método geofísico cuyo objetivo es determinar las variaciones verticales y horizontales de la resistividad del subsuelo, a partir de múltiples mediciones de la resistividad aparente en diferentes combinaciones de cuatro electrodos. Actualmente existen varios equipos comerciales de tomografía disponibles en el mercado (Syscal, GDD, SuperSting, Polares, Olson, etc.). En éstos una serie de electrodos son clavados a lo largo de un perfil con separación constante entre ellos. Algunos electrodos funcionan como inyectores de corriente y algunos como medidores de potencial, son programados antes de hacer la tomografía.

Uno de sus objetivos es detectar y localizar estructuras geológicas anómalas (cavernas, socavones, cuerpos enterrados, etc.) basado en el contraste de resistividad que éstas pueden tener con la resistividad del medio encajonante. La figura 2 muestra un ejemplo de la distribución geométrica de electrodos en una tomografía que, en este caso particular, es con el arreglo Wenner.

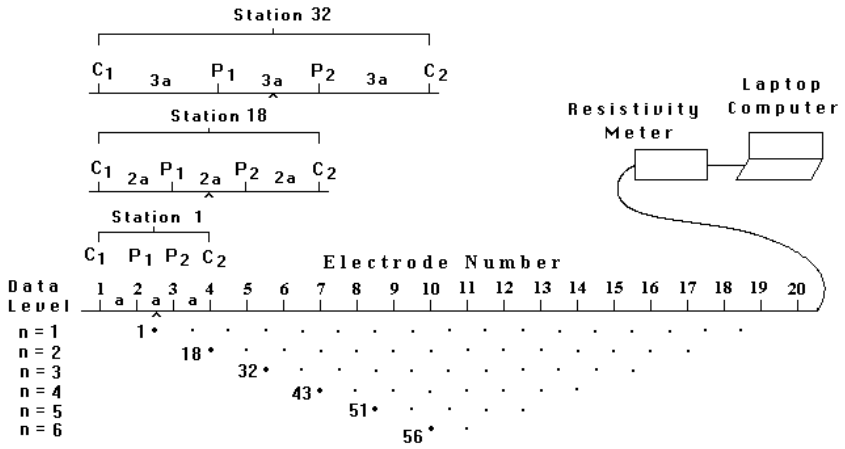

Figura 2. Disposición de los electrodos para un estudio eléctrico en 2-D y secuencia de medidas utilizadas y posiciones de los puntos de asignación de la resistividad aparente. (Loke, 2011)

Existen dos tendencias en la elección de cuáles electrodos de corriente y potencial se usen para hacer un levantamiento tomográfico. La primera está basada en el uso de todas las posibles combinaciones de cuatro electrodos que puedan existir en una línea de electrodos (Noel y Xu, 1991; Stummer, 2004; Wilkinson et al., 2012). Esto presenta la ventaja de que el volumen muestreado del subsuelo es el óptimo, en forma tal que la distribución de la resistividad eléctrica del subsuelo también será la óptima posible. Sin embargo, tiene las desventajas de la presencia de información redundante, y de que la cantidad de datos de resistividad aparente pueda ser muy grande, dificultando el proceso computacional de inversión, y el mayor costo del trabajo de campo.

La segunda tendencia es la del uso de un sólo arreglo electródico en el levantamiento de la tomografía. En comparación con la primera opción, en ésta el trabajo de campo no es tan intenso y la cantidad de datos es más manejable. Esta estrategia es la que se analiza en esta tesis. Con la finalidad de saber qué arreglo ofrecerá mejor resolución, se variarán los parámetros de un cuerpo tridimensional simple. Este tipo de modelo puede tener una utilidad práctica pues puede simular la presencia de socavones en el subsuelo. Este tipo de estructuras son, y cada vez serán más frecuentes, en cuencas de materiales granulares donde se extrae agua subterránea, un caso muy común en México.

Una pregunta que en la práctica frecuentemente se plantea al planear mediciones de TRE es: ¿qué arreglo se debe utilizar para obtener la mayor información del subsuelo dado un número determinado de

electrodos? La respuesta no es fácil porque hay muchos factores que pueden afectar la eficacia de un arreglo en una aplicación en particular. Ward (1990) propuso una clasificación cualitativa para varios arreglos basado en doce factores: relación señal/ruido, acoplamiento electromagnético, sensibilidad a cambios laterales de la resistividad, resolución a estructuras de alta inclinación, resolución a estructuras horizontales, profundidad de exploración, sensibilidad a la profundidad del cuerpo anómalo, sensibilidad a su inclinación, sensibilidad a heterogeneidades superficiales, sensibilidad a la topografía del basamento, enmascaramiento por un conductor superficial y sensibilidad a la topografía. La mayoría de ellos se pueden resumir en: a) profundidad de investigación; b) resolución de los cambios horizontales y verticales de la resistividad, c) efecto del ruido y d) cobertura horizontal de los datos (Loke, 2011). Estos factores son contemplados en los experimentos numéricos de esta tesis.

Hay muchos trabajos que estudian los méritos y limitaciones de diferentes arreglos electródicos. Entre éstos están los modelos analógicos (Apparao et al., 1992; Apparao et al., 1997), el modelado numérico de cuerpos simples de 2D o 3D (Van Nostrand, 1953; Coggon, 1973; Dey et al., 1975; Militzer et al., 1979; Brass et al., 1981) e inversiones suaves de datos sintéticos (Beard and Tripp, 1995; Oldenburg and Li, 1999; Dahlin and Zhou, 2004; Gharibi and Bentley, 2005).

1.4 Objetivo

La meta de este trabajo es estimar y comparar la resolución de cuatro de los arreglos colineales – Wenner (WN), dipolo-dipolo (DD), polo-polo (PP) y polo-dipolo (PD)- más comunes a los parámetros de un conjunto de cuerpos tridimensionales (3D) inmersos en un semiespacio homogéneo, empleando cuatro perfiles diferentes y dos tipos de tendido. Esto con el fin de evaluar, bajo estas condiciones de los modelos, cuál de los arreglos electródicos es más eficiente y, adicionalmente, evaluar la resolución de los parámetros de estos modelos.

Capítulo 2.Metodología

Existen varios métodos numéricos para el cálculo del potencial eléctrico en un semiespacio heterogéneo producido por fuentes puntuales de corriente (Ward et al., 1973). Éstos se pueden dividir en los de ecuación diferencial (diferencias finitas y elemento finito), en donde todo el semiespacio es discretizado, y los aplicados a cuerpos anómalos inmersos en un semiespacio homogéneo o estratificado (ecuación integral), donde únicamente se discretiza el cuerpo anómalo. En este trabajo usamos el método de ecuación integral.

2.1 Fundamentos teóricos de ecuación integral

Supongamos un cuerpo anómalo de resistividad ρ_2 en un semiespacio homogéneo con resistividad ρ_1, como se muestra en la figura 3. En ella $\mathrm{r_s}$, r, $\mathrm{r'}$ y $\mathrm{r''}$ son los vectores de posición del electrodo de corriente, del punto de observación, de un punto en el cuerpo anómalo y de un punto en la imagen del cuerpo respecto a la superficie del semiespacio, respectivamente.

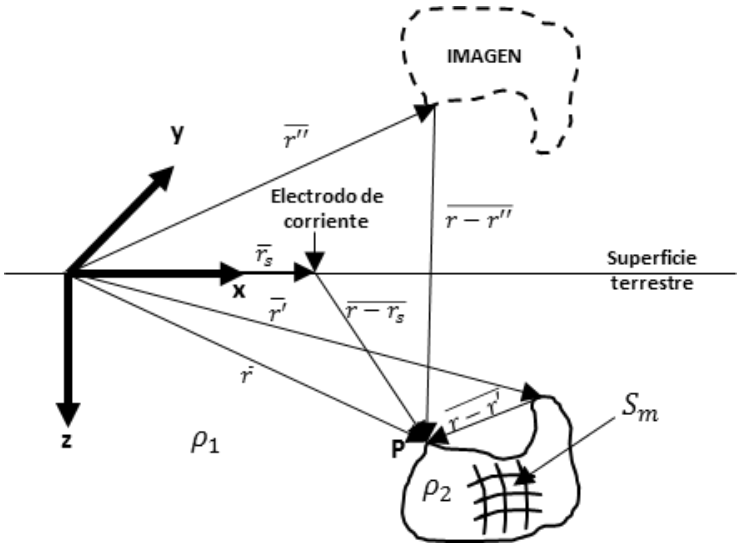

Figura 3. Cuerpo anómalo en un semiespacio homogéneo. Modificado de Spiegel, 1980.

Empleando la ecuación de continuidad (3), la ley de Ohm (4), y considerando que la resistividad ya no es homogénea, se llega a,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = \mathrm{i_s}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r_s}). \tag{10}$$

Pero como $\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\nabla(\rho)$ entonces (10) se puede formular como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \mathrm{i_s}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r_s}) + \frac{1}{\rho}\nabla(\rho) \cdot \mathbf{E}. \tag{11}$$

Y expresando el campo eléctrico en función del potencial, $\mathbf{E} = -\nabla \mathrm{U}$, en (11) se tiene,

$$\nabla^2 \mathrm{U}(\mathbf{r}) = -\rho \mathrm{i_s}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r_s}) + \frac{1}{\rho}\nabla(\rho) \cdot \nabla \mathrm{U}. \tag{12}$$

Entonces el Laplaciano del potencial eléctrico, es cero en todo lugar excepto en la fuente y en la frontera de la heterogeneidad, pues sólo ahí $\nabla(\rho) \neq 0$.

Según el teorema de Green, si una ecuación diferencial tiene la forma $\nabla^2 \mathrm{A}(\mathbf{r}) = -\mathrm{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r_0})$, su solución es $\mathrm{A}(\mathrm{r}) = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r_0})\mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r_0})\, \mathrm{d}^3\mathbf{r_0}$, donde $\mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r_0})$ es la función de Green, la cual, para este caso, es

$$\mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}. \tag{13}$$

G_1 es la función de Green para un punto fuente en un medio infinito, mientras G_2 es la de la imagen. Los vectores r, r' y r'' están representados en la figura 2.

Entonces,

$$\mathrm{U}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{v}} \rho_1 \mathrm{i_s}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r_s})\mathrm{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{v}} \left[\frac{\nabla(\rho)}{\rho_1}\cdot\nabla\mathbf{U}\right]\mathrm{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}', \tag{14}$$

$$\mathrm{U}(\mathbf{r},\mathbf{r_s}) = \frac{\rho_1 \mathrm{I}}{4\pi}\mathrm{G}(\mathbf{r},\mathbf{r_s}) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{S}} \mathrm{q_i}(\mathbf{r}')\mathrm{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}', \tag{15}$$

donde I es la corriente, y el término

$$\left[-\frac{\nabla(\rho)}{\rho_1}\cdot\nabla\mathrm{U}\right]$$

representa la densidad de carga en la superficie del cuerpo la cual se sustituyó por $\mathrm{q}(\mathbf{r}')$. El gradiente de resistividad es cero excepto en los límites de la heterogeneidad, por lo que la integral de volumen de (14) puede expresarse como una integral de superficie (Spiegel, 1980).

Al primer término de (15) se le conoce como potencial primario, ya que si no existiera la heterogeneidad sería el único potencial, al segundo como potencial secundario que es el debido a la presencia de la heterogeneidad. Para calcular el potencial en cualquier punto del semiespacio es necesario primero calcular la distribución de carga de superficie $\mathrm{q}(\mathbf{r}')$ y después integrar en la superficie.

Aplicando la derivada direccional en ambos miembros de (15), a lo largo del vector unitario ($\hat{\mathbf{n}}$) dirigido perpendicularmente hacia afuera desde la superficie de la heterogeneidad al punto $\mathbf{r}$, tal como lo aplica Snyder (1976), tenemos:

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{U} = \frac{\rho_1 \mathrm{I}}{4\pi}\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{G}(\mathbf{r},\mathbf{r_s}) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{S}} \mathrm{q_i}(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}'. \tag{16}$$

En donde la derivada implícita en el gradiente es tomada respecto al punto $\mathbf{r}$.

Aplicando las condiciones de frontera:

1) La componente normal de la densidad de corriente eléctrica es continua a través de la superficie de la heterogeneidad:

$$\mathrm{J_{1n}}|_{\mathrm{B}} = \mathrm{J_{2n}}|_{\mathrm{B}} \;\rightarrow\; \frac{1}{\rho_1}\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{U_1}\Big|_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\rho_2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{U_2}\Big|_{\mathrm{B}}\,, \tag{17}$$

de donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario hacia afuera; $\mathrm{U_1}$ y $\mathrm{U_2}$, el potencial fuera y dentro de la heterogeneidad, respectivamente.

2) La densidad de carga en la superficie de la heterogeneidad es proporcional a la discontinuidad en la normal de la intensidad del campo eléctrico en la superficie:

$$(\mathrm{E_{1n}} - \mathrm{E_{2n}})|_{\mathrm{B}} = \mathrm{q} \;\rightarrow\; (\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{U_1} - \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{U_2})|_{\mathrm{B}} = -\mathrm{q}. \tag{18}$$

Usando (17) y (18) ,podemos escribir

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{U_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\mathrm{q}. \tag{19}$$

La expresión (19) sirve para demostrar que $-\frac{\nabla(\rho)}{\rho}\cdot\nabla\mathrm{U} = \mathrm{q}$. El gradiente de ρ es un vector perpendicular a la superficie, dirigido hacia adentro y de módulo $\rho_2 - \rho_1$, es decir, $\nabla(\rho) = -(\rho_2 - \rho_1)\,\hat{\mathbf{n}}$. Entonces:

$$-\frac{\nabla(\rho)}{\rho_1}\cdot\nabla\mathrm{U} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{U_1} = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\mathrm{q}\right) = \mathrm{q}. \tag{20}$$

Continuando con (16) y (19), para la sustitución de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{U}$, tendremos:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{U} = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \mathrm{q_j}(\mathbf{r}') = \frac{\rho_1 \mathrm{I}}{4\pi} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r_s}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathrm{S}} \mathrm{q_i}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \mathrm{d}^2\mathbf{r}'. \tag{21}$$

La integral es impropia cuando $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Esta singularidad se resuelve mediante la exclusión de una pequeña superficie que contenga a $\mathbf{r}'$, y dejando que esta superficie se acerque a cero, por lo que el valor de la integral en ese punto puede mostrarse igual a $-2\pi \mathrm{q_j}(\mathbf{r}')$ (Snyder, 1976).

Excluyendo la singularidad, discretizando la superficie del cuerpo en N pequeñas celdas, asumiendo que la densidad de carga es constante en cada una de estas celdas y denotando el punto central de cada celda como el punto significativo $\mathbf{r}_\mathrm{m}$, (21) quedará expresada:

$$\frac{\mathrm{q_j}}{2\mathrm{K}_{21}} = \frac{\rho_1 \mathrm{I}}{4\pi} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r_s}) + \frac{1}{4\pi} \mathrm{q_j} \int_{\mathrm{S}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}_2\,(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\mathrm{m}) \mathrm{d}^2\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{q_i} \int_{\substack{S \\ i \neq j}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\mathrm{m})\, \mathrm{d}^2\mathbf{r}', \tag{22}$$

con $\mathrm{K}_{21} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$.

Por lo que la versión discreta de (15) es:

$$\mathrm{U}(\mathbf{r}, \mathbf{r_s}) = \frac{\rho_1 \mathrm{I}}{4\pi} \mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r_s}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{q_i} \int_{\mathrm{S}} \mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \mathrm{d}^2\mathbf{r}'. \tag{23}$$

Aplicando una solución numérica a las integrales de (22) y (23) se tendría:

$$\frac{\mathrm{q_j}}{2\mathrm{K}_{21}} = \frac{\rho_1 \mathrm{I}}{4\pi}\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r_s}) + \frac{|S_m|}{4\pi}\mathrm{q_j}\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\mathrm{m}) + \frac{|S_m|}{4\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ i \neq j}}^{N} \mathrm{q_i}\, \widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\mathrm{m}), \tag{24}$$

$$\mathrm{U}(\mathbf{r}, \mathbf{r_s}) = \frac{\rho_1 \mathrm{I}}{4\pi}\mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r_s}) + \frac{|S_m|}{4\pi}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{q_i}\, \mathrm{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tag{25}$$

de donde S_m es el área de la celda en turno, determinada por las deltas (medidas de los lados dela celda) propuestas.

Reacomodando (24) de tal manera que se pueda expresar como un sistema de ecuaciones:

$$q_j\left[1 - \frac{K_{21}|S_m|}{2\pi}\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\mathrm{m})\right] - \frac{K_{21}|S_m|}{2\pi}\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \mathrm{q_i}\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\mathrm{m}) \; = \frac{\rho_1 \mathrm{K}_{21} I}{2\pi}\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r_s}). \tag{26}$$

Con la solución del sistemas de ecuaciones, que representa $[\mathbf{A}][\boldsymbol{q}] = [\boldsymbol{s}]$, se puede determinar la densidad de carga en cada celda, $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{s}$ son vectores columnas de N elementos. La matriz $\mathbf{A}$ es cuadrada de tamaño N, que tiene como elementos de su diagonal a

$$1 - \frac{K_{21}|S_m|}{2\pi}\widehat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathrm{G}_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\mathrm{m}), \tag{27}$$

y como elementos fuera de la diagonal a

$$-\frac{K_{21}|S_m|}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \mathrm{q_i}\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r}_\mathrm{m}). \tag{28}$$

Mientras que $\boldsymbol{s}$ está determinado por

$$\frac{\rho_1 \mathrm{K}_{21} I}{2\pi}\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r}_\mathbf{s}). \tag{29}$$

Las densidades de carga pueden ser determinadas invirtiendo la matriz $\mathbf{A}$ de manera iterativa o directa (Spiegel, 1980). Tal cálculo es fácil en Matlab. Respecto a las derivadas direccionales presentes en $\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{G}$ en las anteriores expresiones, se especifican en el Anexo A.

Resumiendo, el problema de determinar la ρ_a de un arreglo tetraelectródico producida por un cuerpo confinado en un semiespacio homogéneo se reduce a 3 pasos: primero, para cada electrodo de corriente se determinan las densidades de carga en cada celda de la superficie del cuerpo con (24). En seguida se calcula el potencial en los puntos ocupados por los dos electrodos de potencial usando (25). Por último, se calcula la ρ_a con:

$$\begin{gathered}\rho_\mathrm{a} = \mathrm{K}\frac{\Delta\mathrm{V}}{\mathrm{I}} \\ \Delta\mathrm{V} = \mathrm{V_{AM}} + \mathrm{V_{BN}} - \mathrm{V_{AN}} - \mathrm{V_{BM}}.\end{gathered} \tag{30}$$

2.2 Implementación numérica

El modelado directo para el cálculo de la resistividad aparente mediante el método de ecuación integral fue programado en el software Matlab (MATrix LABoratory, por sus siglas en inglés). Matlab es un

programa para realizar cálculos numéricos, de manera fácil y práctica, con vectores y matrices. Una de las ventajas de este software es la combinación de funciones de matemáticas y gráficas comprensivas, lo cual ayuda y es conveniente para este proyecto de tesis.

El sustento matemático-físico para el cálculo de la resistividad aparente en un medio homogéneo con un cuerpo anómalo inmerso en él, se expresa de las ecuaciones (27) a la (30). El diagrama de flujo con los pasos necesarios para el cálculo se detalla en la figura 4. Cabe mencionar que este diagrama no detalla los pasos necesarios para el cálculo de las sensibilidades, las incertidumbres y las variaciones de tendidos, arreglos, parámetros, y valores de parámetros, cálculos y pasos posteriores al cómputo de la resistividad aparente. Estos procesos se detallan en el capítulo 3.

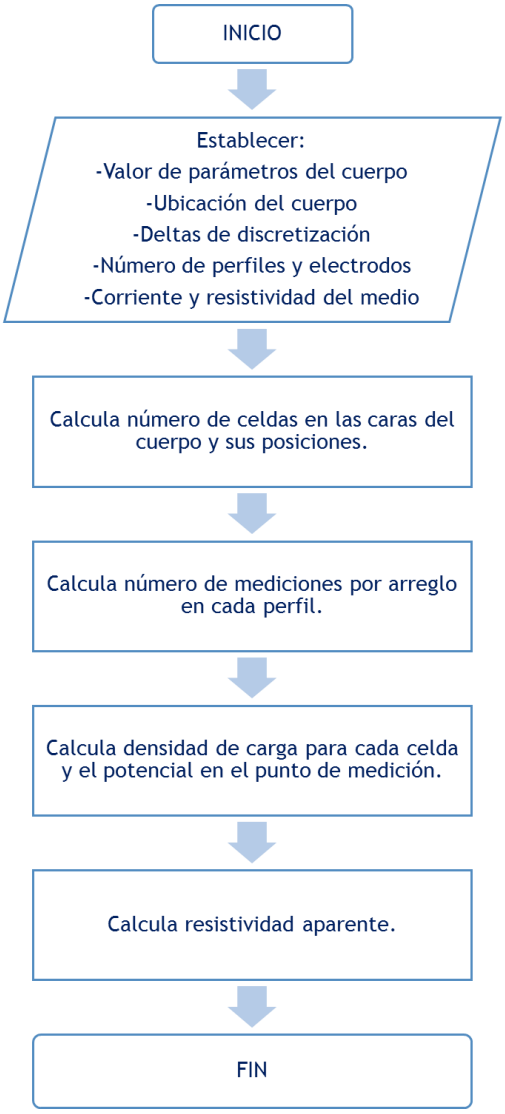

Figura 4. Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de resistividad aparente mediante el método de ecuación integral.

La superficie de un cuerpo anómalo se puede dividir en varias formas. Para el caso de un cuerpo prismático lo más adecuado es el uso de celdas rectangulares o cuadradas. El tamaño de las celdas obviamente tiene un efecto en la exactitud de la resistividad aparente calculada. Aunque se puedan usar celdas rectangulares o cuadradas de dimensiones variables, en esta tesis todos los resultados fueron calculados con celdas cuadradas de dimensiones $\Delta \times \Delta$ unidades de longitud.

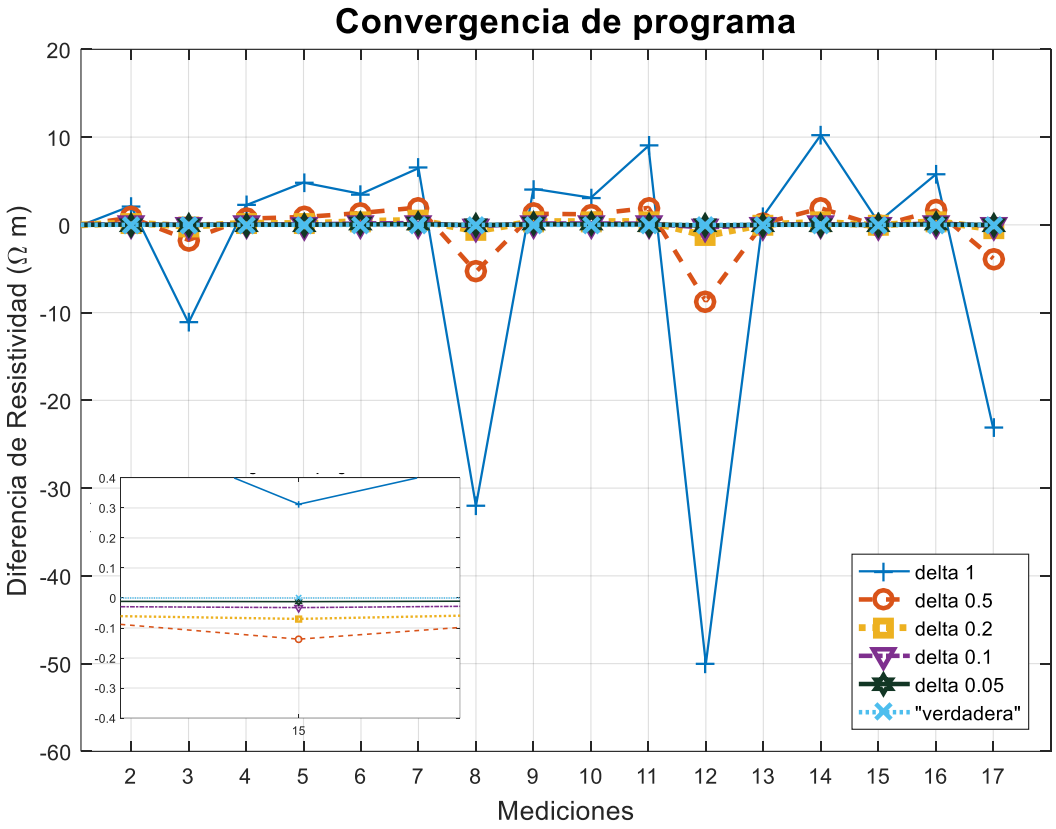

Figura 5 Prueba de convergencia para modelo patrón con tendido A, perfil central, dipolo-dipolo y 8 electrodos. Para deltas que van de1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05 y 0.02. A las cuales le corresponden las cantidades de celdas de 6, 24, 150, 600, 2400 y 15000, respectivamente. Se hace un acercamiento a la medición 15.

En la figura 5 se presenta una prueba de convergencia de las resistividades aparentes calculadas con el programa con deltas de 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05 y 0.02 unidades de longitud; la respuesta calculada con este último valor de delta se consideró como la resistividad aparente “verdadera”, ya que no existe una solución analítica para este caso. A estos valores de delta les corresponden un total de celdas de 6, 24, 150, 600, 2400 y 15000, respectivamente. El modelo empleado es un cubo de dimensiones 1x1x1 unidades con la profundidad a su cima también de 1 unidad (denominado como modelo patrón más adelante),

calculando su respuesta en un perfil central en la superficie con un arreglo dipolo-dipolo y un total de 8 electrodos. El cuerpo tiene una resistividad de 10 Ωm y el medio circundante es de 100 Ωm. Las diferentes líneas de esta gráfica corresponden a las diferencias de las resistividades aparentes calculadas con cada delta menos la calculada con la delta más fina de 0.02 unidades. Puede notarse que conforme la discretización se hace cada vez más fina, la respuesta va convergiendo hacia la ¨verdadera¨. La delta usada en los resultados de esta tesis es de 0.05, que es la más cercana a la de 0.02. Se optó por no usar la más fina por el gran esfuerzo computacional implícito.

Como se menciona más adelante, la longitud del modelo llega a variarse hasta 13 unidades. Si la delta de las celdas es de 0.05, la superficie del cuerpo queda dividida en 21600 celdas. Una computadora convencional tarda decenas de días en resolver este problema o la memoria RAM puede ser insuficiente. Para solucionar este problema se utilizó el cluster LAMB de la Unidad de Simulación de Procesos Geotérmicos (SMU1) perteneciente al Sistema de Laboratorios Especializados (SLE) del CeMIE-Geo.

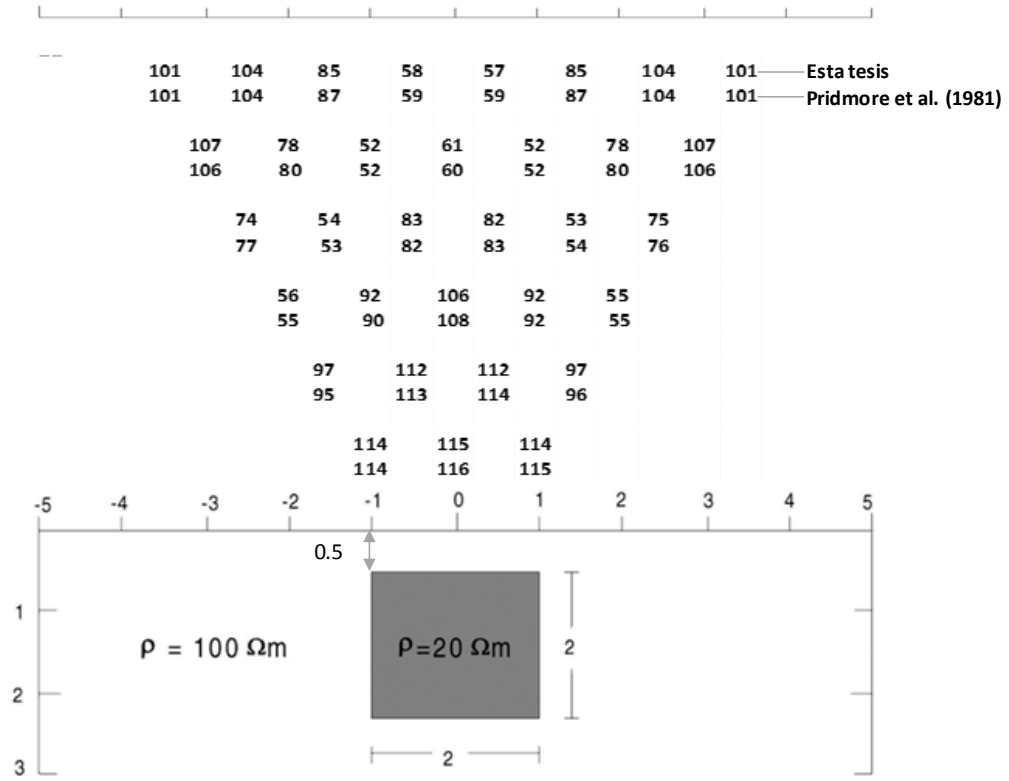

Figura 6. Comparación de resistividades aparentes, calculadas mediante ecuación integral, entre Pridmore et al. (1981) y esta tesis. El arreglo usado fue dipolo-dipolo para un cubo. Los valores mostrados en pseudosección son resistividades aparentes en Ωm.

Como una prueba adicional del programa, los resultados se compararon con aquéllos de Pridmore et al. (1981), quienes presentaron resistividades aparentes calculadas con otros métodos, entre ellos el de ecuación integral de volumen. Emplearon el arreglo dipolo-dipolo en un modelo que consistió de un cubo de 2 unidades por lado a una profundidad de 0.5, y con resistividad para el medio homogéneo y cubo, de 100 Ωm y 20 Ωm, respectivamente (figura 6).

En esta figura se muestran los 33 valores de resistividad aparente reportados por Pridmore et al. (1981), junto con los valores calculados en esta tesis, presentados en el formato de pseudosección. Las diferencias entre cada par de valores son pequeñas; el promedio de las diferencias normalizadas es del 1.3%. La mayor diferencia de 3.4% ocurre en el tercer nivel, entre los valores de 74 y 77 Ωm. Estos resultados sugieren que el algoritmo de cálculo del problema directo está trabaja correctamente.

2.3 Modelo

El modelo base o patrón (figura 7) es un cubo unitario conductor de resistividad 10 Ωm inmerso en un semiespacio homogéneo de resistividad 100 Ωm. Las tres dimensiones de este cuerpo patrón son unitarias (longitud L=1, anchura A=1 y grosor G=1), así como la profundidad a su cima (P=1). La separación inter-electródica del tendido lineal de electrodos es uniforme e igual a una unidad de longitud. Los resultados para un modelo análogo, pero de dimensiones y profundidad diferente, digamos 30 m, será igual al de dimensiones unitarias siempre y cuando la separación inter-electródica también sea de 30 m.

Existe una gran variedad de equipos comerciales que miden la resistividad en la superficie con arreglos tomográficos, muchos de los cuales también pueden medir la polarización inducida. Con el paso de los años y el avance de la tecnología, se han ido fabricando equipos más sofisticados para realizar mediciones de la resistividad. En la División de Ciencias de la Tierra del CICESE se cuenta con un equipo SuperSting R1/PI, que se complementa con un conmutador Swift de electrodos inteligentes que permiten mediciones así medidas automáticas para estudios de 2D y 3D, además de sondeos eléctricos verticales. El equipo cuenta con 28 electrodos los cuales pueden alcanzar una máxima distancia de 10 metros entre sí.

En este trabajo solo se tomaron en cuenta 14 electrodos por perfil. Este número de electrodos, aunque es parcialmente arbitrario, es un compromiso entre el tamaño del modelo patrón y una gran cantidad de

electrodos. El uso de muchos electrodos aumenta considerablemente el tiempo de cómputo en el cálculo de las resistividades aparentes.

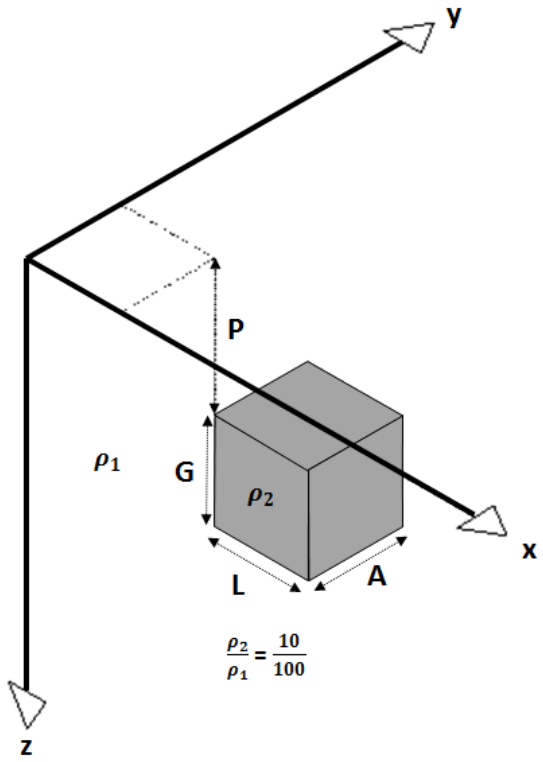

Figura 7. Modelo base de un cubo confinado en un semiespacio homogéneo.

Se consideraron tres tipos de perfiles para el cálculo de las resistividades (figura 8), todos ellos paralelos al eje x: un perfil que pasa por la parte media del cuerpo (llamado perfil central), otro localizado exactamente en el borde del cuerpo (llamado perfil del borde) y un último perfil que pasa una unidad fuera del cuerpo (llamado perfil externo). Adicionalmente, se calcularon las respuestas de los tres perfiles juntos.

En cada perfil se emplean cuatro tipos de arreglos electródicos colineales, los cuales son comúnmente usados en la práctica. En la figura 9 se representan cada uno.

- Wenner (WN). En este arreglo la separación entre electrodos vecinos es uniforme e igual a la distancia a. Es un caso especial del arreglo Schlumberger que es muy usado en sondeos eléctricos. Su factor geométrico es: K=2πa.

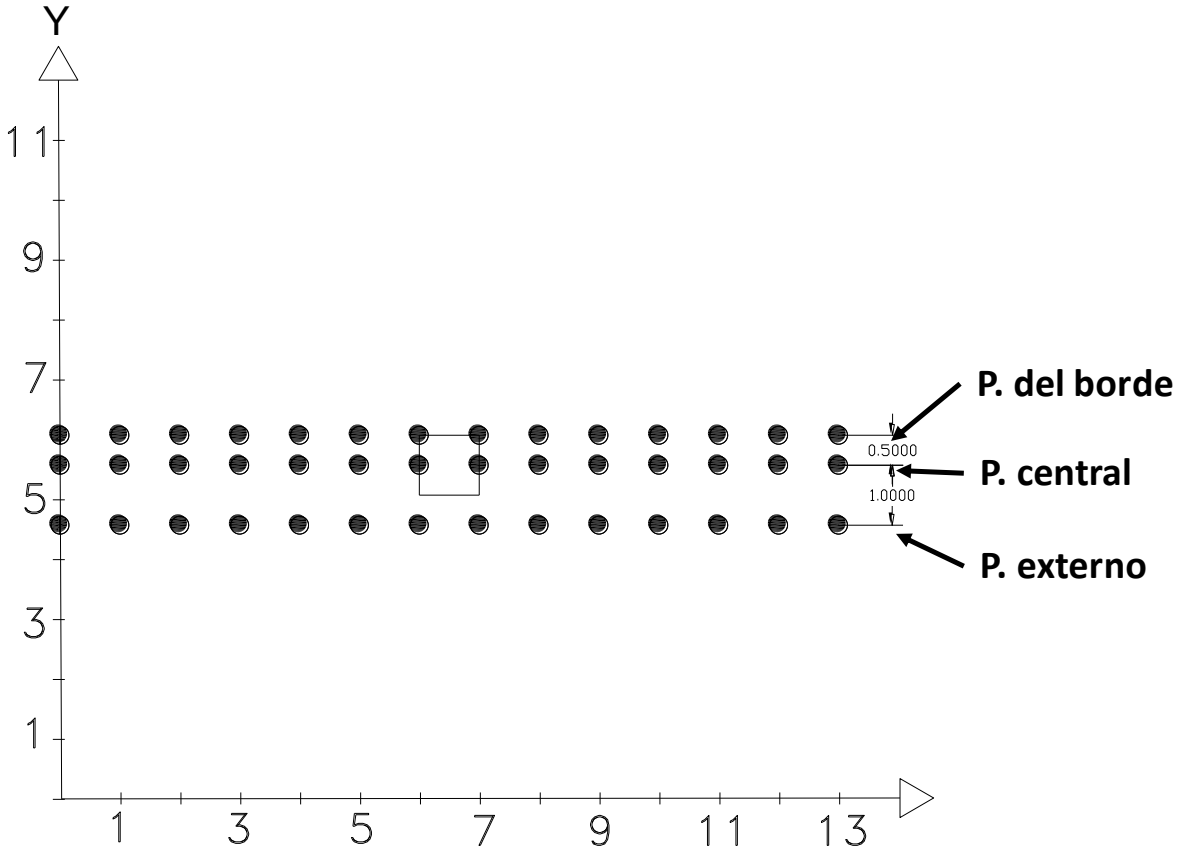

Figura 8. Vista en planta del modelo base, donde se muestran las ubicaciones de los perfiles.

- Dipolo-dipolo (DD). La separación "a" determina la distancia intraelectródica, es decir, la que separa al par de electrodos de corriente y al par de potencial. La distancia interelectródica entre los dos pares de electrodos es n*a, donde n es un entero positivo. Su factor geométrico es: $K = -\pi(n+1)(n+2)na$.
- Polo-dipolo (PD). El electrodo de corriente B se lleva a gran distancia (en teoría al infinito), los de potencial están separados a una distancia "a" y la separación entre el electrodo de corriente A y los de potencial es n*a. Para simular la situación práctica, el electrodo al infinito no se omitió en

los cálculos de la resistividad aparente, sino se colocó a una distancia de 14 unidades alejado del perfil. Su factor geométrico es: $K = 2\pi na(n+1)$.

- Polo-polo (PP). En éste se llevan a gran distancia tanto el electrodo de corriente B como el electrodo de potencial N. En forma análoga al arreglo polo-dipolo, estos dos electrodos se colocaron 14 unidades de distancia alejados del perfil, en direcciones opuestas. Su factor geométrico es: $K = 2\pi a$.

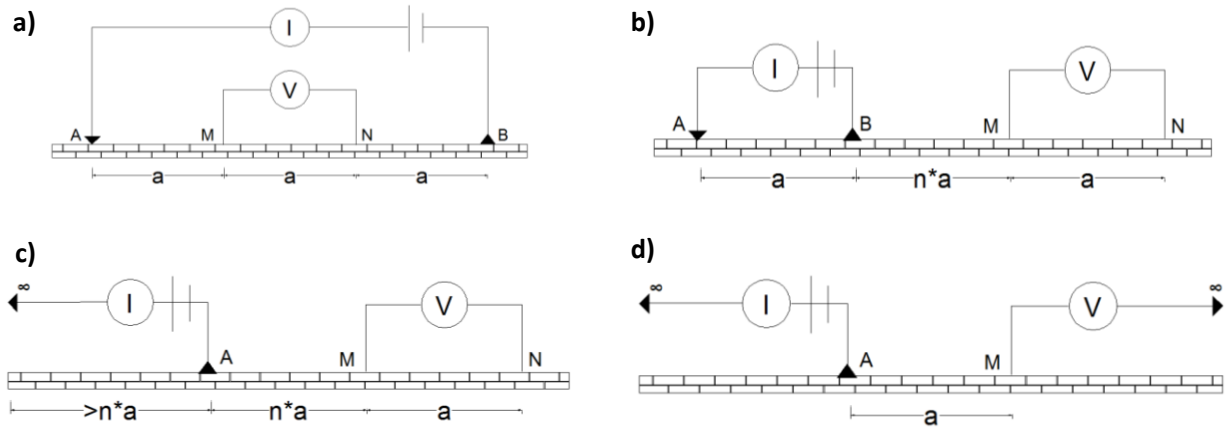

Figura 9. Principales arreglos tetraelectródicos: a) Wenner, b) dipolo-dipolo, c) polo-dipolo y, d) polo-polo.

Se manejaron dos tipos de tendidos: el A y el B (figura 10 y figura 11). En ambos se usó la misma longitud del perfil que, por tratarse de 14 electrodos, es de 13 unidades. La diferencia entre los dos tendidos es el número de mediciones de resistividad aparente para cada arreglo electródico. En el tendido A se usan el máximo número de mediciones posibles que se pueden hacer con cada arreglo, con la reserva de mantener el factor n como un entero y el de no considerar mediciones recíprocas (el intercambio de los electrodos de corriente por los de potencial). El máximo número de resistividades aparentes en el tendido A son: 26, 95, 135 y 91 en los arreglos WN, DD, PD y PP, respectivamente. Este tipo de levantamiento es el que se realizaría en la práctica en un estudio tomográfico. La figura 10 muestra el tendido A para cada uno de los cuatro arreglos; debajo de cada pseudosección se indican las posiciones de los electrodos de corriente (cruces) y electrodos de potencial (círculos) empleados para cada medición de resistividad aparente. La notación 11x empleada en el primer renglón de la figura 10a indica que esa separación y

posición de electrodos fue usada además de 10 adicionales moviendo los electrodos cada vez una unidad de longitud a la derecha.

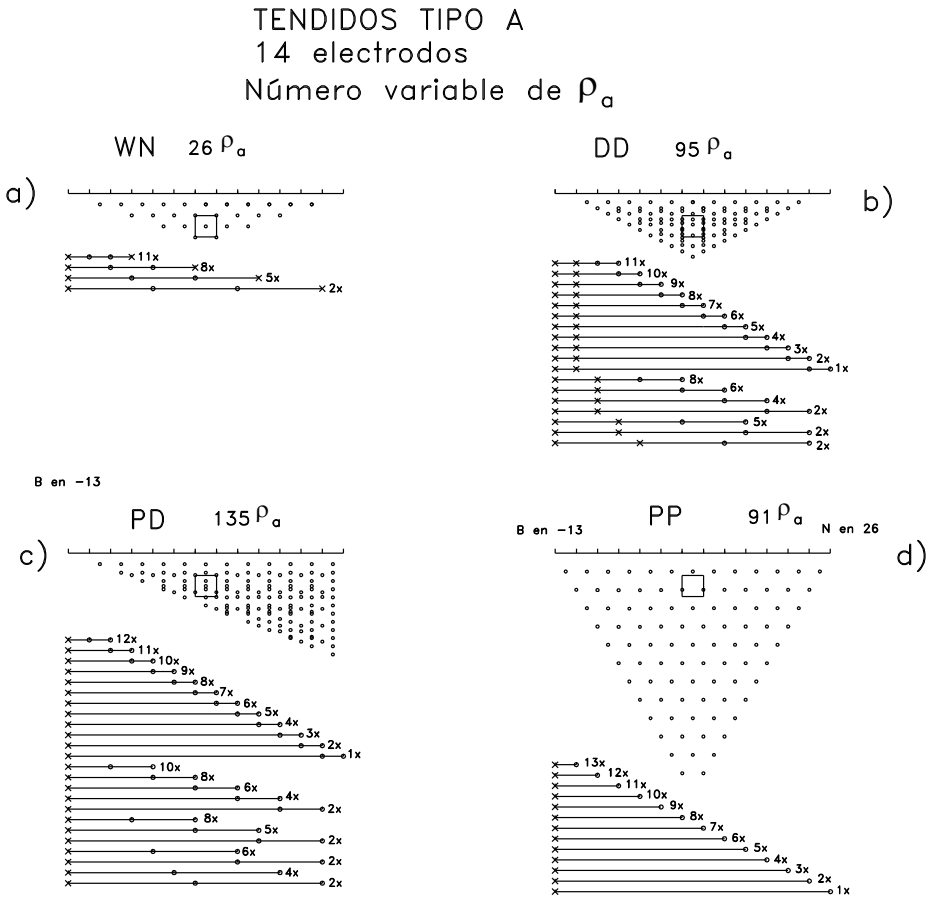

Figura 10. Tendido A para los cuatro arreglos. Se muestran las diferentes posiciones de los electrodos de corriente (cruces) y de potencial (círculos) y los puntos de asignación que conforman la pseudosección. Las profundidades de estos puntos son profundidades efectivas de Edwards (1977).

En el tendido B también se usan 14 electrodos, pero ahora todos los arreglos usan el mismo número de mediciones de resistividad aparente. Puesto que en el tendido A el arreglo Wenner es el que usa el valor más pequeño de mediciones (26), en todos los demás arreglos se utilizan sólo 26 resistividades aparentes. Para decidir cuáles mediciones seleccionar de los arreglos DD, PD y PP, como criterio se consideraron las profundidades efectivas definidas por Edwards (1977) y listadas por Loke (2004), tratando que fueran similares a las del arreglo Wenner. Las pseudosecciones y posiciones de electrodos en los tendidos tipo B se indican en la figura 11. Las del arreglo Wenner obviamente son iguales a las del tendido A de la figura 10.

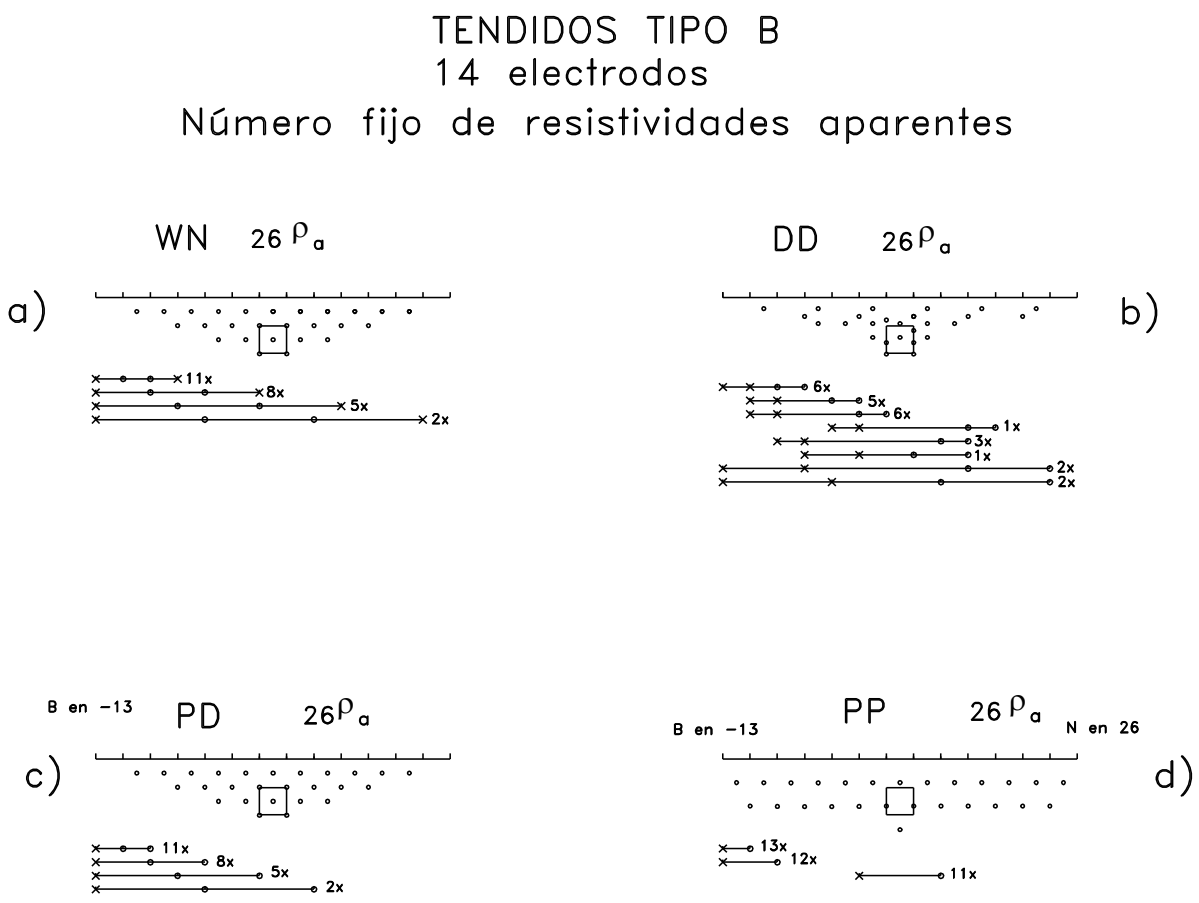

Figura 11. Tendido B para los cuatro arreglos. Se muestran las diferentes posiciones de los electrodos de corriente (cruces) y de potencial (círculos) y los puntos de asignación que conformarían la pseudosección. Las profundidades de estos puntos son profundidades efectivas de Edwards (1977).

2.4 Sensibilidades e incertidumbres en los parámetros

La estimación de las incertidumbres de los parámetros del modelo patrón y de las variaciones de este modelo se realizaron con un proceso de dos pasos. Primero se calcularon las sensibilidades o derivadas parciales de la respuesta de resistividad aparente con respecto a los cinco parámetros del modelo. Al conjunto ordenado de estas derivadas se le conoce como matriz o jacabionos sensibilidades. Los elementos de esta matriz son ponderados con una estimación de los errores en los voltajes. Finalmente, como segundo paso, las incertidumbres de los parámetros son estimadas usando una descomposición de valores singulares de la matriz de sensibilidades.

2.4.1 Matriz de sensibilidad

Los elementos de esta matriz están definidos por la expresión:

$$a_{ij} = \frac{p_j}{\Delta\rho_{a,i}} \frac{\delta\rho_{a,i}}{\delta p_j}, \tag{31}$$

donde la parte más importante es la derivada $\left(\frac{\delta\rho_{a,i}}{\delta p_j}\right)$ de cada resistividad aparente con respecto a cada uno de los parámetros del modelo. Adicionalmente, en esta expresión las derivadas se multiplican por el respectivo parámetro (p_j) y se ponderan entre el error de la iésima resistividad aparente ($\Delta\rho_{a,i}$). Con esta definición las sensibilidades son adimensionales, lo cual tiene el objetivo de poder hacer una comparación directa entre las sensibilidades de parámetros de diferentes dimensiones, por ejemplo, de sensibilidades de la profundidad con sensibilidades de la resistividad. Además, la división entre el error de la medición tiene el objeto de dar menos importancia en el proceso de resolución a las mediciones que tengan un error alto.

La derivada de (31) fue estimada aproximándola con diferencias finitas hacia adelante:

$$\frac{\delta\rho_{a,i}}{\delta p_j} \cong \frac{\Delta\rho_a}{\Delta p} = \frac{\rho_a^{(2)} - \rho_a^{(1)}}{p^{(2)} - p^{(1)}}, \tag{32}$$

donde $\rho_a^{(1)}$ es la resistividad aparente calculada con el original valor del parámetro $p^{(1)}$, y $\rho_a^{(2)}$ es la calculada perturbando el parámetro original a un valor $p^{(2)}$. La perturbación es del 10%.

Para asignar los errores en los datos de resistividad aparente ($\Delta\rho_{a,i}$) se emplearon las estimaciones hechas por Zhou y Dahlin (2003). Estos autores, usando el principio de reciprocidad (el intercambio de los electrodos de potencial por los de corriente debe producir la misma resistividad aparente), estimaron el error en los voltajes en nueve perfiles tomográficos, usando cientos o miles de mediciones. Ellos estimaron el error fraccionario en el voltaje ajustando con mínimos cuadrados una ley de potencia a sus datos. De esta forma:

$$\frac{\varepsilon}{V} = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\alpha} (1 + R), \tag{33}$$

donde ε es el error de voltaje, V es el voltaje en milivolts, α y β son constantes que definen la ley de potencia, y R es un número aleatorio. Este término aleatorio fue considerado como ruido.

Las nueve rectas de ajuste de las correspondientes líneas tomográficas se muestran en la figura 12.

$$\log \mathrm{E} = \alpha \log \beta - \alpha \log V \tag{34}$$

Siendo la fórmula explicita de la recta: $y = mx + b$, y comparando con (34) se tiene que:

$$\begin{gathered} \mathrm{y} = \log \mathrm{E} \\ m = -\alpha \\ x = \log V \\ b = \alpha \log V\beta. \end{gathered} \tag{35}$$

Al ser una nube de puntos con tendencia lineal en el espacio logarítmico, se puede emplear mínimos cuadrados estándar (m.c.e.), para el cálculo de una sola recta y así poder tomar en cuenta los puntos del ajuste lineal de Zhou y Dahlin. Con ello podríamos obtener α y β desde (35). Se empleó un programa en Matlab (Anexo B), donde se calculó el m.c.e de la nube de puntos de las rectas, obteniéndose un $\alpha = 0.55$ y un $\beta = 14.9454$.

$$\mathrm{E} = \left(\frac{14.9459}{V}\right)^{0.55} \tag{36}$$

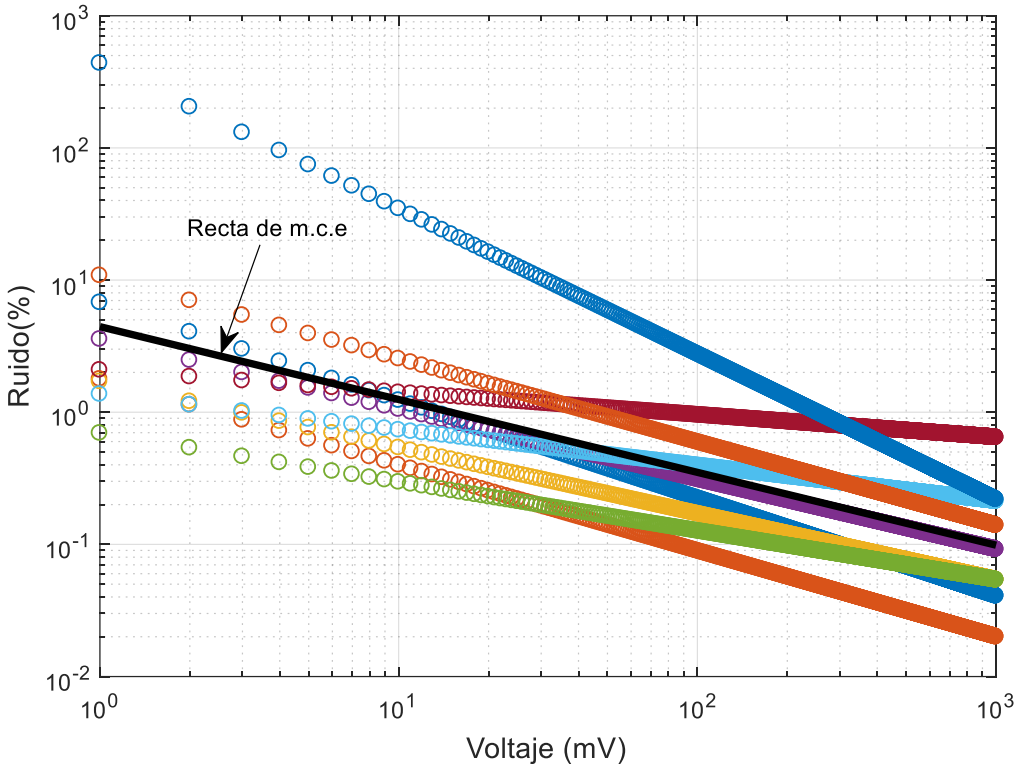

Figura 12. Ajustes estimados lineales por Zhou y Dahlin (2003) para el ruido en nueve diferentes mediciones multielectródicas. Se indica la recta del ruido para m.c.e. usada en este trabajo.

2.4.2 Incertidumbre en los parámetros

La resolución de parámetros se evalúa en un proceso de dos pasos; primero se estiman las sensibilidades de cada arreglo a todos los parámetros del modelo, seguido del cálculo de la resolución de cada parámetro con una descomposición de valores singulares de la matriz de sensibilidad.

El método se puede explicar considerando que cualquier pequeña variación del modelo base es especificada por el parámetro $p_j, j = 1, \dots, N$, con N igual a 5. Las resistividades aparentes (mediciones) son expresadas mediante $y_i, i = 1, \dots, M$, de donde M depende del tipo de arreglo, perfil y tendido que se esté calculando. Por linealización, los cambios esperados en la respuesta dy_i producido por pequeñas variaciones dp_j en los parámetros está dado por:

$$dy_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, dp_j \qquad i = 1, \dots, M \tag{37}$$

O en notación matricial $d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}d\boldsymbol{p}$. Los elementos a_{ij} de la matriz de sensibilidad están definidos por la expresión (31).

La matriz de sensibilidades es descompuesta usando la técnica de descomposición de valores singulares (DVS), dada

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{T}}, \tag{38}$$

donde T indica la transpuesta, **U** (MxN) y **V** (MxM) son las matrices de eigendatos y eigenparámetros, y **S** (NxN) es una matriz diagonal que contiene los valores singulares o eigenvalores. Edwards et al. (1981) muestra que los errores en los eigenparámetros, definidos por $d\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{T}} d\boldsymbol{p}$, son $1/s_{ij}$, el recíproco del eigenvalor correspondiente. Las incertidumbres o límites de error de los parámetros del modelo (Raiche et al., 1985) están dados mediante:

$$p_j^{\pm} = p_j e^{\pm B_j \beta},$$

$$B_j = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{v_{jk}}{s_k}\right)^2}, \tag{39}$$

donde $p_j^{\pm}$ son los límites superiores e inferiores de un nivel de 68% de confianza para los parámetros p_j; v_{jk} son los elementos *jk* de la matriz de eigenparámetros, s_k son elementos de la matriz de eigenvalores, y β es una medida del error de desajuste. Como no se hará inversión, β se le asignará un valor unitario.

Capítulo 3.Resultados y discusión

El experimento numérico realizado en esta tesis involucra la variación de muchos parámetros. Está enfocado, como ya se explicó, a qué arreglos electródicos son los más eficientes en un levantamiento tomográfico y a qué parámetros de una heterogeneidad sencilla son los mejor resueltos. Para evitar confusión en el lector a continuación se resumen estos parámetros.

Modelos. Se calcularon las sensibilidades e incertidumbres de los parámetros de 19 modelos. Estos modelos son variaciones de un modelo llamado patrón o de referencia que está definido por los siguientes cinco parámetros: P=1 (profundidad a la cima del cuerpo), L=1 (longitud en la dirección del eje x), A=1 (anchura en la dirección del eje y), G=1 (grosor) y ρ_2=10 Ωm (resistividad del cuerpo). Para abreviar, se denotan como profundidad, longitud, anchura, grosor y ρ_2. Todos los modelos están inmersos en un semiespacio homogéneo de resistividad ρ_1=100 Ωm. Cada modelo es una versión perturbada del modelo patrón, modificando solamente uno de los parámetros mientras que los otros cuatro se mantienen fijos en los valores del modelo patrón. Los valores perturbados considerados fueron: P=0.1, 0.3, 0.5 y 2, L=0.5, 5, 9 y 13, A=0.5, 5, 9 y 13, G=0.5, 3, 6 y 9, ρ_2=1, 100, 1,000 y 10,000 Ωm. Hay que recordar que las dimensiones del cuerpo están escaladas respecto a la separación entre electrodos, es decir, si cambiáramos esta separación a 5 metros, todos los resultados de esta tesis seguirían iguales, pero ahora para cuerpos con todas sus dimensiones multiplicadas por 5.

Arreglos. Las sensibilidades e incertidumbres de los 20 modelos (el patrón más 19 variaciones de él) se calcularon para 4 arreglos tetraelectródicos colineales: Wenner (WN), dipolo-dipolo (DD), polo-dipolo (PD) y polo-polo (PP). Estos arreglos están descritos en la figura 9. En la definición teórica de los dos últimos arreglos uno o dos electrodos están en el infinito, es decir, no son considerados por estar a una gran distancia de los otros electrodos. En la práctica, esto no es realizable pues no se podría inyectar corriente al terreno o no se podría medir ninguna diferencia de potencial. Entonces, para simular condiciones reales de campo estos electrodos “al infinito” se colocaron 14 unidades de longitud alejados del perfil. Además, se supuso que los voltajes calculados tienen un error dado por una ley de potencia, que a su vez es un promedio de varias leyes propuestas por Zhou y Dahlin (2003). Este error se usó para ponderar los elementos de la matriz de sensibilidad. En todos los arreglos se supuso una intensidad de corriente inyectada de 0.1 Amperes.

Tendidos. Se consideraron dos tipos de tendidos, A y B, suponiendo que en ambos hay 14 electrodos clavados en la superficie con una separación de una unidad de longitud entre cada uno de ellos. En el tendido A se consideraron todas las combinaciones de electrodos que caben dentro de los 14 electrodos, de tal forma que, con este tipo de tendido, la distancia entre el primero y el último electrodo es de 13 unidades para los cuatro arreglos. Las únicas restricciones fueron la de considerar el parámetro n como un entero y no incluir posiciones recíprocas de los electrodos. La organización geométrica de los electrodos se especifica en la figura 10 y la figura 11. Los números de resistividades aparentes consideradas en el tendido A fueron: Wenner: 26, dipolo-dipolo: 95, polo-dipolo: 135 y polo-polo: 91. En contraste, en el tendido B se consideran un número uniforme de 26 resistividades aparentes (mismas del Wenner) en los cuatro arreglos. Bajo la condición de la profundidad de investigación característica se determinan las 26 resistividades aparentes de los demás arreglos. La idea de este tendido es evaluar los arreglos en "igualdad de condiciones", pues el número de resistividades aparentes no es uniforme en el tipo de tendido A.

Perfiles. Las respuestas del subsuelo fueron evaluadas en cuatro cubrimientos superficiales de datos usando tres perfiles diferentes, todos ellos paralelos al eje x y colocando el cuerpo anómalo en la región central de ellos. Las coordenadas y de estos perfiles son: y=0 (perfil central), y=0.5 (perfil del borde) y y=1.0 (perfil externo). Además, se hizo el análisis para los tres perfiles en conjunto.

Todos los análisis fueron realizados discretizando la superficie del cuerpo anómalo en celdas cuadradas de 0.05x0.05 unidades de longitud. La programación se hizo en Matlab, corriéndose el programa en el clúster LAMB. En total se evaluaron las sensibilidades y resoluciones de 640 modelos (20 modelos por 4 arreglos por 2 tendidos por 4 perfiles).

3.1 Sensibilidades

Es impráctico presentar los elementos de la matriz de sensibilidad dada la enorme cantidad de modelos y resistividades aparentes. Para abreviar, estos resultados se presentan en términos de la sensibilidad media cuadrática, (simplemente llamada de aquí en adelante, como sensibilidad), dada por:

$$A_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M} a_{i,j}^2}{M}} \tag{40}$$

donde M es el número de resistividades aparentes, i=1,…,M , y el índice j=1,…, 5 es para cada uno de los cinco parámetros del modelo.

De las figuras 14 a 18 se muestran las sensibilidades de los cinco parámetros, para los cuatro arreglos, al variar cada uno de los cinco parámetros. Para explicar este tipo de presentación nos enfocaremos sólo en la figura 14, en donde se muestra cómo cambian las sensibilidades al disminuir la profundidad (P) a la cima del cuerpo patrón a los valores de 0.1, 0.3 y 0.5 unidades de longitud y al hacerlo más profundo (P=2), además de la profundidad de referencia (P=1). Este esquema de variaciones está indicado en la figura 14f. En las abscisas de los paneles de la figura 14 a-e está especificada esta variación de la profundidad. Las ordenadas, en escala logarítmica, son para la sensibilidad media cuadrática de cada uno de los cuatro arreglos. Entonces, las sensibilidades de la profundidad, longitud, anchura, grosor y la relación ρ_2/ρ_1 se muestran en la figura 14 a-e, respectivamente.

En forma análoga, las figuras 15, 16, 17 y 18 muestran las sensibilidades al variar la longitud, anchura, grosor y ρ_2, respectivamente. Estas cinco figuras (14 a 18), solo corresponden al perfil central del tendido A. Las gráficas correspondientes del perfil central tendido B, y las de los otros perfiles (del borde, externo y los tres perfiles) de ambos tendidos no se incluyen aquí, sino se dejan en el apéndice. Cabe hacer notar que la forma de todas estas gráficas es similar a las de las figuras 14 a 18, pero con magnitudes de las sensibilidades diferentes.

La figura 14 muestra que las sensibilidades de los cinco parámetros (P, L, A, G y ρ_2) disminuyen gradualmente conforme la profundidad a la cima del cuerpo aumenta. La excepción a este comportamiento general es la propia sensibilidad de la profundidad (figura 14a), que alcanza su máximo no en la profundidad más somera de 0.1 unidades, sino cuando la profundidad está comprendida entre 0.3 a 0.5. Este comportamiento no es sorprendente, pues es similar a lo que ocurre en un semiespacio homogéneo con las profundidades características de investigación (PCI). La PCI es la profundidad a la que una capa delgada contribuye más a la resistividad aparente para una apertura electródica dada. La figura 13 muestra las curvas de PCI de los arreglos Wenner, Schlumberger, dipolo-dipolo y polo-polo (tomada de Roy y Apparao, 1971). El punto importante de estas curvas es que en ningún caso su máximo está en la

superficie, un rasgo similar al que se obtuvo en la figura 14a. Otro punto importante de esta figura 14 es que, de los cuatro arreglos, el Wenner es el que sistemáticamente tiene las sensibilidades mayores y el polo-polo las menores. Una discusión más completa de este punto se hará más adelante.

La figura 15 muestra el comportamiento de las sensibilidades cuando la longitud del cuerpo se hace variar desde 0.5 hasta 13 unidades de longitud. Estas variaciones están ilustradas en la Figura ***15*** 15f .Es claro el crecimiento de las sensibilidades con el aumento de la longitud, lo cual tiene sentido. La excepción de esta regla es la sensibilidad a la propia longitud (figura 15b), pues cuando L=13 las curvas muestran un descenso. Este comportamiento peculiar se puede explicar por el hecho de que los extremos del cuerpo ya están en los límites del perfil, en forma tal que sus caras laterales ya no están bien muestreadas por las corrientes impuestas por los electrodos de los extremos.

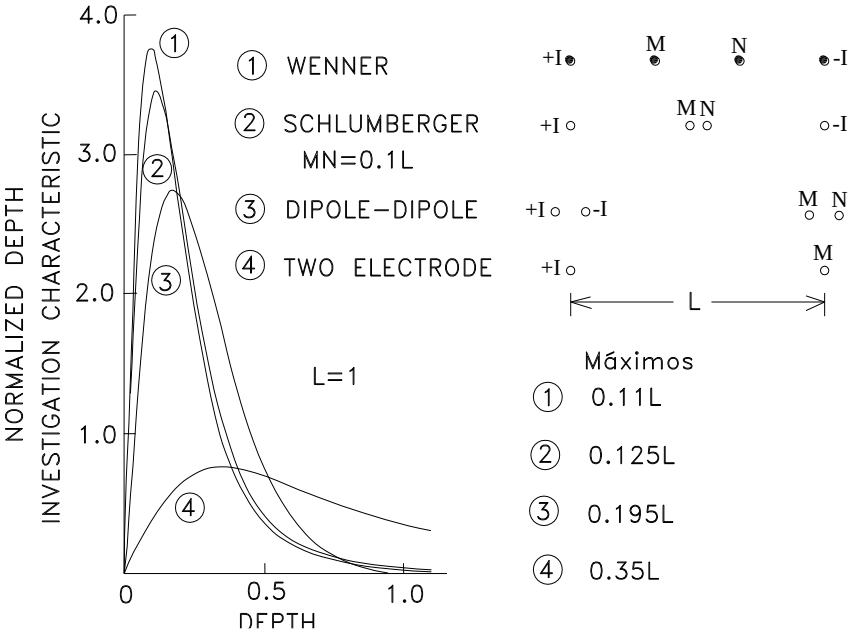

Figura 13. Profundidades características de investigación de cuatro arreglos electródicos sobre un semiespacio homogéneo. (Roy y Apparao, 1971)

La variación de la anchura del modelo patrón está descrita por la figura 16. Al variar este parámetro desde 0.5 hasta 13 unidades de longitud, como era de esperarse, todas las sensibilidades crecen exceptuando la sensibilidad de la propia anchura. Se puede observar en la figura 16c que las sensibilidades a la anchura tienen un máximo aproximadamente en A=5. Esto sugiere que la influencia de las corrientes que impone

el arreglo tomográfico en las dos caras laterales del cuerpo empieza a disminuir cuando la anchura del cuerpo es de 9 unidades.

Estos rasgos tienen relevancia con lo que se conoce como la huella (o “foot print”) de una medición (Kovacs etal, 1995; Beamish, 2003). Cuando se realiza una medición geoeléctrica con un transmisor (el par de electrodos de corriente) y un receptor (el par de electrodos de potencial), existe un volumen del subsuelo que dominantemente contribuye al voltaje medido en el receptor. El área que este *volumen de influencia* delimita en la superficie del terreno es lo que se conoce como la huella del arreglo transmisor-receptor. Ahora bien, cada una de las curvas de sensibilidad de la figura 16c no es el reflejo de un solo par transmisor-receptor, sino de una multitud de ellos.

Sin embargo, podemos aseverar que, puesto que la sensibilidad empieza a decaer a partir de 5 unidades de anchura, el diámetro de la huella de cada arreglo está entre 5 y 9 unidades de longitud. Szalai y Szarka (2008) publicaron mapas de sensibilidad a varias profundidades de varios arreglos sobre un subsuelo homogéneo. Este trabajo tiene algunas semejanzas con el análisis de esta tesis.

Las sensibilidades de todos los parámetros aumentan conforme el grosor se incrementa de 0.5 a 9 unidades (figura 17), resultado lógico pues el volumen de la masa anómala aumenta. Otra vez, la excepción a este comportamiento se presenta en las sensibilidades del propio grosor (figura 17d), que muestran disminuciones notables en grosores mayores a 3 unidades. Esto significa que para estos últimos grosores la corriente que alcanza la base del cuerpo ya ha decrecido en forma significativa y que, por lo tanto, el grosor del volumen de influencia es de aproximadamente 5 unidades de longitud.

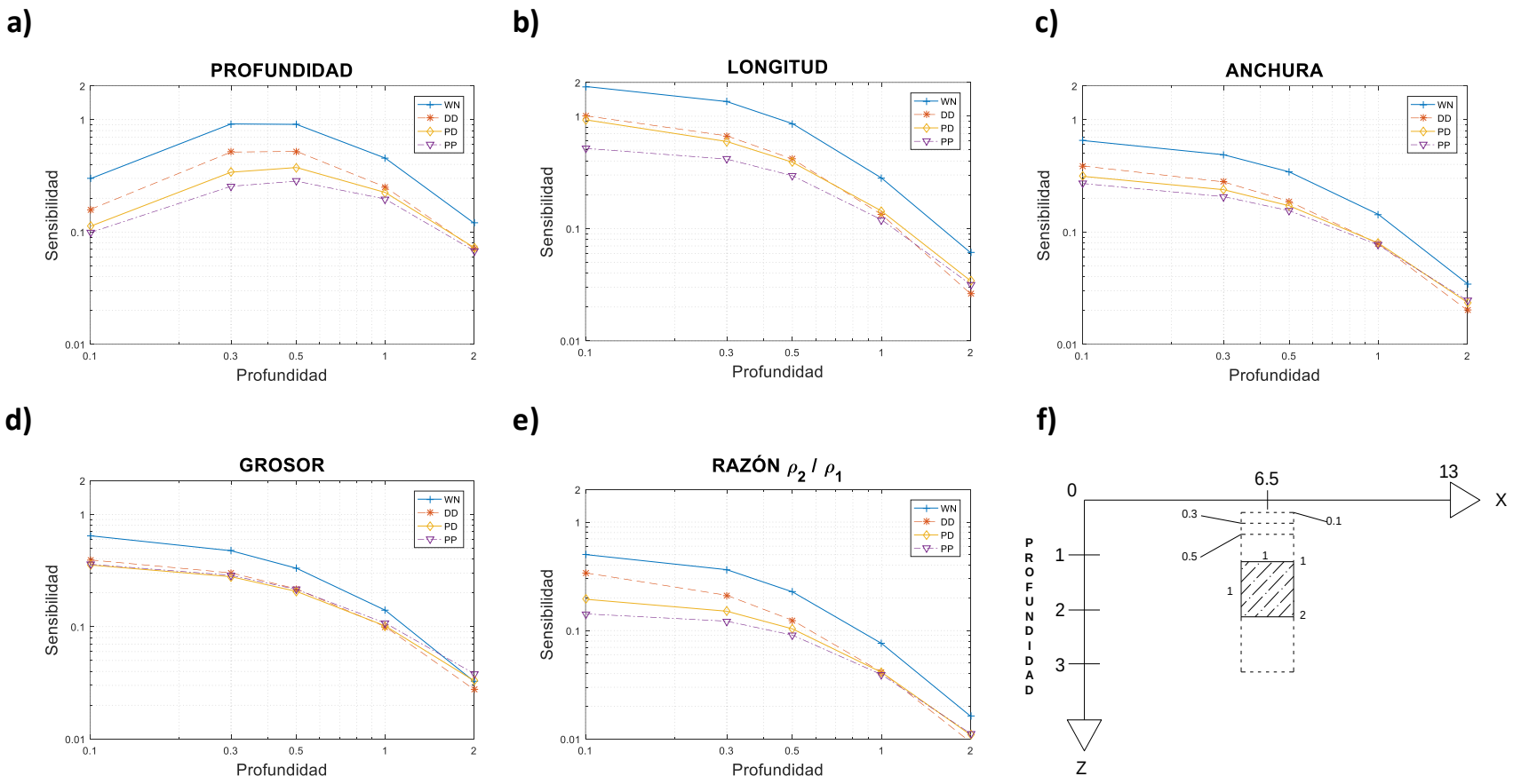

Figura 14. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la profundidad a la cima del cuerpo (P). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Profundidades de variación del modelo base.

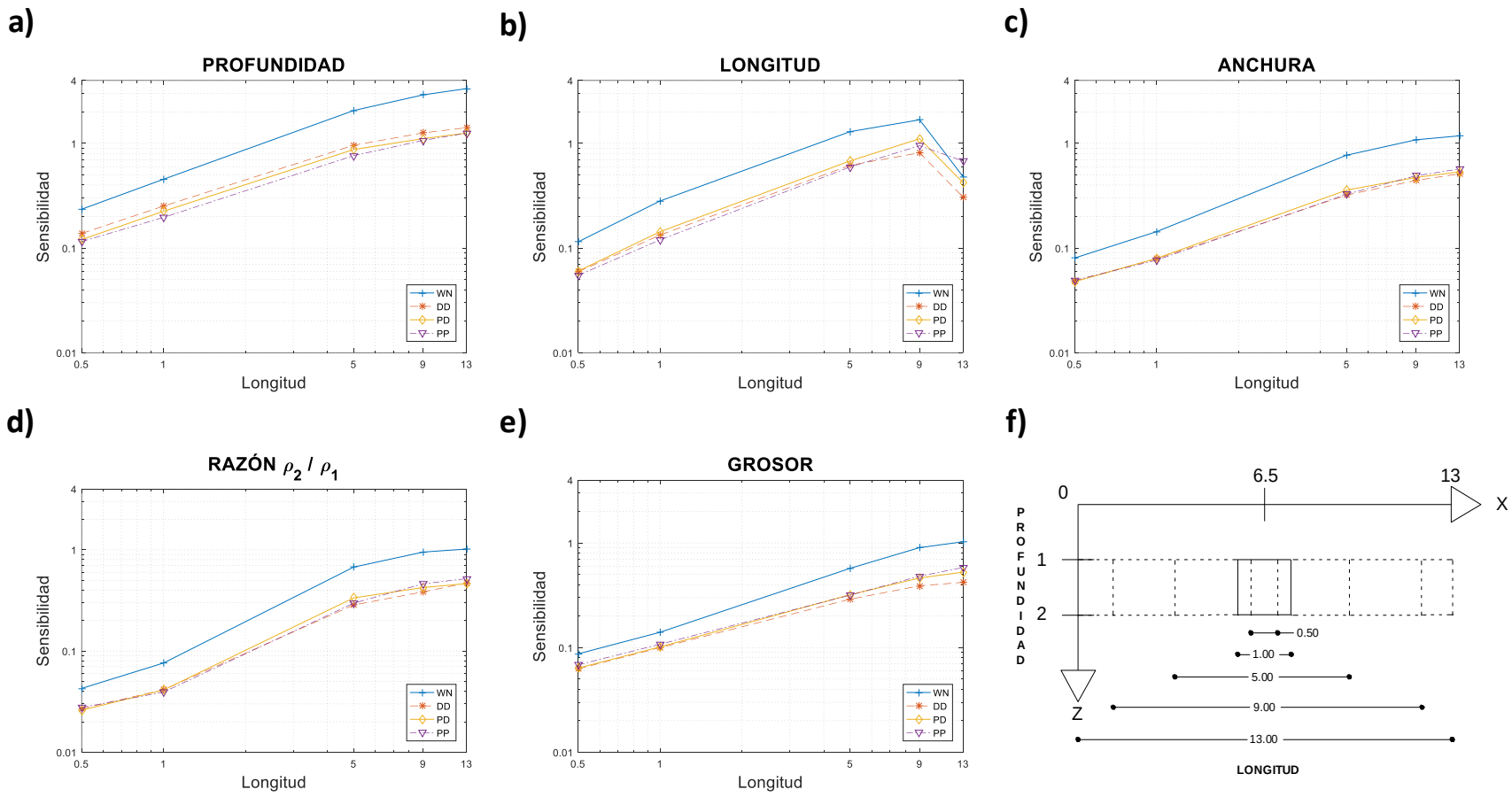

Figura 15. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la longitud del cuerpo (L). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Longitudes de variación en la dirección del eje x del modelo base.

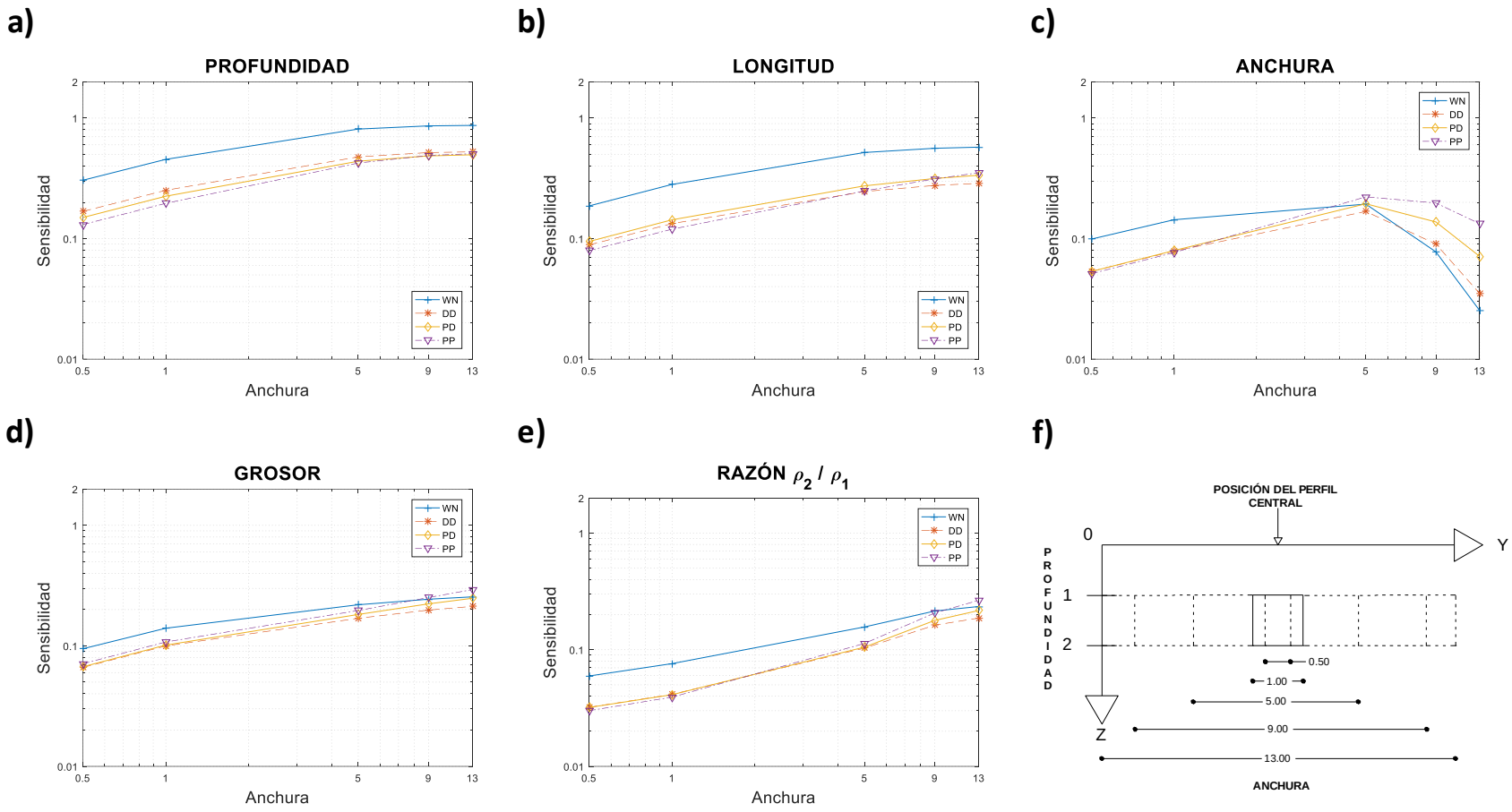

Figura 16. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la anchura del cuerpo (A). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Anchuras de variación del modelo base en eje y.

La figura 18 muestra las sensibilidades al variar la resistividad del cuerpo (ρ_2). Puesto que en todos los modelos la resistividad del semiespacio (ρ_1) se mantuvo constante en el valor de 100 Ωm, estos resultados también son válidos para los contrastes ρ_2/ρ_1. En los métodos eléctricos y electromagnéticos la diferencia aritmética (ρ_2-ρ_1) no es un parámetro tan importante en la física del fenómeno como lo es su razón ρ_2/ρ_1. Entonces estos resultados son válidos para las razones indicadas, independientemente de cuánto sean los valores individuales de ρ_1 y ρ_2. Un rasgo importante de esta figura es que todas las curvas de sensibilidad no son simétricas respecto al valor ρ_2=100 Ωm, excepto la asociada con la anchura. Las sensibilidades de un cuerpo conductor son mayores que las de un cuerpo resistivo con un contraste recíproco. Por ejemplo, los valores para ρ_2/ρ_1=0.1 son aproximadamente el doble que para ρ_2/ρ_1=10 (estos dos contrastes son recíprocos). Estos resultados son congruentes con los obtenidos por Ward (1967). Él analizó el campo eléctrico secundario en la vecindad de una esfera enterrada en un espacio homogéneo no acotado, la cual estaba inmersa en un campo eléctrico primario uniforme. Este autor demostró que bajo estas condiciones el campo eléctrico anómalo es dos veces mayor para una esfera conductora que para una esfera resistiva con el mismo contraste recíproco de resistividades. Como se mencionó anteriormente, la excepción a este comportamiento de una mayor sensibilidad de un cuerpo conductor, las sensibilidades de la anchura no cumplen con esta característica (figura 18c) pues las curvas son prácticamente simétricas respecto a ρ_2/ρ_1=1. Hasta el momento todavía no entendemos la razón de esta característica. Por último, nótese que en la figura 18 se muestran las sensibilidades en ρ_2=100 Ωm solo para la propia resistividad (figura 18e), para los otros cuatro parámetros (profundidad, longitud, anchura y grosor) no se presentan. La razón de esta aparente inconsistencia se debe a que, cuando ρ_2=100 Ωm, el cuerpo tiene la misma resistividad que el medio que la rodea, por lo que el cuerpo no existe. El valor reportado en la figura 18e no es la sensibilidad de la resistividad del cuerpo, sino del semiespacio homogéneo.

En relación a los arreglos (figura 14 a 18) en la mayoría de los modelos con el perfil central el arreglo Wenner (WN) es el que da valores mayores de sensibilidad. En contraste, el arreglo que en la mayoría de los casos tiene menores valores es el polo-polo (PP), ocasionalmente ocupando este lugar el arreglo dipolo-dipolo (DD). El comportamiento de las curvas de sensibilidad para los perfiles del borde, externo y los tres perfiles es similar en forma a los del perfil central, así como los del tendido B. Por esta razón y porque son un gran número de gráficas se han mandado al Anexo C. Como se verá más adelante, el análisis de solo la sensibilidad no es suficiente para definir si un parámetro está bien resuelto o cuál arreglo es mejor. Para llegar a este objetivo es necesario estimar las incertidumbres de los parámetros.

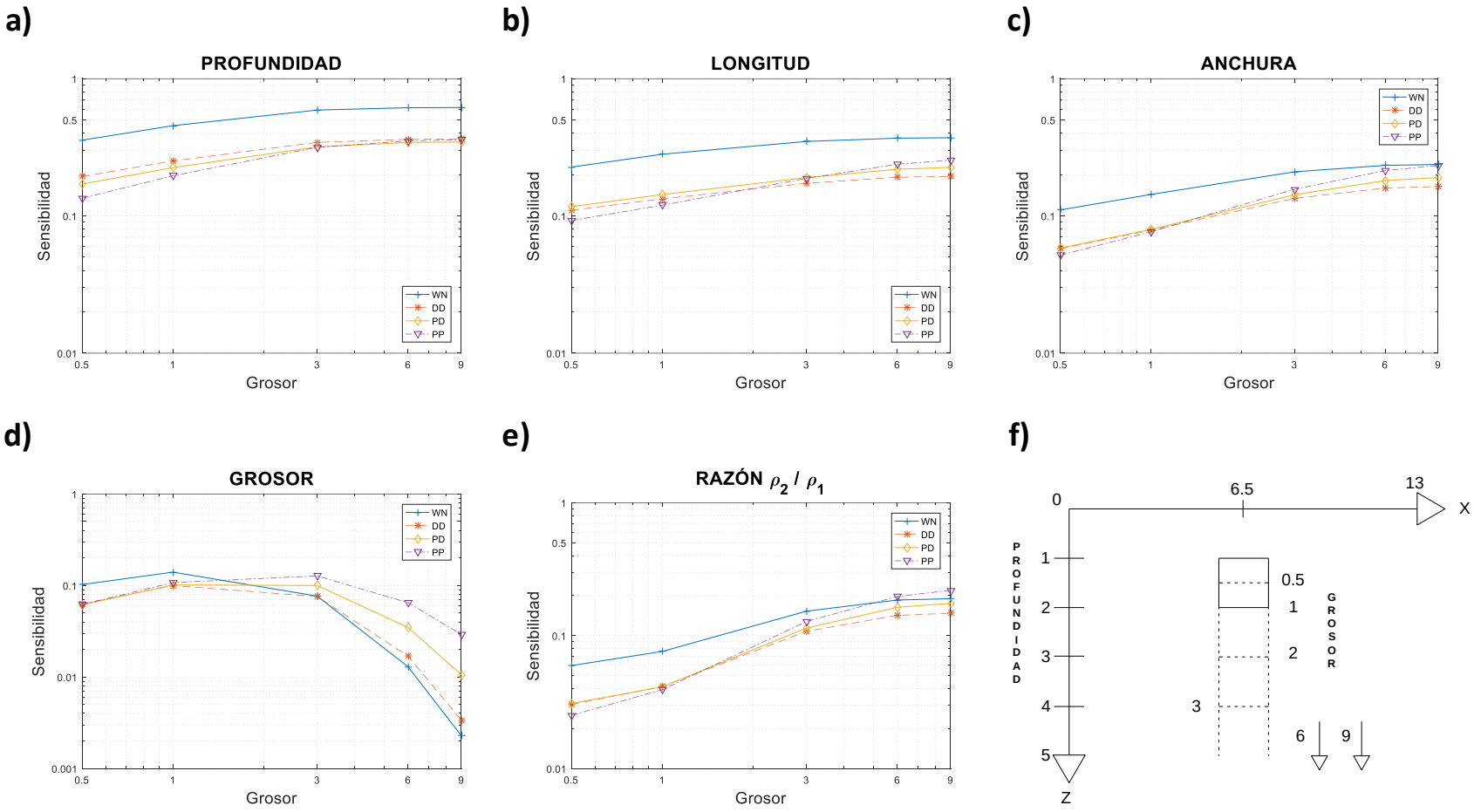

Figura 17. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía el grosor del cuerpo (G). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Grosores de variación del modelo base.

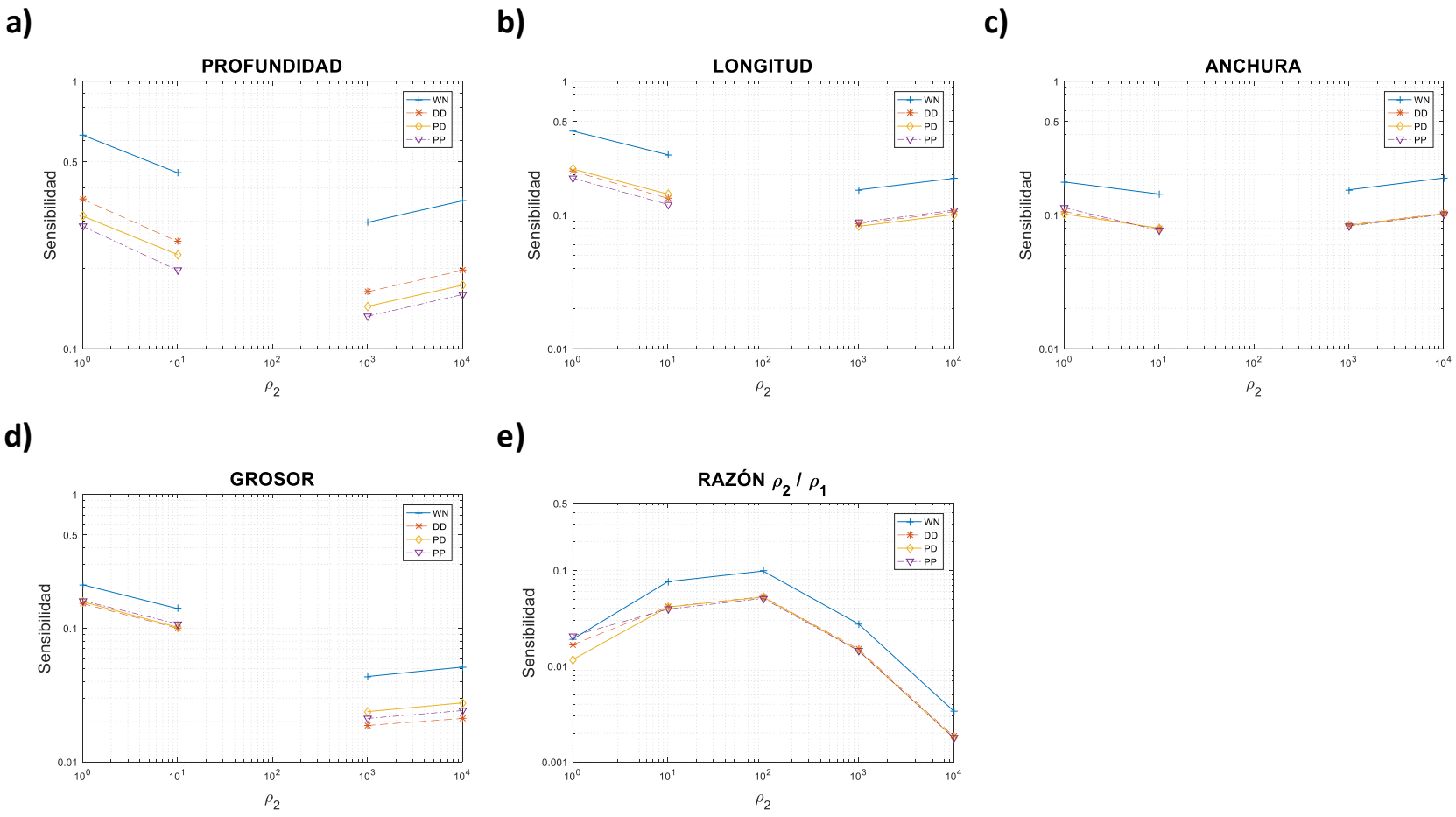

Figura 18. Sensibilidades para el perfil central del tendido A cuando se varía la resistividad del cuerpo (ρ_2) en 1, 10, 100, 1,000 y 10,000. a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base.

3.2 Resoluciones

El primer resultado relacionado con las resoluciones se muestra en la figura 19, que es una comparación entre los tendidos A y B para el modelo particular que tiene la profundidad a la cima del cuerpo de 0.1 unidades de longitud. Los siguientes son los rasgos relevantes de esta figura:

a) En el tendido A (figura 19a), que es donde el número de mediciones es diferente en cada arreglo y que además es el más usado en la práctica, el mejor arreglo es el dipolo-dipolo (DD) y el peor es el Wenner (WN). En prácticamente todos los modelos el arreglo Wenner es el de menor resolución. Más adelante se hará una evaluación de cuál arreglo fue el globalmente mejor para los 20 modelos.

b) En el tendido B (figura 19b) las resoluciones de los cuatro arreglos se calcularon en igualdad de condiciones, es decir, con el mismo número de resistividades aparentes (26). Para este tipo de tendido el arreglo Wenner dejó de ser el peor, pasando a segundo lugar, muy cerca del arreglo polo-polo. La conclusión de este experimento numérico es que la baja resolución del arreglo Wenner en el tendido A no se debe a una pobre resolución intrínseca de este arreglo, sino simplemente a que en el tendido A con este arreglo solo se pueden medir 26 resistividades aparentes, comparado con 95, 135 y 91 para los arreglos DD, PD y PP, respectivamente. Este comportamiento general también se observó con otros modelos.

c) Un rasgo que llama la atención en la figura 19 es que hay varias incertidumbres que exceden el 100 %. Por ejemplo, la profundidad en el arreglo polo-dipolo en el tendido B es del orden de 10,000 %. Estos errores en los parámetros no deben tomarse literalmente, solo indican que para estas condiciones el parámetro está pobremente resuelto. La expresión (38), que es la usada para estimar las incertidumbres, es una aproximación que solo es válida cuando hay una relación lineal entre el cambio en la respuesta y un cambio en el parámetro. Si esta relación dista mucho de ser lineal, la estimación de la incertidumbre puede dar valores enormes. Éste fue el caso en muchas de las estimaciones.

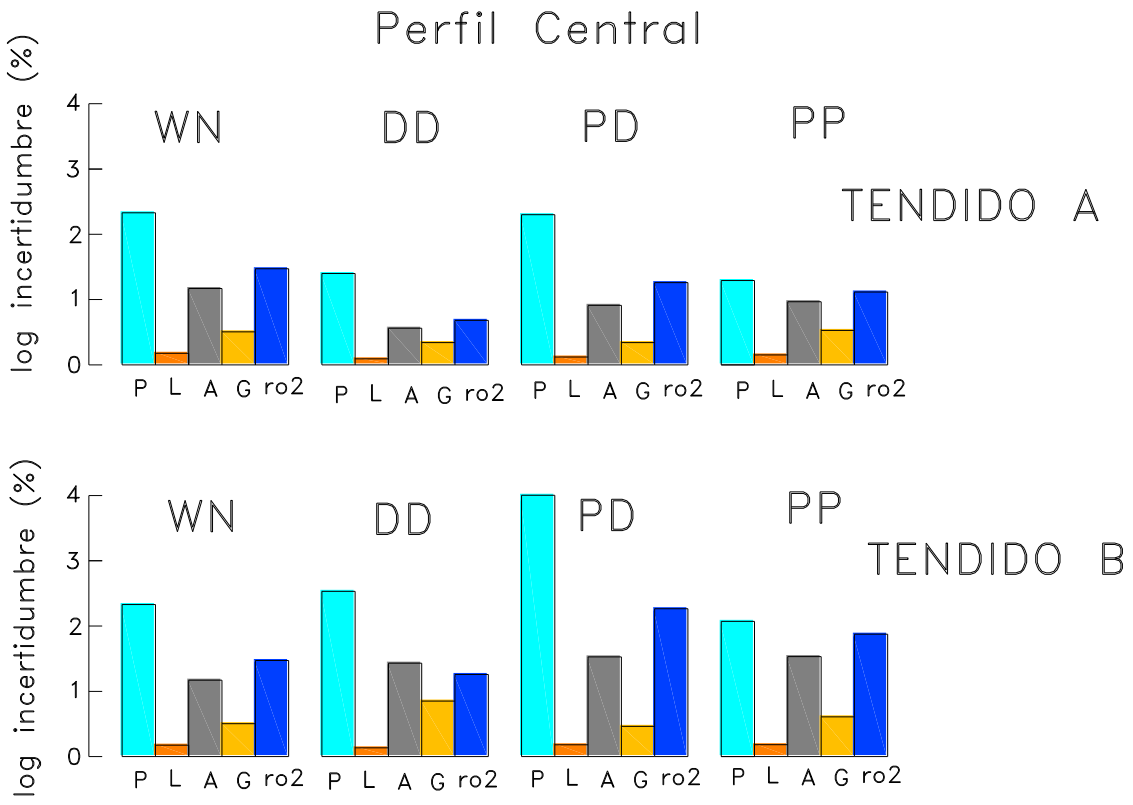

Figura 19. Comparación entre las incertidumbres porcentuales (en escala logarítmica) de los cinco parámetros y cuatro arreglos de los tendidos A (a) y B (b), ambos para el modelo con profundidad a la cima de 0.1 unidades. P=profundidad a la cima, L=longitud, A=anchura, G=grosor, ρ_2= resistividad del cuerpo.

La figura 20 muestra una comparación en términos de la cobertura de datos, pues se comparan las incertidumbres de: a) perfil central (y=0), b) perfil del borde (y=0.5), c) perfil externo (y=1) y d) los tres perfiles juntos, todas ellas con el modelo que tiene la profundidad a la cima de 0.1 unidades de longitud. Las mejores resoluciones en el perfil del borde (figura 20b) que en el central (figura 20a) es un resultado que no esperábamos. Sin embargo, esto solo se presenta para esta profundidad tan somera de 0.1 unidades, para las demás profundidades se revierte este resultado pues las incertidumbres en el perfil central son sistemáticamente menores a las del perfil del borde. Las incertidumbres de todos los parámetros y arreglos en el perfil externo son enormes; en la figura 20c solo se han graficado hasta un valor de 10,000%. Esto indica que las resistividades aparentes tienen muy poca información sobre los parámetros del cuerpo. Finalmente, la resolución usando los tres perfiles (figura 20d) es la mejor de los cuatro cubrimientos, un resultado que esperábamos.

En forma similar a como se hizo para las sensibilidades, se podrían presentar las 100 curvas de incertidumbres, análogas a las de las figuras 14 a 18. Puesto que estas curvas son similares a las de sensibilidad, solo se mencionan en qué modelos los cinco parámetros tuvieron las mejores resoluciones, todas para el tendido A con perfil central. Las menores incertidumbres en la profundidad a la cima se obtuvieron cuando P=0.5, L=9, A=13, G=9 y ρ_2=1. Las menores incertidumbres en la longitud resultaron cuando: P=0.1, L=9, A=13, G=9 y ρ_2=1. Las menores en la anchura ocurrieron cuando P=0.1, L=9, A=5 o 9, G=9 y ρ_2=1. Las mejores resoluciones en el grosor se presentaron cuando P=0.1, L=9, A=13, G=1 o 3 y ρ_2=1. Finalmente, las menores incertidumbres en la resistividad del cuerpo se presentaron cuando P=0.1, L=9, A=13, G=9 y ρ_2=1.

De particular importancia son las resoluciones de parámetros ante la variación de ellos mismos, lo cual merece una discusión más detallada. La mejor resolución de la profundidad ocurre cuando la cima del cuerpo está en 0.5 unidades de longitud. No podemos hacer una caracterización más detallada de este concepto porque los valores de profundidad analizados cerca del máximo de resolución fueron solo de P=0.3 y 0.5. De cualquier manera, las incertidumbres más pequeñas no se presentan en P=0.1, sino a un valor mayor. Cualitativamente este rasgo es similar a las profundidades características de investigación en un semiespacio homogéneo de la figura 13.

La resolución de la anchura fue máxima cuando tuvo los valores de 5 o 9 unidades de longitud. Si hablamos de un valor promedio de 7 unidades de longitud, esta magnitud definiría el diámetro de la huella del volumen de influencia. Esto implica que para este arreglo tomográfico de 13 unidades de longitud (en la dirección *x)*, la capacidad de detectar contrastes laterales de resistividad a más de 3.5 unidades (en la dirección *y*) empezará a disminuir significativamente.

En relación al grosor del cuerpo, las mejores resoluciones de este parámetro se presentan cuando vale 1 o 3 unidades de longitud. Para grosores mayores la resolución decae drásticamente. Esta característica del grosor se manifiesta a menudo en inversiones 2D o 3D de datos reales o sintéticos en donde se aplican condiciones de suavidad en el proceso numérico de inversión. En ellas, la resistividad invertida del cuerpo anómalo se encuentra difuminada, es decir, la resistividad cambia en forma gradual hacia la resistividad del medio subyacente. Esto es una respuesta a la generalmente baja resolución del grosor del cuerpo anómalo.

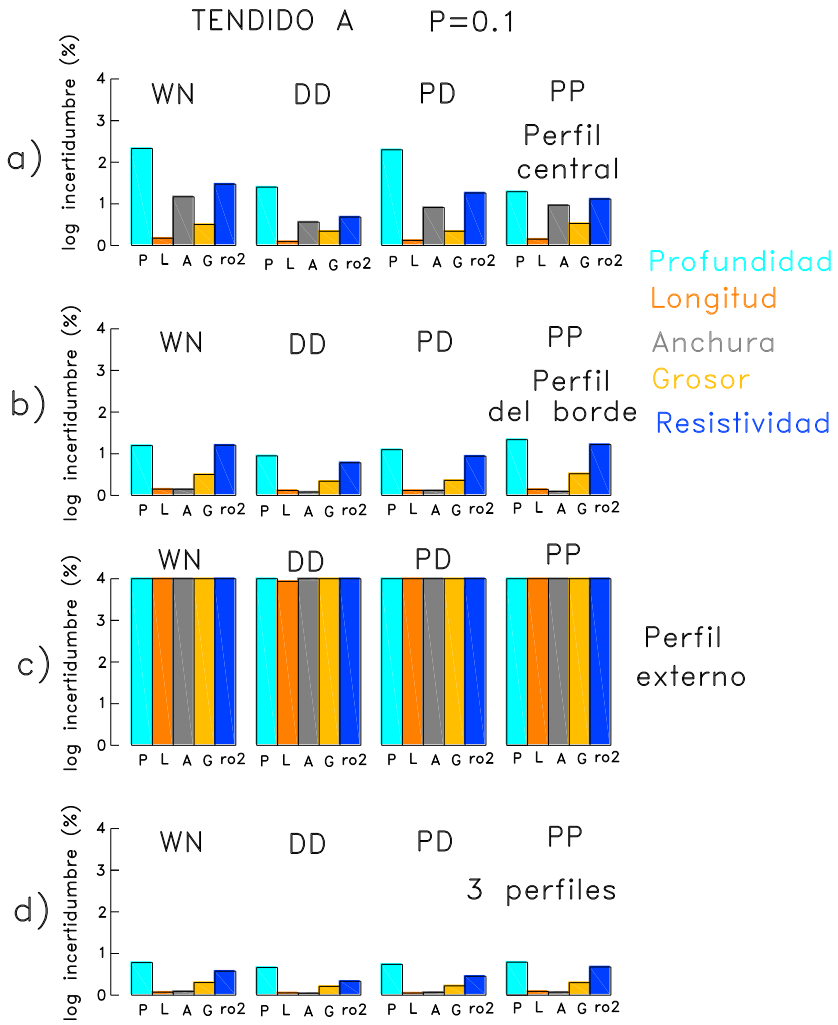

Figura 20. Comparación de las incertidumbres de los parámetros del cuerpo para los cuatro cubrimientos de datos. a) perfil central, b) perfil del borde, c) perfil externo, d) los tres perfiles. Las incertidumbres en porciento se expresan como su logaritmo.

Como era esperado, la resolución de la resistividad del cuerpo aumenta conforme el contraste de resistividad se incrementa. Sin embargo, esta relación entre resolución y contraste de resistividad no es lineal. Ward (1967) demostró que para contrastes muy altos el campo eléctrico secundario tiende a un límite, por lo que la resolución también debe de tender a un límite. Así mismo, la resolución de un cuerpo conductor con una relación ρ_2/ρ_1 dada es mayor que la resolución de un cuerpo resistivo con la misma relación, pero recíproca, es decir, ρ_1/ρ_2 .

Para finalizar, se hace una evaluación del comportamiento general, tanto de los cuatro arreglos como de los cinco parámetros. Con este fin definimos un índice de calidad definido por

$$c_{ij=}\sum_{k=1}^{20} log\left(\Delta p_{ijk}\right), \tag{41}$$

donde Δp_{ijk} es la incertidumbre porcentual del parámetro, el índice $i = 1, \cdots, 5$ corresponde a los parámetros, el índice $j = 1, \cdots, 4$ se refiere a los arreglos y el índice $k = 1, \cdots, 20$ corresponde a los modelos. Se usan los logaritmos para manejar las grandes incertidumbres de los parámetros de mala resolución. De esta forma se construye una matriz de cinco renglones (los parámetros) y cuatro columnas (los arreglos). Como segundo paso, cada elemento de esta matriz se normaliza en dos opciones (c'_{ij} y c''_{ij}), entre el mínimo valor de su respectivo renglón o entre el mínimo valor de su columna, respectivamente. La primera opción es para evaluar la eficiencia de los arreglos electródicos; la segunda para comparar las resoluciones de los parámetros. Por ejemplo, supongamos que quisiéramos evaluar cuál de los cuatro arreglos resultó mejor para estimar la profundidad a la cima del cuerpo. Digamos que los cuatro arreglos WN, DD, PD y PP tienen los índices j=1,…,4, respectivamente, que el primer renglón es el de la profundidad y que el arreglo DD es el que dio el menor valor para este renglón, es decir, $c_{1\,2}$ es el mínimo. Los elementos normalizados del primer renglón son, entonces $c'_{1j} = c_{1j}/c_{1\,2}$. En forma parecida se prosigue con los demás renglones de la primera matriz y con las columnas de la segunda matriz. Como último paso obtenemos el valor inverso de cada elemento de las dos nuevas matrices y lo multiplicamos por 10. Esta última operación tiene el objeto de tener una calificación en la escala del 0 al 10.

La figura 21 muestra las calificaciones correspondientes a los arreglos electródicos. Por su parte, la figura 21a muestra cinco grupos de barras, (uno para cada parámetro) con cuatro barras cada uno, (una para cada arreglo). El primer grupo es el resultado gráfico del ejemplo explicado en el párrafo anterior, donde el arreglo dipolo-dipolo tiene una calificación de 10, pues fue el que dio la incertidumbre global más baja para la profundidad a la cima del cuerpo. Cabe hacer notar que no se deben hacer comparaciones entre los cinco grupos de la figura 21a, ya que los valores de normalización son diferentes en cada grupo. El arreglo dipolo-dipolo es el mejor para la profundidad, pero el polo-dipolo es el mejor en los otros cuatro parámetros. En contraste, el arreglo Wenner es el de menor calificaciones en los cinco parámetros. La figura 21b muestra el promedio de las cinco calificaciones, en forma análoga a como un estudiante promedia las calificaciones de diferentes materias que cursó. El resultado más importante de esta

evaluación global es que el mejor arreglo resultó ser el polo-dipolo, ocupando los lugares segundo, tercero y último los arreglos dipolo-dipolo, polo-polo y Wenner, respectivamente. Resulta curioso que este orden de calidad decreciente PD, DD, PP y WN sigue la misma secuencia del número de resistividades aparentes: PD (135), DD (95), PP (91) y WN (26). Esto sugiere que el factor más importante de la eficiencia de un arreglo electródico en un levantamiento tomográfico no es la profundidad de investigación de los arreglos o su sensibilidad al ruido, sino el número de resistividades aparentes que se puedan medir. PD y PP a lo mejor con sistema comercial puede ser difícil mandar lejos uno o dos de los electrodos porque en estos sistemas la separación entre electrodos es uniforme.

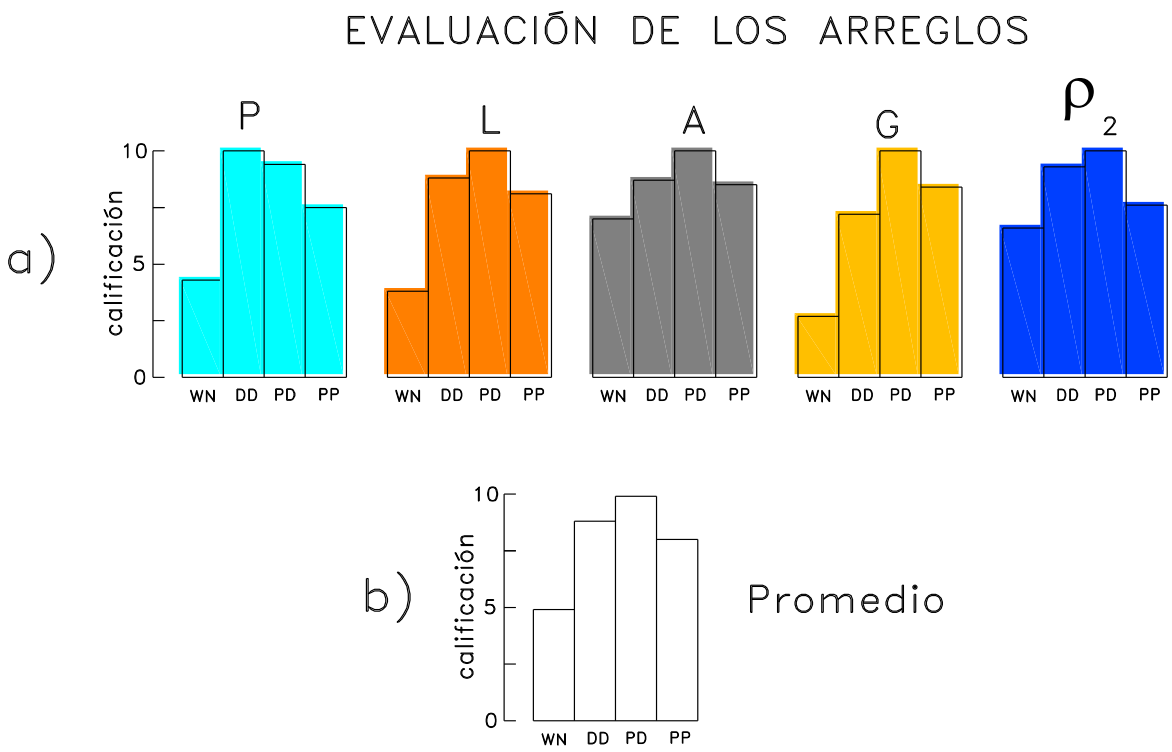

Figura 21. Calificaciones globales para los arreglos, a) Calificación de cada arreglo (WN=Wenner, DD=dipolo-dipolo, PD=polo-dipolo y PP=polo-polo) para cada uno de los cinco parámetros (profundidad a la cima=P, longitud=L, anchura=A, grosor=G, resistividad del cuerpo=ρ_2), b) Promedios de las cinco calificaciones para cada arreglo.

La figura 22 es similar a la figura 21, pero ahora sirve para evaluar globalmente los cinco parámetros con el sistema de calificación descrito arriba. Los cuatro grupos de barras de la figura 22a son muy parecidos, indicando que el parámetro mejor resuelto en todos los arreglos es la profundidad a la cima (P), seguida por su longitud (L). El promedio de las cuatro calificaciones (figura 22b) también es similar a las anteriores. Son notables las calificaciones tan bajas de la anchura, el grosor y la resistividad del cuerpo respecto a la

profundidad, sugiriendo que en interpretaciones de datos reales es aconsejable no darle mucha confianza a la estimación de estos tres parámetros.

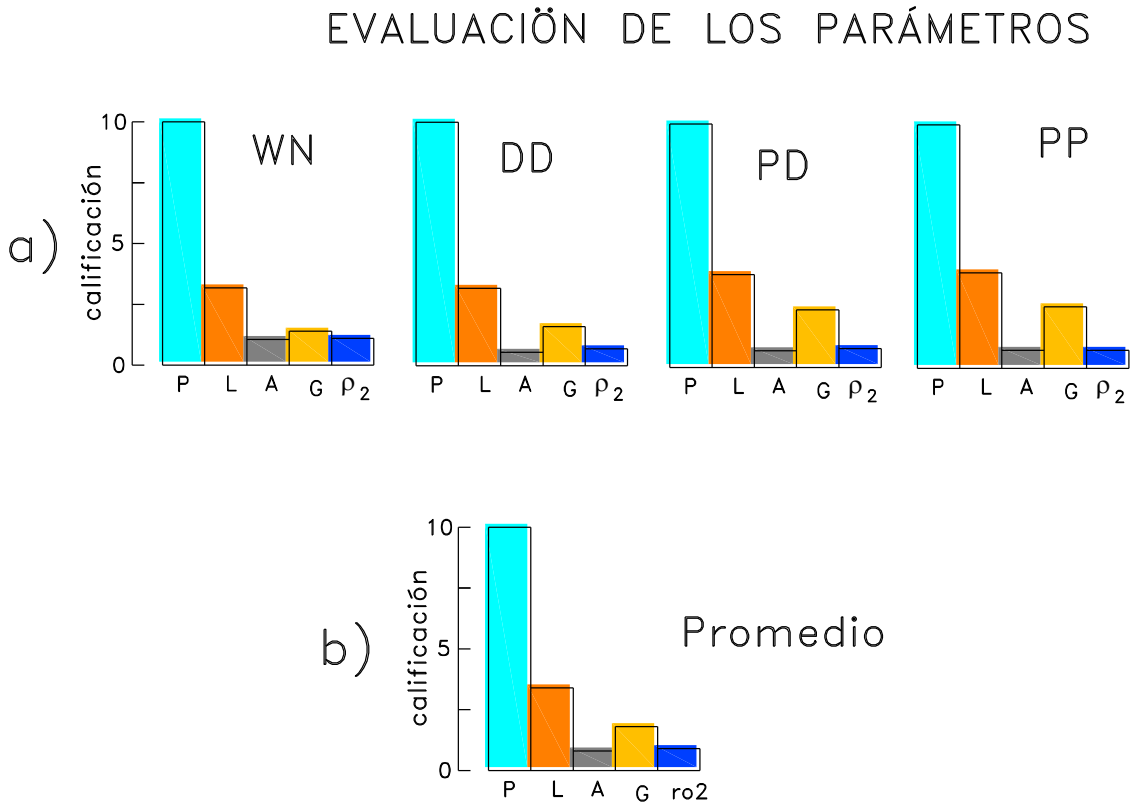

Figura 22. Calificaciones globales para los parámetros, a) Calificación de cada parámetro (profundidad a la cima=P, longitud=L, anchura=A, grosor=G, resistividad del cuerpo=ρ_2) obtenida en cada arreglo electródico (WN=Wenner, DD=dipolo-dipolo, PD=polo-dipolo y PP=polo-polo), b) Promedios de las cuatro calificaciones para cada parámetro.

Capítulo 4. Conclusiones

Varios de los factores que definen la eficiencia de los arreglos electródicos, en un levantamiento tomográfico, fueron incluidos en el análisis de esta tesis. Entre ellos están: a) la sensibilidad inherente de cada arreglo para detectar cambios de la resistividad en el subsuelo, b) el efecto que tienen la cantidad de datos y la cobertura de las mediciones superficiales en la resolución de los parámetros de un cuerpo anómalo simple, c) el efecto que tiene el ruido, considerado aquí como una ley de potencia, en las incertidumbres de los parámetros del modelo. Hay dos factores que no fueron considerados; los efectos de una topografía irregular del terreno y el acoplamiento electromagnético que puede presentarse en aperturas electródicas grandes.

- El máximo de la sensibilidad de la profundidad se alcanzó en profundidades entre 0.3 y 0.5 unidades de longitud. Este resultado le puede ser útil a quien esté buscando qué separación entre electrodos utilizar, cuando ya se tenga una idea de la profundidad a la cima del cuerpo anómalo.
- Con el análisis de las sensibilidades a la anchura del cuerpo se estima que el diámetro de la huella del arreglo tomográfico de 14 electrodos es de 5 a 9 unidades de longitud.
- Las sensibilidades al grosor del cuerpo son máximas en los grosores de 1 a 3 unidades de longitud. Ellas decrecen notablemente cuando el grosor es mayor de 3 unidades.
- En relación a la resistividad del cuerpo, la sensibilidad de un cuerpo conductor con un contraste de resistividades ρ_2/ρ_1 dado es mayor que un cuerpo resistivo con el contraste inverso, es decir, ρ_1/ρ_2. Entonces, el método de resistividad es más sensible a cuerpos conductores que a resistivos.
- En relación al cubrimiento espacial con perfiles, en general, las mejores resoluciones se obtuvieron con el perfil central, seguido por el perfil del borde y el perfil externo. Este resultado era esperado. Así mismo, mejores resoluciones fueron obtenidos cuando los datos de los tres perfiles fueron considerados.
- En la evaluación global de las incertidumbres considerando los 20 modelos con el tendido A, el orden jerárquico de los arreglos, en orden decreciente de calidad fue: polo-dipolo, dipolo-dipolo, polo-dipolo y Wenner. Las calificaciones promedio obtenidas para estos cuatro arreglos (en escala del cero al diez) fue: 9.9, 8.8, 8.0 y 4.9. Para determinar la razón por la cual el arreglo Wenner resultó con esta calificación tan baja, se examinó la resolución con el tendido B que, a diferencia del A, considera el mismo número de resistividades aparentes en los cuatro arreglos. En el tendido B el arreglo Wenner ocupó el segundo lugar, muy cerca del arreglo polo-polo. Esto significa que la baja calificación Wenner no se debe a que la eficiencia intrínseca de este arreglo sea baja, sino a

que en el tendido A solo se pueden hacer 26 mediciones de resistividad aparente, mientras que con los arreglos DD, PD y PP se hicieron 95, 125 y 91, respectivamente. Esto sugiere que el número de mediciones es el factor más importante en la eficiencia de un arreglo.

- En cuanto a los parámetros, las calificaciones promedio de las resoluciones de los cinco parámetros del modelo fueron; 10, 3.4, 1.8, 0.9 y 0.8 para la profundidad a la cima, la longitud, la anchura, el grosor y la resistividad del cuerpo, respectivamente. La profundidad a la cima es la de mejor calificación, muy por arriba de los otros cuatro parámetros. Es de llamar la atención las calificaciones tan bajas obtenidas por la anchura, el grosor y la resistividad del cuerpo. Estos son limitaciones de las que cualquier intérprete de tomografías eléctricas debería estar consciente.

Literatura citada

Apparao A., G. R. (1992). Depth of detection of buried conductive targets with different electrode arrays in resistivity prospecting. *Geophys. Prosp. 40*, 749-760.

Apparao A., S. S. (1997). Depth of detection of buried resistive targets with some electrode arrays in resistivity prospecting. *Geophys. Prosp., 45*, 365-375.

Beard L. P., T. A. (1995). Investigating the resolution of IP arrays using inverse theory. *Geophysics 60*, 1326-1341.

Betancourt Álvarez, M. (2016). Caracterización con tomografía de resistividad eléctrica (ert) en la delegación Iztacalco para la detección de estructuras superficiales. *Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.*, 88 pp.

Brass G., F. H. (1981). Resistivity profiling with different electrode arrays over a graphite deposit. *Geophys. Prosp., 29*, 589-600.

Coggon, J. H. (1973). A comparison of IP electrode arrays. *Geophysics 38*, 737-761.

Dahlin, T. Z. (2004). A numerical comparison of 2D resistivity imaging with 10 electrode arrays. *Geophys. Prosp., 52*, 379-398.

Dey, A. M. (1975). Electric field response of two-dimensional inhomogeneities to unipolar and bipolar electrode configurations. *Geophysics, 40*, 630-640.

Edwards, L. (1977). A modified pseudosection for resistivity and induced-polarization. *Geophysics, 42*, 1020-1036.

Eskola, L. (1992). *Geophysical interpretation using integral equations.* Chapman and Hall.

Gharibi, M. B. (2005). Resolution of 3-D electrical resistivity images from inversions of 2-D orthogonal lines. *Environmental and Engineering Geophysics 10(4)*, 339-349.

Loke, M. H. (2004). *Tutorial: 2-D and 3-D Electrical Imaging Surveys.*

Loke, M. H. (2011). *Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys.* Malasia: Geotomo Software.

Lowrie, W. (2007). *Fundamentals of Geophysics.* New York: Cambridge University Press.

Militzer, H. R. (1979). Theoretical and experimental investigations for cavity research with geoelectrical resistivity methods. *Geophys. Prosp, 27*, 640-652.

Noel, M., & Xu, B. (1991). Archeological investigation by electrical resistivity tomography: a preliminare estudy. *Geophysical Journal International*, 95-102.

Oldenburg, D. L. (1999). Estimating depth of investigation in dc resistivity and IP surveys. *Geophysics, 64*, 403-416.

Pridmore, D. F. (1981). An investigation of finite-element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions. *Geophysics, 46*, 1009-1024.

Raiche, A. P. (1974). An Integral Equation Approach to Three-Dimensional Modelling. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 36*, 363-376.

Raiche, A., Jupp, D. L., Rutter, H., & Vozoff, K. (1985). The joint use of coincident loop transient electromagnetic and Schlumberger sounding to resolve layered structures. *Geophysics*, 1618-1627.

Roy, A. A. (1971). Depth Of Investigation In Direct Current Methods. *Geophysics, 36(5)*, 943-959.

Samouëlian, A. C. (2005). Electrical resistivity survey in soil science: A review. *Soil and Tillage Research. 83.*, 173-193.

Schulz, R. (1985). The method of integral equation in the direct current resistivity method and its accuracy. *J. Geophys., 56*, 192-200.

Seidel K., L. G. (2007). Direct Current Resistivity Methods. En K. K.-J. Voig, *Environmental Geology* (págs. 205-237). Springer.

Snyder, D. D. (1976). A method for modeling the resistivity and IP response of two-dimensional bodies. *Geophysics, 41*, 997-1015.

Spiegel, R. S. (1980). Modeling resistivity anomalies from localized voids under irregular terrain. *Geophysics, 45*, 1164-1183.

Stummer, P., Maurer, H., & G., G. A. (2004). Experimental design: Electrical resistivity data sets that provide optimum subsurface information. *Geophysics*, 120-139.

Szalai, S. S. (2008). On the classification of surface geoelectric arrays. *Geophysical Prospecting*, 159 - 175.

Van Nostrand, R. (1953). Limitations on resistivity methods as inferred from the buried sphere problem. *Geophysics, 18*, 423-433.

Ward, S. (1967). Electromagnetic theory for geophysical applications, in Hansen, D.A. *Mining Geophysics*, 10-198.

Ward, S. (1990). Resistivity and Induced Polarization methods, in Ward, S.H. (ed.), Geotechnical and Environmental Geophysics. *Soc. of Explor. Geophysicists*, 147-189.

Wikilson, P. B., Loke, M. H., Meldrum, P. I., Chambers, J. E., Kuras, O., & Gunn, D. A. (2012). Practical aspects of applied optimized survey design for electrical resistivity tomography. *Geophysical Journal International*, 428-440.

Xu, S.-Z. G.-K. (1988). n integral formulation for three-dimensional terrain modeling for resistivity surveys. *Geophysics. 53.*, 546-552.

Zhou, B. D. (2003). Properties and effects of measurement errors on 2D resistivity imaging surveying. *Near Surface Geophysics*, 105-117.

Anexo A: Derivadas direccionales

Las derivadas de $\mathrm{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$,siendo $\mathbf{r}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$, $\mathbf{r}'(\mathrm{x}',\mathrm{y}',\mathrm{z}')$ y $\mathbf{r}'(\mathrm{x}',\mathrm{y}',-\mathrm{z}')$, son:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial x}=-\frac{(x-x')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\frac{(x-x')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial G_1}{\partial y}+\frac{\partial G_2}{\partial y}=-\frac{(y-y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\frac{(y-y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3},$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{\partial G_1}{\partial z}+\frac{\partial G_2}{\partial z}=-\frac{(z-z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\frac{(z+z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^3}.$$

Estas sustituciones son requeridas en todas las expresiones que contengan la derivada direccional $\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\mathrm{G}$.

Anexo B: Código para errores en Matriz Jacobiana

```
%Bing Zhou (2003), Properties and effects of measurement errors on 2D
resistivity imaging surveying, Near Surface Geophysics, 1, 105-117.

%gráficas fig. 3 y 4 de función de progresión e=(beta/potencial) ^(alfa).

i=1;

  uu=1:1:1000; %Valores del Potencial

  %Cálculo aproximado de las gráficas de artículo con alfas y betas

 %descritas en él.

 for u=1:1:1000

b1(1,i)=(13.18./u).^(0.74); b2(1,i)=(2.42./u).^(0.65);

b3(1,i)=(2.89./u).^(0.5); b4(1,i)=(10.96./u).^(0.53);

b5(1,i)=(0.37./u).^(0.37); b6(1,i)=(3.16./u).^(0.27);

b7(1,i)=(74.12./u).^(0.17); b8(1,i)=(251./u).^(1.1);

b9(1,i)=(43.65./u).^(0.63); b10(1,i)=(61.05./u).^(0.95);

i=1+i;

end

 %Cálculo del mínimo cuadrado estándar (mce)

 y=log(horzcat(b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9));%Errores en porcentaje de gráficas

b_mce=log(horzcat(uu,uu,uu,uu,uu,uu,uu,uu,uu)); %Voltajes

aa=ones(length(b_mce),1); %Matriz unitaria del tamaño del vector de voltaje
para cálculo de mce

A=[aa,b_mce']; %Matriz A para el cálculo de mce

mce=inv(A'*A)*A'*y';%Fórmula para calcular mce
```

Anexo C: Sensibilidades perfil central. Tendido B

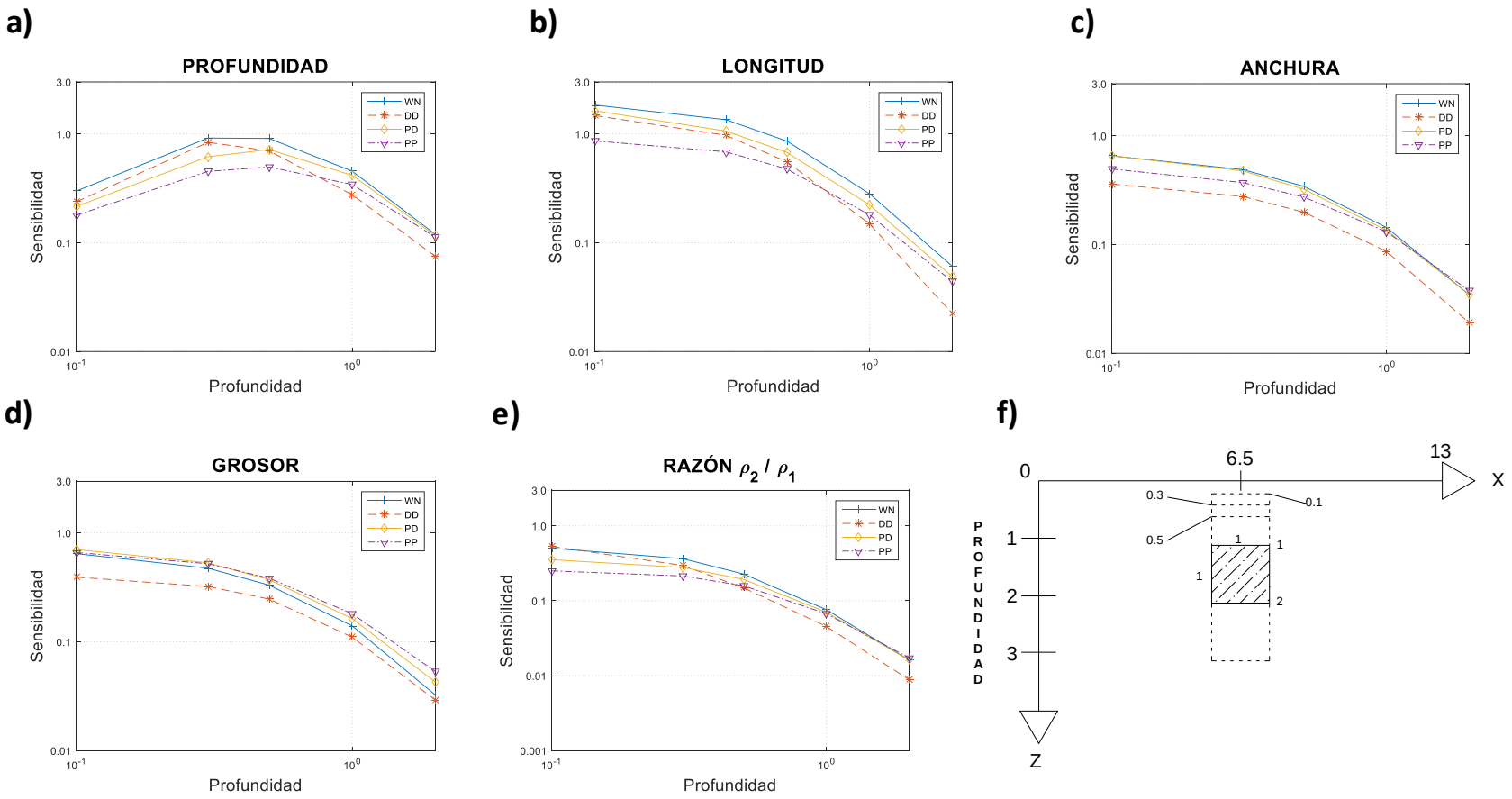

Figura 23. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la profundidad a la cima del cuerpo (P). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Profundidades de variación del modelo base.

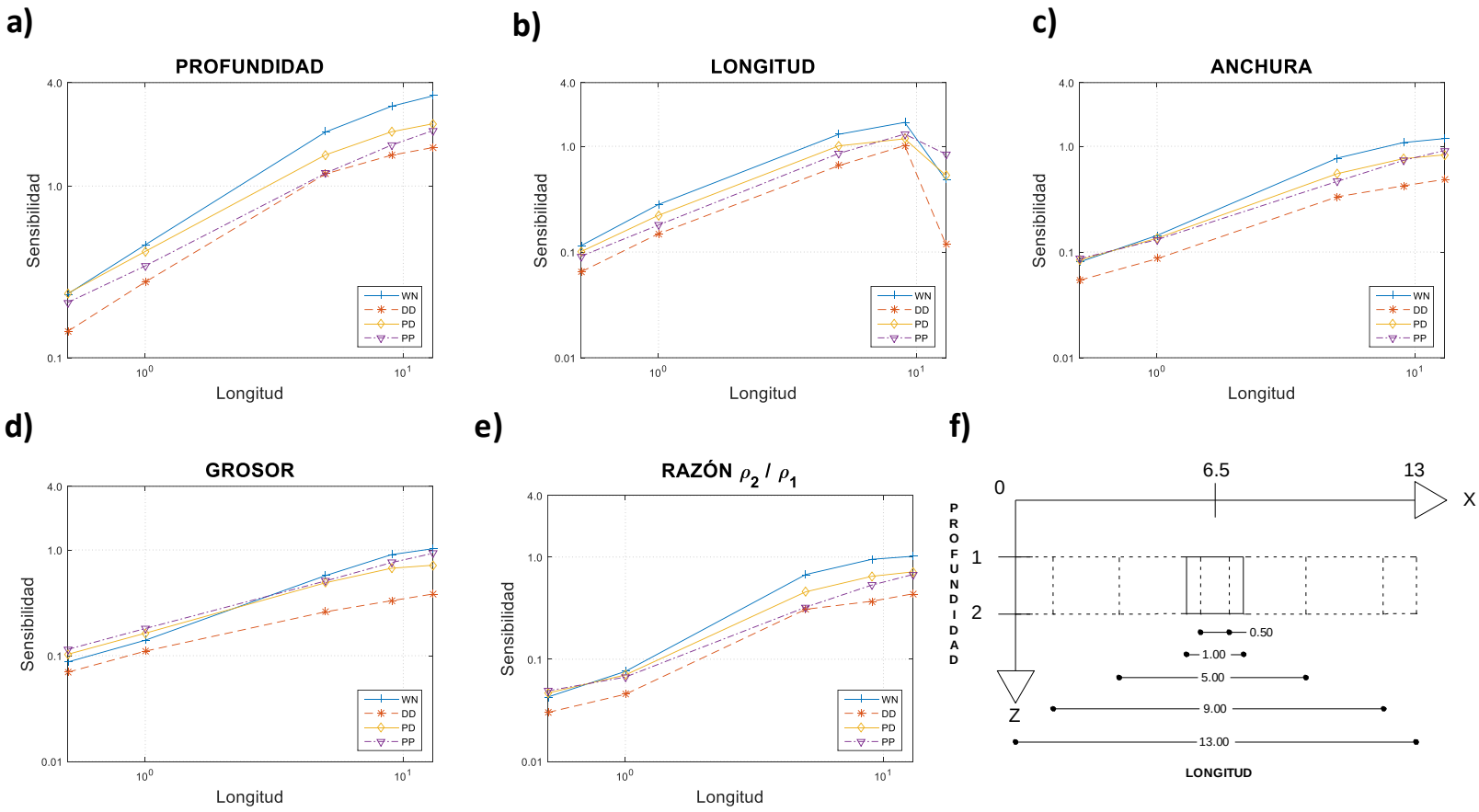

Figura 24. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la longitud del cuerpo (L). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Longitudes de variación en la dirección del eje x del modelo base.

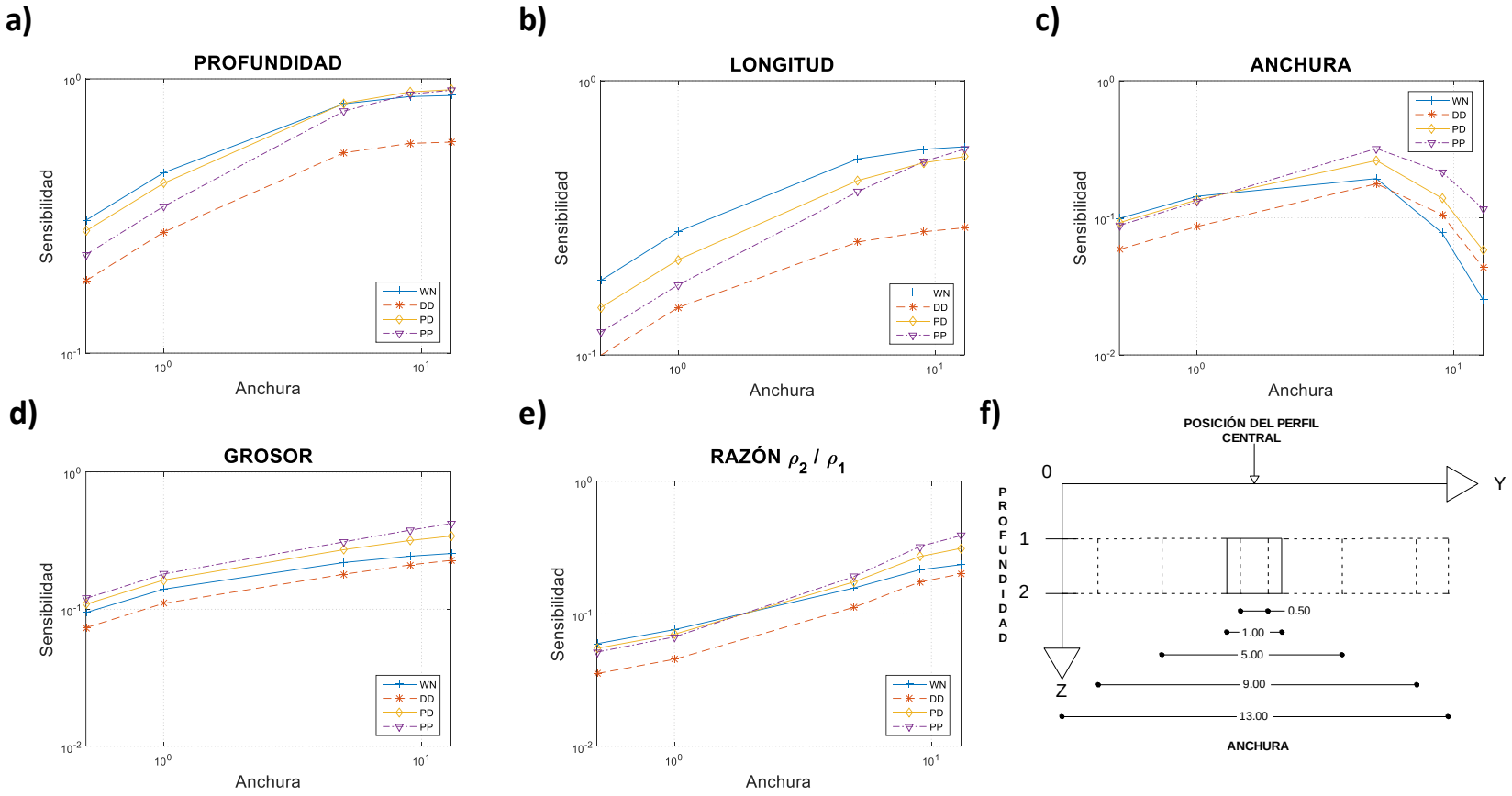

Figura 25. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la anchura del cuerpo (A). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Anchuras de variación del modelo base en eje y.

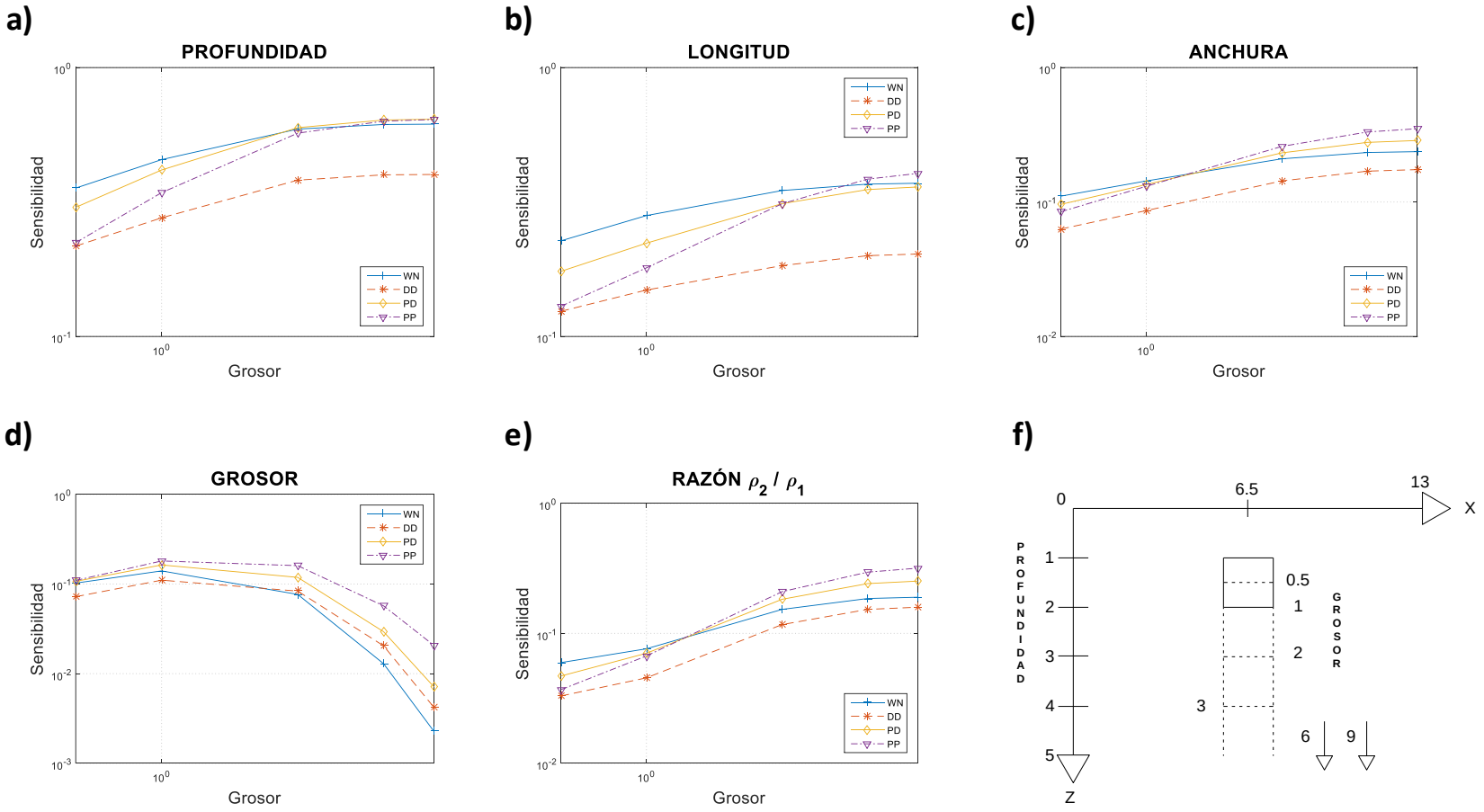

Figura 26. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía el grosor del cuerpo (G). a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base. f) Grosores de variación del modelo base.

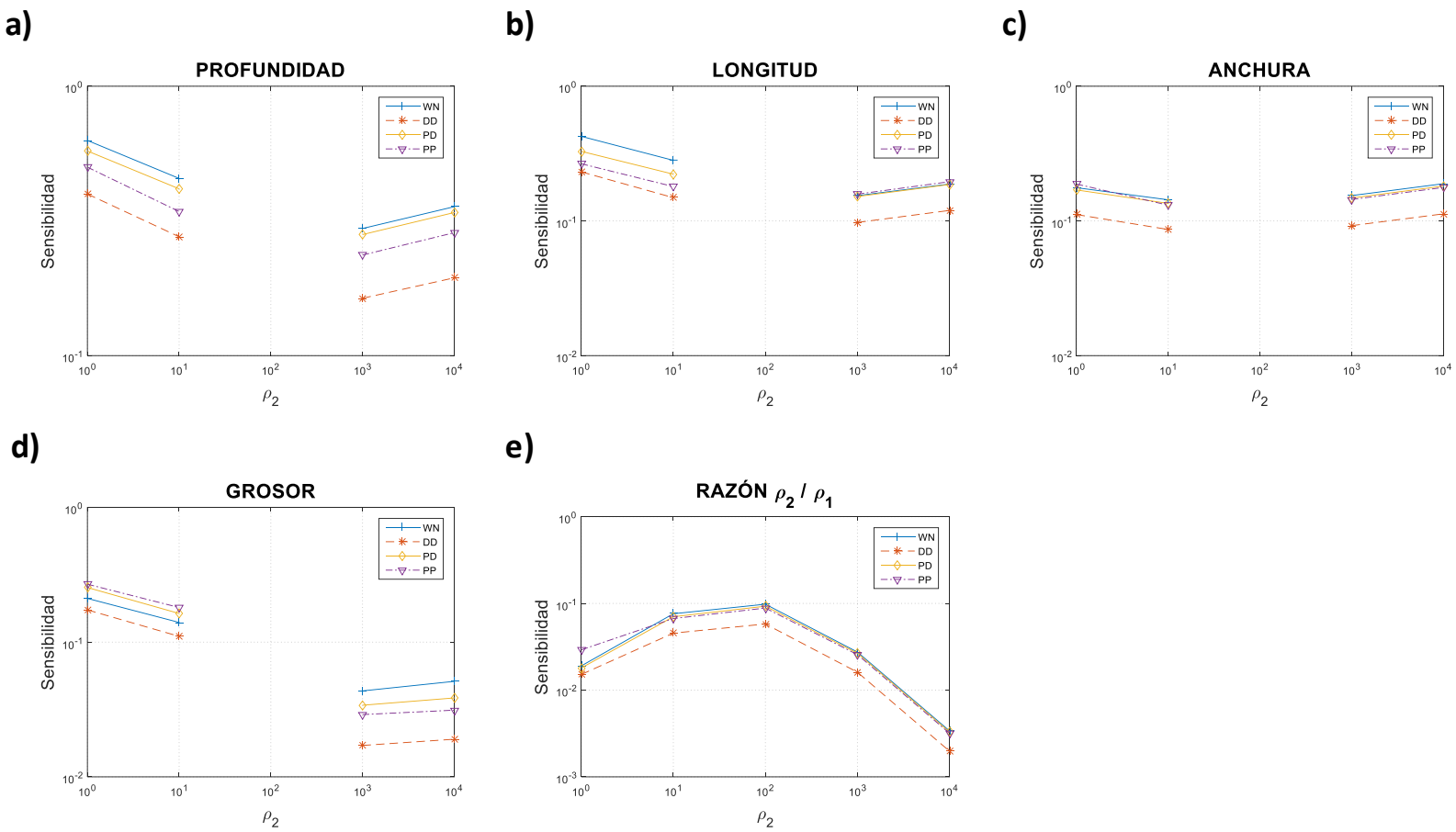

Figura 27. Sensibilidades para el perfil central del tendido B cuando se varía la resistividad del cuerpo (ρ_2) en 1, 10, 100, 1,000 y 10,000. a)-e) Sensibilidades de los cuatro arreglos para los cinco parámetros del modelo base.